



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**FLUJO COMBINADO PULSÁTIL Y VIBRÁTIL DE UN
SISTEMA COLOIDAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

P R E S E N T A:

STEPHANY LÓPEZ MORENO



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

MÉXICO D.F. 26 DE JUNIO DEL 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACION ESCOLAR

PRESENTE

Comunico a usted que la alumna Stephany López Moreno con número de cuenta 410024546 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado su fecha de examen el día 26 de Junio del 2015 a las 13: 00 hrs para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad con el siguiente jurado

Presidente: Ing. Q. Raúl Ramón Mora Hernández

Vocal: Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)

Secretario: M. en I. Mariano Pérez Camacho

Suplente: I. Q. Consuelo Matías Garduño

Suplente: I. Q. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez

El título de la tesis que se presenta es: Flujo combinado pulsátil y vibrátil en un sistema coloidal



AGRADECIMIENTOS

- A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Al M. en C. Mariano Pérez Camacho por sus valiosas aportaciones, comentarios y sugerencias para la comparación y discusión de los datos experimentales.
- A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por el tiempo dedicado para lograr este proyecto, gracias por su vasto conocimiento y experiencia, por enseñarme cosas más allá de lo académico, gracias por esos momentos de reflexión y animo que me ayudaron a ampliar mi visión profesional, así como de la vida.
- A la I.Q. Consuelo Matías Garduño por sus valiosas aportaciones y comentarios en la parte de aplicación.
- Al I.Q. Raúl Ramón Mora Hernández por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Al I.Q. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.
- **Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM << IN115615>> << Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.**

DEDICATORIAS

Doy gracias Dios por la familia que tengo y por todas esas personitas que me han apoyado a lo largo de mi vida, no puedo pedirte nada más, me siento completa totalmente.

A mi querido y tan admirado padre Juan Alberto López Ramírez: *Quien ha sido siempre mi ejemplo a seguir, porque sin sus consejos, sin su apoyo, sin sus palabras de aliento y sin esa mirada llena de amor que solo él me da yo jamás hubiera logrado llegar hasta aquí. Solo espero que un día pueda llegar a ser, al menos la mitad, de la grandiosa persona que tú eres. Jamás olvides que todo lo que hago es por ti y para ti y que soy todo lo que soy porque tú eres todo lo que quiero. Te quiero con toda mi alma.*

A mi alegre y amada mamita Graciela Moreno Fajardo: *Gracias por creer en mí y por hacer de mí quien soy ahora, gracias por acompañarme en cada noche de desvelo, por escucharme, apoyarme y por estar siempre a mi lado. Por tu sonrisa que me animaba, pero sobretodo, que me iluminaba en los momentos más difíciles. Solo te pido que jamás dejes de sonreír, no le quites la luz a mi vida que tú le das con tu alegría. Te quiero con toda mi alma.*

A mi muy buen hermano Luis Alberto López Moreno: *gracias por hacerme sonreír siempre tan solo con tu presencia, eres quien prende la chispa de mis ocurrencias y mis locuras, gracias por tu apoyo y por estar siempre conmigo (zapeandome). Eres el mejor hermano que puedo tener, enserio no sabes lo importante que eres en mi vida.*

A el amor de mi vida Luis Angel Castillo Cruz: *gracias por estar en mi vida, gracias por tu paciencia, por escucharme, por apoyarme, por esos abrazos tranquilizadores, por permitir que fuera creciendo a tu lado. Sin ti yo no hubiera podido lograrlo, eres el pilar de mi vida y la alegría de mi corazón, te necesito siempre conmigo, jamás sueltes mi mano. Te amo hoy y siempre.*

A mis amigos Haide, Nohemi, Ricardo, Hugo, Michel, Luis, Vianney, David, Ignacio: *gracias por todos esos momentos tan increíbles que pase a su lado gracias por su apoyo, por sus consejos, por esas borracheras, por sus locuras, por sus ocurrencias, hicieron más fácil y más alegre todo este trayecto universitario. Fue una dicha compartir con ustedes tantas cosas que créanme, estarán siempre en mi mente.*

A mi asesor Edtson Emilio Herrera Valencia: *gracias por todo, gracias por su confianza, por su amistad, gracias por compartir un poco de todo ese conocimiento que usted tiene. Realmente lo admiro personal y profesionalmente.*



APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO

Este trabajo versa en la descripción en el flujo combinado pulsátil y vibrátil de un sistema complejo (sistema coloidal). El flujo pulsátil y vibrátil se modelan mediante un gradiente de presión en la pared y que el sistema no satisface la condición de adherencia del sólido y el fluido respectivamente. Para modelar los cambios temporales en el gradiente de presión y de la fuerza macroscópica en la pared, se utiliza una función estocástica, i.e. es una función aleatoria que evoluciona en el tiempo. Las principales aportaciones al conocimiento de esta investigación, se resumen a continuación:

- a) Estudio del efecto combinado del flujo pulsátil y oscilante en fluidos no-newtonianos en una geometría cilíndrica en un fluido complejo
- b) El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se resolvieron mediante un método perturbativo el cual supone como hipótesis que la velocidad axial en el tubo se puede descomponer en un valor promedio y una fluctuación alrededor del promedio.
- c) Se obtuvieron expresiones analíticas para perfil de velocidad, flujo volumétrico, aumento en el flujo volumétrico y fracción de potencia empleada en el sistema combinado.
- d) Se propuso un conjunto de variables adimensionales las cuales permitieron acotar el sistema y facilitar el análisis computacional a través de números adimensionales.
- e) El aumento del flujo dependen de las propiedades no newtonianas del líquido complejo, de la amplitud y de la frecuencia asociada con la función estocástica.

Para concluir los objetivos planteados en este trabajo se reforzaron los conocimientos matemáticos en general así como de ecuaciones diferenciales, fenómenos de transporte, adimensionamiento de ecuaciones, modelado de procesos, conocimiento de conceptos básicos de reología, fluidos complejos, y uso de software Mathematica

ÍNDICE

NOMENCLATURA	I
GLOSARIO	III
RESUMEN	V
ABSTRACT.....	VI
CAPÍTULO I	1
INTRODUCCIÓN	1
1.1 Flujo oscilatorio	2
1.2 Flujo pulsátil.....	3
1.3 Flujo vibrátil.....	4
1.3.1 Fluido Newtoniano	5
1.3.2 Fluido no newtoniano viscosos y viscoelasticos	6
1.4 Flujos pulsátiles y oscilantes	6
1.5 Modelos constitutivos reológicos.....	7
1.5.1 Ecuaciones constitutivas empeladas en el flujo oscilatorio.....	8
1.6 Métodos analíticos y numéricos y paquetes computacionales	10
1.7 Aplicaciones del flujo pulsátil y vibrátil	11
1.7.1 Anticoagulantes	11
1.7.2 Súper fibras naturales	13
1.7.3 Células biológicas externas.	13
1.7.4 Liberado de fármacos en micro-canales.....	14
1.7.5. Extrusión de polímeros y nanocompuestos con boquillas oscilantes.....	15
1.8 Motivación y distribución del material	16
CAPÍTULO II	19
OBJETIVOS E HIPÓTESIS.....	19
2.1 Objetivos	20
2.1.1 Objetivo general	20
2.1.2 Objetivos particulares.....	20
2.2 Hipótesis del trabajo.....	20
CAPÍTULO III.....	21
MARCO TEÓRICO	21



3.1 Fluidos complejos	22
3.2 Reología	23
3.3 Tensor de deformación.....	24
3.4 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.....	24
3.5 El tensor rapidez de deformación.....	25
3.6 El tensor de vorticidad	25
3.7 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación.....	26
3.8 Tensor de esfuerzos.....	26
3.9 Fluidos newtonianos.....	27
3.10 Fluidos no newtonianos.....	28
3.11 Ecuaciones constitutivas	28
3.11.1 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia)	28
3.11.2 Modelo de Ellis.....	29
3.11.3 Modelo de Carreau	30
3.11.4 Modelo de Reinner-Phillipoff.....	30
3.11.5 Fluido de Bingham	31
3.12 Flujo cortante simple.....	31
3.12.1 Funciones materiales	33
3.13 Métodos reométricos.....	33
3.14 Sistema coloidal	34
3.14.1 Clasificación de los coloides	35
3.14.2 Uso industrial de los coloides.....	36
3.15 Resumen de los conceptos teóricos y aplicaciones	37
CAPÍTULO IV	38
PLANTEAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA	38
4.1 Planteamiento del problema.....	39
4.2 Modelado.....	41
4.2.1 Campo vectorial de velocidades.....	41
4.2.2 Tensores gradiente de velocidad, rapidez de deformación y de esfuerzos viscosos.....	41
4.2.3 Conservación de masa y momento	41

4.2.4 Ecuación constitutiva modelo de Ellis	41
4.2.5 Condiciones de frontera.....	42
4.2.6 Gradiente de presión pulsátil y función estocástica	42
4.2.7 Flujo volumétrico	43
4.2.8 Aumento en el flujo volumétrico y fracción de potencia	44
4.2.9 Ecuaciones escalares desacopladas	44
CAPÍTULO V	46
DESARROLLO DEL MODELO	46
5.1 Fluido Newtoniano.....	47
5.1.1 Cálculo de la velocidad axial.....	47
5.1.2 Cálculo del flujo volumétrico transitorio	48
5.1.3 Cálculo del flujo volumétrico promedio.....	49
5.1.4 Cálculo del aumento en el flujo volumétrico:	49
5.1.5 Cálculo de la fracción de potencia.....	50
5.2 Fluido no newtoniano: Modelo de Ellis	52
5.2.1 Cálculo de la velocidad axial.....	52
5.2.2 Cálculo del flujo volumétrico transitorio y promediado	54
5.2.3 Flujo volumétrico transitorio promediado	55
5.2.4 Cálculo del aumento en el flujo volumétrico:	56
5.2.5 Cálculo de la fracción de Potencia	57
CAPÍTULO VI	59
VARIABLES Y ECUACIONES.....	59
ADIMENSIONALES	59
6.1 Variables adimensionales.....	60
6.2. Ecuaciones adimensionales.....	62
6.3 Números adimensionales	63
CAPÍTULO VII	64
SIMULACIONES COMPUTACIONALES	64
7.1 Función viscosidad.....	65
7.2 Perfil de velocidad sin perturbación.....	66
7.3 Perfil de velocidad con perturbación.....	68



7.4 Incremento en el flujo	73
7.5 Fracción de potencia	78
7.6 Aplicación a un fluido complejo sistema coloidal	84
7.6.1 Perfil de velocidad	86
7.6.2 Incremento en el flujo.....	89
7.6.3 Potencia requerida	92
CAPÍTULO VII	95
ANÁLISIS DE RESULTADOS	95
CAPÍTULO VIII.....	100
CONCLUSIONES	100
8.1 Descripción física del problema.....	101
8.2 Flujo pulsátil.....	103
8.3 Flujo vibrátil.....	104
8.4 Flujo combinado pulsátil + vibrátil	104
8.5 Aplicación al sistema coloidal.	105
CAPÍTULO IX	107
TRABAJO FUTURO	107
9.1 Efectos convectivos y transitorios en la temperatura	109
9.2 Métodos matemáticos y computacionales	110
9.3 Sistemas y Reometría	110
APÉNDICE.....	111
REFERENCIAS.....	116

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Geometría utilizada comúnmente para describir el flujo pulsátil de un líquido complejo.	4
Figura 2. Geometría utilizada comúnmente para describir el flujo de un líquido complejo en flujo vibrátil.....	5
Figura 3. (a) Función viscosidad vs rapidez de deformación de la sangre humana. Fig. (b) Estudio de la sangre con altos contenidos de colesterol.	12

Figura 4. Ducto arácnido en el que se genera el hilo biológico así como las tres secciones que lo contienen.....	13
Figura 5. Sistema de flujo estudiado en la descripción de las células ciliadas externas.	14
Figura 6. Sistema coloidal en dos placas aplicándole una diferencia de potencial. ...	15
Figura 7. Representación de un extrusor con boquillas oscilantes.	16
Figura 8. Organización del trabajo desarrollado en la tesis.	18
Figura 9. Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de concentración.	22
Figura 10. Ilustra la relación entre las propiedades cinemáticas en un fluido complejo.....	23
Figura 11. Flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).	31
Figura 12. Ilustra la composición de un sistema coloidal.....	35
Figura 13. Ilustra un capilar de radio $r = a$ y longitud $z=L$ en donde el fluido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. Del lado derecho, se observa un punto material en coordenadas cilíndricas.	39
Figura 14. Función asociada al gradiente de presión pulsátil. (a) Efecto de la amplitud de la perturbación, y (b) Efecto de la frecuencia en el gradiente de presión pulsátil.....	40
Figura 15. Función viscosidad adimensional vs rapidez de corte adimensional en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.	65
Figura 16. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.	66
Figura 17. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro alfa en función de los mecanismos adelgazantes al corte.	67
Figura 18. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores de esfuerzo.....	68



Figura 19. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del adelgazamiento al corte.....	70
Figura 20. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del número de Reynolds.....	71
Figura 21. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores de la amplitud “M”.....	72
Figura 22. Aumento en el flujo pulsátil en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.....	73
Figura 23. Aumento en el flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.....	75
Figura 24. Aumento en el flujo combinado (pulsátil-vibrátil) en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.	76
Figura 25. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un flujo pulsátil en diferentes líquidos de Ellis.	78
Figura 26. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un flujo vibrátil en diferentes líquidos de Ellis.	80
Figura 27. Potencia requerida en el flujo combinado (pulsátil-vibrátil) en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.....	82
Figura 28. Sistema coloidal al cual se deforma continua e irreversiblemente por el flujo combinado.	84
Figura 29. Diagrama reológico de la función viscosidad como función del esfuerzo en la pared para el valor de alfa 1.4 obtenido del ajuste de los datos reométricos obtenidos de la literatura.....	85
Figura 30. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.	86
Figura 31. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores del número de Reynolds.	87
Figura 32. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la amplitud.	88

Figura 33. Aumento en el flujo pulsátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.....	89
Figura 34. Aumento en el flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.....	90
Figura 35. Aumento en el flujo combinado en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.....	91
Figura 36. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.....	92
Figura 37. Potencia requerida para un flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.....	93
Figura 38. Resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en el flujo pulsátil.....	96
Figura 39. Resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en el flujo vibrátil.....	98
Figura 40. Resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en el flujo combinado.....	99

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ecuaciones constitutivas empleadas en la descripción del flujo y la reología en sistemas de flujo pulsátil y vibrátil fluidos no newtonianos en el régimen línea y no lineal respectivamente.....	9
Tabla 2. Definiciones de las variables dinámicas de la tabla 1.....	10
Tabla 3. Tipos de coloides.....	36
Tabla 4. Variables dimensionales y adimensionales empleadas en el escalamiento de las ecuaciones analíticas deducidas en el capítulo anterior.....	60
Tabla 5. Variables características utilizadas en la variables adimensionales.....	61
Tabla 6. Parámetros materiales utilizados en el modelo de Ellis para una suspensión de tipo coloidal.....	85



NOMENCLATURA

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
∇V^T	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
v	Vector de velocidad [m/s]
g	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$D/Dt = \partial/\partial t + V \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
$\langle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt$	Operador promedio [1]
π	Constante Pi [1]

Variables dimensionales

a	Radio del capilar [m]
I (%)	Aumento en el flujo volumétrico [1]
E (%)	Fracción de energía consumida [1]
L	Longitud del capilar [m]
V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
T	Periodo [s]
r	Coordenada radial adimensional [m]

t	Tiempo [s]
t_{car}	Tiempo característico [s]
Q	Flujo volumétrico [m^3/s]
$n(t)$	Flujo estocástica [1]
Variables adimensionales	
Q^*	Flujo volumétrico adimensional en estado no estacionario [1]
Q_0^*	Flujo volumétrico adimensional en estado estacionario [1]
V_z^*	Velocidad axial adimensional [1]
t^*	Tiempo adimensional [1]
τ	Esfuerzo adimensional [1]
ω^*	Frecuencia angular adimensional [1]
Letras Griegas	
ω	Frecuencia [rad/s]
ρ	Densidad [rad/s]
ν_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [$1/Pa \cdot s$]
ν_1	Fluidez a moderada rapidez de deformación [$1/Pa \cdot s^n$]
α	Exponente del modelo de Ley de potencia [1]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Rapidez de deformación rz [1/s]
σ_{rz}	Componente rz del esfuerzo cortante [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
Números adimensionales	
Re	Numero de Reynolds [1]



GLOSARIO

Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación).
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Ecuación de continuidad:	Ecuación de conservación de la masa.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Modelo de Ellis:	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
Modelo de Cross:	Modelo de cuatro parámetros materiales que describe la viscosidad en función de la rapidez de deformación y que describe las dos zona a baja y alta rapidez de deformación y la zona intermedia asociada a la ley de potencia.
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Aumento en el flujo:	Porcentaje de aumento del flujo con respecto a un gradiente de presión constante.
Fracción de Potencia:	Fracción de energía asociado a la perturbación pulsátil, vibrátil y combinada.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante
Fluido Newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Fluido engrosante al corte:	Fluido que aumenta su velocidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.



-
- Fluido adelgazante al corte:** Fluido que disminuye su velocidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
- Sistema coloidal:** Sistema complejo que contiene un cumulo de partículas dispersas en un medio.



RESUMEN

En este trabajo se analiza un líquido no-newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido se deforma continua e irreversiblemente debido a una combinación de dos tipos de flujo: (i) Gradiente de presión pulsátil y (ii) Vibrátil en la pared respectivamente.

Para caracterizar el líquido complejo se utiliza la ecuación constitutiva de Ellis, la cual consiste en la suma de dos modelos: Newtoniano y de Ostwald de Waele. El flujo combinado (pulsátil y vibrátil) es simulado por una función estocástica $n(t)$ con promedio cero, i.e. $\langle n(t) \rangle = 0$.

El sistema de ecuaciones acopladas, se resuelve mediante una técnica de tipo perturbativo, suponiendo que la velocidad puede descomponerse en dos contribuciones estacionaria y no estacionaria. A partir de estos resultados, se obtienen expresiones analíticas para la velocidad axial, velocidad promedio, flujo volumétrico, aumento en el flujo volumétrico y fracción de potencia empleada en el sistema mecánico debido al flujo combinado.

Los resultados muestran que el aumento y la potencia son funciones de las propiedades no newtonianas del modelo de Ellis (exponente del modelo de Ellis, fluides a corte bajo y moderado respectivamente). Con el fin de simplificar las simulaciones se propone un conjunto de variables adimensionales el cual, introduce números adimensionales que cuantifiquen los mecanismos que dictan la dinámica del sistema.

En este caso, el número que representa el flujo combinado es el número Reynolds, el cual describe los procesos inerciales y viscosos en el sistema. El aumento en el flujo volumétrico puede separarse en una contribución del flujo pulsátil y vibrátil. Se demuestra que el cambio en el flujo volumétrico es enorme en la región en donde el líquido es adelgazante al corte. Se observa que el flujo vibrátil domina a esfuerzos en la pared bajos mientras que, a esfuerzos moderados y alto domina el flujo pulsátil. De acuerdo con nuestro sistema, el aumento puede ser modificado a través de la amplitud de las fuerzas macroscópicas y del número de Reynolds.

Finalmente, con el fin de cuantificar las predicciones del modelo inelástico de Ellis en el sistema combinado se utilizan datos reométricos de un sistema coloidal estudiado en flujo pulsátil y que recientemente fue publicado.

Palabras claves: Flujo pulsátil, flujo vibrátil, flujo combinado, Modelo de Ellis, eficiencia del flujo volumétrico, Consumo Energético.

ABSTRACT

In this work a non-Newtonian fluid with transient structure in a pipe with radius $r = a$ y axial length $z = L$ is analyzed. The process is isotherm and the fluid is incompressible (constant density). The liquid is sheered continuous and irreversibly by effect of a combined flow systems, which are: (i) Pressure gradient, (ii) Vibratile flow respectively.

In order to characterize the transport phenomena and rheological process the Ellis constitutive equation is employed. This model split the contributions of the Newtonian and Power law constitutive equations respectively.

The pulsatile and vibratile mechanisms in both systems are simulated by a stochastic function with average equal to zero. The coupled system of nonlinear partial differential equations is solved through a perturbation technique, which supposes that the axial velocity can be separated in two contributions, one of them associated to the steady state and the other one to the transient mechanisms.

Analytical expressions for axial velocity, average velocity, volumetric flow, flow enhancement and power are obtained as a function of the material parameters of the Ellis Liquid and the process (amplitude and frequency).

It is demonstrated that flow enhancement is enormous in the region where the liquid presents shear thinning mechanism and the resonances curves are shifted as a function of the amplitude and the frequency associated with the mechanical systems.

Finally, in order to test our analytical results, recently published pulsatile rheometric data of a complex fluid (non-colloidal solution) are used.

Key words: Pulsatile Flow, vibratile Flow, combined flow, Ellis Model, volumetric flow enhancement, power energy.



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Flujo oscilatorio

Los flujos oscilatorios en conductos cilíndricos se encuentran con frecuencia en importantes aplicaciones de ingeniería tales como motores de combustión interna y motores Stirling. Las mediciones pioneras realizadas por Richardson y Tyler (1929) en flujos oscilatorios en conductos de sección circular, indicaron que bajo condiciones adecuadas, la velocidad axial máxima del fluido ocurre cerca de la pared. Este fenómeno es conocido como efecto anular y contrasta con el perfil de Poiseuille en el que la velocidad axial máxima ocurre en el centro del conducto. Una solución exacta a las ecuaciones que describen el flujo dentro de un conducto circular sujeto a una diferencia de presiones que depende del tiempo de manera periódica fue encontrada por Womersley (1955). Uchida (1956) obtuvo una solución analítica exacta para los perfiles de velocidad de un flujo pulsante superpuesto a un flujo de velocidad constante.

Hino et al. (1976) estudiaron experimentalmente la transición del flujo usando un anemómetro de hilo caliente. El ducto usado por ellos tiene una asimetría en las condiciones de frontera; mientras en un extremo colocaron un pistón, el otro está abierto a la atmósfera. Sus mediciones mostraron que para los valores del número de Reynolds variando de 105 a 5830, y para los valores del parámetro de Stokes variando de 1.35 a 6.19 se tenía un flujo laminar durante la fase de aceleración en la primera mitad del ciclo, y para números de Reynolds oscilatorios grandes, un flujo turbulento durante la fase de desaceleración.

Otros estudios teóricos como los de Rao y Devanathan (1973) y Hall (2000) usaron perturbaciones para desarrollar la formulación del flujo pulsante en un tubo de sección transversal variando lentamente. En un contexto similar, Das y Arakeri (1996) presentaron soluciones analíticas del gradiente de presión resultante y la distribución de velocidad para una razón del flujo volumétrico variando con el tiempo en un ducto. Se asumió que el flujo era laminar y completamente desarrollado. Un estudio similar sobre flujo pulsante en un canal con variación en la razón del flujo volumétrico fue presentado por Muntges y Majdalani (1974). Sin embargo, ninguno de estos estudios ha sido comprobado por las validaciones experimentales.

Zhao y Cheng (2005) investigaron experimentalmente la transición a la turbulencia de un flujo oscilatorio recíprocante en un tubo con condiciones de frontera simétricas y concluyeron que la desestabilización del flujo laminar ocurre también en la fase de desaceleración, confirmando lo observado por Hino et al (1976).



1.2 Flujo pulsátil

Actualmente, existen en la literatura de la mecánica del medio continuo dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo es perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante. La definición básica de un flujo pulsátil es cuando se presenta una modificación al gradiente de presión constante en la ecuación de movimiento la cual puede representarse de la siguiente manera:

$$\nabla z p(t) = (\nabla z p(t))_{\text{Est}} + (\nabla z p(t))_{\text{Pert}} = \nabla z p_0 + \nabla z p_0 \varepsilon n(t) = \nabla z p_0 (1 + \varepsilon n(t)) \quad (1)$$

La primera contribución de la Ec. (1) se debe al gradiente de presión en estado estacionario y la segunda a la fluctuación debido al ruido estocástico representado por $n(t)$ y el parámetro ε que es menor que uno, se introduce con el fin de facilitar el tratamiento matemático que consiste básicamente en métodos perturbativos.

Una vez que se ha resuelto la ecuación de movimiento y obtenido el flujo volumétrico en función del gradiente de presión pulsátil se procede a calcular el aumento en el flujo volumétrico en función de las propiedades materiales. Una forma de cuantificar cuantas veces es mayor el flujo volumétrico pulsátil es mayor que el flujo a gradiente de presión constante es mediante la eficiencia del flujo volumétrico la cual se define como:

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 \quad (2)$$

En la Ec. (2) $\langle Q(t) \rangle$ representa el flujo perturbado (pulsátil u oscilante) y Q_0 es el flujo a gradiente de presión constante. La Ec. (1) es una forma de cuantificar los efectos que produce la perturbación pulsátil u oscilante en el flujo volumétrico. Ha sido demostrado que para un líquido newtoniano el aumento en el flujo es cero, mientras que para un fluido no-newtoniano el aumento es diferente de cero y la naturaleza de las curvas que describe estas perturbaciones están determinadas por las

propiedades materiales del líquido y de la fuerza motriz asociada a la modificación del gradiente de presión.

Por otra parte, la potencia utilizada en la incorporación del gradiente de presión pulsátil es siempre diferente de cero y no importa la naturaleza reológica del líquido, siempre es diferente de cero.

$$P(\%) = \frac{\langle Q(t) \nabla P(t) \rangle - Q_0 \nabla P_0}{Q_0 \nabla P_0} \times 100 \quad (3)$$

Las Ecs. (2,3) son los resultados más importantes en el estudio del flujo pulsátil y son punto de partida en el presente estudio de Licenciatura.

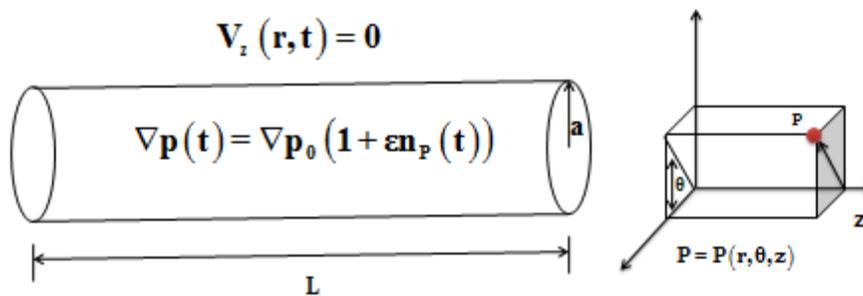


Figura 1. Geometría utilizada comúnmente para describir el flujo pulsátil de un líquido complejo.

Nótese que la condición de adherencia del sólido al fluido en la interfaz es cero mientras que, en el flujo vibrátil es diferente de cero.

1.3 Flujo vibrátil

El segundo tipo de sistema de interés en fenómenos de transporte y reología, es el flujo vibrátil, el cual consiste en estudiar el movimiento axial periódico de un capilar manteniendo constante el gradiente de presión y lo que oscila es la pared mediante un sistema mecánico. En este punto la condición de adherencia en la interfaz sólido-líquido no se cumple, por lo que la velocidad es diferente de cero.

$$V_z(r=a,t) = V_w(t) = \omega a n(t) \quad (4)$$



En la Ec. (4) V_w es una velocidad que representa el deslizamiento en la interface entre el sólido y el líquido. Para simular el movimiento periódico se multiplica la frecuencia por la longitud característica radial y la función estocástica $n(t)$ definida anteriormente. Básicamente los cálculos matemáticos son los mismos que en el gradiente de presión pulsátil y el interés de este sistema radica principalmente en el cálculo del aumento en el flujo volumétrico y la fracción de potencia utilizada debido al sistema mecánico respectivamente.

Sobre estos sistemas se han publicado una gran cantidad de trabajos teóricos y experimentales con el fin de analizar estos interesantes problemas [1-4]. Las principales conclusiones de estos trabajos, son mencionadas a continuación:

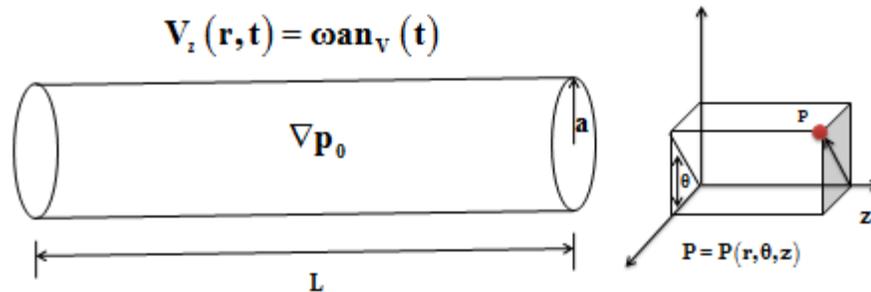


Figura 2. Geometría utilizada comúnmente para describir el flujo de un líquido complejo en flujo vibrátil.

Nótese que la condición de adherencia del sólido al fluido en la interface es cero mientras que, en el flujo vibrátil es diferente de cero.

1.3.1 Fluido Newtoniano

- a) El aumento en el flujo volumétrico por efecto de la incorporación del gradiente de presión pulsátil o vibrátil en la pared, siempre es cero, i.e. no existen cambios entre el flujo volumétrico pulsátil y el flujo a gradiente de presión constante, i.e.

$$I_p^N (\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 = 0$$

- b) El aumento en el flujo volumétrico en el sistema vibrátil, por la incorporación del movimiento estocástico en la pared, para un fluido newtoniano siempre es idéntico a cero, por lo que se tiene el mismo comportamiento que el pulsátil.

$$I_p^N (\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 = 0$$

- c) La potencia empleada en los dos sistemas es siempre diferente de cero, es decir el trabajo por unidad de tiempo asociado a estos dos sistemas de estudio es siempre diferente de cero:

$$E_J^X (\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 \neq 0; J = \{P, V\}, X = \{N, NN\}$$

Esto quiere decir que no importa la naturaleza del líquido, la fracción de energía utilizada siempre es diferente de cero.

1.3.2 Fluido no newtoniano viscosos y viscoelásticos

- d) La eficiencia depende de la amplitud de las perturbaciones, frecuencia angular y de las propiedades materiales de los líquidos (viscosidades a corte bajo, alto y tiempos de relajación, De Andrade Lima y Rey 2005, 2006).
- e) Para que existan aumentos en los dos sistemas (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared) el líquido analizado debe ser adelgazante al corte, i.e., la función viscosidad debe cambiar por efecto de la rapidez de deformación (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006).
- f) El máximo en las curvas resonantes (eficiencia vs gradiente de presión) está determinado por un acoplamiento de las propiedades viscoelásticas del material. Experimentalmente se demostró que para algunos valores de frecuencia la eficiencia aumenta mientras que para otros decrece (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006).

La investigación de flujos pulsátiles y oscilantes ha tenido gran relevancia en muchas ramas de la ciencia. El estudio del flujo pulsátil es uno de los sistemas más estudiados en la literatura concerniente a las áreas de fenómenos de transporte, reología y en ciencia de polímeros. Ejemplos de este tipo de flujos se pueden encontrar en ciencia de polímeros en el campo de extrusión de plásticos.

1.4 Flujos pulsátiles y oscilantes



El flujo pulsátil es uno de los sistemas más estudiados en la literatura concerniente a las áreas de fenómenos de transporte, reología y en ciencia de polímeros (Bird et al. 1977; Barnes 1969 1971). Actualmente, existen en la literatura de la mecánica del medio continuo dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo es el perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante (Herrera et al. 2009, 2010; Phan-Thien & Dudek 1982a,b; Phan-Thien 1978; Phan-Thien & Fang 1996). La investigación de flujos pulsátiles y oscilantes ha tenido gran relevancia en muchas ramas de la ciencia (Andrade de Lima & Rey 2005, 2006; Barnes et al. 1971). Por ejemplo, en bio-reología, el estudio de la sangre en las venas es importante en la creación de anti-coagulantes que permitan evitar ataques cardíacos (Owens 2006; Moyers-Gonzalez et al. 2009; Moyers-Gonzalez et al. 2008a-c). En este caso, el corazón, actúa como bomba peristáltica mandando pulsos al sistema lo que permite que el flujo volumétrico aumente y se consuma menos energía (Del Rio et al. 1998). En este punto el concepto de permeabilidad dinámica en medios porosos juega un papel muy importante en la descripción del flujo volumétrico pulsátil (Del Rio et al. 1998; Bird et al. 1977).

1.5 Modelos constitutivos reológicos

El estudio de los sistemas de flujo pulsátil y vibrátil ha sido investigado a profundidad con diferentes ecuaciones constitutivas, las cuales describen la naturaleza viscosa, elástica y viscoelástica del material (Barnes et al. 1969, 1971; Bird et al. 1977; Del Rio et al. 1988; de Andrade Lima & Rey 2005, 2006; Herrera-Valencia 2009, 2010; Manero & Mena 1977; Manero et al. 1978; Mena et al. 1979; Phan-Thien & Dudek 1982; Phan-Thien 1978; Phan-Thien & Fang 1996; Sundstrom & Kaufman 1977). Ejemplos de estas ecuaciones constitutivas son: (i) Newton, (ii) Ostwald, (iii) Ellis, (iv) Maxwell, (v) Jeffreys, (vi) Oldroyd B, (vi) Giesekus, (vii) Bautista-Manero-Puig entre otras (Bird et al. 1977; Herrera et al. 2009, 2010). Algunos modelos han sido propuestos para investigar fluidos bio-reológicos como por ejemplo la sangre humana (Moyers Gonzalez et al. 2009, 2008a-c; Moyers-Gonzalez & Owens 2010; Owens 2006). Todas estas ecuaciones reproducen en cierta medida el comportamiento complejo lineal y no

lineal de estos materiales complejos (Ostwald 1925; Bird et al. 1977; Herrera et al. 2009, 2010). Estos modelos constitutivos han sido empleados con el fin de caracterizar la reología y el flujo de estos sistemas complejos los cuales, han sido acoplados con las ecuaciones de transferencia de energía y masa respectivamente.

1.5.1 Ecuaciones constitutivas empleadas en el flujo oscilatorio.

En el estudio de la mecánica del medio continuo, la primera aproximación es suponer que el fluido es newtoniano, es decir que la viscosidad es independiente de la rapidez de deformación, y la dinámica del medio puede ser descrita por las ecuaciones de Navier-Stokes (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974). La segunda aproximación es suponer que los fluidos son no-newtonianos, y que la transferencia de momento y reología pueden ser descritas por un número amplio de ecuaciones constitutivas viscosas o viscoelásticas no lineales (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974). Sin embargo, la mayoría de fluidos que se emplean en la industria y se estudian en biofísica y nuevos materiales poseen componentes elásticos y se encuentran en el régimen de altas deformaciones por lo que son considerados viscoelásticos no lineales (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974; Larson 1999).

Ejemplos de estas ecuaciones reológicas viscosas no lineales son: (i) Ostwald, (ii) Ellis, (iii) Cross, (iv) Yasuda Cross, etc (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974; Larson 1999). En el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones): (i) Maxwell, (ii) Jeffreys, (iii) Burgers, (iv) Maxwell generalizado (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974; Larson 1999). Por último, en el régimen viscoelástico no lineal se tienen los siguientes modelos. (i) Oldroyd B, (ii) Giesekus, (iii) Tanner, (iv) Phan-Thien-Tanner, (v) Bautista Manero Puig, etc (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974; Larson 1999). En la Tabla 1 se presentan algunos de las ecuaciones más empleadas en la descripción reología de los fluidos (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974; Larson 1999). En la tabla 2 se define los símbolos de las variables dinámicas de la tabla 1, así como sus unidades en el sistema MKS y el nombre de las mismas.



Tabla 1. Ecuaciones constitutivas empleadas en la descripción del flujo y la reología en sistemas de flujo pulsátil y vibrátil fluidos no newtonianos en el régimen línea y no lineal respectivamente.

Modelos	Modelos	Modelo Reológico	Función Viscosidad
A Viscoso	Ostwald	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = m \left(\sqrt[2]{\mathbf{D}:\mathbf{D}} \right)^{n-1}$
B Viscoso	Ellis	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{ \boldsymbol{\sigma} }{\sigma_{1/2}} \right)^{\alpha-1}}$
C Viscoso	Carreau	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + (\lambda \Pi_D)^2 \right]^{(1-n)/2}}$
D Viscoso	Hershel-Bulkley	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \frac{\eta_\infty}{\Pi_D} + m (\Pi_D)^{n-1}$
E Viscoelástico Lineal	Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
F Viscoelástico Lineal	Jeffreys	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
G Viscoelástico No-Lineal	Conectiva Superior de Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano
H Viscoelástico No lineal	Oldroyd-B	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta_0 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano

Tabla 2. Definiciones de las variables dinámicas de la tabla 1.

Nombre	Símbolo	Unidades (MKS)	Nombre
Tensor de Esfuerzos	σ	Pa	Pascal
Tensor rapidez de Deformación	\mathbf{D}	s^{-1}	Segundo
Función Viscosidad	$\eta(\Pi_D)$	Pa s	Pascal-segundo
Segundo invariante del tensor rapidez Deformación	Π_D	s^{-1}	Inverso de segundo
Tiempo de relajación de Maxwell	λ_M	S	Segundo
Tiempo de Retardo de Jeffreys	λ_J	S	Segundo
Viscosidades a bajo y alto corte	$\eta_0 \eta_\infty$	Pas	Pascal-segundo
Derivada convectiva superior de Maxwell	∇	1/m	Inverso de metro
Parámetro de consistencia de Otswaeld	K	$Pa s^n$	Pascal segundo a la enésima potencia
Índice del modelo de Ostwaeld o de Ellis	α	1	Adimensional

1.6 Métodos analíticos y numéricos y paquetes computacionales

En las últimas décadas, pocos problemas se han podido resolver con métodos analíticos y ecuaciones constitutivas newtonianas y no-newtonianas respectivamente (Bird et al 1977). La mayoría de los resultados analíticos, asumen estado estacionario y que los procesos convectivos de transferencia de energía por convección es despreciable (Bird et al. 1977). Por otra parte, en el régimen no lineal, se han recurrido a los métodos numéricos basados en: (i) Diferencias finitas, (ii) Galerkin, (iii) Elemento Finito y (iv) Métodos variacionales (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006). Por último, los paquetes comerciales que involucran programas computacionales



basados en métodos variacionales y elemento finito son punto de partida en la descripción física de estos sistemas (COMSOL MULTIPHYSICS; FLOW, CFD, etc).

1.7 Aplicaciones del flujo pulsátil y vibrátil

1.7.1 Anticoagulantes

En Bio-reología un ejemplo clase es el sistema cardiaco que puede ser visualizado como un válvula pulsátil biológica. Por ejemplo, en bio-reología, el estudio de la sangre en las venas es importante en la creación de anticoagulantes que permitan evitar ataques cardiacos. En este caso, el corazón, actúa como bomba peristáltica mandando pulsos al sistema lo que permite que el flujo volumétrico aumente y se consuma menos energía. Por otra parte, el uso de flujos pulsátiles y oscilantes ha sido de gran ayuda en los procesos industriales con líquidos poliméricos (extrusión, inyección, moldeo, etc).

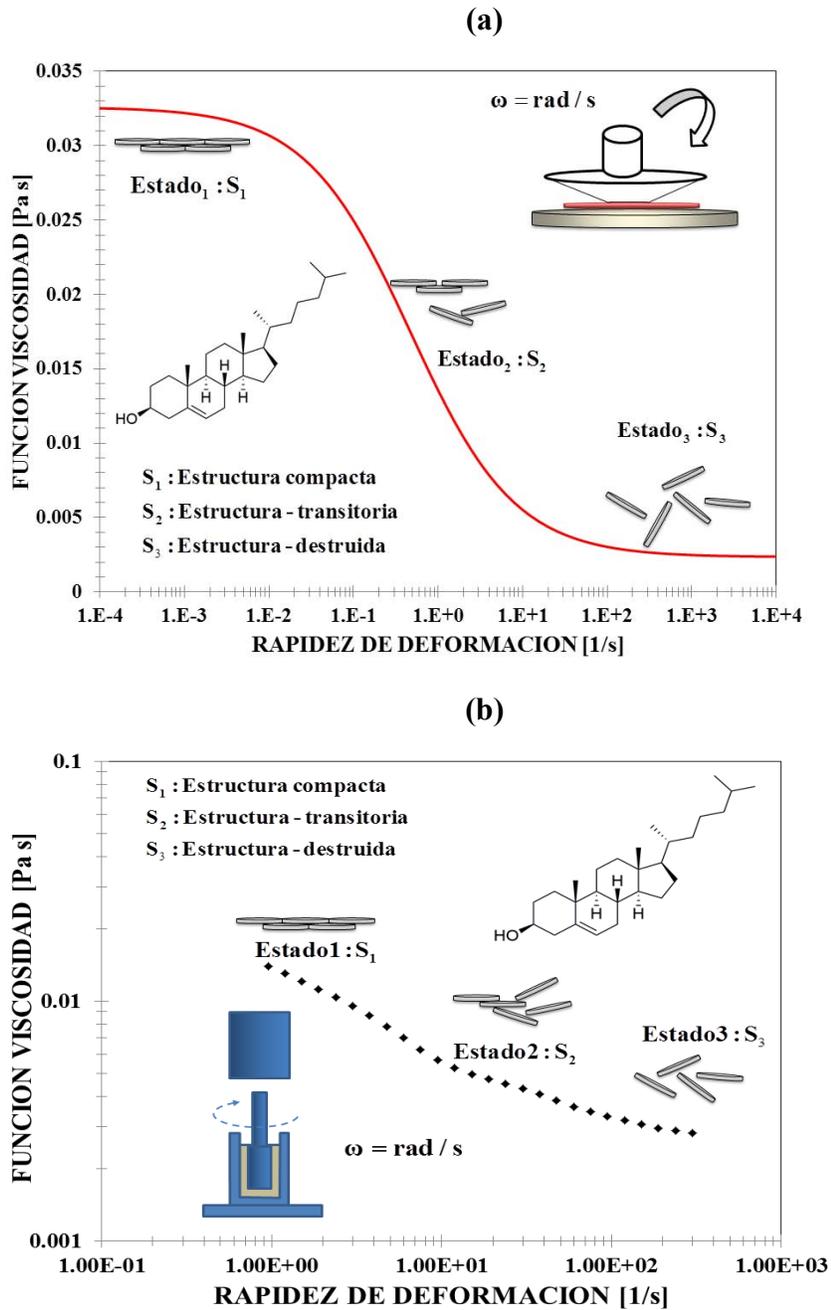


Figura 3. (a) Función viscosidad vs rapidez de deformación de la sangre humana. Fig. (b) Estudio de la sangre con altos contenidos de colesterol.

Nótese que en la Fig. 3(a) se aprecian las tres zona de un reograma a bajas y altas rapidezces de deformación, se observan dos regiones constantes, mientras que a moderados cortes una zona tipo ley de potencia. Mientras que en la Fig. 3 (b) obsérvese que las dos zonas constantes desaparecen y solo queda la zona intermedia tipo ley de potencia.



1.7.2 Súper fibras naturales

Otra impactante manifestación biológica del flujo pulsátil es la que se presenta en la seda producida por las arañas. Este increíble proceso ha sido estudiado ampliamente por los científicos de todo el mundo. El proceso de la formación de la seda de la araña consiste en un líquido viscoelástico que está conformado por 9 proteínas, después de esto, el líquido se transforma en un cristal líquido neumático, es decir una sustancia que presenta fases entre el sólido y el líquido y que bajo fuerzas externas se orientan las partículas materiales. El tercer paso es un gel y por último se deshidrata la sustancia y se obtiene un hilo biológico capaz de superar al polímero sintético más resistente creado por el hombre (Kevlar). Una de las desventajas del Kevlar es que su síntesis se lleva a cabo a temperaturas cercanas a los 450 °C y como solvente ácido sulfúrico, por lo tanto es altamente contaminante. Este hecho por si solo motiva el estudio de estos sistemas oscilantes mediante modelos matemáticos.

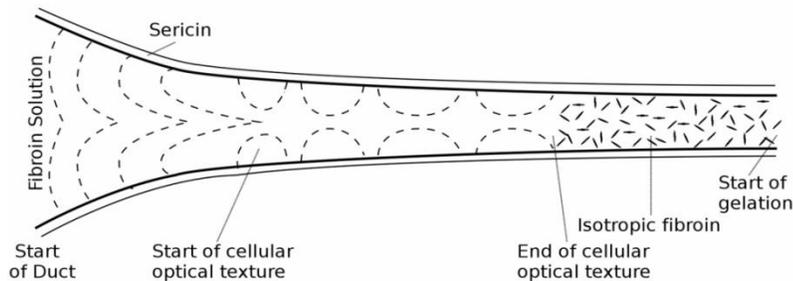


Figura 4. Ducto arácnido en el que se genera el hilo biológico así como las tres secciones que lo contienen.

1.7.3 Células biológicas externas.

Por otra parte, mucho de los mecanismos utilizados en la naturaleza presentan fenómenos de tipo pulsátil u oscilatorio (Aboud-Dakka et al. 2012). Las células cilindricas externas, las cuales son las causantes de amplificar la información en el oído interno, trabajan transformando la energía eléctrica a energía mecánica por medio de un complejo dispositivo, el cual tiene que ver con la naturaleza elástica de la membrana y los líquidos viscoelásticos que entran en contacto con ellas (Aboud-Dakka et al. 2012). Véase la Fig.5.

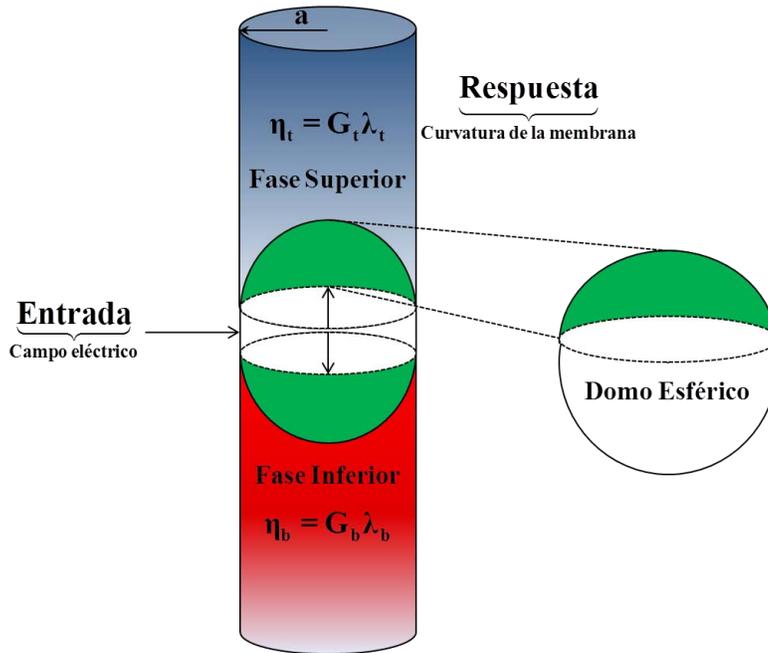


Figura 5. Sistema de flujo estudiado en la descripción de las células ciliadas externas.

Se tienen dos fases viscoelásticas y una membrana flexoeléctrica en la mitad del capilar la cual, es deformable debido a un campo eléctrico. EL efecto oscilante de este sistema induce la amplificación acústica en el sistema.

1.7.4 Liberado de fármacos en micro-canales.

El estudio del liberado de fármacos y la liberación controlada ha causado un gran revuelo en la industria química y la ciencia de la medicina en general. Básicamente, el liberado de fármacos consiste en una fase dispersa que se difunde en un medio continuo, en este caso la fase continua es la sangre con diferentes trastornos alimenticos. Este tipo de sistemas físicos se han estudiado en geometrías de platos paralelos. En la Fig. 6 se muestra un sistema coloidal en el cual, se aplica una diferencia de potencial entre las dos placas por lo que, se induce un corte debido al gradiente de presión y la fuerza eléctrica en el sistema. Las variaciones en el campo eléctrico son de tipo periódico y puede ser representadas por medio de un función exponencial compleja.

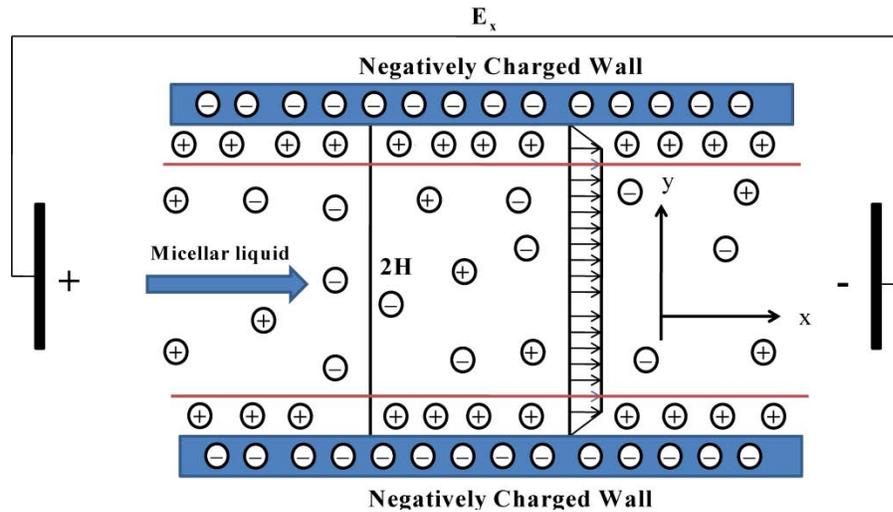


Figura 6. Sistema coloidal en dos placas aplicándole una diferencia de potencial.

1.7.5. Extrusión de polímeros y nanocompuestos con boquillas oscilantes

Algunos ejemplos de este tipo de flujos se pueden encontrar en ciencia de polímeros en el campo de extrusión de plásticos. La modificación de boquillas tradicionales por boquillas oscilantes incrementa la temperatura de bulto del sistema y puede ser utilizada en las propiedades mecánicas de estos sistemas. La teoría de boquillas oscilantes se puede aplicar a procesamiento, ciencia y nano ciencia de polímeros con el fin de calcular la disipación viscosa en la modificación de las boquillas que sirve para los extrusores, así mismo, aumentar las capacidades mecánicas y de procesabilidad sería otra alternativa útil para el procesamiento de nuevos materiales (Herrera et al. 2009; 2010; Casulli et al. 1990; Manero & Mena 1978; Mena et al. 1979). Debido a la creciente crisis de petróleo en México, la extracción de crudo en los yacimientos petroleros es de suma importancia en nuestro presente y futuro. En este campo, los líquidos complejos (sistemas micelares) han sido utilizados en la recuperación de petróleo. La extracción de cantidades adicionales de petróleo puede ser inducida (al ser inyectados) mediante fracturas hidráulicas en la formación de rocas. Recientemente, agentes tensoactivos catiónicos han sido escogidos para los procesos de fractura de rocas en yacimientos de petróleo porque, pueden mejorar las extracciones de cantidades adicionales de petróleo en comparación con los líquidos poliméricos (Schramm LL y Kutay SM 2000).

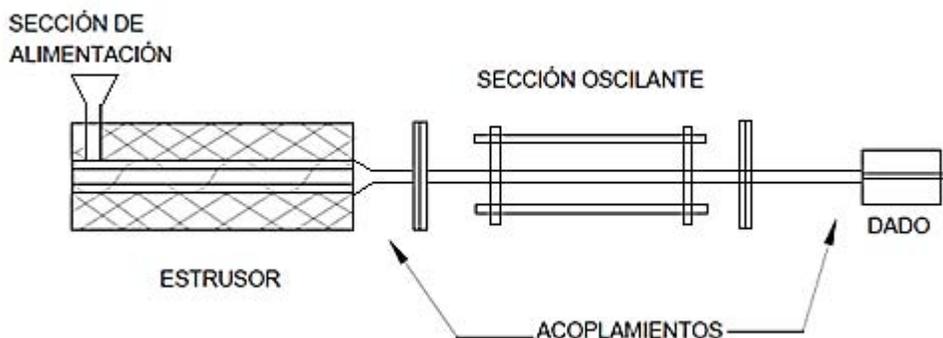


Figura 7. Representación de un extrusor con boquillas oscilantes.

1.8 Motivación y distribución del material

En este capítulo se ha presentado una breve introducción a los flujos pulsátiles y vibrátiles así como su aplicación a fluidos complejos que se estructuran bajo flujo. Se discutieron algunas de las aplicaciones más representativas en las áreas de recuperación de petróleo, extrusión de polímeros, súper-fibras y membranas flexo-eléctricas tipo cristal líquido. Para representar el flujo pulsátil y vibrátil se han utilizados diferentes aproximaciones incluyendo ecuaciones constitutivas reológicas viscosas, viscoelásticas en los regímenes lineal y no lineal respectivamente. La mayoría de las aplicaciones importantes en la industria combina fluidos muy viscosos con elevados gradientes de velocidad.

La fricción entre las capas del fluido induce una degradación mecánica, es decir parte de la energía mecánica se degrada en calor, por lo que es una energía que se degrada. Sin embargo, esta energía puede ser utilizada para aumentar el procesamiento de diferentes materiales o sistemas biológicos que se utilizan para amplificar el sonido o crear estructuras mecánicamente más resistentes que las que ha creado el hombre. En vista de su potencial aplicación en la industria petroquímica, súper-fibras, reo-medicina, ciencia de polímeros, los sistemas de flujo vibrátil y pulsátil o combinación de ellas aplicados a líquidos complejos como son: (i) polímeros, (ii)



cristales líquidos, (iii) sistemas micelares etc., se han convertido en punto de partida de varios grupos de investigación en el mundo.

Por una parte, existen pocos trabajos que se han dedicado a acoplar el transporte de cantidad de movimiento, con el transporte de energía en fluidos no newtonianos.

Precisamente, esta es la razón de esta propuesta de tesis de licenciatura, el estudio de líquidos no-newtonianos en flujo vibrátil y pulsátil para su aplicación a sistemas complejos. El material de este trabajo, está distribuida en el siguiente esquema.

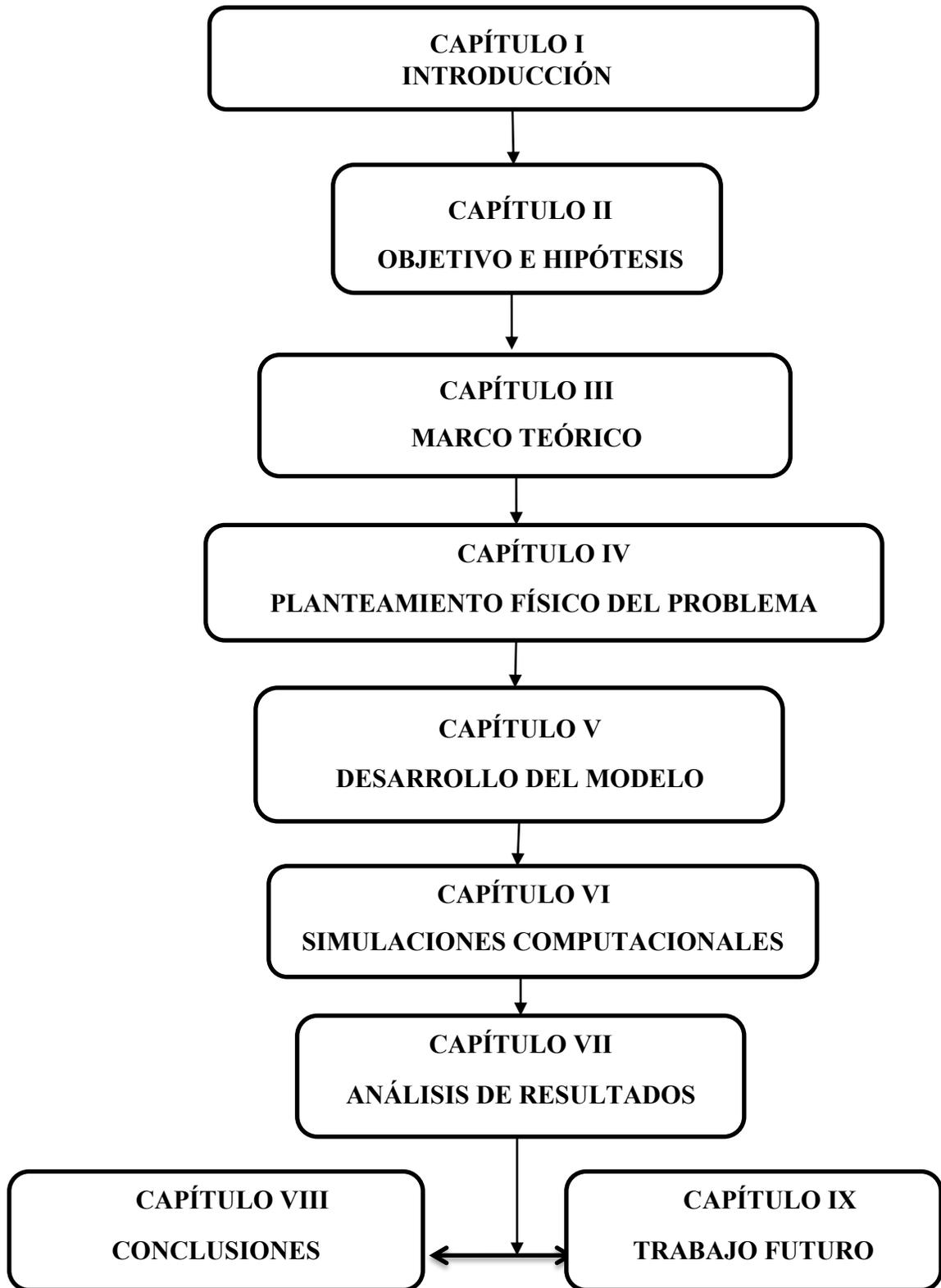


Figura 8. Organización del trabajo desarrollado en la tesis.



CAPÍTULO II

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

2.1 Objetivos

Debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples en flujos pulsátiles, vibrátiles y combinación de ambos, que permitan contrastar las predicciones analíticas y numéricas con las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura. A continuación, se presentan los objetivos generales y particulares.

2.1.1 Objetivo general

Describir el flujo combinado pulsátil y vibrátil de un fluido no newtoniano.

2.1.2 Objetivos particulares

- Acoplar las ecuaciones de movimiento y reología que contiene como casos particulares el modelo newtoniano y el de ley potencia. El modelo no-newtoniano con el que se caracteriza el sistema, es la ecuación constitutiva de Ellis.
- Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que describen la física del sistema y nos permitan analizar casos asintóticos.
- Calcular los perfiles de velocidad, flujo volumétrico, aumento en el flujo volumétrico y fracción de potencia en el sistema.
- Utilizar las predicciones teóricas con datos reométricos extraídos de la literatura para una suspensión coloidal provenientes de la literatura.

2.2 Hipótesis del trabajo

Si se combina un gradiente de presión pulsátil con una perturbación oscilatoria en la pared entonces se tendrá un efecto considerable en el aumento del flujo volumétrico y potencia en función de las propiedades no-newtonianas del sistema de estudio.



CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

3.1 Fluidos complejos

Los fluidos complejos como su nombre lo indica, son aquellos que presentan comportamiento reológicos en estado estacionario y no estacionario, muy interesantes debido a los agentes externos que apliquen en ellos (Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia, 2012a, Rey & Herrera-Valencia 2012b). Algunos ejemplos de fluidos complejos son los sistemas poliméricos, micelares, fluidos biológicos, cristales líquidos, etc. Los polímeros por ejemplo, son sistemas en donde una unidad llamada monómero se repite y que presentan propiedades físicas complejas debido a las interacciones entre sus cadenas y peso molecular (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia). Los sistemas micelares contienen miles o decenas de miles de agentes tenso activos (un tensoactivo es un sistema que abate la tensión superficial de los líquidos) y que contienen una parte hidrofobia y una hidrofilia (Rey & Herrera 2012). Los sistemas micelares dependen de la concentración y dependiendo de esta, pueden pasar de sistema esféricos a cilíndricos por efecto de un agente estos sistemas micelares dependen de la concentración y por agente externo entiéndase una fuerza que se aplica en una área paralela a la fuerza (Rey & Herrera-Valencia 2012a; Rey & Herrera-Valencia 2012b). Dependiendo de la naturaleza de los sistemas complejos, presentan muchos grados de libertad, los cuales pueden describir arreglos dependiendo de la concentración de los mismos. En la Fig. (9) se presentan algunos de los arreglos más comunes en los fluidos complejos en función de la concentración:

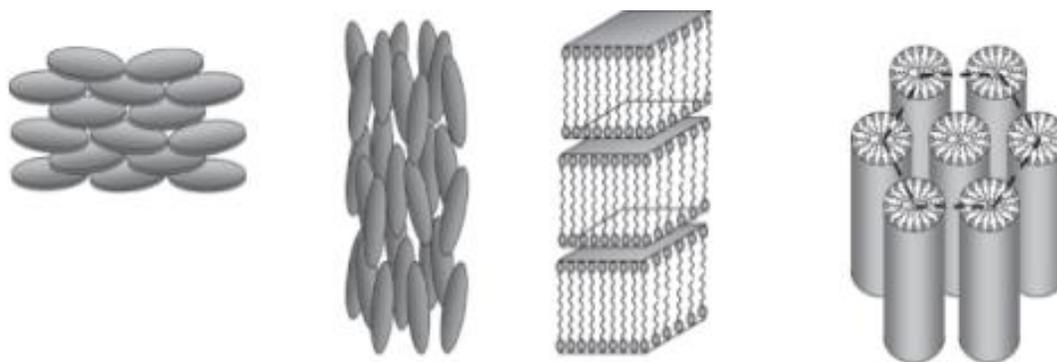


Figura 9. Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de concentración.



3.2 Reología

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke (Bird et al. 1977). Por otra parte, la reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et al. 1977). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material (Bird et al. 1977).

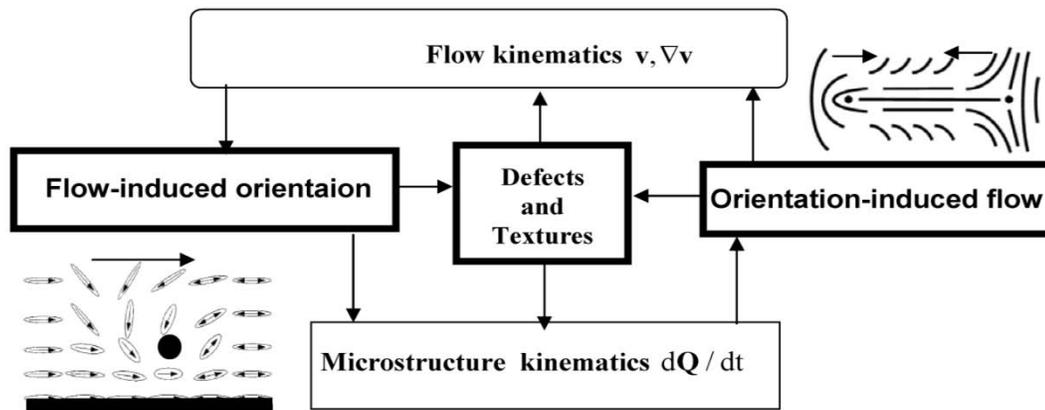


Figura 10. Ilustra la relación entre las propiedades cinemáticas en un fluido complejo.

El flujo induce la orientación y la orientación induce el flujo y ambos están ligados controlados con la microestructura y las propiedades cinemáticas.

Un fluido es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante. La viscosidad μ es una propiedad de transporte, ya que cuantifica la conductividad de cantidad de movimiento a través de un medio conductivo o fluido. Se interpreta como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et al. 1977).

3.3 Tensor de deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable (Bird et al. 1977). El tensor de deformación, es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Es decir, el tensor rapidez de deformación es una matriz 3×3 , la cual describe el estado de deformación del material. Al tomar la derivada temporal de la Ec. (1) se obtiene el tensor gradiente de velocidad, el cual se describe en el siguiente punto.

3.4 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6)$$

El tensor gradiente de velocidad describe físicamente la variación de la velocidad punto por punto en el espacio (Herrera et al. 2009, 2010).



3.5 El tensor rapidez de deformación

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla\mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{V})_S$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla\mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad respectivamente (Bird et al. 2009, 2010).

$$\nabla\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (7)$$

El tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, i.e., $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente nos da información acerca de la rapidez con que es deformado el sistema (Bird et al. 1977).

3.6 El tensor de vorticidad

El tensor de vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Es importante notar, que el tensor de vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo (Bird et al. 1977).

3.7 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación.

El segundo invariante del tensor rapidez de deformación se obtiene tomando el doble producto punto entre los tensores rapidez de deformación. La expresión en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} (\Pi_D)^2 = 2(\mathbf{D} : \mathbf{D}) &= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Es importante destacar que el segundo invariante del tensor rapidez de deformación nos da información física del tipo de flujo en el sistema y sus unidades son inversas de tiempo al cuadrado (Bird et al. 1977).

3.8 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica



del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales (Bird et al. 1977).

3.9 Fluidos newtonianos.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los volúmenes de control al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre (Bird et al. 1977). En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (12)$$

En donde el tensor rapidez de deformación toma la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (13)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (8), el tensor de esfuerzo cortante, σ tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} (parte simétrica del tensor gradiente de velocidad) tiene inverso de segundo respectivamente. Por definición, todos aquellos fluidos que siguen las Ecs. (8, 9) son newtonianos (Bird et al. 1977).

3.10 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son en general, no newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos, no es lineal. Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo. Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple y sencilla de un fluido no newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión y pH (Bird et al. 1977).

3.11 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos. La ecuación más simple es el modelo newtoniano, ya fue explicada en la parte de fluidos newtonianos (Bird et al. 1977). Algunos de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema son:

3.11.1 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia)

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de ley de Potencia o de Ostwald de Waele (Ostwald 1925; Bird et al. 1977) el cual, tiene la siguiente representación matemática:



$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1}\mathbf{D} = 2m(\Pi_D)^{(n-1)/2}\mathbf{D} \quad (14)$$

En donde Π_D es el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, el cual se obtiene tomando el doble producto punto del tensor rapidez de deformación y posterior a eso, su raíz cuadrada. Este modelo contiene dos parámetros de ajuste m y n . El parámetro m es conocido como el índice de consistencia y n es exponente asociado al comportamiento no newtoniano del fluido. Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando $n > 1$ la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrosante al corte). Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de m depende del valor numérico de n , con lo cual valores de m de distintos fluidos no son comparables (Ostwald 1925).

3.11.2 Modelo de Ellis

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a baja rapidez de deformación y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia. Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia (Bird et al. 1977). Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$2\mathbf{D} = v_0\boldsymbol{\sigma} + v_1|\boldsymbol{\sigma}|^{n-1}\boldsymbol{\sigma} \quad (15)$$

3.11.3 Modelo de Carreau

El siguiente modelo, fue propuesto por Carreau para describir toda la curva reológica, es decir a baja, moderada y alta rapidez de deformación respectivamente. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (vi) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido $\{\eta_0, \eta_\infty, \lambda, n\}$ respectivamente (Bird et al. 1977). La expresión matemática que describe el modelo de Carreau es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

$$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left\{1 + \left(\lambda \sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})}\right)^2\right\}^{(n-1)/2}} \quad (16)$$

3.11.4 Modelo de Reiner-Phillipoff

El modelo de Reiner-Phillipoff es un modelo inelástico que contiene tres parámetros de ajuste asociados a las propiedades no-newtonianas del sistema (Bird et al. 1977). Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (iv) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido respectivamente $\{\eta_0, \eta_\infty, \sigma_s\}$. La expresión matemática que describe el modelo de Reiner-Phillipoff es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

$$\eta(|\boldsymbol{\sigma}|) = \eta_0 + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2} \quad (17)$$

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma})}$$



En la Ec. (17) $|\boldsymbol{\sigma}|$ es el valor absoluto del tensor de esfuerzos. Es importante notar que la función viscosidad no depende de la rapidez de deformación, si no del segundo invariante del tensor de esfuerzos (Bird et al. 1977).

3.11.5 Fluido de Bingham

Estos fluidos presentan un comportamiento sólido mientras que el esfuerzo de corte no supere un esfuerzo conocido como de cedencia σ_0 . Por otra parte, una vez superado ese valor puede adoptar un comportamiento newtoniano (Plástico de Bingham). El modelo matemático que describe el plástico de Bingham, se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}| \geq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + 2\eta_0 \mathbf{D} \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (18)$$

En la Ec. (18) η_0 es la viscosidad newtoniana en el sistema (Bird et al. 1977).

3.12 Flujo cortante simple

En esta prueba, la muestra es deformada por medio de un esfuerzo cortante el cual se puede representar por medio de dos placas paralelas en las cuales se aplica una fuerza en dirección del flujo de tal manera que la transferencia de momento se da en la componente ortogonal a la velocidad como se muestra en Fig. 8

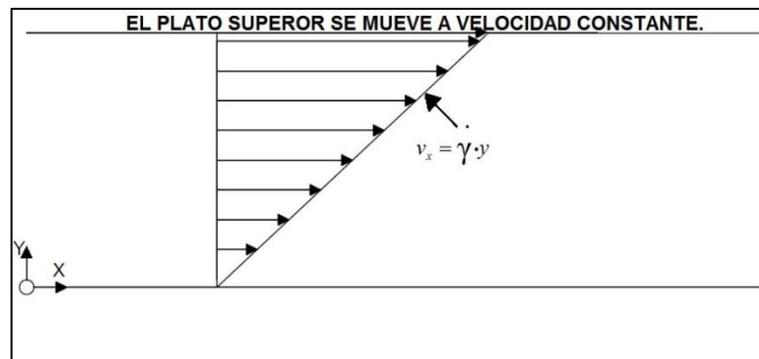


Figura 11. Flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).

El flujo cortante simple se genera cuando una fuerza se aplica en dirección del flujo, por lo que el tensor de esfuerzos solo tiene elementos fuera de la diagonal principal por lo que se puede describir en la forma siguiente (Bird et al. 1977):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Los tensores gradiente de velocidad y su transpuesta se definen como:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

La transpuesta del tensor gradiente de velocidad está dado por:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Por lo tanto el tensor rapidez de deformación toma la forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T = \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$



Finalmente, la ecuación. Constitutiva de Newton toma la siguiente forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

3.12.1 Funciones materiales

Desacoplando las matrices se obtienen las relaciones entre las entradas del tensor de esfuerzos y el tensor rapidez de deformación:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} = \mu \dot{\gamma}_{yx} \\ N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= 0 \\ N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

La primera y segunda diferencia de esfuerzos normales siempre es cero para un fluido newtoniano, por lo que solo tiene sentido hablar de ellas en el régimen viscoelástico no-lineal (Bird et al. 1977).

3.13 Métodos reométricos.

Los tres métodos reométricos más utilizados para la medición de las propiedades de los fluidos complejos son: el de cilindros concéntricos, discos paralelos, cono-plato y de capilar. La viscosidad y las funciones lineales viscoelásticas del material pueden ser determinadas en cualquier de los tres reómetros a geometría de cilindros concéntricos, se hace la prueba al fluido que está entre los dos cilindros concéntricos con un radio interior y exterior diferente, se aplica un torque para hacer rotar los cilindros generando un rango de rotación relativa entre el cilindro interior y exterior (Calderas et al. 2009). Para la obtención de medidas cuantitativas de las propiedades del material, se asume que el fluido es simétrico al eje y puramente circunferencial con efectos finales insignificantes. En el sistema de discos paralelos, la medición del

torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales (Bird et al. 1977). La geometría de cono y plato es utilizado para determinar el coeficiente de corte normal de algunos fluidos. La medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales, asumiendo que los efectos de inercia son insignificantes y la superficie libre es esférica. En el sistema capilar, los fluidos a prueba caen por gravedad, compresión de gas o gracias a un pistón, frecuentemente son utilizados para medir la viscosidad lineal y las propiedades viscoelásticas de los líquidos.

3.14 Sistema coloidal

En la naturaleza abundan las sustancias puras. La mayor parte de las sustancias que manejamos son mezclas, algunas de las cuales denominamos disoluciones. Cuando hablamos de disoluciones nos referimos a sistemas de más de un componente en los que distinguimos un disolvente (normalmente el componente en mayor proporción) y uno o varios solutos. En la mayor parte de los casos el soluto está constituido por moléculas normales, cuyo tamaño suele ser inferior a 1 nm . Si bien los solutos macromoleculares, como proteínas, polisacáridos, polímeros sintéticos, etc., pueden formar también disoluciones verdaderas, estos sistemas, sin embargo, presentan comportamientos específicos que se les considere como un tipo especial de sistemas dispersos o *sistemas coloidales*.

Los sistemas coloidales son sistemas de, al menos, dos fases, una de ellas finamente dividida en pequeñas partículas (fase dispersa, fase discontinua) a las que rodea completamente la otra sustancia (fase dispersante, medio de dispersión, fase continua). Estos sistemas presentan propiedades claramente de carácter coloidal cuando las dimensiones de la fase dispersa se encuentran en el margen de 1 nm a 1000 nm , es decir, entre la millonésima y la mil millonésima parte de metro.

Como ya se ha explicado un coloide es una dispersión de pequeñas partículas en un medio continuo, las cuales cumplen con ciertas características fundamentales:

- Capacidad para dispersar la luz.



- Aparente ausencia de presión osmótica.
- Apariencia nebulosa (turbia).
- Sus partículas no se sedimentan fácilmente.
- Se forman y aparecen en diferentes estados de agregación.

Debido a estas características, se pensó en un principio que estas partículas serían moléculas mucho más grandes que las pequeñas y sencillas (como las del agua o el alcohol y sales simples como el NaCl). Incluso se pensó que eran agregados de muchas moléculas pequeñas unidas en una especie de estado amorfo diferente de los estados cristalinos comunes de otras sustancias. Hoy se conoce que muchos de estos “agregados”. Son, de hecho, moléculas únicas con una masa molecular muy grande. Existen diferentes combinaciones entre sólidos, líquidos y gases que pueden formar coloides, con excepción de las mezclas de gases que no reaccionan (pues forman soluciones verdaderas). El que una mezcla dada forme una solución, una dispersión coloidal, o una suspensión, depende del tamaño de las partículas dispersas, de su miscibilidad y solubilidad.

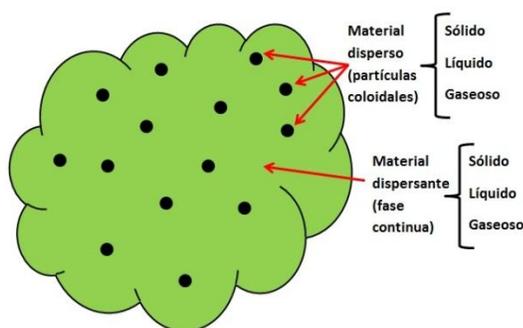


Figura 12. Ilustra la composición de un sistema coloidal.

3.14.1 Clasificación de los coloides

Una manera de clasificar los sistemas coloidales, esto es, de acuerdo con la relación existente entre la fase dispersa y el medio dispersante; así se tienen tres tipos de coloides:

- Coloides liofílicos, o coloides que atraen al solvente (también llamados geles).

- Coloides liofóbicos, o coloides que repelen al solvente (también llamados soles).
- Coloides anfifílicos, o coloides de asociación; poseen propiedades tensoactivas. A bajas concentraciones se encuentra disuelto en el medio.

Tabla 3. Tipos de coloides.

Fase Dispersa	Medio Dispersante	Nombre Común	Ejemplos
Sólido	Sólido	“Solución Sólida”	Hule reforzado, Porcelana, plásticos pigmentados
Líquido	Sólido	Emulsión Sólida o Gel	Queso, mantequilla, jaleas, gelatina
Gas	Sólido	Espuma Sólida	Esponja, espuma, piedra pómez
Sólido	Líquido	Sol	Pudines, Leche de magnesia, pintura, lodo
Líquido	Líquido	Emulsión	Leche, mayonesa, aderezo para ensalada, cremas
Gas	Líquido	Espuma	Crema batida, espuma de la cerveza, espuma de rasurar
Sólido	Gas	Aerosol Sólido	Humo, virus que se transporta por el aire
Líquido	Gas	Aerosol Líquido	Humedad, niebla, nubes

3.14.2 Uso industrial de los coloides

Los sistemas coloidales encuentran usos en numerosas áreas científicas e industriales. En ambos ámbitos se aprovecha la estabilidad de estos sistemas coloidales con el fin de mejorar e incluso encontrar nuevas aplicaciones de determinados materiales, por lo que el estudio de la estabilidad o inestabilidad de los coloides cobra una importancia fundamental. Algunas de las áreas industriales en las que regularmente pueden encontrarse sustancias en estado coloidal se señalan a continuación:



- ❖ Productos químicos: Pinturas, pigmentos, adhesivos, agentes espesantes, lubricantes, catalizadores, emulsiones fotográficas, papel, tintas de impresión, industria de los productos del petróleo etc.
- ❖ Industria farmacéutica: Emulsiones, microemulsiones, cremas, ungüentos, materiales absorbentes, etc.
- ❖ Materiales: Metalurgia, enriquecimiento de minerales, aleaciones, cerámicas, cementos, fibras, plásticos, alquitrán y materiales bituminosos, etc.
- ❖ Productos domésticos: Leche, mantequilla y demás productos lácteos, bebidas, cosméticos, agentes de limpieza, aditivos alimentarios, etc.

3.15 Resumen de los conceptos teóricos y aplicaciones

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura, en general, las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos, la aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: la ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos (Rey & Herrera-Valencia 20012).

En el capítulo IV, modelaremos el flujo combinado pulsátil y vibrátil en un cilindro de radio $r = a$ y longitud $z = L$, por el cual fluye un líquido no newtoniano, caracterizado por una ecuación tipo Ellis. Este modelo acopla el newtoniano y el modelo de ley de potencia. La elección de este modelo, fue debido a su simplicidad en comparación con otros mucho más complejos, además todos las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos.



CAPÍTULO IV

PLANTEAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA



4.1 Planteamiento del problema

En este capítulo se modela el flujo pulsátil en un capilar para un líquido newtoniano (viscosidad constante) y para un líquido no newtoniano (modelo de ley de potencia). En los dos casos, se deducen el perfil de velocidades, flujo volumétrico y el aumento en el flujo y la potencia debido al gradiente de presión pulsátil. Por último, estos resultados nos permitirán comparar con las predicciones del modelo de Ellis. El sistema físico que se analiza en esta sección se describe a continuación. Un líquido con estructura transitoria, fluye en la dirección axial en un cilindro de radio $r = a$ y longitud $z = L$ bajo la acción de un gradiente modificado de presión.

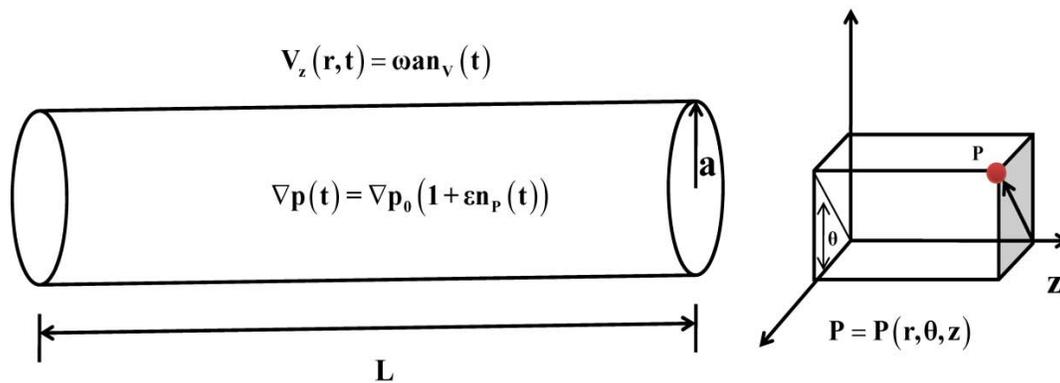


Figura 13. Ilustra un capilar de radio $r = a$ y longitud $z=L$ en donde el fluido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. Del lado derecho, se observa un punto material en coordenadas cilíndricas.

Las condiciones de procesos son mencionadas a continuación:

- Capilar de radio constante $r = a$ y longitud $z = L$.
- Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .
- Proceso isotérmico (temperatura es constante).
- Flujo homogéneo.
- Fluido incompresible (la densidad es constante, i.e. $\rho = \text{constante}$).
- Fluido no-newtoniano viscoelástico.
- Los efectos gravitacionales se desprecian, i.e. $g = 0$.
- El efecto combinado pulsátil y vibrátil es modelado mediante una función estocástica.

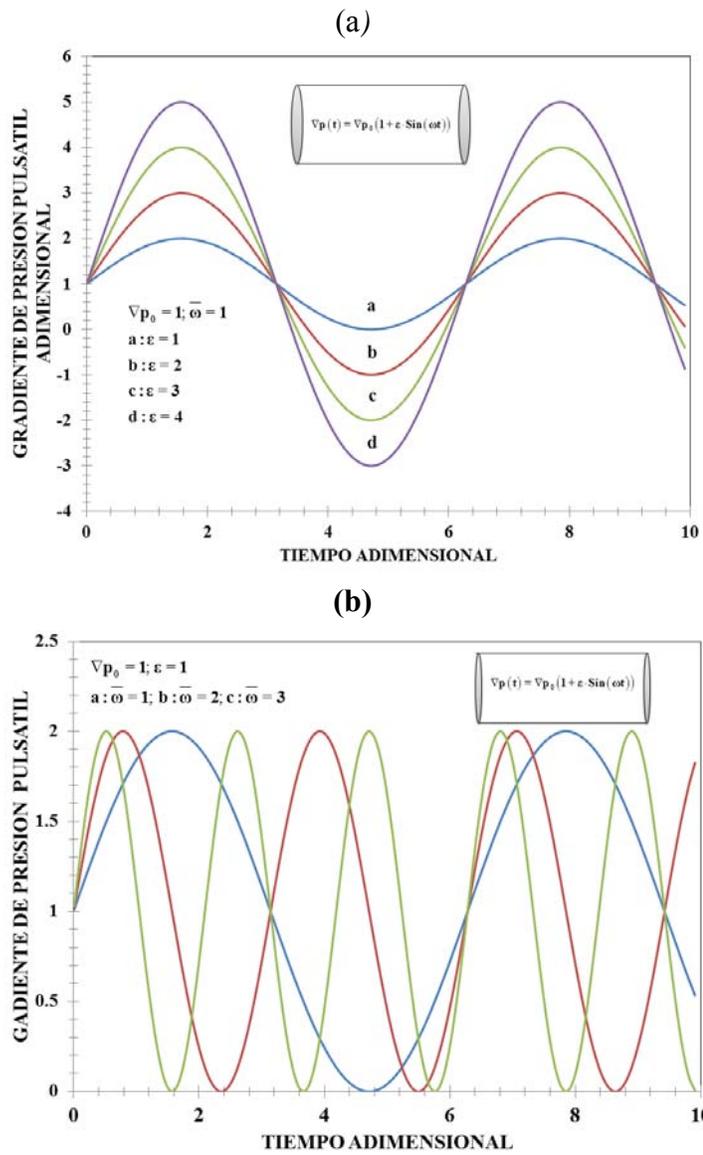


Figura 14. Función asociada al gradiente de presión pulsátil. (a) Efecto de la amplitud de la perturbación, y (b) Efecto de la frecuencia en el gradiente de presión pulsátil



4.2 Modelado

4.2.1 Campo vectorial de velocidades

Vector de velocidad, tensores de gradiente de velocidad, transpuesta del gradiente de velocidad y de tensor de esfuerzos viscoso. Matemáticamente, se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [0, 0, V_z(r, t)] \quad (25)$$

4.2.2 Tensores gradiente de velocidad, rapidez de deformación y de esfuerzos viscosos

El tensor gradiente de velocidad, transpuesta de tensor gradiente de velocidad y tensor de esfuerzo viscosos toman la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (\nabla \mathbf{V})^T = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26a-c)$$

4.2.3 Conservación de masa y momento

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible $D L_{np} / Dt = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

La ecuación de movimiento en forma vectorial toma la forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p (1 + n(t)) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (28)$$

4.2.4 Ecuación constitutiva modelo de Ellis

La ecuación constitutiva para describir nuestro líquido complejo está caracterizado por el modelo de Ellis. La expresión matemática que describe la rapidez de deformación con el esfuerzo cortante

$$2\mathbf{D} = \nu_0 \boldsymbol{\sigma} + \nu_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (29)$$

El modelo de Ellis contiene tres parámetros $\{v_0, v_1, \alpha\}$ los cuales están asociados a la fluidez a rapidez de deformación baja, rapidez de deformación moderada y el exponente alfa que describe la naturaleza adelgazante o engrosante del líquido no-newtoniano. El modelo se puede expresar como una superposición del modelo newtoniano y ley de potencia, es decir:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \underbrace{\dot{\gamma}_{rz}}_{\text{Newtoniano}} + \underbrace{\dot{\gamma}_{rz}}_{\text{Ley de potencia}} = \frac{1}{\eta_0} \sigma_{rz} + \left(\frac{1}{m}\right)^{1/n} (\sigma_{rz})^{1/n} = v_0 \sigma_{rz} + v_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (30)$$

En donde, se han definido las siguientes variables:

$$v_0 = \frac{1}{\eta_0}; v_1 = \left(\frac{1}{m}\right)^\alpha; \alpha = 1/n \quad (31)$$

En particular, el fluido de Ellis fue seleccionado debido a su simplicidad y sencillez matemática con respecto a otros modelos reológicos (Yasuda Cros, Reiner–Phillipoff, etc). Además, todas las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos en estado estacionario y no estacionario respectivamente.

4.2.5 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera que satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de masa, momento y constitutivas, toman la forma:

$$\text{C.F.} : \begin{cases} \mathbf{V}(r = a) = [0, 0, V_z(r = a, t)] = [0, 0, \omega a n(t)] \\ \left. \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

La primera de ellas, está relacionada con la condición de no deslizamiento del líquido en el sólido, y la segunda con la simetría de flujo en el sistema.

4.2.6 Gradiente de presión pulsátil y función estocástica

Para representar el efecto del flujo pulsátil se utiliza una función estocástica $n(t)$ con promedio cero, la expresión matemática puede ser expresada como:



$$\nabla p(t) = \nabla p(1 + n(t)) \quad (33)$$

La función estocástica $n(t)$ representa un ruido en el gradiente de presión pulsátil y matemáticamente puede ser representada por una función estocástica cuyo promedio es cero, i.e., $\langle n(t) \rangle = 0$ y matemáticamente se describe por el teorema del valor medio:

$$\langle n(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} n(t) dt = 0 \quad (34)$$

$$\langle (n(t))^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (n(t))^2 dt = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} (n(t))^2 dt \neq 0 \quad (35)$$

La segunda Ec. (35) implica que el cuadrado de una función con promedio cero es diferente de cero por lo que este hecho será importante en los cálculos posteriores, en los siguientes capítulos. Para ejemplificar esto supongamos que $n(t)$ es una función trigonométrica sinusoidal, i.e.

$$n(t) = M \sin(\omega t) \quad (36)$$

En la Ec. (36) M es la amplitud de las perturbaciones y ω es la frecuencia de la función estocástica. El promedio del cuadrado de la Ec. (36) son calculados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} M \sin(\omega t) dt = M \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(\omega t) dt = M \frac{\Omega}{2\pi} \cos(\omega t) \Big|_0^{2\pi/\Omega} = 0 \\ \langle (n(t))^2 \rangle &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} (M \sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2} M^2 \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} (1 + \cos(2\omega t)) dt = \frac{1}{2} M^2 \end{aligned} \quad (37)$$

4.2.7 Flujo volumétrico

A partir de la definición integral del flujo volumétrico se puede obtener una expresión equivalente en término de la rapidez de deformación (Bird et al. 1988). Integrando por partes la definición general del flujo volumétrico y utilizando la condición de frontera dada por la Ec.(32)

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = \pi a^2 V_z(r=a,t) - \pi \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr = \pi a^2 \omega a n(t) - \pi \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \quad (38)$$

4.2.8 Aumento en el flujo volumétrico y fracción de potencia

El aumento en el flujo se puede calcular como un porcentaje de aumento del flujo perturbado con respecto a aquel sin perturbar (Bird et al. 1988). Por lo que, el porcentaje de aumento en el flujo volumétrico está definido de la siguiente manera:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (39)$$

En la Ec. (39) $\langle Q(t) \rangle$ es el promedio del flujo transitorio y Q_0 es el flujo volumétrico a gradiente de presión constante. De la misma manera, la fracción de energía consumida por efecto del flujo pulsátil es definida por el producto del flujo volumétrico no estacionario y el gradiente de presión pulsátil respectivamente, i.e.

$$E(\%) = 100 \frac{\langle P(t) \rangle - P_0}{P_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p (1+n(t)) \rangle - Q_0 \nabla p}{Q_0 \nabla p} = 100 \frac{\langle Q(t) (1+n(t)) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (40)$$

4.2.9 Ecuaciones escalares desacopladas

Desacoplando las ecuaciones diferenciales se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, que permiten plantear el siguiente problema de valor de frontera:

$$\text{P.F.} \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} (1 + M \sin(\omega t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}(r,t)) \\ \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = v_0 \sigma_{rz}(r,t) + v_1 (\sigma_{rz}(r,t))^a \\ V_z(r=a,t) = \omega a n(t) \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} V_z(r,t) \right|_{r=0} = 0 \end{array} \right. \quad (41)$$

El problema de frontera dado por la Ec. (32) nos permite calcular el flujo volumétrico y la potencia asociada con el flujo pulsátil:



$$I(\%) = \frac{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) dt - \int_0^a \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} r^2 dr}{\int_0^a \frac{V_z(r)}{dr} r^2 dr} \quad (42)$$

$$E(\%) = \frac{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) (1 + M \sin(\omega t)) dt - \int_0^a \frac{dV_z(r)}{dr} r^2 dr}{\int_0^a \frac{dV_z(r)}{dr} r^2 dr} \quad (43)$$

En la siguiente sección, se calculará el perfil de velocidades, velocidad promedio, flujo volumétrico estacionario, flujo volumétrico promedio, flujo volumétrico en estado no estacionario para el modelo de Ellis que contiene como casos particulares a los modelos: (i) newtoniano, (ii) ley de potencia.



CAPÍTULO V

DESARROLLO DEL MODELO



5.1 Fluido Newtoniano

5.1.1 Cálculo de la velocidad axial

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones principales del flujo newtoniano, a partir de las ecuaciones generales. La componente r_z de la Ec. de movimiento:

$$\dot{\gamma}_{rz} = v_0 \sigma_{rz} \quad (44)$$

La componente z de la Ec. de Movimiento, toma la forma:

$$\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (45)$$

Con el fin de resolver, la Ec. (45) se hace la siguiente suposición para la velocidad axial:

$$V_z(r,t) = V_0(r) + V(t) = V_0(r) + \omega a n(t) \quad (46)$$

La Ec. (46) se puede descomponer en una parte estacionaria y otra no estacionaria respectivamente. Sustituyendo la Ec. (46) en (45) e integrando con respecto a r , se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = \rho \omega a \dot{n}(t) + \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) \quad (47)$$

Integrando la Ec. (47), obtenemos lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \quad (48)$$

La ecuación anterior se sustituye en el modelo de Ellis:

$$\frac{dV_z}{dr} = v_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \right] \quad (49)$$

Integrando se obtiene la solución general:

$$V_z(r,t) = v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r^2 \right] + C \quad (50)$$

Condición a la frontera

$$V_z(r=a,t) = (\omega a) n(t) \quad (51)$$

Sustituyendo condición a la frontera:

$$(\omega a)n(t) = v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a^2 \right] + C \quad (52)$$

De la ecuación anterior se despeja para encontrar el valor de “C”:

$$C = (\omega a)n(t) - v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a^2 \right] \quad (53)$$

Sustituyendo el valor de “C” en solución general y factorizando se obtiene el perfil de velocidad:

$$V_z(r,t) = (\omega a)n(t) - \frac{av_0}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (54)$$

5.1.2 Cálculo del flujo volumétrico transitorio

La Ec. (54) anterior representa el perfil de velocidades para el sistema de flujo newtoniano. La expresión general para el flujo está determinada por la siguiente expresión matemática:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta \quad (55)$$

Integrando con respecto al ángulo resulta:

$$Q(t) = 2\pi \int_0^a V_z(r,t) r dr \quad (56)$$

Utilizando el siguiente cambio de variable

$$r^* = r/a \quad Q(t) = 2\pi a^2 \int_0^1 V_z(r^*,t) r^* dr^* \quad (57)$$

Sustituyendo el perfil de velocidades, en el flujo volumétrico:

$$\frac{Q(t)}{2\pi a^2} = \frac{1}{2} (\omega a)n(t) - \frac{av_0}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) \frac{1}{4} \quad (58)$$

Por lo tanto, el perfil de velocidades es el siguiente:



$$Q(t) = \pi a^2 \left\{ (\omega a) n(t) - \frac{a v_0}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) \right\} \quad (59)$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión para el flujo volumétrico:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) \quad (60)$$

En término del esfuerzo en la pared, el flujo volumétrico, puede ser expresado como:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a (1+n(t)) + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) a \right) \quad (61)$$

El esfuerzo en la pared, fue calculado por:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) \quad (62)$$

5.1.3 Cálculo del flujo volumétrico promedio

Para tomar, el promedio se debe de desarrollar el teorema del binomio:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) \quad (63)$$

Tomando el promedio del flujo volumétrico, se tiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \rangle = \pi a^3 \omega \langle n(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + \langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \dot{n}(t) \right\rangle \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) \quad (64)$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \rangle = - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \quad (65)$$

5.1.4 Cálculo del aumento en el flujo volumétrico:

El aumento en el flujo volumétrico, puede ser definido como:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (66)$$

Sustituyendo en la ecuación (66) se tiene lo siguiente:

$$I(\%) = 100 \frac{\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w}{\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w} = 0 \quad (67)$$

De acuerdo a la ecuación anterior podemos notar que en un fluido newtoniano no existe un aumento en el flujo.

5.1.5 Cálculo de la fracción de potencia

En esta sección se calcula la fracción de potencia de acuerdo a la ecuación (68):

$$P(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p(t) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p_0 (1+n(t)) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} \quad (68)$$

Finalmente la fracción de potencia consumida, toma la forma:

$$P(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) (1+n(t)) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (69)$$

Multiplicando el flujo pulsátil por el gradiente de presión se tiene lo siguiente:

$$Q(t) \nabla p(t) = \pi a^3 \omega n(t) (1+n(t)) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t))^2 + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) (1+n(t)) \right) a \quad (70)$$

Al tomar el promedio, de la contribución transitoria se tiene la siguiente expresión:

$$Q(t) \nabla p(t) = \pi a^3 \omega n(t) + \pi a^3 \omega n^2(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left((1+2n(t)+n^2(t)) + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \left(\dot{n}(t) + \dot{n}(t)n(t) \right) \right) \quad (71)$$

Desarrollando la expresión se obtiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \nabla p(t) \rangle = \pi a^3 \omega \langle n(t) \rangle + \pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left((1+2\langle n(t) \rangle + \langle n^2(t) \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \left(\langle \dot{n}(t) \rangle + \langle \dot{n}(t)n(t) \rangle \right) \right) \quad (72)$$



Simplificando la Ec. (72)

$$\langle Q(t) \nabla p(t) \rangle = \pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + \langle n^2(t) \rangle \right) \quad (73)$$

Sustituyendo en la expresión para la potencia, obtenemos:

$$P(\%) = 100 \frac{\pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + \langle n^2(t) \rangle \right) - \left\{ -\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \right\}}{-\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w} \quad (74)$$

Simplificando la Ec. (74)

$$P(\%) = 100 \frac{\omega \langle n^2(t) \rangle + \frac{v_0}{4} \sigma_w \langle n^2(t) \rangle}{\frac{v_0}{4} \sigma_w} \quad (75)$$

Finalmente sustituyendo la función estocástica:

$$P(\%) = 50M^2 \frac{\omega + \frac{v_0}{4} \sigma_w}{\frac{v_0}{4} \sigma_w} \quad (76)$$

Es evidente que el aumento en un fluido newtoniano es cero no importa cómo se perturbe, pero la potencia consumida siempre es diferente de cero, no importa la naturaleza del fluido y la ecuación constitutiva con la que se caracterice.

5.2 Fluido no newtoniano: Modelo de Ellis

En la siguiente sección se presentan los resultados para un fluido no newtoniano caracterizado por el modelo de Ellis, el cual acopla el newtoniano con el modelo de ley de potencia. Las ecuaciones desarrolladas en esta sección sirven como casos límites para resultados más generales.

5.2.1 Cálculo de la velocidad axial

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones principales del flujo combinado, en particular nuestro esfuerzo se centrará en deducir ecuaciones analíticas para el aumento en el flujo y la fracción de potencia utilizada por el flujo combinado. La componente r_z de la Ec. de movimiento:

$$\dot{\gamma}_{rz} = v_0 \sigma_{rz} + v_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (77)$$

La componente z de la Ec. de Movimiento, toma la forma:

$$\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (78)$$

Con el fin de resolver, la Ec. (78) se hace la siguiente suposición para la velocidad axial:

$$V_z(r,t) = V_0(r) + V(t) = V_0(r) + \omega a n(t) \quad (79)$$

La Ec. (79) se puede descomponer en una parte estacionaria y otra no estacionaria respectivamente. Sustituyendo la Ec. (79) en (78) e integrando con respecto a r , obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = \rho \omega a \dot{n}(t) + \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) \quad (80)$$

Integrando la Ec. (81), se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r + C_2(t) \quad (81)$$



En la Ec. (81) C_1 es un constante que depende del tiempo. La constante $C_2(t)$ se evalúa con la condición de frontera en $r = 0$ y $\sigma_{rz} = 0$, por lo que la constante $C_1(t) = 0$. Combinando la Ec. (81) con la Ec. (77) del modelo de Ellis. Si se sustituye la componente rz del esfuerzo (Ec. 81) en la Ec. (77) obtenemos, la rapidez de deformación en el sistema:

$$\frac{dV_z}{dr} = v_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \right] + v_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \right]^\alpha \quad (82)$$

Integrando obtenemos la solución general:

$$V_z(r,t) = v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r^2 \right] + v_1 \frac{1}{\alpha+1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) r \right]^\alpha + C \quad (83)$$

Donde la condición a la frontera es:

$$V_z(r=a,t) = (\omega a) n(t) \quad (84)$$

Sustituyendo la condición anterior en ecuación (83):

$$(\omega a) n(t) = v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a^2 \right] + v_1 \frac{1}{\alpha+1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right]^\alpha + C \quad (85)$$

De la ecuación anterior se despejamos "C":

$$C = (\omega a) n(t) - v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a^2 \right] + v_1 \frac{1}{\alpha+1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right]^\alpha \quad (86)$$

Sustituyendo el valor de "C" en solución general y factorizando obtenemos el perfil de velocidad:

$$V_z(r,t) = (\omega a) n(t) - \frac{av_0}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) - \frac{av_1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (87)$$

5.2.2 Cálculo del flujo volumétrico transitorio y promediado

La ecuación (87) representa el perfil de velocidades para el sistema de flujo combinado. La expresión general para el flujo está determinada por la siguiente expresión matemática:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta \quad (87)$$

Integrando con respecto al ángulo resulta:

$$Q(t) = 2\pi \int_0^a V_z(r,t) r dr \quad (89)$$

Para simplificar la integración se utiliza el siguiente cambio de variable $r^* = r/a$, la Ec. (89) toma la forma:

$$\frac{Q(t)}{2\pi a^2} = \int_0^1 V_z(r^*,t) r^* dr^* \quad (90)$$

Al sustituir el perfil de velocidades, en el flujo volumétrico obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{2\pi a^2} &= \frac{1}{2}(\omega a) n(t) - \frac{av_0}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) \frac{1}{4} \\ &- \frac{av_1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right]^\alpha \frac{1}{\alpha+3} \end{aligned} \quad (91)$$

Simplificando el perfil de velocidades para el flujo combinado se obtiene lo siguiente:

$$Q(t) = \pi a^2 \left\{ (\omega a) n(t) - \frac{av_0}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) - \frac{av_1}{\alpha+3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right]^\alpha \right\} \quad (92)$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión para el flujo volumétrico:



$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \rho \omega a \dot{n}(t) \right) a \right)^\alpha \quad (93)$$

En término del esfuerzo en la pared, el flujo volumétrico puede ser expresado como:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a (1+n(t)) + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) a \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a (1+n(t)) + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t) a \right)^\alpha \quad (94)$$

El esfuerzo en la pared, fue calculado por:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(1 + n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^\alpha \quad (95)$$

5.2.3 Flujo volumétrico transitorio promediado

Se debe de desarrollar el teorema del binomio para tomar el promedio:

$$Q(t) = \pi a^3 \omega n(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(1 + \alpha \left(n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \left(n(t) + \frac{1}{2} \dot{n}(t) \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 + \dots \right)^\alpha \quad (96)$$

Tomando el promedio del flujo volumétrico obtenemos:

$$\langle Q(t) \rangle = \pi a^3 \omega \langle n(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + \langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \dot{n}(t) \right\rangle \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(1 + \alpha \left(\langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \dot{n}(t) \right\rangle \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right) + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \left(\langle n^2(t) \rangle + \left\langle n(t) \dot{n}(t) \right\rangle \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} + \frac{1}{4} \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle \left(\frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 \right) + \dots \right)^\alpha \quad (97)$$

Simplificando la ecuación anterior se tiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \alpha (\alpha-1) \left(\langle n^2(t) \rangle + \frac{1}{4} \sigma_w^{-2} \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle (\rho(\omega a) a)^2 \right) + \dots \right) \quad (98)$$

5.2.4 Cálculo del aumento en el flujo volumétrico:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 100 \frac{\frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(\frac{1}{2} \alpha (\alpha-1) \left(\langle n^2(t) \rangle + \frac{1}{4} \sigma_w^{-2} \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle (\rho(\omega a) a)^2 \right) \right)}{-\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} \quad (99)$$

Para obtener una expresión analítica suponemos que la función estocástica, es descrita por medio de una función trigonométrica simple, i.e.:

$$\begin{aligned} \langle n^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt = \frac{1}{2} M^2 \\ \left\langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\dot{n}(t) \right)^2 dt = \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (100)$$

Al sustituir las funciones estocásticas en el aumento del flujo obtenemos:

$$I(\%) = 25M^2 \frac{\frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha \left(\frac{1}{2} \alpha (\alpha-1) \left(\frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{4} \sigma_w^{-2} \left(\frac{1}{2} M^2 \omega^2 \right) (\rho(\omega a) a)^2 \right) \right)}{\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w + \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} \quad (101)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$I(\%) = 25M^2 \alpha (\alpha-1) \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} \left(1 + \frac{1}{4} \sigma_w^{-2} \omega^2 (\rho(\omega a) a)^2 \right) \quad (102)$$



Es importante resaltar que el flujo volumétrico puede ser descompuesto en dos contribuciones: La primera de ellas asociada con el flujo pulsátil y la segunda de ellas al flujo vibrátil como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\%) &= \mathbf{I}_p(\%) + \mathbf{I}_v(\%) \\ &= 25M^2\alpha(\alpha-1) \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} + 25M^2\alpha(\alpha-1) \frac{\frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} \sigma_w^\alpha} \left(\frac{\omega(\rho(\omega a) a)}{2\sigma_w} \right)^2 \end{aligned} \quad (103)$$

5.2.5 Cálculo de la fracción de Potencia

En esta sección se calcula la fracción de potencia utilizada en la combinación del flujo pulsátil y vibrátil respectivamente:

$$P(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p(t) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p_0 (1+n(t)) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} \quad (104)$$

Finalmente la fracción de potencia consumida, toma la forma:

$$P(\%) = 100 \frac{\langle Q(t)(1+n(t)) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (105)$$

Multiplicando el flujo pulsátil por el gradiente de presión obtenemos:

$$\begin{aligned} Q(t) \nabla p(t) &= \pi a^3 \omega n(t)(1+n(t)) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t))^2 + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t)(1+n(t)) \right) a \\ &\quad - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a(1+n(t)) + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t)a \right)^\alpha (1+n(t)) \end{aligned} \quad (106)$$

Al tomar el promedio y al simplificar la expresión tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \nabla p(t) \rangle &= \pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w (1 + \langle n^2(t) \rangle) \\ &- \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha + 3} \sigma_w \left(1 + \alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(\langle n^2(t) \rangle + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 \langle (\dot{n}(t))^2 \rangle \right) \right) \end{aligned} \quad (107)$$

Sustituyendo en la expresión para la potencia, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(\%) &= 100 \\ &\left\{ \frac{\pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle + \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \langle 1 + n^2(t) \rangle + \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha \left\langle \left(1 + \alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(n^2(t) + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho \omega a a}{\sigma_w} \right)^2 (\dot{n}(t))^2 \right) \right) \right\rangle}{-\left(\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w + \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha \right)} \right\} \\ &\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w + \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha \end{aligned} \quad (108)$$

Al simplificar las expresiones, obtenemos:

$$\begin{aligned} P(\%) &= 100 \frac{\omega \langle n^2(t) \rangle + \frac{v_0}{4} \sigma_w \langle n^2(t) \rangle + \frac{v_1}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha \left\langle \left(\alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(n^2(t) + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho \omega a a}{\sigma_w} \right)^2 (\dot{n}(t))^2 \right) \right) \right\rangle}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha} \end{aligned} \quad (109)$$

Finalmente sustituyendo la función estocástica, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(\%) &= 50M^2 \frac{\omega + \frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha \left\langle \left(\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(1 + \omega^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\rho \omega a a}{\sigma_w} \right)^2 \right) \right) \right\rangle}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha + 3} (\sigma_w)^\alpha} \end{aligned} \quad (110)$$



CAPÍTULO VI

VARIABLES Y ECUACIONES

ADIMENSIONALES

6.1 Variables adimensionales

En esta sección, se presentan las variables adimensionales que nos facilitaran las simulaciones y la descripción de los mecanismos que domina el sistema a través de los grupos adimensionales. En la siguiente tabla se presentan las variables características más importantes del presenta análisis: Las variables escaladas son: (i) la coordenada radial, (ii) el esfuerzo cortante, (iii) la variable temporal t, (iv), la velocidad axial, (v) el flujo volumétrico y (vi) la frecuencia de las oscilaciones.

Tabla 4. Variables dimensionales y adimensionales empleadas en el escalamiento de las ecuaciones analíticas deducidas en el capítulo anterior.

	Variable dimensional	Variable Característica	Variable adimensional
Coordenada radial [m]	r	$rc = a$	$r^* = \frac{r}{rc}$
Esfuerzo cortante rz [Pa]	σ_{rz}	$\sigma_c = \alpha^{-1} \sqrt{\frac{v_0}{v_1}}$	$\sigma_w^* = \frac{\sigma_w}{\sigma_c}$
Variable temporal [s]	t	$tc = 1/v_0\sigma_c$	$t^* = \frac{t}{tc}$
Velocidad axial [m/s]	$V_z(r,t)$	$V_c = a v_0 \sigma_c$	$V_z^* = \frac{V_z}{V_c}$
Flujo volumétrico [m ³ /s]	Q	$Q_c = a^3 v_0 \sigma_c$	$Q^* = \frac{Q}{Q_c}$
Frecuencia angular [rad/s]	ω	$\omega_c = (1/tc) = v_0 \sigma_c$	$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}$

Es importante destacar que la variable característica radial es el radio del tubo, el esfuerzo característico combina la fluidez a bajo y moderado corte respectiva-



mente. El tiempo característico es el producto de la fluidez a bajo corte y el esfuerzo característico. La velocidad axial característica del sistema es el producto del radio del tubo con el tiempo característico asociado a las propiedades no newtonianas. El flujo volumétrico involucra el cubo del radio del capilar multiplicado por la frecuencia característica. Finalmente, la frecuencia se hace adimensional con el inversor el tiempo característico.

En la siguiente tabla se presentan las unidades de las variables características involucradas:

Tabla 5. Variables características utilizadas en la variables dimensionales.

Nombre	Variable Característica	Nombre	Unidades (MKS)
Variable geométrica	A	Radio del capilar	m
Propiedad reológica del fluido	φ_0	Fluidez a corte bajo	1/Pa s
Propiedad reológica del material	φ_1	Fluidez generalizada ó a intermedios cortes	1/Pa s ⁿ
Propiedad reológica del material	α	Fluidez generalizada ó a intermedios cortes	1/Pas ⁿ

Es importante destacar que el conjunto de variables adimensionales, nos permiten:

- a) Escalar las variables
- b) Simplificar las simulaciones computacionales
- c) Aparecen grupos adimensionales que engloban los mecanismos más importantes en el sistema.

A continuación se presentan las ecuaciones adimensionales, que son punto de partida en los cálculos posteriores.

6.2. Ecuaciones adimensionales

a) Función viscosidad adimensional:

$$\eta^*(\sigma_w^*, \alpha) = \frac{1}{1 + \sigma_w^{*\alpha-1}}$$

b) Ecuación velocidad adimensional

$$Vz^*(r^*, t^*, \omega^*) = M\omega^* \text{Sen}(\omega^* t^*) - \frac{1}{2} \left[\sigma_w^* (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*)) + \frac{1}{2} M \text{Re} \omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*) \right] (1-r^{*2}) - \frac{1}{(\alpha+1)} \left(\sigma_w^* (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*)) + \frac{1}{2} M \text{Re} \omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*) \right)^\alpha (1-r^{*\alpha+1})$$

c) Flujo volumétrico transitorio adimensional

$$Q^*(t^*, \omega^*) = M\omega^* \text{Sen}(\omega^* t^*) + \frac{1}{4} \left(\sigma_w^* (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*)) + \frac{1}{2} M \text{Re} (\omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*)) \right) + \frac{1}{(\alpha+3)} \left(\sigma_w^* (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*)) + \frac{1}{2} M \text{Re} (\omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*)) \right)^\alpha$$

d) Promedio temporal del Flujo Volumétrico Adimensional

$$\langle Q^*(t^*) \rangle = \frac{1}{4} \sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha+3)} \left\{ (\sigma_w^*)^\alpha + \frac{1}{4} M^2 \alpha (\alpha-1) (\omega^* \text{Re})^2 (\sigma_w^*)^{\alpha-2} \right\}$$

e) Aumento en el flujo volumétrico adimensional:

$$I(\%) = I_p(\%) + I_v(\%)$$

f) Aumento en el flujo volumétrico pulsátil:

$$I_p(\%) = 25M^2 \alpha (\alpha-1) \frac{\frac{1}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^\alpha}{\frac{1}{4} (\sigma_w^*) + \frac{1}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^\alpha}$$

a) Aumento en el flujo volumétrico vibrátil:



$$I_v (\%) = 25M^2 \alpha (\alpha - 1) \frac{\frac{1}{\alpha + 3} (\sigma_w^*)^\alpha}{\frac{1}{4} (\sigma_w^*) + \frac{1}{\alpha + 3} (\sigma_w^*)^\alpha} \left(\frac{\omega^* \text{Re}}{2\sigma_w^*} \right)^2$$

g) Fracción de potencia utilizada:

$$P(\%) = 50M^2 \frac{\omega^* + \frac{1}{4} \sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha + 3)} (\sigma_w^*)^\alpha \left(\alpha + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \frac{\text{Re} \omega^*}{\sigma_w^*} \right)^2 \right) \right)}{\frac{1}{4} \sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha + 3)} (\sigma_w^*)^\alpha}$$

6.3 Números adimensionales

Al introducir las variables adimensionales en las ecuaciones desacopladas se obtienen dos números adimensionales los cuales describen los mecanismos globales en el sistema. El número adimensional que caracteriza a este sistema de flujo vibrátil es el número adimensional del Reynolds Re.

$$\text{Re} = \frac{\rho(\omega a)a}{\eta_0} = \frac{\text{Mecanismos-inerciales}}{\text{Mecanismos-viscosos}} = \begin{cases} \text{Re} \gg 1; \text{ Fuerzas inerciales} \gg \text{ Fuerzas viscosa} \\ \text{Re} = 1; \text{ Fuerzas inerciales} = \text{ Fuerzas viscosas} \\ \text{Re} \ll 1; \text{ Fuerzas inerciales} \ll \text{ Fuerzas viscosas} \end{cases}$$

El número de Reynolds nos da información acerca del tipo de flujo que se está analizando:

$$\text{Re} = \frac{\rho(\omega a)a}{\eta_0} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re} \ll 2100; & \text{Flujo laminar} \\ 2100 \ll \text{Re} \ll 10000; & \text{Flujo transitorio} \\ \text{Re} \gg 10000; & \text{Flujo turbulento} \end{cases}$$

Es importante destacar, que se ha definido la velocidad característica del sistema como $V = \omega a$; y el radio del capilar como la longitud característica respectivamente.



CAPÍTULO VII

SIMULACIONES COMPUTACIONALES



En este capítulo se presentan las simulaciones computacionales de las ecuaciones adimensionales expuestas en el capítulo anterior. Los resultados se enfocaron principalmente en: (i) función viscosidad, (ii) velocidad axial, (iii) flujo volumétrico, (iv) aumento en el flujo y (vi) aumento en la potencia. Las simulaciones computacionales fueron realizadas en Mathematica 9.0 y exportadas a una hoja de cálculo para su posterior visualización.

7.1 Función viscosidad

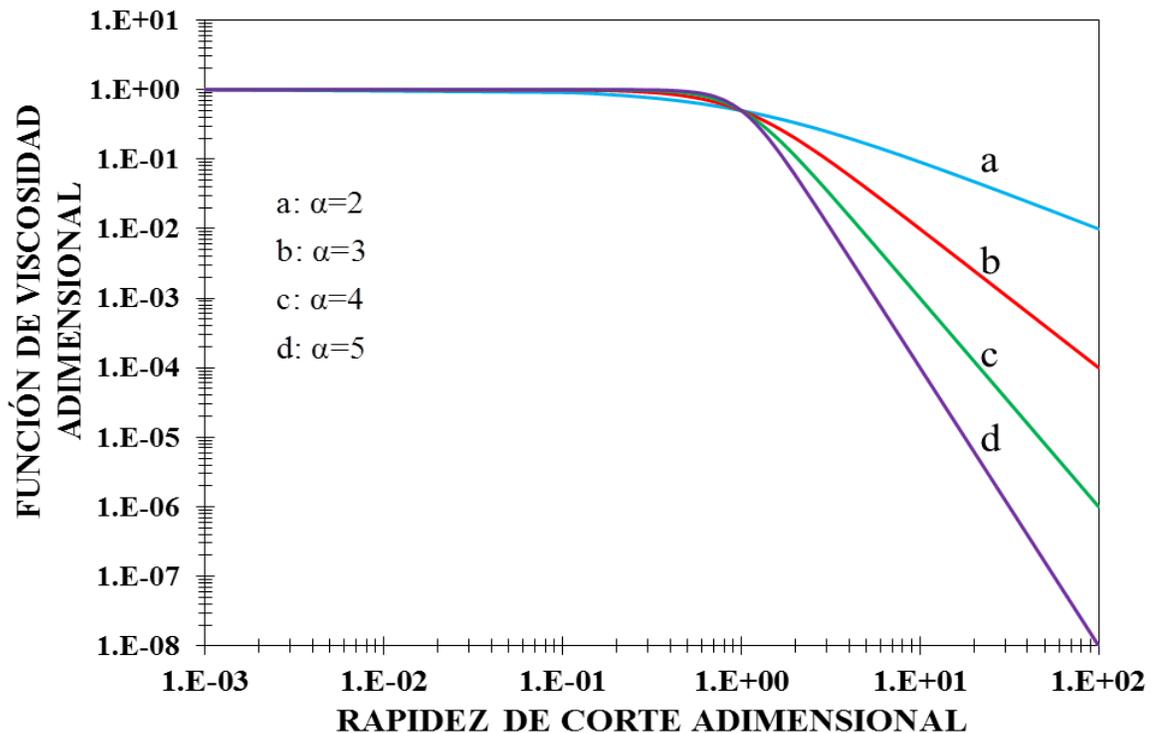


Figura 15. Función viscosidad adimensional vs rapidez de corte adimensional en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.

En la Fig. 15 se observa la viscosidad cortante adimensional η en función de la rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{zr}$ para diferentes valores del exponente alfa α . A valores bajos de rapidez de deformación, i.e. $\dot{\gamma}_{zr} \ll 1$, el sistema presenta una meseta en donde la viscosidad es independiente de la rapidez de deformación respectivamente, la cual es conocida como primera zona newtoniana. A un valor crítico de rapidez de corte adimensional $\left(\dot{\gamma}_{zr}\right)_C$, el fluido presenta un comportamiento monótono decreciente a moderados cortes, i.e. la derivada de la viscosidad como función de la rapi-

dez de deformación es negativa $d\eta/d\dot{\gamma} < 0$. Físicamente, al aumentar el valor del exponente alfa el fluido es más adelgazante al corte lo que implica, que el sistema pasa de estados de mayor estructura a menor estructura bajo flujo respectivamente. Nótese los siguientes puntos importantes:

- A) La pendiente aumenta conforme el fluido se hace más adelgazante
- B) El máximo valor de la velocidad se obtiene en el centro del tubo y este, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades no newtonianas del sistema y la fuerza motriz asociada al esfuerzo en la pared.
- C) Sera demostrado en las simulaciones del aumento en el flujo, que las propiedades adelgazantes están acopladas con el aumento en el flujo y estas son el motor para el cambio en el flujo volumétrico debido al flujo combinado.

7.2 Perfil de velocidad sin perturbación

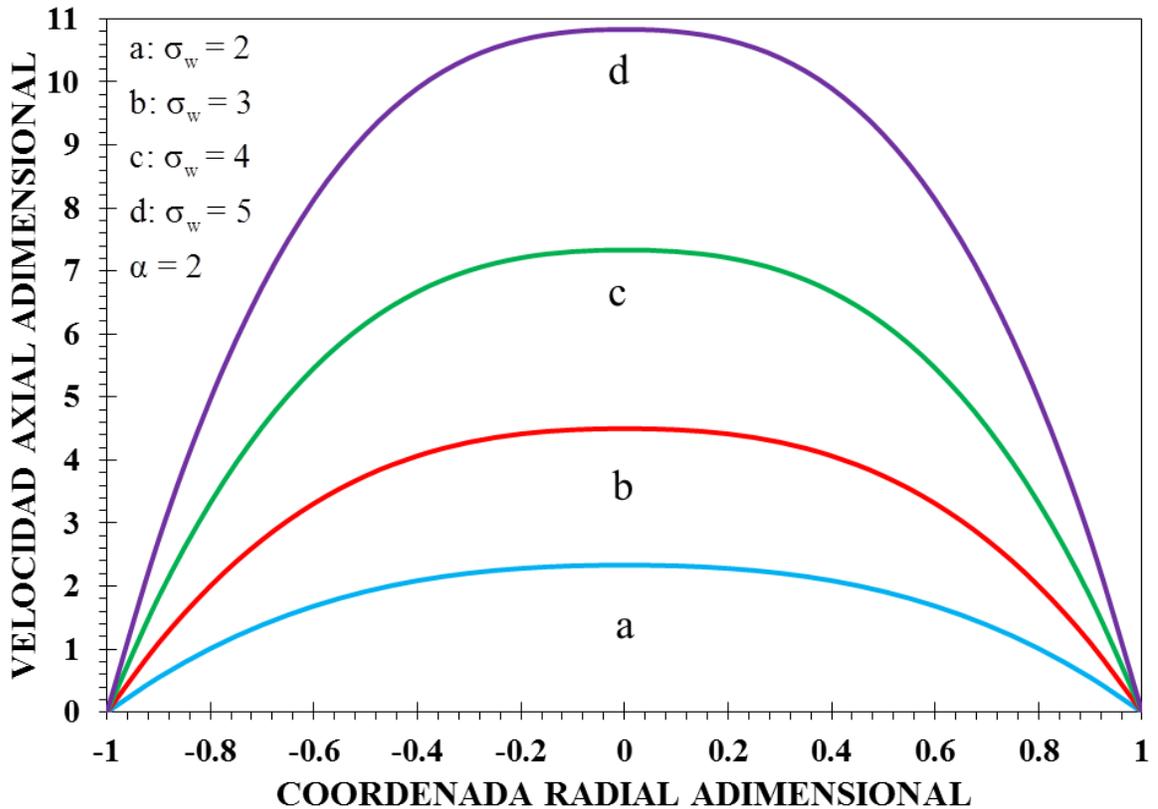


Figura 16. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.



La Fig. 16 muestra la velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial para diferentes valores del esfuerzo en la pared. Los parámetros utilizados en la simulación se muestran en la Fig. 16. De acuerdo con esto, se tiene un fluido no newtoniano y se modifica la fuerza motriz a través del gradiente de presión en la pared. Para todos los casos (a-d), se observa el clásico perfil parabólico reportado en la literatura. Físicamente, en la pared la velocidad es cero y en el centro del tubo se tiene el máximo de velocidad. Aquí el esfuerzo cortante es cero. El valor del máximo del perfil de velocidades sin perturbar está definida como:

$$V_{\max}^* = V_z^*(r^* = 0, \sigma_w^*) = \frac{1}{2} \sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha+1)} (\sigma_w^*)^\alpha$$

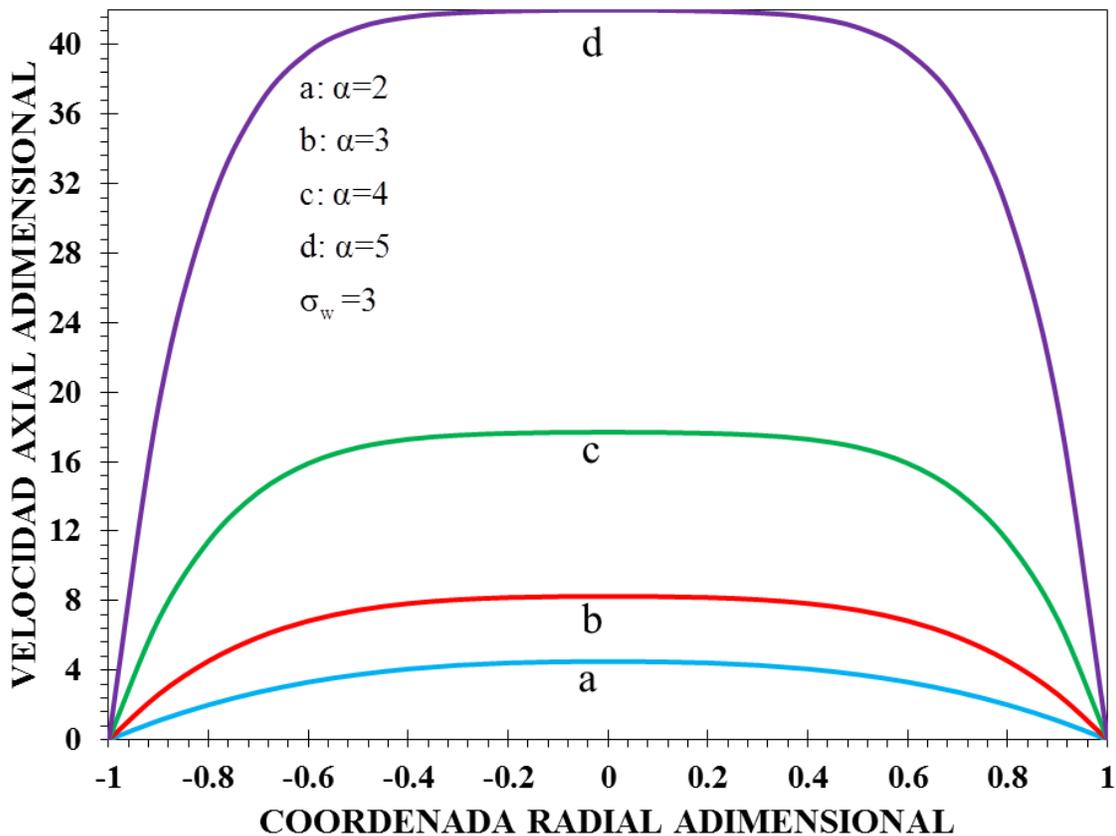


Figura 17. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro alfa en función de los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig.17 se simula la velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del exponente alfa α el cual, es una medida de los mecanismos adelgazantes al corte en el sistema. En la simulación, se observa el clásico comportamiento parabólico, es decir, en la pared la velocidad es mínima debido a la condición de no-deslizamiento. Sin embargo cuando el parámetro alfa aumenta la velocidad se incrementa por efecto de las propiedades adelgazantes al corte.

Por otra parte, cuando los mecanismos adelgazantes dominan el sistema, se forman frentes homogéneos de velocidad, es decir, que la velocidad es constante en un intervalo de la coordenada radial adimensional. En este caso, el intervalo en donde se presentan estos frentes homogéneos de velocidad es $[-0.6, 0.6]$.

7.3 Perfil de velocidad con perturbación

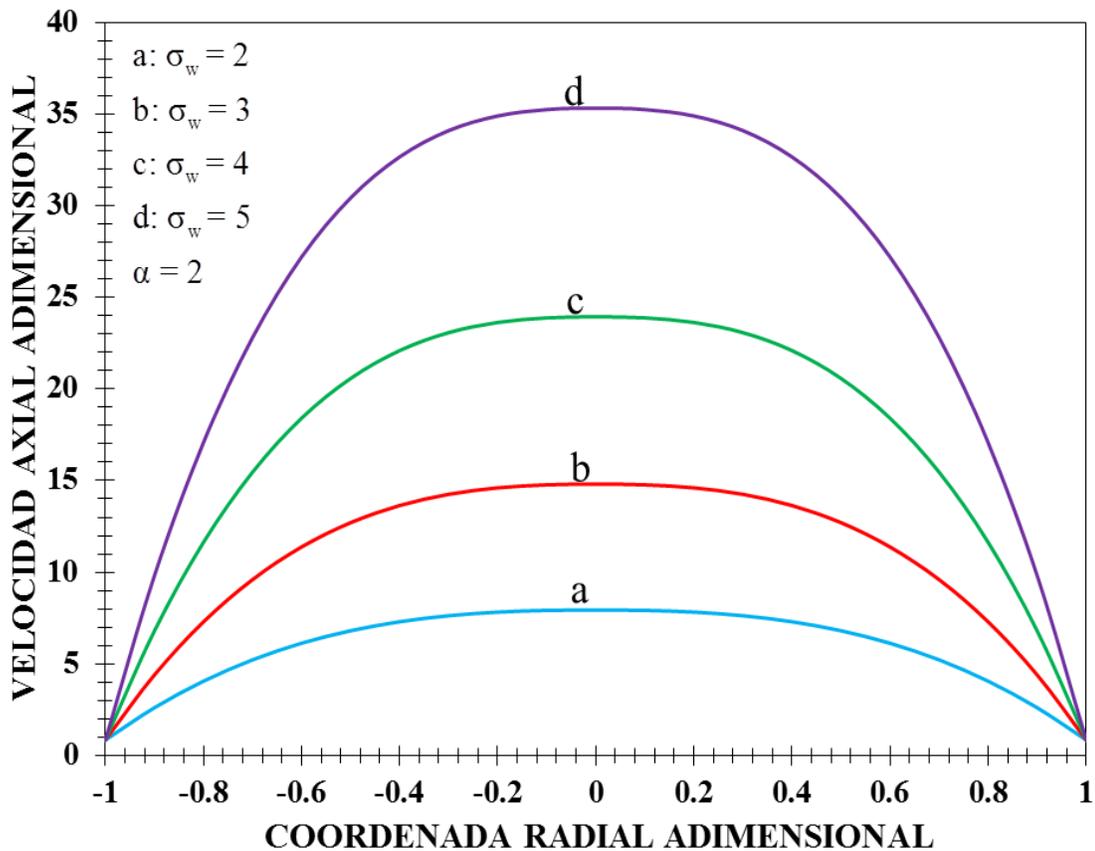


Figura 18. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores de esfuerzo.



En el caso de que el líquido es perturbado con la combinación de flujos. Los parámetros empleados en la simulación son: (i) $M=1$, (ii) $\omega^* = 1$; (iii) $Re = 0.9$, (iv) $t^* = 1$.

En la Fig. 18 se ilustra la velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del esfuerzo en la pared. En esta simulación el valor del parámetro $\alpha = 2$, i.e. el líquido es adelgazante al corte. Matemáticamente, el sistema se describe como los casos anteriores, es decir las parábolas se desfasan de acuerdo con el aumento en el esfuerzo en la pared, el cual es la fuerza que lo deforma continua e irreversiblemente al fluido. En este caso, y al comparar las Figs. 16 y 18 se observa que si existe un aumento considerable en los perfiles de velocidad por efecto de: (i) la amplitud M en el sistema, (ii) la frecuencia, (iii) Los mecanismos inerciales a través del número de Reynolds (iv). Nótese que en este caso el valor del máximo de la velocidad está determinado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 V_{\max} = V_z^* (r^* = 0, t_0^*, \omega_0^*, M_0, \sigma_w^*, \alpha_0, Re_0) = & M_0 \omega_0^* \text{Sen}(\omega_0^* t_0^*) \\
 & + \frac{1}{2} \sigma_w^* \left(1 + M_0 \text{Sen}(\omega_0^* t_0^*) - \frac{1}{2} M_0 Re_0 \omega_0^* \text{Cos}(\omega_0^* t_0^*) / \sigma_w^* \right) \\
 & + \frac{1}{(\alpha+1)} (\sigma_w^*)^\alpha \left| 1 + M_0 \text{Sen}(\omega_0^* t_0^*) - \frac{1}{2} M_0 Re_0 \omega_0^* \text{Cos}(\omega_0^* t_0^*) / \sigma_w^* \right|^\alpha
 \end{aligned}$$

Nótese que las gráficas se amplifican en un factor numérico de 3.8 a aproximadamente.

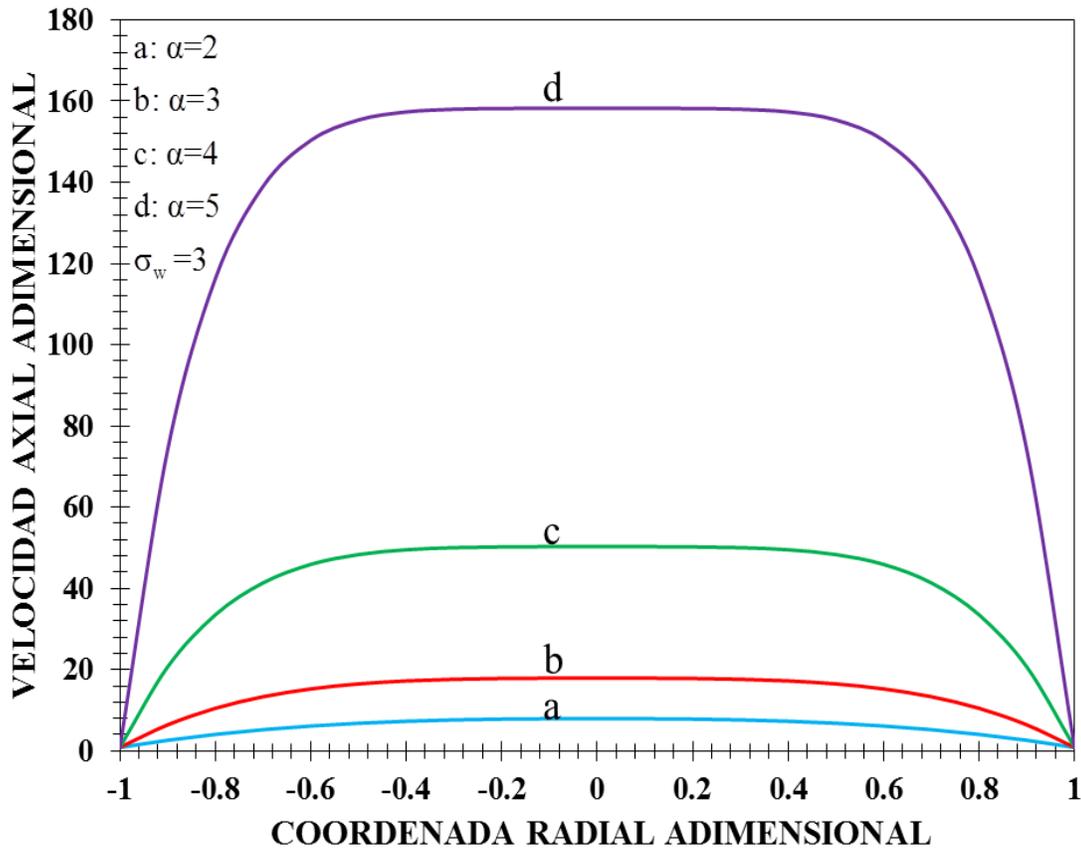


Figura 19. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del adelgazamiento al corte.

Los parámetros empleados en la simulación son: (i) $M = 1$, (ii) $\omega^* = 1$; (iii) $Re = 0.9$, (iv) $t^* = 1$.

La Fig. 19 muestra el perfil de velocidades como función de la coordenada adimensional para el sistema del flujo combinado. Comparando las Fig. 17 y 19 se observa que los perfiles de velocidad son muy parecidos y básicamente el efecto de la amplitud, frecuencia, número de Reynolds y tiempo incrementan por un factor de tres el valor numérico del perfil de velocidades.

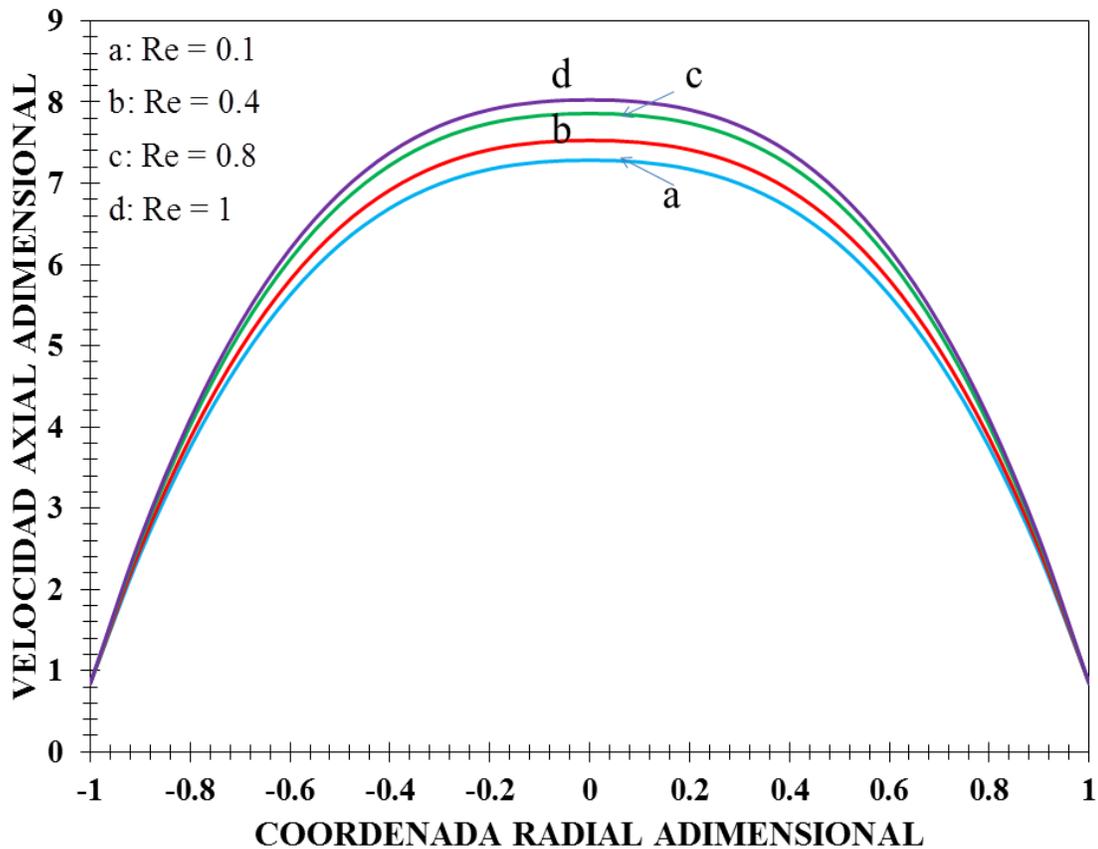


Figura 20. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del número de Reynolds.

Los parámetros empleados en la simulación son: (i) $M=1$, (ii) $\omega^* = 1$; (iii) $\alpha = 2$, (iv) $t^* = 1$.

En la Fig.,. 20 se observa el comportamiento parabólico descrito en las Figs. 18 & 19. Un hecho importante, es que el efecto del esfuerzo en la pared y el de índice alfa, es el de desfasar las curvas hacia valores de mayores de velocidad. Es importante resaltar que al aumentar el esfuerzo en la pared (Fig. 18) el perfil se desfasa, simétricamente y la separación entre los perfiles es casi contante. Por otra parte, en la Fig. 19 la separación no es constante y se forma un frente homogéneo de velocidades, i.e. no existe en un intervalo diferencia relativa entre las velocidades. Por otra parte, cuando se considera el perfil de velocidades en el sistema combinado, el aumento en el máximo no es tan pronunciado como en el caso sin perturbar. El aumento de la inercia contribuye al aumento en la velocidad máxima.

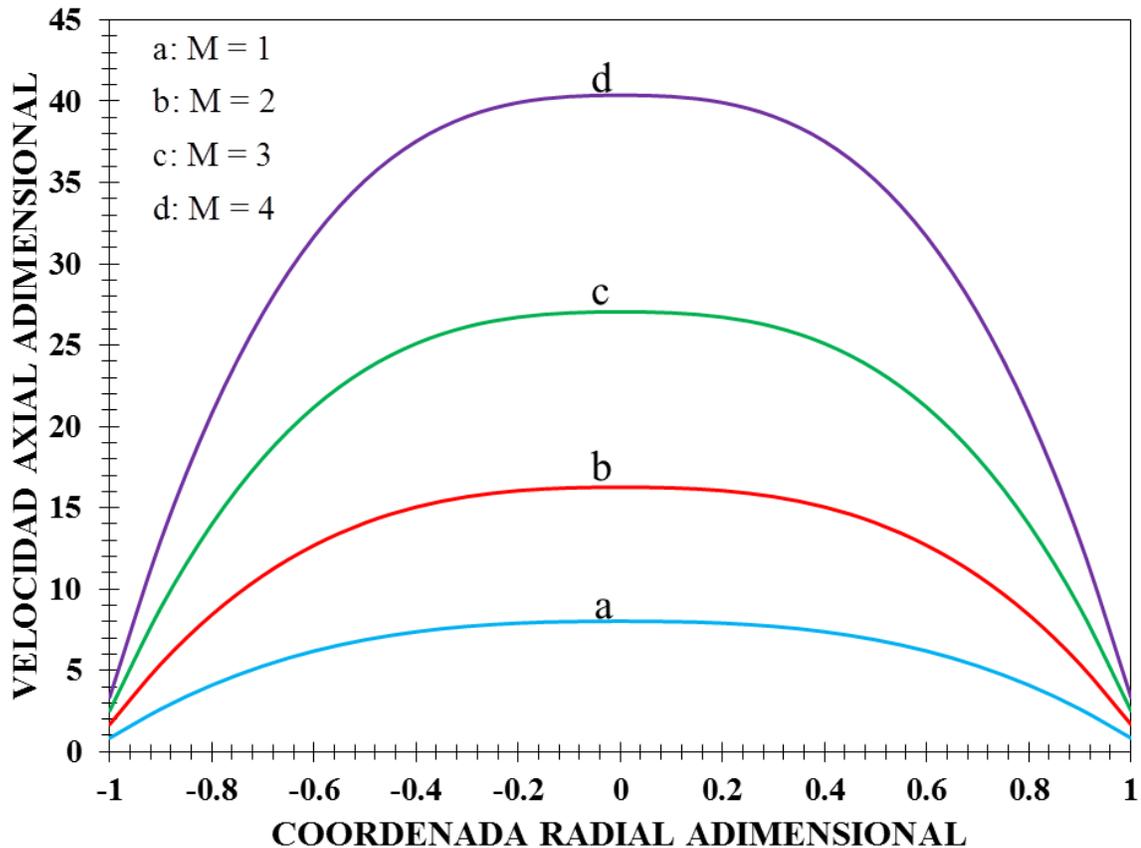


Figura 21. Velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores de la amplitud “M”.

Ilustra el clásico comportamiento parabólico en donde se puede notar que al incrementar el valor de la amplitud la velocidad incrementa. Nótese que la velocidad máxima se presenta en el centro del tubo y que en la pared del sistema la velocidad no se cumple la condición de adherencia del sólido al fluido. Es importante resaltar que el efecto de la amplitud de nuestra función estocástica aumenta drásticamente el máximo en los perfiles de velocidades. Por esto, se infieren que la manera de modificar el perfil de velocidades es a través de tres mecanismos:

- a) Mecanismo inerciales
- b) Amplitud de la fuerza macroscópica.
- c) Mecanismos adelgazantes



7.4 Incremento en el flujo

FLUJO PULSÁTIL

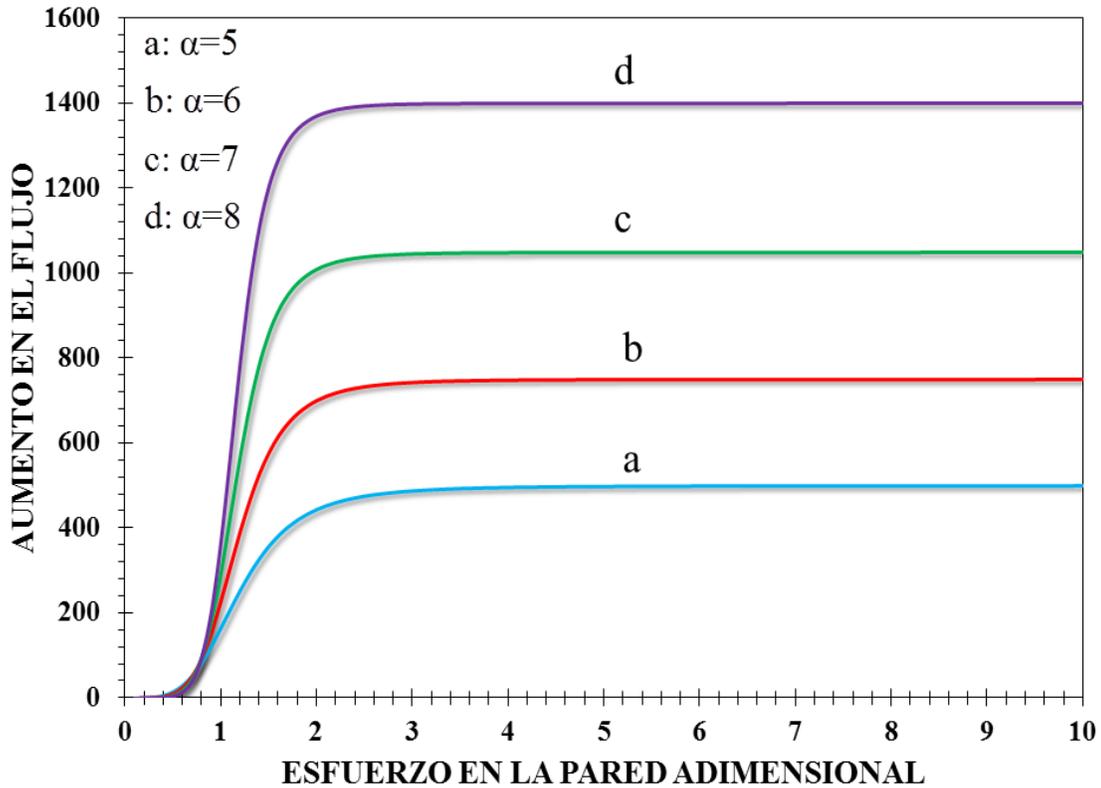


Figura 22. Aumento en el flujo pulsátil en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.

En la Fig. 22 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del índice alfa el cual, está asociado con los mecanismos adelgazantes al corte (la viscosidad disminuye su valor por efecto de la rapidez de la deformación). A valores pequeños el fluido experimenta un comportamiento monótono creciente. En este punto, el flujo es dominado por la siguiente expresión asintótica:

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} I_p (\%) = 100M^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}$$

A un valor crítico de esfuerzo en la pared $(\sigma_w^*)_c$ el aumento en el flujo volumétrico muestra un comportamiento asintótico. Aquí, el sistema tiene el siguiente valor analítico:

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} \mathbf{I}_p (\%) = 100M^2\alpha(\alpha-1) = I_0$$

En esta expresión I_0 es un valor constante del aumento en el flujo. Un hecho importante de este resultado, es que a partir de este experimento computacional se puede calcular el valor del exponente α a partir de datos de aumento en el flujo pulsátil, se puede obtener el grado de adelgazamiento del fluido. La ecuación asintótica es cuadrática en el grado de adelgazamiento, i.e., $\alpha^2 - \alpha - I_0 / (10M)^2 = 0$, resolviendo para alfa, se tiene lo siguiente:

$$\alpha^{(+)}(I_0) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4I_0 / (10M)^2}}{2}$$

Este resultado implica que los mecanismos adelgazantes están determinados por el aumento en el flujo y el cuadrado del inverso de la amplitud. Para valores muy grandes en el aumento en el flujo I_0 el aumento, el radical se simplifica por lo que el valor alfa toma la forma: $\alpha^{(+)}(I_0) \cong \sqrt{I_0} / 10M$. Finalmente nótese que el efecto de los mecanismos adelgazantes al corte es desfazar las curvas hacia valores mayores en el flujo volumétrico.



FLUJO VIBRÁTIL

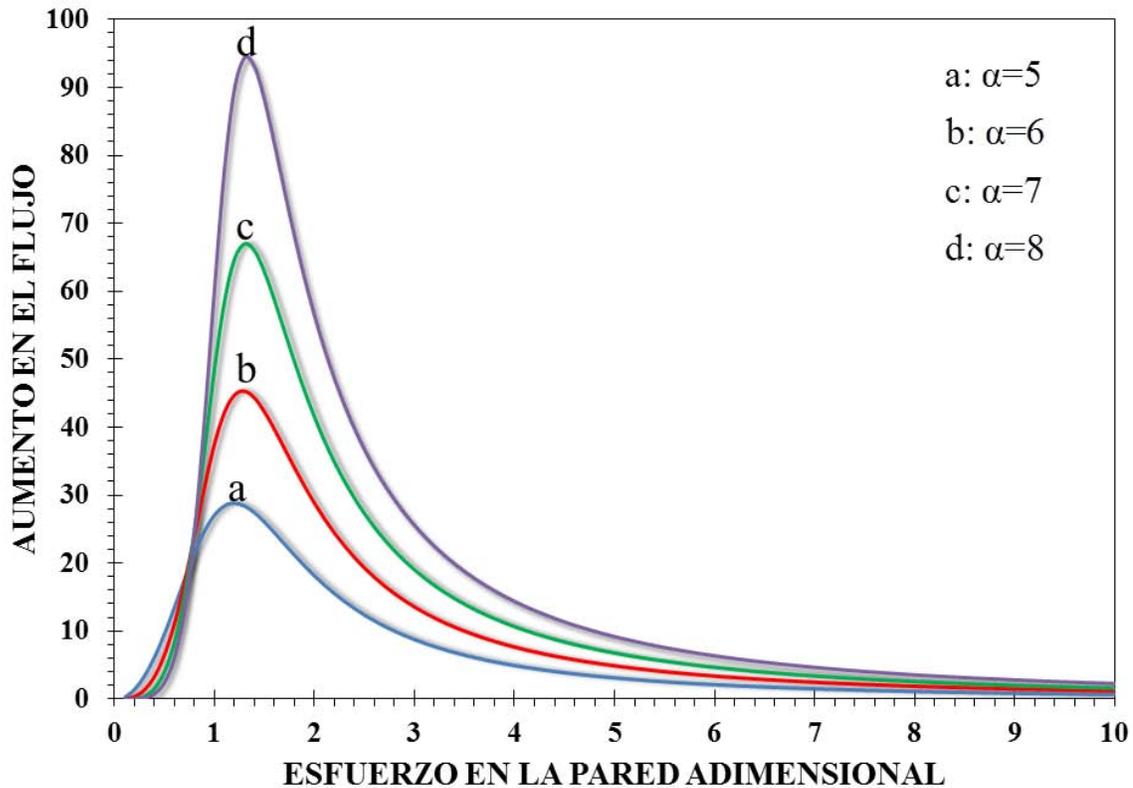


Figura 23. Aumento en el flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.

La Fig. 23 muestra el aumento en el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del índice alfa el cual, está asociado con los mecanismos adelgazantes al corte. A valores pequeños el fluido presenta un comportamiento monótono creciente hasta llegar a un valor máximo:

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} I_V (\%) \approx 25M^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha+3} \frac{1}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-2} (\omega^* Re)^2$$

A un valor crítico de esfuerzo en la pared el fluido muestra un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un mínimo:

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow \infty} I_V (\%) = \frac{25}{4} M^2 \alpha(\alpha-1) (\omega^* Re)^2 (\sigma_w^*)^{-2}$$

Físicamente el efecto vibrátil en la pared crea un mayor aumento en el sistema debido a la fuerza macroscópica que se impone. Es importante notar que el aumento en el flujo vibrátil bajo las mismas condiciones es 16 veces menor que el flujo pulsátil por lo que este sistema es dominado por el flujo pulsátil.

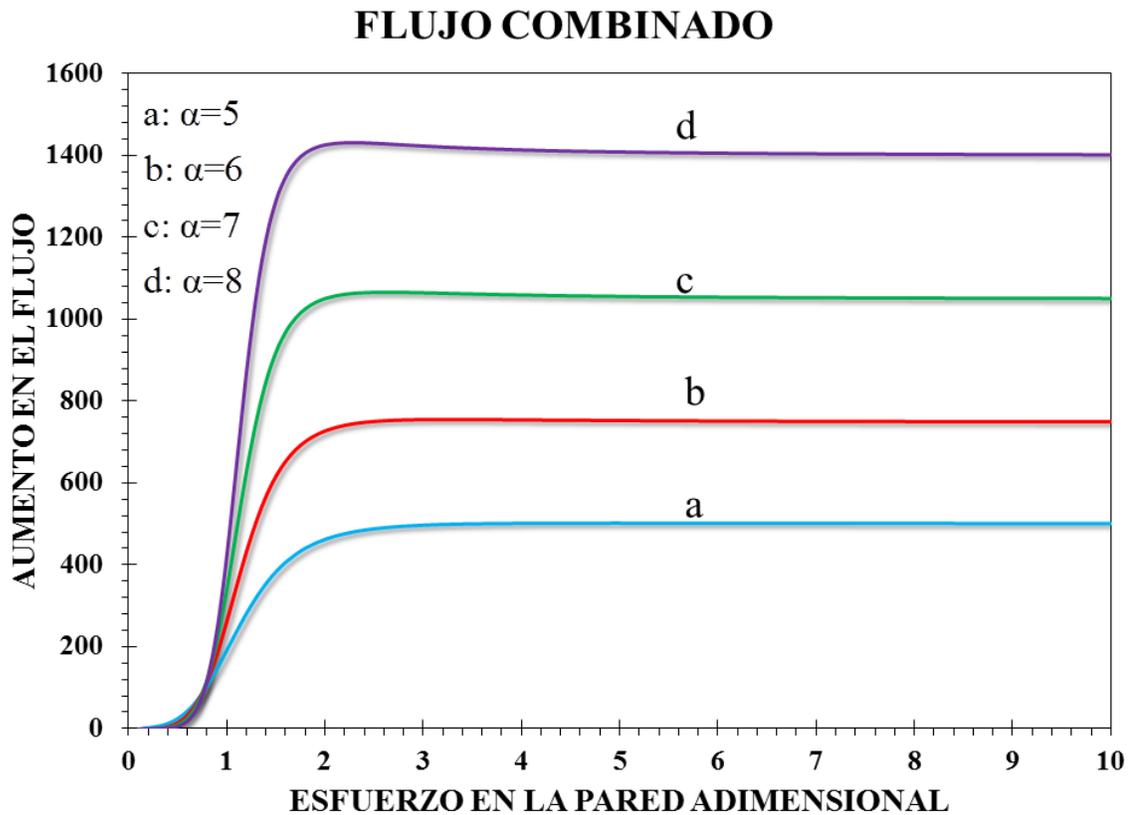


Figura 24. Aumento en el flujo combinado (pulsátil-vibrátil) en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.

En la Fig. (24) se muestra el aumento del flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del índice alfa el cual, está asociado con los mecanismos adelgazantes al corte. Teniendo valores pequeños el fluido experimenta un comportamiento monótono creciente. Nótese que existe a valores cercanos a uno, el aumento en el flujo presenta un máximo local, lo que implica un fenómeno de tipo resonante. En este punto el flujo es dominado por el sistema vibrátil, i.e.



$$\mathbf{I}(\%) = \mathbf{I}_p(\%) + \mathbf{I}_v(\%) \cong \mathbf{I}_v(\%)$$

Por otra parte, a esfuerzos en la pared elevados, el flujo combinado es dominado por el flujo pulsátil, i.e.

$$\mathbf{I}(\%) = \mathbf{I}_p(\%) + \mathbf{I}_v(\%) \cong \mathbf{I}_p(\%)$$

este sistema presenta una competencia de dos flujos, el pulsátil y oscilante en la pared lo que implica que el mayor aumento se obtiene con el flujo pulsátil en donde la perturbación es por medio de una bomba peristáltica. Si se comparan las Figs. (22) y (24) se observa que la Fig. (24) presenta un máximo a valores bajos de esfuerzo en la pared, este efecto resonante se debe principalmente a la contribución de la Fig. (23). Por ejemplo, para un valor del exponente $\alpha = 5$ se obtiene en el aumento en el flujo pulsátil de $\mathbf{I}_p(\%) = 1400$, mientras que para el vibrátil se tiene que $\mathbf{I}_v(\%) = 94$, por lo que el flujo total es $\mathbf{I}(\%) = \mathbf{I}_p(\%) + \mathbf{I}_v(\%) = 1400 + 94 \cong 1494$ aproximadamente. Este hecho se puede confirmar en la Fig. (24).

7.5 Fracción de potencia

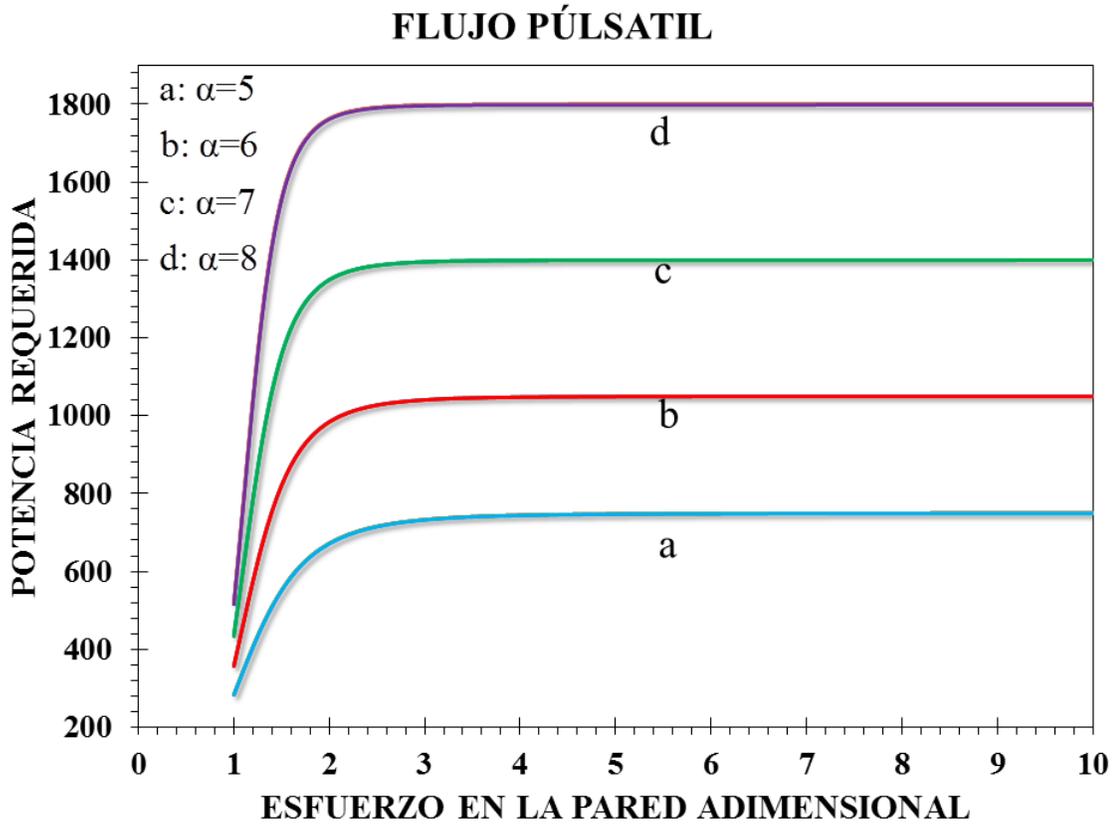


Figura 25. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un flujo pulsátil en diferentes líquidos de Ellis.

En la Fig. (25) se ilustra la potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del índice alfa. EL valor del aumento en la potencia está determinado por la siguiente expresión:

$$P_p(\%) = 50M^2 \frac{1 + \frac{4}{(\alpha+3)} (\sigma_w^*)^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \right)}{1 + \frac{4}{(\alpha+3)} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}}$$

A valores bajos del esfuerzo en la pared adimensional, el aumento en la potencia presenta un comportamiento monótono creciente para los cuatro fluidos de Ellis simulados.



$$\lim_{\sigma_w \rightarrow 0} Pp(\%) = 50M^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1} \right)$$

Por otra parte, al incrementar el esfuerzo en la pared de bajo a moderado, el sistema muestra una zona constante en donde el aumento en la potencia es independiente del esfuerzo en la pared adimensional, por lo que:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} Pp(\%) = 25M^2 (\alpha(\alpha+1)) = P_0$$

Este resultado implica que la meseta en la potencia está determinada por los mecanismos adelgazantes al corte y el cuadrado de la amplitud M. El valor de α está determinado por la siguiente expresión $\alpha^2 + \alpha - (\sqrt{P_0} / 5M)^2 = 0$; resolviendo la ecuación cuadrática, se tiene lo siguiente:

$$\alpha^{(+)} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\sqrt{P_0} / 5M)^2}}{2}$$

En este punto, se tienen dos expresiones para calcular el adelgazamiento al corte en función del aumento I o de la potencia P.

FLUJO VIBRÁTIL

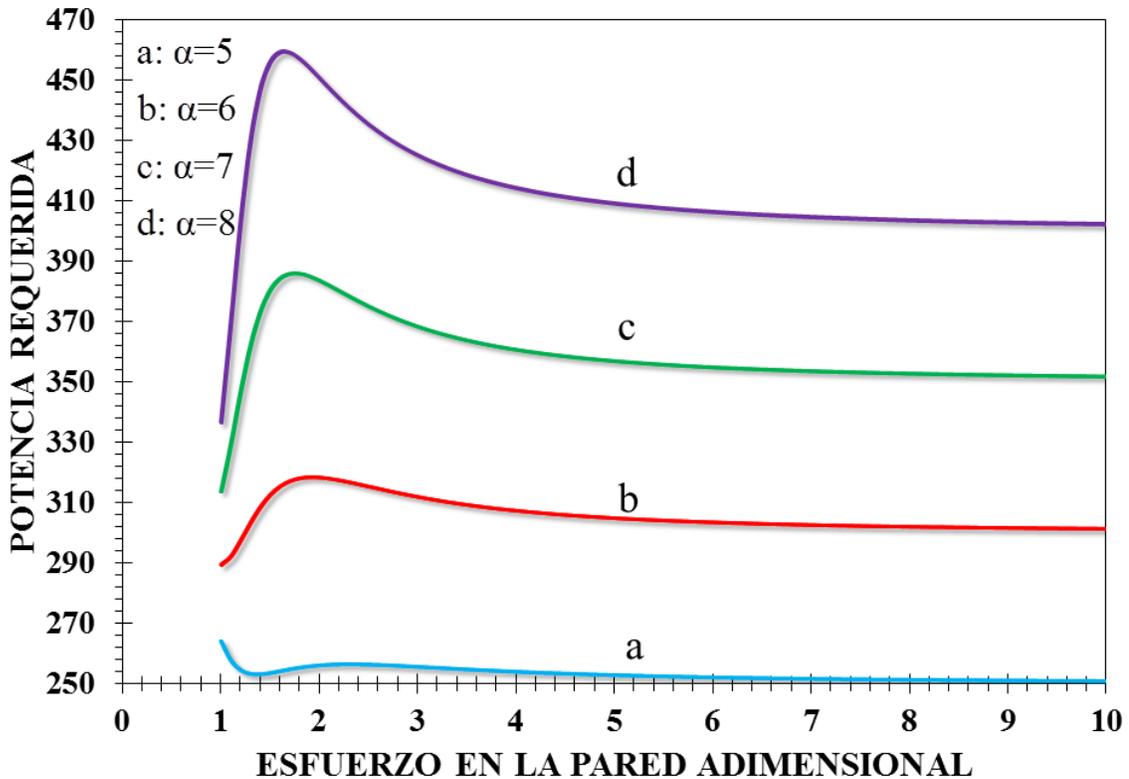


Figura 26. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un flujo vibrátil en diferentes líquidos de Ellis.

La Fig. 26 ilustra la potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del índice alfa asociado a las propiedades adelgazantes. La expresión de la potencia esta dad por la siguiente expresión:

$$P_V(\%) = I_V(\%) = 25M^2\alpha(\alpha-1) \frac{\frac{4}{\alpha+3}(\sigma_w^*)^{\alpha-1}}{1 + \frac{4}{\alpha+3}(\sigma_w^*)^{\alpha-1}} \left(\frac{\omega^* Re}{2\sigma_w^*} \right)^2$$

Es importante resaltar que, la potencia requerida en el sistema vibrátil, es igual al aumento en el flujo volumétrico. A valores pequeños de esfuerzo en la pared, el trabajo por unidad de tiempo presenta un comportamiento monótono creciente el cual, satisface la siguiente expresión:



$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} P_v(\%) = 25M^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha+3} \frac{1}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-2} (\omega^* Re)^2$$

A medida de que el esfuerzo en la pared adimensional paso de valores bajos a moderados, el sistema alcanza el valor máximo el cual, es calculado igualando la derivada de la potencia vibrátil a cero, i.e. $dP_v(\%)/d\sigma_w^* = 0$. El resultado es una ecuación algebraica no lineal para el esfuerzo en la pared adimensional que debe resolver por un método numérico iterativo. A un valor crítico de esfuerzo en la pared el fluido muestra un comportamiento monótono decreciente hasta llegar a un valor asintótico.

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow \infty} P_v(\%) = \frac{25}{4} M^2 \alpha(\alpha-1) (\omega^* Re)^2 (\sigma_w^*)^{-2}$$

Los siguientes puntos son muy importantes en el presente análisis:

- a) Físicamente el efecto vibrátil en la pared crea un mayor aumento en el sistema debido a la fuerza macroscópica que se impone.
- b) Es importante notar que el aumento en el flujo vibrátil bajo las mismas condiciones es 16 veces menor que el flujo pulsátil por lo que este sistema es dominado por el flujo pulsátil.
- c) Es importante destacar que para un cierto valor crítico de alfa se observa el efecto resonante en el flujo vibrátil. En este contexto existe un valor de esfuerzo en la pared para el cual, la potencia requerida muestra un comportamiento monótono creciente en todo el intervalo de simulación.
- d) Nótese que el valor de alfa igual a 5 nos da un comportamiento monótono decreciente seguido de un aumento y una zona constante.

En la Fig. (27) se observa el comportamiento del flujo combinado, es decir el flujo relacionado con el mecanismo vibrátil y pulsátil respectivamente.

FLUJO COMBINADO

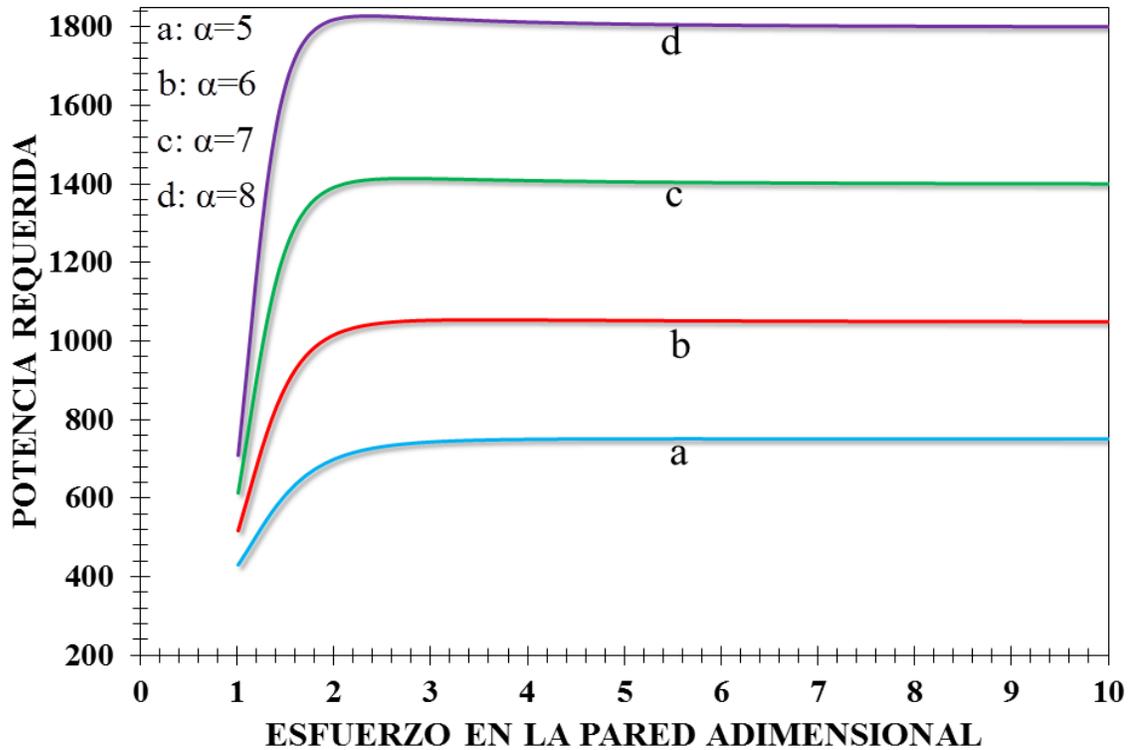


Figura 27. Potencia requerida en el flujo combinado (pulsátil-vibrátil) en función del esfuerzo en la pared para diferentes líquidos de Ellis.

En la Fig. (27) se muestra la potencia total requerida en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del índice alfa el cual, está asociado con los mecanismos adelgazantes o engrosantes al corte. Al igual que en el aumento en el flujo total, la potencia se puede separar en tres contribuciones: (i) La primera contribución es debido al flujo combinado, (ii) la segunda de ellas es debido al flujo pulsátil y (iii) al flujo vibrátil. La potencia total se puede expresar como:

$$P(\%) = \underbrace{P_{V+P}(\%)}_{\text{Potencia-Extra}} + P_p(\%) + P_v(\%)$$

En donde las contribuciones de las potencias están dadas por las siguientes expresiones analíticas:



$$P_{V+P}(\%) = 50M^2\omega^* \left\{ \frac{4\sigma_w^{*-1}}{1 + \frac{4}{(\alpha+3)}(\sigma_w^*)^{\alpha-1}} \right\} > 0$$

$$P_p(\%) = 50M^2 \left\{ \frac{1 + \frac{4}{\alpha+3}(\sigma_w^*)^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \right)}{1 + \frac{4}{\alpha+3}(\sigma_w^*)^{\alpha-1}} \right\} > 0$$

$$P_v(\%) = 50M^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \left\{ \frac{\frac{4}{\alpha+3}(\sigma_w^*)^{\alpha-1}}{1 + \frac{4}{\alpha+3}(\sigma_w^*)^{\alpha-1}} \right\} \left(\frac{1}{2} \frac{Re\omega^*}{\sigma_w^*} \right)^2 > 0$$

Las tres expresiones para la potencia total, son positivas por lo que el flujo combinado induce una potencia extra debido a la combinación de la fuerza macroscópica en la pared y en el sistema (Fluido). Nótese, que la potencia del flujo combinado $P_{V+P}(\%)$ depende de la frecuencia de las funciones estocásticas. Matemáticamente, a valores bajos de esfuerzo en la pared, la potencia asociada al flujo combinado experimenta un comportamiento monótono creciente como el de la Fig. (26), y para un valor crítico de esfuerzo en la pared, el comportamiento es constante independiente del esfuerzo en la pared. Nótese que el valor de la meseta está determinado por las propiedades adelgazantes al corte del sistema.

Nótese que al igual que el flujo, la potencia del vibrátil y la del pulsátil son múltiplos a esfuerzos en la pared altos, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} P_v(\%) = P_p(\%) \left(\frac{1}{2} \frac{Re\omega^*}{\sigma_w^*} \right)^2 > 0$$

Al comparar las dos potencias vibrátil y pulsátil, el flujo pulsátil es mucho mayor que la del flujo vibrátil. En la siguiente sección se aplica los resultados teóricos obtenidos a una suspensión tipo coloidal.

7.6 Aplicación a un fluido complejo sistema coloidal

En esta sección presentamos una aplicación de los resultados teóricos aquí obtenidos. Para ejemplificar utilizaremos los resultados reométricos obtenidos por Phan-Thien y colaboradores en un sistema coloidal. Un sistema coloidal como se explicó en la sección de marco teórico, es un sistema formado por una fase continua y otra dispersa. La hipótesis de un sistema coloidal es que las partículas que lo conforman forma agregados es decir, por las interacciones, forma agregados que se pueden romper y deformar debido a los procesos de corte. En esta sección se utilizan estos conceptos aplicados al flujo combinado pulsátil y vibrátil y su contraste con los resultados experimentales provenientes de la literatura (Phan-Thien et al. 2014).

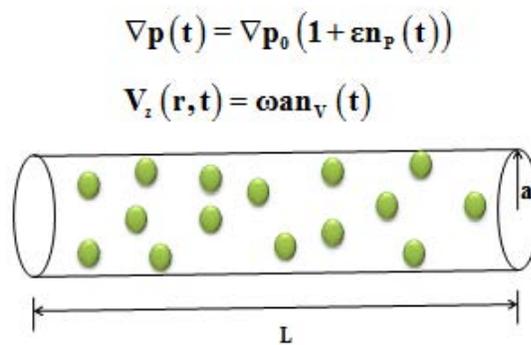


Figura 28. Sistema coloidal al cual se deforma continua e irreversiblemente por el flujo combinado.

- Las condiciones de procesos del sistema son las mismas que en la teoría, i.e., se supone que el sistema es isotérmico es decir, no es necesario introducir el balance de energía.
- El fluido de prueba es una suspensión de tipo coloidal en donde las partículas son esferas de acero.
- Los datos reométricos se obtuvieron a partir de una geometría de cilindros concéntricos.
- Los datos experimentales fueron ajustados mediante una regresión de tipo lineal y el mejor ajuste de estos, dio un $\alpha = 1.372$ aproximadamente.
- Los datos reométricos de esta sección provienen de una suspensión en la cual, están dispersas partículas esféricas.



- Las interacciones partícula - partícula, partícula- cúmulos o cúmulos-cúmulos se desprecian.

Tabla 6. Parámetros materiales utilizados en el modelo de Ellis para una suspensión de tipo coloidal.

Modelo	η_0 [Pas]	η_∞ [Pas]	n [1]	m [1]	$\alpha = 1/n$ [1]	ρ [kgm ⁻³]
ELLIS	0.0326	---	0.6290	0.1	1.5893	1053

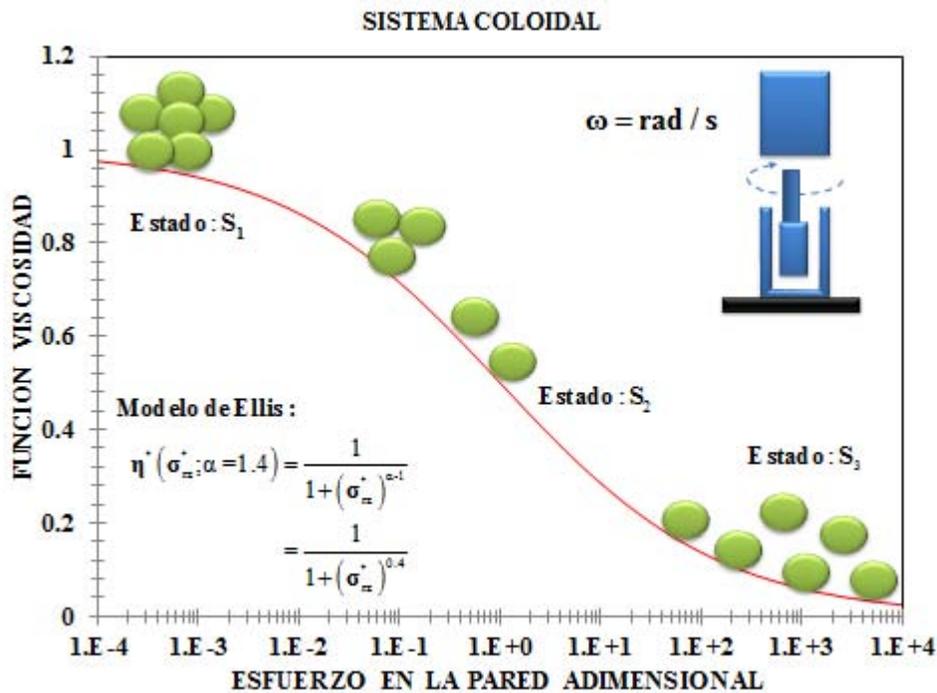


Figura 29. Diagrama reológico de la función viscosidad como función del esfuerzo en la pared para el valor de alfa 1.4 obtenido del ajuste de los datos reométricos obtenidos de la literatura.

En la Fig. 29 se observa la función viscosidad como función del esfuerzo en la pared adimensional para el modelo de Ellis. A valores bajos del esfuerzo en la pared, se observa que las partículas forman cúmulos. A un esfuerzo en la pared parte del cúmulo se rompen y alguna de ellas se orientan por efecto del esfuerzo en la pared que lo deforma continua e irreversiblemente. Finalmente a un segundo esfuerzo en la pared, se rompen los cúmulos y las partículas se orientan debido al corte. Dos hechos son importantes en esta gráfica:

- a. En este trabajo se desprecian las interacciones entre las partículas es decir las interacciones partícula-partícula, partícula-cumulo y cumulo-cumulo.
- b. Los efectos eléctricos asociados con las interacciones, son despreciables, así como efectos electro-osmóticos en general.

7.6.1 Perfil de velocidad

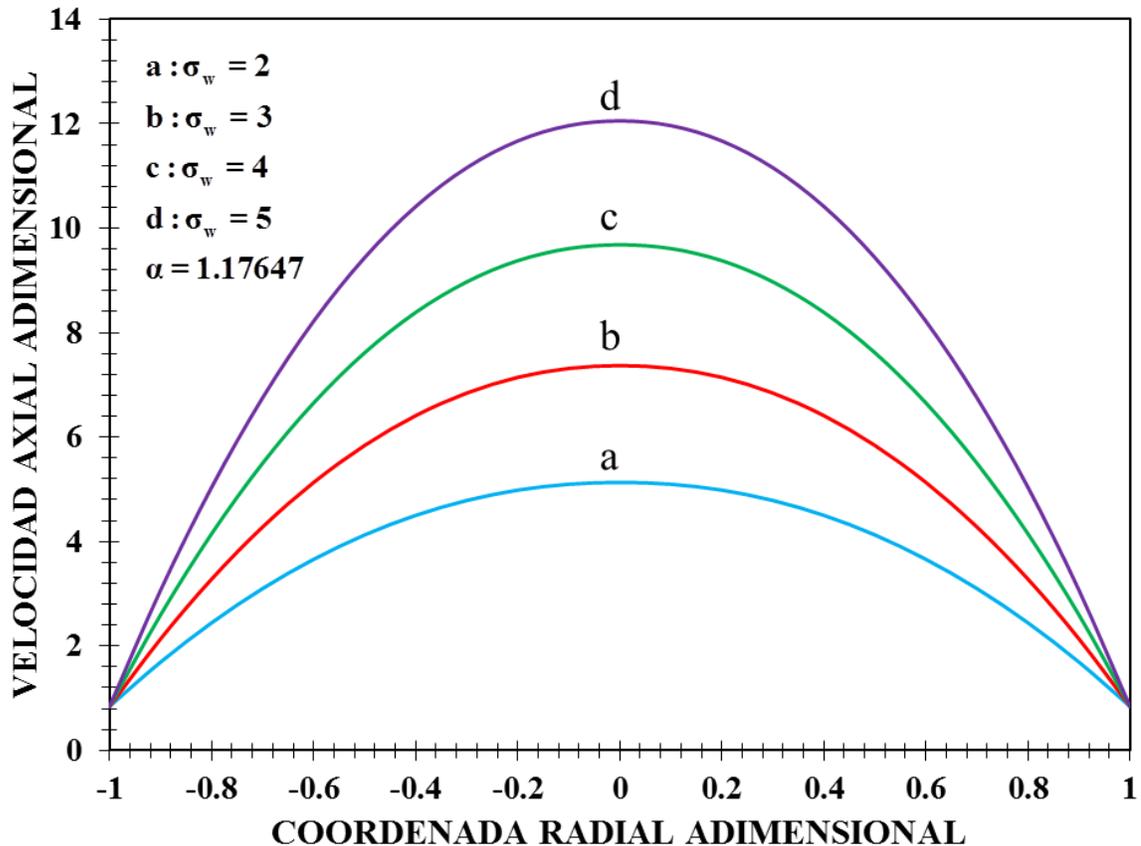


Figura 30. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.

En la Fig. 30 se ilustra la velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional para un sistema coloidal en función del esfuerzo en la pared. En general, para los cuatro casos, se cumple el perfil parabólico y este aumenta conforme se incrementa el esfuerzo en la pared. En las paredes el esfuerzo es el máximo y en el centro del sistema (tubo) la velocidad es máxima lo que implica que el esfuerzo es mínimo.



Nótese que en la pared existe una interacción entre las partículas debido a que hay atracciones entre ellas y forman cúmulos, sin embargo en el centro, se observa la máxima velocidad en donde las partículas están dispersas.

Finalmente el comportamiento de las gráficas es similar y su valor máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades materiales del sistema.

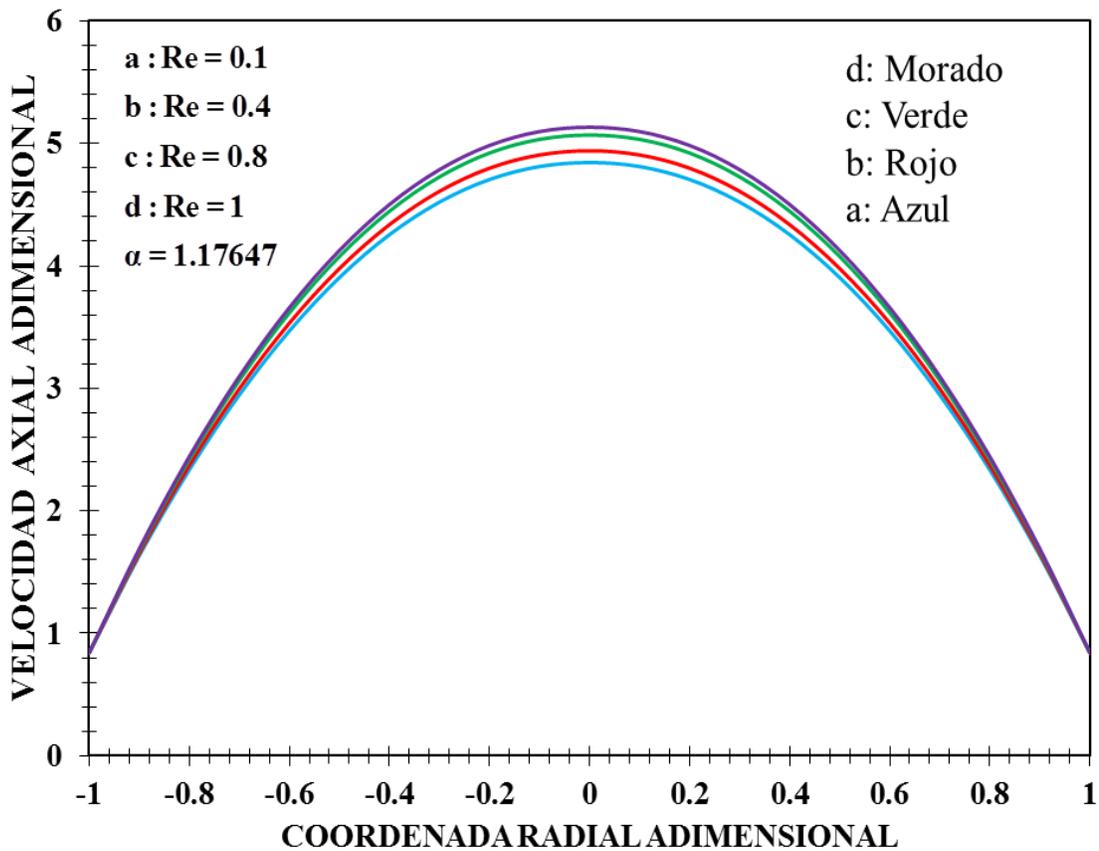


Figura 31. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores del número de Reynolds.

En la Fig. 31 se ilustra la velocidad axial adimensional en función de la coordenada radial adimensional para diferentes valores del número de Reynolds. Nótese que las curvas están desfasadas debido a la fuerza macroscópica que se aplica en la pared del tubo. Es importante resaltar que los efectos inerciales incrementan los perfiles de velocidad y lo hacen más parabólico, físicamente significa que los mecanismos inerciales asociados al número de Reynolds aumentan o facilitan que las

partículas no tengan interacciones en el centro del tubo. Es claro que los mecanismos inerciales van aumentando y los viscosos decrecen.

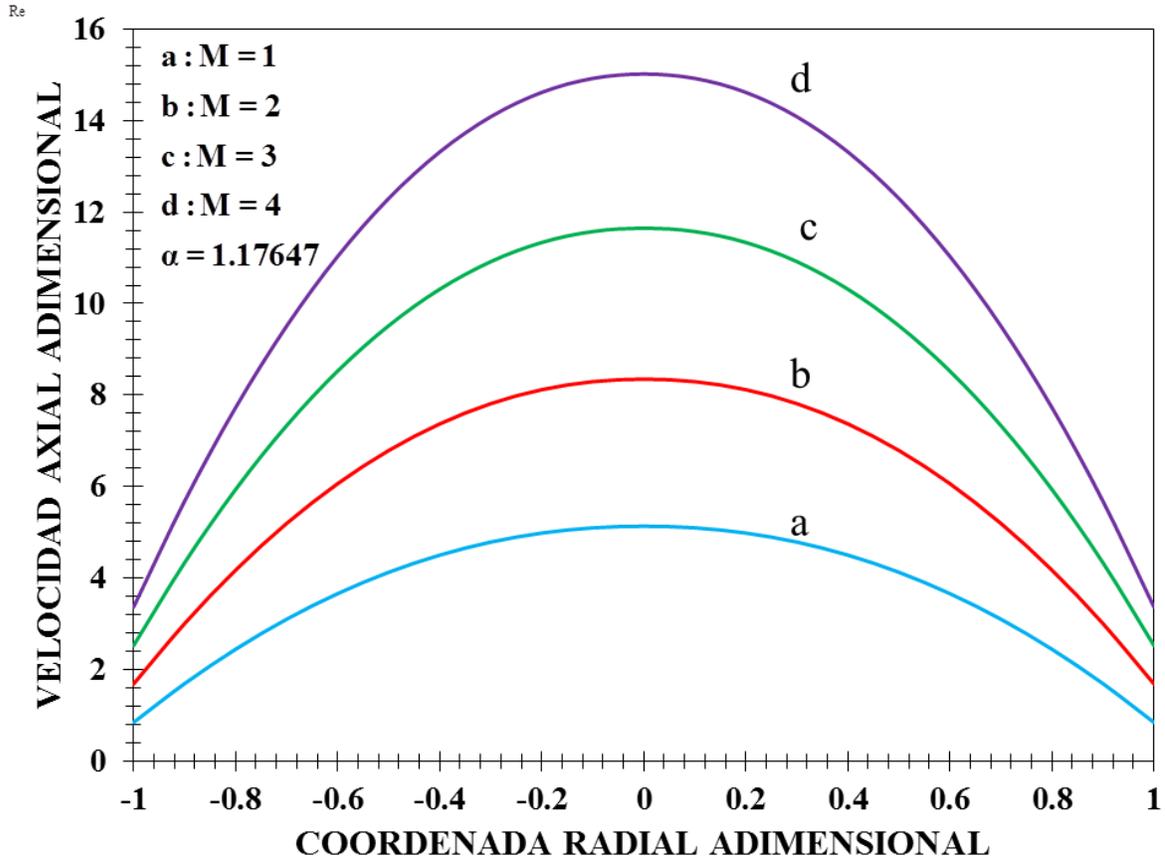


Figura 32. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la amplitud.

La Fig. 32 ilustra la velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la amplitud. Nótese que al igual que en la Fig. 31 las curvas se encuentran desfasadas debido a la fuerza macroscópica que se aplica en la pared del tubo, pero a diferencia de esta, el efecto de la amplitud aumenta drásticamente al máximo en los perfiles de velocidades. Por otra parte es importante notar que en la pared se tiene la máxima interacción de partículas debido a que el esfuerzo cortante es máximo y presentan resistencia a fluir mientras que en el centro es la máxima velocidad y las partículas se encuentran dispersas. Por último



es importante resaltar que las fuerzas de tipo electrostático por la atracción o repulsión de cargas en este trabajo son despreciables.

7.6.2 Incremento en el flujo

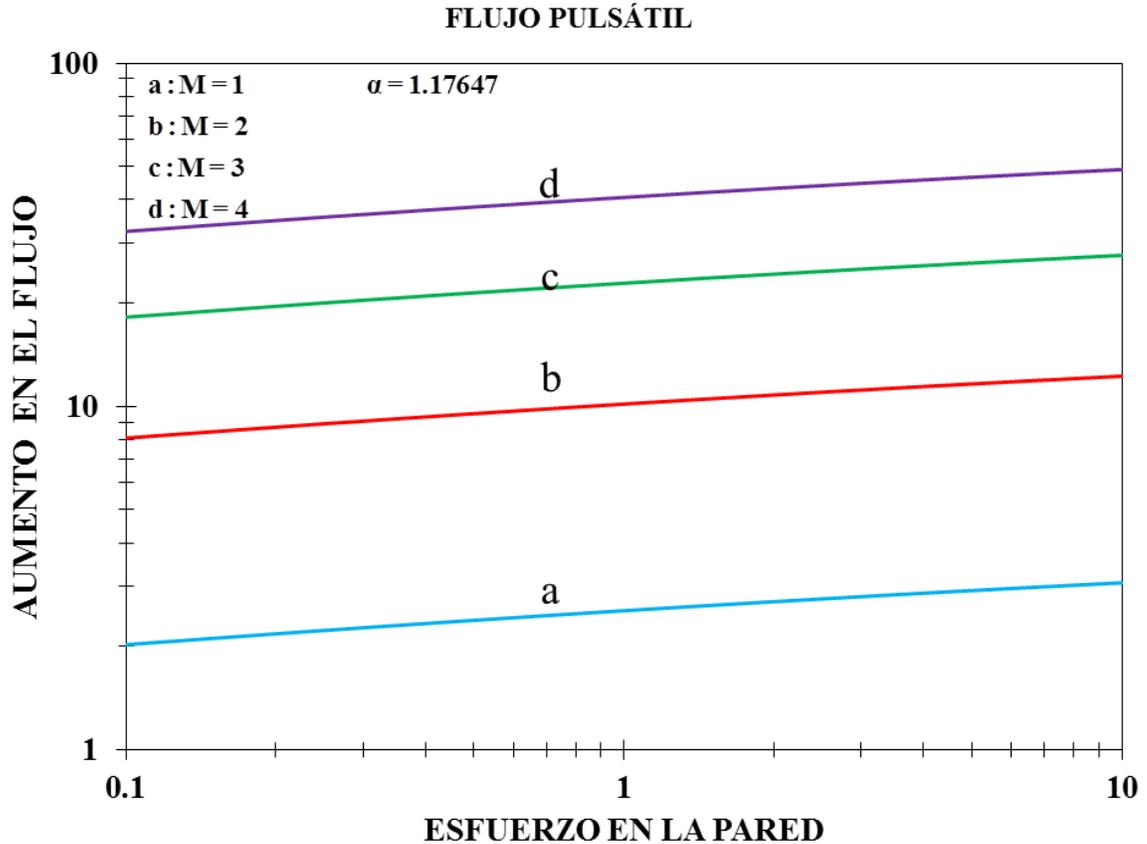


Figura 33. Aumento en el flujo pulsátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.

La Fig. 33 muestra el aumento en el flujo pulsátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal con diferentes valores de la amplitud M . En todos los casos se observa un comportamiento constante desfasado, de acuerdo al valor de la amplitud, esto implica que esta, juega un papel muy importante en el aumento del máximo. Nótese que en todos los casos el aumento del flujo es independiente mostrando un comportamiento lineal. Nótese que en este caso no se observan las curvas resonantes reportadas en la literatura. Cabe resaltar que para este sistema coloidal, en específico si existen aumentos por las propiedades no newtonianas del sistema y la

interacción entre los cúmulos de partículas, así mismo se desprecian las interacciones entre las partículas por los mecanismos eléctricos.

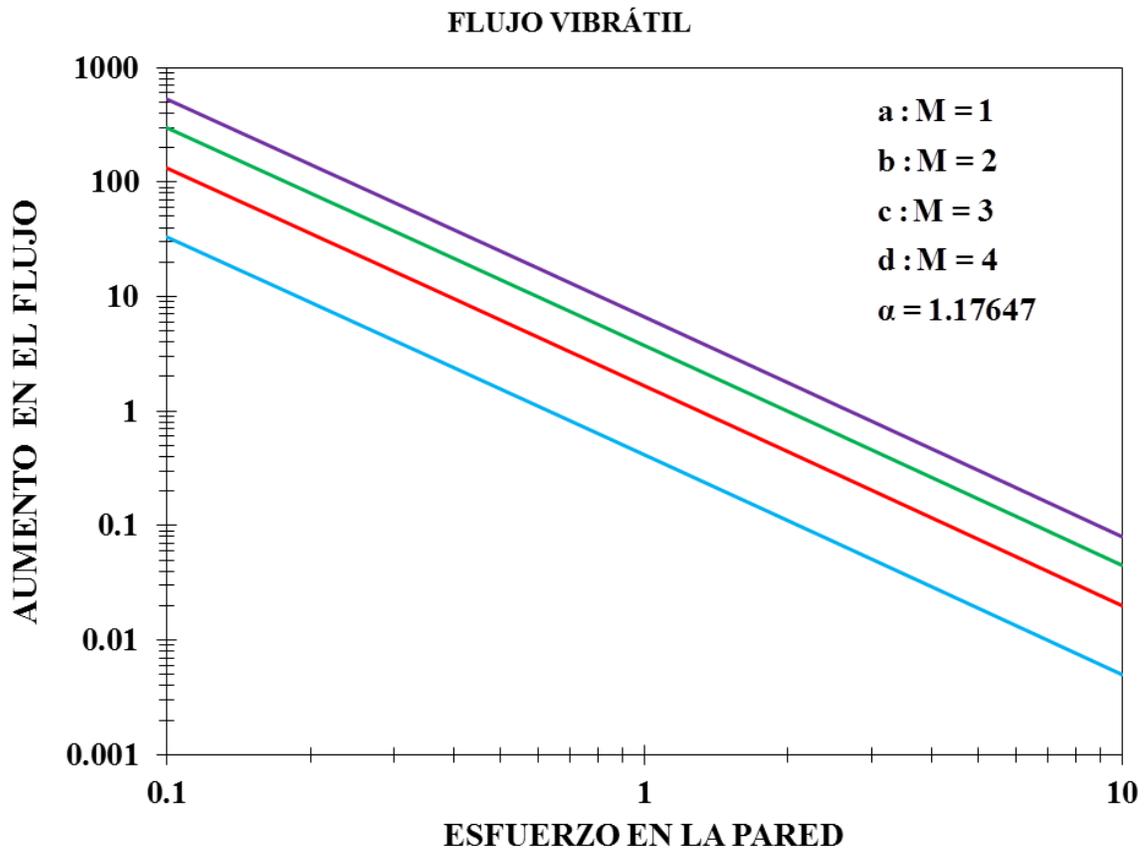


Figura 34. Aumento en el flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.

En la Fig. 34 se ilustra el aumento en el flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal a diferentes valores de la amplitud M. Podemos notar que en este sistema el efecto mayor del aumento en el flujo se encuentra a esfuerzos bajos ya que conforme se aumenta el esfuerzo en la pared, el incremento en el flujo va decreciendo mononamente, hasta valores menores en el aumento en el flujo. Es importante resaltar que en el flujo vibrátil el punto de interés se encuentra a valores bajos de esfuerzo en la pared.

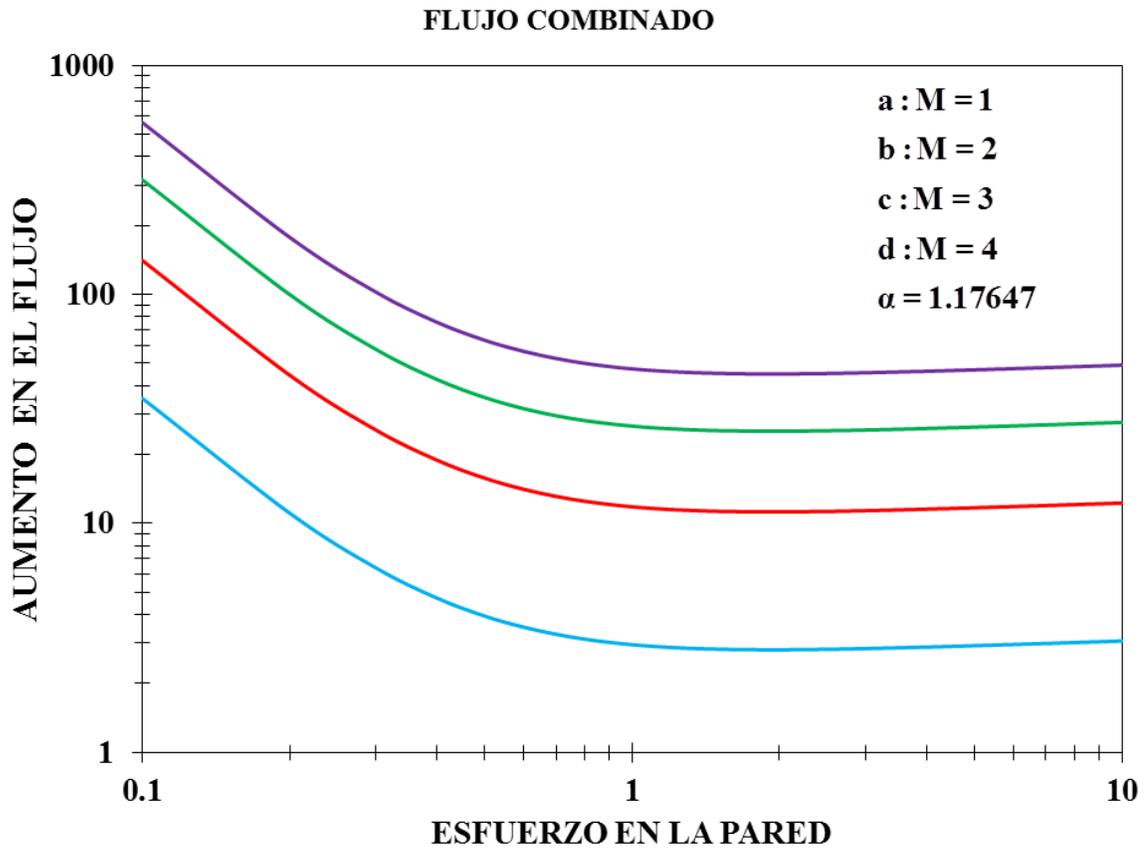


Figura 35. Aumento en el flujo combinado en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.

La Fig. 35 muestra el incremento en el flujo combinado en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal y diferentes valores en la amplitud M . Podemos notar que el efecto del flujo vibrátil se encuentra al inicio de la gráfica con valores bajos en el esfuerzo en la pared, mientras que el flujo pulsátil domina a valores moderados y altos. Es importante resaltar que para un valor crítico de esfuerzo en la pared se observa una transición de flujo vibrátil a pulsátil por efecto del corte a través del esfuerzo en la pared.

7.6.3 Potencia requerida

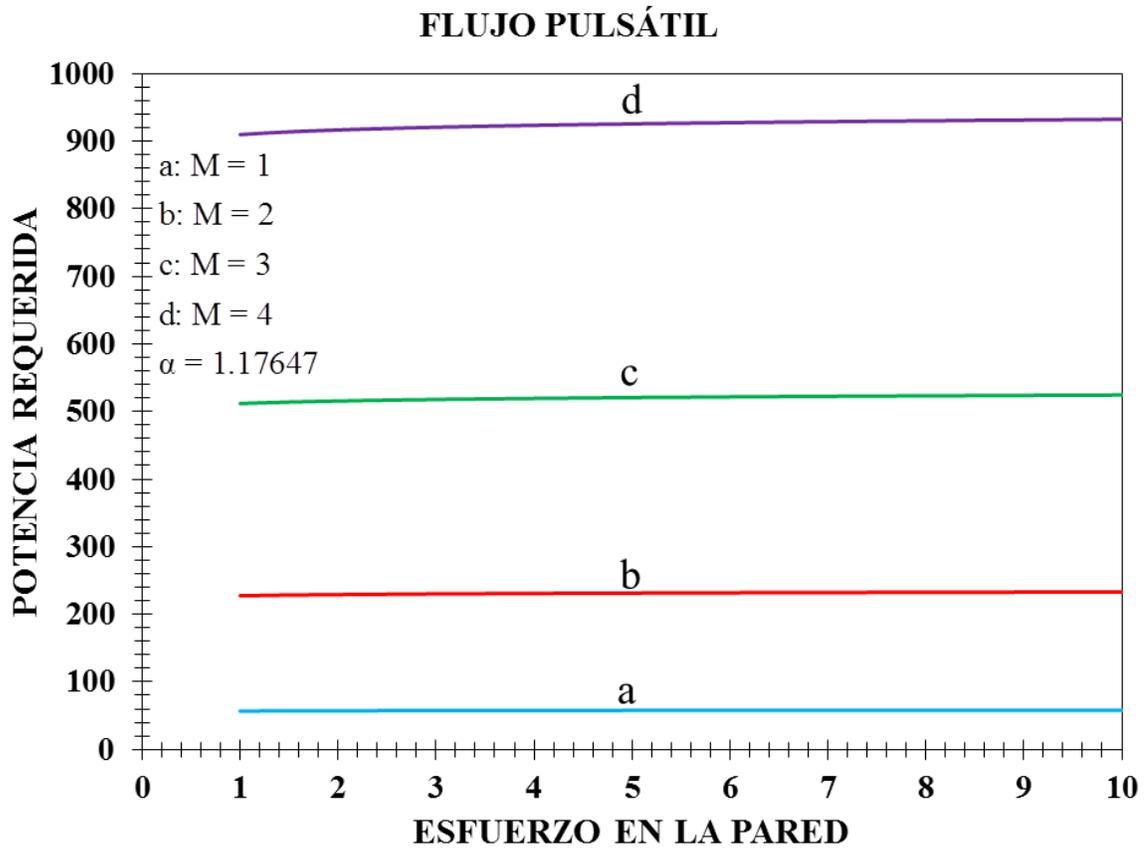


Figura 36. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.

La Fig. 36 ilustra la potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal con diferentes valores de la amplitud M . Nótese que para el sistema de flujo pulsátil la potencia requerida tiene un comportamiento casi lineal pero con un ligero aumento a valores bajos.



FLUJO VIBRÁTIL

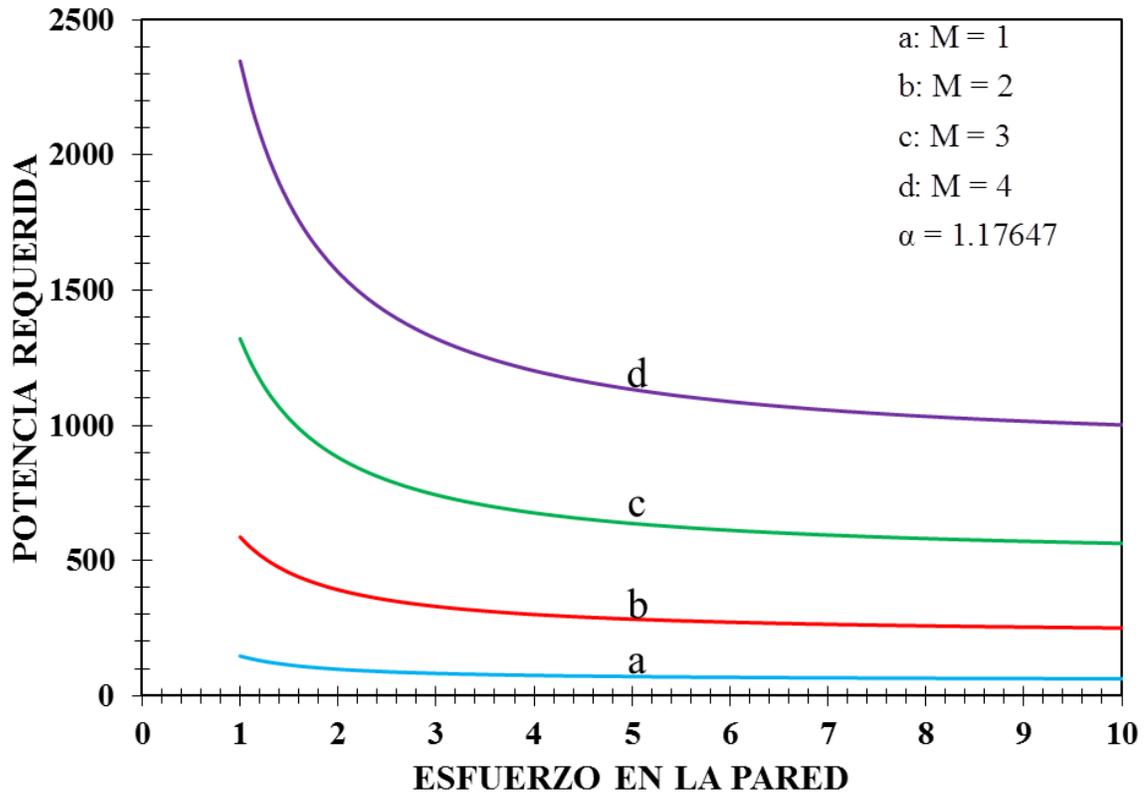


Figura 37. Potencia requerida para un flujo vibrátil en función del esfuerzo en la pared para un sistema coloidal.

En la Fig. 37 se ilustra la potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro M . Matemáticamente el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente en todo el intervalo de simulación, sin embargo, para un valor crítico el sistema presenta una asíntota en donde la potencia suministrada es independiente del esfuerzo en la pared. Físicamente, el mayor cambio de la energía por unidad de tiempo se presenta a valores moderados del esfuerzo en la pared. Es importante resaltar que el mayor consumo de energía en el flujo vibrátil se presenta a esfuerzos de la pared moderados mientras que en el flujo pulsátil el sistema emplea mayor energía a esfuerzos elevados en la pared. Nótese que el valor de la amplitud desfasa las curvas a valores cada vez mayores.

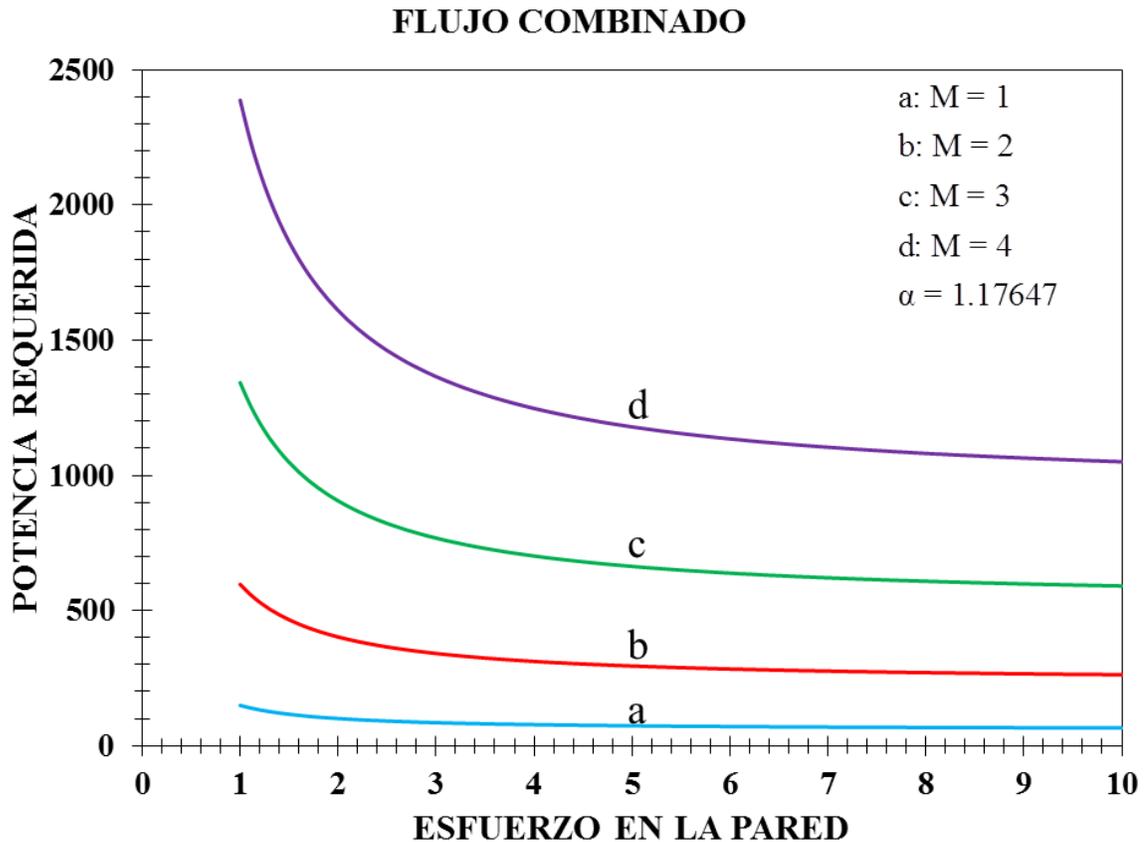


Figura 38. Potencia requerida en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro M.

En la Fig. 38 se ilustra la potencia requerida del flujo combinado en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores de la amplitud M . Matemáticamente el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente en todo el intervalo de simulación. Nótese que a valores moderados del esfuerzo en la pared predomina en el sistema el flujo vibrátil, mientras que para un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared el sistema presenta un comportamiento constante e independiente del esfuerzo en la pared en donde el sistema es dominado completamente por el flujo pulsátil. Es importante destacar que las simulaciones presentadas muestran dos zonas en donde el sistema es dominado por el flujo vibrátil (bajos y moderados esfuerzos en la pared) mientras que a altos esfuerzos el flujo pulsátil es el que domina.



CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección, se analizan los resultados obtenidos mediante las simulaciones computacionales. En particular, se analizaron los efectos separados. i.e. el flujo pulsátil, vibrátil y finalmente el sistema combinado. Para probar nuestro modelo, utilizamos una suspensión con partículas esféricas con el fin de calcular el aumento de flujo volumétrico y el aumento en la potencia. A continuación se presentan los resultados principales en: (i) Flujo pulsátil, (ii) Flujo vibrátil y (iii) Flujo combinado.

a) Flujo pulsátil

En el flujo pulsátil, el líquido es deformado continuamente e irreversiblemente debido a una gradiente de presión pulsátil. Esta modificación, induce cambios en el flujo volumétrico y potencia en el sistema (Phan-Thien 1980, Phan-Thien and Dudek 1981, Bird et al. 1977). El modelo que se propone acopla la contribución del solvente y la del fluido no newtoniano respectivamente, las principales contribuciones y los puntos calves de las simulaciones computacionales se resumen cualitativamente en la Fig. 34.

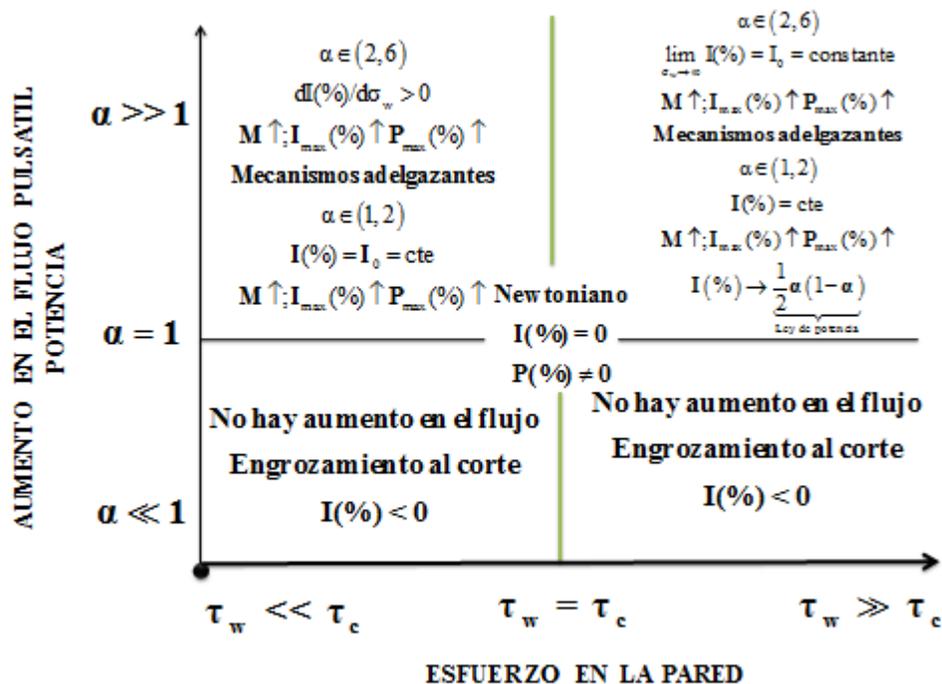


Figura 38. Resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en el flujo pulsátil.



- Cuando el exponente del modelo de Ellis alfa es igual a uno, el aumento en el flujo es siempre cero, mientras que el aumento de potencia para un fluido newtoniano siempre es diferente de cero.
- De acuerdo al modelo de Ellis, el introducir un gradiente de presión pulsátil en la ecuación de movimiento provoca un aumento en el flujo volumétrico, con respecto a aquel a gradiente de presión constante.
- Se demuestra que el cambio del flujo volumétrico es enorme en la región donde el líquido es adelgazante al corte. La predicción de estos aumentos depende de las propiedades no-newtonianas y de la amplitud M introducido en el gradiente de presión pulsátil.
- El aumento en el flujo volumétrico es una función de las propiedades materiales del sistema, en particular el aumento es mucho más grande cuando el líquido presenta adelgazamiento al corte es decir la viscosidad disminuye con la rapidez de deformación.
- De acuerdo con el modelo de Ellis, en el flujo pulsátil no se presentan las curvas resonantes descritas en la literatura (Bird et al. 1977, Phan-Thien 1980, 1981, Phan-Thien & Dudek 1981).
- A esfuerzo en la pared elevados, el flujo pulsátil es constante en todo el intervalo de simulación lo que concuerda con la literatura especializada en el tema (Phan-Thien et al. 1977; Phan-Thien 1980, 1981).

b) Flujo vibrátil

En el flujo vibrátil el fluido se deforma mediante un gradiente de presión constante y la pared se mueve en forma axial debido a una velocidad estocástica en la pared. Esta fuerza macroscópica que se impone en el sistema produce un cambio en el flujo volumétrico debido a la no linealidad asociada a las propiedades no newtonianas del modelo de Ellis.

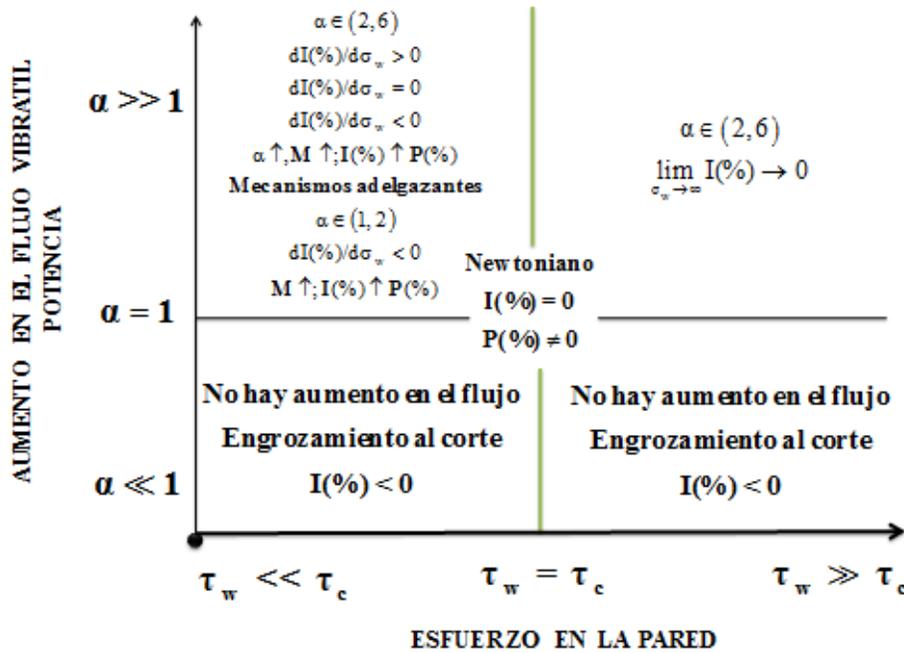


Figura 39. Resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en el flujo vibrátil.

La condición necesaria y suficiente para que exista un aumento en el flujo volumétrico es que el fluido sea adelgazante al corte, i.e. la viscosidad decrezca por efecto de la rapidez de deformación en el sistema.

c) Flujo combinado

En flujo combinado pulsátil y vibrátil combina un gradiente de presión pulsátil en el fluido y una velocidad estocástica impuesta en la pared del capilar la cual, se puede interpretar como una condición de no deslizamiento en la pared del sistema. En la Fig. 40 se ilustra cualitativamente los resultados más importantes:

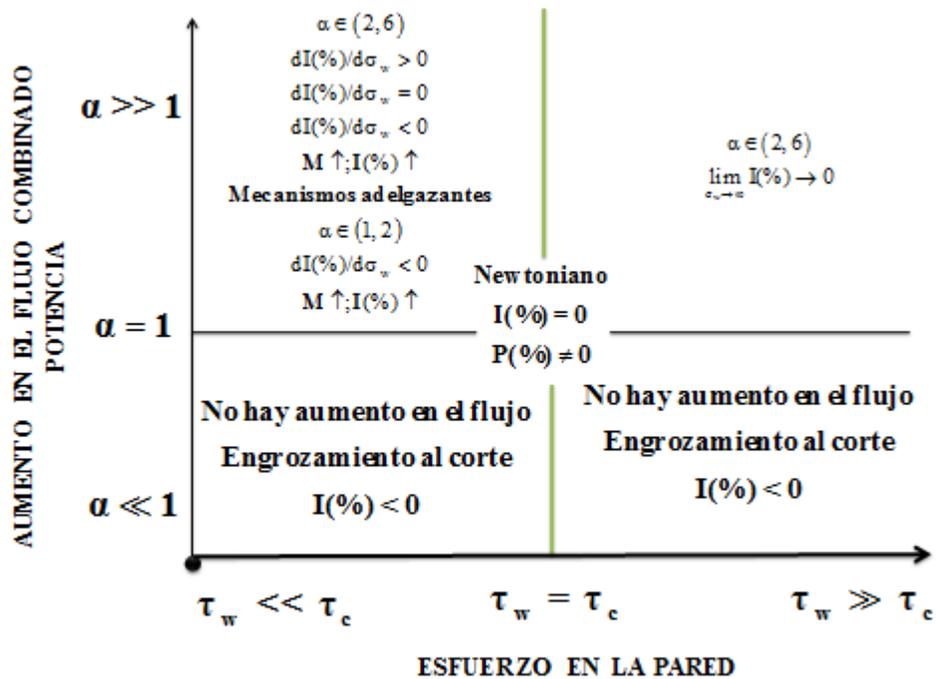


Figura 40. Resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en el flujo combinado.

Básicamente los resultados presentados en la Fig. 40 son una combinación de las Figs. 38-39 respectivamente. El aumento en el flujo combinado es cero mientras que el aumento en el trabajo irreversible por unidad de tiempo (potencia) es diferente de cero. Si el fluido aumenta su viscosidad conforme se deforma continua e irreversiblemente, i.e. el fluido es engrosante al corte, el aumento en el flujo volumétrico es negativo. Por otra parte cuando el sistema es adelgazante al corte el aumento en el flujo es positivo y este se ve modificado debido a tres factores: (i) Amplitud de la fuerza macroscópica, (ii) Efectos inerciales y viscosos a través del número de Reynolds y (iii) la frecuencia adimensional en el sistema. Nótese tres hechos importantes:

- Bajo las suposiciones matemáticas que se hicieron, el flujo combinado es la suma del flujo pulsátil y vibrátil.
- Para un alfa mayor a uno y menor a dos, i.e. $\alpha \in (1, 2)$ el sistema es dominado por el flujo vibrátil mientras que para un $\alpha \in (2, \infty)$ el flujo pulsátil domina sobre el vibrátil.
- El efecto del flujo vibrátil solo es cuantificable a valores bajos del esfuerzo en la pared.

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones más importantes de este trabajo.



CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES



8.1 Descripción física del problema

En este trabajo se analiza un líquido no-newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido se deforma continua e irreversiblemente debido a una combinación de dos tipos de flujo: (i) Gradiente de presión pulsátil y (ii) Vibrátil en la pared respectivamente.

Para caracterizar el líquido complejo se utiliza la ecuación constitutiva de Ellis, la cual consiste en la suma de dos modelos: Newtoniano y de Ostwald de Waele. El flujo combinado (pulsátil y vibrátil) es simulado por una función estocástica $n(t)$ con promedio cero, i.e. $\langle n(t) \rangle = 0$.

El sistema de ecuaciones acopladas, se resuelve suponiendo que la velocidad puede descomponerse en dos contribuciones estacionaria y no estacionaria. Este método es equivalente a utilizar un esquema de tipo perturbativo para las variables dinámicas (Herrera et al. 2009, 2010).

A partir de estos resultados, se obtienen expresiones analíticas para la velocidad axial y flujo volumétrico, los cuales pueden separarse en tres contribuciones principalmente:

- a) Velocidad o flujo volumétrico asociado con a la fuerza macroscópica debido al flujo vibrátil.
- b) Velocidad o flujo volumétrico asociado a los mecanismos viscosos modificados por los efectos inerciales.
- c) Velocidad of flujo volumétrico asociado con los mecanismos no newtonianos del modelo de ley de potencia modificados por la contribución inercial.

$$X(t) = X_{\text{Vibratil}} + X_{\text{Newtoniano+Inercia}} + X_{\text{No-Newtoniano+Inercia}} ; X = \{V_z, Q\}$$

A partir de estas expresiones, se calcula el aumento en el flujo y la potencia de acuerdo con la siguiente expresión:

$$Y(\%) = 100 \frac{Y(t) - Y_0}{Y_0}; Y = \{Q, P\}$$

Los resultados muestran que el aumento y la potencia son funciones de las propiedades no newtonianas del modelo de Ellis (Exponente del modelo de Ellis, fluideces a corte bajo y moderado respectivamente). Con el fin de simplificar las simulaciones se propone un conjunto de variables adimensionales que permiten acotar el espacio solución e introducir números adimensionales los cuales cuantifican los mecanismos globales que dominan el sistema en este caso, el número que describe la física del sistema es el número de Reynolds. Este número cuantifica los mecanismos inerciales y viscosos y describe la transición de flujo en el sistema de laminar ($Re < 2100$), Transitorio ($Re \in (2100, 10000)$) o Turbulento ($Re > 10000$) respectivamente.

El aumento en el flujo volumétrico total $I(\%)$ puede separarse en una contribución asociada al flujo pulsátil y otra al vibrátil respectivamente, i.e.

$$I(\%) = I_p(\%) + I_v(\%)$$

Tanto el flujo pulsátil como vibrátil dependen de la amplitud de las perturbaciones estocásticas, el exponente alfa del modelo de Ellis el cual, se relaciona a los procesos adelgazantes y engrosantes al corte en el fluido y finalmente del esfuerzo en la pared en el sistema.

$$I_p(\%) = I_p(M, \alpha, \sigma_w^*)$$

Por otra parte, el flujo vibrátil depende de las variables antes mencionadas, pero además de la frecuencia dimensional y del número de Reynolds antes mencionado.

$$I_v(\%) = I_v(M, \alpha, \sigma_w^*, \omega^*, Re)$$

Los dos tipos de flujo se relacionan entre si de la siguiente forma:

$$\frac{I_v(\%)}{I_p(\%)} = \left(\frac{\omega^* Re}{2\sigma_w^*} \right)^2$$

Es decir, el aumento en el flujo vibrátil es un múltiplo del flujo pulsátil. El aumento en la potencia se puede calcular de una forma muy similar:



$$P(\%) = 50M^2 \frac{\omega^* + \frac{1}{4}\sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha+3)}(\sigma_w^*)^\alpha \left(\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \frac{Re\omega^*}{\sigma_w^*} \right)^2 \right) \right)}{\frac{1}{4}\sigma_w^* + \frac{1}{(\alpha+3)}(\sigma_w^*)^\alpha}$$

El aumento de potencia es una combinación de los dos tipos de flujo, es decir depende de la amplitud, el exponente alfa del modelo de Ellis, del número de Reynolds y de la frecuencia adimensional.

$$P(\%) = P(M, \omega^*, \alpha, Re, \sigma_w^*)$$

Finalmente, con el fin de cuantificar las predicciones del modelo inelástico de Ellis en el sistema combinado se utilizan datos reométricos de un sistema coloidal estudiado en flujo pulsátil y que recientemente fue publicado.

A partir de estos resultados, se obtienen las siguientes conclusiones de esta investigación:

- A) El aumento en el flujo volumétrico es cero para un fluido newtoniano es decir, para un fluido que no importa cómo se deforme su viscosidad no cambia.
- B) La potencia del flujo combinado es diferente de cero para el flujo pulsátil mientras que para el vibrátil es cero, por ende el flujo combinado presenta una potencia diferente de cero.

8.2 Flujo pulsátil

- C) La condición necesaria para que exista aumento en el flujo pulsátil, es que el fluido sea adelgazante al corte, i.e. el exponente alfa de ver ser mayor a uno $\alpha > 1$, lo que implica que el fluido debe de disminuir su viscosidad en función de la rapidez de deformación o esfuerzo en la pared.
- D) El aumento en el flujo pulsátil muestra un comportamiento monótono creciente a valores bajos de esfuerzo en la pared, mientras que para un esfuerzo crítico es constante e independiente del esfuerzo en la pared.

- E) El valor máximo en el flujo pulsátil se puede modificar debido a la amplitud de las funciones estocásticas.
- F) La potencia en el flujo pulsátil, muestra al igual que el aumento en el flujo volumétrico un comportamiento monótono creciente seguido de un comportamiento constante a un valor crítico de un esfuerzo en la pared.
- G) El flujo pulsátil domina sobre el flujo vibrátil para un valor de alfa crítico, i.e. para un $\alpha \in (2, \infty)$ el flujo pulsátil es mayor que el vibrátil $I_p > I_v$.

8.3 Flujo vibrátil

- A) La condición necesaria para que exista aumento en el flujo vibrátil, es que el fluido sea adelgazante al corte, i.e. el exponente alfa de ver ser mayor a uno $\alpha > 1$, lo que implica que el fluido debe de disminuir su viscosidad en función de la rapidez de deformación o esfuerzo en la pared.
- B) El aumento en el flujo vibrátil muestra un comportamiento resonante, i.e. a valores bajos de esfuerzo en la pared, el sistema muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo a un valor crítico de esfuerzo en la pared, y para valores mayores del esfuerzo crítico el sistema describe un comportamiento monótono decreciente.
- C) El valor del máximo en el flujo vibrátil está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscosas del modelo del Ellis y de la perturbación en la pared.
- D) AL igual que el flujo pulsátil, el valor máximo del sistema vibrátil se puede modificar debido a la amplitud de la función estocástica.
- E) A diferencia del flujo pulsátil, el flujo vibrátil domina sobre el flujo pulsátil para un valor de alfa crítico, i.e. para un $\alpha \in (1, 2)$ el flujo vibrátil es mayor que el pulsátil $I_p < I_v$.

8.4 Flujo combinado pulsátil + vibrátil

- A) El flujo combinado presenta una transición de flujo debido a los valores críticos del exponente alfa. Para un alfa $\alpha \in (1, 2)$ el flujo vibrátil domina sobre el



flujo pulsátil mientras que para $\alpha \in (2, \infty)$ el flujo pulsátil domina sobre el vibrátil.

- B) La potencia muestra una relación igual es decir, una transición de flujo en donde a valores bajos de alfa la potencia del flujo vibrátil domina sobre el flujo pulsátil, sin embargo a valores mayores a 2, i.e. $\alpha > 2$ el sistema es dominado por el flujo pulsátil.

8.5 Aplicación al sistema coloidal.

Para probar las bondades de nuestro modelo, se utilizó un sistema coloidal el cual se puede interpretar como una suspensión en donde el tamaño de partícula es del orden de nanómetros. Se ajustaron los datos reométricos del artículo Phan-Thien et al. 2015 y se encontraron que el exponente alfa es igual a 1.17647. A partir de este valor, se calcularon los perfiles de velocidad, aumento en el flujo y potencia. Los resultados concuerdan con las predicciones teóricas y las simulaciones. Las principales conclusiones se enlistan a continuación:

- a) Para el valor de alfa calculado implica que el sistema es dominado por el flujo vibrátil.
- b) El flujo pulsátil describe un comportamiento casi constante y su valor está determinada por la amplitud de las perturbaciones respectivamente.
- c) Los valores de los perfiles de velocidad se ven modificados debido a los mecanismos inerciales y el valor del máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades macroscópicas del sistema.
- d) Las interacciones partícula-partícula se desprecian en el aumento de flujo.
- e) Las interacciones partícula-cúmulo se desprecian en la contribución al aumento en el flujo.
- f) Las interacciones cúmulo- cúmulo se desprecian de la misma manera

Por otra parte, se encontró que el efecto combinado de los dos flujos ayuda al aumento en el flujo sin embargo, este se presenta a esfuerzos en la pared bajos y modera-



dos. Este aumento es del orden de un 5 % con respecto a los sistemas de flujo por separado. Finalmente, en el siguiente capítulo se presenta las posibles alternativas y caminos a seguir para enriquecer este tipo de investigación en flujos pulsátiles.



CAPÍTULO IX

TRABAJO FUTURO

En este trabajo se analiza un líquido no-newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio $R = a$ y longitud $z = L$. El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido fluye debido a una combinación de dos tipos de flujo lo cuales, son: (i) Gradiente de presión pulsátil y (ii) Vibrátil en la pared respectivamente. El movimiento oscilatorio en ambos fluidos es simulado por una función estocástica $n(t)$, en la cual su promedio es cero. Suponiendo estado no estacionario y fluido incompresible el sistema de ecuaciones acopladas, se resuelve mediante una técnica de tipo perturbativo, suponiendo que la velocidad puede descomponerse en dos contribuciones estacionaria y no estacionaria.

A partir de éste, se calcula el flujo volumétrico perturbado y se compara con el correspondiente sin perturbación. Para caracterizar el líquido complejo con estructura transitoria se utiliza el modelo de Ellis, el cual consiste en una combinación del modelo newtoniano con el modelo de Ostwald de Waelle.

a) Modelos viscoelásticos lineales

Otra de las incorporaciones naturales de este trabajo, son los efectos elásticos a través de los tiempos de relajación de Maxwell, Jeffreys, Burgers y Maxwell Generalizado. Estos modelos reológicos podrían incorporar información acerca de la memoria de los materiales en el sistema de flujo. Un ejemplo de estos modelos, es la ecuación reológica constitutiva de Jeffreys, la cual contiene tres parámetros materiales: (i) un tiempo viscoelástico de Maxwell, (ii) un tiempo viscoelástico de Jeffreys y (iii) una viscosidad a bajo corte.

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$

El modelo de Jeffreys es una combinación de los esfuerzos asociados al solvente y al sistema complejo (polímero) respectivamente (Bird et al. 1987, 2002). Otro modelo de orden superior, que nos permite caracterizar al material es el modelo de Burgers de segundo orden, el cual se describe a continuación:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$



Esta ecuación constitutiva es de segundo orden en la derivada y podría arrojar información útil a través de los parámetros materiales asociados al sistema $\{\lambda_M, \lambda_J, \beta, \eta_0\}$.

b) Modelos viscoelásticos no lineales

Por otra parte, fenómenos más complejos están relacionados con el régimen de viscoelasticidad no lineal a través de ecuaciones constitutivas no lineales que describan la naturaleza compleja de estos sistemas. En este punto se pueden utilizar modelos como son: (i) Tanner, (ii) White-Metzner, (iii) Oldroyd-B, (iv) Giesekus entre otros (Bird et al. 1987, 2002). Las Ecuaciones constitutivas mencionadas tiene la siguiente estructura matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta(\Pi_D)}{G_0} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \underbrace{(\nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V})}_{\text{Terminos-nonlineales}} \right\} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

En la ecuación no lineal, ∇ es el operador convectivo superior de Maxwell el cual, cuantifica los efectos no lineales en el sistema debido a los cambios de la viscosidad por efecto de la rapidez de deformación en el sistema de flujo. Por otra parte los efectos elásticos se pueden

9.1 Efectos convectivos y transitorios en la temperatura

Por otra parte, se pueden incorporar los efectos convectivos y transitorios de la ecuación de transporte de energía, en este caso, el conjunto de ecuaciones acopladas que resultan de nuestras nuevas hipótesis son las siguientes:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} Vz(r,t) = -\frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad ; \quad \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial r} = v_0 \sigma_{rz} + v_1 (\sigma_{rz})^a$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + Vz(r,t) \frac{\partial}{\partial r} \right) T = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \sigma_{rz} \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial r}$$

En este punto, se incorporan estos mecanismos (convectivos y transitorios) a través de la derivada material DT/Dt de la ecuación de transporte de energía. Esta derivada

describe los cambios de la temperatura temporalmente y con el espacio en la dirección de la velocidad.

9.2 Métodos matemáticos y computacionales

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas: (i) momento, (ii) energía y (iii) constitutiva, pueden ser empleados diferentes técnicas matemáticas como son: (i) Teoría de perturbaciones, (ii) Métodos numéricos basados en diferencias finitas y elemento finito. Por otra parte, para visualizar los patrones de flujo en el sistema, se puede utilizar paquetes comerciales tipo COMSOL-MULTIPHYSICS, CFD, etc, los cuales se basan en discretizar el espacio en donde se describe el sistema físico, por medio de mallas las cuales describen el espacio en el que se resuelven las ecuaciones dinámicas del sistema.

9.3 Sistemas y Reometría

Otro punto importante en este trabajo es el concerniente a reometría en un viscosímetro de platos concéntricos y por medio de pruebas de compresión calcular los parámetros materiales que describen el flujo y la reología de estos materiales. Aquí, se puede caracterizar diferentes tipos fluidos complejos como son: (i) Sistemas Micelares, (ii) Polímeros, (iii) Polímeros Asociativos, (iv) fibras naturales o sintéticas, (v) Cristales Líquidos entre otros.

Finalmente, este tema de tesis motiva el estudio de sistemas complejos los cuales, son punto de partida en la busca del modelado de materiales nuevos, basados en mimetizar a los creados por la naturaleza. La presente investigación representa un paso en la búsqueda constante de modelos simples que nos permitan dilucidar cómo funcionan estos sistemas y se entienda su uso en la formulación de nuevos materiales aplicados a la industria de procesamiento de polímeros.



APÉNDICE

Cálculo de la Fracción de Potencia

En esta sección se calcula la fracción de potencia utilizada en la combinación del flujo pulsátil y oscilante respectivamente:

$$P(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p(t) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p_0 (1+n(t)) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} \quad (A-1)$$

Finalmente la fracción de potencia consumida, toma la forma:

$$P(\%) = 100 \frac{\langle Q(t)(1+n(t)) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (A-2)$$

Multiplicando el flujo pulsátil por el gradiente de presión se tiene lo siguiente:

$$Q(t) \nabla p(t) = \pi a^3 \omega n(t)(1+n(t)) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t))^2 + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t)(1+n(t)) \right) a - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a (1+n(t)) + \frac{1}{2} \rho \omega a \dot{n}(t)a \right)^\alpha (1+n(t)) \quad (A-3)$$

Al tomar el promedio, de la contribución transitoria se tiene la siguiente expresión:

$$Q(t) \nabla p(t) = \pi a^3 \omega n(t) + \pi a^3 \omega n^2(t) - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left((1+2n(t)+n^2(t)) + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \left(\dot{n}(t) + \dot{n}(t)n(t) \right) \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \left(H_1 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) + H_2 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) \right) \quad (A-4)$$

En donde las funciones H_1 y H_2 están dadas por las siguientes expresiones:

$$H_1 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) = \sigma_w \left(1 + \alpha \left(n(t) + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \dot{n}(t) \right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(n^2(t) + \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} n(t) \dot{n}(t) + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right) \right) \quad (A-5)$$



$$H_2 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) = \sigma_w \left(\begin{array}{l} n(t) + \alpha \left(n^2(t) + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \dot{n}(t) n(t) \right) \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(n^3(t) + \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a n^3(t) \dot{n}(t) + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \right)^2 \left(\dot{n}(t) \right)^2 n(t) \right) \end{array} \right) \quad (A-6)$$

Promediando la potencia transitoria, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \nabla p(t) \rangle &= \pi a^3 \omega \langle n(t) \rangle + \pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle \\ - \frac{\pi \nu_0 a^3}{4} \sigma_w &\left(\left(1 + 2 \langle n(t) \rangle + \langle n^2(t) \rangle \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \left(\langle \dot{n}(t) \rangle + \langle \dot{n}(t) n(t) \rangle \right) \right) \\ - \frac{\pi \nu_1 a^3}{\alpha + 3} &\left(\left\langle H_1 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) \right\rangle + \left\langle H_2 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (A-7)$$

En donde los promedios de las funciones H1 y H2 se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left\langle H_1 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) \right\rangle &= \\ \sigma_w &\left(\begin{array}{l} 1 + \alpha \left(\langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \langle \dot{n}(t) \rangle \right) \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(\langle n^2(t) \rangle + \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \langle n(t) \dot{n}(t) \rangle + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a)}{\sigma_w} a \right)^2 \langle \left(\dot{n}(t) \right)^2 \rangle \right) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (A-8)$$

$$\left\langle H_2 \left(\sigma_w, \alpha, \rho, \dot{n}(t), \omega \right) \right\rangle = \sigma_w \left(\begin{aligned} & \langle n(t) \rangle + \alpha \left(\langle n^2(t) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \langle \dot{n}(t) n(t) \rangle \right) \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(\langle n^3(t) \rangle + \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \langle n^3(t) \dot{n}(t) \rangle + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 \langle (\dot{n}(t))^2 n(t) \rangle \right) \end{aligned} \right) \quad (A-9)$$

Simplificando, se obtiene la siguiente expresión para la potencia.

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \nabla p(t) \rangle &= \pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + \langle n^2(t) \rangle \right) \\ &- \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w \left(1 + \alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(\langle n^2(t) \rangle + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 \langle (\dot{n}(t))^2 \rangle \right) \right) \end{aligned} \quad (A-10)$$

Sustituyendo en la expresión para la potencia, se tiene:

$$P(\%) = 100 \frac{\pi a^3 \omega \langle n^2(t) \rangle - \frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w \left(1 + \langle n^2(t) \rangle \right) - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w \left(1 + \alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(\langle n^2(t) \rangle + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho(\omega a) a}{\sigma_w} \right)^2 \langle (\dot{n}(t))^2 \rangle \right) \right) - \left\{ -\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w \right\}}{-\frac{\pi v_0 a^3}{4} \sigma_w - \frac{\pi v_1 a^3}{\alpha+3} \sigma_w} \quad (A-11)$$

Finalmente simplificando las expresiones, se tiene lo siguiente:



$$P(\%) = 100 \frac{\omega \langle n^2(t) \rangle + \frac{v_0}{4} \sigma_w \langle n^2(t) \rangle + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^\alpha \left\langle \left(\alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(n^2(t) + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho \omega a a}{\sigma_w} \right)^2 \left(\dot{n}(t) \right)^2 \right) \right) \right\rangle}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^\alpha}$$

(A-12)

Sustituyendo la función estocástica definida en el capítulo 4, la expresión analítica para la potencia está definida por la siguiente expresión analítica.

$$P(\%) = 50M^2 \frac{\omega + \frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^\alpha \left\langle \left(\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \left(1 + \omega^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\rho \omega a a}{\sigma_w} \right)^2 \right) \right) \right\rangle}{\frac{v_0}{4} \sigma_w + \frac{v_1}{\alpha+3} (\sigma_w)^\alpha}$$

(A-13)

REFERENCIAS



Abou-Dakka, M., Herrera-Valencia, E.E. & Rey, A.D., Oscillatory dynamics of flexoelectric membranes in viscoelastic media with applications to outer hair cells, *J Non-Newton. Fluid Mech.* 185-186 (2012) 1.

Barnes, H.A, Townsend, P. & Walters, K., On pulsatile flow of non-newtonian liquids, *Rheol. Acta* 10 (1971) 517–527.

Barnes, H.A., Towsend, P., & Walters, K., Flow of non-newtonian liquids under a varying pressure gradient, *Nature* 224 (1969) 585–587.

Bird, R.B., R.C. Armstrong, R.C. & Hassager, O., *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1: Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1977).

Calderas, F., Sánchez-Solís, A. & Manero, O., *Macromol Symp.*, 283-284 (2009) 354.

Casulli, J.R., Clermont, Von Ziegler, A. & Mena, B., *Polym. Eng. Sci.*, 30 (1990) 1551.

Del Rio, J.A., López de Haro, M. & Whitaker, S., *Phys. Rev. E*, 50 (1998) 6323.

Davies, J.M., Bhumiratana, S., & Bird, R.B., Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 3(1978) 237–259.

De Andrade Lima, L.R.P. & Rey, A.D., Pulsatile flow of discotic mesophases, *Chem. Eng. Sci.* 60 (2005) 6622–6636.

De Andrade Lima, L.R.P. & Rey, A.D., Pulsatile flows of Leslie–Ericksen liquid crystals, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 135 (2006) 32–45.

Foss, D.R. & Brady, J.F., Structure, diffusion and rheology of Brownian suspensions by Stokesian dynamics simulation, *J. Fluid Mech.* 407 (2000) 167–200.

Frank, M., Anderson, D., Weeks, E.R. & Morris, J.F., Particle migration in pressure driven flow of a Brownian suspension, *J. Fluid Mech.* 493 (2003) 363–378.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O., Study on the pulsating flow of a worm-like micellar solution, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 165 (2010) 174–183.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O., Study on the pulsating flow of a worm-like micellar solution, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 165 (2010) 174–183.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chávez, A.E., Manero, O., & Mena, B., Effect of Random longitudinal Vibrations on the Poiseuille Flow of a Complex Liquid. *Rheol. Acta*, 48 (2009) 779-800.

Herrera-Valencia E.E & Rey, A.D., Mechano-electric transduction performance of actuation devise based on liquid cristal membrane flexoelectricity *Phil. Trans. R.Soc. A*, 372 (2014) 20130369.

Herrera-Velarde, J.R., Zenit, R. & Mena, B., Viscous Dissipation of a power law fluid in an oscillatory pipe flow, *Rev. Fis. Mex. Fis.*, 47 (2001) 351-356.

Herrera-Velarde, J.R., Zenit, R. & Mena, B., Measurement of the temperature rise in non-Newtonian oscillatory pipe flows, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 109 (2003) 157-176.

Herrera-Velarde J.R. & Mena, B., Oscillatory flows of viscoelastic fluids, *Rev. Mex. Fis.*, 46 (2000) 566-571.

Lin, Y., Phan-Thien, N. & Khoo, B.C., Short-term and long-term irreversibility in particle suspensions undergoing small and large amplitude oscillatory stress, *J. Rheol.* 57 (2013) 1325–1346.

Lyon, M.K. & Leal, L.G., An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. Part 1. Monodisperse systems, *J. Fluid Mech.* 363 (1998) 25–56.

Lyon, M.K. & Leal, L.G., An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. Part 2. Bidisperse systems, *J. Fluid Mech.* 363 (1998) 57–77.



Manero, O. & Mena, B., An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes,

Rheol. Acta, 17 (1977) 573-575.

Manero, O., Valenzuela, R. & Mena, B., Further developments on non-Newtonian flow in oscillating pipes; interesting effects and applications, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 5 (1979) 427-447.

Morris, J.F. A review of microstructure in concentrated suspensions and its implications for rheology and bulk flow, *Rheol. Acta* 48 (2009) 909–923.

Mena, B., Manero, O. & Binding, D.M., *J. Non Newton. Fluid Mech.*, 5 (1979) 427.

Moyers-Gonzalez, M.A. & R.G. Owens, R.G., *Biorheology*, 47 (2010) 39.

Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., *J Non-Newton. Fluid Mech.*, 613 (2009) 45.

Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., *J. Fluid Mech.*, 617 (2008a) 327.

Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., *J Non-Newton. Fluid Mech.*, 155 (2008b) 146.

Moyers-Gonzalez, M.A., Owens, R.G. & Fang, J., *J. Fluid Mech.*, 155 (2008c) 161.

Nott, P.R. & Brady, J.F., Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory, *J. Fluid Mech.* 275 (1994) 157–199.

Ostwald, W., *Kolloid-Z*, 36 (1925) 99.

Owens, R.G., *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 140 (2006) 57.

Phan-Thien, N., On a pulsating flow of polymeric fluids, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 4 (1978) 167–176.

Phan-Thien, N., On a pulsating flow of polymeric fluids– strain-dependent memory kernels, *J. Rheol.* 25 (1981) 293–314.

Phan-Thien, N. & Dudek, J., Pulsating flow of a plastic fluid, *Nature* 296 (1982) 843–844.



Phan-Thien, N. & Dudek, J. Pulsating flow revisited, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 11 (1982) 147–161.

Phan-Thien, N., Constitutive equation for concentrated suspensions in newtonian liquids, *J. Rheol.* 39 (1995) 679–695.

Phan-Thien, N., Fan, X.J. & Khoo, B.C., A new constitutive model for monodispersed suspensions at high concentrations, *Rheol. Acta* 38 (1999) 297–304.

Pérez-Camacho, C., López-Aguilar, J.E., Calderas, F., Manero, O. & Webster, M.F. *J. Non Newton. Fluid Mech.*, 5 (2015) 1-12.

Phan-Thien, N. & Fang, Z., Entrance length and pulsatile flows of a model concentrated suspension, *J. Rheol.* 40 (1996) 521–548.

Phillips, R.J., Armstrong, R.C., Brown, R.A., Graham, A.L. Abbott, J.R., A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration, *Phys. Fluids A: Fluid Dynam.* 4 (1992) 30–40.

Rampall, I., Smart, J.R. & Leighton, D.T., The influence of surface roughness on the particle-pair distribution function of dilute suspensions of non-colloidal spheres in simple shear flow, *J. Fluid Mech.* 339 (1997) 1–24.

Rey, A.D. & E.E. Herrera-Valencia, E.E., *Biopolymers J.*, Liquid crystals models of biological materials and silk spinning, *Biopolymers J.*, 97 (2012) 374-396.

Shulman, Z.P., Khusid, B.M. & Shabunina, Z.A., Nonisothermal flow of a polymeric liquid under a pulsating pressure gradient, *J. Eng. Phys.* 51 (1986) 1005–1010.



Sierou, A. & Brady, J.F., Rheology and microstructure in concentrated noncolloidal suspensions, *J. Rheol.* 46 (2002) 1031–1056.

Stickel, J.J. & Powell, R. L. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 37 (2005) 129–149.

Sundstrom, D.W. & Kaufman, A., Pulsating flow of polymer-solutions, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Develop.* 16 (1977) 320–325.

Lin, Y., Han-Tan, G.W., Phan-Thien, N., Cheong Khoo, B., Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspensions in tubes, *J Non-Newton. Fluid Mech.*, 212 (2014) 13–17.