



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**COMPORTAMIENTO DE UNA GOTA  
AL ATRAVESAR UN FLUIDO  
ESTRATIFICADO**

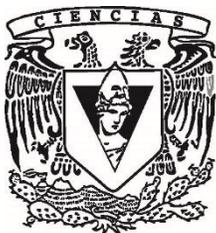
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A :**

**ANGÉLICA ZARAZÚA CRUZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. CATALINA ELIZABETH STERN  
FORGACH  
2015**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

**Datos del alumno**

Zarazúa

Cruz

Angélica

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

307315229

**Datos del tutor**

Dra.

Catalina Elizabeth

Stern

Forgach

**Datos sinodal 1**

Dr.

Jaime Gonzalo

Cervantes

De Gortari

**Datos sinodal 2**

Dr.

Francisco Javier

Mandujano

Sánchez

**Datos sinodal 3**

Dr.

Sergio

Cuevas

García

**Datos sinodal 4**

Dr.

Carlos

Málaga

Iguiñiz

**Datos del trabajo escrito**

Comportamiento de una gota al atravesar un fluido estratificado

65p

2015

---

---

## Agradecimientos

---

Agradezco a mis padres Miguel Ángel Zarazúa y Lourdes Cruz, sin cuyos consejos y educación no hubiese llegado hasta donde estoy. Porque gracias a ellos aprendí que si te esfuerzas lo suficiente logras llegar lejos.

A mis hermanas Verónica y Mireya, porque siempre están ahí en la buenas y en las malas para alentarme y apoyarme a seguir adelante.

Agradezco a mi asesora de tesis Catalina Stern, quien creyó en mí y me mostro que la parte experimental es interesante y divertida, pero también puede llegar a ser frustrante y estresante, pero que siempre se puede.

Agradezco a mis amigos por compartir mis triunfos pero también ayudarme a superar las malas experiencias y sinsabores de la vida. Especialmente a mis compañeros de trabajo Carlos Echeverría, Francisco Páez, David Porta y Gerardo Rangel, los cuales me soportan día con día, lo cual no es fácil.

Agradezco a mis sinodales cuyas críticas e ideas me ayudaron a crecer y tener un enfoque diferente hacia mi trabajo.

Finalmente quiero agradecer a todas aquellas personas que creyeron y no creyeron en mí, porque gracias a eso soy lo que soy hasta ahora.

# Índice

---

Resumen .....	1
Capítulo I- Introducción .....	2
1.1 Motivación.....	2
1.2 Antecedentes.....	2
1.2 Marco teórico .....	3
1.2.1 Ecuación de Basset-Boussinesq-Oseen.....	3
1.2.2 Fuerza de arrastre.....	6
1.2.2.1 Fuerza de arrastre en estado estacionario.....	6
1.2.2.2 Modelo esférico .....	7
1.2.2.3 Modelo elíptico .....	8
1.2.2.4 Modelo basado en un factor de arrastre con geometría variable .....	10
Capítulo II-Dispositivo experimental .....	12
2.1 Técnica de visualización Shadowgraph .....	13
2.1 Método de llenado .....	13
2.1.1 Técnica 1: Inyección de líquido a través de una jeringa .....	14
2.1.2 Técnica 2: Inyección de líquido por un flujo constante .....	16
2.1.3 Técnica 3: Inyección de líquido por flujo constante a través de un medio poroso ..	17
2.2 Método de inyección de gotas .....	19
Capítulo III- Resultados.....	22
3.1 Análisis.....	22
3.2 Imágenes derivadas de los videos .....	23
3.3 Velocidad contra tiempo .....	25
Capítulo IV- Análisis y Discusión .....	30
4.1 Comparación de los radios con la posición .....	30
4.2 Fuerza de arrastre .....	33
4.2.1 Modelo esférico.....	33

4.2.2 Modelo elíptico.....	35
4.2.3 Modelo a partir de un factor de arrastre con geometría cambiante .....	37
4.3 Comparación entre modelos .....	39
4.4 Fuerza neta .....	40
4.5 Fuerza de arrastre ( $FD$ ) y fuerza neta ( $FN$ ) .....	42
4.5.1 Comparación de la fuerza de arrastre y la fuerza neta.....	42
4.5.2 Fuerza restante .....	44
4.6 Desprendimiento de masa. ....	48
Capítulo V- Conclusiones .....	51
Capítulo VI- Trabajo a futuro .....	52
Referencias .....	53
Apéndice .....	55

# Resumen

---

En este trabajo se describe la dinámica de una gota de alcohol bencílico, sustancia parcialmente miscible en agua, cuando cae a través de un fluido estratificado que consta de dos capas, agua pura en la capa superior y agua con sal con una concentración de 1.682 molar, en la inferior.

El grosor de la interfaz depende de la forma de mezclado y de la temperatura. Si la interfaz no es estable, el experimento no es repetible. Se logró definir un protocolo para controlar el mezclado y asegurar tanto la posición como el grosor de la interfaz, obteniendo así un experimento repetible. Para determinar la posición y el grosor de la interfaz se utilizó la técnica de shadowgraph.

Los procesos que suceden durante la caída de la gota dependen de parámetros tales como: la distancia del recorrido de la gota dentro de la capa superior, la densidad de la capa inferior, el volumen y la geometría de la gota.

Primero la gota cae libremente. Al entrar en contacto con la interfaz, presenta un comportamiento similar al de un oscilador armónico amortiguado.

Se obtuvo la fuerza de arrastre durante la caída a partir de tres modelos. Primero se consideró a la gota como una esfera rígida; luego como un elipsoide y finalmente, se utilizó un factor de arrastre que permite usar una geometría variable. También se hizo la comparación con la fuerza neta para obtener el modelo que mejor se adapta a gotas con diferentes volúmenes. A partir de esto se obtuvo la fuerza restante, es decir, a la suma de fuerzas debidas a la presión, a la masa virtual y al término de Basset.

La comprensión de este proceso es importante para entender la transferencia de masa y de energía entre la gota y el medio.

# Capítulo I- Introducción

---

## 1.1 Motivación

Es común que las masas fluidas tanto en la naturaleza como en las aplicaciones tecnológicas estén estratificadas. Es decir, que existan capas de diferentes densidades debidas sobre todo a gradientes de temperatura o de concentración. En algunos casos, cuando algún material pasa a través de un medio estratificado, puede quedar atrapado por largos periodos de tiempo.

Por ejemplo, cuando se derrama petróleo en el mar, éste puede quedar encapsulado varios cientos de metros bajo la superficie, durante meses. En la industria química existen procesos comerciales de extracción que involucran sustancias miscibles, parcialmente miscibles o inmiscibles con las cuales se usan diferentes técnicas para el procesamiento de minerales, la producción de aceites vegetales y biodiesel, la producción de perfumes, la producción de compuestos orgánicos, la elaboración de mayonesa, etc. Desde luego, el fenómeno varía si la partícula es sólida, completamente miscible, parcialmente miscible o inmiscible. Los líquidos son miscibles si en cualquier proporción las sustancias involucradas interaccionan, de lo contrario se dice que son sustancias inmiscibles.

Estudios realizados sobre gotas que interactúan con medios estratificados, Álvarez V. et al (2015) y István Biró et al (2008), establecen que las condiciones iniciales del sistema influyen directamente en el fenómeno. Un factor importante en el proceso es la interfaz entre fluidos de distintas densidades, que a su vez, depende de factores tales como la temperatura, el tiempo y tipo de mezclado entre capas. Aunque la creación de la interfaces es un factor relevante, no se cuenta con un método que permita mantenerla constante, en la misma posición y con el mismo grosor.

## 1.2 Antecedentes

Estudios realizados por Álvarez V. et al (2015) sobre gotas miscibles en agua al interactuar con el mismo medio, establecen la presencia de cuatro fenómenos: rebote, candelabro, acomodamiento y caída del núcleo, que dependen de la densidad de la gota, la distancia recorrida y la proporción de profundidades entre las dos capas.

István Biró et al (2008) realizó experimentos en los cuales se hace interactuar un cuerpo sólido que contiene fluidos con distintas densidades en su interior. Estos cuerpos al interactuar con un medio estratificado presentan un comportamiento muy distinto al de gotas miscibles en agua.

El comportamiento de gotas parcialmente miscibles en un fluido homogéneo es conocido; sin embargo, los fenómenos en fluidos estratificados han sido poco estudiados. Este es el objetivo de este trabajo.

## 1.2 Marco teórico

### 1.2.1 Ecuación de Basset-Boussinesq-Oseen

Cuando un cuerpo cae a través de un fluido se ve afectado por varias fuerzas que actúan sobre él. La primera solución analítica para la descripción del flujo alrededor de un cuerpo esférico a números de Reynolds del orden o menores a la unidad en un flujo constante, fue proporcionada por Stokes en 1851. Sin embargo no fue hasta Basset (1888), Boussinesq (1895) y Oseen (1927) que se propuso la ecuación de movimiento para una partícula esférica. Dicha ecuación se denomina ecuación de Basset-Boussinesq-Oseen en honor a los científicos que la propusieron. Por simplicidad nosotros la llamaremos BBO.

La ecuación BBO está sujeta a varias condiciones. Se supone una esfera rodeada por un fluido viscoso infinito que se encuentra inicialmente estático. La esfera se mueve con una velocidad uniforme  $v$  a lo largo de una línea recta, a través un flujo bidimensional, axisimétrico e incompresible. Bajo estas condiciones es posible definir una función de corriente  $\Psi$ , y de ahí deducir las componentes de las velocidades a lo largo y perpendiculares al radio vector (Figura 1).

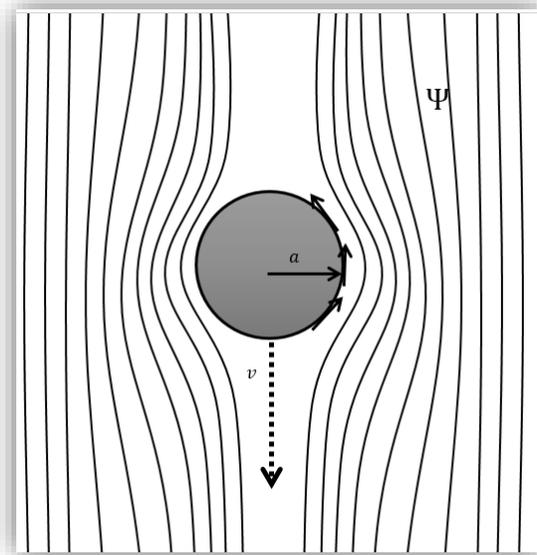


Figura 1: Contorno de la función de corriente  $\Psi$ , para una esfera de radio  $a$  que se desplaza en un fluido con una velocidad  $v$ , donde las flechas alrededor de la esfera representan las componentes de las velocidades tangenciales

Se asume que en la superficie de la esfera no tiene lugar deslizamientos, por lo que las condiciones de frontera están en términos de la función de corriente y de las componentes de la velocidad en las direcciones  $r, \theta$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{a^2 \text{sen}(\theta)} \frac{d\psi}{d\theta} = v \cos(\theta), \\ \Theta &= \frac{1}{a \text{sen}(\theta)} \frac{d\psi}{dr} = -v \text{sen}(\theta), \end{aligned} \quad (0)$$

las cuales se anulan al infinito. Es necesario entonces proponer  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , funciones de  $r$  y  $\theta$ . Para la ecuación de movimiento, es necesario obtener la resistencia que experimenta la esfera debido al líquido. La expresión que se obtiene para el movimiento de una esfera, Basset (1888), es la siguiente

$$(m - m')g = \left(m + \frac{1}{2}m'\right)\dot{v} + \frac{9m'}{2a^2} \left\{v\dot{v} + a\sqrt{\frac{v}{\pi}}\right\} \quad (1)$$

Es decir, al considerar un cuerpo esférico de masa  $m'$ , de volumen  $V_c = \frac{4\pi a^3}{3}$  y con  $v = \frac{\mu}{\rho}$ , y sustituir estas expresiones en la ecuación (1) la fuerza neta de la esfera se puede expresar como

$$m \frac{dv}{dt} = -6a\pi\mu v - \frac{1}{2}m' \frac{dv}{dt} - 6a^2(\pi\mu\rho)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{F'(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau + (m - m')g, \quad (2)$$

donde  $m$  y  $m'$  son las masas de la esfera y del fluido desplazado respectivamente,  $\rho$  la densidad del fluido,  $v$  es la velocidad de la esfera,  $a$  es el radio de la esfera,  $g$  la fuerza de gravedad,  $\mu$  la viscosidad del fluido y  $F'$  representa la aceleración de la partícula. La ecuación (2) muestra que la fuerza neta es la suma de la fuerza de arrastre, la debida al termino histórico y a la gravedad, los cuales se describirán en detalle más adelante.

En 1947 la ecuación de movimiento de una partícula en un fluido turbulento fue considerada por Tchen (1947) a partir de la ecuación BBO para el movimiento acelerado de una partícula en un fluido estacionario. Luego, sobre la base de consideraciones intuitivas, la complementó con un término asociado con la acción de las fuerzas de presión que surgen con el movimiento inestable del fluido. Sin embargo, el resultado de Tchen fue criticado y desarrollado más tarde en estudios tales como los de Corrsin y Lumley (1956) y posteriormente el de Beuvich (1966). En ambos trabajos, a partir del mismo método, se llegó a la conclusión de que la ecuación de Tchen se podía reescribir como

$$V_c \rho' \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{2} V_c \rho \left( \frac{dv_i}{dt} - \frac{du_i}{dt} - v_m \frac{du_i}{dx_m} \right) + V_c \rho \left( \frac{du_i}{dt} + v_m \frac{du_i}{dx_m} \right) - V_c (\rho' - \rho) g_i \quad (3)$$

$$- 6\pi\mu a \left[ (v_i - u_i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \left( \frac{dv_k}{dt} - \frac{du_k}{dt} - v_m \frac{du_k}{dx_m} \right)_{t=\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right],$$

donde  $\rho'$  y  $\rho$  son: las densidades de la partícula y del fluido en el que se desplaza, respectivamente.  $V_c$  es el volumen de la partícula,  $u_i$  la velocidad del fluido,  $x'_i$  son las coordenadas del elemento del medio al tiempo  $t$ , en el punto  $x_i$ .

Finalmente en 1983, una derivación de la ecuación de movimiento para partículas pequeñas en fluidos no uniformes e inestables, para números de Reynolds pequeños, fue realizada por Maxey y Riley (1983), dando como resultado la siguiente expresión

$$\frac{mdv_i}{dt} = \begin{cases} I & \\ + V_d \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) & II \\ + 3\mu\pi D \left[ (u_i - v_i) + \frac{D^2}{24} \nabla^2 u_i \right] & III \\ + \frac{1}{2} \rho V_d \frac{d}{dt} \left[ (u_i - v_i) + \frac{D^2}{40} \nabla^2 u_i \right] & IV \\ + \frac{3}{2} \mu\pi D^2 \int_0^t \left[ \frac{\frac{d}{d\tau} \left( (u_i - v_i) + \frac{D^2}{40} \nabla^2 u_i \right)}{\mu\nu(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \right] d\tau & V \end{cases} \quad (4).$$

donde  $D$  es el diámetro de la partícula.

La fuerza neta sobre un cuerpo que cae en un fluido depende de 5 términos importantes.

- I. El primer término representa la fuerza debido a la gravedad, es decir, el peso.
- II. El segundo término es la suma de dos fuerzas. **Una debida al** gradiente de presión local y que es contraria a la gravedad. Otra debida a los **esfuerzos de corte** que ejerce el fluido sobre la gota y que actúa en toda la superficie dentro del medio. La suma de estas dos fuerzas se torna importante en flujos de sólidos en líquidos, donde la relación de densidad del material es del orden de la unidad.
- III. El tercer término representa la fuerza de arrastre que depende de la geometría de la partícula dentro del flujo (el cual abordaremos más adelante con mayor detalle).
- IV. El cuarto término se atribuye al efecto de masa virtual o masa aparente, que hace referencia a la inercia añadida a un sistema. Al acelerar o desacelerar un cuerpo, éste debe mover una cantidad de volumen del fluido circundante a medida que avanza a través de él, debido a que el objeto y el líquido no pueden ocupar el mismo

espacio físico simultáneamente. En general, la masa añadida es un tensor de segundo orden, que relaciona el vector de aceleración del fluido con el vector de fuerza resultante sobre el cuerpo.

- V. El quinto término, llamado término de Basset o término histórico, considera efectos viscosos. Este término hace referencia al retardo temporal del desarrollo de la capa límite, como cambios en la velocidad relativa respecto al tiempo.

En este trabajo es de interés el cambio en la geometría de una gota de alcohol bencílico al atravesar un fluido estratificado. Se tomará como primera aproximación, que la gota se comporta como una partícula sólida, por lo que se puede utilizar la ecuación general de movimiento antes descrita. Debido a que los dos últimos términos de la ecuación no se pueden medir, este trabajo se enfocará a analizar la fuerza de arrastre en cada posición y compararla con la fuerza neta. Se modela la fuerza de arrastre de tres maneras diferentes según su geometría.

## 1.2.2 Fuerza de arrastre

### 1.2.2.1 Fuerza de arrastre en estado estacionario

El arrastre en fluido estático es la fuerza que actúa sobre una partícula o una gota en un campo de velocidad cuando no hay aceleración o velocidad relativa entre la partícula y el transporte de fluido. El término III en la ecuación de movimiento, Crowe (2011), se puede reescribir como

$$\mathbf{F}_{D_i} = \mathbf{H}_i + \mu\pi \frac{D^3}{8} \nabla^2 \mathbf{u}_i, \quad (5)$$

Donde el primer término es el correspondiente al arrastre de Stokes y el segundo término en esta expresión es correspondiente a la fuerza de Faxen, la cual es la corrección al arrastre de Stokes para la curvatura del perfil de velocidades en el campo de transporte de flujo. Para un campo de flujo rectilíneo, esta fuerza se reduce a cero, obteniendo entonces la siguiente expresión para la fuerza de arrastre

$$\mathbf{F}_{D_i} = \mathbf{H}_i \quad (6)$$

Esta fuerza de arrastre está relacionada con la geometría del cuerpo que se desplaza dentro del fluido, es por eso que se presenta a continuación la fuerza de arrastre para distintas geometrías.

Con el propósito de establecer un modelo que se adapte al comportamiento de nuestra gota, a continuación se analizará la fuerza de arrastre para partículas de distintas

geometrías tales como, partículas esféricas, partículas elípticas y finalmente a partir de la utilización de un factor de arrastre, esto es, partículas que cambian su geometría en el tiempo.

### 1.2.2.2 Modelo esférico

La fórmula general de la fuerza de arrastre, Crowe et. al. (2011), se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{F}_{D_i} = \frac{1}{2} \rho C_D A |\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i| (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i), \quad (7)$$

donde  $C_D$  se denomina coeficiente de arrastre,  $\rho$  es la densidad del medio,  $A$  es el área de la sección transversal al movimiento,  $u_i$  y  $v_i$  son la velocidad del fluido en el que se desplaza la partícula y la velocidad de la partícula o gota respectivamente.

Por otro lado, el coeficiente de arrastre es una función del número de Reynolds basado en la velocidad relativa ( $Re_r$ ). Este número es importante para determinar el comportamiento de un fluido y está definido de la siguiente manera

$$Re_r = \frac{\rho D_n |\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i|}{\mu}, \quad (8)$$

donde  $D_n$  es el volumen equivalente del diámetro de la esfera y  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.

Para un amplio intervalo de números  $0 < Re_r < 2 * 10^5$ , la forma funcional del coeficiente de arrastre  $C_d$ , Timmerman y van der Weele (1998), se puede escribir como

$$C_D \approx \frac{24}{Re_r} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_r}} + 0.4, \quad (9)$$

donde para pequeños números  $Re_r < 1$ , el primer término domina. Es por eso que la fuerza de arrastre que actúa sobre un cuerpo de forma esférica de radio  $R$  que se encuentra en un fluido infinito, en nuestro caso en reposo, la podemos describir como

$$F_{D_i} = \frac{1}{2} \frac{24}{Re_r} \rho R^2 \pi v_i^2 = 6\pi\mu R v_i. \quad (10)$$

### 1.2.2.3 Modelo elíptico

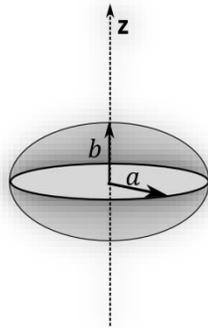
Para la obtención de la fuerza de arrastre de un elipsoide se debe tomar en cuenta el problema del flujo de corriente en un esferoide, el cual es paralelo al eje de revolución. El esferoide se supone en reposo ( $v = 0$ ) mientras que las corrientes de fluido se mueven con velocidad  $u$  en dirección  $z$  negativo. Bajo estas condiciones y estableciendo coordenadas esferoidales oblatas y prolatas se obtiene la fuerza de arrastre para un elipsoide de acuerdo a John Happel y Howard Brenner (1983).

$$F_{D_i} = 6\mu\pi(u_i - v_i)ka, \quad (11)$$

donde  $k$  es una constante de forma, que depende de la alteración en la geometría del elipsoide en el eje horizontal ( $a$ ) o en el eje vertical ( $b$ ) (ver figuras 2 y 3).

Las constantes de forma obtenidas por Goodarz Ahmadi y John B. McLaughlin (2008) toman, como su nombre lo indica, el valor de acuerdo a la deformación. Es por esto que si el elipsoide se deforma en mayor medida en el eje horizontal, Figura 2, la constante de forma toma el valor

$$k_1 = \frac{\frac{4}{3}(\beta^2 - 1)}{\frac{(2\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \ln \left[ \beta + (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \beta} \quad \left( \beta = \frac{b}{a} \right). \quad (12)$$



**Figura 2:** Elipsoide ( $a > b$ ) desplazándose en dirección  $Z$ , dentro de un fluido.

Por otro lado si la deformación del elipsoide ocurre en el eje vertical (Figura 3), es decir, en  $b$ , el factor de forma se define como

$$k_2 = \frac{\frac{4}{3}(\beta^2 - 1)}{\frac{(2\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \tan^{-1}(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \beta} \quad \left(\beta = \frac{a}{b}\right), \quad (13)$$

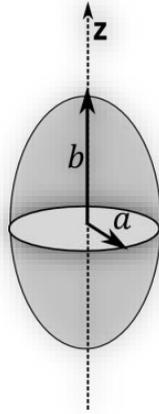


Figura 3.- Elipsoide ( $b > a$ ) desplazándose en dirección Z, dentro de un fluido.

donde  $k$  tiene el valor de la unidad cuando la deformación en el eje horizontal y vertical es la misma, es decir,  $k=1$  cuando  $a$  tiende a  $b$  es decir, el objeto que se desplaza es un cuerpo esférico.

Sin embargo en el caso de  $Re > 1$  la expresión que describe del movimiento de una partícula elíptica es la ecuación (7) donde el coeficiente de arrastre de acuerdo a Militzer et. al. (1988) se define como

$$C_D = \left\{ \left[ \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687}) + \frac{0.42}{(1 + 42500Re^{-1.16})} \right] \left( \frac{4+E}{5} \right) \left[ 1 + \frac{0.00069 Re}{E} - 0.000754 Re E + \frac{0.0924}{Re} + 0.00276E^2 \right] \right\} \quad (14)$$

donde  $E$  representa la razón entre el diámetro vertical y horizontal de la partícula, siendo

$$E = \frac{2b}{2a}. \quad (15)$$

Sin embargo para esta expresión cuando  $E=1$ , es decir, cuando la partícula es esférica, la expresión para la fuerza de arrastre no colapsa a esfera, esto demuestra que el modelo está incompleto.

#### 1.2.2.4 Modelo basado en un factor de arrastre con geometría variable

La fuerza de arrastre en un cuerpo que se mueve a través de un fluido corresponde a

$$\mathbf{F}_{D_i} = \frac{1}{2} \rho C_D A |\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i| (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i), \quad (16)$$

Reescribiendo esta expresión obtenemos que

$$\mathbf{F}_{D_i} = 3D\pi\mu(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i)f, \quad (17)$$

donde  $f$  es el factor de arrastre, o bien, el radio del coeficiente de arrastre para el arrastre de Stokes. Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \rho C_D A |\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i| (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) = 3D\pi\mu(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i)f, \quad (18)$$

Es decir

$$f = \frac{C_D Re_r}{24}. \quad (19)$$

Sin embargo Hölzer y Sommerfeld (2008) obtuvieron el coeficiente de arrastre para cualquier valor del número de Reynolds, dicho valor está dado por la siguiente expresión

$$C_D = \frac{8}{Re_r} \frac{1}{\sqrt{\phi}} + \frac{16}{Re_r} \frac{1}{\sqrt{\psi}} + \frac{3}{\sqrt{Re_r}} \frac{1}{\psi^{3/4}} + \frac{1}{\phi} 0.4210^{0.4(-\log \psi)^{0.2}}, \quad (20)$$

donde de acuerdo a las expresiones (17) y (18), obtenemos el factor de arrastre

$$f = \frac{1}{3\sqrt{\phi}} + \frac{2}{3\sqrt{\psi}} + \frac{Re_r^{1/2}}{8\psi^{3/4}} + 0.0175 \frac{Re_r}{\phi} 10^{0.4(-\log \psi)^{0.2}}, \quad (21)$$

Con  $\phi$  la esfericidad transversal definida como

$$\phi = \left(\frac{D_n}{D_A}\right)^2 \quad (22)$$

Con el volumen equivalente

$$D_n = \left(\frac{6V_c}{\pi}\right)^{1/3} . \quad (23)$$

Y el área equivalente

$$D_A = \left(\frac{4A_p}{\pi}\right)^{1/2} , \quad (24)$$

donde  $A_p$  es el área proyectada.

Si  $\Psi$  representa la esfericidad, la cual está dada por el cociente entre  $A_s$  (área de la superficie de la esfera del mismo volumen) y  $A$  (área actual de la superficie) entonces

$$\Psi = \frac{A_s}{A} . \quad (25)$$

La gota elipsoidal colapsa a una esfera cuando las deformaciones en los radios son las mismas.

## Capítulo II-Dispositivo experimental

En este capítulo se describirá como se diseñó y se realizó el experimento, y los factores que influyen para que el montaje experimental utilizado tenga la estructura que se presenta y no otra.

El dispositivo experimental que se montó, Figura 4, consta de una cuba de 76 X 50.7 mm ancho y profundidad respectivamente en el cual se creó un medio estratificado de dos capas (cuyas características se detallan más adelante). Este montaje consta también de un sistema electromecánico que permite la inyección de un volumen constante al medio antes descrito.

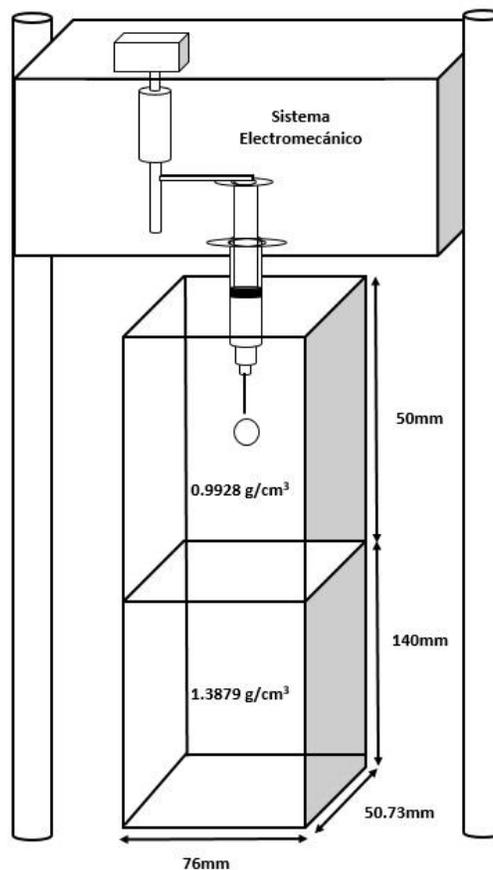


Figura 4.- Montaje experimental que consta de una cuba de ciertas dimensiones para la creación del fluido estratificado (de dos capas) y un sistema electromecánico con una jeringa, que permite la inyección del líquido a estudiar.

Para describir la dinámica general de la interacción de la gota con la estratificación fue indispensable desarrollar un método de llenado idóneo para la creación de la interfaz, un método de inyección de gotas para el control del volumen del fluido entrante y establecer una técnica de visualización que permite el monitoreo de la interfaz.

## 2.1 Técnica de visualización Shadowgraph

Esta técnica de visualización permite observar cambios en el índice de refracción de medios transparentes, debidos a las variaciones de densidades en el medio, todo esto con el propósito de poder visualizar la interfaz generada, y por otro lado, obtener una imagen que permita observar con gran detalle la interacción de una gota parcialmente miscible con el medio. En su modo más simple se encuentra el shadowgraph directo (Settles 1949), donde la luz proviene de una fuente puntual y los rayos se expanden en un cono. Algunos rayos llegan a la región de prueba, otros se desvían debido a los cambios de densidad local, haciendo que la imagen proyectada tenga zonas claras y zonas oscuras, Figura 5.

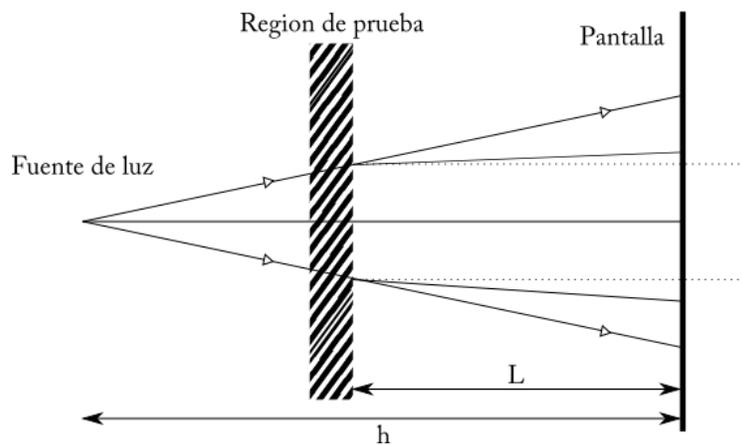


Figura 5.- Shadowgraph directo: al llegar los rayos de luz a la región de prueba, la trayectoria de los rayos se ve afectada por los cambios de densidad, llegando desfasados a la pantalla.

Esta técnica fue implementada en el experimento utilizando como fuente puntual un láser verde de 532nm, donde la región de prueba corresponde al medio estratificado. La distancia  $L$  de la región de prueba a la pantalla, se toma como despreciable ya que la pantalla fue pegada a una de las caras de la cuba, esto con el objetivo de obtener la proyección de la imagen inmediatamente después de la cuba y no hacer correcciones de magnificación debidas a la proyección en la pantalla a una distancia  $L$ .

## 2.1 Método de llenado

El método de llenado permite crear el fluido estratificado estable a utilizar. Un fluido estratificado consiste en parcelas de fluidos de distintas densidades, las cuales por acción de la gravedad tienden a organizarse de manera que los fluidos con densidades altas se

encuentran por debajo de los fluidos con densidades bajas. Entre los dos fluidos existe una zona con un gradiente de densidad importante, la cual se conoce como interfaz.

El principal objetivo del método de llenado es establecer una interfaz invariante en un intervalo de tiempo tanto en posición como en grosor, o bien, que el cambio en estas sea suficientemente pequeño que se pueda considerar despreciable.

Para tener un experimento repetible fue necesario tener control sobre la interfaz. Para esto se desarrollaron tres técnicas de llenado, en las cuales se monitoreó, a través de la técnica descrita anteriormente (Figura 5), el cambio de la interfaz, en grosor y posición respecto del tiempo. En los tres casos el volumen ( $V$ ) y la densidad ( $\rho$ ) de la capa inferior y superior tiene los valores de  $V=269.883 \text{ cm}^3$ ,  $\rho=1.3879 \text{ g/cm}^3$  y  $V=96.387 \text{ cm}^3$ ,  $\rho=0.9928 \text{ g/cm}^3$  respectivamente. De la misma manera para estas técnicas se hizo uso de una cámara fotográfica Canon EOS Rebel XSi, con la cual se tomaron fotografías en intervalos de tiempo de cinco minutos con el fin de monitorear la interfaz y establecer si había diferencia alguna al aplicar una técnica u otra.

A continuación se describen las tres técnicas desarrolladas.

### 2.1.1 Técnica 1: Inyección de líquido a través de una jeringa

Utilizando una jeringa de 60 ml, se inyectó de manera directa agua con una densidad de  $0.9928 \text{ g/cm}^3$ , sobre el líquido de la capa inferior. A través de esta técnica se obtiene una interfaz, que se puede observar claramente. Debido a la turbulencia que se genera al ingresar el fluido (correspondiente a la capa superior) en la capa inferior, la interfaz presenta aumento en su grosor, Figura 6. Sin embargo el gradiente de densidad, debido a su constante mezcla con la capa superior e inferior, se difunde rápidamente en un intervalo de tiempo corto respecto al tiempo que se necesita para llevar a cabo el experimento, ver Figura 7, con lo cual la interacción de la gota con el medio estratificado cambia en función del tiempo.

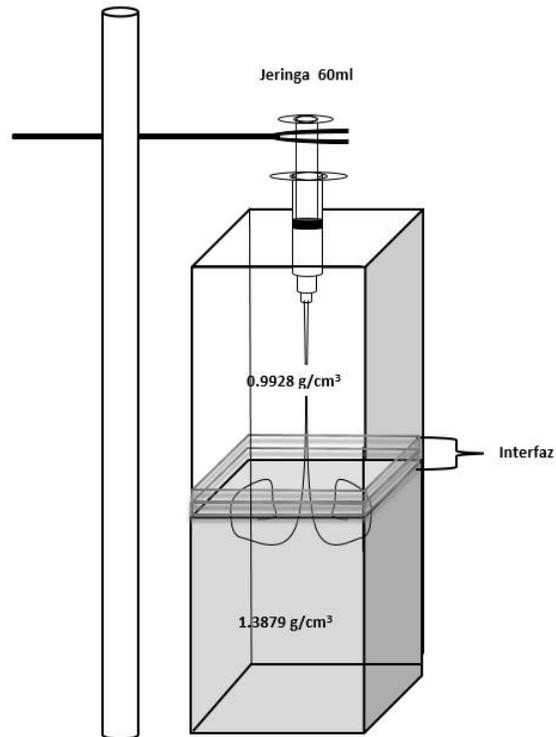


Figura 6.- Montaje experimental, inyección de líquido a través de jeringa

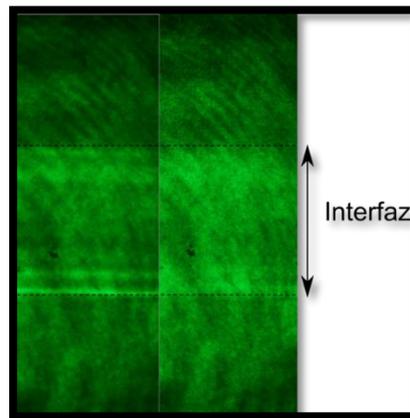
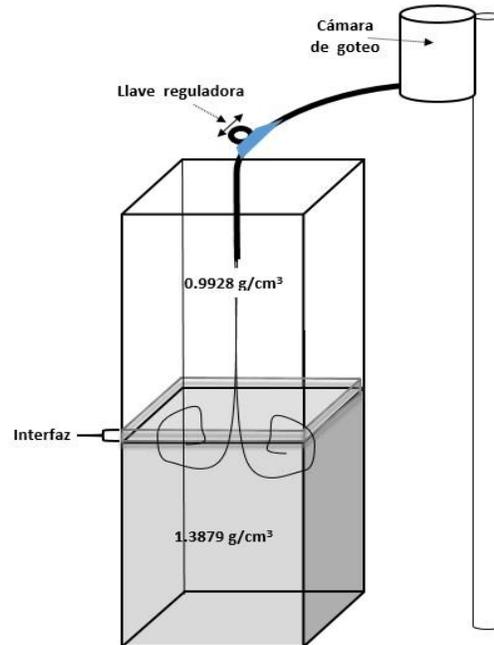


Figura 7.- Medio estratificado donde el intervalo de tiempo entre imágenes es de 15 minutos y el grosor de la interfaz es de  $2 \pm 0.05$  cm.

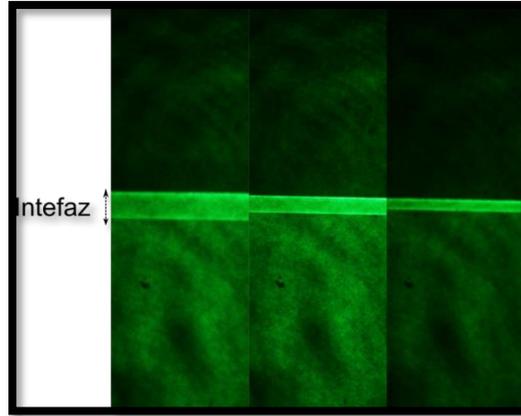
### 2.1.2 Técnica 2: Inyección de líquido por un flujo constante

Para esta técnica, Figura 8, es necesaria una cámara de goteo, la cual hace ingresar el fluido a la capa inferior a partir de la llave reguladora, produciendo la interfaz.



*Figura 8.- Montaje de sistema de llenado inyección de líquido por flujo constante.*

En este caso la interfaz disminuye su grosor respecto a la generada con la primera técnica, Figura 9, debido a que dicha interfaz está en mezcla constante con ambas capas del medio estratificado. Sin embargo el grosor y la posición varían en el tiempo, haciendo que el experimento no tenga siempre las mismas condiciones (grosor y posición de la interfaz).



*Figura 9.- Interfaz debida a la segunda técnica de llenado, dónde el espacio temporal entre imágenes es de 5 minutos y el grosor inicial de la interfaz es de  $5 \pm 0.5\text{mm}$ .*

### 2.1.3 Técnica 3: Inyección de líquido por flujo constante a través de un medio poroso

Utilizando el montaje anterior, pero agregando un medio poroso (piedra pómez) y fijando la manguera de inyección, Figura 10, se observó la formación de una interfaz definida, la cual no varía en posición ni grosor durante los primeros 15 minutos (Figura 11). Esto se debe a que el flujo entrante interactúa primero con el medio poroso, lo que hace que haya una mayor superficie de contacto respecto a la capa inferior, produciendo entonces menor turbulencia y mezclado entre los dos fluidos.

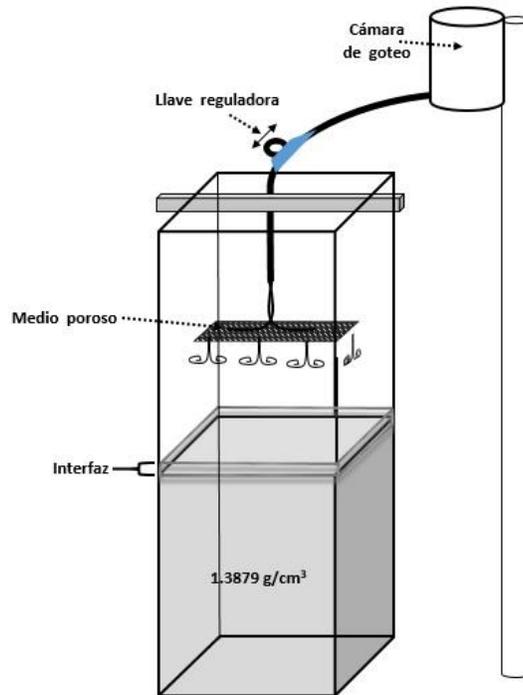


Figura 10.- Inyección de líquido por flujo constante a través de un medio poroso.

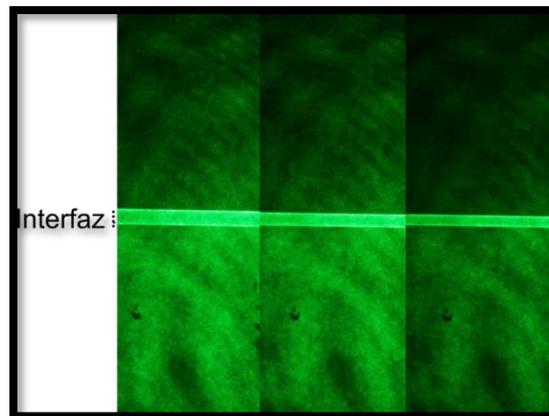


Figura 11.- Estratificación obtenida utilizando la tercera técnica de llenado. En esta secuencia la diferencia en tiempos es de 5 minutos y el grosor de la interfaz de  $2 \pm 0.5 \text{ mm}$ .

Por lo tanto debido al grosor, posición y estabilidad en la interfaz, suficiente para llevar a cabo el experimento respecto de las dos técnicas anteriores, esta técnica es la más adecuada para generar el fluido estratificado.

## 2.2 Método de inyección de gotas

El objetivo de este apartado es poder introducir, a través de una jeringa, una gota de alcohol bencílico al medio estratificado, con la seguridad de que el volumen entrante en cada caso sea el mismo. Para esto se utiliza un sistema electromecánico que consta de un motor de pasos con un micro controlador M430G2553 con tableta de desarrollo MSPEXP430G2, que responde a estímulos externos enviados por una computadora.

Con este sistema se controla el desplazamiento de un tornillo micrométrico, en función del movimiento de tres engranes y un motor de pasos, donde cada movimiento del motor es debido a un pulso generado por el MSP y cuya dirección es dada por un puente H como el que se observa en la Figura 12.

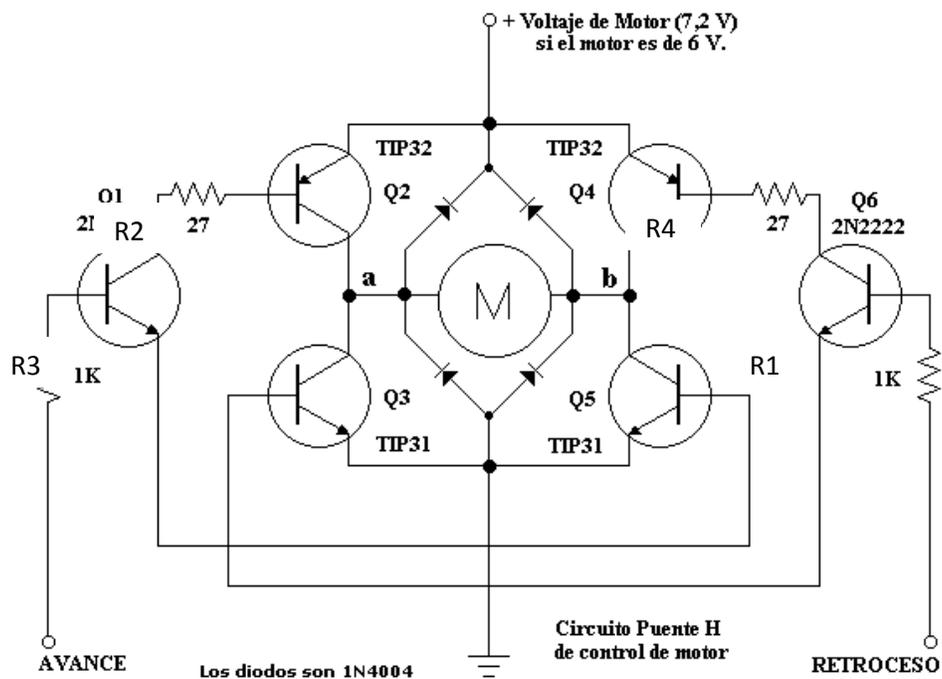


Figura 12.- Circuito puente H.

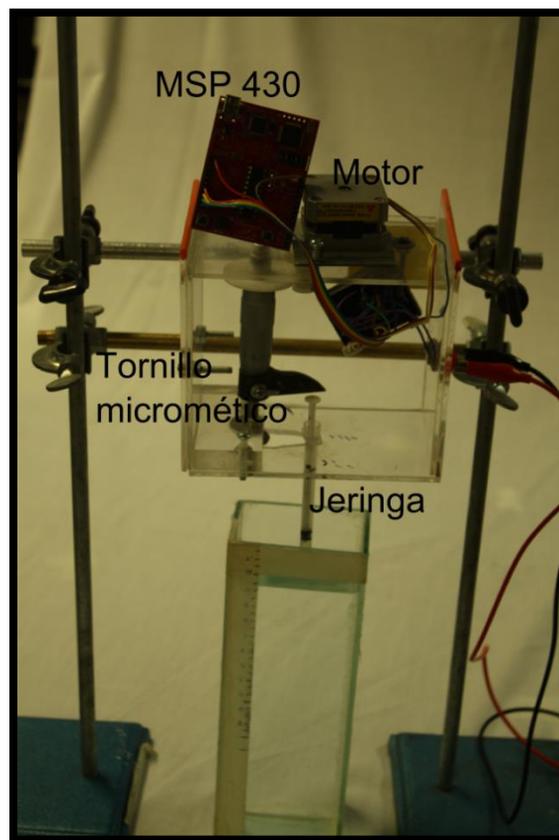
A partir de un programa de computadora se genera una señal en el MSP, la cual ingresa al circuito de la Figura 12, en las entradas AVANCE o RETROCESO de acuerdo a la señal emitida por el programa ya mencionado.

Si la señal ingresa por la entrada marcada AVANCE, la señal se hace conducir al transistor Q1. La corriente de Q1 circula por las bases, de Q2 y Q5, haciendo que el terminal **a** del motor reciba una señal positiva y el terminal **b** una negativa (tierra) con lo cual se obtiene el movimiento del motor en un sentido.

Si en cambio se aplica una señal en la entrada RETROCESO, se hace conducir al transistor Q6, que cierra su corriente por las bases, de Q4 y Q3. En este caso se aplica una señal positiva a la terminal **b** del motor y el negativo (tierra) a la terminal **a** del motor, provocando que el motor gire en sentido contrario.

Una vez que el motor se mueve, este movimiento se traduce en cierto desplazamiento del tornillo micrométrico hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la dirección de giro del motor. Puesto que todos los movimientos son iguales, por cada paso en el motor, en el tornillo hay un desplazamiento de  $315.65\mu\text{m}$  (Figura 13).

Una vez que se desplaza el tornillo micrométrico, una jeringa es empujada para inyectar el fluido dentro del medio. Con esto la cantidad de líquido expulsado por la jeringa y que entra al medio, se mantiene controlado debido a la relación entre número de pasos y desplazamiento en el tornillo.



*Figura 13.- Componentes del sistema electromecánico.*

Una vez entendido el funcionamiento del sistema electromecánico fue necesario hacer la calibración de las distintas jeringas a partir de pasos, para caracterizar la cantidad de volumen que entra al sistema. Se ingresó al fluido estratificado un volumen determinado

de alcohol bencílico. Primero se introdujo una gota de volumen 0.0145 ml para observar la dinámica de la misma, aplicando la técnica de visualización antes mencionada, ver Figura 5, donde a través de una cámara rápida Phantom Miro M310 y grabando a una velocidad de 100 fps (cuadros por segundo, por sus siglas en inglés) se captó el comportamiento de la gota. Con el propósito de observar si el comportamiento de la gota depende del volumen, se repitió el proceso anterior bajo las mismas condiciones pero variando el volumen a 0.1 ml.

Una vez obtenida la trayectoria de la gota a través de los videos se realizó el análisis de los mismos obteniendo los resultados de la siguiente sección.

# Capítulo III- Resultados

---

## 3.1 Análisis

Para analizar la trayectoria de las gotas durante su recorrido en el medio estratificado, se grabaron dos videos a 100 fps, y se utilizó el programa “Tracker”, que permite la localización manual de puntos a lo largo del video, con lo cual proporciona datos coordinados para cada uno.

Para hacer una descripción general de la gota, sin tener que cubrir toda la superficie de la misma, se marcaron cuatro puntos como se observa en la Figura 14, que fueron monitoreados desde un tiempo  $t_0$ , en que comienza el movimiento de caída, hasta un  $t_i$ , momento en que la gota alcanza el equilibrio y permanece estática. Se obtuvieron datos para 1372 puntos en el caso de la gota de 0.0145 ml y 1182 puntos para la gota de 0.1 ml. El intervalo de tiempo entre puntos es de 0.01 s.

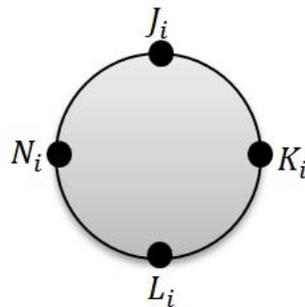


Figura 14.- Marcadores en la gota, donde  $i$  representa el tiempo de muestreo.

Una vez obtenida la posición y el tiempo para cada punto, se supone una gota simétrica, es decir, los pares de puntos  $J_i, L_i$  y  $N_i, K_i$  se deforman de la misma manera. Por lo tanto, a partir de los valores de la posición de los puntos  $J_i$  y  $L_i$ , se obtiene la posición del centro de la gota durante todo el proceso, con lo cual se obtiene el comportamiento general de la gota, Figura 15, se observa que ambas gotas caen libremente y posteriormente oscilan hasta quedar atrapadas en la interfaz. La gota de mayor volumen primero rebasa la interfaz, parece rebotar y finalmente queda dentro de ella. Se observa también que la velocidad de la gota de volumen 2 es mayor que la de volumen 1.

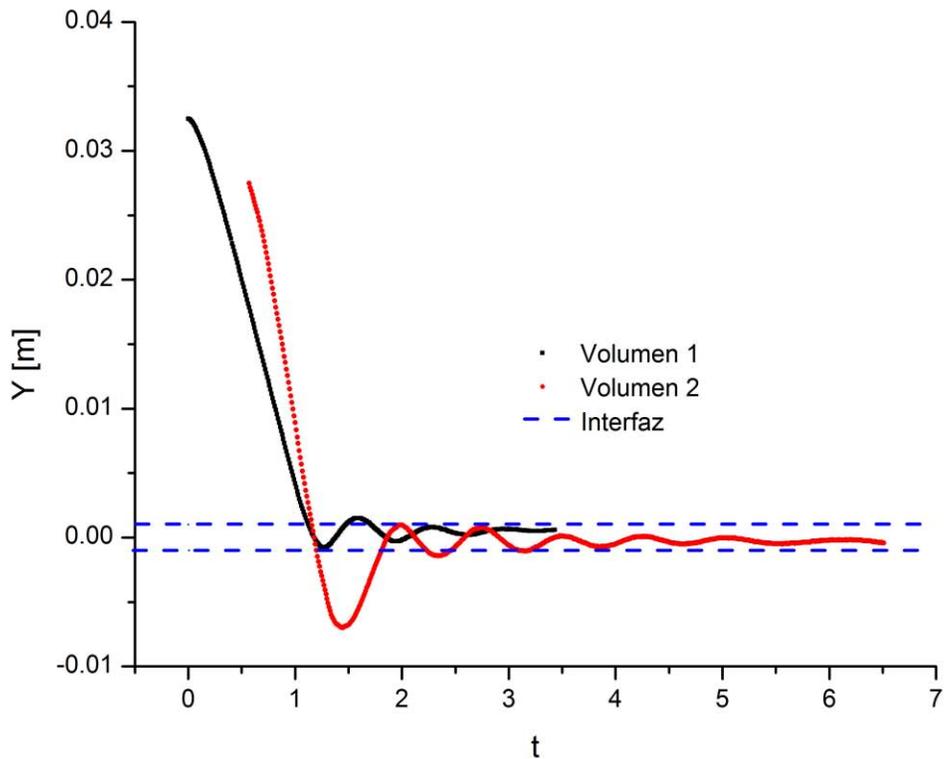


Figura 15.- Gráfica de posición del centro de las gotas en el eje Y al interactuar con el medio estratificado, dónde el volumen 1 corresponde a la gota de 0.0145ml y el volumen 2 a la gota de 0.1 ml.

El recorrido de la gota tiene una duración de 3.6 s para la gota de volumen 1 y 6.5 s para la gota de volumen 2.

### 3.2 Imágenes derivadas de los videos

En los videos se perciben deformaciones durante el recorrido de las gotas a través del medio estratificado. El primer cuadro muestra la gota al iniciar su movimiento de caída y los cinco restantes muestran a la gota en tiempos donde se registran los valles y las crestas en el movimiento general (Figura 16).

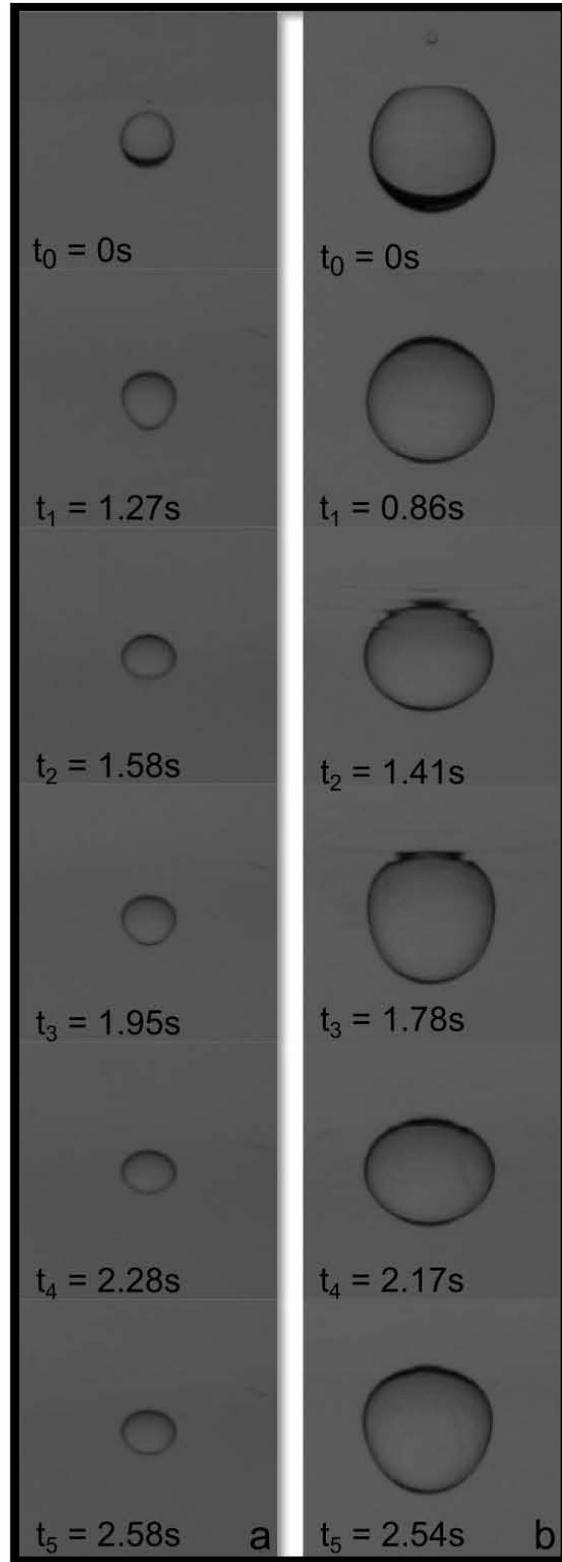


Figura 16.- Secuencias temporales de las gotas (a) caso 1 correspondiente a la gota de volumen 0.145 ml y (b) caso 2 correspondiente a la gota de volumen 0.1 ml.

La gota se comporta como una esfera antes de interactuar con la interfaz, pero al interactuar con ella se deforma. En el caso de la Figura 16.b se observa una perturbación, correspondiente a la interacción de la gota con la interfaz.

### 3.3 Velocidad contra tiempo

A partir de la posición del centroide de la gota se obtuvo la velocidad para cada una de las gotas. Dicho comportamiento se presenta a continuación.

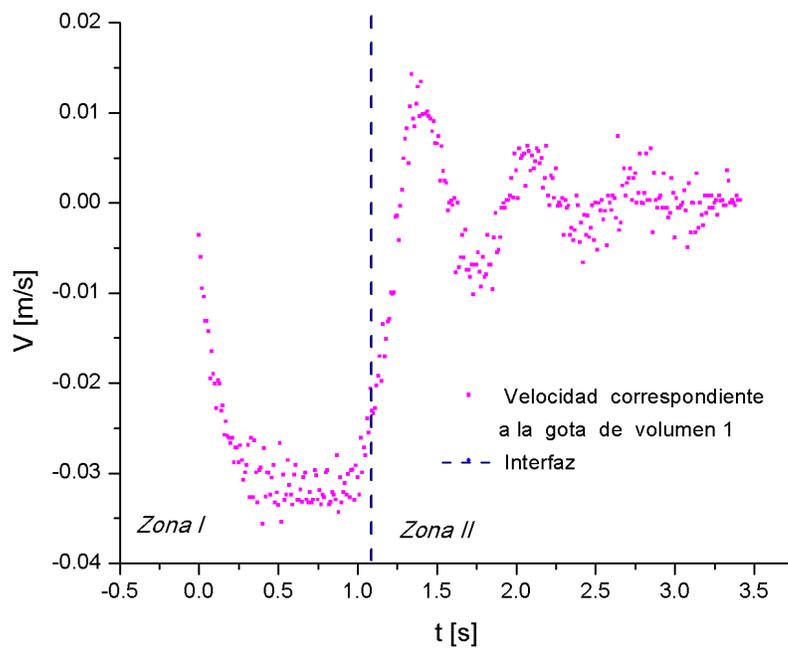


Figura 17: Gráfica del comportamiento de la gota de volumen 1 respecto de la velocidad.

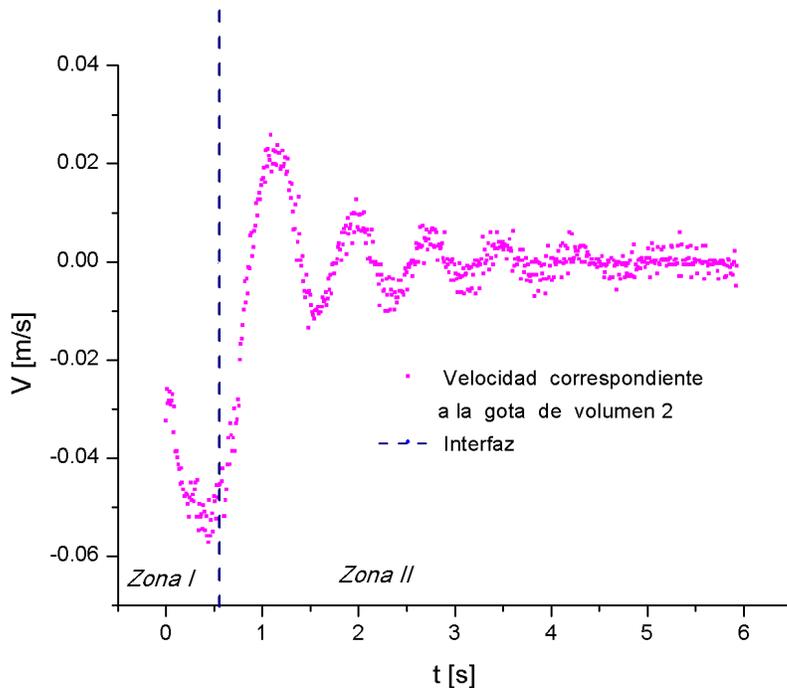


Figura 18: Gráfica del comportamiento de la gota de volumen 2 respecto de la velocidad.

Se observa que existen valores en la gráfica, que crecen y decrecen, antes de interactuar con la interfaz. No obstante, a lo largo del video se puede observar que la gota cae libremente antes de interactuar con la interfaz y presenta un movimiento oscilatorio al interaccionar con ella. Sin embargo el movimiento observado es continuo, es decir, la gota no presenta retrocesos durante la trayectoria en la primera zona.

Por otro lado, se espera que el comportamiento que presenta la aceleración de la gota durante la trayectoria concuerde con el comportamiento que presentan tanto la velocidad como la posición. Al obtener la aceleración se observa que los incrementos y decrementos que se presentan en la velocidad son más pronunciados y por lo tanto toman mayor importancia que en la velocidad, es decir, los datos obtenidos para la aceleración presentan “ruido”.

Los datos de la velocidad y la aceleración son calculados a partir de los datos de la posición. Debido a cómo se tomaron los puntos para obtener la posición, se estimó para cada medición una incertidumbre dentro del programa de 6 píxeles.

El intervalo de tiempo entre dos puntos cualesquiera es constante, pero el tamaño de la gota cambia un poco, lo que produce una señal con “ruido”.

Por lo anterior es necesario tratar los datos obtenidos a partir del método de promedio móvil, el cual permite eliminar dicho “ruido” en la gráfica y suavizar los datos para obtener valores que se adecúen más a la observación del comportamiento de la velocidad y la aceleración y no obtener valores correspondientes a la incertidumbre de medición.

El método de promedio móvil funciona a través del promedio de  $n$  valores. En este caso  $n$  tomó el valor de 5. Esto es, se promedia el dato que se quiere tratar con los dos valores anteriores y los dos posteriores a él, con lo cual se obtiene el promedio de los cinco datos. Aplicando este método tanto a la velocidad como a la aceleración, observamos que los valores del comportamiento se suavizan (Figuras 19-22).

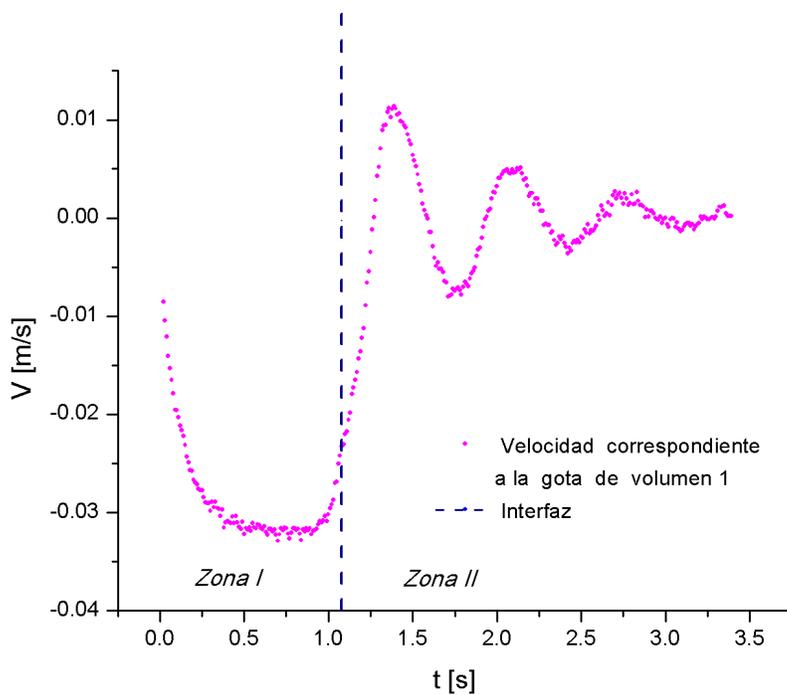


Figura 19: Gráfica correspondiente a las velocidades de los volúmenes 1 aplicando el método de promedio móvil para suavizar los datos obtenidos en la figura 17.

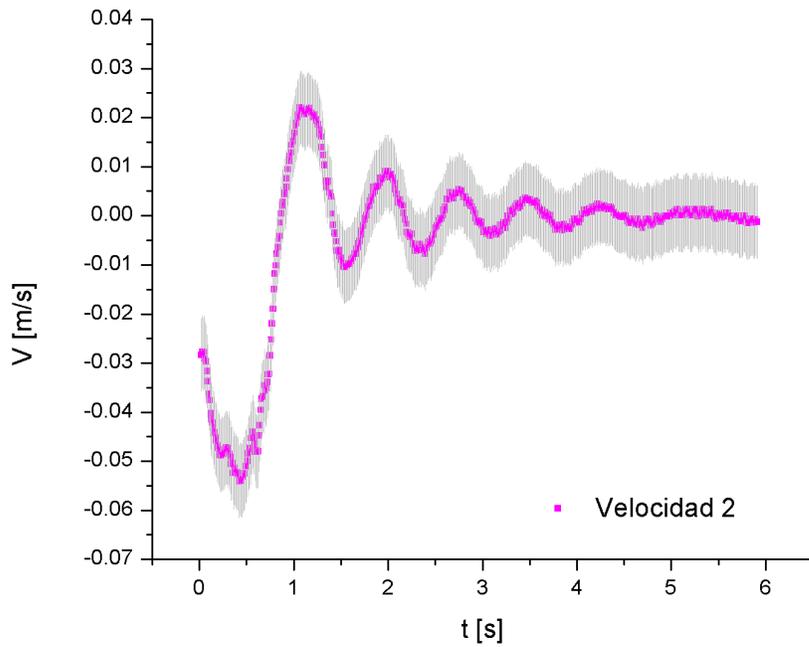


Figura 20: Gráfica correspondiente a las velocidades de los volúmenes 2 aplicando el método de promedio móvil para suavizar los datos obtenidos en la figura 18.

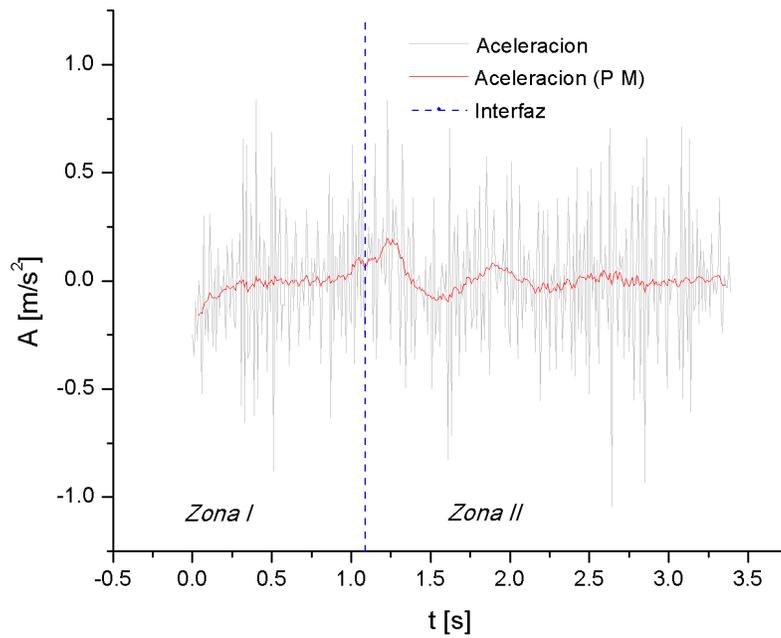


Figura 21: Variación de la aceleración ( $A$ ) de la gota de volumen 1 respecto al tiempo, antes y después de utilizar el método del promedio móvil (P M).

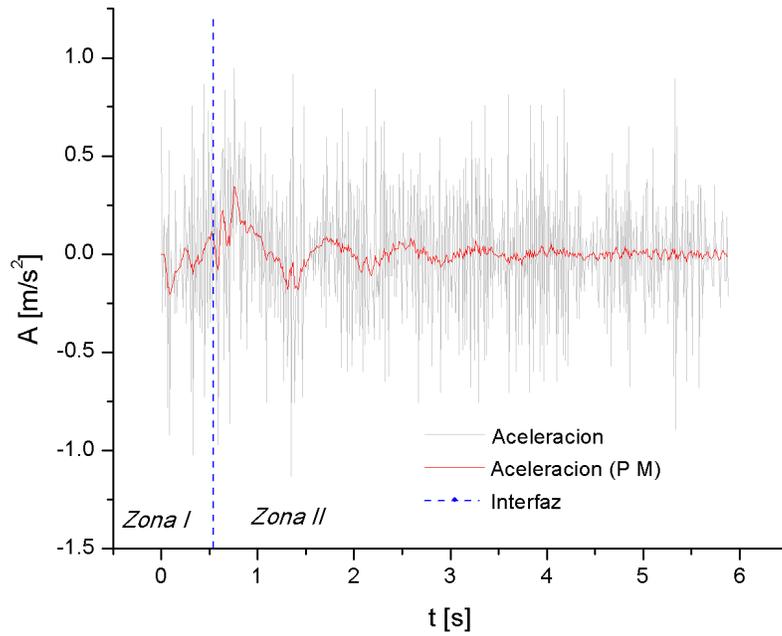


Figura 22: Variación de la aceleración de la gota de volumen 2 respecto al tiempo, antes y después de utilizar el método del promedio móvil (P M).

## Capítulo IV- Análisis y Discusión

---

Como se observa en la Figura 15, ambas gotas quedan atrapadas en la interfaz, la cual tiene un grosor de  $2 \pm 0.5 \text{ mm}$ . En la región correspondiente a la caída, el movimiento que presenta la gota de volumen 1 tiene una pendiente menor respecto a la pendiente que corresponde a la gota de volumen 2 durante su recorrido, por tanto, se sabe que la velocidad en el volumen 2 es mayor que en el volumen 1. Se puede observar de igual manera, que la gota de menor volumen presenta tres oscilaciones en la interfaz, antes de llegar a su posición de equilibrio. Sin embargo, la gota de volumen mayor presenta cinco oscilaciones antes de quedar atrapada en la interfaz al llegar a su posición de equilibrio. La diferencia de oscilaciones está relacionada con la velocidad de entrada de la gota, con la inercia y por tanto, con la distancia de penetración en la interfaz, ya que entre más velocidad posea la gota, la distancia con la que se introduce en la interfaz es mayor y por lo tanto el número de oscilaciones aumenta debido a la inercia de la gota.

### 4.1 Comparación de los radios con la posición

En el caso de la Figura 16.a se observa que la gota presenta un cambio de geometría, aunque la que predomina es la esférica. En la Figura 16.b se hace evidente un cambio de geometría, donde la gota toma una forma elipsoidal que se deforma en mayor medida en la horizontal en ciertos puntos, y en la vertical en otros. Sin embargo, en puntos específicos de la trayectoria la gota presenta forma esférica.

La gota de mayor volumen empieza a deformarse antes de entrar a la interfaz. La gota de menor volumen se deforma más dentro de ella. Esto podría deberse a que la gota de volumen 2 posee una mayor velocidad durante el recorrido. Para hacer el análisis se supone simetría axial. A partir de los puntos establecidos, se miden los radios en la horizontal ( $a$ ) y en la vertical ( $b$ ), para cada uno de los volúmenes en la gota.

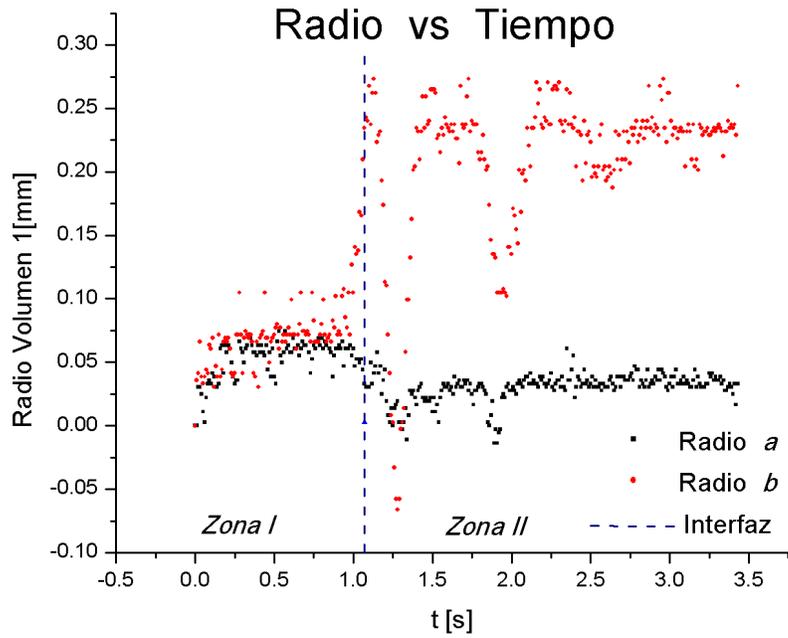


Figura 23: Gráfica correspondiente al cambio en la geometría de los radios en el tiempo del volumen 1.

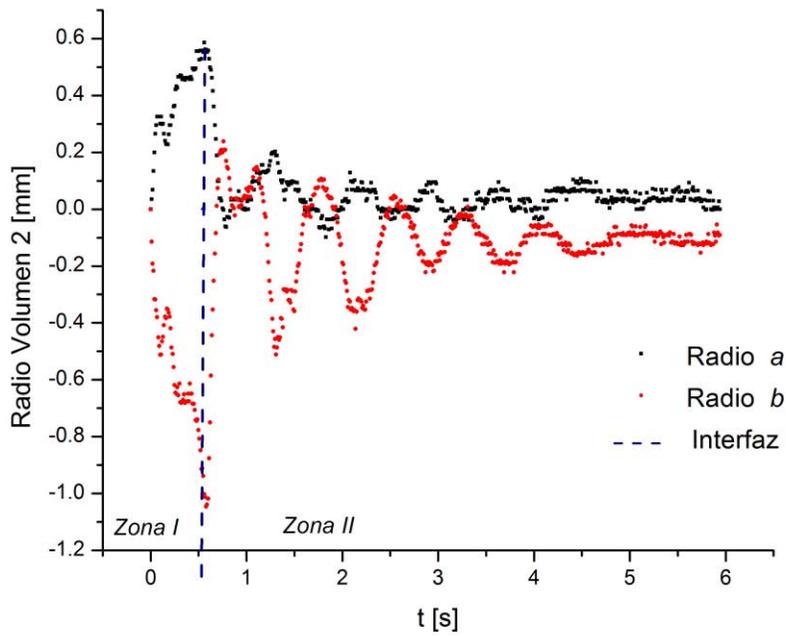


Figura 24: Gráfica correspondiente al cambio en la geometría de los radios en el tiempo del volumen 2.

Se observa de manera más clara el cambio de geometría que presentan a lo largo de su trayectoria.

En el caso de la gráfica de la Figura 23 se distinguen dos zonas, la primera correspondiente a la gota antes de interaccionar con la interfaz y la segunda desde que toca la interfaz hasta que llega al equilibrio.

En la primera zona las variaciones tanto en  $a$  como en  $b$  son pequeñas, es decir, la geometría es básicamente una esfera. Sin embargo, al entrar en la segunda zona, las deformaciones aumentan obteniendo la máxima deformación de todo el fenómeno en el momento posterior al que la gota toca la interfaz. Esto es debido a que la gota tiene un tiempo de respuesta, es decir, hasta 0.18 s después de interaccionar con la interfaz, la gota responde a un cambio en las condiciones del medio. Es preciso mencionar que la deformación ocurre en mayor medida en el radio  $b$  es decir, en la vertical.

Una vez obtenida la máxima deformación en los radios, existe una fluctuación debido a la oscilación de la gota en la interfaz. Sin embargo, esta deformación es mucho más importante en el radio  $b$ , el radio  $a$  es casi constante.

Como observamos en ambas gotas existe una deformación mayor en la vertical que en la horizontal. Esto es debido a que los puntos relacionados con el radio  $a$  se encuentran a la misma altura sobre el eje  $y$ , y la estratificación es vertical. Por lo tanto, dichos puntos están sujetos a condiciones similares y la deformación que se presenta es más pequeña. Los puntos relacionados al radio  $b$  se encuentran en distintas condiciones del medio, es decir, la densidad, las fuerzas de presión y la viscosidad son distintas en  $L_i$  y  $J_i$ . Un cambio en el medio induce un cambio en la gota, es decir, en el instante en el que  $L_i$  llega a la interfaz, el salto en densidad es drástico, y la gota tiene su deformación máxima puesto que el medio cercano a  $L_i$  y a  $J_i$  es muy diferente.

Por otro lado la gráfica de la Figura 24 muestra, en la primera zona, una deformación que no puede despreciarse como en el caso del volumen 1; la geometría que se presenta definitivamente no corresponde a una esfera. No obstante, al entrar a la segunda zona, la deformación es máxima. A partir de este punto, el valor de los radios fluctúa alrededor de cinco veces, debido a la oscilación de la gota. Asimismo se observa que la deformación ocurre mayormente en la vertical. Sin embargo, cuando  $a$  aumenta su valor,  $b$  lo disminuye, es decir, existe conservación de forma. Al alcanzar su estado de equilibrio se observa que la deformación en los radios es proporcional, por lo que al final lo que se obtiene es una geometría casi esférica en la gota con una la relación entre radios de 0.97.

## 4.2 Fuerza de arrastre

Se obtuvo a partir del experimento que existen cambios de geometría que alternan entre un elipsoide y una esfera. Es por tanto necesario establecer si existe algún modelo que describa el comportamiento de la gota durante su trayecto.

Aplicando la ecuación de BBO, debido a su relación con cambios geométricos en los cuerpos, se utilizarán tres modelos distintos para calcular la fuerza de arrastre: la gota como un cuerpo sólido esférico, como un elipsoide de revolución y finalmente aplicando un factor de forma de geometría variable. En los tres modelos se deben tomar en cuenta los siguientes supuestos:

- La viscosidad y la densidad dentro del medio estratificado tienen los valores correspondientes al líquido de la capa superior.
- A partir de que el punto  $L_i$  en la gota, toca la interfaz se considerarán los valores de viscosidad y densidades correspondientes al líquido en la segunda capa. Se sabe que la interfaz está en constante mezcla con ambas capas y que por lo tanto presenta una viscosidad y una densidad diferente, sin embargo la densidad dentro del gradiente no se conoce, por lo cual se suponen una viscosidad y una densidad iguales a las de la segunda capa.
- Se mantiene simetría en la gota tanto en la horizontal como en la vertical, para modelar la geometría del cuerpo a partir de los cuatro puntos seleccionados anteriormente.

Se obtuvieron las incertidumbres a partir de la desviación estándar para cada uno de los modelos (Apéndice).

### 4.2.1 Modelo esférico

Al modelar la gota como una esfera, se supone un cuerpo que mantiene sus dimensiones tanto en  $a$  como en  $b$ , por lo cual, se puede tomar el valor del radio de la gota al iniciar su trayecto. Con esto se desprecia una posible pérdida de masa durante el recorrido. Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene la fuerza de arrastre a partir del coeficiente de arrastre de la ecuación (9) con lo cual se obtienen las gráficas de las Figuras 25 y 26 correspondientes al volumen 1 y volumen 2 respectivamente.

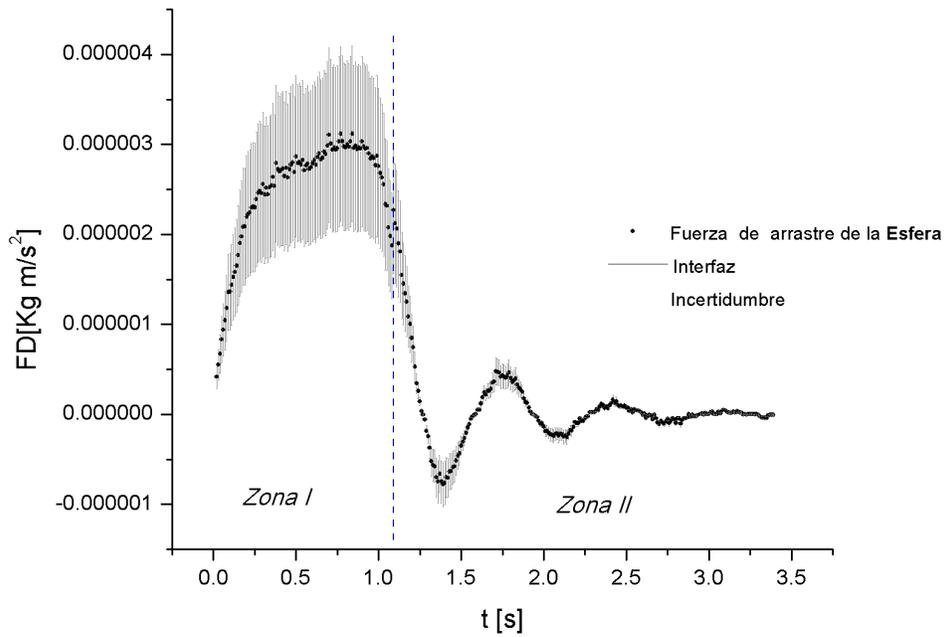


Figura 25: Gráfica de fuerza de arrastre correspondiente a la gota de volumen 1, a través del modelo de esfera sólida.

En esta gráfica se aprecia que la fuerza de arrastre aumenta durante la caída libre y disminuye en el momento en el que la gota se encuentra con la interfaz, donde la fuerza de arrastre fluctúa resultado de las tres oscilaciones en la gota, las cuales se atenúan hasta llegar al equilibrio. Este comportamiento es el mismo que describe la velocidad pero con una magnitud cuatro órdenes por debajo.

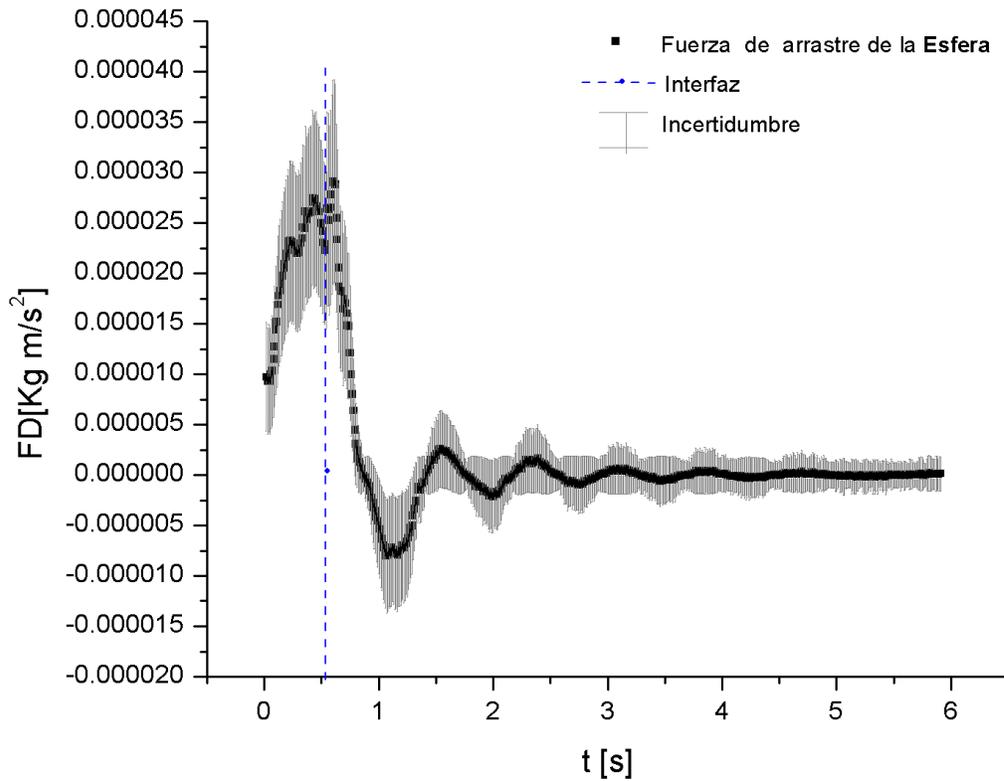


Figura 26: Gráfica de fuerza de arrastre correspondiente a la gota de volumen 2, a través del modelo de esfera sólida.

En el caso de la gráfica de la Figura 26 se observa que aunque existe una deformación máxima antes de interactuar con la interfaz, la fuerza de arrastre se comporta de la misma manera que la calculada para la gota de volumen 1, con la variante de que el número de oscilaciones cambia debido al aumento del volumen y de la velocidad.

#### 4.2.2 Modelo elíptico

Al modelar la gota como un elipsoide que se elonga en la vertical y en la horizontal en distintos puntos de la trayectoria, utilizando en las ecuaciones (14) y (15), los valores de  $a$  y  $b$  medidos en las imágenes, se obtiene la fuerza de arrastre para ambos volúmenes de gotas. Se obtuvo el siguiente comportamiento:

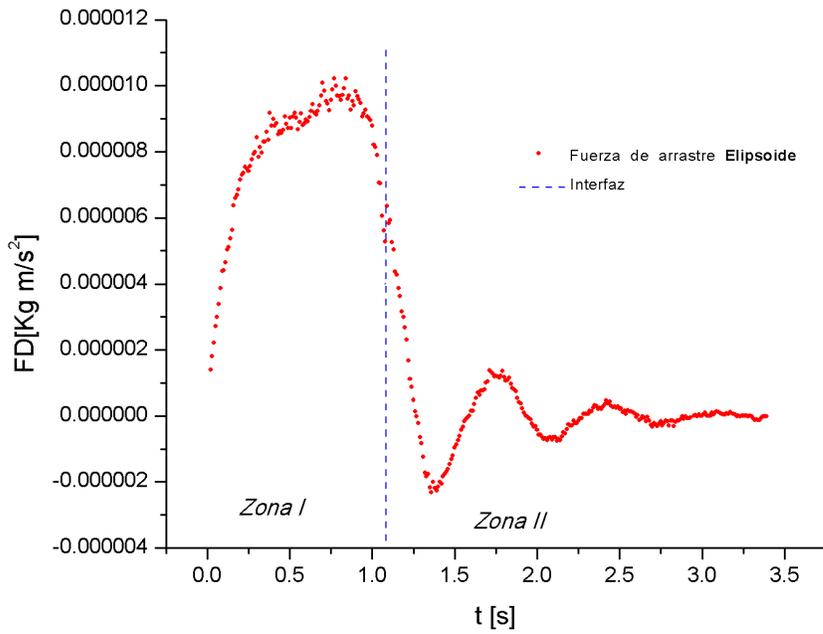


Figura 27: Fuerza de arrastre correspondiente a la gota de volumen 1, a través del modelo de elipsoide.

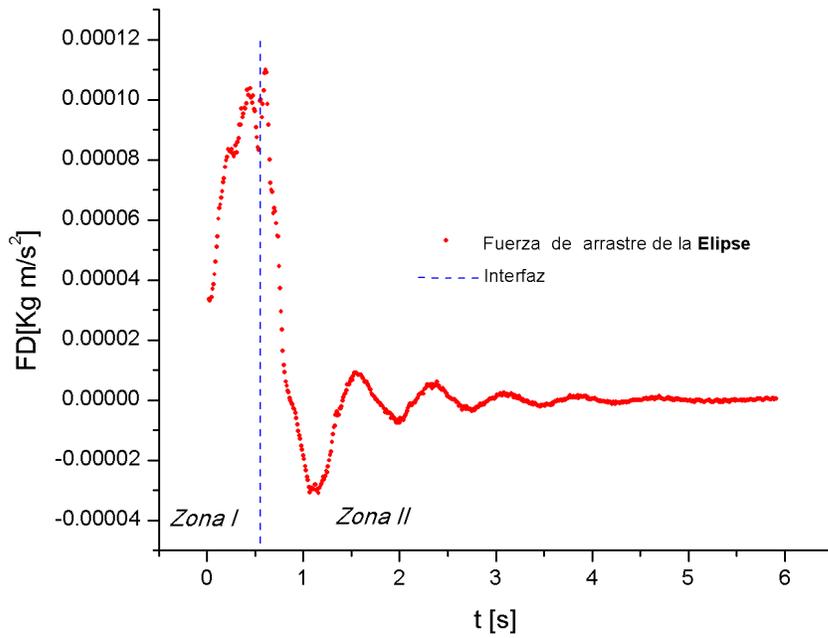


Figura 28: Fuerza de arrastre correspondiente a la gota de volumen 2, a través del modelo esferoidal.

Estos comportamientos son similares a los obtenidos con el modelo de esfera sólida, es decir, la fuerza de arrastre aumenta en la zona 1 y disminuye en el momento en el que la gota interactúa con la interfaz, donde la fuerza de arrastre fluctúa resultado de las oscilaciones en la gota las cuales se atenúan hasta llegar al equilibrio

#### 4.2.3 Modelo a partir de un factor de arrastre con geometría cambiante

Para modelar una gota con base a un factor de arrastre, se debe obtener la fuerza de arrastre a partir de las expresiones (16), (18) y (19), donde el factor está en función de la esfericidad y de la esfericidad transversal

Por un lado

$$\psi = \frac{A_s}{A},$$

donde el valor de  $A_s$  está dado en función del radio medido (radio obtenido en la sección del modelo esférico) y  $A$  es el valor del área de la superficie actual, la cual se modela como un elipsoide que colapsa a esfera en el momento en que  $a$  y  $b$ , radios de la elipse, son iguales.

En el caso de la esfericidad transversal, la expresión está dada por el volumen y el área equivalentes  $D_n$  y  $D_A$  respectivamente, donde  $A_p$ , el área proyectada, es considerada como un círculo de radio  $a$ , el cual se puede medir en cada momento de la trayectoria.

$$D_n = \left(\frac{6V_c}{\pi}\right)^{1/3},$$

$$D_A = \left(\frac{4A_p}{\pi}\right)^{1/2}.$$

Por lo tanto, la fuerza de arrastre, para las gotas de volúmenes 1 y 2, basada en el factor de arrastre, da como resultado las gráficas Figuras 29 y 30:

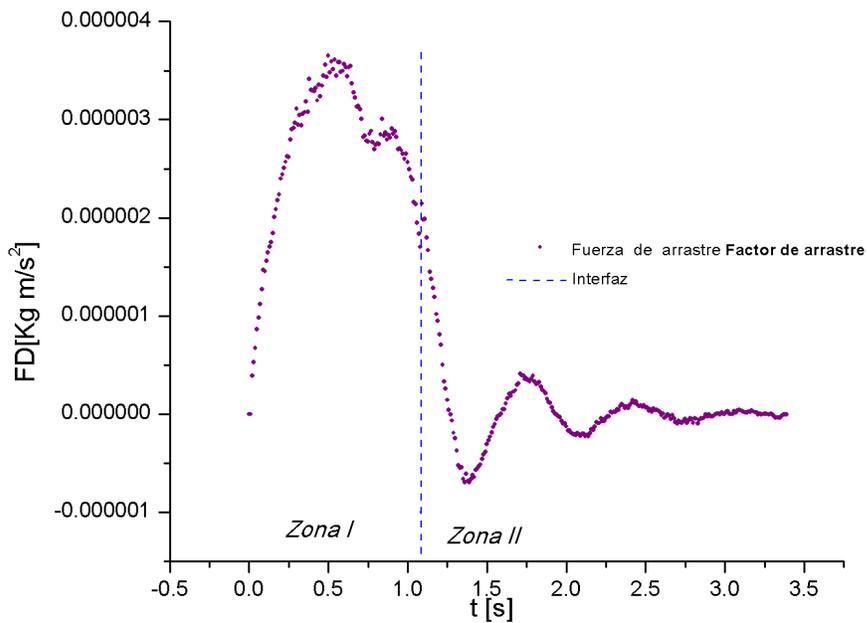


Figura 29: Fuerza de arrastre correspondiente al volumen 1, a través del modelo de factor de arrastre.

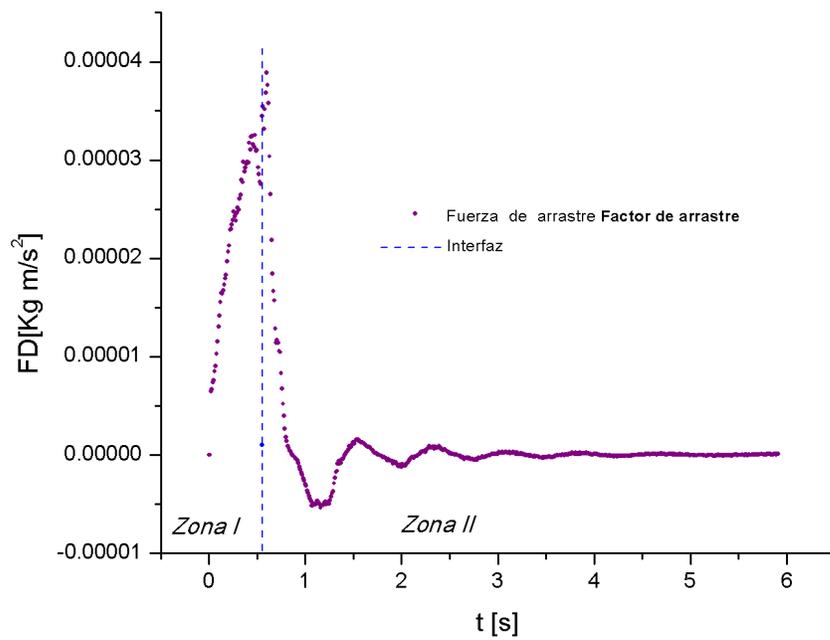


Figura 30: Fuerza de arrastre correspondiente al volumen 2, a través del modelo de factor de arrastre.

En las Figuras 29 y 30 se muestra que al igual que en los dos modelos anteriores, la fuerza de arrastre aumenta al caer libremente la gota y oscila al entrar a la interfaz hasta alcanzar el equilibrio.

### 4.3 Comparación entre modelos

Debido a que todos los modelos se comportan de manera similar, es necesario compararlos, como se muestra en las Figuras 31 y 32, para percibir las diferencias y establecer el modelo que se adapte al fenómeno estudiado:

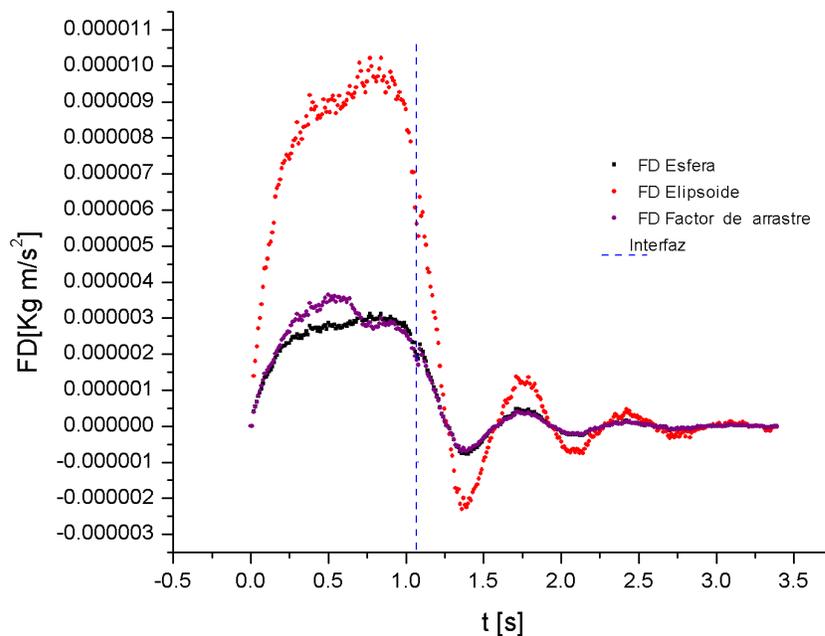


Figura 31: Fuerza de arrastre para los tres modelos propuestos correspondientes al volumen 1.

En la Figura 31 se contrastan los tres modelos para la fuerza de arrastre correspondiente a la gota de volumen 1. Se observa que el modelo que presenta un mayor valor en magnitud de la fuerza de arrastre es el correspondiente al modelo elíptico, seguido del modelo basado en el factor de arrastre y finalmente, con el menor valor, el modelo correspondiente a la esfera. Exceptuando los valles y crestas, dicho comportamiento se presenta en el mismo orden antes y después de que la gota interacciona con la interfaz.

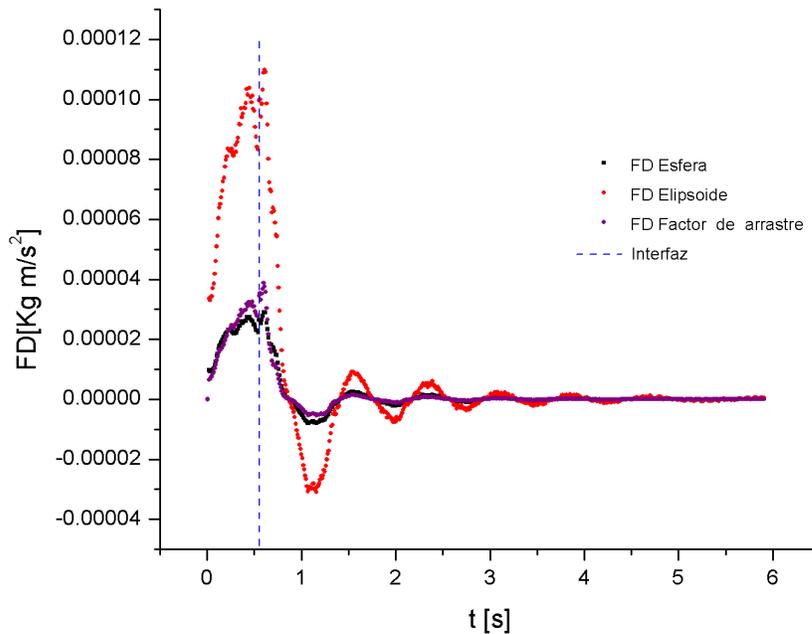


Figura 32: Fuerza de arrastre para los tres modelos propuestos correspondientes al volumen 2.

A diferencia de los valores plasmados en la Figura 31, el comportamiento de la fuerza de arrastre en la Figura 32, se divide en dos zonas, antes y después de la interfaz. Para la primera zona (antes de interactuar con la interfaz) el mayor valor en magnitud entre modelos es el correspondiente al modelo elíptico, seguido del modelo basado en el factor de arrastre y finalmente, con el menor valor en magnitud, se encuentra el modelo esférico. En el caso de la segunda zona (al interactuar con la interfaz) el valor más grande corresponde a la fuerza de arrastre del modelo elíptico, sin embargo el modelo esférico y el basado en el factor de arrastre, cambian de lugar, siendo el segundo el que presenta los valores más pequeños para la fuerza de arrastre.

#### 4.4 Fuerza neta

Con el objetivo de determinar el aporte de la fuerza de arrastre de cada modelo a la expresión general del movimiento, se supuso una gota sin pérdida de masa durante todo su recorrido a través del medio estratificado y se obtuvo la aceleración instantánea en cada punto. Con estos datos se calculó la fuerza que actúa en cada gota Figuras 33 y 34.

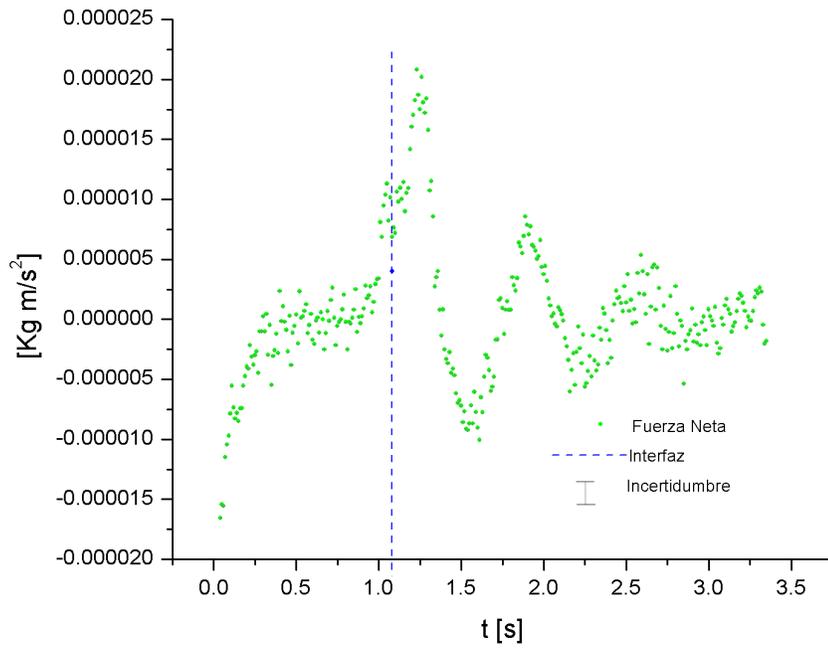


Figura 33: Fuerza neta correspondiente a la gota de volumen 1, contra tiempo.

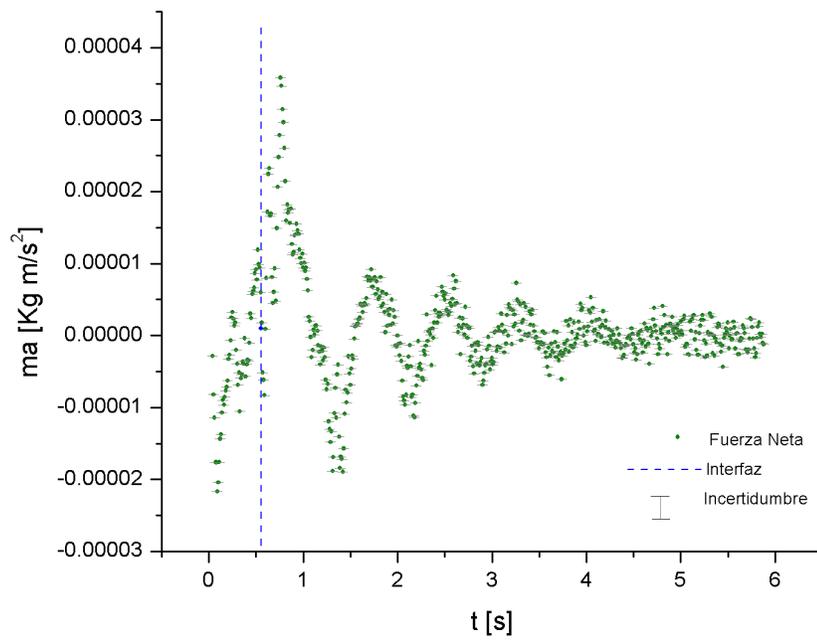


Figura 34: Fuerza neta correspondiente a la gota de volumen 2, contra tiempo.

Se observa en la segunda zona (al interactuar con la interfaz), al igual que para la fuerza de arrastre, una serie de oscilaciones hasta decaer a un valor constante. Sin embargo, también se observa un retardo en la aceleración, es decir, la gota no responde instantáneamente al cambio en el medio.

El retardo fue observado con anterioridad en la máxima deformación de los radios, pero solo era evidente en el radio de volumen 1. Debido a que el tiempo de respuesta está relacionado con la aceleración, se observa que en la gota de volumen 1 existe una desaceleración más notoria en la Figura 33 que en la Figura 23.

Por otro lado en la Figura 24, se observa que la mayor deformación de los radios en la gota se presenta inmediatamente al interactuar con la interfaz, sin embargo en la figura 34 se nota que existe una desaceleración. Por lo tanto, sin importar la cantidad de volumen que se ingrese en la estratificación, antes de interactuar la gota con la interfaz se presentan desaceleraciones y aceleraciones, es decir, se observa una respuesta de la gota a la interfaz después de tocarla.

En ambos volúmenes existen al menos una deformación y una desaceleración antes de la interacción con la interfaz, con lo cual se plantea que:

- i) la capa inferior y superior debido a su naturaleza miscible se encuentran interactuando de tal forma que, el inicio de la interfaz se encuentre antes del gradiente de densidad observado con la técnica shadowgraph, con lo cual la interacción de la gota con la interfaz ocurre tiempo antes, lo que provoca un cambio en el comportamiento en geometría y aceleración.
- ii) La masa virtual, ya que al acelerar o desacelerar la gota debe mover una cantidad de volumen del fluido circundante a medida que avanza a través de él.

Por otro lado no podemos descartar que el comportamiento corresponda a una combinación de los dos anteriores, ya que la aportación de cada uno puede dar como resultado el cambio de la aceleración y la geometría antes de que la gota interactúe con la interfaz que se observa.

## 4.5 Fuerza de arrastre ( $F_D$ ) y fuerza neta ( $FN$ )

### 4.5.1 Comparación de la fuerza de arrastre y la fuerza neta

Debido a que no se ha podido determinar cuál modelo es el que responde de mejor manera al fenómeno estudiado, se compararon la fuerza neta con las fuerzas de arrastre. Se obtuvieron las Figuras 35 y 36.

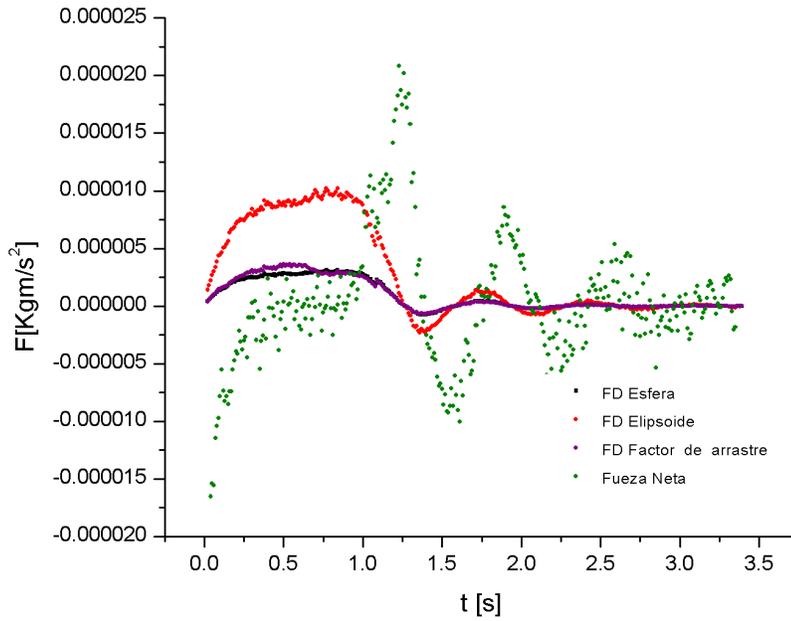


Figura 35: Contraste correspondiente a la gota de volumen 1. Fuerza neta contra la fuerza debida al arrastre

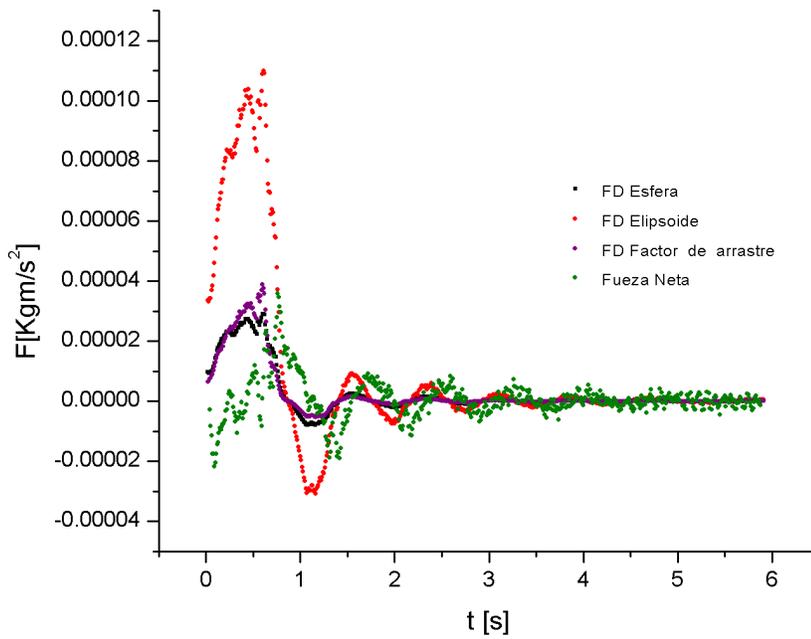


Figura 36: Contraste correspondiente a la gota de volumen 2. Fuerza neta contra la fuerza debida al arrastre.

De la Figura 36, el modelo esférico y el de geometría variable describen mejor al fenómeno.

#### 4.5.2 Fuerza restante

Si se supone que los comportamientos obtenidos a través de los modelos son correctos, entonces para obtener el valor en magnitud de las fuerzas restantes que actúan sobre la gota, esto es, el valor de la masa virtual o aparente, el término de Basset y la fuerza de flotación, es necesario hacer una diferencia de fuerzas, restando a la fuerza neta, las fuerzas de arrastre, con lo que se obtienen las gráficas de las Figuras 37-42.

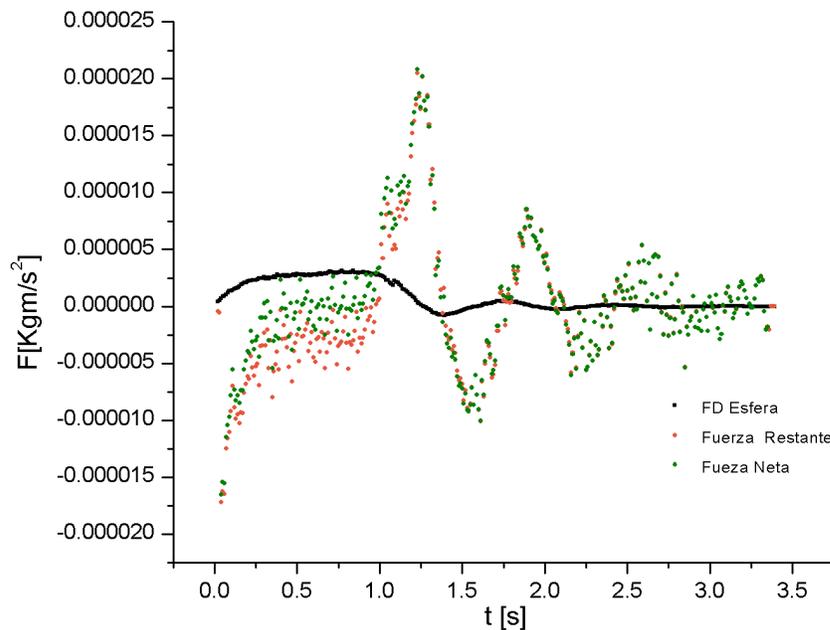


Figura 37: Gráfica del modelo esférico correspondiente al volumen 1 ,la fuerza de arrastre y la fuerza neta.

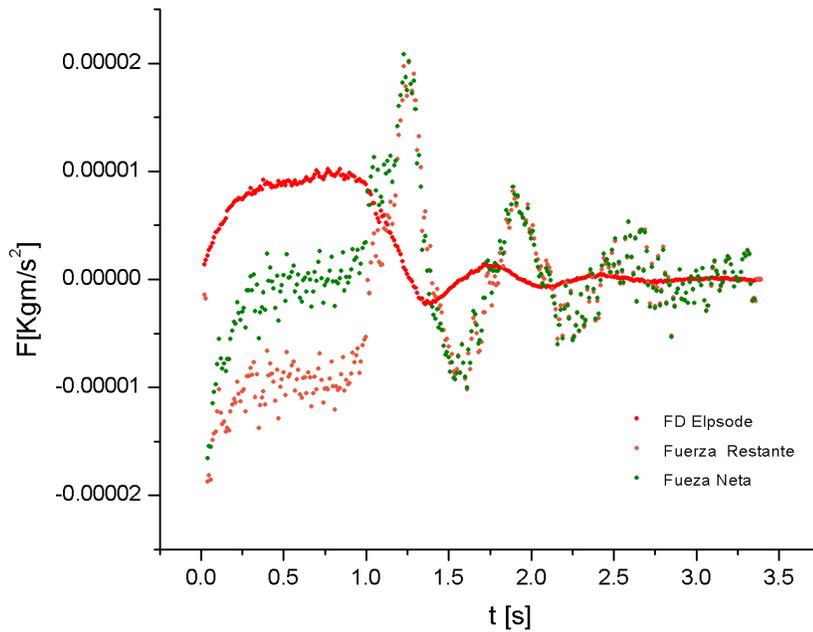


Figura 38: Gráfica del modelo elíptico correspondiente al volumen 1 , la fuerza de arrastre y la fuerza neta.

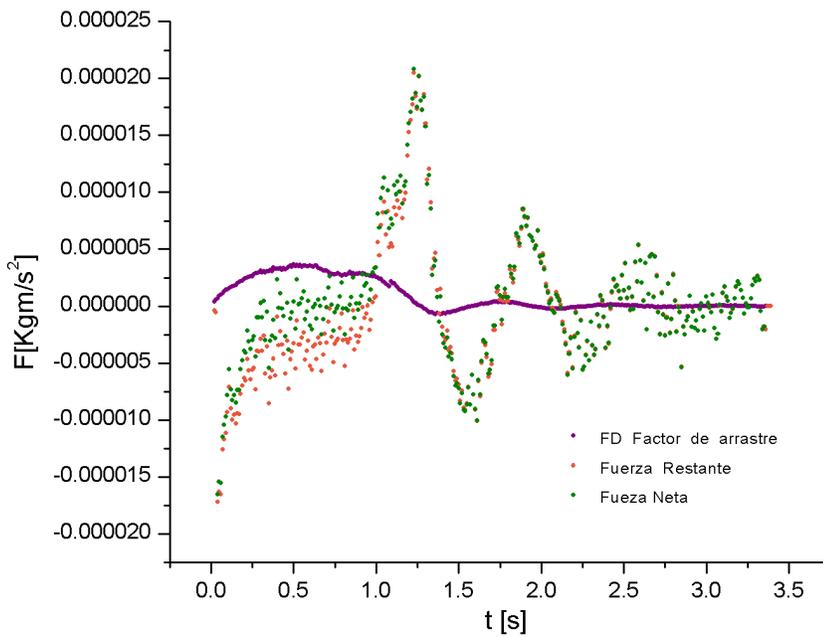


Figura 39: Contraste, correspondiente a la gota de volumen 1, entre la fuerza neta, la fuerza correspondiente al modelo del factor de arrastre y la diferencia entre ambas fuerzas.

En las figuras 37, 38, 39 se observa que en general, la fuerza restante tiene una dirección contraria a la de la fuerza de arrastre. En la segunda zona se asemeja a la fuerza neta. Contrariamente a este comportamiento, la fuerza de arrastre toma mayor importancia en la primera parte del recorrido de la gota.

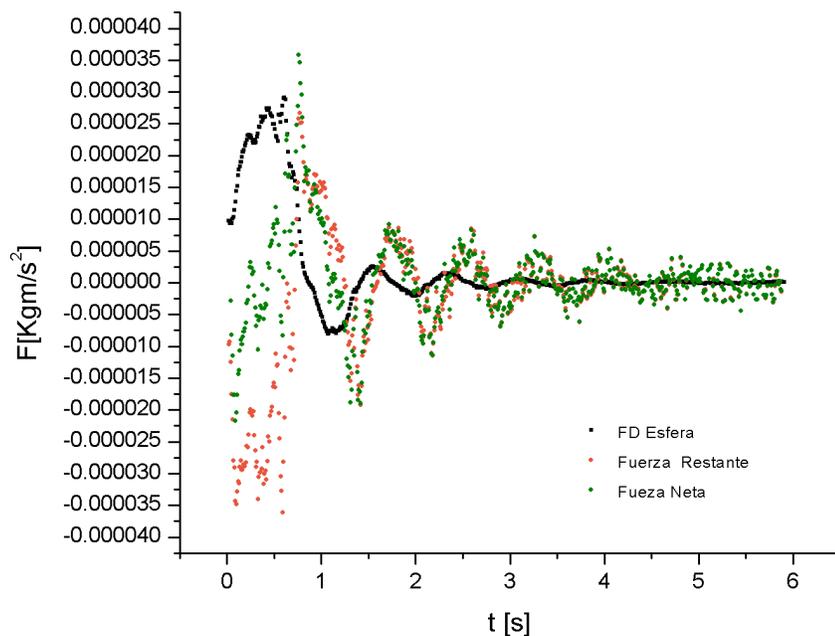


Figura 40: Gráfica del modelo esférico correspondiente al volumen 2, la fuerza de arrastre y la fuerza neta.

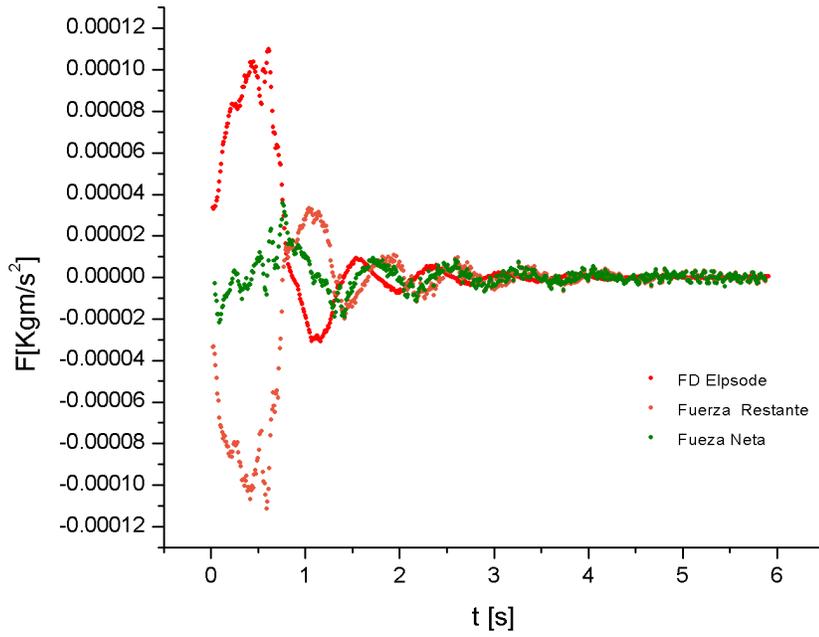


Figura 41: Gráfica del modelo elíptico correspondiente al volumen 2, la fuerza de arrastre y la fuerza neta.

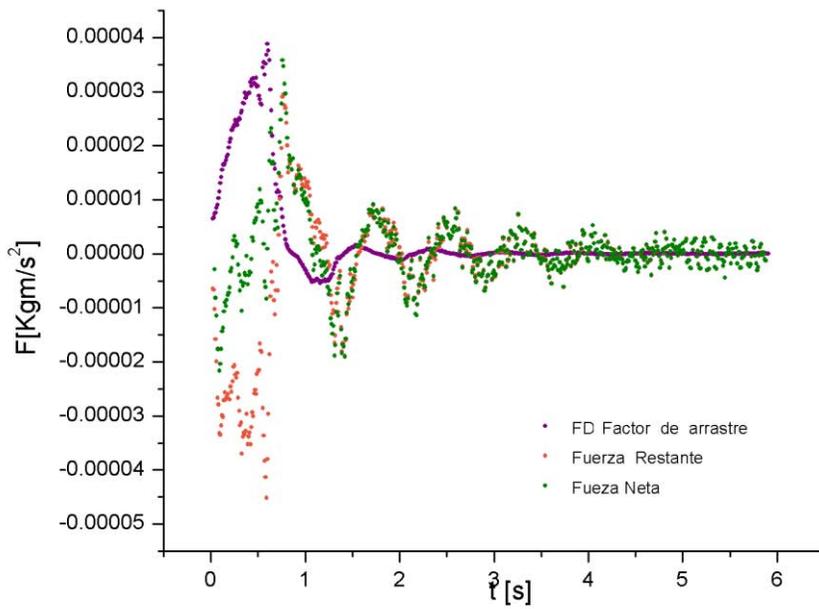


Figura 42: Contraste, correspondiente a la gota de volumen 2, entre la fuerza neta, la fuerza correspondiente al modelo basado en el factor de arrastre y la diferencia entre ambas fuerzas.

Las Figuras 40, 41 y 42 muestran que la gota de volumen 2 se comporta de manera similar a la de volumen 1.

Para ambos casos (volumen 1 y 2) en la primera zona, la magnitud de la aceleración disminuye.

En la segunda zona, en el caso 1, la gota queda inmediatamente atrapada y empieza a oscilar. En el caso 2, la gota rebasa la interfaz debido a la inercia, pero rebota y al regresar queda atrapada también y empieza a oscilar. Como era de esperarse, el número de oscilaciones en el caso 2, es mayor debido a la mayor cantidad de masa.

Para ambos volúmenes la fuerza restante se encuentra dentro del orden del obtenido por la fuerza de arrastre. Sin embargo la dirección de la fuerza restante es contraria a  $F_D$ , por lo tanto existe una fuerza que aporta la mayor parte del valor para invertir los valores en cada punto de la trayectoria. Ésta fuerza puede ser la correspondiente a la masa virtual, ya que es contraria a la fuerza de arrastre. O bien al término histórico ya que está relacionado con la aceleración y al tiempo de respuesta de la gota.

La fuerza debida al gradiente de presión es relativamente pequeña y se descarta como responsable de este efecto, por lo menos en la Zona I, ya que además va en la misma dirección que la fuerza de arrastre, es decir, la fuerza de empuje es contraria a la fuerza que necesitamos adicionar.

También se descarta el primer término correspondiente al peso ( $W$ ) ya que es un valor constante.

Se observa que en las Figuras 35 y 36 existe un desfase entre la fuerza neta y las fuerzas de arrastre, es decir, que la respuesta de la gota no es instantánea sino que tiene un retardo en el tiempo debido al cambio de los medios, y por tanto a las condiciones de viscosidad y densidad. Existe entonces un término dentro de la ecuación de BBO que permite que la fuerza de arrastre tenga un desfase. Probablemente este comportamiento es debido al término histórico, que está relacionado con la causalidad y que empieza a ser importante en esta zona.

## 4.6 Desprendimiento de masa.

Como se observa los valores del modelo esférico y el debido a la geometría variable, difieren de manera considerable respecto al modelo elíptico. Además en la Figura 16.b se observa una perturbación en el medio, debida a la existencia de un vórtice que emerge a la capa superior en el instante en que la gota interacciona con la interfaz. Este vórtice podría deberse a un desprendimiento de masa ya sea por parte de la interfaz o por parte de la

gota, es por eso que se realizó una modificación en la técnica de visualización shadowgraph, Figura 43, con la cual se obtuvieron las imágenes de las Figuras 44 y 45.

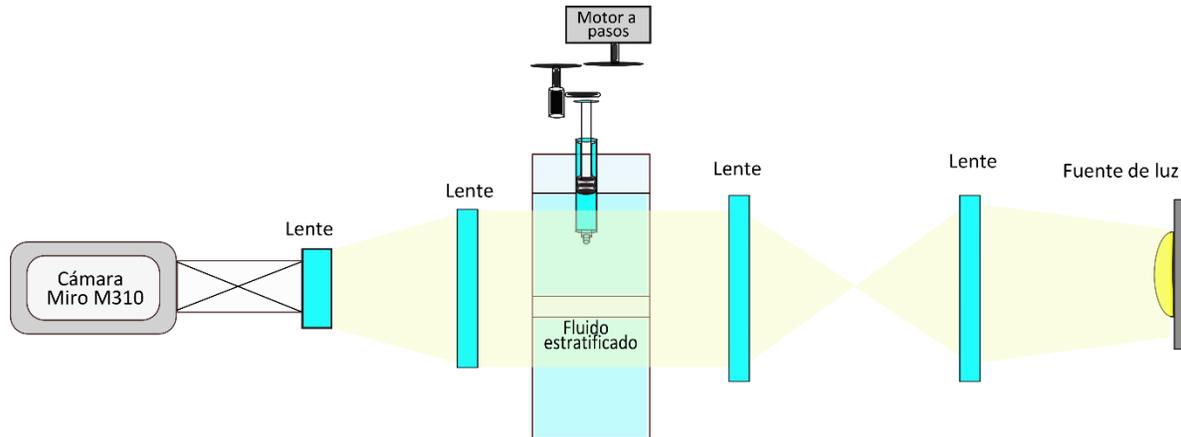


Figura 43: Montaje experimental con la modificación de la técnica de visualización pasando de shadowgraph directo a shadowgraph enfocado.

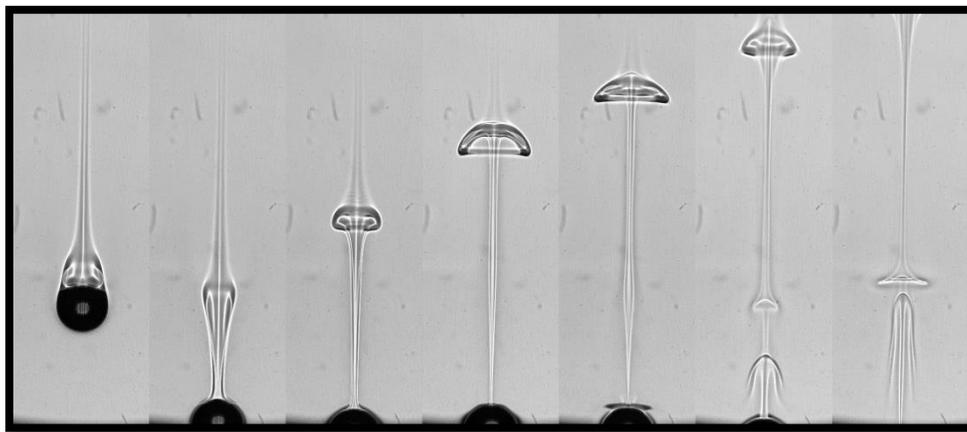
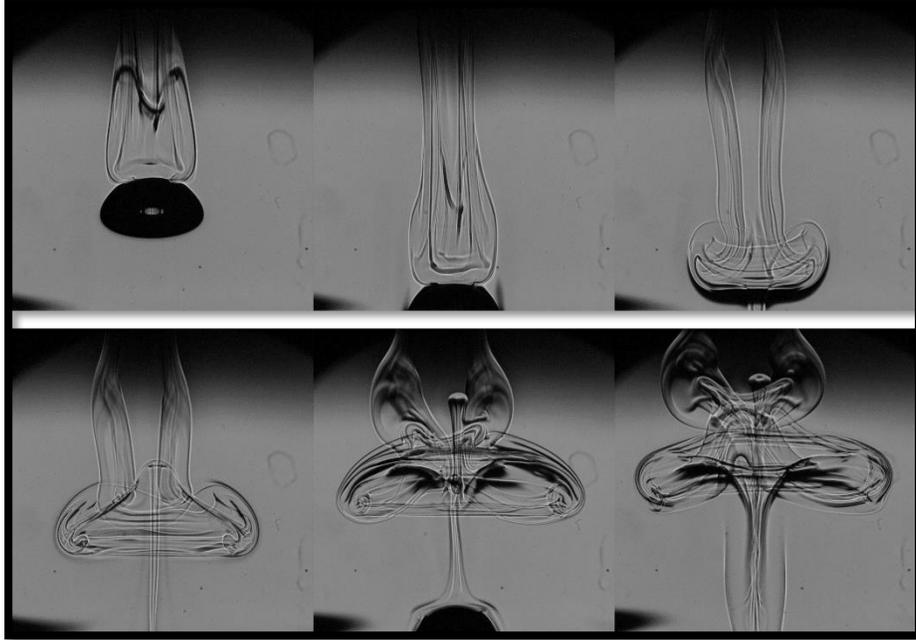


Figura 44: Secuencia correspondiente a la gota de volumen 1 durante su recorrido por la estratificación, donde se observa que al interactuar con la interfaz existe una pérdida de masa que se traduce en 3 vórtices.



*Figura 45: Secuencia correspondiente a la gota de volumen 2 durante su recorrido por la estratificación, donde se observa que existe desprendimiento de masa que se traduce en un vórtice, formando una serie de figuras.*

Se aprecia que existe desprendimiento de masa, no solo al interactuar con la interfaz, sino que la gota debido a su naturaleza parcialmente miscible, deja una estela de material a su paso.

En los modelos presentados anteriormente no se toma en cuenta el desprendimiento de masa. Un modelo más realista debería incluir la pérdida de masa a partir de los resultados obtenidos en las figuras 44 y 45.

## Capítulo V- Conclusiones

---

Se estableció una técnica de llenado para la creación de una interfaz estable en un medio estratificado, que no varía de manera significativa en posición y grosor durante un intervalo de tiempo de 15 minutos. Esta condición es necesaria para establecer un experimento repetible.

A través de un video se obtuvo la trayectoria de una gota parcialmente miscible a lo largo de un fluido estratificado. Se observó que existe un cambio en geometría durante el recorrido. La gota con más masa (caso 2) tiene un cambio más pronunciado.

Debido a que la fuerza de arrastre está directamente relacionada con la geometría de la gota, con el objetivo de asociar un modelo que describiera el comportamiento de la gota, se obtuvo esta fuerza a partir de tres modelos: esférico, elíptico y a partir de un factor de arrastre con geometría variable. Se obtuvo que el primero y el tercero presentan comportamientos similares.

A partir de las imágenes, se determinó la fuerza neta (FN) que actúa sobre cada una de las gotas y se comparó con la fuerza de arrastre ( $F_D$ ). En la zona 1, la fuerza neta es muy pequeña, por lo que hay una fuerza de magnitud casi igual a  $F_D$  pero de sentido contrario que corresponde a la suma de las fuerzas de Basset y de masa virtual que aparecen en la ecuación BBO.

El término de Basset está relacionado con las fuerzas viscosas y la causalidad, por lo que puede ser responsable del desfase dentro de la interfaz. La masa virtual parece ser importante en la zona 1 pues es la única que podría compensar a  $F_D$ .

## Capítulo VI- Trabajo a futuro

---

En este trabajo solo se hizo referencia a la fuerza de arrastre, debido al cambio de geometría en ambos volúmenes de gotas, donde se propusieron tres modelos los cuales difieren en mayor o menor medida. Se propone como trabajo futuro establecer un modelo propio para que se adapte de mejor manera al fenómeno descrito.

Es necesario estudiar los factores faltantes de la ecuación de Basset-Boussinesq-Oseen y determinar cuál de estas fuerzas influye en mayor medida sobre la gota.

Debido al comportamiento observado en las Figuras 44 y 45 ,se sugiere estudiar a la gota como un cuerpo que varía en masa y geometría en cada punto de la trayectoria.

De la misma forma, para establecer un modelo que describa de manera general la trayectoria de la gota, dentro del ámbito geométrico, es necesario hacer el estudio de gotas con diferentes volúmenes. En general con valores que se encuentren por encima y por debajo de 0.0145 ml, volumen utilizado en este trabajo, para determinar el intervalo, volumétricamente hablando, en el cual se adapta cada modelo descrito.

Para disminuir las incertidumbres en algunos casos, sería conveniente automatizar el experimento para poder realizarlo muchas veces y hacer un análisis estadístico.

Puesto que la estabilidad de la interfaz depende fuertemente de la temperatura, se propone hacer experimentos con una temperatura menor y controlada.

# Referencias

---

Ahmadi G. y McLaughlin J.B. (2008) Transport, Deposition, and Removal of Fine Particles: Biomedical Applications, 101-106(SPRINGER).

Alvarez V., Zarazua A., Echeverría C., Porta D. y Stern C., (2015). Critical Phenomena of a Drop Through a Stratified Fluid, 497-503.

Basset, A.B., (1888). Treatise on Hydrodynamics, Deighton Bell, London. 232-302

Beuvich, Yu. A., (1966). Motion resistance of a particle suspended in a turbulent medium, Fluid Dynamics, **1**, 119.

Boussinesq, J., (1895). Theorie Analytique de al Chaleur, L'Ecole Polytechnique, Paris, 2, 224

Camassa, R., et al. (2013). Numerical simulations and experimental measurements of dense-core vortex rings in a sharply stratified environment. Computational Science & Discovery, 6, 014001.

Camassa, R., Khatri, S., McLaughlin, R., Mertens, K., Monbureau, E., Nenon, D., & White, B. (2011). The trapping and escape of buoyant vortex rings in sharply stratified fluids. arXiv preprint arXiv:1110.3435.

Corrsin, S. and Lumley, J.( 1956) On the equation of motion for a particle in turbulent fluid, App. Sci. Res., 2-3, 114.

Crowe, C.T, Schwarzkopf .D., SommerfeldM., Tsuji Y.(2011).Multiphase Flows whith droplets and particles second edition, 67-96

G. S. Settles (1949). Schlieren and Shadowgraph Techniques. 30.

Happel J.y Brenner H. (1983). Low Reynolds number hydrodynamics, 145-149, 154-156.

Hölzer, A. and Sommerfeld, M.(2008). New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles. Powder Tech., 184, 361

István Biró, K. Gábor Szabó, Balázs Gyüre, Imre M. Jánosi, and Tamás Tél(2008). Power-law decaying oscillations of neutrally buoyant spheres in continuously stratified fluid, #20

Kim B. I., Elghobashi S. Y William A.(1998) On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers

Mashayek A. y Ashgri N., Dynamics of Liquid Droplets, 97-118

Maxey, M.R. and Riley, J.J. (1983). Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow, Phys. Fluids, 26(4), 883.

Militzer J., Kan J.M., Hamdullahpur F., Amyotte P.R. y AL Taweel A.M. (1988). Drag coefficient for axisymmetric flow around individual spheroidal particles. Technical University of Novs Scotia.

Oseen, C.W.(1927). Hydrodynamik, Leipzig

Taylor, T. and Acrivos, A., On the deformation and drag of a falling drop at low Reynolds numbers, J. Fluid Mech. Stanford University, Stanford, California.

Tchen, C.M.(1949). Mean values and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid, Doctoral Dissertation, Delft, Holland.

Timmerman. P. y van der Weele J.(1998). On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag. Centre for Theoretical Physics, University of Twente

Waddel, H. (1933). Sphericity and roundness of rock particles, J. Geol.41, 310.317, 31

Paginas web:

<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc324.htm>.

Última consulta 23 de junio de 2015.

[http://robots-argentina.com.ar/MotorCC\\_PuenteH.htm](http://robots-argentina.com.ar/MotorCC_PuenteH.htm).

Última consulta 23 de junio de 2015.

## Apéndice

---

### Obtención de incertidumbres para los tres modelos propuestos.

- Esfera

$$\Delta f = \sqrt{\frac{dF}{d\rho}^2 \Delta\rho^2 + \frac{dF}{dC_D}^2 \Delta C_D^2 + \frac{dF}{dv}^2 \Delta v^2 + \frac{dF}{dA}^2 \Delta A^2}$$

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{1}{2} C_D A v^2$$

$$\frac{dF}{dC_D} = -\frac{1}{2} A v^2 \rho$$

$$\frac{dF}{dA} = -\frac{1}{2} C_D v^2 \rho$$

$$\frac{dF}{dv} = -C_D A v \rho$$

$$\Delta C_D = \sqrt{\left(\frac{\partial C_D}{\partial Re}\right)^2 \Delta Re r^2}$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial Re} = \frac{-24}{Re^2} - \frac{3Re^{-1/2}}{(1 + \sqrt{Re})^2}$$

$$\Delta \mathbf{Rer} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial D_N}\right)^2 \Delta D_N^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial \rho}\right)^2 \Delta \rho^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial |-v|}\right)^2 \Delta |-v|^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial \mu}\right)^2 \Delta \mu^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial D_N} = \frac{|-v| \rho}{\mu}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial |-v|} = \frac{D_N \rho}{\mu}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Rer}}{\partial \mu} = -\frac{D_N |-v| \rho}{\mu^2}$$

$$\Delta D_N = \sqrt{\left(\frac{\partial D_N}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial D_N}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2}$$

$$\frac{\partial D_N}{\partial a} = \frac{4ab}{3^3 \sqrt{\pi a^4 b^2}}$$

$$\frac{\partial D_N}{\partial b} = \frac{2a^2}{3^3 \sqrt{\pi a^4 b^2}}$$

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 \Delta r^2}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right) = 2\pi r$$

• **Elipse**

$$\Delta f = \sqrt{\frac{dF}{d\rho}^2 \Delta\rho^2 + \frac{dF}{dC_D}^2 \Delta C_D^2 + \frac{dF}{dv}^2 \Delta v^2 + \frac{dF}{dA}^2 \Delta A^2}$$

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{1}{2} C_D A v^2$$

$$\frac{dF}{dA} = -\frac{1}{2} C_D v^2 \rho$$

$$\frac{dF}{dC_D} = -\frac{1}{2} A v^2 \rho$$

$$\frac{dF}{dv} = -C_D A v \rho$$

$$\Delta C_D = \sqrt{\left(\frac{\partial C_D}{\partial Rer}\right)^2 \Delta Rer^2 + \left(\frac{\partial C_D}{\partial E}\right)^2 \Delta E^2}$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial Rer} = L \frac{\partial}{\partial Rer} + M \frac{\partial L}{\partial Rer}$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial E} = L \frac{\partial}{\partial E} + M \frac{\partial L}{\partial E}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Rer} = \frac{E + 4}{5} \left[ \frac{2.4732}{Rer^{1.313}} - \frac{24(0.15Rer^{0.687})}{Rer^2} + \frac{20706}{\left(\frac{42500}{Rer^{1.16}} + 1\right)^2 Rer^{2.16}} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial E} = \frac{0.72}{Rer^{0.313}} + \frac{0.084Rer^{1.16}}{Rer^{1.16} + 42500} + \frac{24}{5Rer}$$

$$\frac{\partial M}{\partial E} = \frac{-0.00069 Rer}{E^2} + 0.00552E - 0.000754RE$$

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial RE} = -0.000754E + \frac{0.00069}{E} - \frac{0.0924}{RE^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{-b}{a^2}$$

$$\Delta A_1 = \sqrt{\frac{\partial A_1^2}{\partial a} \Delta a^2 + \frac{\partial A_1^2}{\partial b} \Delta b^2}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial b} = 2\pi a^2 \left[ \frac{a^2}{b^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{b^2}} \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}} - \frac{a^4 \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right) + \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)}{b^2 \left(a^2 - \frac{a^4}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{b^2}}} \right]$$

$$\Delta A_2 = \sqrt{\frac{\partial A_2^2}{\partial a} \Delta a^2 + \frac{\partial A_2^2}{\partial b} \Delta b^2}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} (a^3 - ab^2)} \left[ 2\pi a^2 \left( b^2 \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right) + a^2 \right) \right] +$$

$$\left( -4a^2 b^2 \pi \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 4a^4 \pi \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - 2\pi b^4 \right) \tan^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial b} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} (a^2 - b^2)b} 2\pi a^2 \left[ \left( a^4 + a^2 b^2 \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right) + (b^4 - 2a^2 b^2) \tan^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \right) \right]$$

- Factor de arrastre con geometría variable

$$\Delta FD = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)^2 \Delta \mu^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial DN}\right)^2 \Delta DN^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial F}\right)^2 \Delta f_{factor}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \Delta v^2}$$

$$\frac{\partial FD}{\partial v} = -3\mu D_N f \pi$$

$$\frac{\partial FD}{\partial \mu} = 3\pi D_N f (-v)$$

$$\frac{\partial FD}{\partial D_N} = 3\mu \pi f (-v)$$

$$\frac{\partial FD}{\partial f} = 3\mu D_N \pi (-v)$$

$$\Delta f_{factor} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial Rer}\right)^2 \Delta Rer^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2 \Delta \phi^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \Psi}\right)^2 \Delta \Psi^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{-1}{3} \psi^{-3/2} + \frac{-3Re^2}{32\psi^{7/4}} + 0.0175 \frac{Rer}{\phi} \left( -\frac{0.184207 e^{0.921034*(-\log \psi)^{0.2}}}{\psi(-\log \psi)^{0.8}} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{-1}{3} \psi^{-3/2} + \frac{-3Re^2}{32\psi^{7/4}} + 0.0175 \frac{Rer}{\phi} \left( -\frac{0.184207 e^{0.921034*(-\log \psi)^{0.2}}}{\psi(-\log \psi)^{0.8}} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Rer} = \frac{Rer^{-1/2}}{16\psi^{3/4}} + 0.0175 \frac{1}{\phi} 10^{0.4*(-\log \psi)^{0.2}}$$

$$\Delta\Psi = \sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2 \Delta r^2}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{8r}{a^2}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a} = \frac{8r^2}{a}$$

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial D_N}\right)^2 \Delta D_N^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial D_A}\right)^2 \Delta D_A^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial D_N} = \frac{2D_N}{D_A^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial D_A} = \frac{-2D_N^2}{D_A^3}$$

$$\Delta D_A = \sqrt{\left(\frac{\partial D_A}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2}$$

$$\frac{\partial D_A}{\partial a} = 2$$