



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA AFINACIÓN MUSICAL COMO UN FENÓMENO
DE LA DINÁMICA NO LINEAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALEJANDRO JAVIER ALARCÓN GONZÁLEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. PEDRO EDUARDO MIRAMONTES VIDAL**

2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Alarcón
González
Alejandro Javier
019933517566
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
407075377

2. Datos del tutor
Dr.
Pedro Eduardo
Miramontes
Vidal

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Pablo
Padilla
Longoria

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Angel Manuel
Carrillo
Hoyo

5. Datos del sinodal 3
Dr.
David Philip
Sanders

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Jefferson Edwin
King
Dávalos

7. Datos del trabajo escrito
La afinción musical como un fenómeno de la dinámica no lineal
80 p.
2015

Índice general

1. Introducción	3
2. Antecedentes musicales	7
2.1. Escalas	7
2.1.1. Afinación pitagórica	9
2.1.2. Escalas diatónicas	12
2.1.3. Temperamentos	16
3. Introducción a la dinámica no lineal	19
3.1. Atractores	23
3.2. Sistemas no lineales	31
4. Sincronización y lenguas de Arnold	41
4.1. Sincronización de un oscilador periódico por un forzamiento externo	46
4.1.1. Enganchamiento de fases y de frecuencias	49
4.2. Teoría del mapeo circular	55
5. Música y lenguas de Arnold	67
6. Conclusiones	75

Capítulo 1

Introducción

“Music the dream, mathematics the working life.”
James Joseph Sylvester

Este trabajo de tesis trata sobre la vieja relación entre música y matemáticas. Ésta se puede trazar hasta la época de Pitágoras. Y es justamente un problema iniciado por el filósofo de Samos el que me atañe: la afinación musical. Como su debido entendimiento está íntimamente ligado a la comprensión de la serie armónica y de las proporciones entre frecuencias vibratorias, la música se estudiaba junto con la geometría, la aritmética y la astronomía. Sobre esto se ha escrito mucho, y un libro en donde se puede ahondar al respecto es [3].

Ahora bien, mi propósito es vincular la afinación musical con el fenómeno natural de la *sincronización*. Ésta es bien conocida por los londinenses, al menos los que recuerdan la inauguración del *Millenium Bridge*, el puente del milenio. En este video se puede observar lo sucedido: <https://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU>. Lo que pasó, es que éste puente, aparentemente rígido, empezó a bambolearse hacia los lados cuando las primeras (miles de) personas lo cruzaron. Esto provocó que la gente empezara a caminar chistosamente hacia los lados, empujados por el temor de no caer a las aguas del Támesis. Todos copiaron entre sí la forma, el ritmo y el rumbo del siguiente paso, para sentir la mayor estabilidad posible. ¿Recuerdan la última vez que estuvieron en un puente colgante con alguien más? ¿Acaso ese alguien más trato de balancear el puente para provocar su miedo? Pues entonces, se acordarán, que si trataron de moverse contrariamente al movimiento del puente,

efectivamente consiguieron una situación alarmante, por lo que en caso de querer avanzar, tuvieron que imitar los pasos de su querido o querida acompañante. Lo mismo le pasó a los humildes londinenses, cuando entusiasmados por tomar un camino más corto para llegar al servicio, en la catedral de San Pablo, se encontraron avanzando como patos; siendo que entre más patos se sumaban al movimiento, más pronunciados los tambaleos.

Otro ejemplo de sincronización es el siguiente: <https://www.youtube.com/watch?v=W1TMZASCR-I>. En este video se observan cinco metrónomos, dispuestos cada uno para marcar el mismo número de golpes por minuto. Son puestos en marcha por separado, procurando que no coincidan sus señales sonoras (el tic-tac). Cuando la tabla donde están colocados, se dispone sobre un par de latas, éstas empiezan a moverse, produciendo cambios en sus ritmos, hasta que eventualmente los metrónomos llegan a marcar el mismo compás. Lo que sucedió fue un intercambio de información entre los osciladores, por medio de su acoplamiento en la tabla y facilitado por las latas. Este fenómeno fue descubierto por Huygens, y fue de vital importancia en la historia de la medición del tiempo, ya que dio origen al diseño y producción de los primeros relojes de péndulo, ver [14, p. 1,2,3].

Durante el transcurso de la tesis, se analiza la interacción de dos *osciladores auto sostenidos*, a partir de la cual, se deduce el mapeo circular. Dicho mapeo proveerá de las frecuencias que a su vez formarán nuevos *sistemas de afinación musical*. Para que éstas afinaciones formen *temperamentos* (que se explicarán a su debido tiempo), se requerirá de la *periodicidad* del mapeo, que corresponde con la sincronización de los osciladores.

Partiendo del hecho de que el sonido es un fenómeno físico, y como tal susceptible a ser matematizable, en el capítulo dos se formalizan las nociones musicales de altura, intervalo, escala y afinación. La importancia de este primer capítulo no es sólo la de presentar las bases de la acústica musical, sino también la de motivar la construcción de nuevas afinaciones. Este capítulo está dirigido al público en general, por lo que se no asume un conocimiento musical previo.

El siguiente capítulo es una presentación de la teoría cualitativa de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Se abordan conceptos esenciales para sistemas de una y dos dimensiones, a decir, el campo vectorial, el espacio y retrato de fases, los puntos singulares y su clasificación, las condiciones para la linearización de sistemas no lineales en una vecindad

de un punto singular, la formación de ciclos límites, entre otros. Además, se incluyen algunas nociones de los sistemas dinámicos discretos. Todo este material se utilizará en el análisis de un sistema específico: el mapeo circular, para el cual también se presentan las ideas de fase, frecuencia y periodo. Asimismo, se procura siempre vincular todos los conceptos con su contraparte física, para ofrecer un entendimiento más integral y por ser la usanza en la literatura.

En el capítulo tres, dedicado al mapeo circular, se deduce su ecuación a partir del análisis de la interacción de dos osciladores autosostenidos y se plantean las propiedades concernientes al estado de sincronización de los osciladores, haciendo especial énfasis en las regiones del espacio de parámetros del sistema donde se obtiene el acoplamiento de las fases, regiones conocidas como lenguas de Arnold.

En el último capítulo se analiza la aplicación del mapeo circular en la construcción de afinaciones musicales.

Capítulo 2

Antecedentes musicales

2.1. Escalas

La traducción al español del *Oxford Companion to Music* dice lo siguiente: “Una *escala* no es una pieza musical, sino un elemento constructivo teórico o analítico [...] Los grupos humanos suelen adoptar en su música expresiones e inflexiones características que, con el paso del tiempo adquieren entonaciones con *alturas e intervalos* determinados [...] La escala se forma ya sea con una selección o con todas las notas características de la música de un período, cultura o repertorio determinados; la distribución de las notas sigue un orden ascendente o descendente de alturas sucesivas” [2, p. 532].

Aquí vale la pena detenernos un poco. Muchos aprendimos en la escuela primaria que las notas de la escala son *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*. Algunos también habrán visto la película “*La novicia rebelde*” [6] y se acordarán de la escena en que María, encarnada por Julie Andrews, lleva de paseo a los niños por las calles de Salzburgo, mientras cantan “Do-Re-Mi”. Por medio de esta canción, María les enseña las sílabas del *solfeo*, desde *Do* hasta *Si* y cada una bien entonada (porque de eso se trata el solfeo). También les explica que si aprenden a cantar esas notas pueden combinarlas para crear millones de melodías, “*You can sing a million tunes by mixing them up*”. Y precisamente a esto se refiere la definición de escala que se menciona al principio del párrafo; que las escalas no son una pieza musical o una canción, sino que son tan sólo un conjunto de notas con las cuales se componen las obras musicales. Ahora bien, el tipo de escala subyacente a una pieza en específico depende de criterios enteramente culturales. Por lo tanto, no es de

sorprenderse que hayan tantísimas escalas. Las notas del solfeo son sólo un ejemplo de escala, si bien es cierto que ésta es la de uso más extendido en la actualidad.

El *Oxford Companion to Music* continúa diciendo: “Esto sería impreciso si la música se limitara exclusivamente al canto; sin embargo, la construcción de instrumentos musicales que permitan tocar las mismas melodías requiere de cálculos interválicos exactos organizados a manera de escala. En el mundo occidental, desde hace aproximadamente 10 siglos, con su desarrollo musical característico, se introdujo el elemento de la *armonía*, que ha influenciado en la selección y la definición de las alturas que conforman las escalas de su música [...] La función básica de las escalas es definir y regular las alturas que conforman una interpretación o una composición” [2, p. 532]. Entonces, realmente se ha necesitado sistematizar todo conocimiento práctico relacionado a las escalas. Para ello hay que entender varios conceptos, y la manera en que se abordarán será desde la perspectiva de la *acústica musical*, es decir, desde la naturaleza misma del sonido organizado.

Intervalos en las escalas

“La definición formal de las notas musicales se expresa en términos de frecuencias vibratorias” [2, p. 532]; a la percepción de ellas se le conoce como *altura*. Las alturas reciben distintos nombres en los varios sistemas de afinación existentes. “La *altura interválica* que separa dos notas se define mediante la relación entre sus dos respectivas frecuencias” [2, p. 532].

Cabe destacar que nuestro rango auditivo se encuentra entre los 20 a los 20,000 Hertz, es decir, que escuchamos frecuencias dentro de un espectro sonoro cuyos límites están en una proporción de 1000 : 1. Sin embargo, con el correr de los años se va disminuyendo la capacidad para percibir los sonidos más agudos. Las pruebas para conocer el rango auditivo de cada persona se conocen como *audiometrías*.

Al dividir una cuerda vibrante exactamente a la mitad, la cuerda completa vibra a una altura una *octava* más baja que la mitad de la cuerda, “relación expresada con la proporción 2 : 1, que constituye la relación proporcional de frecuencias más elemental de la acústica musical [...] En muchas culturas diferentes, hombres y mujeres, o bien adultos y niños, al entonar juntos una misma melodía, lo hacen en intervalos de octava de manera nat-

ural, sin una intención consciente o deliberada” [2, p. 532]. Lo anterior nos sugiere la noción musical de *equivalencia de alturas*, que ocurre cuando dos notas están separadas por una o varias octavas.

La frecuencia vibratoria de dos tercios de una cuerda vibrante eleva la altura a un intervalo de *quinta*, relación expresada con la proporción 3 : 2; mientras que un segmento de tres cuartos de longitud de la cuerda eleva la altura a un intervalo de *cuarta*, relación expresada con la proporción 4 : 3. Dichos intervalos son también comunes a muchas escalas.

Por otro lado, nuestro rango de visión, que va de los rojos a los violetas, abarca un espectro de frecuencias cuyos límites están en una proporción de 2 : 1. Para ponerlo en otras palabras, la variedad de colores que observamos, con todos sus infinitos matices, es un sistema que está contenido en un intervalo que cumple la proporción 2 : 1. Son todos los colores que la naturaleza nos permite ver y todos los colores que los artistas recrean en sus paletas. Por lo tanto, si queremos crear una “paleta sonora”, ya tenemos dos argumentos que nos sugieren la idea de dividir el rango auditivo en subrangos cuyos límites tengan la proporción 2 : 1.

Una vez dispuesta la analogía entre sonidos y colores, queda por definir cómo serían las alturas constituyentes de cada subrango, ya que la precisión requerida por una notación musical que sea práctica no permite una infinidad de ellas.

2.1.1. Afinación pitagórica

En la Grecia antigua, la escuela pitagórica estudiaba la astronomía, la matemática, la música y la filosofía. Esta escuela encontraba de especial interés la noción matemática de la proporción. Motivados, pues, por las proporciones, experimentaron con tinajas de agua, llenándolas a la mitad y comparándolas con el sonido que se escuchaba cuando la tinaja estaba llena por completo; se encontraron así con el intervalo de octava, el cual les pareció muy estable y de hecho pudieron haber pensando que dos notas separadas por una octava “sonaban igual”. Si el interés era construir un conjunto de notas suficientemente rico para ser usado en la elaboración de obras musicales, es claro que con puras octavas no lo conseguirían. Probaron entonces llenando la tinaja hasta los tres medios de su capacidad y al comparar el sonido con el de la tinaja llena por completo, encontraron el intervalo que hoy conocemos como “quinta” y que sería el segundo más estable (o consonante) de todos los intervalos que encontrarían mediante el procedimiento de probar con dis-

tintas proporciones. Fue así como sentaron las bases de la afinación moderna, mediante la construcción de un conjunto de notas $\{f_n\}$, que es en realidad una sucesión, donde la nota f_{n+1} es la quinta de la nota f_n .



Figura 2.1: Los experimentos sonoros de Pitágoras (Gaffurius,1492)

Lo ideal sería que con dicha afinación, después de un número entero de pasos, la sucesión regresara a la nota inicial *octavada*, es decir, una o varias octavas más aguda. Esto sería muy conveniente, puesto que haría de la construcción de instrumentos musicales un trabajo notablemente fácil. Pero descubrieron que no era así: al aplicar el procedimiento para una nota inicial cualquiera, después de 12 pasos se producía una nota que difería un poco de la nota inicial octavada siete veces; ver figura 2.2. A esta diferencia se le conoce como la coma pitagórica. Para investigar más sobre la coma pitagórica y de cómo las diversas correcciones que se le han hecho generan otros inconvenientes, se recomienda buscar en la entrada “temperamento” del *Oxford Companion to Music* [2, p. 1499,1500].

Explicando el párrafo anterior con más detalle, lo que deseaban los pitagóricos al construir una afinación, era llenar el intervalo de una octava con más

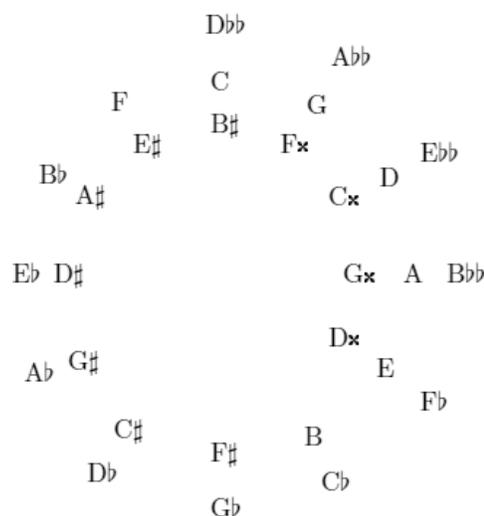


Figura 2.2: Tomada de [3, p. 157]. Esta imagen está basada en lo que se conoce como el *círculo de quintas*. Como su nombre lo dice, si recorremos la figura, encontramos un intervalo de quinta pura ($3 : 2$) entre cualesquiera dos notas subsiguientes. Por ejemplo, entre C y G o entre F \flat y B $\flat\flat$ hay una quinta. Ahora bien, si la imagen tiene más bien forma de espiral, es porque al dar doce pasos no regresamos a la nota inicial, sino a una muy cercana. Esta configuración por quintas es esencial para la teoría musical occidental, como se verá más adelante.

notas, y la manera en que procedieron a hacerlo fue con el uso de quintas. A continuación se explica el algoritmo que emplearon. Sea f_1 la frecuencia de referencia y llamémosle a ella la *fundamental*; también consideremos a $2f_1$, que está exactamente una octava arriba. La finalidad es llenar el intervalo entre f_1 y $2f_1$ con nuevas frecuencias que formen intervalos armoniosos con notas que ya están en la afinación. Como ya se mencionó, por medio de los experimentos con las tinajas de agua, los pitagóricos realmente escucharon la serie armónica de una nota arbitraria (la fundamental); y por la consonancia que se escuchaba al comparar el primer armónico con el tercero, escogieron esta altura interválica como base para construir notas. Sin embargo, el tercer armónico se encuentra afuera del intervalo entre f_1 y $2f_1$, por lo que dividieron su frecuencia a la mitad, obteniendo una frecuencia exactamente una

octava más abajo que el tercer armónico. Así se obtuvo una nueva nota, con frecuencia $f_2 = \frac{3}{2}f_1$. Después se obtuvo una tercer nota, con la frecuencia $f_3 = \frac{3}{4}f_2 = \frac{9}{8}f_1$. Con este procedimiento, se forma la sucesión de notas $\{f_n\}$, teniendo cuidado de dónde cae la nota nueva, puesto que si lo hace en una octava superior habrá que dividir su frecuencia entre alguna potencia de 2.

Lo que ahora queremos saber es si existe un número m natural tal que $f_m = 2^k f_1$ para algún k natural, que es lo mismo que preguntarnos por si la fundamental aparece de nuevo en la sucesión f_n . La respuesta es negativa. La frecuencia f_p es $\left(\frac{3}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2}\right)^q$, por lo que queremos saber si la ecuación

$$\left(\frac{3}{2}\right)^p \times \left(\frac{1}{2}\right)^q = 1$$

tiene solución en los enteros. Como 3^p es impar y 2^{p+q} es par, la ecuación no tiene solución [1, p. 132]. Por lo tanto los pitagóricos no pudieron construir una afinación cerrada basada en quintas.

2.1.2. Escalas diatónicas

De vuelta al *Oxford Companion to Music*, encontramos: “La escala *diatónica* está formada por siete alturas interválicas, cuya suma es una octava, y que se repite indefinidamente en otras octavas superiores e inferiores. Una forma de la escala diatónica está representada por las teclas blancas del teclado del piano, comenzando y terminando en do; los siete intervalos de esta forma tienen sólo dos tamaños, el tono entero, y el semitono o el medio tono [...] El tamaño (en frecuencias) de los semitonos, vistos como intervalos, son la mitad exacta de un tono entero; sin embargo, el origen de esta relación exacta, denominada *temperamento igual*, es relativamente reciente [...] La escala diatónica puede transportarse a todas las alturas del teclado, lo que implica el uso de las teclas negras, siempre y cuando el patrón de tonos y semitonos no se modifique” [2, p. 533]. En cambio, la escala *cromática* está conformada por las doce alturas representadas en el teclado del piano, y por lo tanto, sus doce intervalos son semitonos.

El desarrollo de la escala diatónica fue un proceso largo, y trataré de hacer un análisis retrospectivo con el objeto de justificar la construcción de nuevos temperamentos.

El sistema de alturas que se presentará a continuación es conocido como

temperamento justo, puesto que la diferencia entre cualesquiera dos frecuencias se puede representar como una proporción entre dos números enteros. La siguiente forma de derivar dicho temperamento (y la consiguiente escala diatónica) toma como inspiración las páginas de un libro ya algo viejo, pero no olvidado, que fue escrito por Lord Rayleigh [4, p. 8,9].

El principio es el siguiente: todos escuchamos los primeros armónicos de una cuerda; sólo basta con poner atención. Y con un poco más de curiosidad, los comparamos. ¿Cuáles son, pues, estos armónicos? Desconozco la respuesta para la población en general, pero sé de primera mano, que los músicos distinguen como mínimo hasta el quinto armónico. El primero f_1 , que es escogido arbitrariamente, es también conocido como primer grado. El segundo f_2 , que suena semejante al primero, decimos que forma un intervalo de una octava con respecto a f_1 . El tercero f_3 , que también he mencionado antes, es conocido como intervalo de quinta con respecto a f_2 . El cuarto f_4 , es f_2 una octava arriba. Y por último, sobre el quinto f_5 , decimos que forma un intervalo de tercera con respecto a f_4 . Al hacer un arreglo con ellos (dentro de una octava) nos quedamos sólo con tres, que ordenados de menor a mayor altura son f_1 , $f_5/4$ y $f_3/2$. De esta manera obtenemos un conjunto de notas que son base para la teoría musical occidental. A tal arreglo de notas se le llama *tríada*.

Definición 1 *La tríada mayor (comúnmente llamada el acorde mayor) está conformada por un intervalo de tercera mayor (5 : 4) y uno de quinta (3 : 2), ambos con respecto a una nota de referencia (llamada la fundamental del acorde).*

Al construir la tríada mayor sobre el primer grado (denotada como función de *tónica*), la quinta ascendida (denotada como función de *dominante*) y la quinta descendida (denotada como función de *subdominante*), se obtienen 8 notas por total, que arregladas de menor a mayor altura, corresponden a la escala llamada diatónica mayor (ver figura 2.4) y cuyas frecuencias correspondientes se ilustran en el cuadro 2.1.

Al observar el cuadro 2.1, nos enteramos de cómo se dan los nombres de los intervalos, a decir, la *segunda*, *tercera*, *cuarta*, *quinta*, *sexta*, *séptima* y *octava* de una nota (en este caso de “do”). También cabe destacar que el primer grado de la escala es parte de dos acordes, a decir, de la tónica y de la subdominante, y que los cálculos nos muestran que su frecuencia se respeta, obteniendo así una escala bien definida, al menos si la escala tiene a do como



Figura 2.3: Tríadas generadoras del modo mayor.

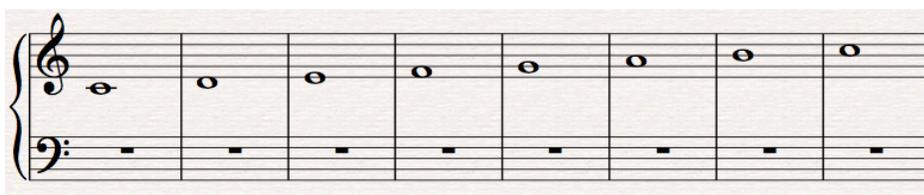


Figura 2.4: Escala de Do mayor.

tónica. Pero, ¿qué pasaría si la función tónica la tomara alguna de las otras notas? Es aquí cuando hay que presentar el concepto de *modo*.

“Un *modo* es el subconjunto de una escala, en este caso de la escala diatónica, que gira en torno a una altura determinada y sus transposiciones a la octava, como la nota final o tónica. Dos modos, el jónico (cuya nota final es do) y el eólico (con la como nota final), han sobrevivido como la escala mayor y la escala menor (natural) modernas, respectivamente” [2, p. 533]. Los cinco modos restantes son el dórico, el frigio, el lido, el mixolidio y el locrio.

Decimos que los modos son subconjuntos de una escala, puesto que están conformados por las mismas 7 notas. Sin embargo, si se pretendiera que en cada modo se formen tríadas puras, como en el caso del modo jónico, nos encontraríamos con diferentes arreglos de notas. Tal es el caso del modo eólico, que será explicado a continuación.

El modo eólico tiene a “la” como nota inicial y su estructura es de TSTTSTT, por lo que se tiene que sus acordes de tónica, subdominante y dominante son tríadas menores. La tríada menor pura está conformada por un intervalo de tercera menor (6 : 5) y uno de tercera mayor (5 : 4). Al construir los acordes de tónica, subdominante y dominante de este modo, también se obtienen ocho notas, que arregladas de menor a mayor altura se ilustran en 2.5, y cuyas frecuencias correspondientes se observan en el

Cuadro 2.1: Frecuencias del modo mayor justo

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f_C	$\frac{9}{8}f_C$	$\frac{5}{4}f_C$	$\frac{4}{3}f_C$	$\frac{3}{2}f_C$	$\frac{5}{3}f_C$	$\frac{15}{8}f_C$	$2f_C$
264	297	330	352	396	440	495	528

cuadro 2.2.



Figura 2.5: Escala de la menor.

Cuadro 2.2: Frecuencias del modo menor justo

La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La
f_A	$\frac{9}{8}f_A$	$\frac{6}{5}f_A$	$\frac{4}{3}f_A$	$\frac{3}{2}f_A$	$\frac{8}{5}f_A$	$\frac{9}{5}f_A$	2
220	247.5	264	293.33	330	352	396	440

Comparando los cuadros, observamos cómo las notas que conforman ambos modos tienen las mismas frecuencias, a excepción de una: re. Por esto, ambos modos no son parte de la misma escala, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no se puede tener una escala que contenga acordes puros para todos sus modos. Una explicación muy recomendable de este importante resultado se puede encontrar en la serie de videos de John Crooks [5].

2.1.3. Temperamentos

“Un temperamento es un sistema de afinación en el que algunos intervalos consonantes son ligeramente más cortos que los intervalos acústicamente puros”; además, se pretende que “esta inexactitud no signifique una desafinación desagradable para el oído” [2, p. 1499].

Se han construido muchos temperamentos, algunos orientados hacia la percepción musical y otros motivados por razones matemáticas. El libro de Barbour, es una guía muy detallada sobre un número enorme de temperamentos históricos [7]. Ya sea por una u otra razón (o por la siempre enriquecedora combinación) es necesaria la matematización de todo temperamento, esto si se quiere construir un instrumento musical basado en él.

El temperamento más usado por la música occidental durante los últimos doscientos años es el llamado temperamento igual. El cual se construye mediante la división de la octava en doce partes iguales, de tal manera que la diferencia (medida en frecuencias) entre dos notas subsiguientes es la raíz doceava de 2.

Ahora bien, si construimos tríadas sobre cada grado de la escala, obtenemos tríadas mayores sobre el primer, cuarto y quinto grado. Asimismo encontramos tríadas menores sobre el segundo, tercero y sexto grado. La tríada sobre el séptimo grado resulta diferente a las demás, puesto que está conformada por dos intervalos de tercera menor; a una tríada de este tipo se le denomina acorde *disminuido*. Así pues, hay tres tipos (o *calidades*) de tríadas sobre la escala diatónica: mayor, menor y disminuida. Es el intervalo de tercera, ya sea mayor o menor, el que define la calidad del acorde; así pues, su importancia en la armonía diatónica es crucial.

Por todo lo anterior, un temperamento que busque la mayor claridad en la percepción de las distintas calidades, tendría, idóneamente, terceras mayores y menores acústicamente puras; esto debido a que nuestros oídos son sensibles a cambios tan pequeños como 3 o 4 hertz [5].

El problema con el temperamento igual se ilustrará a continuación. Las frecuencias correspondientes a sus notas se encuentran en el cuadro 2.3, y si comparamos estos valores con los ilustrados en los cuadros 2.1 y 2.2, nuestra percepción (que distingue diferencias de 4 hertz) nos dice que las terceras en

el temperamento igual no son puras. Además, cabe notar que a medida que las alturas crezcan, las diferencias interválicas distarán cada vez más de ser puras.

Cuadro 2.3: Frecuencias del temperamento igual

i	Nota	θ_i	Hertz
0	<i>La</i>	0	440
1	<i>La</i> ♯	1/12	466.16
2	<i>Si</i>	1/6	493.88
3	<i>Do</i>	1/4	523.25
4	<i>Do</i> ♯	1/3	554.37
5	<i>Re</i>	5/12	587.33
6	<i>Re</i> ♯	1/2	622.25
7	<i>Mi</i>	7/12	659.26
8	<i>Fa</i>	2/3	698.46
9	<i>Fa</i> ♯	3/4	739.99
10	<i>Sol</i>	5/6	783.99
11	<i>Sol</i> ♯	11/12	830.61
12	<i>La</i>	1	880

Surge así la necesidad (perceptiva) de construir otros temperamentos. Tal es el caso del temperamento justo. Sin embargo, como ya se analizó anteriormente, éste no produce escalas consistentes con sus modos.

Conexión entre temperamentos y sistemas dinámicos

Para crear nuevos temperamentos, no está de más verlos desde una nueva perspectiva, por ejemplo, desde la perspectiva de los *sistemas dinámicos*; tal como se propone en [1]. Desde este punto de vista, el temperamento igual estaría representado por el conjunto de puntos en la circunferencia $A = \{\theta_i\}$, con cada nota θ_i definida como:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega, \text{ para todo } i \in \{0, \dots, 12\}, \quad (\text{mód } 1), \quad (2.1)$$

donde $\Omega = 1/12$ y la equivalencia de octavas está representada por $(\text{mód } 1)$. Nótese que éstas condiciones, implican que después de doce iteraciones (donde

después de cada una se recorre lo mismo), se avanza justamente un giro (que representa una octava).

Por lo tanto, el conjunto A representa las frecuencias del temperamento igual de 12 notas, como se muestra en el cuadro 2.3. Aquí la condición inicial es $\theta_0 = 0$, aunque cualquier número nos puede servir.

A las ecuaciones del tipo (2.1) se les conoce como *mapeos del círculo* (sobre estas ecuaciones nos ocuparemos con detalle en los capítulos siguientes). Por eso es que este tipo de ecuación representa bien un temperamento, o dicho de otro modo, para que una afinación sea un temperamento, justamente queremos regresar al punto inicial, es decir, a la misma nota (octavada). Además, como el valor θ_i es diferente al de θ_{i+1} , la ecuación (2.1) representa movimiento.

Existe una teoría matemática que estudia el movimiento anteriormente descrito y otros más, conocida como *sistemas dinámicos*. A grandes rasgos, hay dos tipos de sistemas dinámicos, los lineales y los no lineales. La ecuación (2.1) es un sistema dinámico lineal, porque Ω tiene un valor constante, y esto significa que los puntos se mueven siempre a la misma velocidad.

El otro tipo de sistemas dinámicos son los no lineales, y estos están conformados por movimientos con velocidades no constantes. En esta tesis se plantea el uso de la dinámica no lineal como base para la construcción de un temperamento. Ahora bien, este tipo de temperamentos podrían producir escalas *microtonales*. Las escalas microtonales, formadas con la división de la octava en más de doce intervalos, se han usado desde tiempos muy remotos en las culturas orientales (como las ragas de la India), y han sido adoptadas también por algunos compositores occidentales (notablemente el caso del mexicano Julián Carrillo). Algunos les llaman escalas artificiales.

Cabe mencionar que dado el comportamiento que se obtiene a partir de una ecuación no lineal, el temperamento correspondiente no podría abordarse desde la perspectiva de la música tradicional occidental, por lo que habría que construir toda una teoría musical que sea acorde a un temperamento tal. Sin embargo, ésta es una aventura de dimensiones mayúsculas y queda fuera de las pretensiones de este trabajo.

Capítulo 3

Introducción a la dinámica no lineal

Dos ejemplos importantes de sistemas dinámicos son: las ecuaciones diferenciales y las funciones iteradas. Las ecuaciones diferenciales describen la evolución de sistemas en tiempo continuo, mientras que las funciones iteradas son, entre otras cosas, usadas cuando el tiempo es discreto y son herramienta para analizar soluciones periódicas o caóticas de ecuaciones diferenciales.

Caso continuo

Una manera general de describir las ecuaciones diferenciales es mediante el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde las funciones f_1, \dots, f_n están determinadas por el problema en cuestión y cada una está definida en el espacio de coordenadas x_1, \dots, x_n .

Por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico amortiguado

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3.2}$$

se puede escribir en la forma (3.1), mediante la introducción de las variables: $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$. De tal manera que de (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{dx_1}{dt} - \frac{k}{m} x_1 \\ &= -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

obteniendo el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dicho sistema es llamado lineal, puesto que ambas funciones de evaluación $f_1 = x_2$ y $f_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$ son lineales. De otro modo el sistema sería llamado no lineal. Términos no lineales típicos son productos, potencias y funciones trigonométricas de las coordenadas x_i .

Por ejemplo, el vaivén del péndulo de un reloj está gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{sen}(x) = 0, \tag{3.5}$$

donde x es el ángulo que hace el péndulo con la vertical, g es la aceleración debida a la gravedad, y L es la longitud del péndulo. Dicho sistema, escrito en la forma (3.1) es no lineal:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{L} \text{sen}(x_1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

La no linealidad hace de la ecuación del péndulo muy difícil de resolverse analíticamente, puesto que es necesario el uso de funciones elípticas. La manera común de sortear dicha dificultad es linealizando la ecuación mediante la ley de Hooke, es decir, haciendo muy pequeño el ángulo con respecto a la vertical para que el valor del seno de x sea aproximadamente x . Esto convierte el problema en uno lineal que es notablemente más fácil de resolver, puesto

que puede descomponerse en partes, después cada parte puede resolverse separadamente y finalmente sumada mediante el principio de superposición. La desventaja es que restringiendo x a valores muy pequeños descartamos casos que son de sumo interés, por ejemplo, cuando el péndulo da giros completos. Así también, muchos fenómenos en la naturaleza se comportan de manera no lineal. Cada vez que las partes de un sistema se interfieren, cooperan o compiten, hay interacciones no lineales desarrollándose.

Puesto que el movimiento del péndulo es evidentemente simple, debería de haber una manera más sencilla para resolver su ecuación. Podríamos empezar con la observación del péndulo para extraer información geométrica.

Supongamos que conocemos una solución del sistema del péndulo para una condición inicial particular. La solución sería un par de funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que representan la posición y la velocidad del péndulo, respectivamente. En el espacio de coordenadas (x_1, x_2) , la solución $(x_1(t), x_2(t))$ corresponde a un punto moviéndose a lo largo de una curva en él.

Dicha curva es llamada trayectoria, y el espacio es llamado el espacio fase para el sistema. El espacio fase está completamente lleno con trayectorias, puesto que cada punto puede servir como condición inicial.

Definición 2 *El espacio fase para el sistema general (3.1) es el espacio con coordenadas x_1, \dots, x_n . Puesto que dicho espacio tiene n dimensiones, a (3.1) se le denota como un sistema de n dimensiones.*

Sin embargo, se podría pensar que la forma (3.1) del sistema no es tan general puesto que no incluye ninguna dependencia temporal explícita. ¿Cómo tratar entonces con ecuaciones que dependan del tiempo? Simplemente con la introducción de una nueva variable. Por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico forzado es $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \cos(t)$. Sea $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$ y $x_3 = t$. Entonces el sistema equivalente es

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= 1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

que tiene 3 dimensiones. De manera análoga, cualquier ecuación con dependencia temporal y de dimensión n la convertimos a un sistema de dimensión $n + 1$ sin dependencia temporal.

La virtud de este cambio de variables es que nos permite tener una imagen geométrica completa del comportamiento de las trayectorias.

Caso discreto

Otro tipo de sistemas dinámicos, aunque íntimamente relacionado con las ecuaciones diferenciales, son los mapeos iterados. A continuación se abordarán algunas nociones de ésta teoría, en particular, las que tienen una significación paralela en el caso continuo. Sin embargo, si el lector desea conocer con detalle los muy atractivos resultados de estas matemáticas, se recomienda consultar los libros [9] y [10].

Definición 3 *De manera más general, decimos que si f es una función continua de la recta en sí misma, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces para cada punto $x \in \mathbb{R}$, la órbita de x bajo f , es*

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}, \quad (3.8)$$

donde $f^n(x)$ representa la composición de f consigo misma n veces. A la función f^n se le llama la n – ésima iteración de f . Además, se define f^0 como la función identidad en \mathbb{R} .

Definición 4 *Una trayectoria encarna los datos básicos de un sistema dinámico. Ésta consiste de la lista de imágenes de un punto particular, llamado punto inicial, bajo las iteraciones de la función que genera el sistema dinámico. Por lo tanto es una secuencia ordenada de puntos.*

Al final del capítulo anterior se planteaba la conexión entre las funciones en el círculo unitario y la afinación o el temperamento de la escala musical. Con mayor precisión, se tiene que el temperamento igual corresponde a una rotación racional en la circunferencia

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega, \quad (3.9)$$

donde θ es un punto en la circunferencia (que vamos a pensar como una nota) y donde el intervalo de octava está representado por una vuelta. Dependiendo del número de intervalos iguales en los que se desee dividir la escala, se escoge

el valor de Ω racional. Por ejemplo, para el caso del temperamento igual, se escogería $\Omega = 1/12$. Por otro lado, la afinación pitagórica corresponde a una rotación irracional en la circunferencia, es decir, la que se obtiene para un valor de Ω irracional.

Así pues, en los casos del temperamento igual y de la afinación pitagórica, el mapeo iterado está dado por la ecuación (3.9), y la trayectoria del sistema dinámico discreto que éste genera, corresponde al conjunto de puntos en la circunferencia $A = \{\theta_i\}$. A los puntos que conforman la trayectoria se les conoce como *órbita*.

Para entender bien a bien qué queremos de éstas funciones, vale la pena hacer un paréntesis,

Definición 5 Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Decimos que x_0 es un punto periódico de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, decimos que $o(x, f)$ es una órbita periódica.

Sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene periodo k si

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n = x_0\}. \quad (3.10)$$

Entonces, si planteamos los mapeos del círculo en sí mismo dentro del contexto de los sistemas dinámicos discretos, lo que se busca (para evitar la comma pitagórica de una afinación musical) es un mapeo periódico, es decir, un mapeo para el cual exista un número n natural, tal que la n -ésima iteración de la función sea igual a la función identidad.

Resulta más interesante probar con funciones periódicas que no sean lineales, puesto que éstas proveerían de intervalos sonoros desiguales. Sin embargo, la periodicidad de una función no lineal no se obtiene trivialmente. Parte del *background* físico y matemático necesario para comprender la periodicidad de este tipo de funciones, será explicado en páginas posteriores.

3.1. Atractores

En la línea

Caso continuo

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = \cos(x(t)) \quad (3.11)$$

Pensemos a t como el tiempo, x como la posición de una partícula imaginaria moviéndose a lo largo de la recta real y a $\frac{dx}{dt}$ como la velocidad de la partícula. Entonces la ecuación diferencial (3.11), representa un campo vectorial en la línea. Para esbozar el campo vectorial es conveniente graficar x contra $\frac{dx}{dt}$ y luego dibujar flechas en el eje x para indicar el vector velocidad para cada x . Las flechas apuntan hacia la derecha cuando $\frac{dx}{dt} > 0$ y hacia la izquierda cuando $\frac{dx}{dt} < 0$. En los puntos donde $\frac{dx}{dt} = 0$ la partícula no se mueve; por lo que tales puntos son llamados puntos fijos.

La gráfica del coseno nos muestra que una partícula empezando en $x_0 = -\pi/4$ se mueve a la derecha cada vez más rápido hasta que cruza $x = 0$ (donde $\cos(x)$ alcanza su máximo). Entonces la partícula empieza a desacelerar, aproximándose asintóticamente al punto fijo $x = \pi/2$ por la izquierda, $x = \pi/2$ es un punto fijo estable. El mismo razonamiento aplica para cualquier condición inicial x_0 . La gráfica del coseno muestra que si $\frac{dx}{dt} > 0$ en x_0 , la partícula se dirige hacia la derecha y asintóticamente alcanza al punto fijo más próximo. Similarmente, si $\frac{dx}{dt} < 0$ en x_0 , la partícula se aproxima hacia el punto fijo más próximo a la izquierda. Simétricamente, en $x_0 < -\pi/2$, la partícula se mueve a la izquierda cada vez más rápido hasta que cruza $x = -\pi$ (donde $\cos(x)$ alcanza su mínimo). Entonces la partícula empieza a desacelerar, aproximándose asintóticamente al punto fijo $x = -3\pi/2$ por la derecha, por lo tanto $x_0 = -\pi/2$ es un punto fijo inestable. Un esbozo de las soluciones se puede ver en la figura 3.1.

Por todo lo anterior, podemos deducir que los puntos fijos de la forma $-\frac{\pi}{2}(\text{mod } 2\pi)$ son inestables y los de la forma $\frac{\pi}{2}(\text{mod } 2\pi)$ son estables.

La manera en que se trató al sistema (3.11) puede ser extendida para cualquier otro sistema de una dimensión $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Definición 6 *En términos de la ecuación diferencial original, los puntos fijos representan soluciones en equilibrio (puesto que si $x = x^*$ inicialmente, entonces $x(t) = x^*$ para todo t). Una solución en equilibrio es estable si perturbaciones en una vecindad decrecen con el tiempo, es decir, si $y(t) \in U$, con U vecindad del punto fijo x^* , entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = x^*$. Contrariamente, las soluciones en equilibrio inestables son aquellas para las cuales las*

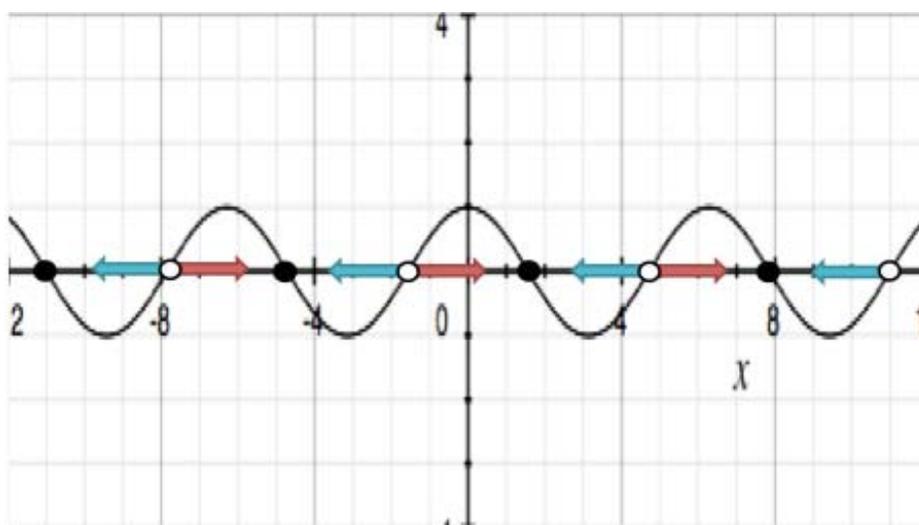


Figura 3.1: Campo vectorial del sistema (3.11). Se pueden ver dos tipos de puntos fijos en la figura: los puntos cerrados representan puntos fijos estables y los puntos abiertos representan puntos fijos inestables. Las flechas de colores representan el flujo.

perturbaciones crecen con el tiempo.

Definición 7 Una figura como 3.1, en donde se muestran todas la trayectorias cualitativamente diferentes del sistema, es llamada retrato de fases.

Caso discreto

En esta sección, $f : A \rightarrow A$ será una función continua, donde A es un intervalo en \mathbb{R} . Decimos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un *punto fijo* de f si $f(x_0) = x_0$.

Definición 8 Sea $x_0 \in A$ un punto fijo de f . Decimos que x_0 es un *punto fijo atractor* si existe un intervalo abierto (a, b) , con $x_0 \in (a, b)$, tal que

$$f((a, b) \cap A) \subset (a, b) \cap A, \quad (3.12)$$

y para toda $x \in (a, b) \cap A$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.

Definición 9 Decimos que x_0 es un *punto fijo repulsor* si existe un intervalo abierto (a, b) con $x_0 \in (a, b)$ y tal que para cada $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, existe un número natural que depende de x , $n(x) \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(x) \notin ((a, b) \cap A)$.

Proposición 3.1.1 *Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0 .*

1. *Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.*
2. *Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.*

En la circunferencia

La ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta) \tag{3.13}$$

corresponde a un campo vectorial en la circunferencia, donde θ es un punto en la circunferencia y $\frac{d\theta}{dt}$ es el vector velocidad en tal punto, determinado por $f(\theta)$. Al igual que la línea, la circunferencia tiene una dimensión, pero tiene una propiedad nueva e importante: al fluir en una dirección, una partícula puede regresar eventualmente al lugar desde el que empezó. Dicho de otra manera, los campos vectoriales en la circunferencia proveen el modelo más básico de los sistemas que pueden oscilar.

Sin embargo, en todos los demás respectos, los flujos en la circunferencia son similares a los flujos en la línea.

Por ejemplo, para la ecuación $\frac{d\theta}{dt} = \text{sen}(\theta)$, el campo vectorial se comporta del siguiente modo. Primero encontramos los puntos fijos, definidos por $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Estos son $\theta^* = 0$ y $\theta^* = \pi$. Para determinar su estabilidad, nótese que $\text{sen}(\theta) > 0$ en el semicírculo superior. Entonces $\frac{d\theta}{dt} > 0$, por lo que el flujo está en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Similarmente, el flujo está en el sentido de las manecillas del reloj en el semicírculo inferior, donde $\frac{d\theta}{dt} < 0$. Así obtenemos que $\theta^* = 0$ es inestable mientras que $\theta^* = \pi$ es estable.

Definición geométrica. Un campo vectorial en la circunferencia es una regla que asigna un vector velocidad único para cada punto de la circunferencia.

En la práctica, se obtienen tales campos vectoriales cuando tenemos un sistema de primer orden $\frac{d\theta}{dt} = f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función real valuada y con período 2π . Además asumimos que $f(\theta)$ es lo suficientemente suave para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones.

El atractor más socorrido en la circunferencia: El oscilador uniforme

Definición 10 *Un punto en una circunferencia es llamado fase.*

El oscilador más simple de todos es por lo tanto uno en el que la fase θ cambia uniformemente:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (3.14)$$

donde ω es una constante. La solución es

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (3.15)$$

que corresponde a un movimiento uniforme alrededor de la circunferencia con una frecuencia angular ω . Esta solución es periódica, puesto que $\theta(t)$ regresa al punto inicial después de un tiempo $T = 2\pi/\omega$. A T se le llama el *período de oscilación*.

En el plano

En la subsecciones anteriores, se describieron cómo son los atractores en la línea y en la circunferencia. Ahora se abordarán los atractores en el plano. Hablando someramente, un atractor es un conjunto hacia el cual todas las trayectorias vecinas convergen. Los puntos fijos estables (que se pueden ver como un conjunto con un sólo elemento, o *singulete*) y los ciclos límites estables son ejemplos. Más precisamente, definimos a un *atractor* como un conjunto cerrado A que cumple las siguientes propiedades:

1. A es un conjunto invariante: cualquier trayectoria $x(t)$ que empieza en A , permanece en A para todo t .
2. A atrae a un conjunto abierto de condiciones iniciales: existe U , un conjunto abierto que contiene a A , tal que si $x(0) \in U$, entonces la distancia de $x(t)$ a A tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. El conjunto U más grande con tal propiedad es llamado *cuenca de atracción* de A .
3. A es mínimo: no existe un subconjunto propio de A que satisfaga las condiciones 1 y 2.

Clasificación de sistemas lineales

Queremos clasificar todos los retratos de fases que pueden ocurrir en el plano. Se presenta aquí la deducción de los tipos de puntos fijos para ecuaciones diferenciales, aunque el caso de las ecuaciones iteradas es análogo, por lo que produce los mismos tipos de puntos singulares.

Ahora bien, para un sistema de dos dimensiones, los flujos en el plano pueden provocar cuatro comportamientos típicos diferentes. Con *típico* nos referimos a lo que puede suceder con probabilidad no nula en un sistema dinámico. Una bonita y asequible explicación de justo esto, se puede encontrar en el libro de Ian Stewart [15, p. 137].

Para el caso general, es decir, para una matriz de 2×2 arbitraria, buscamos trayectorias de la forma

$$x(t) = e^{\lambda t} v, \quad (3.16)$$

donde $v \neq 0$ es un vector fijo por determinar y λ es una razón de crecimiento también por determinar. Si tales soluciones existen, corresponden a un movimiento exponencial de la línea generada por el vector v .

Para encontrar las condiciones en v y λ , sustituimos $x(t) = e^{\lambda t} v$ en $\frac{dx}{dt} = Ax$, obteniendo

$$Av = \lambda v, \quad (3.17)$$

lo cual significa que tales soluciones lineales existen si v es un vector propio de A con el correspondiente valor propio λ . En este caso decimos que la solución (3.17) es una solución propia.

Con un poco de álgebra lineal encontramos que para una matriz A de 2×2 , los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

donde

$$\tau = \text{traza de } A$$

y

$$\Delta = \text{determinante de } A. \quad (3.18)$$

La situación típica es que los valores propios sean distintos: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso, un teorema de álgebra lineal nos dice que los vectores propios correspondientes v_1 y v_2 son linealmente independientes, y por lo tanto generan todo el plano. En particular, cualquier condición inicial x_0 puede escribirse como

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2. \quad (3.19)$$

Estas observaciones nos permiten escribir la solución general para $x(t)$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2. \quad (3.20)$$

¿Por qué es ésta la solución general? Primero, porque es una combinación de soluciones linealmente independientes de $\frac{dx}{dt} = Ax$. Segundo, porque satisface la condición inicial $x(0) = x_0$, y entonces, por el teorema de existencia y unicidad, es la única solución.

Por otro lado, según como sean los valores propios del sistema, podemos obtener los siguientes comportamientos cerca de un punto fijo.

- Sillas de montar

Las sillas de montar se obtienen cuando $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$. Por lo tanto la primera solución propia crece exponencialmente y la segunda solución propia decrece, provocando que haya estabilidad en una dirección e inestabilidad en la otra.

El punto de en medio de la cruz, el punto silla propiamente dicho, es (al igual que todas las trayectorias que se reducen a puntos únicos) un estado estacionario. Dos líneas de flujo se denominan las separatrices de la silla. Se designan de esta forma porque separan el modo en que fluyen puntos próximos. En realidad las separatrices no pasan por el punto silla: si nos aproximamos al punto silla a lo largo de una separatriz,

tomaría un tiempo ∞ alcanzarlo. Así, en las proximidades de dicho punto, el flujo se vuelve infinitamente lento.

Una manera práctica de visualizar un punto silla está en el choque de dos chorros de agua.

- **Nodo estable**

Supongamos que los valores propios cumplen que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Entonces ambas soluciones propias decaen exponencialmente. El punto fijo es llamado un nodo estable.

Se define la *dirección propia lenta* como la dirección generada por el vector propio de valor propio más chico en valor absoluto. Por lo que las trayectorias se acercan al origen tangencialmente a esta dirección.

- **Nodo inestable**

Se obtiene cuando $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Por lo tanto su comportamiento es contrario al del nodo estable.

- **Sumideros**

Supongamos que los valores propios son complejos. Si $\Re(\lambda) < 0$ entonces por la ley de Euler se encontrarán oscilaciones decrecientes. El punto fijo correspondiente es conocido como un sumidero, y es un lugar en donde una línea de flujo degenera para convertirse en un único punto hacia el cual confluyen todos los puntos vecinos, es decir, si el sistema comienza su movimiento por un punto próximo al sumidero, la trayectoria se moverá hacia él. Esto significa que el estado estacionario en un sumidero es estable. Los sumideros son, pues, estados estacionarios estables.

- **Fuentes**

Si los valores propios son complejos y se tiene que $\Re(\lambda) > 0$, entonces sucederán oscilaciones crecientes. Al estado estacionario correspondiente se le llama fuente. Ahora los puntos vecinos se alejan. Es como maniobrar con una escoba.

- **Centros**

Si los valores propios son puramente complejos (si se tiene que $\Re(\lambda) = 0$), entonces las soluciones serán periódicas. Tales oscilaciones tienen amplitud fija y el estado estacionario correspondiente es llamado centro.

Definición 11 Para todos los casos donde los valores propios cumplan que $\Re(\lambda_i) \neq 0$, el punto fijo es llamado hiperbólico.

3.2. Sistemas no lineales

Para sistemas no lineales vamos a aproximar el retrato de fases cerca de un punto fijo por medio de la linealización del sistema.

Considérese el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.21}$$

y supongamos que (x^*, y^*) es un punto fijo.

Sean $u = x - x^*$, $v = y - y^*$ los componentes de una pequeña perturbación del punto fijo. Para saber si la perturbación crece o decrece con el tiempo, observemos cómo son las ecuaciones diferenciales para u y v . La ecuación de la primera es:

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).\tag{3.22}$$

Mientras que la ecuación para v es

$$\frac{dv}{dt} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)\tag{3.23}$$

Por otro lado, se tiene que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

en (x^*, y^*) es la matriz Jacobana del sistema (3.21), en el punto fijo (x^*, y^*) .

Puesto que los términos cuadráticos en (3.22) y (3.23) son muy pequeños, es tentador eliminarlos. Si lo hacemos obtenemos el sistema linealizado

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Surge entonces la pregunta de si el sistema linealizado provee de una imagen cualitativamente correcta del retrato de fases cerca de (x^*, y^*) . Al respecto de esto, se puede afirmar una implicación: si el punto fijo para el sistema linealizado es un punto hiperbólico, entonces la linealización conserva la cualidad del punto.

Los puntos fijos no hiperbólicos (centros, nodos degenerados, estrellas, o puntos fijos no aislados) son mucho más delicados, puesto que pueden ser alterados por terminos no lineales pequeños.

El teorema de Hartman-Grobman establece que el retrato de fases cercano a un punto fijo hiperbólico es topológicamente equivalente al retrato de fases de la linealización; en particular, el tipo de estabilidad que tiene el punto fijo es fielmente capturada por la linealización.

Todo esto no significa que el retrato de fases de un centro siempre sea estructuralmente inestable. Los sistemas conservativos (muy socorridos en la teoría del potencial) y los sistemas reversibles son ejemplos que muestran lo contrario.

Con el material expuesto ya podemos analizar el movimiento del péndulo de un reloj, cuya generalización, conocida como el oscilador autosostenido, será el objeto de estudio en el siguiente capítulo.

Habíamos quedado con que dicho péndulo está descrito por el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(g/L)\text{sen}(x_1).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Ahora bien, éste es un sistema conservativo de energía, es decir, las trayectorias que representan la energía total del sistema son constantes (respecto al tiempo), y por lo tanto, las soluciones se encuentran dentro de ellas. Para ver más sobre la conservación de energía, consúltese [11, p. 172].

La ecuación de tales trayectorias, llamadas *curvas de energía* es la siguiente:

$$H(x, y) = y^2 + \int f(s)ds,\tag{3.25}$$

donde y^2 indica la energía cinética y $\int f(s)ds$ indica la energía potencial [11, p. 174].

Introducimos las variables $\omega = (g/L)^{1/2}$ y $\tau = \omega t$, que corresponden a la frecuencia y al tiempo, respectivamente. Entonces la ecuación se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \text{sen}(\theta) = 0, \quad (3.26)$$

Y el correspondiente sistema en el plano es

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \nu \\ \frac{d\nu}{d\tau} &= -\text{sen}(\theta), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde ν es la velocidad angular.

Los puntos fijos son de la forma $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{N}$. Como no hay diferencia entre los ángulos que distan por $2\pi k$, nos concentraremos en los puntos fijos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$. En $(0, 0)$ el jacobiano es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el origen es un cero lineal. Y lo es puesto que el sistema es conservativo y la función de la energía

$$E(\theta, \nu) = 1/2\nu^2 - \cos(\theta)$$

tiene un mínimo local en $(0, 0)$.

Por otro lado, el jacobiano del punto fijo $(\pi, 0)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que $(\pi, 0)$ es un punto silla.

Para llenar el retrato de fases, calculamos las curvas de energía $E(\theta, \nu) = 1/2\nu^2 - \cos(\theta)$ para distintos valores de E .

En el diagrama 3.2 está dibujado el retrato de fases para el sistema del péndulo. Las soluciones obedecen distintos comportamientos. Como es de suponer, en una vecindad del origen las soluciones oscilarán en trayectorias casi circulares de diferentes diámetros. Por otra parte, si la condición inicial está en una isoclina entonces la solución convergerá asintóticamente al punto silla correspondiente. Si la condición inicial se encuentra en una curva de

energía $E > 1$, la solución correspondiente también rotará periódicamente, puesto que $\theta = \pi$ y $\theta = -\pi$ corresponden físicamente a la misma posición.

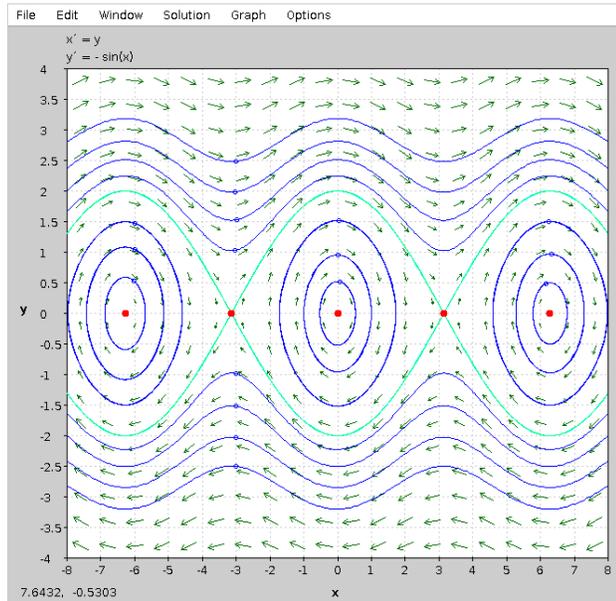


Figura 3.2: Retrato de fases del péndulo

Nótese cómo el flujo encaja en su conjunto: las flechas en las curvas cercanas están muy bien alineadas. Esto significa que el movimiento es continuo.

Hay que señalar que si el péndulo no fuera autosostenido entonces sus trayectorias serían cualitativamente diferentes, sin embargo el estudio de tales sistemas va más allá de las pretensiones de esta tesis.

Ciclos límite

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada. Esto significa que las trayectorias vecinas no son cerradas.

Consideremos el sistema $\frac{dx}{dt} = f(x)$, correspondiente a un campo vectorial autónomo. Una solución no constante para tal sistema, $x(t)$, es periódica si existe una constante $T > 0$ tal que

$$x(t) = x(t + T) \tag{3.28}$$

para toda t . El período de esta solución está definido como el mínimo de tales T . La imagen del intervalo de periodicidad $[0, T]$ bajo x en el espacio de fases \mathbb{R} , es llamada órbita periódica o ciclo.

Una órbita periódica Γ en un plano de fases es llamada un *ciclo límite estable*, si para $z \notin \Gamma$ y $t \rightarrow \infty$, el conjunto de puntos de acumulación de la trayectoria que pasa por z es exactamente Γ . Tales órbitas corresponden a un tipo especial de soluciones de sistemas dinámicos, los cuales modelan osciladores autosostenidos. Ya hablaremos más de ellos más adelante.

Un *ciclo límite inestable* es una órbita periódica Γ para la cual los puntos próximos se alejan de ella.

Los ciclos límites son exclusivos de los sistemas no lineales, y aquí viene el porqué del asunto. Supongamos que $x(t)$ es una solución periódica del sistema lineal $\frac{dx}{dt} = Ax$. Entonces $cx(t)$ es también solución del sistema, para cualquier escalar $c \neq 0$. Por lo tanto, $x(t)$ está rodeado de una familia de órbitas cerradas. Consecuentemente, la amplitud de una oscilación lineal está completamente definida por sus condiciones iniciales; cualquier perturbación de la amplitud permanecerá indefinidamente. Por el contrario, los ciclos límites están determinados por la estructura del sistema; la trayectoria regresará al ciclo, después de una pequeña perturbación de su amplitud.

Como en el caso del oscilador de Van Der Pol, un ciclo límite puede no ser una circunferencia.

Órbitas estables

En el siguiente capítulo, se hará uso del mapeo de Poincaré para analizar la estabilidad de un ciclo en el plano. La ventaja de dicho mapeo, es que nos ofrece otra perspectiva para hacer el análisis. Un enfoque desde la teoría los sistemas dinámicos discretos; donde consideraremos los conceptos enunciados a continuación.

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(x_0) = x_0$. Si x_0 es atractor entonces los puntos cercanos tienen órbitas convergentes a x_0 . Una situación ligeramente diferente es la contenida en la siguiente definición.

Definición 12 Decimos que el punto fijo x_0 es estable (o tiene órbita estable) si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in B(x_0, \delta)$, y para toda $n \geq 0$, se tiene que

$$d(f^n(x), x_0) < \varepsilon. \quad (3.29)$$

Definición 13 *Un punto fijo x_0 no es estable (su órbita no es estable) si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $x \in B(x_0, \delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$d(f^n(x), x_0) \geq \varepsilon_0. \quad (3.30)$$

Definición 14 *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Decimos que un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tiene órbita Liapunov estable, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in B(x_0, \delta)$, y para toda $n \geq 0$, se tiene que*

$$d(f^n(x), f^n(x_0)) < \varepsilon. \quad (3.31)$$

Teorema de Poincaré-Bendixson

Nos interesa conocer qué condiciones requiere un sistema para que existan órbitas cerradas. Como ya se vio anteriormente, los sistemas lineales no pueden presentar estos ciclos, por lo que éstos se forman sólo en sistemas no lineales. Surgen ahora preguntas muy pertinentes, por ejemplo dónde y cómo se forman estas órbitas. El siguiente teorema se utiliza como herramienta para establecer que existen ciclos límites en ciertos sistemas.

Teorema de Poincaré-Bendixson. Supongamos que:

1. R es un subconjunto cerrado y acotado en el plano;
2. $\frac{dx}{dt} = f(x)$ es un campo vectorial en un conjunto abierto que contiene a R ;
3. R no contiene puntos fijos;
4. Existe una trayectoria C confinada a R , es decir, empieza en R y permanecerá en R .

Entonces C es una órbita cerrada, o se dirige en espiral hacia una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$.

Así pues, las posibilidades en el plano de fases están limitadas: si una trayectoria se encuentra en una región cerrada y acotada que no contiene puntos fijos, entonces la trayectoria debe aproximarse a un ciclo límite. Y no puede ser posible algo más complicado. Por lo tanto, el teorema de Poincaré-Bendixson descarta la formación de atractores extra nos en el plano.

Bifurcaciones

Una bifurcación de un sistema dinámico es un cambio cualitativo de su dinámica producido por una variación de parámetros.

Definición 15 *Considérese un sistema autónomo de de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.32)$$

para f continua. Una bifurcación ocurre para el parámetro $\lambda = \lambda_0$ si hay parámetros λ_1 arbitrariamente cercanos a λ_0 para los cuales el sistema tiene una dinámica que no es topológicamente equivalente a la dinámica en λ_0 .

Por ejemplo, el número o la estabilidad de puntos fijos o de órbitas periódicas de f puede cambiar en una vecindad de λ_0 .

Atractores extraños

Los atractores extraños cumplen con dos propiedades que parecieran difíciles de coexistir. Las trayectorias en el atractor se mantienen acotadas en el espacio fase, sin embargo se separan de las trayectorias vecinas exponencialmente rápido (al menos inicialmente). ¿Cómo puede suceder esto?

El mecanismo básico consiste en extender y enrollar repetidamente. Se explica con el siguiente ejemplo.

Considérense las siguientes hipótesis: estamos en la cocina y somos italianos, pero no sólo italianos sino que napolitanos y como tales queremos hacer pizza. Tenemos la masa de harina, la cual extendemos y aplanamos, formando un bello círculo mediterráneo, pero entonces nos percatamos de que sólo contamos con unas gotas de aceite de ajonjolí, ingrediente esencial de la pizza napolitana. ¿Qué haremos entonces para repartir el preciado aceite en toda la masa?

Primero probamos enrollando la masa y nos damos cuenta de que como pusimos la gota en el centro, la gota no hace otra cosa más que permanecer en dicho lugar en sucesivas extensiones y enrolladas. Lo más fácil sería romper la masa y mezclarla, pero una buena pizza napolitana no tolera tales sandeces, por lo que cavilamos cómo hacerle para repartir la gota homogéneamente sin romper la masa.

Se nos ocurre pues doblar en forma de U , la masa ya extendida y aplanada, después la volvemos a extender y aplanar, pero cuidando de no desfigurar la forma de herradura, entonces la volvemos a doblar y así sucesivamente hasta que obtenemos una masa muy delgada, que ha sido enrollada lo suficiente como para estar toda impregnada del aroma de sésamo. Entonces ya podemos amontonar toda la masa para extenderla y aplanarla por última vez, teniendo ya lista la base de nuestra de pizza.

La transformación considerada anteriormente es conocida como el *mapeo de la herradura de Smale*. En la figura 3.3, se puede observar su primera iteración.

Consideremos la región de la izquierda, consistene de cinco componentes: tres rectángulos B, C, D y dos figuras casi semicirculares A y E en cada extremo. La figura 3.3 tiene entonces una forma de “estadio”, llamémosle F .

El mapeo de la herradura H , toma a F dentro de sí misma, de acuerdo con el siguiente proceso. Primero, se contrae horizontal y linealmente a F por un factor $\delta < 1/2$, y luego se expande vertical y linealmente por un factor $1/\delta$, de tal modo que S toma una forma larga y delgada. Posteriormente, se coloca toda ésta dentro de F como se muestra del lado derecho en 3.3.

Las dinámicas de H dentro de F son de lo más interesantes y son muy parecidas a las del mapeo logístico. Por ejemplo, al analizar las órbitas de ambos mapeos, se pueden encontrar conjuntos de Cantor. En [12, p. 181], se encuentran todos los detalles.

Posteriormente se ilustran el atractor de Lorenz 3.4 y el de Hénon 3.5. El primero corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales y el segundo a un mapeo iterado. Para el lector interesado en alguno de ellos, se recomienda consultar [13, p. 304] y [12, p. 251], respectivamente.

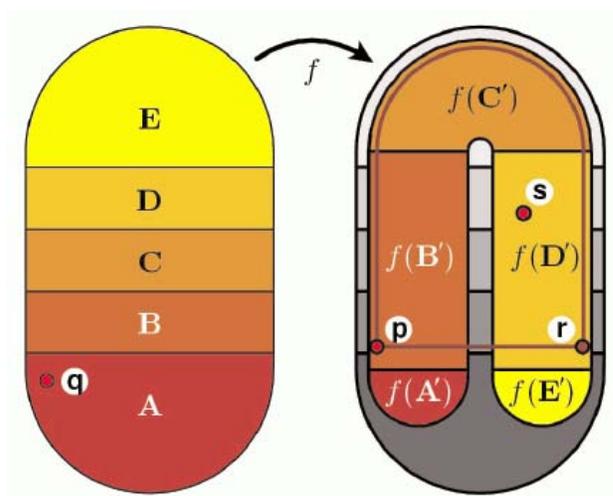


Figura 3.3: Herradura de Smale. Esta imagen fue producida por Bill Casselman, editor de gráficos de la revista *Notices* de la Sociedad Matemática Americana. La imagen apareció primero en un artículo de M. Shub en la edición de mayo de 2005 de la revista *Notices* de la Sociedad Matemática Americana.



Figura 3.4: La imagen arriba, muestra un vidrio con el atractor de Lorenz grabado con láser y fue hecha por el escultor digital Bathsheba Grossman (<http://www.bathsheba.com/>).

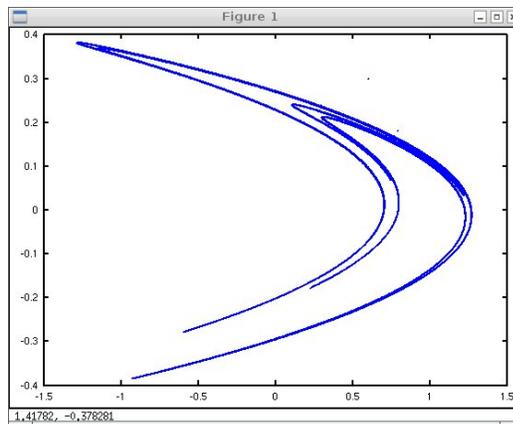


Figura 3.5: Atractor de Hénon. Figura tomada de Pedro Miramontes.

Capítulo 4

Sincronización y lenguas de Arnold

Sincronización

En este capítulo, vamos a entender el concepto de sincronización de la siguiente manera: La sincronización es el ajuste de *ritmos* entre objetos oscilatorios, debido a su interacción. Todo el análisis y las construcciones se reducirán a interacciones débiles. Ahora bien, habría que aclarar a qué nos referimos con estos términos.

Con objetos oscilatorios, nos referimos a osciladores autosostenidos. Tal oscilador es un sistema activo. Contiene una fuente de energía interna que es transformada en movimientos oscilatorios. Al aislarlo, el sistema continúa generando el mismo ritmo hasta que la fuente de energía se agota. Por mencionar algunos ejemplos de osciladores, se tiene el latir del corazón, los ritmos diarios de secreción de hormonas en el cuerpo y peligrosas vibraciones en puentes y alas de avión.

La forma de la oscilación está determinada por los parámetros del sistema y no depende de cómo fue encendido, es decir, en la transición a la oscilación continua. Matemáticamente se describe mediante un sistema dinámico autónomo.

La oscilación es estable bajo perturbaciones débiles, es decir, bajo una acción externa (pero pequeña), la oscilación regresa pronto a su forma original.

Ahora bien, el movimiento de un oscilador es cíclico y como tal tiene un ritmo. Del ritmo de un oscilador autosostenido podemos decir que tiene pe-

riodo y frecuencia. Todo oscilador autosostenido es periódico, y su periodo T es su principal característica. Por ejemplo, en un reloj de péndulo, el mecanismo que mueve las manecillas del reloj cuenta el número de oscilaciones del péndulo, por lo que su periodo constituye la unidad básica para medir el tiempo.

A veces también es conveniente caracterizar el ritmo mediante el número de ciclos por unidad de tiempo, obteniendo así la frecuencia de oscilación,

$$f := 1/T. \quad (4.1)$$

En la teoría es más conveniente hablar de la frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Posteriormente se verá que la frecuencia de un oscilador puede cambiar bajo la acción de una fuerza externa o mediante la interacción con otro sistema. Para evitar ambigüedades, llamaremos a la frecuencia del sistema aislado (autónomo) la *frecuencia natural*.

Supongamos que un pianista y una violinista están preparando una pieza, que por conveniencia en lo que quiero explicar, es una pieza compleja, en el sentido de que el compositor que la escribió modifica la percepción del tiempo del oyente; digamos por ejemplo una obra de Stravinsky o de Ravel. Aunque se trate de la misma obra e incluso si el compositor hubiera escrito múltiples indicaciones, cada uno de los músicos tiene un *background* que le permite abordar la pieza desde una perspectiva muy personal, lo cual se ve reflejado en una *articulación, dinámica y ritmo* particulares. Antes de juntarse la estudian por separado, y como resultado de lo anterior, sus *tempos* serán distintos. Eventualmente la ensayarán juntos, ¿Qué es lo que sucederá entonces? La respuesta no es del todo simple; de lo que sí estamos seguros es de que habrá discusión. Afortunadamente, llegarán a un acuerdo y sus tempos coincidirán, siendo ésta una de las condiciones mínimas para presentar una obra.

Hay que aclarar que el concepto de ritmo en la música es bastante complejo.

Lo descrito anteriormente fue un proceso en el cual la interacción de dos sistemas provocó que sus ritmos se igualaran. Los músicos interactúan usando el oído y la vista, con el afán de *enganchar* sus ritmos, entre otros parámetros.

Lo que observamos en el ejemplo, fue un ajustamiento de ritmos como resultado de una interacción. Este fenómeno es, a menudo, descrito en térmi-

nos de coincidencias de frecuencias y es conocido como *enganchamiento de frecuencias*: si dos osciladores distintos con frecuencias f_1 y f_2 se acoplan, ellos pueden empezar a oscilar con la misma frecuencia. Depende de los dos siguientes factores el que ello suceda.

1. La fuerza de acoplamiento. Ésta describe qué tan fuerte o débil es la interacción. En una situación experimental no siempre es claro cómo medir esta cantidad. Si los sistemas están aislados, la fuerza de acoplamiento es cero.
2. La desintonización de frecuencias. La desintonización de frecuencias $\Delta = f_1 - f_2$ cuantifica qué tan diferentes son las oscilaciones de los sistemas no acoplados. Éste sí puede ser medido y variado fácilmente en experimentos con relojes de péndulo: uno puede cambiar la frecuencia de un reloj alterando la longitud de su péndulo. Como consecuencia, podemos encontrar cómo la interacción resultante (si hay sincronización o no) depende de la desintonización de frecuencias.

Imaginemos que llevamos a cabo el siguiente experimento. Primero aislamos dos relojes de péndulo y medimos sus frecuencias f_1 y f_2 . Habiéndolo hecho, ponemos a los relojes sobre una mesa, y medimos las frecuencias F_1 y F_2 de los osciladores interactuantes. Podemos hacer estas mismas mediciones para diferentes valores de desintonización inicial, obteniendo así la dependencia de $\Delta F = F_1 - F_2$ en Δf . Al graficar tal relación de dependencia, obtenemos una curva como la mostrada en la figura 4.1, que es típica de osciladores interactuantes, independientemente de su naturaleza. Al analizar esta curva, observamos que si la desintonización de frecuencias no es muy grande, las frecuencias de los relojes se igualan, es decir, la sincronización toma lugar. De manera general, esperamos que la anchura de la región de sincronización crezca conforme se aumente la fuerza de acoplamiento.

Al examinar el estado de sincronización de dos relojes, nos enteramos de que ésta puede suceder de diferentes formas. Podría suceder que ambos péndulos se balancearan de tal forma que alcancen la posición extrema izquierda casi al mismo tiempo y luego empiezen a moverse hacia la derecha, para cruzar la vertical casi al mismo tiempo y llegar a la posición extrema derecha también casi al mismo tiempo. Alternativamente, uno podría encontrar los péndulos moviéndose siempre o casi siempre en direcciones contrarias:

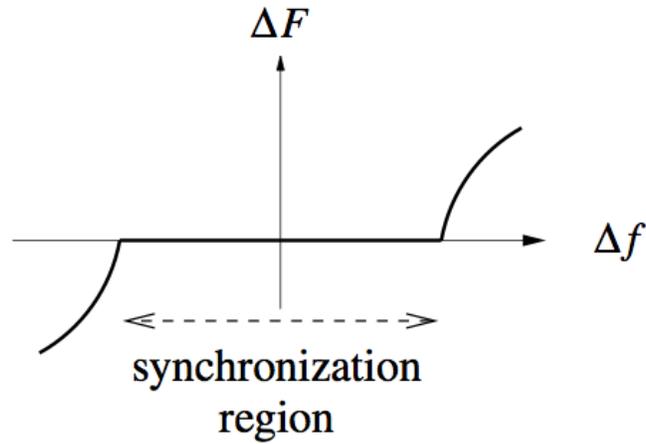


Figura 4.1: Tomada de [14, p. 12]. La diferencia de frecuencias ΔF de los osciladores acoplados, contra la desintonización de frecuencias Δf de los sistemas desacoplados. Para un cierto rango de la desintonización, las frecuencias de los osciladores acoplados son idénticas ($\Delta F = 0$), indicando el estado de sincronización.

cuando uno alcanza la posición extrema derecha, el otro péndulo alcanza la posición extrema izquierda; de tal manera que cuando cruzan la vertical, se mueven en direcciones contrarias. Para describir estos regímenes contrarios hace falta presentar la noción fundamental de la teoría de la sincronización, llámese ésta la *fase* del oscilador.

La fase es una cantidad que aumenta en 2π cada ciclo de oscilación, proporcionalmente a la fracción del periodo. La fase determina unívocamente el estado de un oscilador periódico; al igual que el tiempo, parametriza la forma de onda dentro del ciclo.

Si dos péndulos se mueven en la misma dirección y casi simultáneamente alcanzan una posición extrema, por decir, la derecha, entonces sus fases ϕ_1 y ϕ_2 están cercanas y este estado es llamado *sincronización en fase*. Al hacer una observación precisa de los péndulos, nos encontramos con que sus movimientos no son exactamente simultáneos, de tal manera que podemos hablar de diferencia de fases entre dos oscilaciones.

Si los péndulos de dos relojes sincronizados se mueven en direcciones con-

trarias, entonces le llamamos *sincronización a contrafase*. Claro que es posible que los relojes no tengan un desfase de exactamente la mitad del periodo, de tal manera que en el régimen de sincronización a contrafase pudiera existir una pequeña diferencia de fases adicional.

El comienzo de una relación entre las fases de dos osciladores sincronizados a menudo es llamado *enganchamiento de fases*.

Este experimento imaginario (el de los relojes de péndulo) demuestra la marca distintiva de la sincronización, a decir, al estar acoplados, dos osciladores con frecuencias inicialmente diferentes y fases independientes ajustan sus ritmos y empiezan a oscilar con una frecuencia común; ésto define una relación entre las fases de los sistemas. Cabe resaltar que la igualdad de frecuencias se obtiene sólo dentro cierto rango de desintonización inicial de frecuencias, como muestra la figura 4.1.

La principal propiedad de objetos oscilatorios como el reloj de péndulo o el corazón humano es que son sistemas activos, que al ser aislados, continúan oscilando con su ritmos propios. Este ritmo es mantenido gracias a una fuente interna de energía que compensa la *disipación* del sistema.

Supongamos que observamos un oscilador que sigue un proceso periódico; denotemos el valor del proceso como $x(t)$. Por ejemplo, $x(t)$ puede hacer referencia al ángulo de un reloj de péndulo. Ahora supongamos que queremos describir el estado del oscilador en un instante t . No es suficiente con conocer el valor de x , ya que, para un mismo valor de x , el proceso podría incrementarse o decrecer. Así pues, es necesaria la introducción de nuevas variables para determinar el estado del sistema sin ambigüedad. Para el reloj de péndulo, son necesarias las variables $x(t)$ y $y(t)$ que cuantifican el ángulo del péndulo con respecto a la vertical y la velocidad angular, respectivamente. De tal manera, el comportamiento del sistema está bien descrito por la evolución en el tiempo del par (x, y) . Estas variables conforman las coordenadas del espacio fase asociado al sistema. Como la oscilación es periódica, $x(t)$ corresponde a una curva cerrada en el espacio de fases, que en el caso de un oscilador, tiene el comportamiento de un ciclo límite.

Resumiendo, se tiene que en un sistema físico, un ciclo límite corresponde a un oscilador periódico, el cual al ser perturbado se reestablece en su ciclo original. Esta propiedad también significa que las oscilaciones no dependen de las condiciones iniciales, aunque, como se verá más adelante, la fase sí. La forma del ciclo, y por ende, la forma de la oscilación, está completamente determinada por los parámetros internos del sistema. Si esta oscilación

tiene forma de onda, entonces el oscilador es llamado *cuasi lineal*. En este caso, el ciclo límite puede ser representado como el círculo unitario.

4.1. Sincronización de un oscilador periódico por un forzamiento externo

En lo restante, vamos a suponer que el acoplamiento entre relojes de péndulo es unidireccional, de tal modo que sólo un reloj tiene influencia sobre el otro, y es precisamente el caso de forzamiento exterior el que se describirá a detalle. Ésta no es sólo una simplificación que hace la presentación más fácil; hay muchos fenómenos del mundo real que pueden ser entendidos de esta manera.

Empezamos considerando un oscilador cuasi lineal armónico forzado. Con este ejemplo, se explica el enganchamiento por una fuerza externa y se discute en detalle qué le pasa a la fase y a la frecuencia del sistema forzado en la transición a la sincronización. Después, se presenta la técnica estroboscópica, la cual se usa para estudiar el enganchamiento de un oscilador por un tren de pulsos, así como para la sincronización de orden $n : m$, que es cuando los osciladores interactuantes coinciden periódicamente, pero con un periodo mayor que el periodo de cada uno.

Osciladores cuasi lineales débilmente forzados

Ahora se investiga con más detalle qué le sucede a los osciladores autosostenidos cuando son sujetos a una acción externa débil.

Por simplicidad de presentación, empezamos con el caso en el que el oscilador es cuasi lineal, $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, con frecuencia ω_0 y amplitud A , además la acción es armónica con la frecuencia ω , es decir, la fuerza externa varía de la siguiente manera: $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$, donde $\phi_e(t) = \omega t + \bar{\phi}_e$ es la fase de la fuerza, ε es la amplitud y $\bar{\phi}_e$ la fase. Es importante que la frecuencia de la fuerza ω sea generalmente diferente que la del oscilador ω_0 , la frecuencia natural. La diferencia entre frecuencias $\omega - \omega_0$ es llamada disintonización.

¿Cuál es la consecuencia de esta acción externa débil? Generalmente, podríamos esperar que la fuerza externa trate de cambiar la amplitud y la fase de la oscilación. Sin embargo, $x(t)$ es por hipótesis un oscilador autosostenido (un ciclo límite), por lo que la amplitud es estable, mientras que la fase es neutral (no es ni estable ni inestable, y esto lo veremos en un momento). Por

4.1. SINCRONIZACIÓN DE UN OSCILADOR PERIÓDICO POR UN FORZAMIENTO EXTERNO

lo tanto, una fuerza externa sólo puede influenciar la fase, no la amplitud (ver figura 4.2b). Así pues, podemos concentrarnos sólo en la dinámica de la fase.

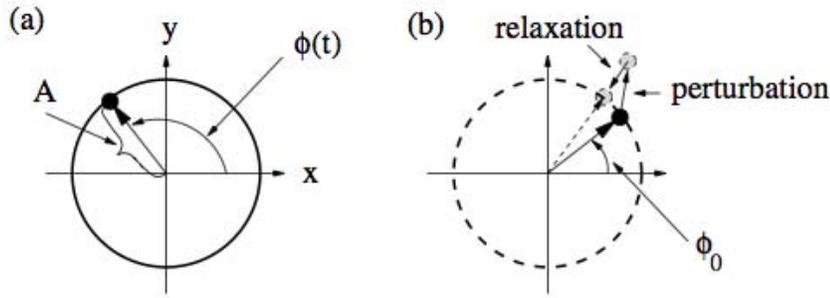


Figura 4.2: Tomada de [14, p. 32]. Supongamos que el sistema de coordenadas se mueve en el mismo sentido y con la misma frecuencia que la oscilación. (a) La oscilación autosostenida está descrita por la rotación del punto fase a lo largo del ciclo límite; sus coordenadas polares corresponden a la fase $\phi(t)$ y a la amplitud A de la oscilación. Dada la forma en que se mueve el marco de referencia, los puntos fase del oscilador permanecen inmóviles. A esto le llamamos *oscilaciones estacionarias*. (b) Las oscilaciones estacionarias corresponden al punto en reposo (el que se muestra en oscuro). Si este punto es forzado fuera del ciclo límite, la amplitud de la perturbación decae, mientras que la perturbación de la fase permanece; el estado perturbado y el estado después de que la perturbación decae se muestran como pequeños círculos sombreados.

El oscilador autónomo y la fuerza en el marco de referencia que rota

Consideremos un oscilador cuasi lineal forzado. Es conveniente estudiar la dinámica de la fase del sistema forzado en un nuevo marco de referencia, que rota en la misma dirección (digamos en el sentido contrario a las manecillas del reloj) y con la frecuencia de la fuerza externa ω .

Como primer paso, mostremos cómo aparece el oscilador autónomo en el nuevo marco de referencia. Esto significa que por el momento suponemos que la fuerza tiene amplitud cero ($\varepsilon = 0$). Dependiendo de la relación entre ω y ω_0 , el punto en el nuevo marco de referencia o continúa rotando en contra de

las manecillas del reloj (si $\omega_0 > \omega$), o permanece inmóvil (si $\omega_0 = \omega$), o rota en la dirección opuesta (si $\omega_0 < \omega$), como se ilustra en la figura 4.3.

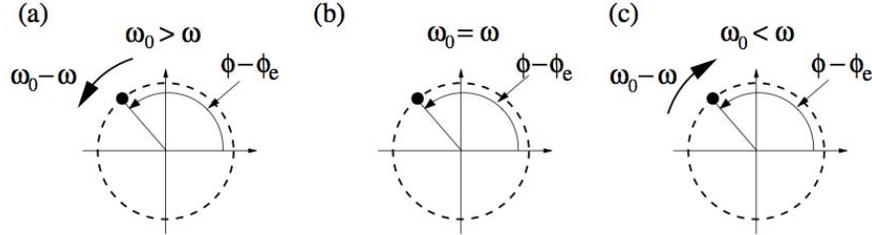


Figura 4.3: Tomada de [14, p. 47]. En el marco de referencia que rota con frecuencia ω , la oscilación del ciclo límite corresponde a un punto que rota ((a) y (c)) o a uno que está en reposo (b), dependiendo de la desintonización $\omega_0 - \omega$. La posición del punto está caracterizada por el ángulo $\phi - \phi_e$, el cual se incrementa en (a), se mantiene constante en (b) o decrece en (c).

Ahora consideremos $\varepsilon \neq 0$. La fuerza de oscilación $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$ está representada en el marco de referencia que rota (con la misma velocidad angular ω) por un vector constante de longitud ε que actúa con un ángulo ϕ^0 . El efecto de esta fuerza en el punto fase del ciclo depende de la diferencia de fases $\phi - \phi_e$ (figura 4.4a). De hecho, en los puntos 1 y 2 la fuerza es dirigida ortogonalmente a la trayectoria, y por lo tanto no puede desplazar la fase del oscilador. En los puntos 3 y 4 su efecto es máximo, y en los puntos 5–8 es intermedio. Nótese que en algunos puntos la fuerza tiende a mover al punto fase en la dirección de las manecillas del reloj, mientras que otros puntos ella actúa en el sentido contrario de las manecillas. Es fácil ver que los puntos 1 y 2 corresponden a un equilibrio estable e inestable, respectivamente (figura 4.4a). Más precisamente, el punto 1 es asintóticamente estable.

Los efectos separados de la desintonización de frecuencias y del forzamiento exterior en el marco de referencia se resumen a continuación.

- La desintonización sin fuerza externa corresponde a la rotación del punto fase con una velocidad angular $\omega_0 - \omega$. El efecto de

4.1. SINCRONIZACIÓN DE UN OSCILADOR PERIÓDICO POR UN FORZAMIENTO EXTERNO

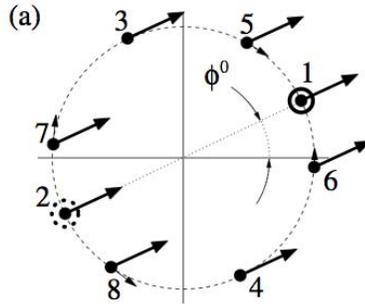


Figura 4.4: Tomada de [14, p. 48]. (a) Una fuerza externa débil no puede influenciar la amplitud del ciclo límite pero puede desplazar la fase ϕ del oscilador. Nótese que todo punto en la vecindad del punto 2 es expulsado por la fuerza. Por el contrario, en la vecindad del punto 1, todo punto fase es atraído hacia esa posición de equilibrio.

ésta también puede ser concebido como una partícula resbalando por un plano inclinado, cuya pendiente incrementa con la desintonización.

- La fuerza sin desintonización crea una posición de equilibrio estable y una inestable en el ciclo.

Ahora consideramos la acción conjunta de ambos factores, la fuerza y la desintonización, y determinamos las condiciones en las que la fuerza puede sincronizar al oscilador.

4.1.1. Enganchamiento de fases y de frecuencias

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\omega_0 > \omega$. Los efectos de la fuerza y de la desintonización se contrarrestan: la fuerza trata de hacer las fases ϕ y $\phi_e + \phi^0$ iguales, mientras que la desintonización las separa. Dependiendo de la relación entre la desintonización $\omega_0 - \omega$ y la amplitud del forzamiento ε , uno de los dos factores gana. Consecuentemente, se tiene que dos regímenes cualitativamente diferentes son posibles; y los vamos a describir asumiendo que ε está fijo, pero que la desintonización varía.

Desintonización pequeña: sincronización

Aquí consideramos el efecto de una fuerza externa sobre un punto fase que rota lentamente (fig 4.5). Como ya sabemos, el efecto del forzamiento depende de la diferencia $\phi - \phi_e$. Claramente, en algunos puntos la fuerza promueve la rotación, mientras que en otros la frena. En un cierto valor de la diferencia de fases $\Delta\phi = \phi - \phi_e - \phi^0$ (ver el punto 1 en la figura 4.5) la fuerza balancea la rotación y para al punto fase. Como resultado, la frecuencia del oscilador forzado (que denotamos Ω y le llamamos la *frecuencia observada*) se iguala a la frecuencia del forzamiento, $\Omega = \omega$, y una relación estable entre las fases se establece. A este movimiento le llamamos *sincronización*.

Hay que enfatizar que la sincronización aparece no como la igualdad de las fases, sino como el comienzo de una diferencia de fases constante $\phi - \phi_e = \phi^0 + \Delta\phi$, donde el ángulo $\Delta\phi$ es llamado *corrimiento de fases*. Existe además otro punto donde la fuerza compensa la rotación (punto 2 en la figura 4.5), pero este regimen no es estable.

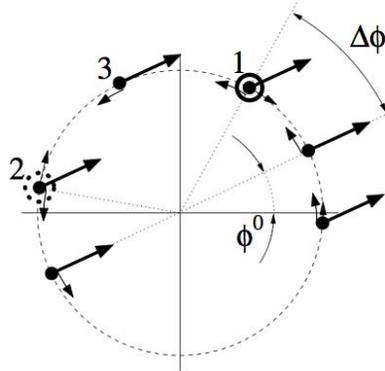


Figura 4.5: Tomada de [14, p. 50]. Desintonización pequeña. La rotación del punto fase es afectada por la fuerza externa que acelera o desacelera la rotación dependiendo de la diferencia de fases $\phi - \phi_e$. La rotación está dibujada con flechas dentro del círculo; aquí está en sentido contrario a las manecillas del reloj, correspondiendo a la relación $\omega_0 - \omega$. En el punto 1 la rotación se compensa con la fuerza, por lo que este punto se convierte en la posición de equilibrio estable. El equilibrio inestable se encuentra entonces en el punto 2. El punto fase es detenido por la fuerza y se mantiene un corrimiento de fases $\Delta\phi$ estable.

Gran desintonización: movimiento cuasiperiódico

Si la desintonización excede cierto valor crítico, entonces el efecto de la fuerza es demasiado débil para detener la rotación. De hecho, si hacemos una inspección de la figura 4.5, observamos que con un incremento de la desintonización (es decir, de la velocidad de rotación), los puntos de equilibrio se desplazan hacia el punto 3, donde el efecto de frenado que tiene la fuerza es máximo. Eventualmente, los equilibrios estable e inestable colisionan y desaparecen allí, y el punto fase empieza a rotar con la llamada *frecuencia de beats* Ω_b .

Aunque para la desintonización dada, la fuerza externa es demasiado débil como para sincronizar el oscilador, sí afecta su movimiento: la fuerza hace que la rotación sea no uniforme y en promedio la desacelera, de tal modo que $\Omega_b < \omega_0 - \omega$.

Regresando al marco de referencia original, vemos que el oscilador tiene la frecuencia $\omega + \Omega_b < \omega_0$, y que su incremento de fase está modulado por la frecuencia de beats Ω_b . Tal movimiento está caracterizado por dos frecuencias ($\omega + \Omega_b$ y ω_0) y es llamado *cuasiperiódico*. Más precisamente, el movimiento es cuasiperiódico si el radio $(\omega + \Omega_b)/\Omega_b$ es irracional, caso muy típico por cierto.

Enganchamiento de frecuencias y regiones de sincronización

Ya se ha visto que para un valor fijo de ε , la frecuencia del oscilador forzado depende de la desintonización $\omega - \omega_0$. De tal manera que para una desintonización suficientemente pequeña, la fuerza externa engancha al oscilador, produciendo la igualdad $\Omega = \omega$. Si la desintonización excede cierto valor crítico, la igualdad deja de ser cierta, como se muestra en la figura 4.6a.

Si hacemos una gráfica de la familia entera de curvas $\Omega - \omega$ contra ω para los diferentes valores de la amplitud del forzamiento ε (figura 4.6a), las curvas determinan una región en el plano (ω, ε) para la cual la frecuencia del oscilador es igual a la frecuencia de la fuerza externa, es decir, la región del dominio donde se obtiene el estado de sincronización del oscilador (figuras 4.6a,b). Por tales razones, dichas regiones son nombradas *región de sincronización* o *lengua de Arnold*.

La sincronización es a menudo descrita en términos de *enganchamiento*

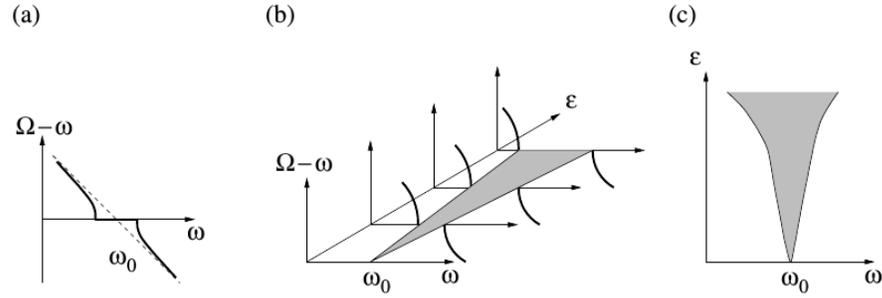


Figura 4.6: Tomada de: [14, p. 52]. (a) La diferencia de frecuencias entre la del oscilador forzado Ω y la de la fuerza externa ω , es vista como una función de ω para un valor fijo de la amplitud de forzamiento ε . En una vecindad de la frecuencia del oscilador autónomo ω_0 , $\Omega - \omega$ es exactamente cero; esto se denota *enganchamiento de frecuencias*. (b) La familia de gráficas $\Omega - \omega$ contra ω , para diferentes valores de la amplitud de forzamiento ε , determina el dominio donde la frecuencia del oscilador forzado Ω es igual que la del forzamiento externo ω . Este dominio, pintado en gris en (c), es conocido como la *región de sincronización* o *lengua de Arnold*.

de fases. Esto, pues un movimiento no sincronizado corresponde a un crecimiento no acotado de la diferencia de fases, mientras que en el estado de sincronización la diferencia de fases está acotada y de hecho es constante:

$$\phi(t) - \phi_e(t) = \text{constante}, \quad (4.2)$$

donde la constante equivale a $\phi^0 + \Delta\phi$. Cabe recordar que el ángulo constante ϕ^0 depende de la fase inicial de la fuerza externa y de cómo ésta afecta al oscilador.

Transición a la sincronización

Supongamos que la amplitud del forzamiento está fija. Con respecto al dibujo de la lengua de Arnold, quisiéramos saber qué es lo que sucede a lo largo de una línea horizontal. Podemos empezar con una igualdad de frecuencias, $\omega = \omega_0$, y luego ir decreciendo gradualmente la frecuencia de la fuerza externa ω . Lo que observamos es cómo la sincronización desaparece al cruzar la frontera de la lengua (figura 4.7). Al cumplirse la igualdad de frecuencias, la diferencia de fases es igual a $\phi^0 = 0$. Con el incremento

4.1. SINCRONIZACIÓN DE UN OSCILADOR PERIÓDICO POR UN FORZAMIENTO EXTERNO 5

en el desajuste, aparece una diferencia de fases distinta de cero (pero aún constante). Cuando el punto cruza la frontera de la lengua, ocurre la pérdida de la sincronización, y la diferencia de fases crece infinitamente. Sin embargo, tal crecimiento no es lineal. Lo que se obtiene son intervalos de tiempo donde la diferencia de fases es casi constante, y otros, mucho más chicos, donde la diferencia de fases cambia por 2π relativamente rápido. Tal cambio súbito del comportamiento de la diferencia de fases es llamado *deslizamiento de fase*.

La alternancia significa que durante largos intervalos de tiempo, el sistema oscila casi en sincronía con la fuerza externa, y luego hace un ciclo adicional en un corto intervalo temporal (o pierde un ciclo, si el punto cruza la frontera derecha de la lengua). Aquí se puede decir que la dinámica de la diferencia de fases es intermitente.

Con incrementos posteriores en el desintonización de frecuencias, la longitud de los intervalos de tiempo donde casi se tiene la sincronía va decreciendo, hasta que eventualmente el incrementeo de la diferencia de fases se vuelve casi lineal. Toda la imagen descrita es simétrica con respecto al desajuste.

Técnica estroboscópica y Mapeo de Poincaré

La idea de ésta técnica es bastante simple: observemos la fase de un oscilador periódico forzado ϕ cada tiempo $t_k = KT$, con T el periodo de la fuerza externa, y $k = 1, 2, \dots$

El nombre proviene de los instrumentos ópticos que miden la frecuencia de rotación u oscilación de un objeto mecánico por medio de emitir flashes de luz a intervalos de tiempo, de tal manera que el objeto pareciera estar fijo si la frecuencia de los flashes de luz es igual a la del objeto medido.

Si el oscilador está sincronizado con la fuerza externa, i.e., $\Omega = \omega$, entonces, al hacer la medición estroboscópica con la frecuencia del forzamiento ω , nos encontraremos con el mismo punto en cada ocasión. Si el oscilador no ha sido enganchado por la fuerza externa, y no existe relación entre las fases, se anticipa que para cada observación se puede encontrar un valor arbitrario.

Aquí se tiene un ejemplo de interés en la música electrónica: supongamos que un DJ está por mezclar dos tracks que por simplicidad tienen el mismo número de b.p.m.. Si el tiempo fuerte del primer track entra junto con el tiempo fuerte del segundo, entonces la transición será natural (al menos rítmicamente). Por el contrario, si los tiempos fuertes no coinciden, entonces dependerá de la pericia del *DJ* para mantener bailando a la concurrencia. En este caso, son las *métricas* de cada track las que se comparan. donde el

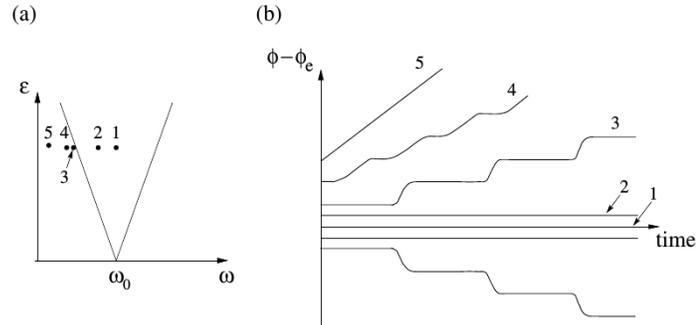


Figura 4.7: Tomada de [14, p. 54]. Dinámica de la fase en la transición a la sincronización. En (b) se muestra la diferencia de fases para diferentes valores de la frecuencia de forzamiento; estos valores están indicados en (a) con los puntos 1–5, dentro y fuera de la zona de sincronización. En el estado de sincronización (como en los puntos 1 y 2), la diferencia de fases es constante (con las líneas correspondientes 1 y 2 en (b)); es cero justo en el centro de la lengua y distinta de cero en cualquier otro sitio. Justo afuera de la lengua, la dinámica de la fase es intermitente: la diferencia de fases se comporta como una secuencia de saltos rápidos, entremezclada con épocas de comportamiento casi sincronizado (ver el punto y la curva 3). A medida que los puntos se alejan del borde de la lengua, la dinámica de la fase tiende hacia un crecimiento uniforme (puntos y curvas 4 y 5). La transición en el borde derecho ocurre simétricamente, en ese caso la diferencia de fases decrece.

tiempo fuerte de la primera siendo el análogo de los flashes de luz.

La técnica estroboscópica es un caso particular de la aplicación de Poincaré y la ventaja que nos ofrece es que puede ser utilizado en el análisis de todo tipo de osciladores autosostenidos, no sólo cuasi lineal, sino también en osciladores de Van der Pool e incluso en osciladores caóticos.

Sea S una superficie de dimensión $n - 1$ transversal al flujo de un atractor de n dimensiones, la aplicación de Poincaré P es una aplicación de S en sí misma obtenida de cualesquiera dos intersecciones sucesivas de una trayectoria con la superficie. Si x_k denota la k -ésima intersección, entonces P está definida como :

$$x_{k+1} = P(x_k), \quad (4.3)$$

Si x^* es un punto fijo de P , i.e., $P(x^*) = x^*$, entonces la trayectoria que

empieza y regresa a x^* es una órbita cerrada. Al observar el comportamiento de P cerca de este punto fijo podemos determinar la estabilidad de la órbita cerrada.

La aplicación de Poincaré convierte entonces problemas concernientes a órbitas cerradas a problemas de puntos fijos de una aplicación.

Enganchamiento por un tren de pulsos

La observación estroboscópica (de periodo T) de una trayectoria en el oscilador forzado (con un pulso de periodo T) se expresa por medio de la relación entre las fase después del n -ésimo pulso y la fase después del $n + 1$ -ésimo pulso:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \nu + \Delta(\phi_n + \nu), \quad (4.4)$$

donde ν es el incremento constante de fase debido al desajuste de frecuencias y $\Delta(\phi_n + \nu)$ es la acción del pulso sobre el oscilador (autónomo). Si se obtiene la igualdad $\phi_{n+1} = \phi_n$ entonces se presenta la sincronización. Al mapeo $\phi_n \rightarrow \phi_{n+1}$ se le conoce como el mapeo circular.

Sincronización de orden mayor

Si el mismo forzamiento efectúa la observación estroboscópica del oscilador pero ahora cada $2T$, el incremento de fase debido al desajuste de frecuencias será de 2ν . Así entonces se puede lograr que un oscilador con frecuencia ω_0 sea enganchado por una fuerza con frecuencia cercana a $\omega/2$ y de amplitud suficientemente grande. Entonces la sincronización surge con el establecimiento de la igualdad $2\omega = \Omega$. Tal régimen es llamado sincronización de orden 2:1. Más generalmente, podemos hablar de regímenes de sincronización de orden $n : m$, con m pulsos por n ciclos.

4.2. Teoría del mapeo circular

Esta es la sección donde se formalizará todo lo visto anteriormente en el capítulo. Y para empezar, no está de más replantear las hipótesis.

Considérese el sistema autónomo disipativo de dimensión $n \geq 2$

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (4.5)$$

y supongamos que este sistema tiene una solución periódica estable $x_0(t) = x_0(t + T_0)$. En el espacio fase, esta solución es una trayectoria atractora cerrada aislada, es decir, un ciclo límite. El punto fase moviéndose a lo largo del ciclo representa las oscilaciones auto sostenidas.

Además, se requiere que la fase crezca uniformemente, de modo que obedezca la ecuación

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (4.6)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ es la frecuencia de las oscilaciones autosostenidas, también llamada frecuencia natural.

Ahora consideramos el efecto de una fuerza externa, periódica y pequeña sobre el oscilador autosostenido. El sistema forzado se describe con la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon p(x, t), \quad (4.7)$$

donde el forzamiento cumple con la igualdad $\varepsilon p(x, t) = \varepsilon p(x, t + T)$, pero donde T es por regla general distinto a T_0 . Además el parámetro ε es pequeño.

La fuerza externa empuja hacia afuera a la trayectoria del ciclo límite, pero puesto que ésta es pequeña y el ciclo es estable, la trayectoria permanece en una vecindad de éste. Contrario a ello, la perturbación de la fase puede ser grande, es decir, la fuerza puede hacer recorrer al punto fase a lo largo del ciclo con facilidad. Tales propiedades apuntan a que la dinámica del sistema perturbado pueda ser descrita con sólo usar la fase, lidiando con las perturbaciones transversales al ciclo mediante el artificio de definir a la fase no sólo en el ciclo límite, sino también en una vecindad de él.

La idea principal es definir a la variable fase de tal manera que rote uniformemente de acuerdo a la ecuación (4.6), pero no sólo en el ciclo, sino también en su vecindad. Para lograrlo vamos a presentar las *curvas isócronas*. Observemos el sistema dinámico (4.5) estroboscópicamente a intervalos de tiempo T_0 , que es el periodo del ciclo límite. Obtenemos así el mapeo

$$x(t) \rightarrow x(t + T_0) \equiv \Phi(x). \quad (4.8)$$

Bajo tal aplicación todos los puntos del ciclo límite son puntos fijos, y todos los puntos en una vecindad del ciclo están atraídos a él. Sea x^* en el ciclo límite y considérense todos los puntos en su vecindad que son atraídos hacia él bajo la acción de Φ . Tales puntos conforman una hipersuperficie I de dimensión $M - 1$, llamada isócrona. Una hipersuperficie isócrona puede ser construida a partir de todo x en el ciclo límite; por lo que podemos parametrizar las hipersuperficies de acuerdo a la fase como $I(\phi)$ (figura 4.8). Ahora sí que podemos extender la definición de fase a la vecindad de un ciclo límite, demandando que la fase permanezca constante en cada curva isócrona. Aunque claro que esta definición aplica sólo para la vecindad del ciclo donde existen las curvas isócronas.

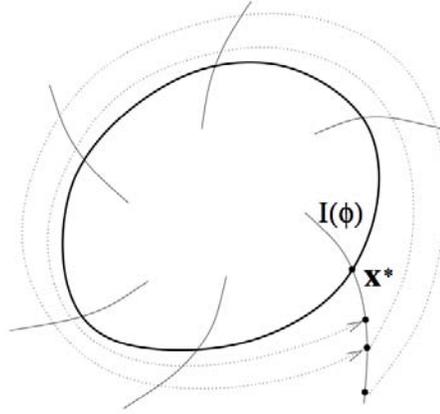


Figura 4.8: Tomada de [14, p. 179]. Curvas isócronas $I(\phi)$ en la vecindad del ciclo límite estable. Estas curvas son invariantes bajo el mapeo estroboscópico (con el periodo del ciclo límite T_0), que está formado por las trayectorias que se muestran en líneas punteadas.

Habiendo definido la fase en una vecindad del ciclo límite, podemos reformular la ecuación (4.6) en esta vecindad como

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = \omega_0. \quad (4.9)$$

Como la fase es una función suave con respecto a las coordenadas x , podemos representar su velocidad como

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (4.10)$$

la cual junto con la ecuación (4.5), nos da la relación

$$\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} f_k(x) = \omega_0. \quad (4.11)$$

Ahora consideramos el sistema perturbado (4.7), con el cual la ecuación (4.10) se convierte en

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (f_k(x) + \varepsilon p_k(x, t)) = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} p_k(x, t). \quad (4.12)$$

El segundo término en el lado derecho de la igualdad es pequeño (proporcional a ε), y las desviaciones de x del ciclo límite x_0 son pequeñas también. Así pues, en la primera aproximación podemos despreciar tales desviaciones y calcular el lado derecho en el ciclo límite:

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_k} p_k(x_0, t). \quad (4.13)$$

Puesto que los puntos en el ciclo límite están en correspondencia 1 – 1 con la fase ϕ , podemos obtener la siguiente ecuación para la fase:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t), \quad (4.14)$$

donde

$$Q(\phi, t) = \sum_k \frac{\partial \phi(x_0(\phi))}{\partial x_k} p_k(x_0(\phi), t). \quad (4.15)$$

Nótese que Q es una función $2\pi i$ periódica de ϕ y T periódica de t . De tal manera que el espacio de fases del sistema dinámico (4.14) es el toro de dos dimensiones $0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq t < T$. Este sistema de dos dimensiones y de tiempo continuo se puede reducir a una aplicación unidimensional de la siguiente manera. Como la periodicidad respecto al tiempo está explícita, se puede aplicar la técnica estroboscópica cada tiempo T . Escogiendo $t = t_0$

y con esto fijando una fase del forzamiento externo, podemos encontrar una relación inyectiva entre los puntos $\phi(t_0)$ y $\phi(t_0 + T)$, por lo que la aplicación

$$\phi_{n+1} = \phi + \omega_0 T + \varepsilon F(\phi_n), \quad (4.16)$$

está bien definida. A ésta se le conoce como mapeo circular y es equivalente a la ecuación de la fase (4.14).

Acerca de esta ecuación hay varias observaciones por señalar.

1. La aplicación es llamada mapeo circular puesto que está definida en el intervalo $0 \leq \phi < 2\pi$. Para ser formales, habría que indicar que la operación del lado derecho de la ecuación se debe de aplicar módulo 2π . Sin embargo, se omite la indicación para simplificar la notación.
2. El mapeo depende de la elección de t_0 y con ello de la fase de la fuerza externa escogida para las observaciones estroboscópicas. Sin embargo, todos los mapeos resultantes de distintas elecciones de t_0 son equivalentes, puesto que están conectados por una transformación suave $\phi(t_0) \rightarrow \phi(t'_0)$ por medio de las soluciones de (4.14).
3. Si $\varepsilon = 0$, se obtiene un *deslizamiento circular*. La dinámica del deslizamiento depende del parámetro $\omega_0 T$ y es trivial. Si el cociente T/T_0 es racional, es decir, si $\omega_0 T = 2\pi p/q$, toda isocрина es periódica con periodo q . Si la proporción T/T_0 es irracional, entonces obtenemos una rotación cuasiperiódica en el círculo.
4. En (4.16) están separados el término de desplazamiento y la función no lineal con el objetivo de recalcar el significado físico de los parámetros ω_0 y ε : ellos corresponden a la frecuencia y a la amplitud del forzamiento exterior, respectivamente. Vale la pena recordar que tal separación es válida sólo para pequeños valores de ε .

Pero la propiedad que más nos interesa de este mapeo es que para valores de $\varepsilon \neq 0$ existen órbitas periódicas. Si recordamos que la ecuación describe la interacción de dos osciladores autosostenidos, lo que vamos a probar es que efectivamente se puede obtener la sincronización.

Número de rotación

El mapeo circular es uno de los modelos básicos de la dinámica no lineal. El mapeo sinusoidal circular es un ejemplo muy ilustrativo del mismo

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon \operatorname{sen}(\phi_n) \quad (4.17)$$

y de él se mencionarán características relacionadas al problema de la sincronización.

Este mapeo depende de dos parámetros, y su significado físico se deriva directamente de (4.16). El parámetro $\eta = \omega_0 T = 2\pi T/T_0$ es la proporción entre el periodo del forzamiento y el periodo de las oscilaciones autosostenidas. Éste varía con la frecuencia de la fuerza externa. El parámetro ε es proporcional a la amplitud de la fuerza externa. Para $\varepsilon = 0$, obtenemos rotación lineal (el desplazamiento circular); y el valor de ε controla el nivel de no linealidad del mapeo (4.17). El propósito es describir las dinámicas de (4.17) en el plano de parámetros (η, ε) , centrando la atención en las regiones correspondientes al estado de sincronización; la presentación de las descripciones se hace en forma de proposiciones.

1. Puesto que la fase se considera módulo 2π , es decir, en el círculo $0 \leq \phi < 2\pi$, las dinámicas no cambian si sumamos $\pm 2\pi$ al parámetro η . Por lo tanto, en la literatura sólo se considera al intervalo $0 \leq \eta < 2\pi$ en el espacio de parámetros. Sin embargo, para nuestros propósitos, el caso de la resonancia $\eta \approx 2\pi$ (que significa que $T \approx T_0$) es el más importante. Nótese también que $2\pi(\eta - 1) = 2\pi(T - T_0)/T_0$ es equivalente al parámetro ν que caracteriza la diferencia de frecuencias ($\nu = \omega - \omega_0$).
2. El mapeo (4.17) es invertible si $|\varepsilon| \leq 1$, y no es invertible si $|\varepsilon| > 1$. La línea $\varepsilon = 1$ es llamada una *línea crítica*: pueden ocurrir dinámicas caóticas por encima de ella. De hecho, en la vecindad de la línea crítica el mapeo circular deja de representar a la dinámica verdadera del sistema forzado. Las dinámicas que se describirán serán para valores $\varepsilon < 1$.
3. Para valores positivos de ε , la dinámica también se puede caracterizar con un sólo parámetro, llamado el número de rotación. Para un punto inicial dado ϕ_0 , el número de rotación está definido como el promedio de las diferencias de fases después de una iteración:

$$\rho(\phi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n - \phi_0}{2\pi n}. \quad (4.18)$$

El número de rotación no depende de la condición inicial ϕ_0 y es el mismo para iteraciones futuras ($n \rightarrow \infty$) y pasadas ($n \rightarrow -\infty$). Así entonces, ρ depende de los parámetros del mapeo circular únicamente. Claramente, si $\varepsilon = 0$ el número de rotación es $\rho = \eta/2\pi$.

Nos encontramos nuevamente con dos tipos de dinámica: la correspondiente a un número de rotación racional y la correspondiente a uno irracional. Y dependiendo de ello, la rotación será periódica o cuasiperiódica, respectivamente.

Antes de entrar en detalles, es pertinente interpretar el número de rotación en términos de oscilaciones del sistema original (4.17). El número de rotación puede ser reescrito como

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(\phi(t) - \phi(0))}{2\pi t} = \frac{\Omega}{\omega}, \quad (4.19)$$

donde se introduce Ω , que es la velocidad media de rotación de la fase

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t}, \quad (4.20)$$

y es llamada la *frecuencia observada*.

La relación (4.19), nos muestra entonces que el número de rotación es el cociente de la frecuencia observada de las oscilaciones entre la frecuencia del forzamiento exterior.

4. Un número de rotación irracional corresponde a una dinámica cuasiperiódica de la fase. De acuerdo con el teorema de Denjoy [Denjoy 1932], en el caso de que ρ sea irracional, el mapeo circular no lineal (4.17) puede ser transformado con el cambio de variable $\phi = g(\theta)$ (con la obvia propiedad $g(\theta + 2\pi) = 2\pi + g(\theta)$) al desplazamiento de la fase

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\rho. \quad (4.21)$$

Por lo que la solución al mapeo circular está dada por

$$\phi_n = g(\theta_n) = g(\theta_0 + n2\pi\rho). \quad (4.22)$$

La ecuación (4.18), nos dice que un valor irracional de ρ significa que la frecuencia observada y la frecuencia de la fuerza externa son inconmensurables, y son éstas las dos frecuencias básicas del movimiento cuasiperiódico.

5. Si el mapeo circular tiene una órbita periódica, entonces el número de rotación es racional. De hecho, en la órbita periódica el número de rotación es obviamente racional, y es independiente del punto inicial. Para rotaciones lineales $\varepsilon = 0$, todos los puntos en la circunferencia son periódicos, pero esta distribución desaparece en el caso no lineal $\varepsilon \neq 0$. Generalmente, los puntos periódicos de un mapeo no lineal están aislados. Si una órbita periódica tiene periodo q , y después de q iteraciones la fase ϕ hace p rotaciones (de tal manera que $\phi_{n+q} = \phi_n + 2\pi p$), entonces el número de rotación es $\rho = \frac{p}{q}$.

Ahora consideremos órbitas periódicas, empezando con aquellas que tienen periodo uno, es decir, con puntos fijos. Éstos corresponden a la resonancia principal $T \approx T_0$, por lo tanto fijamos $\rho = 1$ y miramos las órbitas que cumplen $q = p = 1$. Éstas órbitas satisfacen

$$\phi + 2\pi = \phi + \omega T_0 + \varepsilon F(\phi) \quad (4.23)$$

y son soluciones de la ecuación

$$\omega_0 T - 2\pi + \varepsilon F(\phi) = 0. \quad (4.24)$$

La solución existe si

$$-\varepsilon F_{min} \leq \omega_0 T - 2\pi \leq \varepsilon F_{max}, \quad (4.25)$$

más aún, en esta región de parámetros al menos hay dos soluciones. Es fácil checar que una es estable y la otra es inestable. Para funciones F que tienen más de un mínimo y un máximo, pueden haber más de dos soluciones con el mismo periodo, pero siempre aparecen en pares: una estable y una inestable. Es importante mencionar que la relación (4.25) define la región de sincronización con número de rotación uno en el plano de parámetros (η, ε) .

6. Las propiedades de las órbitas periódicas con periodos más largos son cualitativamente las mismas que las de periodo uno. De hecho, al iterar la ecuación (4.16) q veces también obtenemos un mapeo circular del tipo (4.16), pero con una dependencia más compleja en los parámetros η y ε . Un punto fijo de este mapeo iterado que satisface

$$\phi_q = \phi_0 + 2\pi p \quad (4.26)$$

es una órbita periódica del mapeo (4.16) con número de rotación $\rho = p/q$.

La región de sincronización correspondiente al número de rotación $\rho = p/q$ es la siguiente

$$-\varepsilon \tilde{F}_{min} \leq \omega_0 T - 2\pi \frac{p}{q} \leq \varepsilon \tilde{F}_{max}, \quad (4.27)$$

y puede encontrarse en la aproximación de primer orden en ε .

7. Puesto que sólo dos regímenes son posibles en el mapeo circular, llámense estos periódico y cuasiperiódico, podemos construir el diagrama de los estados como se muestra en la figura 4.9. Todas las regiones de sincronización tienen la forma de lenguas verticales [Arnold 1961], hoy llamadas lenguas de Arnold. La punta de la lengua que emana del número de rotación $\rho = p/q$ toca el punto $\varepsilon = 0, \eta = 2\pi p/q$. Todos los espacios que se encuentran entre las lenguas corresponden a movimientos cuasiperiódicos con números de rotación irracionales.

Las lenguas de Arnold forman franjas verticales en el espacio de parámetros, así que el orden de números racionales en la línea $\varepsilon = 0$ es levantado sobre toda la región $0 < \varepsilon < 1$. Esto significa que para cada ε , tenemos una secuencia ordenada de intervalos de sincronización con todos los números de rotación posibles. En particular, estos intervalos son densos en todas partes: entre dos regímenes cuasiperiódicos con diferentes números de rotación, existe una región de sincronización.

Desde el punto de vista topológico, el régimen cuasiperiódico es inestable y el estado de sincronización es estable: para ε fijo y η libre, la sincronización ocurre en los intervalos de η , mientras que la cuasiperiodicidad es observada en puntos aislados. Esto significa que un

estado cuasiperiódico puede ser destruido con una perturbación pequeña arbitraria. Sin embargo, desde el punto de vista probabilístico, los regímenes cuasiperiódicos son abundantes: como ha sido probado por Arnold [1961], para valores de ε pequeños, la medida de Lebesgue de todos los intervalos de sincronización tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$; esto significa que las perturbaciones que destruyen la periodicidad son más bien excepcionales.

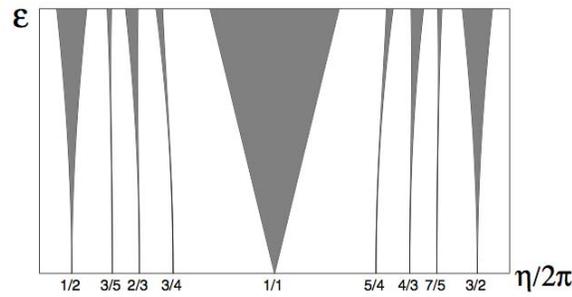


Figura 4.9: Tomada de [14, p. 208]. Las lenguas de Arnold principales del mapeo circular sinusoidal (4.17). Nótese la simetría $\eta \rightarrow 2\pi - \eta$.

8. Para una amplitud fija ε , el número de rotación ρ , como función del parámetro η , tiene valores constantes dentro de las zonas de sincronización, es decir, esta función toma valores constantes en un conjunto denso de subintervalos. Esta función también es continua y monótona [Katok y Hasselblatt 1995], y es llamada la *escalera del diablo* (figura 4.10). La medida de todos intervalos racionales se hace cero para $\varepsilon \rightarrow 0$, pero es igual a la medida completa en la línea crítica $\varepsilon = 1$. La escalera del diablo con una medida positiva de puntos entre los subintervalos constantes es llamada incompleta, y el caso en el que la medida de todos los subintervalos constantes es completa (es decir, igual a la medida de Lebesgue) es llamado escalera del diablo completa. El conjunto de tipo de Cantor de todos los números de rotación irracionales puede ser caracterizado por sus dimensiones fractales, para detalles ver [Jensen *et al.* 1983].
9. La transición hacia y desde la sincronización ocurre a través de la bifurcación silla-nodo.

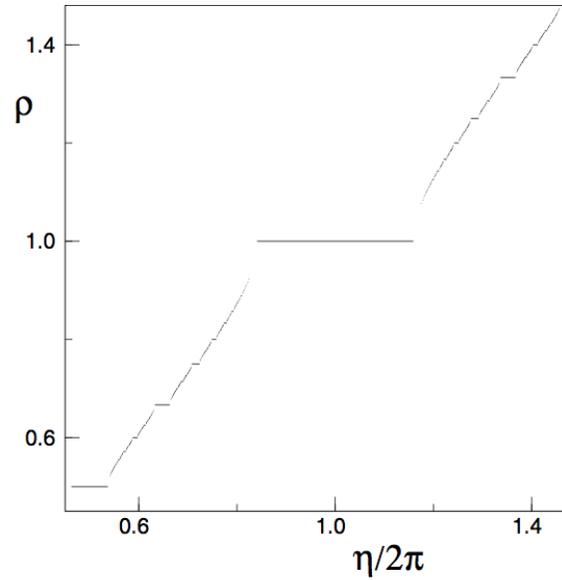


Figura 4.10: Tomada de [14, p. 209]. Escalera del diablo: dependencia del número de rotación en el parámetro η para el mapeo circular (4.17) con $\varepsilon = 1$. Las mesetas principales corresponden a los números racionales $1, 1/2, 2/3, \dots$. No todos los intervalos racionales están representados, por eso las regiones cerca de los extremos de los intervalos grandes parecieran huecas.

La teoría del mapeo circular tiene aplicaciones inmediatas para las propiedades de sincronización de osciladores forzados. Primero que nada, muestra una descripción cualitativa completa de la dinámica para forzamientos pequeños y moderados. El mensaje principal es que no sólo existe la zona de sincronización principal, donde la frecuencia de oscilación coincide exactamente con la de la fuerza externa, sino que también existen regiones de sincronización de orden mayor del tipo

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{p}{q}, \quad (4.28)$$

donde la frecuencia observada está en una relación racional con la frecuencia externa. En la práctica, a medida que p y q crecen, la región de enganchamiento de fases se vuelve más angosta, e incluso en experimentos numéricos sólo pueden ser observados regímenes de sincronización con p y q pequeños.

Capítulo 5

Música y lenguas de Arnold

Recordemos ahora que la intención en el principio era la de motivar un nuevo temperamento. Si se ha profundizado en el concepto de sincronización es debido a que nos ofrece una herramienta analítica para comparar cualesquiera dos movimientos que interactúan entre sí.

Si pensamos a las notas como eventos aislados, es decir, sin relación alguna con otras notas, entonces estamos tratando con elementos inertes. Bien podríamos decir que la nota se “mueve”, ya que ésta está conformada por una infinidad de ondas superpuestas; pero es aquí donde es necesario aclarar cuál es el marco de referencia. La finalidad de un temperamento, de una escala o de una progresión es la de ofrecer un conjunto de notas que son materia prima para la composición de música. De tal manera que el marco de referencia está definido por su capacidad para producir música. Según toda tradición humana, una nota aislada no es música; según toda tradición humana, es necesario una sucesión de notas. Obteniendo así el concepto más natural de movimiento en la música: el ritmo.

¿Qué tal si construimos un esquema rítmico en base a una sincronización de orden mayor $n : m$? O más ambiciosamente, ¿Qué tal si construimos una familia de esquemas rítmicos para un orden de sincronización mayor $n : m$? Si bien es cierto que las polirritmias ya hacen uso de la sincronización de orden mayor, sólo toman en cuenta el caso en el cual los intervalos de tiempo entre cada pulso son idénticos. Explorar todas posibilidades que nos ofrecen las lenguas de Arnold sería de lo más interesante. Sin embargo, dada la precisión requerida, el medio natural para reproducir tales esquemas rítmicos sería la computadora.

De regreso a la idea original, la de aplicar el concepto de sincronización a la afinación musical, tendremos que definir cómo es el movimiento en una afinación, o más generalmente, en un conjunto de alturas. Sin duda esta idea es más abstracta y vale la pena ilustrarla con ejemplos.

- Una línea melódica.
- La estructura de Tono-Tono-Semitono-Tono-Tono-Tono-Semitono de la escala mayor.
- El círculo de quintas.
- El tamaño de los intervalos en un temperamento.

Aunque todos estos ejemplos están definidos por distancias interválicas, es la sucesión de las notas en el tiempo la que genera la idea de movimiento. Así pues, si la intención es construir un temperamento a partir de la teoría de la sincronización, es natural considerar a los pulsos como las notas y a los ciclos como las octavas.

Ahora, de regreso al mapeo circular

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\phi_n), \quad (5.1)$$

se tiene la interesante propiedad de que existen órbitas periódicas para $k > 0$, incluso para valores irracionales de Ω . Las regiones en el plano (Ω, k) para las cuales se cumple la periodicidad son las lenguas de Arnold de la ecuación, y son el dominio de interés para la construcción de nuestro(s) temperamento(s). Tales regiones se denotan según el racional Ω del cual emanan, es decir, del par $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$.

Entonces, tenemos que cada punto dentro de una lengua corresponde a un parámetro (Ω, k) , que resulta en una órbita periódica para la ecuación (5.1); esto es, una órbita que se repite después de q iteraciones. El valor de q está dado por el denominador del valor fraccionario de Ω , por ejemplo, un punto en la lengua definida por $\Omega = \frac{3}{7}$, resulta en una órbita de periodo 7. Si $k > 0$, los intervalos entre los puntos de la órbita tienen tamaños irregulares, ofreciendo un comportamiento más interesante que el obtenido para $k = 0$.

Obtengamos ahora ejemplos de afinaciones a partir de la ecuación (5.1). Y para mostrar que efectivamente son posibles las desviaciones con respecto al temperamento igual, escogamos puntos en la lengua de Arnold que emanada desde $\Omega = \frac{1}{12}$. Ya sabemos que al parámetro $(\Omega = \frac{1}{12}, 0)$ le corresponden las frecuencias del cuadro 2.3. El punto $(\Omega, k) = (0,0845, 0,088942)$ también está en la lengua $\Omega = \frac{1}{12}$, y genera las frecuencias del cuadro 5.1, ilustradas en la figura 5.1

Cuadro 5.1: Tomado de: [1, p. 138]. Frecuencias generadas con el parámetro $(\Omega, k) = (0,0845, 0,088942)$

i	Nota	θ_i	Hertz
0	<i>La</i>	0	440
1	<i>La</i> ♯	0.07133	462.3
2	<i>Si</i>	0.146206	486.93
3	<i>Do</i>	0.22683	514.91
4	<i>Do</i> ♯	0.314545	547.19
5	<i>Re</i>	0.409001	584.22
6	<i>Re</i> ♯	0.507379	625.44
7	<i>Mi</i>	0.604795	669.14
8	<i>Fa</i>	0.696542	713.07
9	<i>Fa</i> ♯	0.780492	755.8
10	<i>Sol</i>	0.857399	797.18
11	<i>Sol</i> ♯	0.929626	838.1
12	<i>La</i>	1	880

hay que señalar que a la fase inicial θ_0 se le asocia la frecuencia $La = 440Hz$, ya que por convención, cualquier afinación se realiza en referencia a tal nota.

Puesto que la órbita es periódica, la octava es justa (cumple la proporción de 2 : 1), mientras que los otros intervalos están ligeramente perturbados respecto a sus contrapartes del temperamento igual.

Ahora, escogiendo al punto $(\Omega, k) = (0,17, 0,94)$, también en la Lengua $\Omega = \frac{1}{12}$, obtenemos un ejemplo más extremo, puesto que las desviaciones con respecto a la regularidad están mucho más pronunciadas. En el cuadro 5.2 se muestran las frecuencias así producidas e ilustradas en la figura 5.2

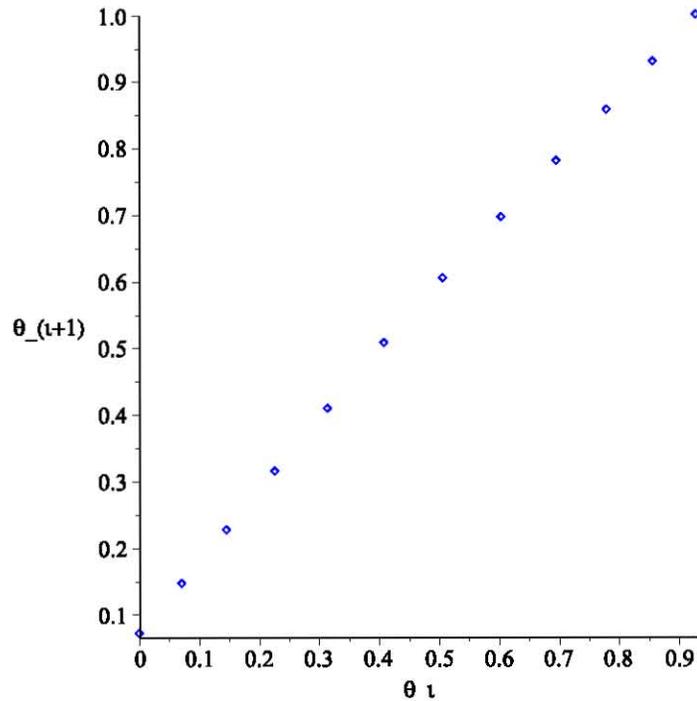


Figura 5.1: Gráfica de las iteraciones de la ecuación (5.1) para el parámetro $(\Omega, k) = (0,0845, 0,088942)$.

Sin embargo, dos cuadros con frecuencias podrían no ser suficientes para el propósito de ejemplificar, por lo que a continuación se presenta un código en el lenguaje *SuperCollider* [16]. Son las tres escalas construidas como secuencias y listas para ser compiladas, escuchadas y juzgadas.

```
s.boot //encedemos el servidor

definicion de sintesis //construimos un sonido para las escalas

(
SynthDef(\tono, { |out=0, gate=1, frecuencia=200, amp=0.3|
  var sen, env;
  sen=SinOsc.ar(frecuencia, amp)!2;
  env=EnvGen.kr(Env.perc(0,2), gate, doneAction:2);
  Out.ar(out, sen*env)
})
```

Cuadro 5.2: Tomado del artículo de Rob Sturman [1, p. 139]. Frecuencias generadas con el parámetro $(\Omega, k) = (0,17, 0,94)$

i	Nota	θ_i	Hertz
0	La	0	440
1	$La\sharp$	0.0205	446.295
2	Si	0.0429	453.2888
3	Do	0.0703	461.8654
4	$Do\sharp$	0.1075	474.022
5	Re	0.1642	493.0243
6	$Re\sharp$	0.2621	527.6412
7	Mi	0.4488	600.5624
8	Fa	0.7623	746.3641
9	$Fa\sharp$	0.9153	829.8334
10	Sol	0.9537	852.2127
11	$Sol\sharp$	0.9789	867.2337
12	La	1	880

```

    }).send(s)
  )
Synth(\tono)

//hacemos la secuencia para la primer escala, la temperada

(
t=[440, 466.16, 493.88, 523.25, 554.37, 587.33, 622.25, 659.26, 698.46, 739.99,
783.99, 830.61, 880];
Tdef(\escala1, {var cont=0, bpm=10;
  inf.do{Synth(\tono, [\frecuencia, t[cont%t.size]]);
  cont=cont+1;
  (60/(bpm*4)).wait
  }})
);

Tdef(\escala1).quant_(0).play //prendemos la secuencia

```

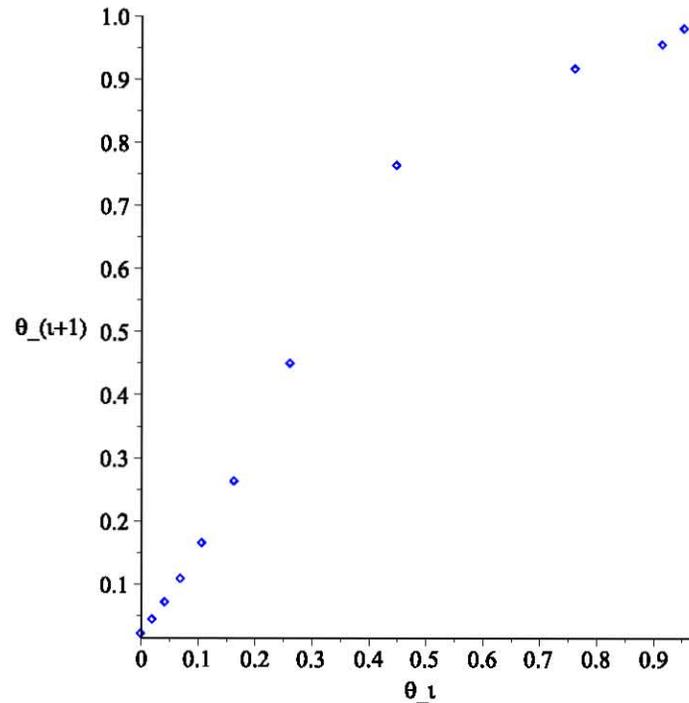


Figura 5.2: Gráfica de las iteraciones de la ecuación (5.1) para el parámetro $(\Omega, k) = (0,17, 0,94)$.

```
Tdef(\escala1).stop //apagamos la secuencia
```

```
//hacemos una secuencia para la segunda escala, la generada por el parametro (
0.088942)
```

```
(
e=[440, 462.30, 486.93, 514.91, 547.19, 584.22, 625.44, 669.14, 713.07, 755.80,
797.18, 838.10, 880];
Tdef(\escala2, {var cont=0, bpm=10;
inf.do{Synth(\tono, [\frecuencia, e[cont%e.size]]);
cont=cont+1;
(60/(bpm*4)).wait
}})
```

```

);

Tdef(\escala2).quant_(0).play
Tdef(\escala2).stop

//hacemos la secuencia para la terera escala, la generada por el parametro
(0.17, 0.94)

(
i=[440, 446.2950, 453.2888, 461.8654, 474.0220, 493.0243, 527.6412, 600.5624,
  746.3641, 829.8334, 852.2127, 867.2337, 880];
Tdef(\escala3, {var cont=0, bpm=10;
  inf.do{Synth(\tono, [\frecuencia, i[cont%i.size]]);
  cont=cont+1;
  (60/(bpm*4)).wait
  })
);

Tdef(\escala3).quant_(0).play
Tdef(\escala3).stop

```

Se pueden hacer muchos más ejemplos, tomando en cuenta la propiedad de que las lenguas de Arnold son densas en el espacio (Ω, k) . Así pues, para un denominador q cualquiera, la elección de una lengua en particular, dada por p , y de la fuerza de la no linealidad, dada por $0 \leq k \leq 1$, es enormemente arbitraria.

Capítulo 6

Conclusiones

Durante la elaboración de este trabajo escrito he tenido la ocurrencia de varios ejemplos y analogías que pudieran explicar mejor algunos conceptos. Asimismo, resulta imposible no hacer comparaciones con otras teorías ya consolidadas. Tal es el caso del trabajo de mi asesor Pedro Miramontes, quien estudia la duplicación de genes desde una perspectiva de los sistemas dinámicos. Él define un espacio de fases en el cual los puntos son cadenas de genes y la distancia entre cualesquiera dos de ellos depende de la similitud entre sus correspondientes cadenas; formando así trayectorias que cumplen las hipótesis de un teorema de Poincaré, para concluir con que toda trayectoria pasará eventualmente tan cerca como se quiera de su condición inicial. Lo cual en términos biológicos significa que la cadena se replicará casi idénticamente. Llevando estas ideas a la computadora, un alumno de Pedro diseñó esquemas visuales que ofrecen una descripción global de todo un gen. En un nivel de análisis más alto, lo que ofrece el trabajo del equipo de Pedro es una herramienta novel para comparar genes de distintas especies.

La relevancia de lo anterior en mi trabajo se aclarará a continuación. En el capítulo de antecedentes musicales se mencionaron los acordes conocidos como funciones, los cuales no son precisamente funciones matemáticas, pero sí que pueden restringir la elección del siguiente acorde. Algunos acordes pueden tener distintas funciones, dependiendo de su nivel de consonancia o disonancia. Los compositores (en su mayoría) escogen qué función darle a cada acorde, de acuerdo a la necesidad que va creando la(s) línea(s) melódica(s). El desarrollo *horizontal*, es decir, el de las notas a lo largo del tiempo, es el que manda en la música, puesto que es la manera más conveniente para diseñar un discurso sonoro. Así pues, la estructura de una obra es susceptible a

ser caracterizada por la sucesión de funciones que la conforman. Ya tenemos nuestro espacio de fases.

Durante el periodo clásico la música se desarrollaba conforme a la confrontación dialéctica. La *forma sonata* es la forma principal del clacisismo y a pesar de tener varias vertientes, todas coinciden en lo siguiente: los temas que se exponen al principio son reexpuestos al final (salvo transposición). Lo cual, en términos de la armonía, se traduce a una repetición de la progresión de funciones inicial. Por lo tanto, se tiene que la trayectoria conformada por las funciones de una obra clásica regresa a la condición inicial.

Al observar el análisis armónico de toda una obra podremos encontrar otras propiedades que nos sugieren el uso de herramientas de sistemas dinámicos, por lo que sería interesante diseñar un programa que analice obras desde esta perspectiva. El mismo programa podría servir para que músicos matemáticos diseñen la estructura de una obra, al escoger las hipótesis que ésta cumpliría vista como una trayectoria.

Por otro lado, cuando escribía el segundo capítulo, la finalidad no era otra que la de explicar qué es una afinación y por qué surge la necesidad de los temperamentos. Yo tenía conocimientos básicos al respecto, como por qué la afinación pitagórica no es cerrada y cómo se construye el temperamento igual. Pero si bien sí había escuchado música en diversas afinaciones, no estaba muy enterado de la discusión al respecto, en gran parte porque el temperamento igual está muy arraigado en la actualidad y también porque mi formación musical ha sido casi exclusivamente en el piano, un instrumento cuya afinación es difícil de ajustar. Tan es así que hay que estudiar una carrera técnica para afinar pianos.

Entonces, para enterarme un poco más del tema, conseguí un libro llamado “Tuning and Temperament: A Historical Survey” de J. Murray Barbour. El cual es sin duda una referencia muy completa, pero realmente poco accesible para un público no experto. Así que decidí escribir lo que conocía, pensando que con ese poco bastaría. Sin embargo, durante ese proceso, me nació la sospecha de que había un transfondo en conceptos como la escala mayor y los modos. Después de todo, es natural preguntarse por qué la escala mayor está integrada por siete notas muy precisas y no otras.

Llegó entonces a mis manos, fortuitamente, el libro “Theory of Sound” de Lord Rayleigh. En él se presenta una introducción a la acústica musical. En esa introducción encontré que la escala mayor se planteaba como el re-

sultado de multiplicar el valor de una frecuencia básica por puras fracciones racionales. Me enteré que esa construcción correspondía a un tipo muy especial de afinación, conocida como afinación justa. En una escala de este tipo, cualesquiera dos notas están relacionadas mediante una proporción. Me sobrecogió entonces un huracán de ideas. Empecé a relacionar esto con otros conceptos de teoría musical y con la construcción de los conjuntos de números, hasta llegar a la conclusión de que no había ninguna o casi ninguna arbitrariedad en la elección de las notas de una escala. Al parecer los resultados a los que llegué no eran del todo desatinados, puesto que un buen día encontré en internet una serie de clases llamada “Introduction to pitch systems in tonal music”, dadas por John Crooks de la UC en Irvine; mucho de lo que había pensado estaba en esos videos.

Fue así como me animé a escribir los antecedentes, haciendo hincapié en la construcción de distintas escalas en base a principios acústicos. Me atreví a denotar ciertos acordes con el nombre “tríadas generadoras”, por parecerme de lo más conveniente. Al respecto de esta elección espero despertar alguna inquietud en el lector.

Bibliografía

- [1] Sturman, Rob, *A dynamical systems approach to musical tuning*, Dynamical systems: An international Journal, 27:1. 131-143, DOI: 10.1080/14689367.2012.656300.
- [2] Latham, Alison, *Diccionario enciclopédico de la música*, FCE, México, 2009.
- [3] Benson, Dave, *Music: A Mathematical Offering*, <https://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/music.pdf>, 14 de diciembre de 2008.
- [4] Rayleigh, John William Trutt, *The theory of sound*, Dover Publications, Inc., New York City, 1945.
- [5] Crooks, John, *Introduction to pitch systems in tonal music*, Licensed under a Creative Commons Attribution 3.0 United States.
- [6] *The sound of music*, Robert Wise, (20th Century Fox, 1965).
- [7] J.M. Barbour, *Tuning and Temperament: A historical Survey*, Dover, New York, 2004.
- [8] Strogatz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books Publishing, Reading, Massachusetts, 1994.
- [9] King Dávalos, Jefferson Edwin; Méndez Lango, Héctor, *Sistemas dinámicos discretos*, UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2014.
- [10] Abraham, Ralph H.; Gardini, Laura; Mira, Christian, *Chaos in Discrete Dynamical Systems*, Springer Science+Business Media New York, 1997.

- [11] Perko, Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer International Edition, New York, 2001.
- [12] Devaney, Robert, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Second Edition), Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1989.
- [13] Hirsch, Morris W.; Smale, Stephen; Devaney, Robert. *Differential Equations, Dynamical Systems, & An Introduction to Chaos* (Second ed.), Boston, MA: Academic Press, 2003.
- [14] Pikovsky, Arcady; Rosenblum, Michael; Kurts, Jürgen, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [15] Stewart, Ian, *¿Juega Dios a los Dados?*, Colección Booket, Editorial Crítica, Barcelona, 2012.
- [16] <http://es.wikipedia.org/wiki/SuperCollider>, [Acceso el 16 de marzo]