



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

PARTÍCULA LIBRE SOBRE UNA ESFERA CON DINÁMICA
NO-CONMUTATIVA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
VÍCTOR HUGO FLORES SOTO

TUTOR PRINCIPAL

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER, INSTITUTO DE CIENCIAS
NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH, INSTITUTO DE CIENCIAS
NUCLEARES, UNAM

MÉXICO, D. F. JULIO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.- Datos del alumno

Flores Soto Víctor Hugo

victor.flores@nucleares.unam.mx

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Posgrado en Ciencias Físicas (PCF)

Instituto de Ciencias Nucleares (ICN)

406067007

2.- Datos del tutor principal

Dr. José David Vergara Oliver

ICN-UNAM

vergara@nucleares.unam.mx

3.- Datos del comite tutorial

Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar

FC-UNAM

leopjaidar@gmail.com

Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich

ICN-UNAM

hirsch@nucleares.unam.mx

4.- Datos del sinodal 1

Dr. Robert Oeckl

CCM-UNAM

robert@matmor.unam.mx

5.- Datos del sinodal 2

Dra. Myriam Mondragón Ceballos

IF-UNAM

myriam@fisica.unam.mx

6.- Datos del sinodal 3

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

UAM UNIDAD IZTAPALAPA

mmaceda@icloud.com

7.- Datos del sinodal 4

Dr. Juan Manuel Romero Sanpedro

UAM UNIDAD CUAJIMALPA

juan.m.romero.sanpedro@gmail.com

8.- Datos del trabajo escrito

Partícula libre sobre una esfera con dinámica no-conmutativa

81 p.

2015

No te salves

*No te quedas inmóvil
al borde del camino
no congeles el júbilo
no quieras con desgana
no te salves ahora
ni nunca*

*no te salves
no te llenes de calma
no reserves del mundo
sólo un rincón tranquilo
no dejes caer los párpados
pesados como juicios
no te quedas sin labios
no te duermas sin sueño
no te pienses sin sangre
no te juzgues sin tiempo*

pero si

*pese a todo
no puedes evitarlo
y congelas el júbilo
y quieres con desgana
y te salvas ahora
y te llenas de calma
y reservas del mundo
sólo un rincón tranquilo
y dejas caer los párpados
pesados como juicios
y te secas sin labios
y te duermes sin sueño
y te piensas sin sangre
y te juzgas sin tiempo
y te quedas inmóvil
al borde del camino
y te salvas*

*entonces
no te quedas conmigo.*

Mario Benedetti

A mis amigos.
Por su invaluable aprecio y cariño.

A Eduardo N, mi ejemplo a seguir y siempre dispuesto a ayudarme. A Hugo G, un gran compañero en la física y un gran amigo fuera de ella. A Alexis B, un amigo en todo momento y distancia, un amigo desde la prepa y para toda la vida. A Pedro M, por esas tardes de buffet filosofando sobre la vida. A Erandy S, por esas excursiones al café y conversaciones de cultura. A Karla V, por esos viajes al cine y esos largos paseos. A mis hermanos Norma y Jorge, quienes siempre me recuerdan que una vez fui niño.

Porque de los recuerdos que tengo donde no estoy estudiando están ellos, para ellos es esta tesis.

Resumen

Se describe brevemente en que consiste el método de cuantización de Dirac para sistemas con constricciones. Se aplica al caso de una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera. Se hace un mapeo de las coordenadas cartesianas a unas coordenadas por superficie de revolución y otro por coordenadas esféricas para poder cuantizarse. Se agrega una no-conmutatividad a la estructura de Poisson procurando satisfacer la identidad de Jacobi y que se reduzca a la canónica cuándo los parámetros que generan la no-conmutatividad se hacen cero, y posteriormente se construyen los paréntesis de Dirac del álgebra modificada. Se estudia la dinámica del sistema que obedece a esta no-conmutatividad obteniendo las nuevas trayectorias sobre la esfera. Finalmente se encuentra un mapeo que trivializa este nuevo sistema y se procede a su cuantización y su estudio a nivel cuántico.

Abstract

The Dirac quantization method is described briefly for system with constrictions. It is applied to free particle constrained to move over a sphere. A mapping from cartesian coordinates to revolution surface coordinates, and another for spherical coordinates are done for achieving the quantization. A non-commutative to the Poisson structure is added, it have to satisfy the Jacobi's identity and as limite case this extention converges to canonical quantization when the parameters in the non-commutative algebra are taken zero. After that the Dirac parenthesis of the modified algebra are constructed. The new trajectories of dynamical system on the sphere that obey the new algebra are obtained. Finally a mapping is found where the system is trivial, there the system can be quantized and studied at quantum level.

Agradecimientos

Hago un agradecimiento honorífico a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de estudiar la Maestría en Ciencias (Físicas). Por la diversidad de materias, maestros y tutores que me ofreció para mi formación. Gracias por no haberme cerrado las puertas y ofrecerme todas las facilidades necesarias para concluir esta meta. En ella, además de una fuente inagotable de sabiduría también encontré muchos amigos que me ayudaron a ampliar mis conocimientos.

Quiero agradecer a mi madre Cecilia Soto, por su apoyo incondicional en cada una de mis metas y dejar que siempre fuera yo mismo el que labrara mi propio destino. Por su paciencia en enseñarme lo que no se aprende en ninguna escuela ni en ningún libro y por darme todo ese apoyo que nadie más otorga a fin de alcanzar mis sueños, aquellos que me han llevado a lograr este presente.

Quiero agradecer al Dr. Vergara, por su valiosísima orientación como tutor y colaborador en este trabajo. Por esas discusiones y críticas constructivas que me han llevado a madurar profesionalmente. Y también le agradezco profundamente que me haya enseñado el camino de la disciplina y trabajo constante, indispensables para ser mejor. Agradezco infinitamente a los Drs. Leonardo Patiño y Jorge Hirsch por no dejar de lado nunca mi formación. Hago un agradecimiento a los sinodales quienes después de darme sus opiniones y correcciones han aprobado este trabajo.

También quiero agradecer ampliamente a todos mis familiares y amigos que no puedo mencionar uno a uno y que me motivaron de una u otra manera para no desistir a lo largo de mi estancia en la maestría y concretar con ánimo este trabajo. Porque cada vez que hablaba con cada uno de ellos al final me sentía inspirado a continuar convencido siempre de que, lo que elegí, es lo correcto.

Agradezco el apoyo financiero por parte de CONACyT mediante la beca de maestría otorgada de Febrero del 2013 a Enero del 2015 y, la beca de titulación para maestría por parte de DGAPA-UNAM (proyecto PAPIIT IN109013).

Índice general

0. Introducción	1
0.1. De la Clásica a la Cuántica y de Regreso	1
0.2. La Importancia de la Estructura en una Teoría Clásica	3
0.3. Buscando Ampliar las Fronteras	4
1. Método de Dirac	7
1.1. La Acción de un Sistema Físico	7
1.2. Sistemas Regulares	8
1.3. Sistemas Singulares	11
2. Generalizaciones de la Cuantización Canónica	19
2.1. Aparición de la No-Conmutatividad	19
2.2. Cuantización Por Deformación	26
2.3. Cuantización BCH	29
3. Partícula Libre Sobre una Esfera	37
3.1. Sistema con Constricciones	37
3.2. Paréntesis de Dirac Asociados	38
3.3. Mapeo por Coordenadas Esféricas	39
3.4. Mapeo por Coordenadas Cilíndricas	42
4. Partícula Libre en Variables No-Conmutativas	47
4.1. Estructura Simpléctica Deformada	47
4.2. Paréntesis de Dirac	49
4.3. Estructura Simpléctica Particular	51
4.4. Cuantización BCH	54
5. Dinámica No-Conmutativa Sobre la Esfera	65
5.1. Sistema No-Conmutativo	65
5.2. Mapeo por Coordenadas Cilíndricas	68
5.3. No-conmutatividad Sólo en los Momentos	72
6. Conclusiones	79

Capítulo 0

Introducción

A finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, nuestra concepción del universo “convencional” es desafiada por toda una serie de descubrimientos en la física que pusieron en duda la noción de realidad. Se genera un parteaguas en la física definiendo lo que ahora conocemos como física clásica y física moderna (cuántica). Aunque clasificar a la física de esta manera no es porque sólo hablemos de dos teorías, sino de todo un conjunto de teorías. Por ejemplo, en la física clásica incluimos a la mecánica Newtoniana, la termodinámica, la mecánica de fluidos, al electromagnetismo entre otras. En la física moderna, podemos mencionar a la cuántica y la teoría de campos cuánticos entre otras.

Decir que la diferencia entre éstas dos clasificaciones de la física es debido a que la clásica estudia las leyes de movimiento de los cuerpos a los que estamos acostumbrados en la vida cotidiana (como el tiro parabólico o el movimiento de la luna al rededor de la tierra y de la tierra alrededor del sol) y que la cuántica estudia los fenómenos físicos a nivel de los átomos es sólo una manera divulgativa de decir las cosas para darnos a entender con nuestros amigos no apasionados por la física, y no dar importancia a la riqueza matemática en cada una de ellas, así como a su totalmente distinta interpretación.

0.1. De la Clásica a la Cuántica y de Regreso

Mientras que en la física clásica algunas de nuestras herramientas principales son funciones que dependen de las coordenadas y momentos (espacio fase), en la física cuántica son operadores y vectores en un espacio de Hilbert. Asimismo, en las teorías clásicas nos preocupamos por conocer la posición y momento, ya sea de una partícula o de un elemento de volumen y su evolución a través del tiempo, en la cuántica lo más que podemos aspirar es conocer amplitudes de probabilidad y su evolución temporal, las cuales puedan ser comprobadas experimentalmente. Desde luego hay muchas otras diferencias. La principal objeción de diferenciarlas radica, creo yo, en que no podemos

describir a los átomos con la física clásica ni al movimiento de los cuerpos cotidianos con la cuántica.

Una teoría que hasta entre la comunidad de físicos consideramos aparte, es la Relatividad General. Aquella que describe las leyes que gobiernan al Universo como un todo, que generaliza el concepto de gravedad y lo asocia a una curvatura en el espacio-tiempo, siguiendo la idea de que las leyes de la física deben ser las mismas independientemente del observador, un concepto que mucho pone a prueba la cuántica. Diciéndolo así es para encaminarnos directamente a la idea de una teoría global. La teoría de la Relatividad General es escrita en términos de elementos tensoriales, objetos independientes de coordenadas, objetos que no son operadores y que se les considera objetos clásicos. Es decir, la Relatividad General es una teoría de campos clásicos derivable de un principio variacional.

Uno de los dos grandes motivos para separar la Relatividad General de las otras teorías es debido a su elegancia matemática. El otro, a nuestra imposibilidad de encontrar la versión cuántica de dicha teoría. Así como ahora tenemos un claro concepto de lo que significa “un cuanto de luz” (fotón), nos gustaría poder hablar (y describir) de lo que sería un cuanto de gravedad (un gravitón).

La idea que persigue la cuántica es el describir la dinámica de los pilares fundamentales de la física, hasta el momento, a través de campos cuánticos. Al pasar a escalas más pequeñas de las que estamos acostumbrados en el mundo cotidiano ($\gtrsim 10^{-10}$ m) nos damos cuenta que la mecánica clásica ya no describe acertadamente a las partículas y que es necesario hacerlo a través de una teoría diferente, la cuántica. Al pasar a escalas cada vez más pequeñas, vamos encontrando toda una serie de partículas que son difíciles de imaginar pero que siempre están presentes en cada uno de los experimentos en física de partículas.

Hasta ahora las únicas posibles interacciones entre partículas que hemos encontrado son las 4 fuerzas fundamentales: la fuerza de gravedad, la electromagnética, la débil y la fuerte. Se podría pensar que un sistema consistente sólo de unas cuantas partículas fundamentales interaccionando a lo más mediante 4 fuerzas distintas no debería acarrear tantas dificultades y dicha descripción debería estar contenida en una sola teoría. Sin embargo, distamos mucho, no sólo de encontrar una teoría única, sino también de resolver muchas inconsistencias entre las teorías que ya tenemos.

Y es que sólo tenemos un camino que nos ha funcionado exitosamente para describir el comportamiento de la naturaleza a nivel cuántico en muchas de las áreas en física de partículas, y ese es: describir un sistema clásicamente y luego promover sus variables a operadores a fin de obtener la versión cuántica del mismo sistema, esto por alguno de los muchos métodos de cuantización que se han descubierto.

Siguiendo esta idea es como se ha elaborado la versión cuántica de muchos sistemas físicos: El oscilador armónico, una partícula en un campo gravitacional constante, el problema de Coulomb, el campo electromagnético, sólo por mencionar algunos ejemplos. En todos estos casos empezamos por tener la descripción clásica y posteriormente nos imaginamos, por ejemplo, que el oscilador armónico ya no es un resorte anclado de un extremo y con una masa pegada al otro extremo, sino como un sistema lo sufi-

cientemente pequeño en el cuál ahora las soluciones armónicas nos darán la amplitud de probabilidad de encontrar a la partícula en cierto punto, o de medir su amplitud de momento según sea el caso, y siempre como principal objetivo el obtener su espectro de energías, esa cantidad que nos da una idea de que tan pequeño es lo pequeño, y que su forma característica de encontrarla en paquetes de tamaño fijo da nombre a la teoría, “cuantos”.

Dado este paso de cuantización de teorías clásicas, es por lo que siempre que queremos hablar de una teoría cuántica nos detenemos a mirar primero la teoría clásica y a ese cambio matemático que nos disponemos a hacer.

0.2. La Importancia de la Estructura en una Teoría Clásica

Cualquier físico al escuchar “teoría cuántica” inmediatamente piensa, en operadores, espacios de Hilbert, espectros de energía, amplitudes de dispersión, etc. En resumen, el físico piensa en toda una tecnología matemática implementada a los sistemas físicos que se estudian de manera cuántica, y le pegamos el concepto de que es una teoría que “mejora” a la física clásica. Es por ello que tenemos muy arraigada la idea de promover modelos clásicos a cuánticos.

Esta promoción de modelos clásicos a cuánticos se ha hecho por muchos métodos, varios de ellos han mostrado ser completamente equivalentes teóricamente y además, cuyos resultados son válidos cuando se comprueban en el experimento. Sólo por mencionar algunos de estos métodos: la cuantización canónica, segunda cuantización, método de Dirac, cuantización por integral de camino, cuantización por deformación, etc, etc. Las coincidencias operacionales importantes de estos métodos son: la promoción de variables clásicas a operadores y el cambio del paréntesis de Poisson por conmutadores.

La mecánica clásica ha sido escrita elegantemente en lo que ahora llamamos *formulación Hamiltoniana*. Las funciones que se usan tienen su dominio en el espacio fase (espacio de coordenadas y momentos) y el tiempo, en especial la función Hamiltoniana. La teoría es derivable de un principio variacional, las ecuaciones diferenciales son de primer orden y, para conocer la evolución temporal de una función sólo hace falta operar dicha función con el Hamiltoniano en el paréntesis de Poisson. Por ello el paréntesis de Poisson tomó un papel muy importante, ya que conocer su forma de operar clásicamente lleva a proponer relaciones de conmutación del lado de la cuántica.

En la construcción de la mecánica cuántica los físicos se dieron cuenta que obtenían una teoría totalmente consistente y que concordaba con los experimentos si promovían las coordenadas del espacio fase a operadores y se sustituía el paréntesis de Poisson de dos variables por un conmutador. De esta manera surgió el método de *cuantización canónica*, en donde para cada una de las relaciones que se tienen en mecánica clásica corresponde una relación en mecánica cuántica.

Desde luego, con esta manera de cuantizar, arribaron muchos problemas técnicos

y uno de ellos fue que no todos los sistemas clásicos llevaban a sistemas cuánticos consistentes. En particular, los sistemas con constricciones podían conducir a relaciones tan absurdas como $0 = 1$. Dirac ideó un método para saltarse este inconveniente, y ese método consistió en proponer una extensión a los paréntesis de Poisson, donde se incluyeran las constricciones del sistema. Desde luego ha habido muchas extensiones a los paréntesis de Poisson a fin de evitar las inconsistencias que se tienen al promoverlos a conmutadores a fin de una teoría cuántica.

El que las coordenadas del espacio fase tengan definido un paréntesis de Poisson o en general alguna de las extensiones propuestas, es lo que conocemos como *estructura simpléctica*. El asociar una estructura simpléctica a un sistema clásico, que cuando promovamos sus variables a operadores nos conduzca a relaciones de conmutación consistentes, es la parte medular de la construcción de una teoría cuántica. Desde luego hay muchas preguntas relacionadas con esta forma de cuantizar, una de ellas es; dado que hay varias posibles extensiones a los paréntesis de Poisson y muchos de estas extensiones son específicas del sistema en cuestión, ¿Cómo sabremos si las distintas teorías formuladas son equivalentes o no? ¿y de no ser equivalentes, cuál es la cuantización correcta?.

La primer pregunta encuentra una respuesta negativa. Existen diferentes cuantizaciones totalmente consistentes entre sí y no equivalentes entre ellas. La respuesta a la segunda pregunta solo la puede dar el experimento, sin embargo, hasta el momento, las teorías que han sido comprobadas en el experimento resultan ser equivalentes.

Entonces, dejamos en claro que el conocimiento de la estructura simpléctica del espacio fase de un sistema clásico es de vital importancia a fin de construir su versión cuántica, ya sea porque la mayoría de métodos de cuantización precisan de una, o porque la mayoría de resultados experimentales son consistentes con alguno de estos métodos.

0.3. Buscando Ampliar las Fronteras

Todos y cada uno de los que trabajamos en las ciencias naturales de manera teórica siempre debemos tener un estatuto en mente insalvable: quien tiene la última palabra no es nuestra teoría sino la naturaleza. Cuando un experimento siempre reproducible nos entrega un resultado desconocido para nuestra teoría, se precisa de un cambio o mejora, si no es que la proposición de una teoría totalmente nueva.

La proposición de diferentes métodos de cuantización no sólo la debemos al hecho de encontrar análogos cuánticos de cada sistema clásico, sino también a la búsqueda de extensiones de las teorías cuánticas que conocemos a fin de cubrir algunos de los resultados que hasta ahora no tienen explicación. Hechos como el que la mecánica cuántica describa la dinámica de sistemas cuyas dimensiones estén entre 10^{-10} y 10^{-15} metros, que no exista un sólo modelo del núcleo o una versión cuántica de la gravedad; nos retan tanto a modificar la manera de cuantizar así como a insistir en crear una

teoría cuántica totalmente nueva.

Dada la no-conmutatividad casi intrínseca que acompaña a los operadores cuánticos, al buscar una extensión a la teoría cuántica pareciera casi natural proponer que la no-conmutación ya viene dada desde la mecánica clásica. Es decir, que ya las coordenadas y momentos obedecían un álgebra no conmutativa en el sentido de la definición de su paréntesis de Poisson o incluso de variables no-conmutativas (matrices por ejemplo), y que la teoría debe ser ajustada cuánticamente a fin de obedecer esta no-conmutatividad intrínseca de la geometría. La otra manera también bastante natural de extensión, es pensar que lo que debemos modificar en nuestra teoría es la forma de operar de los paréntesis de Poisson a un nuevo producto, antes de intentar cambiar la geometría, a esto le conocemos como deformación del producto. Aunque para los casos sencillos esta idea resulta ser la misma y de hecho muchas veces equivalente, la distinción radica en que con la deformación del producto automáticamente estamos proponiendo una versión cuántica de las variables clásicas, mientras que con la primer idea aún tenemos que proceder a cuantizar canónicamente las relaciones entre las variables clásicas.

En esta tesis se sigue la primer idea: se propone una modificación específica a los paréntesis de Poisson en el ámbito de mecánica clásica para una partícula libre y posteriormente se propone la versión cuántica de dicho sistema. Para el caso de una partícula libre en 3 dimensiones se usa el método de cuantización por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Cuando la partícula libre se restringe a moverse sobre una esfera resulta ser un problema mucho más rico de analizar, por lo que se estudia la dinámica clásica de dicho sistema y se propone su versión cuántica siguiendo el método de cuantización de Dirac y una reducción de variables clásicas.

En el Capítulo 1 daremos un breve repaso de lo que consiste el método de cuantización de Dirac para sistemas con constricciones. Iniciaremos describiendo un sistema Lagrangiano y las condiciones que son necesarias para llevarlo al formalismo Hamiltoniano. Posteriormente definiremos la clasificación tradicional que se hace a las constricciones de un sistema y finalmente escribiremos la propuesta de extensión por parte de Dirac a los paréntesis de Poisson, con los que ya se puede hacer una cuantización, en principio correcta.

En el Capítulo 2 daremos una pequeña descripción de lo que consisten algunos métodos para cuantizar que extienden a la cuantización canónica y que aparecen en la literatura. Uno de ellos será la cuantización mediante la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, muy útil para sistemas con geometría no-conmutativa o con coordenadas cíclicas. Los otros métodos que describiremos son: la cuantización mediante el producto de Moyal y su generalización de cuantización a un producto deformado que llamamos estrella el cual cumple con todos los requisitos impuestos por la teoría cuántica; y algunos ejemplos particulares del producto estrella.

En el capítulo 3 resolveremos el problema de una una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera usando el formalismo de Dirac, posteriormente haremos una reducción de las variables a unas efectivas y en estas nuevas variables propondremos la versión cuántica del sistema.

En el Capítulo 4 haremos una modificación bastante general a la estructura simpléctica canónica y la aplicaremos al sistema visto en el Capítulo 3, siguiendo cada uno de sus pasos. Posteriormente propondremos una estructura simpléctica muy particular y consistente, y al final del capítulo con ella estudiaremos lo que sería el producto cuántico de dos funciones dado por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

Finalmente, en el Capítulo 5 estudiaremos la dinámica de la partícula libre restringida a moverse sobre la esfera pero ahora usando la estructura simpléctica no-conmutativa, todo en el marco clásico. Posteriormente haremos una serie de mapeos que llevarán a traducir la estructura simpléctica deformada en una modificación del Hamiltoniano, pero que depende de variables canónicamente conyugadas y con ello propondremos la versión cuántica de dicho sistema.

Capítulo 1

Método de Dirac

En este capítulo se describe brevemente en que consiste el método de cuantización para sistemas que tienen constricciones inventado por Dirac. Se empieza por describir y clasificar los diferentes tipos de constricciones que pueden estar contenidas en un sistema dinámico, posteriormente se introducen los parentésis de Dirac y con ellos se provee una manera para cuantizar. Este capítulo es principalmente extraído de [1], pero también pueden consultarse las referencias [2] y [3].

1.1. La Acción de un Sistema Físico

El punto de partida de nuestro estudio es tratar con sistemas dinámicos en el marco de la mecánica clásica descritos por una:

1.1.1. Acción integral

Sea un sistema con N grados de libertad, y sean q^n con $n \in \{1, \dots, N\}$ las funciones dependientes del tiempo que describen las coordenadas de dicho sistema y \dot{q}^n las velocidades correspondientes; entonces su funcional de acción esta descrita por

$$S[q^n] = \int L(t, q^n, \dot{q}^n) dt \quad (1.1)$$

donde la función L recibe el nombre de Lagrangiano. Cuando se quiere ampliar este concepto a teoría de campos, el tiempo ya no es el único parámetro sino que va aunado a los q^n 's, y el Lagrangiano pasa a ser una densidad Lagrangiana. Entonces, el punto de partida es tener un Lagrangiano que depende de las coordenadas, las velocidades y posiblemente del tiempo. Por facilidad matemática consideraremos que $q^n \in C^2$, es decir pertenece al espacio de funciones cuyas dos primeras derivadas son continuas, y en consecuencia, las velocidades tienen derivadas continuas, en el dominio donde esté definida la acción.

Un sistema físico general puede presentar constricciones en las variaciones de sus coordenadas y velocidades, estas constricciones pueden ser establecidas mediante multiplicadores de Lagrange, sin embargo dado nuestro objetivo, es conveniente manejar dichas restricciones en el formalismo Hamiltoniano el cual veremos abajo. Ejemplos de estas constricciones pueden ser: una partícula restringida a moverse sobre una esfera, o en general sobre una superficie, movimiento de una partícula en la que alguna componente de su velocidad es nula y en general, dichas constricciones que serán consideradas son aquellas que pueden escribirse como una función de las variables dinámicas igual a cero. Esto es

$$\chi_\alpha(q^n, \dot{q}^n) = 0 \quad (1.2)$$

donde α va de 1 hasta k , el número de constricciones. En lo adelante veremos algunos ejemplos con más claridad. Siempre consideraremos que las constricciones que nosotros conocemos a priori ya están contenidas en el Lagrangiano mediante multiplicadores, y estas se verán reflejadas de la misma manera en el Hamiltoniano.

1.2. Sistemas Regulares

A continuación se obtendrán las ecuaciones de movimiento tanto en el formalismo de Lagrange como en el de Hamilton. En este caso, supondremos que no existen constricciones como las mencionadas arriba, ya que ellas serán consideradas con formalidad en la siguiente sección.

1.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Dadas las condiciones de frontera $q^n(t_0)$ y $q^n(t_1)$, fijas, podemos obtener las ecuaciones que determinan el movimiento de una partícula, esto lo hacemos mediante la derivada funcional de la acción dada en (1.1).

Sea $h^n \in C_0^2[t_0, t_1] \equiv$ conjunto de funciones C^2 en $[t_0, t_1]$, y que se anula en la frontera al igual que sus derivadas, entonces la derivada funcional de la acción se obtiene como

$$DS[q^n]h = D \left(\int_{t_0}^{t_1} L(t, q^n, \dot{q}^n) dt \right) h = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^n} h^n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \dot{h}^n \right) dt \quad (1.3)$$

con $h = (h^1, h^2, \dots, h^n)$. Dado que hemos impuesto la condición de que sean funciones C^2 podemos integrar por partes, y estableciendo la condición de extremalidad ($DS[q^n]h = 0$), encontramos que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} \quad (1.4)$$

Se puede ver que corresponde una ecuación de segundo orden a cada variable q^n y se conocen como las ecuaciones de Euler-Lagrange. También debemos notar en este punto

que de entrada el Lagrangiano no puede ser cualquier función de las coordenadas, sino uno que lleve a ecuaciones consistentes, es decir que no lleve a contradicciones como $0 = 1$, este sería el caso de proponer $L = q$. Veremos que este tipo de restricciones hacia L se traducen en que el momento asociado de una partícula esté bien definido. La manera rigurosa para evitar este tipo de situaciones se hace mediante el estudio de la continuidad y posibilidad de puntos críticos en un Lagrangiano, sin embargo, esto es parte del cálculo de variaciones el cual se escapa a los objetivos de esta tesis. Para un profundo estudio del cálculo de variaciones puede consultarse [4].

1.2.2. El Hamiltoniano asociado

Definamos la transformación de Legendre dada por

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (1.5)$$

Esta nueva función se le conoce como el *momento* clásico de una partícula. Notemos que para que esta definición tenga sentido el Lagrangiano debe depender de \dot{q}^n de lo contrario sería 0 dicho momento. Decimos que el momento p_n es la *variable conjugada* a q^n , el por qué de éste nombre quedará claro más adelante. Con la definición (1.5) podemos definir al *espacio fase* como aquel compuesto por el conjunto de coordenadas y momentos, algunas veces sus elementos coordinados serán denotados como $z^\alpha = (q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N)$. La *función Hamiltoniana* o simplemente Hamiltoniano, es una función que vive en el espacio fase y de manera similar nos puede dar lugar a ecuaciones de movimiento equivalentes a las deducidas en (1.4). Tomemos la diferencial de L

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} d\dot{q}^n = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \dot{q}^n\right) - \dot{q}^n d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right)$$

lo cual nos lleva directamente a

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \dot{q}^n - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n + \dot{q}^n dp_n \quad (1.6)$$

Entonces decimos que el Hamiltoniano está definido por

$$H(q^n, p_n) = p_n \dot{q}^n - L \quad (1.7)$$

donde se ha tomado la notación de Einstein: *índices repetidos se suman*, siempre uno arriba, uno abajo. Cuando no sea necesaria esta regla será especificado explícitamente.

Si tomamos la diferencial de esta nueva función vemos que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial q^n} dq^n + \frac{\partial H}{\partial p_n} dp_n \quad (1.8)$$

Comparando esta diferencial con la obtenida en (1.6), al igualar los coeficientes de cada una de las diferenciales se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^n} = \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} \quad (1.10)$$

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad (1.11)$$

Estas son conocidas como las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano. Cabe destacar que son completamente equivalentes a las ecuaciones (1.4), deducidas mediante el formalismo Lagrangiano, ya que para deducir estas nuevas ecuaciones supusimos la validez de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La ecuación (1.9) nos está diciendo sólomente que las derivadas temporales tanto de L como de H coinciden salvo por un signo. Las otras dos, (1.10) y (1.11) son ecuaciones diferenciales de primer orden en general acopladas y que además relacionan la derivada temporal de una variable con la derivada parcial de H en su variable conjugada.

1.2.3. Paréntesis de Poisson

Sea A una función general la cual puede depender del tiempo, de las coordenadas y de los momentos. Su evolución temporal estará dictada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^n}\dot{q}^n + \frac{\partial A}{\partial p_n}\dot{p}_n \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q^n} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \end{aligned}$$

De donde se ha tomado la definición

$$\{A, H\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q^n} \quad (1.12)$$

y se le conoce a esta relación como *paréntesis de Poisson* de las funciones A y H . Notemos que de manera general para cualquier función que no depende explícitamente del tiempo, su evolución temporal estará dictada por

$$\dot{A}(q^n, p_n) = \{A(q^n, p_n), H(q^n, p_n)\} \quad (1.13)$$

y en particular puede verse que esta definición es consistente con la evolución de las coordenadas y los momentos, es decir, recuperamos las ecuaciones (1.10) y (1.11). Veremos que el paréntesis de Poisson resulta ser de suma importancia a lo largo de este trabajo, ya que nos relaciona la manera en que evoluciona una variable con respecto a la geometría del espacio fase. Listemos algunas de sus propiedades, derivadas directamente de la definición.

Sean A, B, C funciones del espacio fase y sean a, b, c constantes, el paréntesis de Poisson satisface:

- (I) antisimetría: $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- (II) linealidad $\{aA + bB, C\} = a\{A, C\} + b\{B, C\}$
- (III) existencia del elemento nulo: $\{A, c\} = 0$
- (IV) Identidad de Jacobi: $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$
- (V) Regla del producto $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$

La propiedad (V) es particular de esta definición de paréntesis de Poisson, más adelante se darán definiciones de estructuras donde sólo se cumplen los puntos del (I) al (IV), dichas estructuras las llamaremos *paréntesis generalizados*.

1.2.4. Estructura simpléctica

De la definición del paréntesis podemos obtener aquel asociado a cada par de variables del espacio fase, esto es:

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p^j\} = \delta^i_j, \quad \{p^i, p^j\} = 0 \quad (1.14)$$

y visto de manera matricial usando z^α se tiene

$$\{z^\alpha, z^\beta\} = J^{\alpha\beta}, \quad \text{en donde } J^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

A la matriz $J^{\alpha\beta}$ se le conoce como la *matriz simpléctica (canónica)* y a la forma en que se relacionan las coordenadas del espacio fase entre si mediante el paréntesis de Poisson, se le conoce como *estructura simpléctica de Poisson (canónica)*. El énfasis en agregar el apellido canónico se debe a que este es un caso muy particular ya que:

Definición. Una estructura simpléctica asociada a un espacio fase es aquella en la que existe un paréntesis de Poisson generalizado, es decir, satisfacen las propiedades (I) a (IV) y las relaciones entre sus coordenadas están dadas por

$$\{z^\alpha, z^\beta\} = \omega^{\alpha\beta} \quad (1.16)$$

siendo $\omega^{\alpha\beta}$ la matriz simpléctica que en general depende de las coordenadas y los momentos.

1.3. Sistemas Singulares

No siempre será posible definir adecuadamente un Hamiltoniano, ya sea porque el Lagrangiano no admite la transformada de Legendre, o porque el sistema tenga constricciones de la forma (1.2). Este es el caso que trataremos en esta sección.

1.3.1. Definición de sistema singular

Diremos que un Lagrangiano es no singular si su Hessiano (de las velocidades) es distinto de cero. Veámos con más claridad esta situación, tomemos la ecuación de movimiento (1.4) y desarrollemos la derivada temporal (en realidad hay una por cada índice n distinto)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n} \ddot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n} \dot{q}^m + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} = W_{mn} \ddot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n} \dot{q}^m + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}$$

en donde hemos tomado la definición

$$W_{mn} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}^m} = W_{mn}(q^n, p_n) \quad (1.17)$$

y entonces las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$W_{mn} \ddot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n} \dot{q}^m + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} \quad (1.18)$$

de donde se puede ver claramente que para que las aceleraciones tengan solución única el determinante de la matriz W_{mn} debe ser distinto de cero. Con esto decimos que un *sistema no-singular* es aquel que cumple con $\det |W_{mn}| \neq 0$.

1.3.2. Constricciones primarias

Los sistemas de interés en esta tesis son aquellos donde el Lagrangiano es singular. Supongamos que la matriz W_{mn} tiene rango k , es decir, el kernel de dicha matriz es de dimensión $N - k$. Un teorema de álgebra lineal nos dice que existen $N - k$ vectores linealmente independientes ξ_j con $j = k + 1, \dots, N$ tal que

$$W_{mn}(\xi_j)^n = 0 \quad (1.19)$$

Esta relación en realidad representa $N - k$ ecuaciones de consistencia, una por cada ξ_j . Es decir, tenemos $N - k$ constricciones de la forma

$$\chi_j(q^n, p_n) = 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, N - k \equiv K \quad (1.20)$$

donde k es el rango de la matriz W_{mn} . A estas relaciones les llamaremos *constricciones primarias*.

Estas constricciones aunque sean cero no conviene sustituirlas desde un principio como tal ya que puede conducir a contradicciones, sobre todo al momento de operarlas con el paréntesis de Poisson. Es preciso elaborar un completo formalismo, el formalismo de Dirac, a fin de encontrar relaciones en donde ya podemos sustituir dichas relaciones como cero. Esto se hará después de operar en el paréntesis de Poisson, mientras tanto las manejaremos diciendo que son relaciones *débilmente igual a cero* y se denotarán como $\chi_j(q^n, p_n) \approx 0$, y después de que ya se hayan hecho todas las operaciones en el paréntesis de Poisson ya podremos suponerlas *fuertemente igual a cero*, es decir, sustituirlas por cero

1.3.3. El Hamiltoniano total

El contar con un Hamiltoniano ha sido de gran utilidad puesto que con él hemos podido deducir las ecuaciones de movimiento y hasta conocer la evolución temporal de cualquier función del espacio fase. En sistemas singulares definimos al Hamiltoniano exactamente de la misma forma a como lo hicimos en el caso regular. Sin embargo en el caso singular se puede ver que la definición no es única. Supongamos que existe al menos una constricción (χ_1) y tomemos

$$H^* = H + \epsilon\chi_1$$

Vemos que la teoría que hemos construido hasta el momento no puede distinguir entre tomar este nuevo Hamiltoniano o el inicial, por lo que debemos de idear una forma de quitar este problema. Además las ecuaciones de movimiento ahora no son todas independientes puesto que tenemos constricciones que nos reducen el número de grados de libertad. Esto puede verse mediante la derivada funcional del Hamiltoniano.

Sea un sistema singular con K constricciones primarias, definimos al *Hamiltoniano total* como

$$H_T(q^n, p_n) = H(q^n, p_n) + \lambda^\alpha \chi_\alpha \quad \text{donde } \alpha = 1, \dots, K \quad (1.21)$$

Vemos que se han incluido todas las constricciones primarias mediante lo que serán multiplicadores de Lagrange cuando tomemos la acción del sistema.

Sea $h = (h_{q^n}, h_{p_n})$ una función C^1 con dominio en el espacio fase, y cuyo valor en la frontera se anula. h_q representa una variación de las coordenadas y h_p una variación de los momentos. Tenemos que la derivada funcional de H está dada por

$$DH[q^n, p_n]h = \frac{\partial H}{\partial q^n} h_{q^n} + \frac{\partial H}{\partial p_n} h_{p_n} = \dot{q}^n h_{p_n} - \frac{\partial L}{\partial q^n} h_{q^n}$$

Si ahora cambiamos H por H_T en la primer igualdad y, comparamos los coeficientes de la misma variación entre la primera y la segunda igualdad, obtendremos las ecuaciones

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - \lambda^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial q^n} = \{p_n, H\} - \lambda^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial q^n} \quad (1.22)$$

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + \lambda^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial p_n} = \{q^n, H\} + \lambda^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial p_n} \quad (1.23)$$

Estas son las nuevas ecuaciones que rigen el movimiento, sin embargo incluyen un parámetro desconocido (λ^α).

Estos multiplicadores los podemos tratar mediante la definición del paréntesis de Poisson. Recordando que la evolución temporal de una función A con dominio en el espacio fase es:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial A}{\partial p_n} \dot{p}_n$$

podemos sustituir en esta expresión las nuevas ecuaciones de movimiento para dar lugar a

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H\} + \lambda^\alpha \{g, \chi_\alpha\} \quad (1.24)$$

En este caso el multiplicador no es susceptible a ser operado por el paréntesis de Poisson y puede entrar, es decir, por la propiedad de linealidad se obtiene

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H + \lambda^\alpha \chi_\alpha\} \quad (1.25)$$

a partir de lo cual se hace notable que el Hamiltoniano total es un buen candidato a describir la nueva dinámica del sistema, ya que opera de la misma forma como lo hace H . La ventaja ahora es que siempre está tomando en cuenta todas las constricciones primarias.

Pudiera entrarnos la curiosidad de tomar al multiplicador de Lagrange como un objeto que es susceptible a ser operado por el paréntesis de Poisson. Veamos que esto no afecta la evolución temporal de cualquier función. Usando la regla del producto tenemos

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H + \lambda^\alpha \chi_\alpha\} = \{A, H\} + \{A, \lambda^\alpha\} \chi_\alpha + \lambda^\alpha \{A, \chi_\alpha\}$$

de donde se puede ver que en el término donde está operando el paréntesis sobre λ_α , está multiplicado por χ_α y dado que ésta ya ha sido operada por el paréntesis de Poisson, ya la podemos hacer fuertemente cero, sólo en dicho término, por lo que la expresión queda como

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H + \lambda^\alpha \chi_\alpha\} = \{A, H\} + \lambda^\alpha \{A, \chi_\alpha\}$$

y recuperamos la ecuación (1.24). Este es el verdadero motivo que nos llevo a decir que antes de operar las constricciones las tomamos débilmente igual a cero, y que una vez que ya han sido operadas las podemos volver fuertemente igual a cero.

1.3.4. Constricciones secundarias

Dado que el Hamiltoniano total ya ha demostrado ser un buen candidato para describir la dinámica de un sistema con constricciones, en adelante lo utilizaremos en nuestro desarrollo, hasta que podamos volver fuertemente igual a cero las constricciones.

Es posible que este Hamiltoniano total nos imponga nuevas relaciones derivadas del hecho que

$$\phi_\beta \equiv \dot{\chi}_\beta = \{\chi_\beta, H_T\} = \{\chi_\beta, H\} + \lambda_\alpha \{\chi_\beta, \chi_\alpha\} \approx 0 \quad (1.26)$$

Aquí pudieran presentarse varias posibilidades:

- 1) que lleve a contradicciones como $0 = 1$, en este caso el problema es debido a que nuestro Lagrangiano no está bien definido y desde un principio ya trae estas inconsistencias en las ecuaciones de movimiento.
- 2) Que nos de $0=0$, en este caso no nos preocuparemos más por la evolución de dicha construcción.

- 3) Que nos de una nueva relación independiente de λ_α y por supuesto de las constricciones primarias, de lo contrario se trata del caso anterior.
- 4) Se obtenga una relación dependiente de λ_α , lo que indicaría que se esta fijando el valor de los multiplicadores.

En caso de que lo que obtengamos en dicha evolución de la constricción se trate del caso 3, diremos que se trata de una *constricción secundaria*.

Las constricciones primarias fueron obtenidas del solo hecho que el $\det |W_{mn}|$ era nulo, lo cuál daba origen a dichas constricciones de manera algebraica. Notemos que para las constricciones secundarias hubo de suponerse las ecuaciones de movimiento, razón por la cual reciben el apellido de secundarias.

Bien, ahora podemos preguntarnos por la evolución de las constricciones secundarias lo cual es dado por

$$\dot{\phi}_\beta = \{\phi_\beta, H_T\} = \{\phi_\beta, H\} + \lambda_\alpha \{\phi_\beta, \chi_\alpha\} \approx 0 \quad (1.27)$$

Esta ecuación deberá tratarse de la misma forma en que se hizo el caso anterior bajo los incisos 1 a 4. Bien pueden aparecer más constricciones las cuales seguiremos llamando secundarias.

Este proceso debe seguir hasta que las relaciones den el caso 2, es decir sean satisfechas algebraicamente, o el caso 4 y entonces queden fijos los multiplicadores.

1.3.5. Una clasificación útil

El nombre que se les asignó a las constricciones fue debido a si ellas dependen o no de las ecuaciones de movimiento, sin embargo, existe otra clasificación más útil en la teoría a fin de hacer notar sus propiedades.

Supongamos que después de someter un sistema físico al tratamiento anterior nos encontramos con K constricciones primarias y M constricciones secundarias, es decir, tenemos $K + M = m$ constricciones en total. Etiquetemos a todas ellas por

$$\phi_j(q^n, p_n) \approx 0 \quad \text{donde } j = 1, \dots, K + M = m \quad (1.28)$$

De la forma en que fueron deducidas dichas constricciones queda claro que todas ellas son independientes.

Sea R una función dependiente de las coordenadas y los momentos. Diremos que R es **primera clase** si tiene paréntesis de Poisson cero con todas las ϕ 's, esto es

$$\{R, \phi_j\} \approx 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (1.29)$$

Basta con usar la igualdad débilmente cero. En cualquier otro caso diremos que R es **segunda clase**.

En las referencias dadas al inicio del capítulo se puede consultar un teorema que nos dice que el paréntesis de Poisson de dos cantidades de primera clase da lugar a una

cantidad de primera clase. Esto nos ayuda a obtener una nueva clasificación para las constricciones: *constricciones de primera clase y constricciones de segunda clase*.

Se puede demostrar (ver referencias) que las constricciones de primera clase dan lugar a transformaciones de norma de la teoría, sin embargo no es el objetivo de esta tesis su estudio o aplicación de ellas por lo que no se abordan aquí.

1.3.6. Paréntesis de Dirac

Por definición, el paréntesis de Poisson de dos constricciones de segunda clase es distinto de cero, y dado que esto debe satisfacerse aún después de operar el paréntesis y hacer las constricciones fuertemente cero, entonces tenemos que el paréntesis de Poisson de dichas constricciones resulta en una cantidad independiente de las constricciones.

Supongamos que tenemos k constricciones de segunda clase, etiquetémoslas por χ_α con $\alpha = 1, \dots, k$. Definamos la matriz $C_{\alpha\beta}$ por

$$C_{\alpha\beta} \equiv \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \quad (1.30)$$

Dicha matriz tiene determinante distinto de cero (consúltese [1] para una demostración) por lo que puede ser invertida, con $C^{\alpha\beta}$ su inversa.

Definimos al *paréntesis de Dirac* entre dos funciones A y B que dependen de las coordenadas y los momentos como

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} \quad (1.31)$$

Notemos que esta extensión al paréntesis de Poisson está bien definida aún si hacemos las constricciones fuertemente igual a cero, o incluso si calculamos el paréntesis de una de ellas con alguna función cualquiera $A(q, p)$

$$\begin{aligned} 0 &= \{\chi_\mu, A\}^* = \{\chi_\mu, A\} - \{\chi_\mu, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, A\} \\ &= \{\chi_\mu, A\} - C_{\mu\alpha} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, A\} = \{\chi_\mu, A\} - \delta_\mu^\beta \{\chi_\beta, A\} \equiv 0 \end{aligned}$$

de donde se puede ver del lado derecho que aunque los paréntesis de Poisson no se pueden anular por separado, sí lo hacen en conjunto.

Dada la consistencia ante todas las constricciones de segunda clase del paréntesis de Dirac, para crear una versión cuántica del sistema bien podemos promover las variables a operadores, esto sin que corramos el riesgo de obtener inconsistencias como las obtenidas en la cuantización canónica y promover el paréntesis de Dirac a conmutador.

Parafraseando lo anterior, la cuantización usando el método de Dirac se hace mediante la promoción de variables a operadores y de cambiar el paréntesis de Dirac a conmutador

$$z^\alpha \mapsto \hat{z}^\alpha, \quad \{z^\alpha, z^\beta\}^* \mapsto [\hat{z}^\alpha, \hat{z}^\beta] \quad (1.32)$$

y con ello ya se puede estudiar la dinámica cuántica del sistema en cuestión.

En el Capítulo 3 estudiaremos la aplicación de este formalismo a un ejemplo específico: una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera. Este ejemplo, además de ser sencillo, visualiza una manera clara de que el método de Dirac es el adecuado para crear una teoría cuántica de un sistema con constricciones, ya que el caso de una partícula sobre una esfera es completamente soluble en el espacio extendido, usando variables de ángulo acción.

El siguiente capítulo está dedicado al estudio de estructuras simplécticas generalizadas y no-conmutativas a fin de extender la teoría cuántica a una por deformación del producto.

Capítulo 2

Generalizaciones de la Cuantización Canónica

En el capítulo anterior extendimos el formalismo de cuantización canónica a fin de incluir sistemas con constricciones, específicamente aquellas que llamamos de segunda clase, sin dejar de mencionar que en las referencias citadas ya hay un tratamiento amplio a sistemas que pueden incluir constricciones de primera y segunda clase.

Algunos de los problemas que se pueden suscitar a esta cuantización, sin identificarlos como mayores o menores, son por ejemplo: problemas de ordenamiento de operadores, sistemas donde no es posible extraer todas las constricciones, que posean constricciones no dadas por una ecuación cerrada (por ejemplo $x^i > a$), y desde luego sistemas que no poseen un formalismo Lagrangiano siquiera, creación y aniquilación de partículas etc. Este último punto concierne a la teoría de campos cuánticos, pero hay otros problemas más fundamentales como el deseo de cubrir más resultados experimentales, cuantizar a la gravedad o incluso problemas de interpretación cuántica como el problema de la medición.

En este capítulo iniciaremos motivando el por qué de la necesidad en implementar cuantizaciones que incluyan una geometría no-conmutativa y como es que se hicieron las primeras propuestas: el producto de Moyal como un producto estrella (\star). Posteriormente haremos una descripción generalizada de lo que consiste un producto estrella y algunas de sus propiedades. Finalmente daremos una descripción formal de lo que consiste el método de cuantización mediante la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, y demostraremos que es un ejemplo más de un producto estrella.

2.1. Aparición de la No-Conmutatividad

La primer aparición del tratamiento de un álgebra no-conmutativa en la física data de 1947 y es debida a Snyder [5]. En este artículo, Snyder describe un álgebra, que ahora recibe su nombre, la cual tiene la particularidad de ser invariante de Lorentz en

un espacio que no es continuo. También tiene todas las propiedades de una estructura simpléctica y se reduce a la estructura canónica de Poisson (cuantizada) cuando la curvatura tiende a infinito. Esta es la primera vez que se describe un espacio discreto en el contexto de teoría de campos invariante de Lorentz y da paso a toda una búsqueda de espacios discretos que cumplan, entre otras cosas, los principios de la Relatividad General y los requerimientos de la mecánica cuántica a fin de obtener una teoría unificada, o al menos lo más general posible.

La manera moderna en que se aborda una geometría no-conmutativa es debida a Connes en 1986 y a Woronowicz en 1987, en donde se asocia una estructura diferencial a dicha geometría y es la manera en que aquí se abordará. Se puede ver un enfoque de ello en [6]. Es posible demostrar que cálculos diferenciales asociados a un álgebra dada pueden ser definidos como estructuras diferenciales las cuales pueden ser asignadas a un espacio topológico dado. Esta es la manera en que se implementa la geometría diferencial no-conmutativa y como veremos más adelante, esta conexión entre cálculos diferenciales asociados a un álgebra y una estructura diferencial se ve ejemplificada en la relación entre funciones de Weyl y producto de Moyal que más abajo se describirá.

2.1.1. Gravedad cuántica implica no-conmutatividad

Una manera natural en la que aparece la necesidad de trabajar con una geometría no-conmutativa es tratando de conciliar la teoría de la Relatividad General con la Cuántica. Este hecho podemos verlo a partir del análisis de los dos siguientes establecimientos, los cuales resultan incompatibles a menos que la geometría clásica se “deforme”.

- (A) El espacio-tiempo clásico tiene una estructura métrica causal, cuya dinámica es descrita por las ecuaciones de campo de Einstein de la Relatividad General.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

donde $R_{\alpha\beta}$, R y $T_{\alpha\beta}$ son el tensor de Riemann, el escalar de curvatura y el tensor de energía-momento de materia respectivamente.

- (B) Los eventos localizados en el espacio-tiempo son causados por el decaimiento radiactivo de estados localizados inestables de materia donde la radiación y la materia son descritos en el marco de la mecánica cuántica.

Veamos como se produce dicha incompatibilidad en un marco de geometría clásica conmutativa. Consideremos un evento el cual está localizado en el espacio tiempo y asumamos que tiene una vida media Δt y una extensión espacial con semieje mayor d' y semieje menor d'' . En el sistema en reposo del evento, el punto (B) mediante el principio de incertidumbre nos da una relación de dispersión

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1 \quad (2.2)$$

donde ΔE es la relación de dispersión de la energía del evento. La masa promedio m del evento satisface

$$m \geq \Delta E \quad (2.3)$$

Denotemos la *longitud de Planck* por l_p ($l_p \sim \kappa^{\frac{1}{d-2}}$) donde d es la dimensión del espacio-tiempo y κ está relacionada a la constante de Newton. Si

$$d' \leq ml_p^2 \quad (2.4)$$

entonces las ecuaciones de campo de Einstein implican que el evento sucede dentro de un agujero negro. Por lo que, de acuerdo a la teoría clásica, el evento no es visible por observadores externos. Si tomamos ahora d' y d'' como el eje menor y eje mayor del agujero negro respectivamente, deberíamos tener

$$d' \geq ml_p^2 \quad (2.5)$$

Ahora, si solamente tomamos las relaciones (2.2),(2.3) y (2.5) podemos obtener

$$d' \cdot \Delta t \geq l_p^2 \quad (2.6)$$

y la Ley de Hawking combinada con (2.2) y (2.3) implica

$$d' \cdot d'' \geq l_p^2 \quad (2.7)$$

Asumiendo que (2.6) y (2.7) son siempre válidos para objetos materiales o eventos materiales se desprenden las siguientes conclusiones:

- Los objetos o eventos puntuales no tienen significado físico.
- Si \mathfrak{D} es una región compacta en el espacio-tiempo con volumen métrico finito $Vol_g(\mathfrak{D})$, entonces N_0 , el número de objetos materiales o eventos localizados en \mathfrak{D} que puedan ser distinguidos, es acotado por

$$N_0 \leq \frac{Vol_g(\mathfrak{D})}{l_p^2} \quad (2.8)$$

para $d \geq 2$.

Con estos conocimientos podemos decir entonces que la reconciliación entre los puntos (A) y (B) solo puede darse a través de una “teoría cuántica de objetos extendidos”. Así, una teoría cuántica que incluya materia y gravedad requiere de una generalización no-conmutativa de geometría y topología diferencial.

En geometría no-conmutativa uno reemplaza las coordenadas generalizadas x^μ de la variedad espacio-tiempo por los generadores q^μ de un álgebra no-conmutativa, los cuales satisfacen relaciones de conmutación o paréntesis de Lie de la forma

$$[q^\mu, q^\nu] = ikg^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

El parámetro k puede jugar el rol de una escala de área fundamental, del orden del área de Planck, l_p^2 , y en consecuencia ser despreciable su contribución a efectos del orden que cotidianamente estamos acostumbrados.

Para que realmente se trate de un álgebra no-conmutativa requerimos que al menos uno de los conmutadores sea no nulo. Notemos que en el límite cuando $k \rightarrow 0$ recuperamos las coordenadas x^μ . En el tratamiento a lo largo de esta tesis utilizaremos indistintamente x^μ para denotar tanto a las coordenadas de la variedad como a los generadores del álgebra, salvo cuando sea necesario hacer la distinción como en el caso del tratamiento formal. Aunque aquí la no-conmutatividad es sugerida para la variedad completa, el desarrollo que se hará en los capítulos 4 y 5 sólo incluirá no-conmutatividad de las coordenadas espaciales y adicionalmente no-conmutatividad en los momentos, dejándole el carácter de parámetro al tiempo. Más adelante veremos que la no-conmutatividad en el producto de variables (elementos de un álgebra de Lie) puede traducirse en una deformación de la estructura simpléctica para sus funciones asociadas (funciones en el espacio dual del álgebra), es por ello que “no-conmutatividad” la usaremos indistintamente tanto a una deformación de la estructura así como cuando se trate explícitamente de un producto no-conmutativo.

2.1.2. Funciones de Weyl y distribuciones de Wigner

Weyl en 1927 introdujo un principio de correspondencia entre una enorme clase de operadores en el espacio de Hilbert y una gran familia de funciones sobre el espacio fase. Posteriormente, en 1932 Wigner dio una expresión para una función de distribución sobre el espacio fase y finalmente en 1949 Moyal introdujo un paréntesis (paréntesis de Moyal) para funciones sobre el espacio fase que corresponde al conmutador cuántico asociado a dichas funciones y que se reduce al paréntesis usual de Poisson en el límite cuando $\hbar \rightarrow 0$.

El mapeo de Weyl consiste en asociar a observables clásicos $f(q, p)$ un operador cuántico $\hat{f}(q, p)$ sobre el espacio de Hilbert [7]. Hagamos el desarrollo a fin de ver esta correspondencia. Sea

$$\begin{aligned} [Q^i, Q^j] &= 0 \\ [P_i, P_j] &= 0 \\ [Q^i, P_j] &= i\hbar\delta_j^i \end{aligned}$$

el álgebra conmutativa de Heisenberg de la mecánica cuántica ordinaria. Haciendo uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), la cual veremos más adelante con todo detalle, uno puede mostrar que los operadores definidos por

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (x \cdot P + y \cdot Q) \right] \quad (2.10)$$

satisfacen la condición de ortonormalidad

$$(2\pi\hbar)^{-d} \text{Tr} \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} ((x - x') \cdot P + (y - y') \cdot Q) \right] \right\} = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (2.11)$$

donde x y y son c -vectores y d sigue siendo la dimensión del espacio. Por comodidad de la notación se usa $Q = (Q^1, \dots, Q^d)$ y $P = (P^1, \dots, P^d)$. Dado que dichos vectores forman un conjunto completo y ortonormal podemos escribir a cualquier operador en el espacio fase $A(Q, P, t)$ como una descomposición en dichos vectores, es decir

$$A(Q, P, t) = \int \int \alpha(x, y, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (x \cdot P + y \cdot Q) \right] dx dy \quad (2.12)$$

donde las c -funciones $\alpha(x, y, t)$ se determinan usando (2.11) mediante

$$\alpha(x, y, t) = (2\pi\hbar)^{-d} \text{Tr} \left\{ A(Q, P, t) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (x \cdot P + y \cdot Q) \right] \right\} \quad (2.13)$$

Definamos la función de Weyl correspondiente al operador cuántico $A(Q, P, t)$ mediante

$$A^W(q, p, t) = \int \int \alpha(x, y, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (x \cdot p + y \cdot q) \right] dx dy \quad (2.14)$$

Notemos que esta correspondencia nos asigna a cada operador cuántico en el espacio de Hilbert una función en el espacio fase. Consideremos ahora el valor de expectación del producto de dos operadores cuánticos, relativos al estado puro $|\psi\rangle$. El formalismo espacio fase de Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal entonces muestra que

$$\langle \psi | A_1(Q, P, t) A_2(Q, P, t) | \psi \rangle = \int \int \rho_W(q, p, t) A_1^W(q, p, t) \star A_2^W(q, p, t) dq dp \quad (2.15)$$

donde

$$\rho_W(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-d} \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} z \cdot p \right] \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle dz \quad (2.16)$$

es la función de distribución de cuasi-probabilidad de Wigner, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ es la matriz de densidad de von Neumann para un estado puro y

$$\star = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \Lambda \right] := \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\nabla}_q \cdot \overrightarrow{\nabla}_p - \overleftarrow{\nabla}_p \cdot \overrightarrow{\nabla}_q \right) \right] \quad (2.17)$$

es el operador \star bi-diferencial de Moyal.

Adicionalmente en este formalismo de Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal también tenemos un operador de evolución y en consecuencia una ecuación de evolución. Sea $A(Q, P, t)$ un operador de Heisenberg, entonces

$$A^W(q, p, t) = \exp \left\{ -\frac{2t}{\hbar} H^W \sin \left(\frac{\hbar}{2} \Lambda \right) \right\} A^W(q, p, 0) \quad (2.18)$$

de lo cual, haciendo $A^W(q, p, t)$ igual a q y p obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{q}^W(0) = H^W \Lambda q^W(0) = \nabla_p H^W \\ \dot{p} &= \dot{p}^W(0) = H^W \Lambda p^W(0) = -\nabla_q H^W \end{aligned}$$

Así los c -números q y p satisfacen las ecuaciones de movimiento de Hamilton y pueden ser interpretadas como variables dinámicas clásicas.

Recapitulando los resultados obtenidos tenemos entonces que: dado un operador de Hilbert dependiente del álgebra Q_i y P_j de Heisenberg con reglas de conmutación canónicas, lo asociamos a una función de Wigner en el espacio fase, la cuál obedece ahora a un nuevo producto a fin de satisfacer las reglas de conmutación cuántica. Es decir, se da la correspondencia $\hat{f}(Q, P, t) \mapsto f^W(q, p, t)$, donde ahora la regla de composición esta dada por el producto \star

$$(f \cdot g)^W = f^W \star g^W, \quad f \star g = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\nabla}_q \cdot \overrightarrow{\nabla}_p - \overleftarrow{\nabla}_p \cdot \overrightarrow{\nabla}_q \right) \right] (f, g) \quad (2.19)$$

En donde $\overleftarrow{\nabla}$ y $\overrightarrow{\nabla}$ estan aplicados a la primera y segunda entrada respectivamente, en este caso la primer entrada es f y la segunda g . Con esta propiedad los elementos en el argumento de la exponencial conmutan entre sí.

Se define el paréntesis de Moyal como

$$\{f, g\}^M = \frac{1}{i\hbar} (f \star g - g \star f) \quad (2.20)$$

y en este caso la correspondencia entre este paréntesis y el conmutador de mecánica cuántica está dada por

$$\{f^W, g^W\}^M = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (2.21)$$

donde f^W y g^W son las funciones de Wigner asociadas a \hat{f} y \hat{g} respectivamente. Cabe hacer notar que en el límite cuando $\hbar \rightarrow 0$ el paréntesis de Moyal se reduce al paréntesis de Poisson, lo cuál puede verse directamente de la definición del producto \star al expandir en su serie de potencias el operador exponencial.

En el sentido matemático estricto se debe de probar que el producto de Moyal debe satisfacer todos los requerimientos de estructura simpléctica, esto lo haremos más adelante en un sentido más formal.

2.1.3. Deformación del producto

Más que dar la manera en que se debe deformar el producto estrella, en esta subsección daremos argumentos del porque tratar de deformar este producto a fin de incluir álgebras de operadores que ya no sean la de Heisenberg no resulta de manera directa. El tratamiento formal se verá en la siguiente sección

Si quisieramos modificar el álgebra de Heisenberg a fin de incluir en sus elementos alguna no-conmutatividad motivados por alguno de los argumentos dados al inicio de esta sección, la primer objeción que encontramos es el hecho de construir un conjunto completo de operadores que formen un conjunto ortonormal en el espacio de Hilbert: para demostrar que los operadores dados en (2.10) forman una base ortonormal del espacio de Hilbert fue indispensable usar las relaciones de conmutación dadas por el álgebra de Heisenberg.

Suponiendo que salvamos este inconveniente y podemos encontrar una base de operadores para el álgebra específica que tengamos, veremos que el nuevo producto estrella no puede ser escrito en forma similar como aquel de Moyal. Asumamos que el espacio fase tiene la estructura topológica de \mathbb{R}^{2n} . Denotemos a las coordenadas de dicho espacio fase por $z^\alpha = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$, entonces los operadores de mecánica cuántica son representados por funciones $f(\phi)$. Recordando lo hecho en el Capítulo 1, definimos la dos-forma simpléctica como

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta \quad (2.22)$$

la cual tiene componentes constantes

$$\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con inversa} \quad \omega^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual define al paréntesis de Poisson de dos funciones $f(z)$ y $g(z)$ como

$$\{f, g\}(z) = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial z^\beta} \quad (2.23)$$

Entonces, haciendo uso de dicha estructura, el producto estrella de dos funciones se escribe como

$$f(z) \star g(z) = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega^{\alpha\beta} \overrightarrow{\partial}_\beta \right] (f, g)(z) \quad (2.24)$$

en donde ∂_α se usa para denotar $\partial/\partial z^\alpha$.

Anteriormente hicimos énfasis en que todos los elementos del argumento de la exponencial en dicha definición de producto conmutaban entre sí. Si quisiéramos extender dicho producto a estructuras simplécticas más complejas (dependientes del espacio fase, $\omega^{\alpha\beta}$) nos daríamos cuenta que estos elementos ya no conmutan entre sí, ya que el operador derivada podría actuar sobre la estructura, y se presentarían problemas de ordenamiento. Entonces, tratar de extender el producto a estructuras simplécticas más generales por este camino no presenta una buena manera, solo podríamos cubrir a lo más el caso donde $\omega^{\alpha\beta}$ es una matriz constante. Es necesario volver a las propiedades básicas que se le requieren a una operación de paréntesis (producto estrella) a fin de propiciar un extensión natural a álgebras no-conmutativas, lo cuál trataremos en la siguiente sección.

Por cuestión de comodidad en lenguaje, siempre nos referiremos como *álgebra trivial* a la de Heisenberg si se trata de operadores o equivalentemente a la estructura de Poisson si se trata de funciones en el espacio fase.

Una extensión al paréntesis de Poisson a fin de incluir no-conmutatividad debe ser tal

$$\{f, g\}_{ext}(z) = \{f, g\}^0 + \{f, g\}^1 + \dots \quad (2.25)$$

en donde $\{f, g\}^0$ corresponde al de Poisson y los siguientes órdenes dependen de algún parámetro ϵ tal que en el límite cuando tiende a cero sólo nos quedemos con el orden

cero-ésimo. Esto nos lleva a que cualquier modificación a la estructura simpléctica trivial debe verse como

$$\bar{\omega}^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta} + \Delta^{\alpha\beta} \quad (2.26)$$

siendo $\Delta^{\alpha\beta}$ la no-conmutatividad agregada. Desde luego esta no es completamente arbitraria ya que debe cumplir todas las propiedades requeridas por una estructura simpléctica (propiedades (I) a (IV) vistas en el capítulo anterior).

2.2. Cuantización Por Deformación

En esta sección nos proponemos describir brevemente de manera formal en que consiste un producto estrella general. Un tratamiento más completo puede encontrarse en [8], de donde ha sido extraído lo que aquí se describe.

El tratamiento que a continuación daremos se restringe a un espacio con estructura topológica \mathbb{R}^d . Se trata de establecer estructuras simplécticas diferenciales por lo que los objetos básicos son operadores bi-diferenciales, cuyo tratamiento formal de un producto deformado se da a través de series de potencias de dichos operadores a fin de establecer las estructuras.

Notación. Con la finalidad de establecer una notación común en esta sección, \mathcal{A} denotará el álgebra de funciones suaves real-valuadas sobre \mathbb{R}^d . \mathcal{A} estará equipada con una estructura de Poisson α con paréntesis $\{a, b\}$ donde $a, b \in \mathcal{A}$. ϵ denotará un parámetro formal. En algunos casos para dar enfoque a un concepto completamente cuántico en la formulación, se suele usar $i\hbar$ en vez de ϵ .

2.2.1. Definición (Deformación del producto)

Una cuantización por deformación de \mathbb{R}^d en la dirección de α es un producto lineal $\mathbb{R}[[\epsilon]]$ sobre $\mathcal{A}[[\epsilon]]$, definido para $a, b \in \mathcal{A}$ por

$$a \star b = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \Pi_j(a, b) \quad (2.27)$$

donde los Π_j son operadores bi-diferenciales satisfaciendo

$$(D1) \quad \sum_{j+k=n} \Pi_j(\Pi_k(a, b), c) = \sum_{j+k=n} \Pi_j(a, \Pi_k(b, c)) \quad (\text{Asociatividad})$$

$$(D2) \quad \Pi_0(a, b) = ab \quad (\text{Límite clásico})$$

$$(D3) \quad \Pi_1(a, b) - \Pi_1(b, a) = \{a, b\} \quad (\text{Límite semi-clásico})$$

y \star extiende naturalmente a $\mathcal{A}[[\epsilon]]$.

Notemos que se puede definir un paréntesis generalizado “deformado” mediante

$$\{a, b\}^D = (a \star b - b \star a) \quad (2.28)$$

Desde luego hay que demostrar que cumple con todas las propiedades de una estructura simpléctica. Cada uno de los términos en la serie de la misma potencia pueden definir una deformación al paréntesis de Poisson de orden j mediante

$$\{a, b\}_j^D = \Pi_j(a, b) - \Pi_j(b, a) \quad (2.29)$$

Dada la linealidad de este producto es claro que satisface trivialmente las condiciones (I) a (III) impuestas a una estructura simpléctica, por lo que sólo nos restaría probar que dicha definición cumple con la identidad de Jacobi a fin de demostrar que se cumple con todas las propiedades de una estructura simpléctica generalizada. Para hacerlo usamos primero que el operador bi-diferencial es lineal por lo que basta probar que cada una de las potencias de orden n satisface la identidad de Jacobi lo cual se hace usando la regla de asociatividad. Veamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=n} \{a, \{b, c\}_j^D\}_i^D &= \sum_{i+j=n} \Pi_i(a, \Pi_j(b, c)) - \sum_{i+j=n} \Pi_i(a, \Pi_j(c, b)) \\ &\quad - \sum_{i+j=n} \Pi_i(\Pi_j(b, c), a) + \sum_{i+j=n} \Pi_i(\Pi_j(c, b), a) \end{aligned}$$

Permutando cada uno de los índices tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{i+j=n} (\{a, \{b, c\}_j^D\}_i^D + \{b, \{c, a\}_j^D\}_i^D + \{c, \{a, b\}_j^D\}_i^D) \\ &= \sum_{i+j=n} [\Pi_i(a, \Pi_j(b, c)) - \Pi_i(a, \Pi_j(c, b)) - \Pi_i(\Pi_j(b, c), a) + \Pi_i(\Pi_j(c, b), a) \\ &\quad + \Pi_i(b, \Pi_j(c, a)) - \Pi_i(b, \Pi_j(a, c)) - \Pi_i(\Pi_j(c, a), b) + \Pi_i(\Pi_j(a, c), b) \\ &\quad + \Pi_i(c, \Pi_j(a, b)) - \Pi_i(c, \Pi_j(b, a)) - \Pi_i(\Pi_j(a, b), c) + \Pi_i(\Pi_j(b, a), c)] = 0 \end{aligned}$$

en donde para arribar a la igualdad 0 hay que utilizar la propiedad de asociatividad a fin de pasar el Π_j anidado al segundo argumento de Π_i . Con esto queda demostrado que la deformación cumple con todas las propiedades de una estructura simpléctica generalizada.

Los Π_j no siempre son requeridos a ser operadores bi-diferenciales y el término producto \star es usado para cuantizaciones por deformación bi-diferenciales. Si embargo dado el uso que se les dará, se suponen bi-diferenciales. A fin de familiarizarnos con esta definición daremos algunos ejemplos.

2.2.2. Producto de Moyal

La motivación entera de definir de manera tan general una teoría de deformación es el producto de Moyal para una estructura de Poisson constante α sobre \mathbb{R}^d .

Sea

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \quad \omega^{ij} = -\omega^{ji} \in \mathbb{R} \quad (2.30)$$

Visto como un operador bi-diferencial esta estructura tiene un operador asociado

$$\hat{\alpha}(a, b) = \omega^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j(a, b) \quad (2.31)$$

donde, como venimos manejando, $\overleftarrow{\partial}$ actúa sobre la primer entrada (a) y $\overrightarrow{\partial}$ actúa sobre la segunda entrada (b). El *Producto de Moyal* es entonces dado por la simple exponenciación del operador de Poisson. Simbólicamente tenemos

$$a \star b = \exp \left[\frac{\epsilon}{2} \omega^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j \right] (a, b) \quad (2.32)$$

donde, dado que los ω^{ij} son coeficientes constantes, todos los elementos en el argumento de la exponencial conmutan entre sí. Notemos que la 0-ésima potencia de este operador establece la regla usual de multiplicación.

La expansión a segundo orden de dicho producto puede verse que queda como

$$a \star b = ab + \frac{\epsilon}{2} \omega^{ij} \partial_i(a) \partial_j(b) + \frac{\epsilon^2}{2 \cdot 2!} \omega^{ij} \omega^{kl} \partial_i(\partial_k(a)) \partial_j(\partial_l(b)) + \dots \quad (2.33)$$

De esta serie puede verse que dos de los requerimientos para que el producto de Moyal cumpla con la definición de producto estrella son satisfechas: el límite clásico y el semi-clásico, restando sólo por comprobar la asociatividad. Dicha prueba será realizada más adelante ya que para ello se precisa de la fórmula de BCH la cuál será tratada con todo detalle en la siguiente sección.

Aquí se vuelve a hacer presente el problema de intentar generalizar la idea de exponenciación para estructuras de Poisson no constantes ya que los elementos $\overleftarrow{\partial}$ y $\overrightarrow{\partial}$ no conmutarán más con los elementos ω^{ij} . Dada a luz esta idea de elementos en el argumento de la exponencial que no conmutan, lleva directamente a pensar una cuantización mediante la fórmula de BCH. La fórmula de BCH reproduce un producto estrella para variables no-conmutativas y para su estudio en detalle le dedicaremos una sección completa, por ahora veamos un segundo ejemplo.

2.2.3. Estructuras de Poisson lineales

Considerar una estructura de Poisson Lineal sobre \mathbb{R}^d es equivalente a estudiar el dual de un álgebra de Lie, \mathfrak{g}^* , con la estructura de Poisson siendo dada por el paréntesis de Lie sobre \mathfrak{g} . Sea $\{X^i, i = 1, \dots, d\}$ una base para \mathfrak{g} . Simultáneamente pensaremos a las X^i como coordenadas dadas para \mathfrak{g}^* . Dadas las constantes de estructura c_k^{ij} , el paréntesis de Lie

$$[X^i, X^j] = c_k^{ij} X^k \quad (2.34)$$

determina la estructura de Poisson

$$\alpha = \frac{1}{2} c_k^{ij} X^k \partial_i \wedge \partial_j \quad (2.35)$$

De esta forma se construye una cuantización por deformación para \mathfrak{g}^* usando el álgebra envolvente universal de \mathfrak{g} .

Siguiendo esta idea de construir una estructura simpléctica a partir de una estructura algebraica de Lie, la usaremos a continuación a fin de construir una deformación del producto mediante la fórmula BCH. Veremos que esta forma de cuantizar sólo es un ejemplo más de la definición de cuantización por deformación, pero dada su extensión y aplicación en esta tesis conviene verlo en una sección separada.

También notemos que con este ejemplo ya estamos tratando de una misma manera a un álgebra de Lie con su respectivo dual. Mientras la estructura de Lie puede ser no-conmutativa, las variables en el espacio dual si lo son en el sentido usual de producto de funciones pero con una estructura simpléctica deformada. En el Capítulo 4 cuando propongamos una extensión a la estructura de Poisson, estaremos pensando que hay detrás una estructura algebraica de la cual la deformación propuesta es dual. Tener en mente esto servirá para justificar conceptualmente el porque a la hora de construir el operador de cuantización BCH usaremos paréntesis de Poisson en lugar de conmutadores (ya que las variables serán conmutativas en el sentido de producto de funciones) y también porque en muchas ocasiones nos referimos a la misma deformación de la estructura simpléctica como una deformación no-conmutativa.

2.3. Cuantización BCH

En esta sección iniciaremos por dar una construcción lo más explícita posible de lo que es la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) y la manera en que se obtiene un operador bi-diferencial para definir un producto estrella con el objetivo de que la aplicación que se hará en el Capítulo 4 resulte clara, ya que ahí se requiere de muchos cálculos algebraicos.

2.3.1. Serie BCH

Los primeros términos de la serie BCH pueden ser encontrados en muchos lugares de la literatura, por lo general se dan hasta orden 5 ya que términos de orden más alto aumentan demasiado rápido en complejidad. Hay métodos que reducen eficientemente la manera tradicional de encontrar los términos de la serie, sin embargo sigue siendo muy complicado encontrar ordenes altos para la serie genérica de BCH.

Suponemos que $X, Y \in \mathfrak{g}$, donde \mathfrak{g} es un álgebra de Lie y tanto X como Y son tomados como elementos no-conmutativos bajo la operación del grupo. Entonces tendremos que el producto de dos exponenciales no será la suma de sus argumentos, esto es

$$\exp(X) \cdot \exp(Y) := \exp[Z(X, Y)] \quad (2.36)$$

Los primeros términos de la fórmula BCH están dados por

$$\begin{aligned}
Z(X, Y) &= \ln(\exp X \exp Y) \\
&= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) - \frac{1}{24}[Y, [X, [X, Y]]] \\
&\quad - \frac{1}{720}(\llbracket\llbracket\llbracket[X, Y], Y], Y], Y] + \llbracket\llbracket\llbracket[Y, X], X], X], X]) \\
&\quad + \frac{1}{360}(\llbracket\llbracket\llbracket[X, Y], Y], Y], X] + \llbracket\llbracket\llbracket[Y, X], X], X], Y]) \\
&\quad + \frac{1}{120}(\llbracket\llbracket\llbracket[Y, X], Y], X], Y] + \llbracket\llbracket\llbracket[X, Y], X], Y], X]) + \dots
\end{aligned} \tag{2.37}$$

de donde se ve que si X y Y conmutan se reduce a la multiplicación usual de exponenciales.

Para encontrar estos primeros términos de la serie es necesario arreglarselas con las fórmulas generales, agrupar todos los términos del mismo orden y de ahí simplificar. Veamos una forma de como se contruye de manera general la serie. Empecemos por escribir las series bien conocidas en la literatura de cada una de las exponenciales:

$$e^{-X} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \quad e^Y = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!}$$

Notemos que el producto de dichas series es

$$e^{-X}e^Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{X^p Y^q}{p! q!} = 1 + \sum_{p+q>0} \frac{X^p Y^q}{p! q!}$$

Por otro lado también encontramos en la literatura la serie del logaritmo

$$\ln(1 + Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} Z^k$$

Con estos elementos ya podemos dar la manera de calcular la serie

$$Z(X, Y) \equiv \ln(e^{-X}e^Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\sum_{p+q>0} \frac{X^p Y^q}{p! q!} \right)^k \tag{2.38}$$

a fin de escribirla de la manera convencional en la literatura veamos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{p+q>0} \frac{X^p Y^q}{p! q!} \right)^k &= \sum_{p_1+q_1>0} \frac{X^{p_1} Y^{q_1}}{p_1! q_1!} \times \dots \times \sum_{p_k+q_k>0} \frac{X^{p_k} Y^{q_k}}{p_k! q_k!} \\
&= \sum_{p_i+q_i>0} \frac{X^{p_1} Y^{q_1}}{p_1! q_1!} \times \dots \times \frac{X^{p_k} Y^{q_k}}{p_k! q_k!}
\end{aligned}$$

Así, insertando este resultado en la ecuación (2.38) obtenemos:

$$Z(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_i+q_i>0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{p_1!q_1! \cdots p_k!q_k!} X^{p_1} Y^{q_1} \cdots X^{p_k} Y^{q_k} \quad (2.39)$$

Por simplicidad de escritura en la ecuación anterior se suelen suprimir los límites en los que opera la suma, sin embargo aquí los dejamos en forma explícita por claridad y utilidad en lo que sigue. Podemos ver que la cantidad de términos que incluye esta fórmula pronto se vuelve muy difícil de manejar además de que incluye muchos términos repetidos.

2.3.2. Fórmula de Dynkin

En 1947 Dynkin encontró una simplificación a la fórmula (2.39) [9]. A continuación se esboza la manera en que es obtenida.

En la fórmula (2.39) agrupemos todos los términos en la serie para los cuales $p_1 + q_1 + p_2 + q_2 + \cdots + p_k + q_k = m$, lo cual resulta en una representación de la serie de la forma

$$Z(X, Y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(X, Y) \quad (2.40)$$

donde $P_m(X, Y)$ es un polinomio homogéneo de grado m en X y Y .

Un teorema importante existente en grupos de Lie es el de Campbell y Hausdorff [10], el cual nos dice que cada polinomio $P_m(X, Y)$ puede ser expresado en términos de X y Y por medio de una fórmula envolviendo solamente operaciones de suma, multiplicación por números racionales y tomando conmutadores ($[P, Q]$). Sin embargo necesitamos conocer como es explícitamente dicha fórmula para poder usarla.

De manera general sea K un campo arbitrario de característica 0 y $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polinomio arbitrario sobre K en “indeterminados no-conmutativos” de x_1, x_2, \dots, x_n . La idea que a continuación se estudia es la posibilidad de expresar a $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en una fórmula que sólo incluya las operaciones: suma, multiplicación por elementos de K , y conmutadores. Desde luego hay que dar la fórmula explícita para poderla usar.

El conjunto \mathfrak{R} de todos los polinomios no-conmutantes en x_1, x_2, \dots es el álgebra asociativa libre sobre K con generadores x_1, x_2, \dots . Denota por \mathfrak{R}^0 al subconjunto mínimo de \mathfrak{R} satisfaciendo las condiciones: a) $x_1, x_2, \dots \in \mathfrak{R}^0$; b) Si $P \in \mathfrak{R}^0$ y $Q \in \mathfrak{R}^0$ entonces $\lambda P + \mu Q \in \mathfrak{R}^0$ ($\lambda, \mu \in K$) y $\{P, Q\} \in \mathfrak{R}^0$.

Define un mapeo lineal $P \mapsto P^0$ de \mathfrak{R} a \mathfrak{R}^0 por establecer

$$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \cdots i_k)^0 = \frac{1}{k} [\cdots [x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}] \quad (2.41)$$

Con esto se enuncia un

Teorema. Si $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^0$, entonces $P^0 = P$

La demostración de este teorema se puede consultar en el artículo original de Dynkin.

Con este teorema y aquel dado por Campbell y Hausdorff, se enuncia un

Corolario. Los polinomios homogéneos $P_m(X, Y)$ de la serie (2.40) pueden ser expresados en términos de conmutadores. Usando el teorema anterior se tiene que $P^0(X, Y) = P_m(X, Y)$ y en consecuencia

$$Z(X, Y) = Z^0(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_i + q_i > 0} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{p_1! q_1! \cdots p_k! q_k!} (X^{p_1} Y^{q_1} \cdots X^{p_k} Y^{q_k})^0 \quad (2.42)$$

Si queremos ver directamente esta fórmula en términos de conmutadores entonces la escribimos como

$$Z(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_i + q_i > 0} \frac{(-1)^{k-1}}{k (\sum p_i + q_i)} \frac{1}{p_1! q_1! \cdots p_k! q_k!} \times \\ [\cdots \underbrace{[X, X], \dots, X]_{p_1}, \underbrace{Y, Y, \dots, Y]_{q_1}, \dots, \underbrace{X, X, \dots, X]_{p_n}, \underbrace{Y, Y, \dots, Y]_{q_n}} \quad (2.43)$$

Escrita la serie ya de esta forma inmediatamente podemos ver que los términos nulos son aquellos en los que p_1 es 0 ó 1. Más explícitamente, usando que $p_i + q_i > 0$, tenemos tres casos posibles para q_1 y p_1 que serán de interés en el Capítulo 4. El primer caso es: si $p_1 = 0$ entonces necesariamente $q_1 = 1$, llevando a que $p_2 \geq 1$. El segundo caso es $p_1 = 1$ y $q_1 = 0$, esto nos conduce a que $p_2 = 0$ y $q_2 \neq 0$. El último caso es aquel donde simplemente $p_1 = 1$ y $q_1 \geq 1$. Estos dos últimos casos nos dicen que cada uno de esos términos de la serie inician con el conmutador anidado $[X, Y]$, mientras que el primer caso nos da un conmutador de la forma $[Y, X]$. Esto será de gran utilidad para el cálculo de series explícitas.

Para concluir esta pequeña subsección sólo hay algunos comentarios que hacer alrededor de la fórmula de Dynkin (2.43). Evidentemente dicha fórmula resulta bastante más útil para obtener los términos de la serie, que aquella que inicialmente se encontró, ya que reduce muchísimos cálculos. Sin embargo, aunque resulta importante la reducción de cálculos, sigue siendo aún extraordinariamente compleja al aumentar el orden de los conmutadores anidados. Uno de los principales argumentos que se usa en este sentido es el hecho que muchos de los términos obtenidos por la fórmula de Dynkin no son independientes debido a la identidad de Jacobi y es preciso reducir los términos del mismo grado y escribirlos usando una base de monomios (base de Hall por ejemplo). Para conocer más de la complejidad con que aumentan los cálculos para hallar contribuciones a la serie, así como para la proposición de algoritmos que reducen dicha complejidad, puede consultarse el artículo [11].

2.3.3. Operador de cuantización

Grupo de multiplicación. Recordemos que estamos usando simultáneamente $X^i, i = 1, \dots, d$ como una base para \mathfrak{g} y además para coordenadas en \mathfrak{g}^* . Esto nos permite establecer, al menos para $t \in \mathbb{R}$ pequeño, una correspondencia entre elementos de

grupo $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, y funciones de la forma $\exp(tX)$ sobre \mathfrak{g}^* . Mapeando la multiplicación de grupo a las funciones via esta correspondencia nos lleva a la cuantización BCH.

Habiendo ya conocido la serie BCH, nos proponemos introducir un operador bi-diferencial \hat{D} sobre \mathfrak{g}^* . Entonces mostraremos que \hat{D} provee un producto \star para funciones de la forma $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$. Pero ya que estas funciones separan puntos sobre \mathfrak{g}^* , el producto (\star) se extiende a toda el álgebra \mathcal{A} .

Símbolo para el producto estrella (\star_1) . Trataremos de definir el símbolo \hat{D} tanto como sea posible. Por única ocasión escribiremos a \hat{D} en la siguiente forma expandida

$$\hat{D}(f, g) := \hat{D}(X, \hat{c}, \overleftarrow{\partial}_1, \overleftarrow{\partial}_2, \dots, \overleftarrow{\partial}_d, \overrightarrow{\partial}_1, \overrightarrow{\partial}_2, \dots, \overrightarrow{\partial}_d)(f, g) \quad (2.44)$$

Esto es para dejar en claro que \hat{D} depende de las coordenadas X^i (denotadas aquí como vector X), de las constantes de estructura (englobadas todas en \hat{c}) y de los operadores diferenciales básicos ∂_i .

2.3.4. Definición

El símbolo de \hat{D} como definido en la ecuación (2.44) es la expresión multivariable

$$D(X, \hat{c}, (s_1, s_2, \dots, s_d), (t_1, t_2, \dots, t_d)) \quad (2.45)$$

obtenido por reemplazar a $\overleftarrow{\partial}_i$ en \hat{D} por s_i y a $\overrightarrow{\partial}_i$ por t_j , donde s_i y t_j , $i, j \in \{1, \dots, d\}$ son variables conmutativas real-valuadas.

Por comodidad de notación hacemos $s = (s_1, s_2, \dots, s_d)$ y $t = (t_1, t_2, \dots, t_d)$, denotando entonces al símbolo por

$$D(X, \hat{c}, s, t) \quad (2.46)$$

Veremos que $D(X, \hat{c}, s, t)$ dependerá linealmente en X y es mejor considerada como una serie de potencias en las s_i y t_j con coeficientes no constantes dados por productos múltiples de las c_k^{ij} con un único X^l . Ahora procedemos a construir el símbolo D de \hat{D} usando la fórmula BCH.

Mientras que $\exp X \cdot \exp Y$ está dada por la exponencial de la serie $Z(X, Y)$, ahora tomemos sólo la exponencial de los términos que incluyen conmutadores, es decir, exponenciamos $Z(X, Y) - X - Y$. Dada la serie en (2.37) tenemos algo de la forma

$$\exp [Z(X, Y) - X - Y] = \exp \left[\frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots \right] \quad (2.47)$$

Ahora en la ecuación (2.47) sustituimos $X = s_i X^i$ y $Y = t_i Y^i$. Recordemos que estamos usando la notación de Einstein por lo que estamos sumando sobre todos los elementos desde 1 hasta d . La expresión resultante es precisamente el símbolo que estamos buscando.

$$\begin{aligned}
D(X, \hat{c}, s, t) &= e^{Z(X,Y)-X-Y} \\
&:= \exp \left\{ \frac{1}{2} [s_i X^i, t_j X^j] + \frac{1}{12} \left([[s_i X^i, t_j X^j], t_k X^k] - [[s_i X^i, t_j X^j], s_k X^k] \right) + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

en donde las s_i y t_j ahora son escalares que podemos extraer del conmutador. Además, dado que $[X^i, X^j]$ se reduce a $c_k^{ij} X^k$, obtenemos la simplificación

$$D(X, \hat{c}, s, t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} X^k c_k^{ij} s_i t_j + \frac{1}{12} \left(X^k c_k^{im} c_m^{lj} s_i t_j - X^k c_k^{ml} c_m^{ij} s_i t_j \right) + \dots \right\} \tag{2.49}$$

De esta forma esperamos que los términos subsecuentes de la serie que define al símbolo D sean de una naturaleza clara para obtenerse. No debe haber confusión acerca de la exponenciación ya que para los propósitos del símbolo, y de \hat{D} , las X^i están siendo interpretadas como coordenadas de \mathfrak{g}^* y por lo tanto conmutan entre ellas. También todos los otros términos \hat{c}, s, t conmutan libremente entre sí. Ahora, uno obtiene el operador bi-diferencial \hat{D} al reemplazar a s_i por $\overleftarrow{\partial}_i$ y a t_j por $\overrightarrow{\partial}_j$. Esto obtiene

$$\hat{D} = \mathcal{I} + \frac{1}{2} X^k c_k^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j + \dots \tag{2.50}$$

donde \mathcal{I} nos indica que el operador bi-diferencial a orden cero nos da la multiplicación de la funciones solamente. La ecuación (2.50) nos dice que el producto estrella \star_1 definido por

$$f \star_1 g = \hat{D}(f, g) \tag{2.51}$$

nos da una deformación completamente válida del producto. en la dirección de paréntesis de Poisson. En este desarrollo hemos dejado de lado el parámetro ϵ , pero este puede ser introducido sustituyendo simplemente a c_k^{ij} por ϵc_k^{ij} .

De la ecuación (2.50) queda claro que el límite clásico y semi-clásico se cumplen, por lo que resta por demostrar sólomente que el producto es asociativo. Empezamos por demostrar que el producto es asociativo para funciones de la forma $\exp(X)$, con $X \in \mathfrak{g}$. Consideremos el producto $\exp(s_i X^i) \star_1 \exp(t_j X^j)$. Se sigue de la ecuación (2.44) y de la regla de derivar a la exponencial que

$$\begin{aligned}
&\exp(s_i X^i) \star_1 \exp(t_j X^j) \\
&= \hat{D}(X, \hat{c}, \overleftarrow{\partial}_1, \overleftarrow{\partial}_2, \dots, \overleftarrow{\partial}_d, \overrightarrow{\partial}_1, \overrightarrow{\partial}_2, \dots, \overrightarrow{\partial}_d)(\exp(s_i X^i), \exp(t_j X^j)) \\
&= D(X, \hat{c}, (s_1, s_2, \dots, s_d), (t_1, t_2, \dots, t_d)) \exp(s_i X^i) \exp(t_j X^j)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho $\frac{d}{dX} \exp(tX) = t \exp(tX)$. Ahora, usando la ecuación (2.48) tenemos

$$\begin{aligned}
\exp(s_i X^i) \star_1 \exp(t_j X^j) &= \exp [Z(s_i X^i, t_j X^j) - s_i X^i - t_j X^j] \exp(s_i X^i) \exp(t_j X^j) \\
&= \exp [Z(s_i X^i, t_j X^j)]
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Pero la ecuación (2.52) nos dice que el producto estrella entre exponenciales corresponde sólo al grupo de multiplicación via la fórmula BCH, comparemos a (2.52) con (2.36). Esto obtiene la asociatividad para esta familia de funciones. Pero ya que estas funciones separan todos los puntos de \mathfrak{g}^* , \star_1 es un producto bi-diferencial sobre \mathfrak{g}^* y, por lo tanto su paréntesis define una estructura simpléctica para \mathfrak{g}^* .

Al ser más general el producto deformado obtenido por la fórmula BCH que el de Moyal, automáticamente queda demostrada la asociatividad del producto de Moyal. De hecho el producto de Moyal se recupera por considerar simplemente que el conmutador $[X^i, X^j]$ es constante para todo $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

2.3.5. Comentarios adicionales

En este capítulo hemos tanto motivado porque es necesario manejar álgebras no conmutativas como el estudio formal de un producto deformado el cuál incluye naturalmente la no-conmutatividad. Vimos que a raíz del producto de Moyal y la construcción de una estructura simpléctica para funciones en el espacio fase, es que se pudo definir correctamente lo que es una deformación del producto con su respectiva cuantización y dar algunos ejemplos útiles.

El formalismo construido en este capítulo se hizo exclusivamente para sistemas con topología de \mathbb{R}^d , sin embargo, sistemas de interés físico en los cuales construimos coordenadas generalizas por lo general no tienen dicha topología. De hecho, uno siempre busca coordenadas efectivas o transformaciones que faciliten la solución de las ecuaciones y/o estudio de las propiedades dinámicas, llevando inmediatamente a que la estructura topológica de las variables cambia, por lo que sería necesario extender este formalismo a espacios con una estructura topología más general.

En el capítulo anterior vimos el método de Dirac para sistemas con constricciones a fin de extender la cuantización canónica para aquellos sistemas singulares y que en un principio dichas constricciones nos resultan desconocidas. Este formalismo trabaja muy bien en una topología \mathbb{R}^n . Uno de los problemas que se encuentran a la hora de cuantizar en dicho formalismo es el de ordenamiento de operadores, esto por que el paréntesis de Dirac de dos variables en general resulta no solo no-conmutativo sino que también en ordenes cuadráticos o superiores, esto se verá en el siguiente capítulo. Una combinación entre el formalismo de Dirac y la cuantización BCH suena bastante asequible para el estudio cuántico de sistemas con constricciones. Aunque aquí sólo trabajamos sistemas con constricciones de segunda clase, puede verse que una cuantización usando BCH para sistemas de primera clase usando el método de Dirac también es posible, ya que en todos estos casos la reducción de variables (y cambio de topología) se da a nivel cuántico.

Esto nos lleva a decir, que la cuantización sobre espacios curvos no sólo es un tema que sigue abierto sino de vital importancia y mucha dificultad, sobre todo porque la cuantización canónica presenta problemas muchas veces desde un primer intento e incluso a veces en el mismo espacio plano sólo con cambiarse a coordenadas curvilineas. En un sistema donde sus coordenadas no son las cartesianas, el Hamiltoniano de la

partícula libre es

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij} P_i P_j \quad (2.53)$$

donde g^{ij} es el inverso de la métrica que en general depende de las coordenadas que asociamos al sistema. Cuantizar canónicamente lleva a automáticos problemas de ordenamiento, esto sin considerar aún siquiera propiedades mismas de la variedad en cuestión: objeciones como si es compacta, tiene variables cíclicas o constricciones.

El primer paso que se da a fin de incluir sistemas con topología diferente a \mathbb{R}^d es el tratamiento de sistemas con variables cíclicas. Clásicamente las ecuaciones por si mismas no presentan problemas con la topología del sistema ya que se pueden escribir en coordenadas que reproduzcan la ciclicidad del sistema, como por ejemplo el mapeo exponencial $\exp\{\epsilon x\}$, con x una coordenada, el cual es completo para el simple caso donde puede haber coordenadas con ciclicidad. En estos casos el uso de la cuantización BCH resulta muy útil puesto que la cuantización canónica no reproduce dicha topología. Supongamos que θ_i es una variable cíclica, su paréntesis de Poisson con su respectivo momento es $\{\theta_i, P_\theta\} = 1$. Promover dichas variables a operadores y suponer que dichas variables tienen un conmutador $[\theta_i, P_i]$, genera un error ya que el operador asociado θ debe ser un observable físico y $\hat{\theta}_i$ no reproduce la ciclicidad del “observable posición” de la partícula. Una manera de hacerlo mejor es cuantizar con el operador $e^{i\hat{\theta}}$ el cuál de manera natural incluye la topología del sistema y además está bien definido para cualquier valor de θ en los reales. Es en este sentido que la cuantización BCH se vuelve muy útil, un ejemplo sencillo y claro de esta implementación puede verse en [12].

En el siguiente capítulo estudiaremos el caso de una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera, esto ejemplificará muy bien el uso del método de Dirac y las precauciones que hay que tomarse cuando realizamos la cuantización canónica a estos paréntesis. A fin de evitar problemas de ordenamiento de operadores a la hora de cuantizar, primero reducimos el sistema a variables efectivas y luego cuantizamos. Dado que identificaremos las variables reducidas con los momentos angulares conocidos, podemos concluir que el camino seguido es bueno. Sin embargo, para sistemas más generales no siempre resulta equivalente:

Sist. clásico extendido \longrightarrow Sist. cuántico extendido \longrightarrow Sist. cuántico reducido
 Sist. clásico extendido \longrightarrow Sist. clásico reducido \longrightarrow Sist. cuántico reducido

En general el problema viene a nivel cuántico. Si se cuantizó a nivel de sistema extendido pueden existir muchas reducciones, y si se cuantiza el sistema reducido pueden obtenerse muchas cuantizaciones, y en general no coincidir ninguna de ellas. Un tratamiento extenso de estas cuantizaciones no-equivalentes se puede encontrar en [13].

Capítulo 3

Partícula Libre Sobre una Esfera

En este capítulo se aplica todo el formalismo descrito en el Capítulo 1 al problema de una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera de radio R centrada en el origen. Una vez obtenidos los paréntesis de Dirac se aplican dos mapeos que reducen la cantidad de variables del sistema de las 6 iniciales a 4, y cuyos paréntesis de Poisson de las nuevas variables son los triviales. Con esto se estudia brevemente la partícula cuántica.

3.1. Sistema con Constricciones

La partícula libre restringida a moverse sobre una esfera es un problema muy sencillo, para el cuál el formalismo de Dirac resulta innecesario puesto que basta escribir el Lagrangiano de la partícula en un sistema de coordenadas independientes, por ejemplo, en coordenadas esféricas donde $r = R$ es constante. Sin embargo, la complicación de escribirlo en coordenadas cartesianas para encontrar los paréntesis de Dirac y posteriormente su cuantización, no sólo resulta un ejemplo muy ilustrativo de la aplicación del formalismo, sino que también como paso previo nos ayudará ampliamente en la generalización a usar estructuras simplécticas más generales.

Sea L el Lagrangiano de una partícula libre en coordenadas cartesianas y sea $\chi_1 \equiv x_i x^i - R^2 \approx 0$ la constricción (primaria) que indica que la partícula debe moverse sobre la esfera. Entonces tenemos que el sistema es descrito por

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}^i - \lambda_1 \chi_1 \quad (3.1)$$

y en consecuencia el Hamiltoniano total es

$$H_T = \frac{1}{2m} \dot{p}_i \dot{p}^i + \lambda_1 \chi_1 \quad (3.2)$$

donde i toma los valores 1, 2 y 3. Con este Hamiltoniano podemos evolucionar la

constricción y así obtener las condiciones de consistencia, esto es:

$$\dot{\chi}_1 = \{\chi_1, H_T\} = \left\{x_i x^i, \frac{1}{2m} p_j p^j + \lambda_1 (x_j x^j - R^2)\right\} = \frac{2}{m} x^i p^j \{x_i, p_j\} = \frac{2}{m} x_i p^i \approx 0$$

Esto nos está indicando que hay una nueva constricción (secundaria) la cual también hay que considerar, a saber:

$$\chi_2 \equiv x_i p^i \approx 0 \quad (3.3)$$

Al evolucionar esta nueva constricción podemos ver que ya sólo se está fijando el multiplicador de Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_2 = \{\chi_2, H_T\} &= \left\{x_i p^i, \frac{1}{2m} p_j p^j + \lambda_1 (x_j x^j - R^2)\right\} \\ &= \frac{1}{m} p^j \{x_i p^i, p_j\} + 2\lambda_1 x^j \{x_i p^i, x_j\} = \frac{1}{m} p_i p^i - 2\lambda_1 x_i x^i \approx 0 \end{aligned}$$

ya que ésta ecuación depende de λ_1 . Así tenemos sólo dos constricciones y son de segunda clase ya que el paréntesis de Poisson entre ellas es distinto de cero y está dado por

$$\{\chi_1, \chi_2\} = \{x_j x^j - R^2, x_j p^j\} = 2x^j \{x_j, x_j p^j\} = 2x_i x^i = 2R^2 \quad (3.4)$$

por lo que la matriz del paréntesis de las constricciones es

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2R^2 \\ -2R^2 & 0 \end{pmatrix} \implies C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2R^2} \\ \frac{1}{2R^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Podemos notar que ésta matriz es no singular y por lo tanto su inversa está bien definida, de ahí que sean de segunda clase y con ellas podamos definir los paréntesis de Dirac correctamente.

3.2. Paréntesis de Dirac Asociados

Una vez encontradas las constricciones y construida la matriz del paréntesis de Poisson entre ellas, lo siguiente es construir los paréntesis de Dirac para cada una de las variables. Para ayudarnos en los cálculos a continuación se lista la manera en que actúa el paréntesis de Poisson entre las constricciones y las variables.

$$\{x^i, \chi_1\} = \{x^i, x_j x^j - R^2\} = 0 \quad (3.6)$$

$$\{p_i, \chi_1\} = \{p_i, x_j x^j - R^2\} = -2x_i \quad (3.7)$$

$$\{x^i, \chi_2\} = \{x^i, x_j p^j\} = x^i \quad (3.8)$$

$$\{p_i, \chi_2\} = \{p_i, x_j p^j\} = -p_i \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

Una vez hecho esto, inmediatamente se sigue de la definición 1.31 que

$$\{x^i, x^j\}^* = 0 \quad (3.11)$$

$$\{x^i, p_j\}^* = \delta_j^i - \frac{1}{R^2} x^i x_j \quad (3.12)$$

$$\{p_i, p_j\}^* = -\frac{1}{R^2} (x_i p_j - x_j p_i) \quad (3.13)$$

Como podemos ver, estos paréntesis de Dirac ya no son tan sencillos como los iniciales, sin embargo tienen la propiedad de que están bien definidos sin importar que hagamos las constricciones fuertemente igual a cero. Entonces estos nuevos paréntesis podrían considerarse buenos candidatos a realizarse cuánticamente. Se presentan varios problemas, uno de ellos es que no podemos simplemente cambiar momentos por derivadas y cambiar dichos paréntesis a conmutadores ya que el momento en algunos de ellos aparece de ambos lados. Más aun, la matriz simpléctica asociada es singular, es decir, el determinante de la siguiente matriz es cero.

$$\omega^{\alpha\beta} = \{Z^\alpha, Z^\beta\}^* = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & R^2 - x_1^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 x_2 & R^2 - x_2^2 & -x_2 x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & R^2 - x_3^2 \\ -R^2 + x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & 0 & -(x_1 p_2 - x_2 p_1) & -(x_1 p_3 - x_3 p_1) \\ x_1 x_2 & -R^2 + x_2^2 & x_2 x_3 & (x_1 p_2 - x_2 p_1) & 0 & -(x_2 p_3 - x_3 p_1) \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & -R^2 + x_3^2 & (x_1 p_3 - x_3 p_1) & (x_2 p_3 - x_3 p_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Se ha tomado el índice α corriendo de 1 a 6, $Z^\alpha = (x^i, p_j)$ para el caso específico cuando la dimensión de las variables es 3. Sin embargo, en el procedimiento anterior es completamente válido para cualquier dimensión ya que el único lugar donde se ha tomado la dimensión como 3 es en construir esta matriz particular. No podemos invertir dicha matriz y en consecuencia no se puede definir un potencial simpléctico con el cual elegir una buena base y cuantizar. En este caso tenemos 3 coordenadas y 3 momentos además de 2 constricciones por lo que un sistema de 2 coordenadas y 2 momentos que satisfaga las condiciones debe contener una matriz simpléctica invertible y ser un mejor candidato para realizarse cuánticamente.

3.3. Mapeo por Coordenadas Esféricas

Para evitar la singularidad de la matriz simpléctica encontrada arriba es conveniente hacer un mapeo a variables reducidas. Lo primero que se ocurre por tratarse de una esfera, es evidentemente usar coordenadas esféricas. Entonces proponemos que

$$x_1 = R \sin \theta \cos \varphi \quad (3.14)$$

$$x_2 = R \sin \theta \sin \varphi \quad (3.15)$$

$$x_3 = R \cos \theta \quad (3.16)$$

Las nuevas coordenadas son (θ, φ) con dominio en $[0, 2\pi]$ y $(0, \pi)$ respectivamente. Estas coordenadas satisfacen la primera restricción. También queremos que satisfagan la segunda restricción, sean canónicamente conjugadas a sus respectivos momentos (P_θ, P_φ) y por supuesto,

reproduzcan los paréntesis de Dirac en su totalidad. Es conveniente entonces proponer que las variables de espacio fase $z^\alpha = (\theta, \varphi, P_\theta, P_\varphi)$ tienen una estructura simpléctica dada por

$$J^{\alpha\beta} = \{z^\alpha, z^\beta\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

es decir, se propone que las variables z^α sean canónicamente conjugadas. Nótese bien que dado que hay más ecuaciones diferenciales parciales que incógnitas (P_θ, P_φ), no es claro que haya una solución, si embargo sí existe dicha solución y es muy fácil de obtenerla. Ahora nos disponemos a encontrarla.

Recordando la definición de paréntesis de Poisson para variables canónicamente conjugadas se tiene que

$$\{A, B\} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial P_\theta} - \frac{\partial A}{\partial P_\theta} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial B}{\partial P_\varphi} - \frac{\partial A}{\partial P_\varphi} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right)$$

Dado que x_3 sólo depende de θ , la ecuación anterior se reduce para los 3 momentos, esto es

$$\{x^3, p_j\}^* = \delta_j^3 - \frac{1}{R^2} x^3 x_j = \frac{\partial x^3}{\partial \theta} \frac{\partial p_j}{\partial P_\theta} = -R \sin \theta \frac{\partial p_j}{\partial P_\theta}$$

De manera genérica esto nos indica que los momentos son lineales en P_θ

$$p_j = -\frac{\delta_j^3 - \frac{1}{R^2} x^3 x_j}{R \sin \theta} P_\theta + G_j(\theta, \varphi, P_\varphi) \quad (3.18)$$

Ya hemos encontrado la dependencia total de los momentos con respecto a P_θ , ahora tomemos x^1 y veamos que

$$\begin{aligned} \{x^1, p_j\}^* &= \delta_j^1 - \frac{1}{R^2} x^1 x_j = \frac{\partial x^1}{\partial \theta} \frac{\partial p_j}{\partial P_\theta} + \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \frac{\partial p_j}{\partial P_\varphi} \\ &= R \cos \theta \cos \varphi \left(-\frac{\delta_j^1 - \frac{1}{R^2} x^1 x_j}{R \sin \theta} \right) + (-R \sin \theta \cos \varphi) \frac{\partial p_j}{\partial P_\varphi} \end{aligned}$$

Notemos que en ésta última igualdad se hace evidente que la dependencia de p_j con respecto a P_φ es lineal y entonces puede encontrarse que las soluciones ya particularizadas quedan como:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{R} \cos \theta \cos \varphi P_\theta - \frac{1}{R} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} P_\varphi + h_1(\theta, \varphi) \\ p_2 &= \frac{1}{R} \cos \theta \sin \varphi P_\theta + \frac{1}{R} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} P_\varphi + h_2(\theta, \varphi) \\ p_3 &= -\frac{1}{R} \sin \theta P_\theta + h_3(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Bien se puede hacer lo mismo y obtener resultados similares usando la variable x^2 , es decir, esta misma solución propuesta satisface las relaciones de conmutación $\{x^2, p_j\}^*$ por lo que todos los conmutadores entre $\{x^i, p_j\}^*$ son satisfechos por los nuevos momentos encontrados sin importar como son las funciones h_i . Es menester ahora satisfacer las relaciones $\{p_i, p_j\}^*$, sin embargo usando $h_j(\theta, \varphi) = 0$, es meramente una tarea algebraica comprobar que se satisfacen dichos paréntesis de Dirac de los momentos.

Otro hecho también algebraico es comprobar que con $h_j(\theta, \varphi) = 0$ se satisface la segunda constricción $x^i p_i = 0$, por lo que se deja como solución general:

$$p_1 = \frac{1}{R} \cos \theta \cos \varphi (P_\theta + u) - \frac{1}{R} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (P_\varphi + v) \quad (3.19)$$

$$p_2 = \frac{1}{R} \cos \theta \sin \varphi (P_\theta + u) + \frac{1}{R} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (P_\varphi + v) \quad (3.20)$$

$$p_3 = -\frac{1}{R} \sin \theta (P_\theta + u) \quad (3.21)$$

donde u y v son constantes arbitrarias las cuales pueden ser fijadas por las condiciones iniciales o incluso ponerse cero desde un principio sin afectar las relaciones de paréntesis, ya que sólo corresponden a un corrimiento del valor inicial de los momentos. Puede encontrarse en la referencia [14] un desarrollo similar, salvo que el momento entregado contiene un error que aquí se corrige, sin embargo sus conclusiones para cuantizar son análogas a las aquí dadas.

3.3.1. El Hamiltoniano en las nuevas variables

Una vez obtenido un mapeo que satisface las relaciones de conmutación correspondientes a los paréntesis de Dirac y donde las nuevas variables son canónicamente conjugadas, lo que resta es escribir tanto al Hamiltoniano en estas nuevas variables y con ellas obtener la dinámica correspondiente. Veamos que, haciendo los parámetros arbitrarios $u = v = 0$, el Hamiltoniano toma la forma:

$$H(z^\alpha) = \frac{1}{2m} p_i(z^\alpha) p^i(z^\alpha) = \frac{1}{2mR^2} \left(P_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} P_\varphi^2 \right) \quad (3.22)$$

Con este Hamiltoniano podemos obtener la evolución temporal de las variables lo cual resulta en

$$\dot{\theta} = \{\theta, H\} = \frac{1}{mR^2} P_\theta \quad (3.23)$$

$$\dot{P}_\theta = \{P_\theta, H\} = \frac{1}{mR^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} P_\varphi^2 \quad (3.24)$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H\} = \frac{1}{mR^2} \frac{P_\varphi}{\sin \theta} \quad (3.25)$$

$$\dot{P}_\varphi = \{P_\varphi, H\} = 0 \quad (3.26)$$

Notemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $P_\varphi = 0$ es solución del sistema de ecuaciones y corresponde a un círculo máximo. Notemos por igual que el momento angular P_φ se conserva por lo que, la solución debe estar contenida en un plano. Así, la solución corresponde a la intersección de la esfera con un plano que pasa por el origen, es decir, las soluciones son círculos máximos.

3.3.2. Cuantización

Una definición del operador Laplaciano para coordenadas curvilíneas puede ser la del operador de Laplace-Beltrami, la cual simplemente toma a dicho operador como la divergencia del gradiente. En un espacio curvo general con métrica g_{ij} y determinante g , se define a la **divergencia** de un campo vectorial X como

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} X^i \right) \quad (3.27)$$

donde x^i son las coordenadas curvilíneas y X^i las componentes de X . El **gradiente** de una función f es

$$(\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \quad (3.28)$$

Por lo que el Laplaciano de una función queda definido como

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{|g|} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \quad (3.29)$$

En el caso aquí tratado, el de una esfera parametrizada por ángulos esféricos, la métrica se ve como

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \implies g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Con estas herramientas ya podemos escribir el Hamiltoniano cuántico del sistema. Primero realizamos la cuantización canónica, es decir, promovemos las variables a operadores

$$\theta \mapsto \hat{\theta}, \quad \varphi \mapsto \hat{\varphi}, \quad P_\theta \mapsto \hat{P}_\theta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad P_\varphi \mapsto \hat{P}_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.31)$$

y cambiamos los paréntesis de Poisson por conmutadores

$$[\hat{\theta}, \hat{P}_\theta] = i\hbar, \quad [\hat{\varphi}, \hat{P}_\varphi] = i\hbar, \quad 0 \text{ otros casos} \quad (3.32)$$

Finalmente, para promover la función Hamiltoniana a operador hay que tener en cuenta que la definición del Laplaciano toma la inversa de la métrica, y que $\sqrt{g} = \sin \theta$.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2mR^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} P_\theta (\sin \theta P_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} P_\varphi \left(\frac{1}{\sin \theta} P_\varphi \right) \right] \mapsto \\ \hat{H} &= \frac{1}{2mR^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{-\hbar^2}{2mR^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Este operador lo podemos aplicar a una función de estado $\psi(\theta, \varphi)$ para generar las funciones propias y así obtener la descripción cuántica, descripción que es ampliamente conocida.

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (3.34)$$

3.4. Mapeo por Coordenadas Cilíndricas

En la sección anterior todo el desarrollo para poder cuantizar se llevó mediante el mapeo de coordenadas esféricas, sin embargo, no es el único mapeo posible a realizar ni mucho menos la solución es única. En principio, cualquier mapeo de dos variables y dos momentos con estructura simpléctica y que satisfaga las constricciones, debe también satisfacer el álgebra de Dirac. Por supuesto, el problema radica en encontrar mapeos que además de satisfacer las constricciones deben trivializar la operación de paréntesis a ser canónicas para poder cuantizar

adecuadamente. Como prueba de que la solución encontrada no es única, a continuación se hace un desarrollo análogo al anterior usando ahora coordenadas cilíndricas, en este caso obtenidas como parametrización por superficie de revolución alrededor del eje z , y que en el tratamiento del caso no-conmutativo resultarían ligeramente más fáciles de trabajar para la obtención de un mapeo que trivialice dicha no-conmutación de las variables originales.

El mapeo a usar ahora es

$$x_1 = \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta \quad (3.35)$$

$$x_2 = \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta \quad (3.36)$$

$$x_3 = z \quad (3.37)$$

Por conveniencia, el ordenamiento que tomaré es $(z, \theta, P_z, P_\theta)$ dando lugar a z^α con el índice corriendo de 1 a 4. Ahora el dominio de las coordenadas (z, θ) es $(-R, R)$ y $[0, 2\pi)$ respectivamente. Notemos que esta parametrización automáticamente satisface la primera constricción. Ahora construyamos los respectivos momentos considerando que las nuevas variables satisfacen los paréntesis de Poisson canónicos. Dado que x^3 solo depende de z , es nuestra primera elección

$$\{x^3, p_j\} = \delta_j^3 - \frac{1}{R^2} x^3 x_j = \delta_j^3 - \frac{z}{R^2} x_j = \frac{\partial p_j}{\partial P_z} \quad (3.38)$$

Lo que nos lleva inmediatamente a

$$p_j = \left(\delta_j^3 - \frac{z}{R^2} x_j\right) P_z + G_j(z, \theta, P_z) \quad (3.39)$$

Usando ahora la variable x^1 se tiene

$$\begin{aligned} \{x^1, p_j\} &= \delta_j^1 - \frac{1}{R^2} x^1 x_j = \frac{\partial x^1}{\partial z} \frac{\partial p_j}{\partial P_z} + \frac{\partial x^1}{\partial \theta} \frac{\partial p_j}{\partial P_\theta} \\ &= \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos \theta \left(\delta_j^3 - \frac{z}{R^2} x_j\right) + \left(-\sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta\right) \frac{\partial p_j}{\partial P_\theta} \end{aligned}$$

Con esta relación ya quitamos toda la dependencia de los momentos y posiblemente ya sólo puede tener sumado un término dependiente únicamente de las coordenadas. Como en el caso de coordenadas esféricas, es meramente un hecho algebraico mostrar que dicha ecuación ya nos da una completa solución que satisface todos los paréntesis de Dirac además de la segunda constricción. Así, los momentos correspondientes están dados por

$$p_1 = -\frac{z}{R^2} \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta (P_z + u) - \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 - z^2}} (P_\theta + v) \quad (3.40)$$

$$p_2 = -\frac{z}{R^2} \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta (P_z + u) + \frac{\cos \theta}{\sqrt{R^2 - z^2}} (P_\theta + v) \quad (3.41)$$

$$p_3 = \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) (P_z + u) \quad (3.42)$$

donde u y v son también dos constantes arbitrarias, que quedan fijas por las condiciones iniciales que se elijan para los momentos. Cabe remarcar, que esta solución satisface todos los paréntesis de Dirac tomando en cuenta que las relaciones de conmutación entre las variables $(z, \theta, P_z, P_\theta)$ son canónicas.

3.4.1. El Hamiltoniano en estas variables

Como con el caso anterior de coordenadas esféricas, escribimos al Hamiltoniano en estas nuevas coordenadas haciendo los parámetros $u = v = 0$, el cual resulta ser:

$$H(z^\alpha) = \frac{1}{2m} p_i(z^\alpha) p^i(z^\alpha) = \frac{1}{2mR^2} \left((R^2 - z^2) P_z^2 + \frac{R^2}{(R^2 - z^2)} P_\theta^2 \right) \quad (3.43)$$

y nuevamente obtener la evolución temporal de cada una de las variables

$$\dot{z} = \{z, H\} = \frac{1}{mR^2} (R^2 - z^2) P_z \quad (3.44)$$

$$\dot{P}_z = \{P_z, H\} = \frac{z}{mR^2} \left(P_z^2 - \frac{R^2 P_\theta^2}{(R^2 - z^2)^2} \right) \quad (3.45)$$

$$\dot{\theta} = \{\theta, H\} = \frac{P_\theta}{m(R^2 - z^2)} \quad (3.46)$$

$$\dot{P}_\theta = \{P_\theta, H\} = 0 \quad (3.47)$$

Una posible solución a este sistema de ecuaciones es hacer, $z = P_z = 0$ y $P_\theta = cte \neq 0$, con esto nos resulta que θ es lineal en el tiempo y por lo tanto la solución corresponde al círculo máximo contenido en el plano xy . Dado que el momento angular P_θ se conserva en el tiempo, todas las posibles soluciones al sistema de ecuaciones estarán contenidas en un plano dando lugar a soluciones como la intersección entre la esfera y un plano que pasa por su centro, es decir, las soluciones siempre son círculos máximos.

3.4.2. Cuantización

Para poder cuantizar, como en el caso anterior, es preciso primero conocer la métrica del cambio de coordenadas y con ella poder asegurarnos de que el ordenamiento es adecuado al momento de cambiar las variables por operadores. La métrica de la esfera en estas coordenadas no es algo común de encontrar en la literatura pero puede obtenerse fácilmente de la forma en que cambia el tensor métrico de coordenadas cartesianas a curvilíneas, es decir, la nueva métrica inducida por la métrica plana es:

$$g_{kl}(y) = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \delta_{ij} \quad (3.48)$$

considerando que la inversa de las coordenadas es

$$z = x_3, \quad \theta = \arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad (3.49)$$

obtenemos el tensor métrico

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 - z^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{R^2 - z^2} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

con esto vemos que $\sqrt{g} = R$ y ya estamos listos para escribir el Hamiltoniano cuántico. Iniciamos por la cuantización canónica de las variables, es decir las promovemos a operadores

$$z \mapsto \hat{z}, \quad \theta \mapsto \hat{\theta}, \quad P_z \mapsto \hat{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad P_\theta \mapsto \hat{P}_\theta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.51)$$

y cambiamos los paréntesis de Poisson por conmutadores

$$[\hat{z}, \hat{P}_z] = i\hbar, \quad [\hat{\theta}, \hat{P}_\theta] = i\hbar, \quad 0 \text{ otros casos} \quad (3.52)$$

ordenando adecuadamente las variables en el Hamiltoniano clásico para promoverlas a operadores se tiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2mR^2} \left[P_z ((R^2 - z^2)P_z) + P_\theta \left(\frac{R^2}{R^2 - z^2} P_\theta \right) \right] \mapsto \\ \hat{H} &= \frac{1}{2mR^2} \left[(-i\hbar) \frac{\partial}{\partial z} \left((R^2 - z^2) (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial z} \right) + (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R^2}{R^2 - z^2} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{-\hbar}{2mR^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((R^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{R^2}{R^2 - z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Notemos que la forma cuántica del Hamiltoniano en estas coordenadas es distinta al obtenido en coordenadas esféricas. Sin embargo describe exactamente el mismo sistema ya que ambos mapeos cubren el mismo dominio en la esfera, es decir, la cartas elegidas dejan fuera a los polos de la esfera $x^3 = R$ y $x^3 = -R$ y tienen una variable cíclica con el mismo dominio.

En el siguiente capítulo extenderemos este formalismo al caso de variables de espacio fase con una estructura simpléctica deformada. Aunque los cálculos se complican considerablemente, veremos que el problema se resuelve exactamente de la misma manera. Una vez estudiadas las propiedades de la estructura simpléctica deformada, se obtienen los paréntesis de Dirac para el sistema de una partícula libre sobre una esfera y se encuentra un mapeo que trivialice dichos paréntesis para poder proponer la versión cuántica.

Capítulo 4

Partícula Libre en Variables No-Conmutativas

En el capítulo anterior describimos la dinámica de una partícula sobre la esfera. En ese caso supusimos siempre que las coordenadas iniciales, cartesianas, eran canónicamente conjugadas a los momentos correspondientes. El objetivo de este capítulo es modificar las relaciones canónicas para incluir una no-conmutatividad tanto en las coordenadas así como en los momentos, pero que conserve todas las propiedades de un estructura simpléctica generalizada y desde luego que se reduzca a la canónica cuando se anulen los parámetros que definan la no-conmutatividad. Posteriormente se estudiará la manera en que se debe cuantizar correctamente. Concluiremos el capítulo mostrando una fórmula que genera la serie del operador BCH de un álgebra específica a fin de definir un producto estrella y con él obtener la versión cuántica para una partícula libre no-conmutativa en 3 dimensiones.

4.1. Estructura Simpléctica Deformada

El problema a estudiar será tratado en un principio de manera general con ligeras restricciones para evitar la complicación exagerada de los cálculos. Hay que tener siempre presente que pretendemos describir una partícula libre sobre la esfera por lo cual tendremos desde un inicio dos constricciones en las variables aunque éstas sean no-conmutativas (recordemos que estamos usando indistintamente no-conmutatividad y estructura simpléctica deformada debido a su equivalencia vista en el Capítulo 2). Otra hipótesis que debemos considerar antes de proponer una extensión a la estructura canónica es que las coordenadas formen por sí solas un álgebra y los momentos por otro lado también formen su propia álgebra, esto nos lleva a que la única posibilidad de mezcla sea en los paréntesis entre coordenadas y momentos. Esta consideración se sigue del hecho que si las coordenadas son no-conmutativas los momentos no necesariamente se modifican y viceversa, si hay no-conmutatividad en los momentos las coordenadas bien pueden ser conmutativas y, este último caso cuando la no-conmutación entre los momentos es constante da lugar a una descripción del campo magnetico, por lo que la aplicación física es inmediata. Por supuesto estas consideraciones no son imprescindibles en una teoría más general. Una última consideración que no está a discusión es que la estructura extendida se reduzca a la canónica cuando los parámetros de los que dependa se hagan cero.

Considerando lo anteriormente descrito podemos decir que una estructura simpléctica general y abstracta tiene la forma

$$\{x_i, x_j\} = A_{ijk}x_k \quad (4.1)$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} + C_{ij} + \theta_{ijk}p_k + \bar{\theta}_{ijk}x_k \quad (4.2)$$

$$\{p_i, p_j\} = B_{ijk}p_k \quad (4.3)$$

notación: dada la cantidad de índices que se manejan aquí, se relaja la condición a dos índices repetidos en un término se suman, esto nos ayudará a identificar las identidades de Jacobi más fácilmente. De entrada notemos que tanto A_{ijk} como B_{ijk} son antisimétricos en sus primeros dos índices y que si hacemos los parámetros de extensión cero se reduce a la estructura canónica. Por supuesto los paréntesis siguen cumpliendo las propiedades de bilinealidad y asociatividad. El estudio de un álgebra tan general lo iniciamos considerando cómo se verían modificadas las constricciones del sistema de interés, es decir, un Hamiltoniano de partícula libre restringida a moverse sobre una esfera ($\chi_1 = x_i x^i - R^2 \approx 0$)

$$H_T = \frac{1}{2m}p_i p^i + \lambda_1(x_i x^i - R^2) \quad (4.4)$$

podemos evolucionar la constricción (primaria) usando la nueva álgebra

$$\dot{\chi}_1 = \{\chi_1, H_t\} = \{x_i x^i, \frac{1}{2m}p_j p^j + \lambda_1 x_j x^j\} = \frac{1}{2m}\{x_i x^i, p_j p^j\} + \lambda\{x_i x^i, x_j x^j\} \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2m}4x^i p^j \{x_i, p_j\} + 4\lambda_1 x^i x^j \{x_i, x_j\} \quad (4.6)$$

$$= \frac{2}{m}x^i p^j (\delta_{ij} + C_{ij} + \theta_{ijk}p_k + \bar{\theta}_{ijk}x_k) + \lambda_1 x^i x^j A_{ijk}x_k \quad (4.7)$$

$$= \frac{2}{m}(x^i p_i + x^i p^j C_{ij} + \theta_{ijk}x^i p^j p_k + \bar{\theta}_{ijk}x^i p^j x_k) \quad (4.8)$$

Para seguir conservando las constricciones originales establecemos

$$C_{ij} = 0, \quad \theta_{ijk} = -\theta_{ikj}, \quad \bar{\theta}_{ijk} = -\bar{\theta}_{kji} \quad (4.9)$$

quedando la estructura simpléctica como

$$\{x_i, x_j\} = A_{ijk}x_k \quad (4.10)$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} + \theta_{ijk}p_k + \bar{\theta}_{ijk}x_k \quad (4.11)$$

$$\{p_i, p_j\} = B_{ijk}p_k \quad (4.12)$$

y con esto aseguramos que independientemente de los parámetros elegidos se tiene

$$\chi_1 = x_i x^i - R^2 \approx 0, \quad \chi_2 = x^i p_i \approx 0 \quad (4.13)$$

Queremos que esta estructura generalizada cumpla la identidad de Jacobi. En las variables x 's se ve como

$$\begin{aligned} \{x_i, \{x_j, x_k\}\} + \{x_k, \{x_i, x_j\}\} + \{x_j, \{x_k, x_i\}\} &= 0 \\ \{x_i, A_{jkl}x_l\} + \{x_k, A_{ijl}x_l\} + \{x_j, A_{kil}x_l\} &= 0 \\ (A_{jkl}A_{ilm} + A_{ijl}A_{klm} + A_{kil}A_{jlm})x_m &= 0 \end{aligned}$$

Un tratamiento análogo puede ser hecho a los paréntesis de los momentos, dando como resultado que la identidad de Jacobi impone que las constantes de estructura A_{ijk} y B_{ijk} deben de cumplir

$$A_{jkl}A_{ilm} + A_{ijl}A_{klm} + A_{kil}A_{jlm} = 0 \quad (4.14)$$

$$B_{jkl}B_{ilm} + B_{ijl}B_{klm} + B_{kil}B_{jlm} = 0 \quad (4.15)$$

Para satisfacer la identidad de Jacobi en su totalidad nos hace falta ver las condiciones que imponen otras dos ecuaciones, a saber

$$\{x_i, \{x_j, p_k\}\} + \{p_k, \{x_i, x_j\}\} + \{x_j, \{p_k, x_i\}\} = 0 \quad (4.16)$$

$$\{x_i, \{p_j, p_k\}\} + \{p_k, \{x_i, p_j\}\} + \{p_j, \{p_k, x_i\}\} = 0 \quad (4.17)$$

Trabajar con estas expresiones es un poquito más tedioso ya que los paréntesis mezclan a coordenadas con momentos, sin embargo un desarrollo cuidadoso de la primer relación lleva a obtener

$$\begin{aligned} & \theta_{jki} - A_{ijk} - \theta_{ikj} + (\theta_{jkl}\theta_{ilm} - A_{ijl}\theta_{lkm} - \theta_{ikl}\theta_{jlm}) p_m + \\ & (\theta_{jkl}\bar{\theta}_{ilm} + \bar{\theta}_{jkl}A_{ilm} - A_{ijl}\bar{\theta}_{lkm} - \theta_{ikl}\bar{\theta}_{jlm} - \bar{\theta}_{ikl}A_{jlm}) x_m = 0 \end{aligned}$$

Dada la independencia entre las variables x 's, las p 's y la parte que no depende de dichas variables, cada uno de los coeficientes debe anularse por separado, dando lugar a

$$A_{ijk} = \theta_{jki} - \theta_{ikj} \quad (4.18)$$

$$\theta_{jkl}\theta_{ilm} - A_{ijl}\theta_{lkm} - \theta_{ikl}\theta_{jlm} = 0 \quad (4.19)$$

$$\theta_{jkl}\bar{\theta}_{ilm} + \bar{\theta}_{jkl}A_{ilm} - A_{ijl}\bar{\theta}_{lkm} - \theta_{ikl}\bar{\theta}_{jlm} - \bar{\theta}_{ikl}A_{jlm} = 0 \quad (4.20)$$

Un desarrollo muy similar se puede hacer para la última identidad de Jacobi lo cual será un conjunto de ecuaciones parecidas a las anteriores y a continuación se muestran

$$B_{jki} = \bar{\theta}_{ijk} - \bar{\theta}_{ikj} \quad (4.21)$$

$$B_{jkl}\bar{\theta}_{ilm} - \bar{\theta}_{ijl}\bar{\theta}_{lkm} + \bar{\theta}_{ikl}\bar{\theta}_{jlm} = 0 \quad (4.22)$$

$$B_{jkl}\theta_{ilm} + \theta_{ijl}B_{klm} - \bar{\theta}_{ijl}\theta_{lkm} - \theta_{ikl}B_{jlm} + \bar{\theta}_{ikl}\theta_{jlm} = 0 \quad (4.23)$$

Estas constricciones son derivadas únicamente de las identidades de Jacobi sin importar la dimensión de las variables. A manera de ver más práctica la primer ecuación de cada conjunto, usamos la imposición hecha por las constricciones χ_1 y χ_2 , ecuación (4.9)

$$A_{ijk} = \theta_{ijk} - \theta_{jik} \quad (4.24)$$

$$B_{ijk} = \bar{\theta}_{ijk} - \bar{\theta}_{jik} \quad (4.25)$$

4.2. Paréntesis de Dirac

Con las restricciones y relaciones encontradas en la sección anterior es posible construir de manera general los paréntesis de Dirac que obedecen a la no-conmutatividad propuesta para una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera de radio R , ecuaciones (4.10), (4.11)

y (4.12). Para ello primero calculemos como actúan los paréntesis entre las variables y las constricciones.

$$\{x_i, \chi_1\} = \{x_i, x_j x^j\} = 2x^j \{x_i, x_j\} = 2A_{ijk} x_j x_k$$

Esto nos lleva a la relación

$$\{x_i, \chi_1\} = 2\theta_{jki} x_j x_k \quad (4.26)$$

lo mismo se hace para los momentos

$$\{p_i, \chi_1\} = \{p_i, x_j x^j\} = -2x^j \{x_j, p_i\} = -2x_j (\delta_{ij} + \theta_{jik} p_k + \bar{\theta}_{jik} x_k)$$

considerando la antisimetría en $\bar{\theta}$ tenemos

$$\{p_i, \chi_1\} = 2(-x_i + \theta_{jki} x_j p_k) \quad (4.27)$$

El caso para χ_2 es un poquito más complicado ya que dicha constricción involucra a los momentos

$$\{x_i, \chi_2\} = \{x_i, x^j p_j\} = x^j \{x_i, p_j\} + p^j \{x_i, x_j\} = x^j (\delta_{ij} + \theta_{jik} p_k + \bar{\theta}_{jik} x_k) + p^j A_{ijk} x_k$$

usando la expresión de A en terminos de las θ 's, ecuación (4.24), obtenemos

$$\{x_i, \chi_2\} = x_i + \theta_{jki} x_k p_j + \bar{\theta}_{ijk} x_j x_k \quad (4.28)$$

esto mismo se aplica al caso de los momentos

$$\{p_i, \chi_2\} = \{p_i, x^j p_j\} = x^j \{p_i, p_j\} - p^j \{x_j, p_i\} = x^j B_{ijk} p_k - p_j (\delta_{ji} + \theta_{jik} p_k + \bar{\theta}_{jik} x_k)$$

y finalmente usando la relación de la B con las θ 's, ecuación (4.25), se obtiene

$$\{p_i, \chi_2\} = -p_i + \bar{\theta}_{ijk} x_j p_k + \theta_{jki} p_j p_k \quad (4.29)$$

Antes de construir los paréntesis de Dirac necesitamos la matriz de paréntesis de las constricciones, pero con las herramientas anteriores es fácil ver que

$$\begin{aligned} \{\chi_1, \chi_2\} &= \{\chi_1, x^i p_i\} = x^i \{\chi_1, p_i\} + p^i \{\chi_1, x_i\} \\ &= -x^i 2(-x_i + \theta_{jki} x_j p_k) - p_i 2\theta_{jki} x_j x_k \\ &= 2x_i x^i - 2\theta_{kji} x_i x_j p_k - 2\theta_{jki} x_j x_k p_i = 2x_i x^i \end{aligned}$$

Haciendo las constricciones fuertes, encontramos que

$$\{\chi_1, \chi_2\} = 2R^2 \quad (4.30)$$

por lo que la matriz de constricciones da el mismo resultado que el caso conmutativo

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2R^2 \\ -2R^2 & 0 \end{pmatrix} \implies C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2R^2} \\ \frac{1}{2R^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Con estos resultados ya tenemos todos los elementos necesarios para construir los paréntesis de Dirac. Iniciamos por mostrar como se construye el de las coordenadas. Los detalles algebraicos se omiten ya que son tediosos y no contienen ningun truco que valga la pena mencionarse.

$$\{x_i, x_j\}^* = \{x_i, x_j\} + C^{12} (\{x_i, \chi_1\} \{x_j, \chi_2\} - \{x_i, \chi_2\} \{x_j, \chi_1\})$$

Sustituyendo cada uno de los valores de los paréntesis y agrupando obtenemos

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\}^* = & A_{ijk}x_k - \frac{1}{R^2} [(\theta_{kli}x_j - \theta_{klj}x_i)x_kx_l \\ & + (\theta_{kli}\theta_{mnn} - \theta_{klj}\theta_{mni})x_kx_lx_n p_m + (\theta_{kli}\bar{\theta}_{jmn} - \theta_{klj}\bar{\theta}_{imn})x_kx_lx_mx_n] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Podemos ver que estos paréntesis ya son mucho más complicados que en el caso conmutativo. Ahora veamos como cambian los paréntesis entre las coordenadas y los momentos

$$\{x_i, p_j\}^* = \{x_i, p_j\} + C^{12} (\{x_i, \chi_1\}\{p_j, \chi_2\} - \{x_i, \chi_2\}\{p_j, \chi_1\})$$

La sustitución de cada uno de los paréntesis y la reagrupación de cada uno de los términos en la expresión anterior, si se hace con cuidado y paciencia, se llega a

$$\begin{aligned} \{x_i, p_j\}^* = & \delta_{ij} - \frac{1}{R^2} x_i x_j + \theta_{ijk} p_k + \bar{\theta}_{ijk} x_k \\ & - \frac{1}{R^2} [(\bar{\theta}_{imn}x_j - \theta_{mni}p_j)x_mx_n + (\theta_{mni}x_j - \theta_{nmj}x_i)x_np_m \\ & + (\theta_{kli}\bar{\theta}_{jmn} - \theta_{mnj}\bar{\theta}_{ikl})x_kx_lx_mx_pn + (\theta_{kli}\theta_{mnn} - \theta_{knj}\theta_{mli})x_kx_l p_m p_n] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sólo nos resta ver la nueva estructura de los paréntesis de Dirac para los momentos. Esto se hace a través de un proceso similar a los anteriores

$$\{p_i, p_j\}^* = \{p_i, p_j\} + C^{12} (\{p_i, \chi_1\}\{p_j, \chi_2\} - \{p_i, \chi_2\}\{p_j, \chi_1\})$$

La sustitución de los paréntesis y ordenamiento de cada uno de los términos, exige un poco más de trabajo que los casos anteriores sin embargo todavía es posible hacerlo y se obtiene como resultado

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\}^* = & -\frac{1}{R^2} (x_i p_j - x_j p_i) + B_{ijk} p_k \\ & - \frac{1}{R^2} [(\bar{\theta}_{imn}x_j - \bar{\theta}_{jmn}x_i)x_m p_n + (\theta_{mni}x_j - \theta_{mnj}x_i)p_m p_n + (\theta_{klj}p_j - \theta_{kli}p_j)x_k p_l \\ & + (\theta_{kli}\bar{\theta}_{jmn} - \theta_{klj}\bar{\theta}_{imn})x_m x_k p_l p_n + (\theta_{kli}\theta_{mnn} - \theta_{klj}\theta_{mni})x_k p_l p_m p_n] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aunque la complejidad de las expresiones ha aumentado considerablemente, puede verse que cuando los parámetros que generan la no-conmutatividad se hacen cero ($A_{ijk} = B_{ijk} = \theta_{ijk} = \bar{\theta}_{ijk} = 0$) estos paréntesis se reducen a aquellos del capítulo anterior, por lo que estas expresiones son una generalización como se ha planteado desde un principio.

Otro hecho que ya se ha mencionado y vale la pena remarcar es que todo el desarrollo anterior es independiente de la dimensión y que en consecuencia la aplicabilidad de estos paréntesis de Dirac es para una partícula libre sobre una esfera n -dimensional o muchas partículas libres sobre una esfera.

4.3. Estructura Simpléctica Particular

Dada la generalidad de las expresiones anteriores ya es imposible avanzar más para poder proponer algún mapeo como aquellos del capítulo anterior y estudiar la dinámica, el tratar de hacerlo complicaría demasiado los cálculos. Ahora nos proponemos encontrar una solución al

álgebra que cumpla con todas las identidades de Jacobi así como con las consistencias derivadas de conservar la forma de las constricciones χ_1 y χ_2 .

La solución que se encuentra a continuación es bastante sencilla pero no por ello deja de dar resultados muy interesantes, y tampoco deja de advertir que los cálculos se complican bastante en cuanto aparece una no-conmutatividad. En la referencia [15] se encuentra esta solución particular aunque su enfoque es diferente al nuestro. A fin de comparar los nuevos resultados con los encontrados en el capítulo anterior supondremos que la dimensión de la esfera es 2 y por lo tanto tenemos 3 coordenadas cartesianas y sus respectivos momentos. Iniciemos con el caso particular cuando $B_{ijk} = \bar{\theta}_{ijk} = 0$. Esto nos lleva a satisfacer sólomente las relaciones:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= \theta_{jki} - \theta_{ikj}, & \theta_{ijk} &= -\theta_{ikj}, \\ \theta_{jkl}\theta_{ilm} - A_{ijl}\theta_{lkm} - \theta_{ikl}\theta_{jlm} &= 0, \\ A_{jkl}A_{ilm} + A_{ijl}A_{klm} + A_{kil}A_{jlm} &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

En vista de una solución sencilla, vamos a suponer que cualquier θ con índices repetidos es cero, esto es

$$\theta_{iij} = \theta_{iji} = \theta_{jii} \implies A_{iji} = A_{jii} = 0 \quad (4.36)$$

y por supuesto esto implica que cualquier parámetro con 3 índices repetidos deberá ser necesariamente nulo.

Enfocándonos en la igualdad de en medio de las ecuaciones (4.35) podemos tomar tres casos: $i = j$

$$\theta_{ikl}\theta_{ilm} - A_{iil}\theta_{lkm} - \theta_{ikl}\theta_{ilm} = 0$$

esta igualdad se satisface trivialmente; $j = k$

$$\begin{aligned} \theta_{jjl}\theta_{ilm} - A_{ijl}\theta_{ljm} - \theta_{ijl}\theta_{jlm} &= 0 \\ \implies \theta_{ijl}(\theta_{jlm} - \theta_{ljm}) + \theta_{jil}\theta_{ljm} &= 0 \end{aligned}$$

esta igualdad ya no es trivialmente cero y nos impone condiciones sobre θ ; e $i = k$

$$\begin{aligned} \theta_{jil}\theta_{ilm} - A_{ijl}\theta_{lim} - \theta_{iil}\theta_{jlm} &= 0 \\ \implies \theta_{jil}(\theta_{ilm} + \theta_{lim}) - \theta_{ijl}\theta_{lim} &= 0 \end{aligned}$$

la cual equivale a un cambio de i por j en la ecuación anterior y por lo tanto son la misma. Para reducir aún más la dificultad de estas dos ecuaciones haremos una última suposición: $\theta_{1ij} = 0$. Así, todas las θ 's que tengan índices repetidos ó su primer índice sea 1 son nulas. Los posibles valores para (i, j) en cada una de las 2 ecuaciones anteriores son $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$. Veamos el caso $(1, 2)$, recordemos que índices repetidos se suman y notemos también que si dos índices ya están fijos el tercero necesariamente debe ser el faltante, entonces

$$\begin{aligned} \theta_{12l}(\theta_{2lm} - \theta_{l2m}) + \theta_{21l}\theta_{l2m} &= 0 \implies \theta_{213}\theta_{321} = 0 \\ \theta_{21l}(\theta_{1lm} + \theta_{l1m}) - \theta_{12l}\theta_{l1m} &= 0 \implies \theta_{213}\theta_{312} = 0 \end{aligned}$$

dada la antisimetría en θ_{ijk} vemos que las dos condiciones anteriores en realidad son una sola. Hagamos ahora el caso $(2, 3)$

$$\begin{aligned} \theta_{23l}(\theta_{3lm} - \theta_{l2m}) + \theta_{32l}\theta_{l2m} &= 0 \implies \theta_{231}\theta_{312} = 0 \\ \theta_{32l}(\theta_{2lm} + \theta_{l2m}) - \theta_{23l}\theta_{l2m} &= 0 \implies \theta_{321}\theta_{213} = 0 \end{aligned}$$

Notemos nuevamente que estas dos ecuaciones en realidad son una y de hecho igual al caso anterior. Continuar con los otros 4 casos sólo dará exactamente el mismo resultado, es decir:

$$\theta_{213}\theta_{312} = 0 \quad (4.37)$$

Dicha ecuación nos indica que uno de los dos necesariamente es cero. Hacer nulo cualquiera de ellos es meramente convencional, porque como veremos, ya no hay ninguna otra imposición sobre los parámetros. Así la solución que tomamos es

$$\theta_{312} = 0, \quad \theta_{231} = -\theta_{213} = a \quad (4.38)$$

Finalmente consideremos el caso en que los 3 índices son todos distintos y volvamos a observar la ecuación

$$\theta_{jkl}\theta_{ilm} - A_{ijl}\theta_{lkm} - \theta_{ikl}\theta_{jlm} = 0$$

Notemos que en cada uno de los términos hay un parámetro en donde dos de sus índices se están dejando fijos, esto implica que si queremos que sea no nulo entonces su tercer índice debe tomar el valor restante, en todos los casos dicho índice es l . Sin embargo el otro parámetro que acompaña a cada uno de los términos contiene al otro índice fijo y a l los cuales coinciden. Así, cada una de las ecuaciones generadas con los 3 índices fijos distintos son trivialmente satisfechas.

Con la solución encontrada para los parámetros θ_{ijk} podemos obtener los A_{ijk} distintos de cero (salvo la antisimetría).

$$\theta_{123} - \theta_{213} = A_{123} = -(-a) = a, \quad \theta_{231} - \theta_{321} = A_{231} = a \quad \text{y cero otros casos} \quad (4.39)$$

Esta solución obtenida para la A_{ijk} debe satisfacer una última condición y esa es dada por la ecuación

$$A_{jkl}A_{ilm} + A_{ijl}A_{klm} + A_{kil}A_{jlm} = 0$$

Para el caso en que los tres índices (i, j, k) son diferentes, como en el caso anterior para θ , puede verse que automáticamente se cumple esta ecuación por lo que sólo falta por ver cuando dos índices son iguales y el tercero es distinto. Notemos que para cualesquiera dos iguales de los tres índices (i, j, k) , un término se hace nulo automáticamente y los términos restantes quedan como

$$j = k \implies A_{ijl}A_{jlm} + A_{jil}A_{jlm} = 0$$

cuya igualdad se satisface trivialmente y sin siquiera usar la solución encontrada para A_{ijk} .

A manera de dejar en claro la solución aquí encontrada, a continuación se da la forma en que se escribe el álgebra con $B_{ijk} = 0$

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= A_{ijk}x_k \\ \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij} + \theta_{ijk}p_k \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \end{aligned}$$

y cuya solución particular es tal que

$$\theta_{231} = -\theta_{213} = a \quad A_{123} = -A_{213} = A_{231} = -A_{321} = a \quad 0 \text{ otros casos} \quad (4.40)$$

por lo que el álgebra ya escrita de manera extendida es

$$\begin{aligned}
\{x_1, x_2\} &= ax_3 & \{p_1, p_2\} &= 0 & \{x_1, p_1\} &= 1 & \{x_2, p_3\} &= ap_1 & \{x_1, p_3\} &= 0 \\
\{x_2, x_3\} &= ax_1 & \{p_2, p_3\} &= 0 & \{x_2, p_2\} &= 1 & \{x_2, p_1\} &= -ap_3 & \{x_3, p_1\} &= 0 \\
\{x_1, x_3\} &= 0 & \{p_1, p_3\} &= 0 & \{x_3, p_3\} &= 1 & \{x_1, p_2\} &= 0 & \{x_3, p_2\} &= 0
\end{aligned} \quad (4.41)$$

Para encontrar una solución más completa, que contenga tanto a A_{ijk} como B_{ijk} distintos de cero usaremos un truco muy simple: usar la transformación

$$x_i \mapsto p_i, \quad p_i \mapsto -x_i \quad a \mapsto b \quad (4.42)$$

con estos cambios tendremos entonces

$$\begin{aligned}
\{p_1, p_2\} &= bp_3 & \{x_1, x_2\} &= 0 & \{x_1, p_1\} &= 1 & \{x_3, p_2\} &= -bx_1 & \{x_2, p_1\} &= 0 \\
\{p_2, p_3\} &= bp_1 & \{x_2, x_3\} &= 0 & \{x_2, p_2\} &= 1 & \{x_1, p_2\} &= bx_3 & \{x_2, p_3\} &= 0 \\
\{p_1, p_3\} &= 0 & \{x_1, x_3\} &= 0 & \{x_3, p_3\} &= 1 & \{x_1, p_3\} &= 0 & \{x_3, p_1\} &= 0
\end{aligned} \quad (4.43)$$

de la forma en que se obtiene esta álgebra es evidente que cumple con sus respectivas ecuaciones de consistencia, tanto como las impuestas por las constricciones así como las correspondientes a la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned}
B_{ijk} &= \bar{\theta}_{ijk} - \bar{\theta}_{jik} \\
B_{jkl}B_{ilm} + B_{ijl}B_{klm} + B_{kil}B_{jlm} &= 0 \\
B_{jkl}\bar{\theta}_{ilm} - \bar{\theta}_{ijl}\bar{\theta}_{lkm} + \bar{\theta}_{ikl}\bar{\theta}_{ljm} &= 0
\end{aligned}$$

Juntando ambas soluciones obtenemos una solución completa dada por

$$\begin{aligned}
\{x_1, x_2\} &= ax_3 & \{p_1, p_2\} &= bp_3 & \{x_1, p_1\} &= 1 & \{x_2, p_3\} &= ap_1 & \{x_1, p_3\} &= 0 \\
\{x_2, x_3\} &= ax_1 & \{p_2, p_3\} &= bp_1 & \{x_2, p_2\} &= 1 & \{x_2, p_1\} &= -ap_3 & \{x_3, p_1\} &= 0 \\
\{x_1, x_3\} &= 0 & \{p_1, p_3\} &= 0 & \{x_3, p_3\} &= 1 & \{x_1, p_2\} &= bx_3 & \{x_3, p_2\} &= -bx_1
\end{aligned} \quad (4.44)$$

Es una tarea meramente algebraica, tediosa pero sencilla, el comprobar que esta solución satisface todas las identidades de Jacobi, tanto las que contienen separados a los parámetros a y b como las que los mezclan. Así ésta es un álgebra completamente válida para extender a la canónica.

Cerraremos este capítulo encontrando el operador \hat{D} que induce la fórmula BCH para esta álgebra particular. El estudio de la dinámica que obedecerá la partícula libre sobre la esfera de acuerdo a esta estructura simpléctica lo dejamos para el siguiente capítulo.

4.4. Cuantización BCH

El álgebra encontrada en la sección anterior, independientemente de que se ajuste al objetivo de estudiar una partícula restringida a moverse sobre una esfera, por sí sola conforma un álgebra que extiende la estructura simpléctica trivial de una partícula libre en 3 dimensiones. En este caso el Hamiltoniano sigue siendo el de partícula libre

$$H = \frac{1}{2m} p_i p^i$$

pero dada la no-conmutatividad implementada ya no podemos cuantizar canónicamente. El camino que elegimos en este caso es la cuantización mediante la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) visto de manera general en el Capítulo 2. Veremos que la serie resultante, aunque no ha sido posible encontrar una fórmula cerrada, se da una que permite calcular a cualquier orden la serie y por lo tanto se una tiene cuantización por deformación estrictamente válida.

4.4.1. Una fórmula cerrada

Encontrar formulas cerradas de la serie de BCH para casos no triviales es una tarea bastante complicada y sólo se tienen pocos ejemplos hasta el momento. Uno de esos pocos casos es el que encontramos en la referencia [16], donde se tiene el caso especial que el conmutador de dos variables es

$$[X, Y] = uX + vY + cI \quad (4.45)$$

dando como resultado que la serie se deduce a

$$Z(X, Y) = X + Y + f(u, v)[X, Y] \quad (4.46)$$

donde $f(u, v) = f(v, u)$ es una función simétrica determinada por

$$f(u, v) = \frac{(u - v)e^{u+v} - (ue^u - ve^v)}{uv(e^u - e^v)} \quad (4.47)$$

La manera que en dicha referencia obtuvieron esta fórmula es usando un expresión diferente a la obtenida en el Capítulo 2, pero en el caso del álgebra con la que trataremos resulta más útil la fórmula de Dynkin. Desde luego aquí se supone que X y Y son operadores, pero el caso es análogo cuando se tienen variables conmutativas pero con una operación de paréntesis que satisface las mismas reglas que los conmutadores, es decir, se trata del ejemplo de una estructura de Poisson visto en el capítulo antes mencionado y que resultó ser equivalente a un álgebra de Lie.

Para obtener una fórmula cerrada que generen algunas variables particulares de nuestra álgebra, vamos a tratar un caso similar pero genérico. Sean u, v, w variables cuyo paréntesis entre ellas está dado por

$$\{u, v\} = cw, \quad \{v, w\} = cu, \quad \text{y} \quad \{u, w\} = 0 \quad (4.48)$$

donde c es simplemente una constante. Notemos que la serie asociada a $Z(u, w)$ da como resultado $u + w$ ya que estas variables conmutan entre sí. Entonces tenemos dos casos que no son triviales $Z(u, v)$ y $Z(v, w)$. Ahora notemos un comportamiento muy particular en los paréntesis anidados, y para ello tomemos el caso donde el paréntesis básico es $\{u, v\}$

$$\{\{u, v\}, u\} = 0, \quad \{\{u, v\}, w\} = 0, \quad \{\{u, v\}, v\} = -c^2u \quad (4.49)$$

Podemos notar que sólo un paréntesis no es cero, así que para ordenes superiores donde $\{u, v\}$ es el fundamental sólo hay que considerar uno distinto de cero,

$$\{\{\{u, v\}, v\}, u\} = 0, \quad \{\{\{u, v\}, v\}, w\} = 0, \quad \{\{\{u, v\}, v\}, v\} = -c^3w \quad (4.50)$$

No es difícil darse cuenta que que el siguiente paréntesis anidado no nulo es

$$\{\{\{\{u, v\}, v\}, v\}, v\} = -c^3\{w, v\} = c^4u \quad (4.51)$$

de aquí podemos enunciar entonces la siguiente

Proposición. Sea α_i cualquiera de las variables (u, v, w) , de todos los posibles paréntesis anidados de la forma

$$\{\dots \{u, v\}, \alpha_1\}, \alpha_2\}, \dots, \alpha_n\} \quad (4.52)$$

el único no nulo es aquél donde $\alpha_i \equiv v \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y éste paréntesis está dado por

$$\{\dots \{u, v\}, \underbrace{v, v, \dots, v}_{n \text{ términos}}\} = c^{n+1} \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} w & \text{Para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} u & \text{Para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.53)$$

para toda $n \geq 0$.

Demostración. Esta consta de tres partes: demostrar la fórmula para n par, para n impar y que es en realidad el único término distinto de cero. Demostrar las tres partes resulta muy sencillo por inducción.

a) Caso par.

Sea $n = 0$, ésto implica que sólo se tiene $\{u, v\}$ y la fórmula (4.53) se reduce a cw dando el resultado correcto.

Suponemos válida dicha fórmula para $n - 2$ (n par) y demostremos el caso para n , esto se da mediante

$$\begin{aligned} \{\dots \{u, v\}, \underbrace{v, v, \dots, v}_{n \text{ términos}}\} &= \{\dots \{u, v\}, \underbrace{v, \dots, v}_{n-2 \text{ términos}}, v\}, v\} = \{c^{n-1}(-1)^{\frac{n-2}{2}} w, v\}, v\} \\ &= c^{n-1}(-1)^{\frac{n-2}{2}} \{-cu, v\} = -c^2 c^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1} w = c^{n+1}(-1)^{\frac{n}{2}} w \end{aligned}$$

lo cuál demuestra la primer parte.

b) Caso impar.

Sea $n = 1$, ésto implica que tenemos $\{\{u, v\}, v\}$ y de la fórmula (4.53) se tiene que es igual a $-c^2 u$, lo cuál coincide con el resultado visto en (4.49).

Nuevamente suponemos válida la fórmula para $n - 2$ (n impar) y demostremos el caso para n . Análogo al caso par, se tiene

$$\begin{aligned} \{\dots \{u, v\}, \underbrace{v, v, \dots, v}_{n \text{ términos}}\} &= \{\dots \{u, v\}, \underbrace{v, \dots, v}_{n-2 \text{ términos}}, v\}, v\} = \{c^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} u, v\}, v\} \\ &= c^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \{cw, v\} = -c^2 c^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} u = c^{n+1}(-1)^{\frac{n+1}{2}} u \end{aligned}$$

Por lo que la fórmula queda completamente demostrada.

c) Único término no nulo

Una vez comprobado que la fórmula es correcta ya es fácil demostrar que no sobrevive ningún otro término en $\{\dots \{u, v\}, \alpha_1\}, \alpha_2\}, \dots, \alpha_n\}$, y la demostración nuevamente por inducción sobre n . Para el caso $n = 1$, desde luego α_1 puede ser cualquiera de (u, v, w) en $\{\{u, v\}, \alpha_1\}$, pero de (4.49) queda claro que el único término que sobrevive es cuando $\alpha_1 = v$.

Suponemos válidez para $n - 1$ y demostremos para n . Usando la fórmula ya demostrada veámos que

$$\{\dots \{u, v\}, \alpha_1\}, \alpha_2\}, \dots, \alpha_n\} = \{\dots \{u, v\}, \underbrace{v, \dots, v}_{n-1 \text{ términos}}, \alpha_n\} = \text{constante} \times \{\beta, \alpha_n\}$$

en donde β es igual a w si n es impar o u si n es par. En cualquiera de los dos valores de β el único paréntesis no nulo es cuando α_n toma el valor de v . Q.E.D.

Notemos que si hubiésemos iniciado con el paréntesis $\{v, w\}$, habríamos obtenido algo similar salvo un desplazamiento de signo en todos los términos ya que en este caso empezamos con $\{w, v\} = -cu$, dicha fórmula se ve como

$$\{\dots \underbrace{\{w, v\}, v\}, v\}, \dots, v\} = c^{n+1} \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} u & \text{Para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} w & \text{Para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.54)$$

n términos

donde queda claro el corrimiento del signo y el intercambio de w a impar y el de u a par.

En la referencia [10] encontramos que los términos de la forma

$$[\dots [X, Y], Y], \dots, Y] \quad (4.55)$$

es decir aquellos que contienen exactamente una X , se pueden agrupar en la fórmula

$$\frac{Ad_Y}{e^{Ad_Y} - 1}(X) \quad \text{en donde } Ad_Y(X) \equiv [Y, X] \quad (4.56)$$

Un simple desarrollo en serie tratando a dicho operador como función nos daría que

$$\frac{y}{e^y - 1} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^4}{720} + \frac{y^6}{30240} - \dots \quad (4.57)$$

de donde se ve que salvo el primer orden, todos los ordenes superiores son pares. Tomando la equivalencia entre conmutadores de un álgebra de Lie y paréntesis en una estructura simpléctica, ya estamos listos para escribir la fórmula BCH de nuestro caso.

De los primeros términos de la serie BCH en (2.37), se tiene que para nuestras variables (u, v) se desarrolla como

$$Z(u, v) = u + v + \frac{1}{2}\{u, v\} + \frac{1}{12}\{\{u, v\}, v\} - \frac{1}{720}\{\{\{\{u, v\}, v\}, v\}, v\} + \dots \quad (4.58)$$

haciendo uso de nuestra fórmula encontrada anteriormente tenemos

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= u + v + \frac{1}{2}cw + \frac{1}{12}(-c^2u) - \frac{1}{720}(c^4u) + \dots \\ &= v + \frac{1}{2}cw + \frac{1}{2}icu + \left(1 - \frac{ic}{2} - \frac{c^2}{12} - \frac{c^4}{720} - \dots\right) u \end{aligned}$$

notemos que la serie dentro del paréntesis es la misma que aquella en (4.57) donde sólo tenemos que cambiar el argumento y por ic , con lo que la serie toma la forma cerrada

$$Z(u, v) = v + \frac{cw}{2} + \frac{icu}{2} + \frac{ic}{e^{ic} - 1}u \quad (4.59)$$

El procedimiento para obtener la formula cerrada en las variables (w, v) es completamente similar.

$$\begin{aligned} Z(w, v) &= w + v + \frac{1}{2}\{w, v\} + \frac{1}{12}\{\{w, v\}, v\} - \frac{1}{720}\{\{\{\{w, v\}, v\}, v\}, v\} + \dots \\ &= w + v - \frac{1}{2}cu + \frac{1}{12}(-c^2w) - \frac{1}{720}(c^4w) + \dots \\ &= v - \frac{1}{2}cu + \frac{1}{2}icw + \left(1 - \frac{ic}{2} - \frac{c^2}{12} - \frac{c^4}{720} - \dots\right) w \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos la fórmula cerrada

$$Z(u, v) = v - \frac{cu}{2} + \frac{icw}{2} + \frac{ic}{e^{ic} - 1}w \quad (4.60)$$

Dadas las condiciones especiales de la solución del álgebra no-trivial que encontramos, y la manera genérica trabajada a partir del álgebra (4.48), las fórmulas anteriores (4.53), (4.54), (4.59) y (4.60) bien pueden aplicarse a cualquiera de las sub-álgebras siguientes:

$$a) \quad \{x_1, x_2\} = ax_3, \quad \{x_2, x_3\} = ax_1, \quad \{x_1, x_3\} = 0 \quad (4.61)$$

$$b) \quad \{p_1, p_2\} = bp_3, \quad \{p_2, p_3\} = bp_1, \quad \{p_1, p_3\} = 0 \quad (4.62)$$

$$c) \quad \{p_1, x_2\} = ap_3, \quad \{x_2, p_3\} = ap_1, \quad \{p_1, p_3\} = 0 \quad (4.63)$$

$$d) \quad \{x_1, p_2\} = bx_3, \quad \{p_2, x_3\} = bx_1, \quad \{x_1, x_3\} = 0 \quad (4.64)$$

donde en cualquiera de los casos u toma el papel de la variable con etiqueta 1, v el de la variable con etiqueta 2 y w el de la variable etiquetada con 3.

Desde luego, para cualesquiera dos variables que conmuten, como por ejemplo x_1 y x_3 , la serie simplemente es

$$z(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad (4.65)$$

y para aquellas cuyo paréntesis sea constante, como por ejemplo x_1 y p_1 , la serie resulta en

$$z(x_1, p_1) = x_1 + p_1 + \frac{1}{2} \quad (4.66)$$

Siendo análogo para todos los otros casos.

4.4.2. Operador de cuantización

Construir el operador de cuantización mediante la formula BCH ya no es tan sencillo como los casos anteriores donde se encuentra una fórmula cerrada, sin embargo, es posible aún dar una fórmula que nos indique cómo calcular cualquier término de la serie del orden que queramos. Siguiendo el desarrollo en el Capítulo 2, primero encontraremos el símbolo.

El punto de partida para calcular cualquier término de la serie BCH es primero obtener el paréntesis $\{X, Y\} = s_i t_j \{z_i, z_j\}$. De (4.44) queda claro que todos los paréntesis distintos de cero tendran dos contribuciones intercambiando índices entre s y t . En este caso los índices de cada paréntesis corren de 1 a 6 por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \{X, Y\} &= (s_1 t_4 - s_4 t_1) + (s_2 t_5 - s_5 t_2) + (s_3 t_6 - s_6 t_3) \\ &\quad + (a(s_2 t_3 - s_3 t_2) - b(s_3 t_5 - s_5 t_3)) x_1 + (a(s_1 t_2 - s_2 t_1) + b(s_1 t_5 - s_5 t_1)) x_3 \\ &\quad + (a(s_2 t_6 - s_6 t_2) + b(s_5 t_6 - s_6 t_5)) p_1 + (-a(s_2 t_4 - s_4 t_2) + b(s_4 t_5 - s_5 t_4)) p_3 \\ &= (s_1 t_4 - s_4 t_1) + (s_2 t_5 - s_5 t_2) + (s_3 t_6 - s_6 t_3) \\ &\quad + ((as_2 + bs_5)t_3 - (at_2 + bt_5)s_3) x_1 + ((at_2 + bt_5)s_1 - (as_2 + bs_5)t_1) x_3 \\ &\quad + ((as_2 + bs_5)t_6 - (at_2 + bt_5)s_6) p_1 + (-(as_2 + bs_5)t_4 + (at_2 + bt_5)s_4) p_3 \end{aligned}$$

En el último paso sólo hemos reacomodado los términos entre paréntesis de una manera que nos sugiere definir

$$\mathfrak{M}(s) := as_2 + bs_5, \quad \mathfrak{M}(t) := at_2 + bt_5 \quad (4.67)$$

Con ésta deinición que resultará muy útil en lo adelante, el cálculo anterior se reduce a la notación

$$\begin{aligned} \{X, Y\} = & (s_1 t_4 - s_4 t_1) + (s_2 t_5 - s_5 t_2) + (s_3 t_6 - s_6 t_3) \\ & + (\mathfrak{M}(s)t_3 - \mathfrak{M}(t)s_3)x_1 - (\mathfrak{M}(s)t_1 - \mathfrak{M}(t)s_1)x_3 \\ & + (\mathfrak{M}(s)t_6 - \mathfrak{M}(t)s_6)p_1 - (\mathfrak{M}(s)t_4 - \mathfrak{M}(t)s_4)p_3 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Notemos que este paréntesis nos redujo el número de variables a considerar para paréntesis anidados de órdenes superiores, por lo que sólo necesitamos calcular como actuan (x_1, x_3, p_1, p_3) con X y Y . Esto es,

$$\begin{aligned} \{x_1, X\} &= s_i \{x_1, z_i\} = s_2 \{x_1, x_2\} + s_4 \{x_1, p_1\} + s_5 \{x_1, p_2\} \\ &= s_4 + \mathfrak{M}(s)x_3 \\ \{x_1, Y\} &= t_i \{x_1, z_i\} = t_2 \{x_1, x_2\} + t_4 \{x_1, p_1\} + t_5 \{x_1, p_2\} \\ &= t_4 + \mathfrak{M}(t)x_3 \end{aligned}$$

De la misma manera se puede calcular la acción del paréntesis en las otras 3 variables, resultando la lista:

$$\{x_1, X\} = s_4 + \mathfrak{M}(s)x_3 \quad \{x_1, Y\} = t_4 + \mathfrak{M}(t)x_3 \quad (4.69)$$

$$\{x_3, X\} = s_6 - \mathfrak{M}(s)x_1 \quad \{x_3, Y\} = t_6 - \mathfrak{M}(t)x_1 \quad (4.70)$$

$$\{p_1, X\} = -s_1 + \mathfrak{M}(s)p_3 \quad \{p_1, Y\} = -t_1 + \mathfrak{M}(t)p_3 \quad (4.71)$$

$$\{p_3, X\} = -s_3 - \mathfrak{M}(s)p_1 \quad \{p_3, Y\} = -t_3 - \mathfrak{M}(t)p_1 \quad (4.72)$$

Ahora nos proponemos calcular el paréntesis anidado de orden n en donde aparecen tanto X , como Y . Para ello notaremos que la acción de X o de Y en cualquiera de las cuatro variables (x_1, x_3, p_1, p_3) está codificada sólomente en la variable s y t respectivamente. Esto queda claro en el ejemplo:

$$\begin{aligned} \{\{x_1, X\}, X\} &= \mathfrak{M}(s)\{x_3, X\}, & \{\{x_1, X\}, Y\} &= \mathfrak{M}(s)\{x_3, Y\} \\ \{\{x_1, Y\}, X\} &= \mathfrak{M}(t)\{x_3, Y\}, & \{\{x_1, Y\}, Y\} &= \mathfrak{M}(t)\{x_3, Y\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

y para el caso con x_3 la única diferencia es un signo menos y el intercambio de índices

$$\begin{aligned} \{\{x_3, X\}, X\} &= -\mathfrak{M}(s)\{x_1, X\}, & \{\{x_3, X\}, Y\} &= -\mathfrak{M}(s)\{x_1, Y\} \\ \{\{x_3, Y\}, X\} &= -\mathfrak{M}(t)\{x_1, Y\}, & \{\{x_3, Y\}, Y\} &= -\mathfrak{M}(t)\{x_1, Y\} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para el caso de los momentos p_1 y p_3 es claro que sólo basta cambiar x_1 por p_1 y x_3 por p_3 dejando todos los signos y las dependencias de \mathfrak{M} igual. Esto nos permite enunciar la siguiente:

Proposición. Sea u y v dos variables cuyos paréntesis con X y Y están dados por

$$\begin{aligned} \{u, X\} &= \alpha_0(s) + \alpha_1(s)v, & \{u, Y\} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)v \\ \{v, X\} &= \beta_0(s) - \alpha_1(s)u, & \{v, Y\} &= \beta_0(t) - \alpha_1(t)u \end{aligned} \quad (4.75)$$

entonces las siguientes fórmulas

$$\{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, Y\}, \dots, X\} = \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \{u, X\} & \text{Para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{v, X\} & \text{Para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.76)$$

$$\{\dots \underbrace{\{v, Y\}, X\}, Y\}, \dots, X\} = \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \{v, X\} & \text{Para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \{u, X\} & \text{Para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.77)$$

son válidas para cualquier valor de $n \geq 0$ y en donde n_x y n_y corresponden al número de veces que X y Y aparecen en los paréntesis anidados respectivamente.

En este caso hemos iniciado el paréntesis anidado con Y y lo supondremos fijo ya que es el caso de utilidad para obtener la fórmula que nos proponemos. También se considera como última variable en dicho paréntesis a X , sin embargo ésta se puede sustituir por Y cambiando el lado derecho de cada una de las fórmulas también a Y , ya que dicho factor no se usa.

Demostración. Como en la demostración anterior para la fórmula (4.53), las fórmulas se prueban por inducción y se divide la prueba en casos n par y n impar. Dada la similitud de la demostración de las dos fórmulas de la propoción aquí sólo haré la prueba de la primer fórmula teniendo en cuenta que la segunda se prueba de manera análoga.

a) Caso n par.

Para $n = 0$ el lado izquierdo de la primer fórmula se reduce a $\{u, X\}$, mientras que el lado derecho también se reduce a $\{u, X\}$ por lo que a este nivel la fórmula es válida.

Suponemos válida la fórmula para $n-2$ y la demostraremos para n (par). Dado que aumentamos dos variables, hay cuatro posibilidades de extensión

$$\begin{aligned} & \{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, X\}, X\}, X\}, & \{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, X\}, Y\}, X\}, \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{n_x+n_y=n-2} & \underbrace{\hspace{10em}}_{n_x+n_y=n-2} \\ & \{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, Y\}, X\}, X\}, & \{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, Y\}, Y\}, X\} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{n_x+n_y=n-2} & \underbrace{\hspace{10em}}_{n_x+n_y=n-2} \end{aligned}$$

Haciendo uso de la hipótesis de inducción esto resulta respectivamente en

$$\begin{aligned} \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \{\{u, X\}, X\}, X\}, & \quad \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \{\{u, X\}, Y\}, X\}, \\ \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \{\{u, Y\}, X\}, X\}, & \quad \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \{\{u, Y\}, Y\}, X\} \end{aligned}$$

donde $n_x + n_y = n - 2$. Haciendo uso de las ecuaciones (4.75) dos veces en cada uno de los casos se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} (-1) \alpha_1(s)^2 \{u, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x+2} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n}{2}} \{u, X\} \\ \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} (-1) \alpha_1(s) \alpha_1(t) \{u, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x+1} \alpha_1(t)^{n_y+1} (-1)^{\frac{n}{2}} \{u, X\} \\ \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} (-1) \alpha_1(t) \alpha_1(s) \{u, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x+1} \alpha_1(t)^{n_y+1} (-1)^{\frac{n}{2}} \{u, X\} \\ \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-2}{2}} (-1) \alpha_1(t)^2 \{u, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y+2} (-1)^{\frac{n}{2}} \{u, X\} \end{aligned}$$

En cada uno de los casos sólo se necesita renombrar los exponentes de $\alpha_1(s)$ y $\alpha_1(t)$ ya que entodas las instancias suman n y la fórmula queda demostrada (para n par).

b) Caso n impar.

El caso base es $n = 1$, dado nuestra convención de tomar al inicio Y entonces tenemos del lado izquierdo de la primer fórmula de (4.76) $\{\{u, Y\}, X\}$ mientras que del lado derecho obtenemos $\alpha_1(s)(-1)^{\frac{1-1}{2}} \{v, X\} = \alpha_1(s)\{v, X\}$, lo cuál es correcto si sustituimos directamente el valor de $\{u, Y\}$. Suponemos válida la fórmula para $n - 2$ y la demostraremos para n (impar). Como en el caso anterior, se desarrollan cuatro casos al aumentar en dos el numero de paréntesis

anidados, esto es:

$$\begin{aligned}
\{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, X\}, X\}, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} \{\{v, X\}, X\}, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} (-1) \alpha_1(s)^2 \{v, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x+2} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{v, X\}
\end{aligned}$$

y los otros tres casos son similares

$$\begin{aligned}
\{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, X\}, Y\}, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} \{\{v, X\}, Y\}, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} (-1) \alpha_1(s) \alpha_1(t) \{v, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x+1} \alpha_1(t)^{n_y+1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{v, X\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, Y\}, X\}, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} \{\{v, Y\}, X\}, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} (-1) \alpha_1(t) \alpha_1(s) \{v, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x+1} \alpha_1(t)^{n_y+1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{v, X\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\dots \underbrace{\{u, Y\}, X\}, \dots, Y\}, Y\}, X\} &= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} \{\{v, Y\}, Y\}, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y} (-1)^{\frac{n-3}{2}} (-1) \alpha_1(t)^2 \{v, X\} \\
&= \alpha_1(s)^{n_x} \alpha_1(t)^{n_y+2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{v, X\}
\end{aligned}$$

Nuevamente sólo necesitamos renombrar los exponentes pasando de $n_x + n_y = n - 2$ a unos tales que $n_x + n_y = n$ y con eso se completa la demostración. $\mathcal{Q.E.D.}$

De esta proposición queda claro que se puede aplicar a ambos casos, tanto para (x_1, x_3) , como para (p_1, p_3) . Con esto ya podemos obtener el valor de cualquier paréntesis anidado de cualquier extensión en valores de X y Y . Por simplicidad supondremos que el último paréntesis anidado termina en X .

Tomando el valor del paréntesis $\{X, Y\}$ de (4.68) y eliminado el término que no depende

de las variables de grupo, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\{\dots\{X, Y\}, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\} &= (\mathfrak{M}(s)t_3 - \mathfrak{M}(t)s_3)\{\dots\{x_1, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\} \\
&- (\mathfrak{M}(s)t_1 - \mathfrak{M}(t)s_1)\{\dots\{x_3, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\} \\
&+ (\mathfrak{M}(s)t_6 - \mathfrak{M}(t)s_6)\{\dots\{p_1, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\} \\
&- (\mathfrak{M}(s)t_4 - \mathfrak{M}(t)s_4)\{\dots\{p_3, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\}
\end{aligned}$$

Al usar las fórmulas (4.76) y (4.77) nos damos cuenta que el factor correspondiente a α_1 que se obtiene en todos los casos es el mismo por lo que queda como

$$\begin{aligned}
\{\dots\{X, Y\}, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\} &= \mathfrak{M}(s)^{n_x}\mathfrak{M}(t)^{n_y} \left((\mathfrak{M}(s)t_3 - \mathfrak{M}(t)s_3) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\{x_1, X\} & n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\{x_3, X\} & n \text{ impar} \end{cases} \right. \\
&- (\mathfrak{M}(s)t_1 - \mathfrak{M}(t)s_1) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\{x_3, X\} & n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\{x_1, X\} & n \text{ impar} \end{cases} \\
&+ (\mathfrak{M}(s)t_6 - \mathfrak{M}(t)s_6) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\{p_1, X\} & n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\{p_3, X\} & n \text{ impar} \end{cases} \\
&\left. - (\mathfrak{M}(s)t_4 - \mathfrak{M}(t)s_4) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\{p_3, X\} & n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\{p_1, X\} & n \text{ impar} \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

Para reducir un poco más la notación es conveniente hacer la siguiente definición

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}(s)t_i - \mathfrak{M}(t)s_i \quad (4.78)$$

Con esto el desarrollo anterior se reduce

$$\begin{aligned}
\{\dots\{X, Y\}, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, X\} &= \mathfrak{M}(s)^{n_x}\mathfrak{M}(t)^{n_y} \times \\
&\times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (\mathfrak{M}_3\{x_1, X\} - \mathfrak{M}_1\{x_3, X\} + \mathfrak{M}_6\{p_1, X\} - \mathfrak{M}_4\{p_3, X\}) & \text{Para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\mathfrak{M}_3\{x_3, X\} + \mathfrak{M}_1\{x_1, X\} + \mathfrak{M}_6\{p_3, X\} + \mathfrak{M}_4\{p_1, X\}) & \text{Para } n \text{ impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Notemos que en el caso de que el último paréntesis anidado en vez de contener X fuera con Y sólo se cambiaría X por Y en el lado derecho de la fórmula anterior.

Finalmente escribamos la fórmula completa y ya reducida de manera genérica para cualquier término de paréntesis anidados de cualquier longitud. Esto es

$$\begin{aligned}
\{\dots\{X, Y\}, \underbrace{Y, X}_{n_x+n_y=n}, \dots, Z\} &= \mathfrak{M}(s)^{n_x}\mathfrak{M}(t)^{n_y} \times \\
&\times \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, r) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, r) + \Delta_1\mathfrak{M}(r)) & \text{Para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\hat{M}_{36}(\mathfrak{M}, r) + \hat{M}_{14}(\mathfrak{M}, r) + \Delta_2\mathfrak{M}(r)) & \text{Para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.79)
\end{aligned}$$

donde $Z \in \{X, Y\}$ y $r_i \in \{s_i, t_i\}$, y se han definido los operadores de intercambio de índices

$$\hat{m}_{ij}(\mathfrak{M}, r) = \mathfrak{M}_i r_j + \mathfrak{M}_j r_i \quad \text{y} \quad \hat{M}_{ij}(\mathfrak{M}, r) = \mathfrak{M}_i r_j - \mathfrak{M}_j r_i \quad (4.80)$$

y por simplicidad se definieron

$$\Delta_1 = \mathfrak{M}_1 x_1 + \mathfrak{M}_3 x_3 + \mathfrak{M}_4 p_1 + \mathfrak{M}_6 p_3 \quad \Delta_2 = \mathfrak{M}_1 x_3 - \mathfrak{M}_3 x_1 + \mathfrak{M}_4 p_3 - \mathfrak{M}_6 p_1 \quad (4.81)$$

Un análisis rápido de la ecuación (4.79) nos lleva a darnos cuenta que la longitud de los paréntesis anidados solo está codificada en los exponentes n_x y n_y y en si estos suman par o impar. La otra información relevante es si el último paréntesis anidado se realiza con X o con Y y dicha información se queda guardada en la variable r_i que tomará el valor s_i si se trata de X y t_i si se trata de Y .

Más allá de lo larga y tediosa que pueda parecer dicha fórmula, teniendo en cuenta lo anterior ya es posible calcular la serie BCH a cualquier orden, y con ella entregar el operador bi-diferencial \hat{D} . Desde luego la complejidad que ya trae consigo dicha fórmula por la cantidad de elementos que hay que sumar en todo orden no se puede evitar.

En esta notación reducida que estamos tomando el paréntesis $\{X, Y\}$ se ve como

$$\{X, Y\} = \hat{M}_{14}(s, t) + \hat{M}_{25}(s, t) + \hat{M}_{36}(s, t) - \Delta_2 \quad (4.82)$$

Para darnos una idea de como va la serie, tomemos los primeros términos mostrados en (2.37). La fórmula es aplicable a partir de tercer orden por lo que se tiene

$$\begin{aligned} H(X, Y) &\equiv Z(X, Y) - X - Y \\ &= \frac{1}{2} \left[\hat{M}_{14}(s, t) + \hat{M}_{25}(s, t) + \hat{M}_{36}(s, t) - \Delta_2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{12} \left[(\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, t) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_1 \mathfrak{M}(t)) \right. \\ &\quad \quad \left. - (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, s) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, s) + \Delta_1 \mathfrak{M}(s)) \right] \\ &\quad - \frac{1}{24} \left[\mathfrak{M}(s) \left(\hat{M}_{36}(\mathfrak{M}, t) + \hat{M}_{14}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_2 \mathfrak{M}(t) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{720} (-1) \left[\mathfrak{M}(t)^2 (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, t) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_1 \mathfrak{M}(t)) \right. \\ &\quad \quad \left. - \mathfrak{M}(s)^2 (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, s) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, s) + \Delta_1 \mathfrak{M}(s)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{360} (-1) \left[\mathfrak{M}(t)^2 (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, s) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, s) + \Delta_1 \mathfrak{M}(s)) \right. \\ &\quad \quad \left. - \mathfrak{M}(s)^2 (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, t) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_1 \mathfrak{M}(t)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{120} (-1) \left(-\mathfrak{M}(t)\mathfrak{M}(s) (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, t) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_1 \mathfrak{M}(t)) \right. \\ &\quad \quad \left. + \mathfrak{M}(s)\mathfrak{M}(t) (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, s) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, s) + \Delta_1 \mathfrak{M}(s)) \right) + \dots \end{aligned}$$

reduciendo los términos iguales tenemos

$$\begin{aligned}
H(X, Y) = & \frac{1}{2} \left[\hat{M}_{14}(s, t) + \hat{M}_{25}(s, t) + \hat{M}_{36}(s, t) - \Delta_2 \right] \\
& + \frac{1}{12} \left[(\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, t) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_1 \mathfrak{M}(t)) - (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, s) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, s) + \Delta_1 \mathfrak{M}(s)) \right] \\
& - \frac{1}{24} \mathfrak{M}(s) \left[\hat{M}_{36}(\mathfrak{M}, t) + \hat{M}_{14}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_2 \mathfrak{M}(t) \right] \\
& + (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, t) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, t) + \Delta_1 \mathfrak{M}(t)) \left[\frac{1}{720} \mathfrak{M}(t)^2 + \frac{1}{360} \mathfrak{M}(s)^2 + \frac{1}{120} \mathfrak{M}(t) \mathfrak{M}(s) \right] \\
& - (\hat{m}_{34}(\mathfrak{M}, s) - \hat{m}_{16}(\mathfrak{M}, s) + \Delta_1 \mathfrak{M}(s)) \left[\frac{1}{720} \mathfrak{M}(s)^2 + \frac{1}{360} \mathfrak{M}(t)^2 + \frac{1}{120} \mathfrak{M}(t) \mathfrak{M}(s) \right] \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Como podemos ver, una vez conociendo cada término de la serie, es muy fácil obtener el correspondiente a nuestra álgebra y debido a los patrones que mucho se repiten, resulta muy sencillo simplificar.

Para obtener el operador bi-diferencial solo basta con sustituir en la expresión anterior a s_i por $\overleftarrow{\partial}_i$ y a t_j por $\overrightarrow{\partial}_j$, y obtener la exponencial de dicha serie. Notemos que aunque es algo que hay que hacerse con cuidado dada la expresión tan grande, esperamos que quede claro cómo se calculan cada uno de los términos de la serie haciendo uso de (2.37).

Capítulo 5

Dinámica No-Conmutativa Sobre la Esfera

En el capítulo anterior escribimos los paréntesis de Dirac para una partícula sobre una esfera en donde los paréntesis iniciales ya no son los canónicos de Poisson, sino que incluyen una no-conmutatividad tanto en las coordenadas, como en los momentos. También encontramos una solución particular de estructura que cumpliera con todos los requisitos necesarios para formar una variedad simpléctica y además dejara invariantes las constricciones que resultan del caso conmutativo. En este capítulo estudiaremos la nueva dinámica que se sigue de dicha no-conmutatividad y postularemos la cuantización de dicho sistema.

5.1. Sistema No-Conmutativo

Empezaremos por resumir algunos resultados vistos en los Capítulos 3 y 4 a fin de ver que el procedimiento es igual al caso conmutativo y además también por completez de manera que pueda ser visto con un capítulo lo más independiente posible.

Sea L el Lagrangiano de una partícula libre en coordenadas cartesianas y sea $\chi_1 \equiv x_i x^i - R^2 \approx 0$ la constricción (primaria) que indica que la partícula debe moverse sobre la esfera. Entonces tenemos que el sistema es descrito por

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}^i - \lambda_1 \chi_1$$

y en consecuencia el Hamiltoniano total es

$$H_T = \frac{1}{2m} \dot{p}_i \dot{p}^i + \lambda_1 \chi_1$$

Siguiendo nuestro objetivo, ahora proponemos que los paréntesis de Poisson no sean los canónicos sino que estén dados por

$$\begin{array}{llllll} \{x_1, x_2\} = ax_3 & \{p_1, p_2\} = bp_3 & \{x_1, p_1\} = 1 & \{x_2, p_3\} = ap_1 & \{x_1, p_3\} = 0 \\ \{x_2, x_3\} = ax_1 & \{p_2, p_3\} = bp_1 & \{x_2, p_2\} = 1 & \{x_2, p_1\} = -ap_3 & \{x_3, p_1\} = 0 \\ \{x_1, x_3\} = 0 & \{p_1, p_3\} = 0 & \{x_3, p_3\} = 1 & \{x_1, p_2\} = bx_3 & \{x_3, p_2\} = -bx_1 \end{array}$$

En el capítulo anterior ya vimos que ésta es una estructura simpléctica válida ya que cumple con todas las propiedades requeridas. Dicha estructura se puede escribir de manera compacta como

$$\begin{aligned}\{x_i, x_j\} &= A_{ijk}x_k \\ \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij} + \theta_{ijk}p_k + \bar{\theta}_{ijk}x_k \\ \{p_i, p_j\} &= B_{ijk}p_k\end{aligned}$$

donde se tienen las antisimetrías $\theta_{ijk} = -\theta_{ikj}$ y $\bar{\theta}_{ijk} = -\bar{\theta}_{kji}$ y los valores estan dados por

$$\begin{aligned}A_{123} = -A_{213} = A_{231} = -A_{321} &= a, & \theta_{231} = -\theta_{213} &= a, \\ B_{123} = -B_{213} = B_{231} = -B_{321} &= b, & \bar{\theta}_{123} = -\bar{\theta}_{321} &= b, & 0 \text{ otros casos}\end{aligned}$$

La evolución de la constricción se hace ahora tomando en cuenta esta estructura simpléctica por lo que

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 = \{\chi_1, H_T\} &= \frac{1}{2m}\{x_i x^i, p_j p^j\} + \lambda_1 \{x_i x^i, x_j x^j\} = \frac{2}{m}x^i p^j \{x_i, p_j\} + \lambda_1 x^i x^j \{x_i, x_j\} \\ &= \frac{2}{m}(x_i p^i + x^i p^j \theta_{ijk} p_k) + \lambda_1 x^i x^j A_{ijk} x_k = \frac{2}{m}x_i p^i \approx 0\end{aligned}$$

Con esto nos surge la nueva constricción (secundaria)

$$\chi_2 \equiv x_i p^i \approx 0$$

La evolución de esta nueva constricción ya sólo nos está fijando el multiplicador de Lagrange, esto es

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_2 = \{\chi_2, H_T\} &= \frac{1}{2m}\{x_i p^i, p_j p^j\} + \lambda_1 \{x_i p^i, x_j x^j\} \\ &= \frac{1}{m}(x^i p^j \{p_i, p_j\} + p^i p^j \{x_i, p_j\}) + \lambda_1 (x^j p^i \{x_i, x_j\} + x^i x^j \{x_i, p_j\}) \\ &= \frac{1}{m}(B_{ijk} x_i p_j p_k + p_i p^i + \bar{\theta}_{ijk} p_i p_j x_k) + \lambda_1 (A_{ijk} p_i x_j x_k - x_i x^i + \theta_{ijk} x_i x_j p_k) \approx 0\end{aligned}$$

Notando que haciendo fuerte las constricciones tendremos que $x_i x^i = R^2$, lo que dirá que el coeficiente de λ_1 es no nulo y por lo tanto dicha ecuación fijará su valor.

Entonces tenemos dos constricciones cuyo paréntesis estará dado por

$$\begin{aligned}\{\chi_1, \chi_2\} &= \{x_i x^i, x_j p^j\} = 2x^i (p^j \{x_i, x_j\} + x^j \{x_i, p_j\}) \\ &= 2(x_i x^i + \theta_{ijk} x_i x_j p_k + A_{ijk} x_i p_j x_k) = 2x_i x^i \\ &= 2R^2\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que la matriz de constricciones está dada por

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2R^2 \\ -2R^2 & 0 \end{pmatrix} \implies C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2R^2} \\ \frac{1}{2R^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Como última herramienta que necesitamos para construir los paréntesis de Dirac es el paréntesis entre las variables y las constricciones

$$\begin{aligned}\{x_1, \chi_1\} &= 2ax_2x_3 & \{x_2, \chi_1\} &= 0 & \{x_3, \chi_1\} &= -2ax_1x_2 \\ \{p_1, \chi_1\} &= -2(x_1 - ax_2p_3) & \{p_2, \chi_1\} &= -2x_2 & \{p_3, \chi_1\} &= 2(x_3 + ax_2p_1) \\ \{x_1, \chi_2\} &= x_1 + (ap_2 + bx_2)x_3 & \{x_2, \chi_2\} &= x_2 & \{x_3, \chi_2\} &= x_3 - (ap_2 + bx_2)x_1 \\ \{p_1, \chi_2\} &= -p_1 + (ap_2 + bx_2)p_3 & \{p_2, \chi_2\} &= -p_2 & \{p_3, \chi_2\} &= -p_3 - (ap_2 + bx_2)p_1\end{aligned}$$

Ahora si, con los resultados anteriores construimos los nuevos paréntesis de Dirac, los cuales están dados por

$$\begin{aligned}\{A, B\}^* &= \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} \\ &= \{A, B\} - \frac{1}{2R^2} (\{A, \chi_1\} \{B, \chi_2\} - \{A, \chi_2\} \{B, \chi_1\})\end{aligned}$$

Ahora sólo nos resta introducir cada una de las 6 variables en sus diferentes combinaciones lo que nos dará un total de 15 paréntesis, a continuación se listan: para x con x tenemos

$$\{x_1, x_2\}^* = ax_3 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right), \quad \{x_1, x_3\}^* = -ax_2 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right), \quad \{x_2, x_3\}^* = ax_1 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right)$$

para x con p

$$\begin{aligned}\{x_1, p_1\}^* &= 1 - \frac{1}{R^2} x_1^2 + \frac{1}{R^2} ax_2(x_1 p_3 + x_3 p_1) - \frac{1}{R^2} (ap_2 + bx_2)x_1 x_3 \\ \{x_1, p_2\}^* &= -\frac{1}{R^2} x_1 x_2 + bx_3 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right) \\ \{x_1, p_3\}^* &= -\frac{1}{R^2} x_1 x_3 - ap_2 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_1^2\right) - \frac{b}{R^2} x_3^2 x_2 - \frac{2a}{R^2} x_1 x_2 p_1 \\ \{x_2, p_1\}^* &= -\frac{1}{R^2} x_1 x_2 - ap_3 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right) \\ \{x_2, p_2\}^* &= 1 - \frac{1}{R^2} x_2^2 \\ \{x_2, p_3\}^* &= -\frac{1}{R^2} x_2 x_3 + ap_1 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right) \\ \{x_3, p_1\}^* &= -\frac{1}{R^2} x_1 x_3 + ap_2 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_3^2\right) + \frac{b}{R^2} x_1^2 x_2 + \frac{2a}{R^2} x_2 x_3 p_3 \\ \{x_3, p_2\}^* &= -\frac{1}{R^2} x_2 x_3 - bx_1 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right) \\ \{x_3, p_3\}^* &= 1 - \frac{1}{R^2} x_3^2 - \frac{1}{R^2} ax_2(x_1 p_3 + x_3 p_1) + \frac{1}{R^2} (ap_2 + bx_2)x_1 x_3\end{aligned}$$

y finalmente el paréntesis entre los momentos

$$\begin{aligned}\{p_1, p_2\}^* &= bp_3 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right) - \frac{1}{R^2} (x_1 p_2 - x_2 p_1) \\ \{p_1, p_3\}^* &= bp_2 \frac{1}{R^2} x_2^2 - \frac{1}{R^2} (x_1 p_3 - x_3 p_1) + \frac{a}{R^2} x_2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ \{p_2, p_3\}^* &= bp_1 \left(1 - \frac{1}{R^2} x_2^2\right) - \frac{1}{R^2} (x_2 p_3 - x_3 p_2)\end{aligned}$$

Podemos ver que ahora los paréntesis de Dirac son mucho más complicados ya que todos son no nulos e incluyen potencias de orden 3 por lo que un tratamiento con la formula BCH o de manera directa se presagia muy tedioso. Utilizar un mapeo para reducir el numero de variables de las 6 iniciales a 4 efectivas puede ser una opción más viable. Sin embargo, dicho mapeo es complicado de encontrar. A continuación daremos un tratamiento en esta línea.

5.2. Mapeo por Coordenadas Cilíndricas

Al ver la complejidad de los nuevos paréntesis de Dirac lo primero que se ocurre es utilizar los recursos que ya conocemos, por lo que utilizaremos el mapeo por coordenadas cilíndricas con sus respectivos momentos, esto es: el cambio de coordenadas esta dado por

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta \\x_2 &= \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta \\x_3 &= z\end{aligned}$$

y para los momentos

$$\begin{aligned}p_1 &= -\frac{z}{R^2} \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta P_z - \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 - z^2}} P_\theta \\p_2 &= -\frac{z}{R^2} \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta P_z + \frac{\cos \theta}{\sqrt{R^2 - z^2}} P_\theta \\p_3 &= \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) P_z\end{aligned}$$

Dado que las constricciones son las mismas que en el caso conmutativo ya no nos preocupamos por ellas puesto que se satisfacen de igual manera. Entonces, dada la no-conmutatividad, ahora la estructura simpléctica del mapeo ya no será trivial sino que ahora será más complicada. Para poder calcularla recordemos que de manera general una estructura simpléctica posee las propiedades siguiente:

- Satisface con la operación de paréntesis dada por

$$\{A(z), B(z)\} = \frac{\partial A}{\partial z^\alpha} J^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial z^\beta} \quad (5.2)$$

donde $J^{\alpha\beta}$ es una matriz antisimétrica que puede depender de z (antisimetría del paréntesis).

- Linealidad.
- Existencia del elemento nulo.
- Se satisface la identidad de Jacobi, la cuál para el caso de una $J^{\alpha\beta}$ que depende de las coordenadas y los momentos, está dada por

$$J^{\alpha\delta} \frac{\partial J^{\beta\gamma}}{\partial z^\delta} + J^{\beta\delta} \frac{\partial J^{\gamma\alpha}}{\partial z^\delta} + J^{\gamma\delta} \frac{\partial J^{\alpha\beta}}{\partial z^\delta} \quad (5.3)$$

Estas condiciones se satisfacen trivialmente para cualquier matriz antisimétrica constante. En nuestro caso de interés veremos que la matriz obtenida es bastante complicada, sin embargo sí existe dado el mapeo elegido.

La condición esencial que debe satisfacer la matriz simpléctica que buscamos, es que satisfaga los 15 paréntesis de Dirac de la cual se extraerá. Veamos un esbozo de como se puede obtener dicha matriz. La idea es extraer los coeficientes de la matriz de cada uno de los paréntesis de Dirac cuyas relaciones ya están establecidas. Empezamos por el más sencillo, el de las

coordenadas. Notemos que en el sistema reducido z^α tomará ya sólo dos valores de coordenadas y dos de momentos

$$\{x_i(z), x_j(z)\} = a\varepsilon_{ijk}x_k \left(1 - \frac{x_2^2}{R^2}\right) = J^{12} \left(\frac{\partial x_i}{\partial z} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} - \frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial x_j}{\partial z}\right)$$

En este caso i, j toman los valores 1, 2, 3, pero en cualquiera de las 3 combinaciones posibles, el resultado es el mismo

$$J^{12} = \frac{a\varepsilon_{ijk}x_k \left(1 - \frac{x_2^2}{R^2}\right)}{\left(\frac{\partial x_i}{\partial z} \frac{\partial x_j}{\partial \theta} - \frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial x_j}{\partial z}\right)} = a \left(-1 + \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \sin^2 \theta\right) \quad (5.4)$$

Ahora utilizando x_3 y p_3 podemos encontrar otro coeficiente, esto es

$$\{x_3, p_3\} = \frac{\partial x_3}{\partial z^\alpha} J^{\alpha\beta} \frac{\partial p_3}{\partial z^\beta} = J^{13} \frac{\partial p_3}{\partial P_z} = 1 - \frac{1}{R^2} x_3^2 - \frac{1}{R^2} a x_2 (x_1 p_3 + x_3 p_1) + \frac{1}{R^2} (a p_2 + b x_2) x_1 x_3$$

lo cual nos lleva a tener

$$J^{13} = 1 - a \left(\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \cos \theta \sin \theta P_z - \frac{z}{R^2 - z^2} P_\theta \right) + b z \cos \theta \sin \theta \quad (5.5)$$

Ahora tomemos la variable p_1 , dada su dependencia de todas las nuevas variables tenemos que

$$\{x_3, p_1\} = J^{1\beta} \frac{\partial p_1}{\partial \beta} = J^{12} \frac{\partial p_1}{\partial z} + J^{13} \frac{\partial p_1}{\partial P_z} + J^{14} \frac{\partial p_1}{\partial P_\theta}$$

De esta expresión la única cantidad que no conocemos aún es J^{14} por lo cual la despejamos. Sustituyendo los valores obtenidos nos lleva a

$$J^{14} = -a \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) (z P_z + \cos \theta \sin \theta P_\theta) - b(R^2 - z^2) \cos^2 \theta \quad (5.6)$$

Notemos que el procedimiento es completamente análogo usando p_2 y de hecho nos conduce exactamente al mismo resultado para J^{14} . Con esto ya hemos calculado 3 coeficientes de la matriz simpléctica, nos restan otros 3 de los 6 que hay en total.

Ahora es el turno de usar p_3 . Calculamos su paréntesis con x_1 y eso nos lleva a obtener

$$\{x_1, p_3\} = -J^{12} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial p_3}{\partial z} + J^{13} \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial p_3}{\partial P_z} + J^{23} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial p_3}{\partial P_z}$$

En este caso el valor que no conocemos es J^{23} , por lo que sustituyendo los valores encontramos que

$$J^{23} = \frac{a}{R^2 - z^2} \left[\left(1 - 2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \sin^2 \theta\right) z P_z - \cos \theta \sin \theta P_\theta \right] + b \frac{z^2}{R^2 - z^2} \sin^2 \theta \quad (5.7)$$

En el desarrollo anterior si en vez de x_1 colocamos x_2 el procedimiento es el mismo y el resultado también. Ahora para obtener J^{24} usamos el paréntesis de cualesquiera de las combinaciones de x_1, x_2 con p_1, p_2 . Para ejemplificar aquí usamos x_1 con p_1 , esto es

$$\{x_1, p_1\} = J^{12} \left[\frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} - \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial p_1}{\partial z} \right] + J^{13} \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial p_1}{\partial P_z} + J^{14} \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial p_1}{\partial P_\theta} + J^{23} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial p_1}{\partial P_z} + J^{24} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial p_1}{\partial P_\theta}$$

de lo cuál inmediatamente obtenemos

$$J^{24} = 1 + a \left(\left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \cos \theta \sin \theta P_z - \frac{z}{R^2 - z^2} P_\theta \right) - bz \cos \theta \sin \theta \quad (5.8)$$

Finalmente el último coeficiente J^{34} lo obtendremos de realizar los paréntesis entre los momentos, cualquiera de los tres nos llevará exactamente al mismo resultado. Tengamos en cuenta que en este caso todos los coeficientes anteriores aparecen, por lo tanto la expresión para calcular este último coeficiente es más larga así como su resultado.

$$J^{34} = a \left[\left(-\frac{z^2}{R^2} + \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta \right) P_z^2 - \frac{2z}{R^2} \cos \theta \sin \theta P_\theta P_z + \frac{z^2 + (R^2 - z^2) \sin^2 \theta}{(R^2 - z^2)^2} P_\theta^2 \right] - b \left(z P_z - \frac{R^2 + z^2}{R^2 - z^2} \cos \theta \sin \theta P_\theta \right) \quad (5.9)$$

Bien vale remarcar que el mapeo que se utilizó en todo momento es el mismo utilizado en el Capítulo 3, por lo que el Hamiltoniano asociado en este caso es exactamente igual. A saber

$$H(z^\alpha) = \frac{1}{2m} p_i(z^\alpha) p^i(z^\alpha) = \frac{1}{2mR^2} \left((R^2 - z^2) P_z^2 + \frac{R^2}{(R^2 - z^2)} P_\theta^2 \right)$$

Sin embargo ahora las ecuaciones de movimiento ya no se calculan con la estructura simpléctica trivial sino con la que aquí obtuvimos, esto es

$$\dot{A} = \{A, H\} = \frac{\partial A}{\partial z^\alpha} J^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial z^\beta} \quad (5.10)$$

Desde luego, dada la complejidad de la nueva estructura simpléctica ahora las ecuaciones de movimiento son mucho más complejas que en el caso conmutativo.

Para el caso de z tenemos

$$\dot{z} = \frac{1}{mR^2} (R^2 - z^2) P_z - \frac{a}{mR^2} \cos \theta \sin \theta \left(P_\theta^2 + R^2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right)^2 P_z^2 \right) + \frac{b}{m} \cos \theta \left(z \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \sin \theta P_z - \cos \theta P_\theta \right)$$

Notemos que haciendo a y b cero recuperamos la ecuación del caso conmutativo. De manera similar se tienen las siguientes ecuaciones

$$\dot{P}_z = \frac{z}{mR^2} \left(P_z^2 - \frac{R^2 P_\theta^2}{(R^2 - z^2)^2} \right) + \frac{b}{m} \left(\frac{z^2}{R^2} \cos \theta \sin \theta P_z^2 - \frac{z}{R^2 - z^2} P_z P_\theta + \frac{R^2 \cos \theta \sin \theta}{(R^2 - z^2)^2} P_\theta^2 \right) - \frac{a}{mR^2} \sin \theta \left(z \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \cos \theta P_z^3 - \frac{R^2}{(R^2 - z^2)^2} P_\theta^3 + \frac{z \cos \theta}{R^2 - z^2} P_z P_\theta^2 - \sin \theta P_z^2 P_\theta \right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m(R^2 - z^2)} - \frac{az}{mR^2} \sin^2 \theta \left(\left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) P_z^2 + \frac{P_\theta^2}{R^2 - z^2} \right) + \frac{b}{m} \sin \theta \left(\frac{z^2}{R^2} \sin \theta P_z - \frac{z \cos \theta}{R^2 - z^2} P_\theta \right)$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{a}{mR^2} \sin \theta \left(R^2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \sin \theta P_z^3 - \frac{z \cos \theta}{R^2 - z^2} P_\theta^3 + \sin \theta P_z P_\theta^2 - z \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \cos \theta P_z^2 P_\theta \right) + \frac{b}{m} \left(z \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta P_z^2 - \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \cos \theta \sin \theta P_z P_\theta + \frac{z \cos^2 \theta}{R^2 - z^2} P_\theta^2 \right)$$

Nuevamente vemos que en todos y cada uno de los casos si hacemos los parámetros a y b idénticamente cero se recupera el caso conmutativo.

Dado que es imposible resolver analíticamente dicho sistema de ecuaciones, se obtuvo una solución numérica, la cuál se grafica para diferentes valores tanto de a como de b . En cada uno de dichos casos se utilizan como condiciones iniciales $z(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $P_z(0) = 0$, $P_\theta(0) = 1$

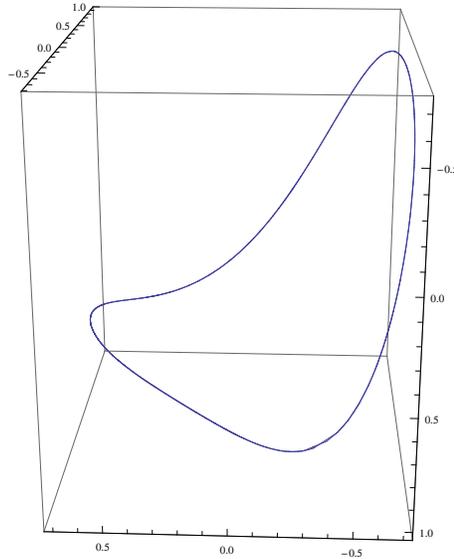


Figura 5.1: Se muestra la trayectoria de la partícula libre modificada ante la no-conmutatividad (Se toma $R = m = 1$, $a = 1$ y $b = 0$)

En cada una de las distintas gráficas podemos ver que las trayectorias cambian considerablemente en cuanto se modifican los parámetros. En este caso, hemos utilizado valores mayores que la unidad para enfatizar el cambio que produce la no-conmutatividad a la trayectoria original, la cual corresponde a un círculo máximo en el plano xy . Sin embargo dada la dependencia de las ecuaciones de movimiento las cuales son proporcionales tanto a los parámetros como a los momentos, trayectorias de este tipo bien pueden ser obtenidas para valores pequeños de los parámetros pero para condiciones iniciales grandes en los momentos, es decir, condiciones mucho mayores que la unidad. Esto trae como consecuencia que las trayectorias dependen fuertemente de las condiciones iniciales, indicando que un tratamiento perturbativo sólo sería para a y b muy pequeños y condiciones iniciales no mucho mayores que la unidad.

Hasta ahora, podemos ver que las trayectorias siguen siendo cerradas, al menos numéricamente, por lo que no ha sido necesario indicar un tiempo específico máximo en el que se grafica. Más adelante analizaremos con más detalle para el caso donde a es idénticamente cero y sólo b no nulo, es decir para el caso en que la no-conmutatividad inicial es sólo en los momentos.

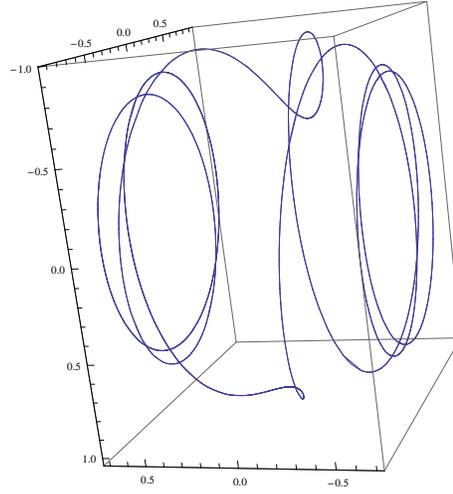


Figura 5.2: Se muestra la trayectoria de la partícula libre modificada ante la no-conmutatividad (Se toma $R = m = 1$, $a = 10$ y $b = 0$)

5.3. No-conmutatividad Sólo en los Momentos

En todo el desarrollo anterior no se ha hecho ninguna aproximación, tanto a como b se han supuesto arbitrarios, así como condiciones iniciales y los momentos a no ser limitados. Dada la complejidad de los cálculos que esto ha traído y, para no perder el ímpetu de trabajar sin ninguna aproximación, vamos a suponer que $a = 0$. Veremos que este caso no sólo es completamente tratable pero también cuantizable en una forma confiable.

Haciendo $a = 0$ en nuestros coeficientes de estructura simpléctica, estos quedan como:

$$\begin{aligned}
 J^{12} &= 0 \\
 J^{13} &= 1 + bz \cos \theta \sin \theta \\
 J^{14} &= -b(R^2 - z^2) \cos^2 \theta \\
 J^{23} &= b \frac{z^2}{R^2 - z^2} \sin^2 \theta \\
 J^{24} &= 1 - bz \cos \theta \sin \theta \\
 J^{34} &= -b \left(zP_z - \frac{R^2 + z^2}{R^2 - z^2} \cos \theta \sin \theta P_\theta \right)
 \end{aligned}$$

Sólo para enfatizar, esta matriz simpléctica nos dice como actúan los paréntesis entre las variables del espacio fase, esto es

$$\{z^\alpha, z^\beta\} = J^{\alpha\beta} \quad \text{donde } z^\alpha = (z, \theta, P_z, P_\theta)$$

Es el momento de dar el siguiente salto. Démonos cuenta que a excepción de J^{34} todos los otros coeficientes de la estructura no dependen de los momentos y que además las coordenadas

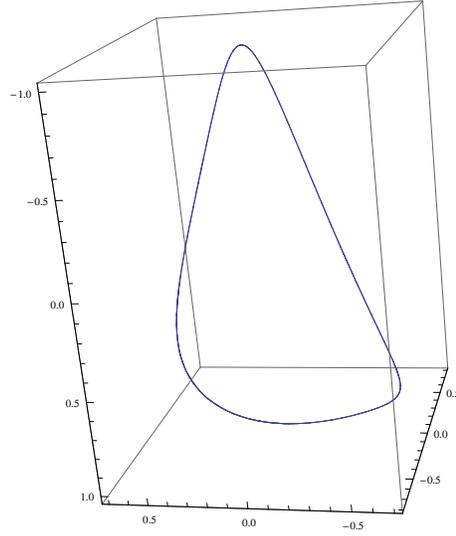


Figura 5.3: Se muestra la trayectoria de la partícula libre modificada ante la no-conmutatividad (Se toma $R = m = 1$, $a = 0$ y $b = 1$)

conmutan entre si. Esto nos lleva a la idea de que para una función que dependa linealmente de los momentos, su paréntesis con alguna coordenada sólo será afectado entre la coordenada y el momento. Por poner un ejemplo para clarificar esta idea, veamos

$$\text{si } f_\theta(z^\alpha) = g_z(z, \theta)P_z + h_z(z, \theta)P_\theta \implies \{z, f_\theta(z^\alpha)\} = g_z(z, \theta)\{z, P_z\} + h_z(z, \theta)\{z, P_\theta\}$$

persiguiendo la meta de un sistema con estructura simpléctica trivial, tenemos que buscar una solución adecuada a la ecuación anterior, y la correspondiente para el caso usando θ en vez de z , es decir, resolver las ecuaciones $\{z, f_\theta(z^\alpha)\} = 0$ y $\{\theta, f_z(z^\alpha)\} = 0$. La manera inmediata que se ocurre de resolver esta ecuación es suponer que

$$\begin{aligned} g_z(z, \theta) &= \alpha\{z, P_\theta\}, & h_z(z, \theta) &= -\alpha\{z, P_z\} \\ g_\theta(z, \theta) &= \beta\{\theta, P_\theta\}, & h_\theta(z, \theta) &= -\beta\{\theta, P_z\} \end{aligned}$$

veamos que dichas soluciones de hecho son *las soluciones* siendo las constantes $\alpha = \beta = 1$. Esto es, definamos las siguientes funciones dependientes de las variables dinámicas

$$\begin{aligned} \tilde{P}_z(z^\alpha) &= (1 - bz \cos \theta \sin \theta)P_z - \frac{bz^2 \sin \theta}{R^2 - z^2}P_\theta \\ \tilde{P}_\theta(z^\theta) &= b(R^2 - z^2) \cos^2 \theta P_z + (1 + bz \cos \theta \sin \theta)P_\theta \end{aligned} \quad (5.11)$$

entonces tenemos que

$$\{z, \theta\} = 0, \quad \{z, \tilde{P}_z\} = 1, \quad \{z, \tilde{P}_\theta\} = 0, \quad \{\theta, \tilde{P}_z\} = 0, \quad \{\theta, \tilde{P}_\theta\} = 1, \quad \{\tilde{P}_z, \tilde{P}_\theta\} = 0 \quad (5.12)$$

Es decir, hemos encontrado un cambio de variables para los momentos a unos nuevos cuyo paréntesis de Poisson es el trivial, es decir, *las coordenadas* $(z, \theta, \tilde{P}_z, \tilde{P}_\theta)$ *son un conjunto de coordenadas canónicas del espacio fase.*

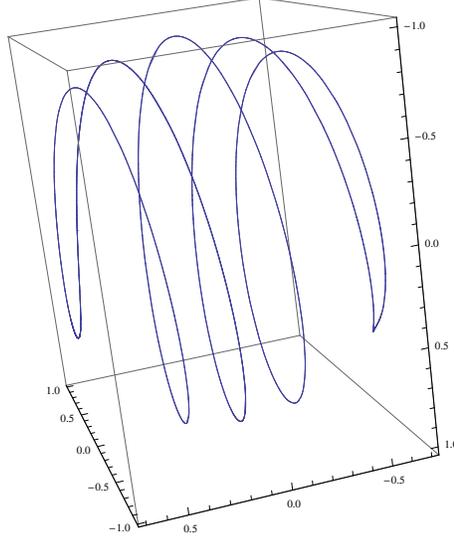


Figura 5.4: Se muestra la trayectoria de la partícula libre modificada ante la no-conmutatividad (Se toma $R = m = 1$, $a = 0$ y $b = 10$)

Para poder encontrar la dependencia del Hamiltoniano en estos nuevos momentos, necesitamos invertir a los momentos P_z y P_θ en (5.11) en términos de los momentos con tilde. Esto se da por

$$P_z(z, \theta, \tilde{P}_z, \tilde{P}_\theta) = (1 + bz \cos \theta \sin \theta) \tilde{P}_z + \frac{b z^2 \sin^2 \theta}{R^2 - z^2} \tilde{P}_\theta$$

$$P_\theta(z, \theta, \tilde{P}_z, \tilde{P}_\theta) = (1 - b(R^2 - z^2) \cos^2 \theta) \tilde{P}_z - b z \cos \theta \sin \theta \tilde{P}_\theta$$

Insertando estos valores para los momentos en el cambio de variables asociado a los momentos p_i encontramos que se escriben como

$$p_1 = - \left(\frac{z}{R^2} - b \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \cos \theta \sin \theta \right) \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta \tilde{P}_z$$

$$- \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 - z^2}} \left(1 - b z \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \cos \theta \sin \theta \right) \tilde{P}_\theta \quad (5.13)$$

$$p_2 = - \left(\frac{z}{R^2} \sin \theta + b \cos \theta \left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta \right) \right) \sqrt{R^2 - z^2} \tilde{P}_z$$

$$+ \left(\cos \theta - b z \sin \theta \left(1 - \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta \right) \right) \frac{\tilde{P}_\theta}{\sqrt{R^2 - z^2}} \quad (5.14)$$

$$p_3 = \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) (1 + b z \cos \theta \sin \theta) \tilde{P}_z + b \frac{z^2}{R^2} \sin^2 \theta \tilde{P}_\theta \quad (5.15)$$

Se puede ver que si hacemos $b = 0$ en todos los casos se recupera el cambio de variables original.

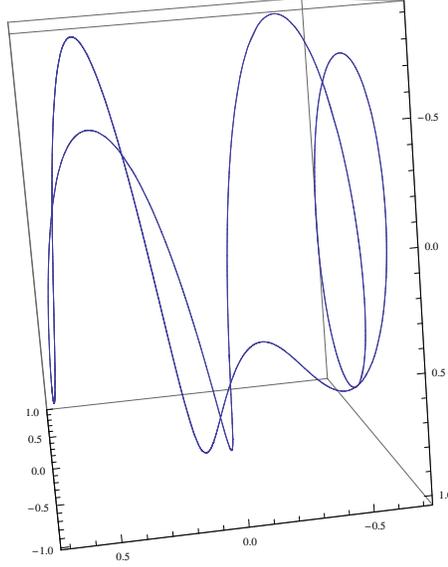


Figura 5.5: Se muestra la trayectoria de la partícula libre modificada ante la no-conmutatividad (Se toma $R = m = 1$, $a = 5$ y $b = 5$)

Finalmente ya podemos obtener el Hamiltoniano en estas nuevas variables

$$\begin{aligned}
H(z, \theta, \tilde{P}_z, \tilde{P}_\theta) &= \frac{(R^2 - z^2) \tilde{P}_z^2}{2mR^2} \left(1 + bz \sin 2\theta + \frac{b^2}{8} (3R^2 + z^2 + 4R^2 \cos 2\theta + (R^2 - z^2) \cos 4\theta) \right) \\
&+ \frac{\tilde{P}_\theta^2}{2m(R^2 - z^2)} \left(1 - bz \sin 2\theta + \frac{b^2 z^2}{8R^2} (R^2 + 3z^2 - 4z^2 \cos 2\theta - (R^2 - z^2) \cos 4\theta) \right) \\
&- \frac{b\tilde{P}_z\tilde{P}_\theta}{2mR^2} \left((R^2 + z^2) \cos 2\theta - (R^2 - z^2) - \frac{bz}{4} (2(R^2 - z^2) \sin 2\theta + (R^2 - z^2) \sin 4\theta) \right)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Notemos que este Hamiltoniano tiene la forma

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij} P_i P_j = \frac{1}{2m} \left(g^{11} \tilde{P}_z^2 + 2g^{12} \tilde{P}_z \tilde{P}_\theta + g^{22} \tilde{P}_\theta^2 \right) \tag{5.17}$$

En donde g^{ij} está jugando el papel de la inversa de una nueva métrica, la cuál está definida por los coeficientes

$$\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{(R^2 - z^2)}{R^2} \left(1 + bz \sin 2\theta + \frac{b^2}{8} (3R^2 + z^2 + 4R^2 \cos 2\theta + (R^2 - z^2) \cos 4\theta) \right) \\
g^{12} &= -\frac{b}{2R^2} \left((R^2 + z^2) \cos 2\theta - (R^2 - z^2) - \frac{bz}{4} (2(R^2 - z^2) \sin 2\theta + (R^2 - z^2) \sin 4\theta) \right) \\
g^{22} &= \frac{1}{(R^2 - z^2)} \left(1 - bz \sin 2\theta + \frac{b^2 z^2}{8R^2} (R^2 + 3z^2 - 4z^2 \cos 2\theta - (R^2 - z^2) \cos 4\theta) \right)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

y en consecuencia la métrica está dada por

$$\begin{aligned} g_{11} &= (R^2 - z^2) \left(1 + bz \sin 2\theta + \frac{b^2}{2} (R^2 + z^2 + (R^2 - z^2) \cos 2\theta) \cos 2\theta \right) \\ g_{12} &= \frac{b}{2} \left(R^2 - z^2 + (R^2 + z^2) \cos 2\theta - \frac{bz}{2} (R^2 + z^2 + (R^2 - z^2) \cos 2\theta) \sin 2\theta \right) \\ g_{22} &= \frac{R^2}{(R^2 - z^2)} \left(1 - bz \sin 2\theta + \frac{b^2 z^2}{2R^2} (R^2 + z^2 + (R^2 - z^2) \cos 2\theta) \sin 2\theta \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

cuyo determinante de esta métrica es R^2 , independiente del parámetro conmutativo b .

Visto el Hamiltoniano de esta forma, corresponde exactamente igual a la forma en que lo vimos en el caso conmutativo por lo que la cuantización se hace ya de manera igual a aquel caso, sólo hay que tener cuidado porque la métrica (su inversa) ha cambiado un poco, por lo que la cuantización se obtiene siguiendo el procedimiento usual: promovemos las variables a operadores

$$z \mapsto \hat{z}, \quad \theta \mapsto \hat{\theta}, \quad \tilde{P}_z \mapsto \hat{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{P}_\theta \mapsto \hat{P}_\theta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5.20)$$

cambiamos los paréntesis de Poisson por conmutadores

$$[\hat{z}, \hat{P}_z] = i\hbar, \quad [\hat{\theta}, \hat{P}_\theta] = i\hbar, \quad 0 \text{ otros casos} \quad (5.21)$$

y finalmente tenemos en cuenta que el ordenamiento correcto es

$$H(z, \theta, \tilde{P}_z, \tilde{P}_\theta) = \frac{1}{2m\sqrt{|g|}} \tilde{P}_k \left(\sqrt{|g|} g^{ik} \tilde{P}_i \right) \quad (5.22)$$

donde los coeficientes g^{ik} están dados en las relaciones (5.18) y g es el determinante de la métrica. Dado que dicho determinante en nuestro caso es constante, la ecuación anterior se reduce a

$$H = \frac{1}{2m} \tilde{P}_k \left(g^{ik} \tilde{P}_i \right) \quad (5.23)$$

Notemos que en este caso dado que hay un término cruzado, y al promoverse los momentos a operadores, las dos contribuciones ya no serán la misma, esto debido a que la métrica (su inversa) depende de las coordenadas,

$$\begin{aligned} \hat{H}(z, \theta) &= \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(R^2 - z^2)}{R^2} \left(1 + bz \sin 2\theta + \frac{b^2}{8} (3R^2 + z^2 + 4R^2 \cos 2\theta + (R^2 - z^2) \cos 4\theta) \right) \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{2R^2} \left((R^2 + z^2) \cos 2\theta - (R^2 - z^2) - \frac{bz}{4} (2(R^2 - z^2) \sin 2\theta + (R^2 - z^2) \sin 4\theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{b}{2R^2} \left((R^2 + z^2) \cos 2\theta - (R^2 - z^2) - \frac{bz}{4} (2(R^2 - z^2) \sin 2\theta + (R^2 - z^2) \sin 4\theta) \right) \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{(R^2 - z^2)} \left(1 - bz \sin 2\theta + \frac{b^2 z^2}{8R^2} (R^2 + 3z^2 - 4z^2 \cos 2\theta - (R^2 - z^2) \cos 4\theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Adicionalmente podemos encontrar el Lagrangiano a fin de ver cómo se ha modificado con respecto al Lagrangiano conmutativo. Esto lo hacemos teniendo en cuenta que

$$L(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}) = \tilde{P}_z \dot{z} + \tilde{P}_\theta \dot{\theta} - H \quad (5.25)$$

La derivada funcional de L con respecto a cada uno de los momentos \tilde{P}_z y \tilde{P}_θ nos dará las ecuaciones que deben satisfacer a fin de invertir \dot{z} y $\dot{\theta}$, dando respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{z} - g^{11}\tilde{P}_z - g^{12}\tilde{P}_\theta &= 0 \\ \dot{\theta} - g^{22}\tilde{P}_\theta - g^{12}\tilde{P}_z &= 0 \end{aligned}$$

las cuales escritas en forma matricial se engloban en

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_z \\ \tilde{P}_\theta \end{pmatrix} \implies g^{ij}\tilde{P}_j = \dot{q}^i \quad (5.26)$$

donde $q^1 = z$ y $q^2 = \theta$. Considerando que g_{ij} y g^{ij} son inversas podemos resolver para \tilde{P}_z y \tilde{P}_θ

$$g_{ki}g^{ij}\tilde{P}_j = g_{ki}\dot{q}^i \implies \tilde{P}_k = g_{ki}\dot{q}^i \quad (5.27)$$

Con esto podemos calcular el Lagrangiano

$$L = \dot{q}^j\tilde{P}_j - \frac{1}{2}g^{ij}\tilde{P}_i\tilde{P}_j = \dot{q}^j g_{jk}\dot{q}^k - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ik}\dot{q}^k g_{jm}\dot{q}^m$$

lo cual nos lleva directamente al resultado esperado

$$L = \frac{1}{2m}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \quad (5.28)$$

En el cuál sustituyendo los coeficientes de la métrica dados en (5.19) obtenemos

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}m \left[(R^2 - z^2) \left(1 + bz \sin 2\theta + \frac{b^2}{2} (R^2 + z^2 + (R^2 - z^2) \cos 2\theta) \cos 2\theta \right) \dot{z}^2 \right. \\ \left. + b \left(R^2 - z^2 + (R^2 + z^2) \cos 2\theta - \frac{bz}{2} (R^2 + z^2 + (R^2 - z^2) \cos 2\theta) \sin 2\theta \right) \dot{z}\dot{\theta} \right. \\ \left. \frac{R^2}{(R^2 - z^2)} \left(1 - bz \sin 2\theta + \frac{b^2 z^2}{2R^2} (R^2 + z^2 + (R^2 - z^2) \cos 2\theta) \sin 2\theta \right) \dot{\theta}^2 \right] \quad (5.29) \end{aligned}$$

Notemos que al hacer el parámetro $b = 0$ recuperamos en el Lagrangiano la métrica de la esfera en coordenadas cilíndricas.

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo tuvo como principal objetivo el describir un sistema físico que obedece a una específica estructura simpléctica, la cuál es no trivial. A pesar de las dificultades técnicas que trae dicho sistema, se logra describir su dinámica clásica y encontrar una serie de mapeos a fin de convertir la complejidad de la estructura simpléctica en una modificación del Hamiltoniano.

En el Capítulo 4 el primer resultado importante es el hecho de que una partícula libre restringida a moverse sobre una esfera admite todo un conjunto de posibles modificaciones de la estructura simpléctica sin que las constricciones del sistema se vean modificadas, es decir, los paréntesis de Dirac asociados siguen teniendo la misma estructura. Una vez tomado un caso particular de modificación a la estructura simpléctica canónica, el segundo resultado importante que se obtiene es el encontrar una fórmula que permite calcular la serie de Baker-Campbell-Hausdorff a cualquier orden, y en general, calcular el término de cualquier orden sin la necesidad de conocer los ordenes más bajos. Este resultado válido para una partícula libre en 3 dimensiones nos permite construir la versión cuántica de la partícula libre no-conmutativa.

En el capítulo 5 se estudió la dinámica correspondiente a la partícula libre sobre la esfera con la estructura simpléctica no conmutativa. Debido a que fue posible construir los paréntesis de Dirac de dicho sistema y a que encontramos un mapeo que reduce el número de variables a las efectivas, es como pudimos escribir las ecuaciones de movimiento y encontrar (computacionalmente) las trayectorias modificadas que sigue la partícula. En dichas trayectorias se puede apreciar que son cerradas, que dependen ampliamente de las condiciones iniciales así como del parámetro no-conmutativo, siendo notable destacar que entre mayores sean las condiciones iniciales y/o el parámetro de no-conmutatividad las órbitas tienden a tener presencia sobre toda la esfera.

El resultado más importante de esta tesis es, que dada una no-conmutatividad en los momentos para el sistema particular que trabajamos, se pudo encontrar un mapeo entre las variables no-conmutativas y unas con estructura simpléctica trivial. El teorema de Darboux nos garantiza que dada cualquier estructura simpléctica se puede encontrar un mapeo (local) que la convierta a la canónica, sin embargo, no da manera alguna de como encontrar dicho mapeo. Aquí hemos encontrado un ejemplo específico donde se encuentra dicho mapeo. Estas nuevas variables nos permitieron proponer una versión cuántica del sistema que estudiamos.

Hay dos puntos importantes derivados del desarrollo y de los resultados en esta tesis que bien vale la pena discutir. El primero es sobre su trascendencia y el segundo sobre la utilidad a futuro.

Bien podríamos preguntarnos si los resultados aquí obtenidos se ajustan mucho mejor a lo

observado en el experimento que a los ya existentes en la literatura para el caso conmutativo, y aunque no existen aún experimentos realizados a una partícula restringida a moverse sobre una esfera, la respuesta más probable es NO. El hecho de haber modificado ligeramente la estructura simpléctica agregando una no-conmutatividad muy particular que ni siquiera se inspira en un fenómeno físico no significa que existan experimentos físicos que reproduzcan dichos resultados.

La importancia de este trabajo radica en que se muestra un caso en el que se puede incluir una no-conmutatividad considerando en todo momento al sistema físico de manera no aproximativa y obtener una teoría cuántica totalmente consistente y que cuando hacemos los parámetros de no-conmutatividad cero se recuperan los resultados esperados. Hasta ahora el sistema no-conmutativo resuelto completamente es donde la no-conmutatividad es constante. También se han estudiado otros casos más generales donde se desprecian términos a partir de cierto orden en la no-conmutatividad [17]. Desde luego, se ha creado toda una amplia tecnología para estudiar sistemas con estructura simpléctica no-conmutativa, sin embargo la simplicidad del sistema aquí tratado y el hecho de llegar a resultados analíticos concretos y sin ninguna aproximación convierte a este ejemplo en un punto de referencia para el estudio cuántico de sistemas físicos no-conmutativos en los que se usan métodos de cuantización diferentes al canónico.

Lejos de ser este un ejemplo terminado, hay una gran utilidad que se le puede dar: el estudio de la inequivalencia de distintos métodos de cuantización a nivel de sistemas no-conmutativos. Un grande problema que suele hacerse presente a la hora de cuantizar es que diferentes métodos de cuantización conducen a sistemas cuánticos no equivalentes [13]. Un sistema cuántico que es obtenido a través de un sistema clásico con constricciones, que primero es reducido a variables efectivas y luego cuantizado; puede ser inequivalente al sistema cuántico obtenido a través de hacer primero una cuantización y posteriormente una reducción a variables efectivas a nivel cuántico. Dicha oportunidad de estudio se presenta aquí ya que la manera que se cuantizó a la partícula libre sobre la esfera fue haciendo primero una reducción y posteriormente la cuantización de la variables. Bien pudimos primero cuantizar y posteriormente hacer la reducción de variables a nivel cuántico. El hecho de contar con una fórmula que nos permite conocer la serie de Baker-Campbell-Hausdorff a todo orden, nos abre la posibilidad de estudiar el mismo sistema usando esta cuantización hecha en el espacio extendido y posteriormente reduciendo las variables a unas efectivas a nivel cuántico. Es posible que dicho tratamiento sólo se pueda hacer de manera perturbativo, sin embargo, es un motivo para seguir estudiando dicho sistema no-conmutativo particular en un futuro.

“What we have, in fact, is not a theory at all but a large collection of approximate calculations, together with a web of conjectures that, if true, point to the existence of a theory.”

Lee Smolin

Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechachics* (Dover Publications, New York, 2001).
- [2] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, New Jersey, 1992).
- [3] Kurt Sundermeyer, *Lectures Notes in Physics, Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, New York 1982).
- [4] J. Ize, *Cálculo de Variaciones* (IIMAS-FENOMECC Series, UNAM, 2002).
- [5] H. S. Snyder, Phys. Rev **71**(1), 38-41 (1947).
- [6] P. Bandyopadhyay, *Geometry, Topology, and Quantum Field Theory* (Springer-Science, Dordrecht, 2003).
- [7] M. Rosenbaum, J. D. Vergara Gen. Relativ. Gravit. (2006) 38(4): 607-624.
- [8] V. Kathotia, arXiv:math/9811174v2 [math.QA].
- [9] E. B. Dynkin Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), **57**, 323-326 (1947); translation by A. Kleshchev (1997).
- [10] R. Achilles, A. Bonfiglioli, Arch. Hist. Exact Sci. **66**, 295-258 (2012).
- [11] F. Casas, A Murua, J. Math. Phys. **50**, 033513 (2009).
- [12] K. Kowalski, J. Rembieliński, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 6035-6048 (2000).
- [13] D. McMullan, Annals of Physics **237**, 269-312 (1995).
- [14] Q. H. Liu, L. H. Tang, D. M. Xun, Phys. Rev A **84**, 042101 (2011).
- [15] Y. G. Miao, X. D. Wang, S. J. Yu, Ann. Phys. **326**, 2091-2107 (2011).
- [16] A. Van-Brunt, M. Visser, arXiv:1501.02506v11 [math-ph].
- [17] V. G. Kupriyanov, D. V. Vassilevich, Eur. Phys. J. (2008) 58:627-637.