

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

**FACULTAD DE ECONOMÍA**

**ANÁLISIS FRACTAL APLICADO A LA SERIE DEL PRECIO DE LA  
ACCIÓN DE GRUPO CARSO, MÉTODO ALTERNATIVO PARA EL  
ESTUDIO DE SERIES FINANCIERAS**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**LICENCIADO EN ECONOMÍA**

**PRESENTA:**

**TRINIDAD MARTÍNEZ LUIS ANTONIO**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**MTRO. RAÚL CARBAJAL CORTÉS**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., JUNIO 2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Agradecimientos.**

A mis padres Antonio y María, por su apoyo incondicional durante toda la carrera y en la elaboración de este trabajo.

A mis amigos Alan Ramsés, Luis Alberto, Alexis, Erick, Jessica, Liliana, Armando por su comprensión y apoyo moral en las dificultades que se presentaron durante la investigación.

A Miguel Ángel, Violeta Lizbeth y Marian Yvette, por proporcionarme acceso a los recursos electrónicos y bibliográficos que permitieron que este trabajo pudiera concluirse.

A mi tutor Raúl Carbajal Cortés, por su disponibilidad a aceptar un tema que denominó “de economía de frontera”, por su flexibilidad en la redacción y termino de cada capítulo y por el apoyo en la adquisición del software que se necesitaba para el análisis estadístico.

# Índice

Introducción.....	5
Capítulo 1. Historia de la econometría.....	8
1. ¿Qué es la econometría?.....	8
1.1. Desarrollo de la econometría clásica.....	8
1.1.1. Econometría de series de tiempo.....	13
1.2. Modelos financieros de gestión de riesgo.....	16
1.2.1. Análisis Fundamental.....	16
1.2.2. Análisis Técnico.....	18
1.2.3. Paseo aleatorio.....	19
1.2.3.1. Movimiento browniano.....	21
1.2.4. Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME).....	22
1.2.5. La teoría moderna de la selección de cartera MPT ( <i>Modern Portfolio Theory</i> ).....	24
1.2.6. Modelo de valoración del precio de los activos financieros CAPM ( <i>Capital Asset Pricing Model</i> ).....	26
1.2.7. Modelo Black-Scholes.....	28
Capítulo 2. Caos, fractales y economía.....	29
2. El caos determinista.....	29
2.1. Fractales.....	37
2.2 Economía fractal.....	43
Capítulo 3. Finanzas fractales.....	51
3. Diez aspectos sobre las finanzas fractales.....	51
I) Mercados turbulentos.....	51
II) Mercados sumamente arriesgados.....	53
III) Relevancia del tiempo mercantil.....	54
IV) Los precios son discontinuos.....	55
V) La flexibilidad del tiempo en los mercados.....	56
VI) Los mercados funcionan igual en todas partes y épocas.....	56
VII) Mercados inciertos y burbujas inevitables.....	57
VIII) Mercados engañosos.....	58
IX) Lo más viable es estimar la posible volatilidad futura.....	58
X) La idea de “valor” tiene límites.....	58
3.1. Estadística y probabilidad para variables aleatorias no gaussianas.....	59

3.1.1. Distribuciones estables.....	59
3.1.1.1. Función característica de la distribución L-estable.....	61
3.1.2 Movimiento browniano fraccional.....	63
3.1.3. Efecto Noé y José.....	64
3.1.3.1 Análisis de la función de autocorrelación.....	65
3.1.4. Análisis R/S.....	68
3.1.4.1. Procedimiento para el cálculo de $(R(d)_i/S(d)_i)_n$ .....	70
Capítulo 4. Análisis fractal de Grupo Carso.....	71
4. Grupo Carso, una red compleja.....	71
4.1. Análisis fractal.....	73
4.1.1 Descripción de los datos.....	74
4.1.2. Pruebas de normalidad a las series FDGC, FSGC y FMGC.....	75
4.1.3. Análisis monofractal para FDGC, FSGC y FMGC.....	81
4.1.3.1 Método gráfico para contrastar invarianza.....	82
4.1.3.2. Estimación del parámetro $\alpha$ y $\beta$ para FDGC, FSGC y FMGC.....	86
4.1.3.3. Prueba R/S a FDGC, FSGC y FMGC.....	91
4.2. Hipótesis de los Mercados Fractales.....	98
Conclusiones.....	107
Anexos.....	111
A.1 Anexo al Capítulo 1. Punto 1.2.3.....	111
A.2 Anexo al Capítulo 2. Punto 2.....	111
A.2 Punto 2.1.....	113
A.2 Punto 2.2.....	114
A.3 Anexo al Capítulo 3. Punto 3.1.3.1.....	115
A.4 Anexo al Capítulo 4. Punto 4.....	117
A.4 Punto 4.1.1.....	123
A.4 Punto 4.1.2. Inciso a.....	124
Inciso b.....	125
A.4 Punto 4.1.3.1.....	125
A.4 Punto 4.1.3.2.....	127
A.4 Punto 4.1.3.3.....	130
A.4 Gráficas del punto 4.1.3.3.....	148
A.4 Punto 4.2.....	150
Bibliografía.....	151

## **Introducción.**

El presente trabajo tiene como objetivo general presentar métodos, alternativos a los que habitualmente se exponen en la literatura económica cuantitativa, que ayuden a probar las hipótesis que hace B. Mandelbrot sobre series financieras, con lo cual se tratará de poner de relieve la existencia de comportamiento fractal en el objeto de estudio.

Concomitante con lo anterior se derivan tres objetivos particulares, el primero de ellos se centrará en exponer las ideas o conceptos que ayuden a la comprensión de los fractales junto con su relación al análisis de datos financieros. El segundo consistirá en verificar si la distribución empírica de los datos está próxima a una normal empleando histogramas, boxplots y la prueba Jarque-Bera pues esto determinará si se continúa con el análisis propuesto. El último objetivo será desarrollar métodos gráficos y estadísticos para el contraste de características fractales en datos financieros, posteriormente se emplearán para analizar el objeto de estudio.

La hipótesis que se plantea consiste en considerar que la condición de que Grupo Carso sea un conglomerado de empresas que tienen actividades en diversas industrias dentro y fuera del país determina que el precio de la acción esté reflejando los impactos sociales, políticos o económicos así como las decisiones internas de sus directivos, como consecuencia de esto, se da cabida a que la serie tenga un comportamiento fractal.

En el capítulo 1 se expone el primer indicio de la aplicación de la matemática a asuntos de índole económica. Posteriormente se desarrolla, desde la perspectiva de Hernández Alonso, el inicio y evolución de la econometría, enfatizando dos vertientes; la econometría clásica y la de series de tiempo. En el capítulo 2 se dan las bases para abordar los fractales, éstas incluyen definiciones y el desarrollo de una figura fractal para hacer más clara la exposición, además se desarrolla el vínculo que hay con la economía desde la perspectiva de B. Mandelbrot. El capítulo 3 comienza con la exposición de las consideraciones que deben ser tomadas en cuenta para que el modelo fractal tenga sentido, seguido de lo que se asume como las herramientas estadísticas que permitirán desarrollar los métodos que se emplearán, tales herramientas son las distribuciones estables, la exposición de los efectos José y Noé así como de la prueba R/S. En el capítulo 4 se realizan las pruebas para verificar si la serie es normal o no, posteriormente se realiza propiamente el análisis (mono)fractal donde son estimados los parámetros que son considerados relevantes para describir a los datos, además, se incluye como modelo que unifica las ideas expuestas el que desarrolla E. Peters llamado Hipótesis de los Mercados Fractales. Posteriormente vienen las conclusiones y por último un anexo donde se incluyen los códigos que fueron necesarios para realizar las pruebas así como las gráficas a lo largo del trabajo.

El aprendizaje, y por ende la propuesta de nuevos métodos que ayuden a analizar series económicas se ha erigido por conducto de los fallos que ellos han evidenciado. Comenzando por la tesis de Bachelier, a quien se le atribuye la primicia del uso del

movimiento browniano, hasta las propuestas de la familia ARCH (Heterocedasticidad condicional autoregresiva), han sido sujetos a mejoras para intentar contemplar la mayor parte de las características que distinguen a dichas series, algunas propuestas como GARCH o ARIMA gozan de una amplia aplicabilidad debido a su capacidad de predicción de corto plazo, sin embargo, hay una práctica muy extendida, y habitual, que se realiza antes de analizar los datos, se trata de las transformaciones a las que son sometidas las series, éstas tienen la finalidad de aproximar su distribución empírica a una normal pues todas las propuestas de modelos han sido deducidas de un hipotético comportamiento gaussiano, mejor conocidos como supuestos. En diversas ocasiones, las finanzas y la economía han recibido críticas enfocadas a subrayar situaciones controversiales que surgen a partir de intentar predecir comportamientos futuros basados en los resultados que arrojan los modelos empleados, como ejemplo se puede citar a Ball (2010), quien afirma que:

Los modelos económicos se han visto engrosados, refinados, adornados o decorados [...], los modelos económicos persisten en la inconsistencia, en el sentido de que fracasan repetidamente a la hora de hacer sus predicciones ajustadas [...], dentro de la comunidad económica son muchos los que lo admiten. Como afirma John Kay, de la London Business School, “Los analistas económicos [...] suelen decir más o menos lo mismo al mismo tiempo, el grado de coincidencia es asombroso. [Pero] lo que dicen casi siempre está equivocado” [Kay, 1995 citado por Ball, 2010] (p. 215).

Derivado de lo anterior, se puede pensar que los métodos propuestos establecen límites intrínsecos para su aplicabilidad, siendo éste un factor que da origen a que continuamente surjan más pero cada vez con un alto grado de sofisticación. La propuesta que se presentará surge en la década de los 60, cuyo expositor y defensor es Benoît B. Mandelbrot. Él centra su trabajo en la introducción de las distribuciones estables o L-estables como herramienta para analizar las variaciones del precio del algodón. A partir de su investigación, surgieron análisis realizados a otros datos por otros investigadores que señalaban que estos se ajustaban a dichas distribuciones pues sus variaciones se apartaban de un comportamiento gaussiano, inclusive, en el año de 1975, a causa de vincular las observaciones que había hecho en el campo de la economía y en la matemática, publica su libro *Les Objets fractals: forme, hasard, et dimension* donde propiamente aparece la palabra fractal y el conjunto de ideas o conceptos relacionados a ella. Posteriormente, B. Mandelbrot fue proponiendo más técnicas para el estudio de las variaciones y fue postulando hipótesis donde no se descarta que existan datos que empíricamente se distribuyan como una normal, pero señala que estos son casos muy particulares pues la mayoría de los datos, sobre todo los que son generados por el ser humano, tienden a no seguir la regla de la raíz cuadrada del tiempo.

Los fractales han sido vinculados a la teoría del caos mediante la idea de que un error, infinitesimal, en la medición de las condiciones iniciales de un fenómeno da como

resultado una infinidad de eventos y diversas conclusiones. En este sentido, el homólogo a las condiciones iniciales en los fractales serían las reglas de recursión necesarias para generar dichas figuras geométricas. Si se habla de mediciones en la economía que son dependientes a la determinación de sus condiciones iniciales se puede encontrar el modelo de crecimiento de Solow que desarrolla Chiang (1987) en el cual se supone que dada una tasa de crecimiento del trabajo ( $\lambda$ ), la economía puede alcanzar eventualmente un estado de crecimiento equilibrado donde la inversión crecerá a la tasa del crecimiento del trabajo ( $\lambda\kappa$ ), al igual que el capital y el trabajo ( $K, L$ ); es decir, la economía se encontrará en un estado estacionario puesto que todas las variables del modelo crecen a una misma tasa o la tasa de crecimiento es cero (considerando que la relación capital-trabajo permanece invariable en el tiempo). Pero, si al modelo se le adiciona la idea de que la tecnología avanza o cambia (lo que hace cambiar la relación capital-trabajo en el tiempo) y por ello, al mismo valor de las tasas de crecimiento del capital y del trabajo se obtiene un mayor producto, esto dará como resultado una sucesión de estados de equilibrio (510-511); cambian las tasas y con ello cambia el estado estable.

Los fractales permiten estudiar sistemas complejos con el uso de sólo unos pocos parámetros. Siendo la dimensión fraccionaria un parámetro que determina el grado de irregularidad, ésta puede informar si el fenómeno estudiado está cerca o lejos de poder ser analizado bajo la óptica de la distribución normal. Con el parámetro que mide la probabilidad contenida en las colas de una distribución se puede conocer si un proceso es estacionario o si su media y varianza fluctúan irregularmente, esto último es una hipótesis importante en los trabajos de B. Mandelbrot pues él afirma que las series económicas están dentro de un rango cuya característica es que sólo son estacionarios en media y su función de autocovarianza declina de forma hiperbólica. Si se considera este tipo de decaimiento se puede encontrar otro parámetro empleado para el análisis fractal, se trata del exponente de Hurst que es obtenido tras aplicar la prueba R/S a un conjunto de datos. Dicho parámetro proporciona tres escenarios, el primero es cuando el valor calculado está dentro de un rango inferior, todas las series que estén dentro tendrán cambios abruptos, lo que implica que sean leptocúrticas, sean más volátiles, etc., entre otras situaciones. Si están dentro del rango superior, tras graficar los datos se observarán ciclos o tendencias de duración y periodicidad desigual, con ello se asume que habrá una mayor probabilidad de que cambios en un sentido sean seguidos por cambios del mismo tipo pero en algún momento se desvanecerán. Si el valor del parámetro se encontrara en el límite que divide estos dos intervalos, los datos con los que se trabaja no necesitarían mayor explicación que la proporcionada por los modelos que se basan en el comportamiento normal de una variable aleatoria.

Lo anterior parte de un concepto básico de los fractales conocido como invarianza. Un fractal es invariante si a escalas más grandes o más pequeñas de ella se encuentra la misma forma, para fractales regulares, o se encuentran las mismas propiedades estadísticas, para fractales autoafines. B. Mandelbrot trasladó esta idea a la economía desde su trabajo de

1963 proponiendo que los factores de riesgo a los que está expuesto un fenómeno en una determinada escala temporal serán semejantes a los que estará expuesto a una escala diferente, por lo tanto, propuso el llamado efecto de memoria de largo plazo, que se distingue o es diferente a la declinación exponencial en la función de autocorrelación en los modelos ARIMA, pues las decisiones o impactos que alteren la evolución de un fenómeno actuarán a perpetuidad pero cada vez con menos intensidad. Por consiguiente, en el mejor de los casos, bastaría con conocer el valor de alguno de los parámetros arriba mencionados para poder realizar un estudio. De esta manera es como se pretende abordar el análisis del objeto de estudio empleando los métodos a las cuales se ha tenido acceso.

## **Capítulo 1. Historia de la econometría.**

### **1. ¿Qué es la econometría?**

La econometría puede ser entendida como una herramienta que ayuda a cuantificar las relaciones existentes entre variables propuestas por algún modelo proveniente de una o varias teorías económicas que quiere ser contrastado. Aunque la definición de ésta no es puntual, como lo son las definiciones que hay en la Física, Química, Biología, etc., en la mayoría de los textos es ambigua ya que sólo se describe la forma en la que se trabaja así como los resultados que pretende alcanzar y que posteriormente se usarán para la toma de decisiones o bien para retroalimentar al modelo, siempre y cuando sean satisfechas las condiciones necesarias que exige dicha herramienta (Fernández García y Díaz de Urdanivia, 2000, pp.10-12). Lo que se debe considerar para saber qué es se encuentra en su etimología pues la raíz *μετρον*: medida (aportes de la matemática a la economía) y la raíz *οικονομία*: economía (desarrollo del pensamiento económico expresado a través de las teorías) en conjunto dicen que es la “medida en economía” o bien la unión de conocimientos cuantitativos y económicos que buscan medir, haciendo uso de datos que se recopilan para tal fin, aspectos cuyo interés es de la ciencia económica.

#### **1.1. Desarrollo de la econometría clásica.**

La palabra “econometría” fue introducida por Ragnar Frisch a través de la *Econometric Society* en 1933 mediante el primer número de la revista *Econometrica*, publicación de la cual él fuera su primer editor, para referirse a una nueva disciplina en la cual la matemática, especialmente la estadística y la teoría económica se unían para permitir su desarrollo (E. Hansen, 2013, p.1). Es importante comentar que no es en el siglo XX cuando surge la intención de aplicar métodos cuantitativos a problemas económicos pues ésta tiene su inicio en el siglo XVII a través de los llamados “aritméticos políticos” siendo sir William Petty el máximo representante. Petty con su *Political Arithmetick*<sup>1</sup> intentó dar el carácter de ciencia a la política pues estaba seguro de poder medir el comportamiento humano con la finalidad de ampliar la comprensión de ello ya que supuso que así se derivarían los principios que

---

<sup>1</sup> Aritmética Política. Obra publicada en 1682 (Petty, 2004).

erigirían un gobierno, estos principios tendrían la particularidad de ser verificables tal y como lo son las teorías en las ciencias fácticas (Ball, 2010, p.11), Petty es fuertemente influenciado por el interés de Hobbes<sup>2</sup> de aplicar el razonamiento científico y matemático a la creación de una teoría política, así que su trabajo lo realizó basándose en las “cifras de población”, elaboradas por Jhon Graunt, como medida para encaminar su política social. Por su parte, Graunt introdujo en sus *Observaciones sobre los datos de mortalidad* (1662) tablas del índice de mortalidad y natalidad pues creía que un gobernante debía conocer la dimensión de su gobierno a través del número de individuos pues esto le permitiría tomar decisiones que en el mejor de los casos mejorarían las condiciones de vida de las personas. La conjunción de los esfuerzos individuales de ellos da como resultado que Petty sea el primero en estudiar economía política a través de las cifras de la población pues sus sugerencias sobre política descansaron más en sus observaciones que en suposiciones sobre el comportamiento humano (Ball, 2010, pp.64-65). De esta manera concibe la idea de que en el ámbito económico existen leyes naturales que rigen el comportamiento de los agentes económicos (Astudillo, 1975, p.51).

La idea de que los datos<sup>3</sup> usados para comprender el desarrollo de los agentes económicos eran dados por leyes naturales tuvo su desarrollo en el siglo XVIII, siendo François Quesnay en su *Tableau économique* (1758) el primer personaje quien intentara hallar “fuerzas sociales, semejantes a las fuerzas físicas de Newton” (Ball, 2010, p.71) en el ámbito económico. Pero fue Adam Smith, influenciado por esta concepción mecánica de la sociedad, que a través de su obra *Investigación sobre la naturaleza y causa de la riqueza de las naciones* (1776) da por hecho haber concebido por vez primera una teoría política científica (Ball, 2010, p.71), dando comienzo así a la economía como ciencia<sup>4</sup>.

---

<sup>2</sup> Hobbes en *El Leviatán* (1651) intentó desarrollar una teoría política a partir de una visión mecanicista del mundo empleando una lógica y un razonamiento similar al que usó Galileo para comprender las leyes del movimiento que más tarde retomaría Newton para establecerlas como universales (Ball, 2010, p.19). Este intento tiene su origen con las ideas Francis Bacon, Hobbes pudo trabajar con él sin inmiscuirse demasiado en las ideas que proclamaba hasta que en el año de 1629 tras leer *Elementos de geometría* de Euclides despertó su interés por las proposiciones y demostraciones, propias del razonamiento matemático (Ball, 2010, p.21), así que es él quien lleva el método de investigación de las ciencias naturales a las humanas y sociales pues asumía la existencia de leyes naturales que podían ser enunciadas con un rigor matemático para que de esta manera fueran accesibles al entendimiento de las personas (Riobóo Almanzor y Riobóo Lestón, 2006, p.2).

<sup>3</sup> La recopilación de datos debía tener un nombre así que en 1749 Gottfried Achenwall sugirió que se llamara *Statistik* pues se trataba de una “ciencia” que se ocupaba de los estados naturales de la sociedad (Ball, 2010, p.67). Básicamente porque estos datos eran usados para tomar decisiones en materia de política económica.

<sup>4</sup> En su desarrollo se compartiría el interés de los físicos, biólogos, etc., por encontrar leyes universales, producto de la visión mecanicista que les había inculcado, no de manera directa, Newton, pues así los economistas que realizaron sus investigaciones usando métodos cuantitativos llegan a publicar en sus trabajos leyes, que según ellos, eran y serían válidos en cualquier sociedad, por ello gozaron de una buena aceptación dentro del ámbito académico. Dentro de éstas se encuentran la ley del interés personal de Adam Smith, la ley de la oferta y la demanda de Alfred Marshall, la ley de la libre competencia, la ley de la población de Malthus, la ley del salario y de la renta de David Ricardo, y la ley del intercambio internacional (Astudillo, 1975, pp.136-138) por mencionar algunas.

Los primeros trabajos con enfoque econométrico tienen que ver con el estudio de los ciclos económicos y con la teoría de la demanda cuyos modelos de regresión fueron estimados a partir del procedimiento de los mínimos cuadrados, un método usado por Legendre y Gauss, el primero en su estudio sobre el cálculo de órbitas y el segundo en sus cálculos astronómicos, que consiste en tomar un valor de referencia para medir cuánto se separa cada valor observado de éste (el error), posteriormente se elevan al cuadrado los errores y se suman, el proceso es iterativo hasta que se halla un valor de referencia que minimice la suma de los cuadrados que es considerado como el mejor valor que se ajusta a todas las observaciones (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.57). El pionero de estos trabajos es Henry Ludwell Moore quien en *Laws of wages. And essay in statistical economics* (1911), además de verificar empíricamente las teorías de la productividad marginal de los salarios, propone el método que tiene, en la actualidad, la investigación econométrica pues procede mediante una síntesis progresiva de los hechos individuales a los generales y de estos a las leyes estadísticas con el afán de verificar leyes e hipótesis de la teoría económica (Hernández Alonso, 2000, p.58).

Las estimaciones realizadas para el contraste empírico de la relación entre oferta y demanda de varios productos eran hechas a base de regresiones uniecuacionales pues suponían que se podían mantener constantes (*ceteris paribus*) aquellos factores que influían en el desplazamiento de la curva de demanda pero Moore en *Economic cycles. Their law and cause* (1914) hace uso de la regresión múltiple pues hubo concluido que era imposible continuar con aquel método ya que el *ceteris paribus* era una restricción que limitaba los resultados pues no se podía obtener la pendiente teórica de la curva, además observó que los datos sin tratamiento eran motivo del desfase de la curva por lo que vio viable expresar los datos en términos de variaciones porcentuales, así que a través de sus procedimientos pudo hallar la pendiente negativa de la curva y llegar así a sus conclusiones (Hernández Alonso, 2000, p.59), éstas fueron criticadas ya que halló mercancías que tenían pendiente positiva por lo que él supuso que se trataba de una nueva visión en el pensamiento económico así que fueron los trabajos realizados por los hermanos Working los que, al criticar los resultados de Moore, empezaron a considerar la identificación tanto del modelo teórico como de los datos. H. Working observó que los datos usados tenían un error de medición que afectaban las estimaciones por lo que propuso que era necesario especificar el tipo de variables a usar antes de realizar la regresión ya que de no hacerlo se podrían obtener resultados diferentes de los parámetros mientras que Elmer Working, por su parte, centró su atención a la interpretación de los resultados pues él aseguró que se podría estar confundiendo una relación únicamente de demanda o de oferta, o bien podría ser una combinación de ambas. Mientras la evidencia empírica chocaba con la teoría, G. Yule se centró en la validez estadística de las ecuaciones estimadas, pues en su trabajo *Why do we sometimes get nonsense correlations between time-series?* (1926) llama la atención sobre la correlación entre las variables con el tiempo pues éstas, al no identificarse, daban resultados sin sentido (espurios). La idea de Yule fue tomada por R. Frisch y F. V. Waugh en su

artículo *Partial time regressions as compared with individual trends* (1933) donde, para solucionar el problema, introducen como variable explicatoria al tiempo (Hernández Alonso, 2000, pp.61-62).

La culminación de los esfuerzos anteriores se da con los trabajos de Henry Schultz quien propone que los datos tanto de precios como de cantidades deben ser expresados en términos relativos, así que los precios deben ser deflactados por el índice general de precios y las cantidades deben ser expresadas en términos de valores per cápita. También propuso que se

Debe ajustar una línea de tendencia a cada variable empleada y definir los datos como desviaciones respecto a dicha línea, y por último, distinguir periodos históricos según las fases de los ciclos económicos<sup>5</sup> para realizar análisis estadísticos separados en cada período (Hernández Alonso, 2000, p.64).

El acontecimiento histórico que marca el inicio de la econometría como disciplina es la crisis de 1929 en *Wall Street* pues todos los trabajos previos no habían sido capaces de prever tal infortunio así que en 1930 nace la *Econometric Society* y dos años más tarde la *Cowles Commission for Research in Economics* en donde sus esfuerzos, al mismo tiempo que se desarrollan nuevos procedimientos, se encaminan al desarrollo de la teoría económica en su relación con la estadística teniendo como propósito poder comprender el funcionamiento de la economía para así lograr mejores previsiones sobre acontecimientos tan crudos como lo fue el crack (Hernández Alonso, 2000, p.89), aunque cabe resaltar que la *Econometric Society* no tenía “sesgos políticos, sociales, financieros o nacionalistas”, la *Cowles Commission* que fue creada por Alfred Cowles, consultor de inversiones, sí tenía cierto interés ya que éste fue la predicción bursátil (Hernández Alonso, 2000, p.96).

El desarrollo econométrico que se lleva a cabo en la década de los 30 y 40 del siglo XX se centra en el análisis del ciclo económico a partir del cual comienza a surgir la necesidad de concebir métodos de estimación con una rigurosa validez estadística, de esta manera Trigve Haavelmo en *The statistical implications of a system of simultaneous equations* “indica el método de máxima verosimilitud para estimar relaciones económicas simultáneas... haciendo posible la eliminación de los errores sistemáticos de estimación derivados de la hipótesis de trabajo” (Hernández Alonso, 2000, p.107), y en *The probability approach in econometrics* “presenta los fundamentos teóricos básicos de la estimación de relaciones económicas simultáneas” (Hernández Alonso, 2000, p.107) marcando que los problemas econométricos se agrupan en cuatro clases: “construcción del modelo, contrastación de teorías, problema de la estimación y pronóstico o predicción” (Hernández Alonso, 2000,

---

<sup>5</sup> Este es un antecedente de las pruebas realizadas para detectar cambios estructurales que suelen presentar algunos modelos, en ellos se emplean variables dummy para explicar los sucesos sobre el antes y el después del año en el cual se observa el quiebre de la tendencia.

p.107). Es en su trabajo *Esquemas estocásticos como una base para la econometría* donde introduce las ideas de la estadística a los hechos económicos pues compara que si bien en el ámbito económico no se pueden realizar experimentos controlados en laboratorios sí pueden ser considerados hechos realizados por el azar así que una variable estará compuesta por una parte “sistémica, que satisface la relación exacta en la que se incluye la variable” (Hernández Alonso, 2000, p.109) y su correspondiente termino de error.

El término de error o perturbación empezó a ser objeto de estudio cuando los investigadores empezaron a observar que en sus estimaciones por mínimos cuadrados y máxima verosimilitud éste presentaba dependencia temporal, es decir, se violaba el supuesto de independencia en el término de error así que de estas observaciones empezaron a desarrollarse métodos para su detección y para obtener estimadores consistentes bajo este problema. Uno de los métodos más conocidos para su detección es el que desarrollan J. Durbin y G. S Watson en sus trabajos *Testing for serial correlation in least squares regression I* y II llamado estadístico “d” o mejor conocido como test Durbin-Watson en el cual se establecen los límites inferior y superior en el cual el valor de “d” debe situarse, tomando en cuenta el número de observaciones y el número de variables explicativas, para poder afirmar que no hay correlación de primer orden ya que si “d” se encontrara fuera de este intervalo entonces sí se puede concluir la presencia de correlación, positiva o negativa, de primer orden. Posteriormente sería el mismo Durbin quien ampliaría la detección de correlación de orden mayor a uno. Por otra parte, Aitken propuso el método de mínimos cuadrados generalizados que gozó de buena aceptación cuando se tenía este problema pues no suponía complejidad en el cálculo de los estimadores como sí lo hacía el método de máxima verosimilitud, pero para poder aplicar su método se debía conocer la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones lo que implicaba la estimación de un coeficiente de correlación de éstas así que esto se planteó como una situación que debía ser abordada siendo D. Cochrane y G. H. Orcutt en *Application of least squares regressions to relationships containing autocorrelated error terms* (1949) quienes proponen este desarrollo (Hernández Alonso, 2000, pp.137-138).

Mientras se iba desarrollando la temática anterior también se fue abordando la situación que presentaban los modelos dinámicos o de variables retardadas pues se empezó a suponer que la variable explicada podía estarse explicando a ella misma en “diversos instantes temporales previos” (Hernández Alonso, 2000, p.139) así que fueron F. L. Alt en *Distributed lags* (1942) y J. Tinbergen en *Long-term foreign trade elasticities* (1949) quienes proponen hacer estimaciones por mínimos cuadrados ordinarios incluyendo cierto número de retardos de la variable dependiente en el modelo hasta que el número de rezagos incluidos alcanzaran los resultados estadísticos más significativos pero esta manera de solucionar el planteamiento tenía como consecuencia problemas de multicolinealidad así que Irving Fisher en *Note on a short-cut method for calculating distributed lags* (1937) aborda este problema planteando como solución “suponer que los parámetros siguen una

estructura de crecimiento aritmético, cada parámetro igual al anterior menos una cantidad constante” (Hernández Alonso, 2000, p.141) pero fue Koyck en su análisis sobre la función de inversión quien generaliza la presentación de este modelo dando la hipótesis de crecimiento geométrico de los parámetros así que de esta manera se hacía más fácil la estimación de los parámetros (Hernández Alonso, 2000, pp.139-141). A partir de las bases que dieron estos planteamientos surgen los modelos macroeconómicos con enfoque econométrico donde se plantea el uso de multiplicadores de impacto usando rezagos en las variables, quien propuso la metodología así como su interpretación fue A. S. Goldberger en su trabajo *Impact multipliers and dynamic properties of the Klein-Goldberger model* (1959) (Hernández Alonso, 2000, p.147).

Entre los años 1960 a 1975 se retoman viejos problemas que presentaban las estimaciones para darles un desarrollo teórico, cabe señalar que estos problemas sí eran mencionados en los estudios empíricos sobre los análisis de demanda y la función de consumo hechos en la década de los 20. Dentro de los investigadores que centraron su esfuerzo para solucionar estos problemas se encuentran S. M. Goldfeld y R. E. Quandt quienes abordan el asunto de la heteroscedasticidad en su trabajo *Some test for homoscedasticity* (1965), G. C. Chow que en *Text of equality between sets of coefficients in two linear regression* (1960) aborda el contraste para el análisis estructural en los modelos (p.176), Robert V. Hogg y Allen T. Craig que en *Introduction to mathematical statistic* (1965) abordan el asunto del supuesto de normalidad en los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios (N. Gujarati, 2003, p.107).

### **1.1.1. Econometría de series de tiempo.**

La crisis del petróleo de 1973 evidenció el fracaso que los modelos econométricos macroeconómicos realizados hasta ese año, bajo los métodos expuestos, habían tenido ante su incapacidad de previsión de acontecimientos de esa índole así que a partir de 1975 se desarrollan nuevos métodos basados en la predicción de series temporales dentro de los que destacan los modelos ARIMA<sup>6</sup> propuestos por Box y Jenkins que hasta en la actualidad gozan de buena aceptación dada su capacidad de predicción a corto plazo (Hernández Alonso, 2000, p.193).

Los desarrollos previos que permitieron el desenvolvimiento de estos se encuentran en los estudios realizados sobre meteorología, demografía, astronomía pero sobre todo por los métodos de descomposición de series temporales o los modelos de análisis armónico hechos en la década de los 20. Lo que permite que estos modelos tengan un sostén teórico es el concepto de proceso estocástico pues éste se asume que genera y determina el modelo matemático que describirá las características generales de la serie, además, se extiende el uso de la función de autocorrelación y del periodograma que “generalizan la noción básica de correlación al caso de series de tiempo” (Hernández Alonso, 2000, p.194). Lo que

---

<sup>6</sup> Modelos autoregresivos integrados de medias móviles

distinguirá a estos modelos es que su formulación no necesariamente estará ligada a la teoría económica, una discusión que ya había sido formulada por Koopmans quien criticó que el centro de atención fuera el desarrollo estadístico más que el teórico económico de los modelos, él lo denominó “la medición sin teoría” (Hernández Alonso, 2000, p.113), pues estadísticamente se buscará “interrelaciones entre magnitudes económicas temporales” (Hernández Alonso, 2000, p.194).

Dentro de los primeros modelos de series temporales se tienen los de alisado simple en los cuales se establece que es “posible explicar la evolución futura de una variable, al menos a corto plazo, partiendo del conocimiento de sus valores pasados” (Hernández Alonso, 2000, p.195), entre ellos se encuentra el de medias móviles en el cual se busca eliminar los componentes a través del cálculo de promedios; es decir, si se tratase de una serie de precios lo que hace la media móvil es eliminar el ruido de las cotizaciones para tener una idea clara sobre cuál ha sido y podría ser su tendencia (Hernández Alonso, 2000, p.195). Sobre la base de funcionamiento de las medias móviles se desarrolló el método de alisado simple exponencial en el cual se “establecen las medias móviles con ponderaciones en forma de progresión geométrica decreciente” (Hernández Alonso, 2000, p.197) aunque su supuesto de estar en presencia de series estacionarias lo llevó a limitaciones, pero gracias a los esquemas de retardos geométricos comienzan a surgir modelos alternativos así que fue C. C. Holt en *Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages* (1975) quien propone los modelos de alisado exponencial con tendencia lineal para los cuales se necesita la estimación de dos parámetros aunque con estos avances fuera P. R. Winters quien generalizaría el método de Holt para “tratar series que presenten estacionalidad” aunque la aparente complejidad de este método es que ahora se necesita la estimación de tres parámetros.

Otro método, dentro de los denominados de series temporales, que surgió, y que puede considerarse la aportación más importante en este ámbito, es el ya citado modelo ARIMA. Estos fueron propuestos por George Box y Gwilym Jenkins en su trabajo *Time series analysis: Forecasting and control* (1970) que son el resultado de las aportaciones de Yule y Slutsky sobre procesos autorregresivos o de medias móviles, de Walker que en *On periodicity in series of related terms* (1931) generaliza el proceso autorregresivo de Yule (un proceso AR (2)) a “un modelo autorregresivo de orden  $p$ ” (AR ( $p$ )) (Hernández Alonso, 2000, p.202), y de Wold quien en *A study in the analysis of stationary time series* (1938) formula la teoría de los modelos autorregresivos de medias móviles (ARMA) (Hernández Alonso, 2000, p.203). Dentro de las críticas que recibió, puesto que se asumía que estos se adaptaban de manera rápida a los cambios en la variable usada, cosa que no podían hacer los modelos macroeconómicos con enfoque econométrico, se tomó en cuenta que estos trabajan sobre una sola variable por lo que no se puede establecer relación causal con otras variables, que no permite contrastación económica porque, como se mencionó al inicio del punto, no se apoyan en alguna teoría económica y por ende no pueden ser empleados para

la toma de decisiones en cuanto a política económica se refiere (Hernández Alonso, 2000, p.205).

A partir de esta situación se produjo un debate sobre la incompatibilidad de los modelos econométricos con la teoría económica puesto que las hipótesis que se usan en la teoría, como en sus inicios la contrastación del *ceteris paribus*, no se ajustan en su totalidad a los datos usados en la estimación de los parámetros de los modelos, así que Christopher Sims plantea una nueva idea que deja establecida en sus modelos VAR según la cual son los datos sobre los cuales debe surgir la teoría económica y no al revés, como lo habían estado tratando los de la *Cowles Commission*. Los modelos VAR (vectorial autorregresivo) suponen que para determinar el conjunto de variables endógenas éstas deben ser explicadas por sus valores pasados y por los valores pasados de las otras variables del modelo, o mejor dicho, todas las variables dependen de todas según “una estructura de retardos que se especifica a través de los datos” (Hernández Alonso, 2000, p.211).

Otros modelos que surgieron a causa de las limitaciones presentadas por los modelos clásicos fueron los de cointegración y el de corrección por el error. El modelo de cointegración apareció formalmente en el trabajo de C. W. Granger “*Some properties of time series data and their use in econometric model specification*” (1981) con el objetivo de encontrar el equilibrio de largo plazo en aquellos modelos donde sus variables son no estacionarias (Muller Duran, 2008, p.134). Para poder abordar este modelo el desarrollo que hubo previo a él fue el de las pruebas de raíz unitaria, que están relacionadas con la manera de verificar si a través de las variables se llega a regresiones espurias, siendo David A. Dickey y Wayne A. Fuller quienes introdujeran en su trabajo *Distribution of the estimator for autoregressive time series with a unit root* (1979) la prueba conocida como Dickey-Fuller (A. Dickey & A. Fuller, 1979), que más tarde sería ampliada<sup>7</sup>. El procedimiento de este modelo consiste en identificar si las series en niveles son integradas de orden uno para que así se pueda establecer una combinación de ellas<sup>8</sup> que deberá ser integrada de orden cero o bien, no tener raíz unitaria para decir que las series en niveles cointegran. El modelo de corrección por el error se considera como una ampliación del modelo de cointegración puesto que plantea la existencia de una relación de equilibrio a largo plazo entre variables económicas que en el corto plazo pueden presentar desequilibrios en ella, de esta forma una proporción del desequilibrio de un período es corregido gradualmente a través de ajustes parciales en el corto plazo.

Esto es de manera general el desarrollo que ha tenido la econometría<sup>9</sup> a lo largo del período que va del siglo XVII, con las aportaciones de los primeros economistas que introducen la

---

<sup>7</sup> A pesar de que se hubieron desarrollado otras pruebas por otros autores solo se menciona ésta pues es la más representativa de ellas.

<sup>8</sup> La combinación viene dada por la ecuación  $u_t = y_t - \beta x_t$

<sup>9</sup> Pudieron haber faltado exponer pruebas o métodos de estimación pero no se considera que esta situación tenga incidencia en el desarrollo del tema ya que lo expuesto son ideas de las cuales parten las pruebas y

visión mecánica del comportamiento social, hasta el siglo XX, con los desarrollos teóricos y matemáticos que le dan el carácter de disciplina. Los modelos expuestos hasta el momento son sólo un conjunto de herramientas que son empleadas en Economía, pero existen otros modelos que permiten el análisis del comportamiento de variables financieras que tienen por objeto medir aquellas relaciones entre ellas que influyen en la toma de decisiones tanto de una empresa como de individuos racionales que tienen el objetivo de optimizar su beneficio, o en otros términos, permiten a empresas e individuos poder llegar a tener mayores utilidades teniendo un costo de oportunidad pues decidirán entre inversiones seguras, como por ejemplo los CETES, e inversiones riesgosas, como los portafolios de inversión asumiendo que sus decisiones están contemplando la minimización del riesgo sistémico, para las inversiones seguras, y del riesgo que hay en el mercado. Su exposición se presentará en el siguiente punto.

## **1.2. Modelos financieros de gestión de riesgo.**

La contemplación de un nivel de riesgo en las decisiones de compra-venta de títulos es un factor que puede determinar pérdidas o ganancias<sup>10</sup>, debido a esto, se ha visto la necesidad de analizarlo desde tres perspectivas. La primera forma de hacerlo es desde el análisis fundamental, la segunda desde el análisis técnico y la tercera, desde aquellos modelos que suponen que los cambios del precio tienen un comportamiento de paseo aleatorio. Históricamente, esta apreciación aparece en la tesis doctoral de Louis Bachelier llamada *Théorie de la spéculation* (1900), pero fue hasta 1956 cuando tuvo reconocimiento derivado del interés por dar respuestas y evitar las situaciones desencadenadas a partir del año 1929, período en que estalla la burbuja especulativa generada en el mercado de valores de Estados Unidos<sup>11</sup>.

### **1.2.1. Análisis Fundamental<sup>12</sup>.**

Dentro del análisis fundamental lo que se realiza es la evaluación de una empresa, que cotiza en el mercado bursátil, vía sus estados financieros además con base en los resultados se intenta predecir sus utilidades. Bajo este enfoque lo único que se necesita saber es en qué situación se encuentra la empresa, así que para su análisis se emplean indicadores financieros, de mercado y los resultados de la empresa.

---

sobre las cuales los modelos se amplían, o mejor dicho, lo expuesto es la base sobre la cual se apoya el desarrollo de la econometría.

<sup>10</sup> George Soros es un buen ejemplo de esta idea pues el 16 de septiembre de 1992 ganó aproximadamente unos 1100 millones de dólares por apostar en contra de la libra esterlina ya que convirtió 10 mil millones de libras esterlinas a deutchemarks (Díaz, en línea).

<sup>11</sup> Este año también es clave para el desarrollo de la econometría como disciplina y el interés especial de Alfred Cowles, fundador de la *Cowles Commission*, para evaluar el comportamiento bursátil. En 1956 fue Richard J. Kruizenga en su tesis *Put and call options: A theoretical and market analysis* quien cita a Bachelier como el precursor del análisis de los precios de las opciones (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.76, 295).

<sup>12</sup> La exposición de este punto así como del siguiente está tomada de los apuntes proporcionados dentro de las clases de la materia Finanzas Bursátiles impartidas por el Doctor Ramírez Cedillo en el semestre 2012-II

Dentro de los “resultados de la empresa” se destacan:

- a) **Ingresos operacionales.** Son los ingresos que factura la empresa en su operación normal.
- b) **Costo de venta.** Es la suma de todos los gastos realizados para producir y distribuir los artículos y servicios vendidos.
- c) **Utilidad bruta.** Es el resultado de restar a los ingresos operacionales, el costo de venta.
- d) **Ganancia o Pérdida neta.** Representa el monto de las utilidades de la empresa en un período determinado.

Mientras que los indicadores financieros y de mercado son:

- a) **Utilidad por acción.** Se obtiene dividiendo la ganancia o pérdida neta entre el total de las acciones de la empresa.
- b) **Valor en libros por acción.** Se obtiene dividiendo el patrimonio neto entre el total de acciones de la empresa.
- c) **Precio/Utilidad.** Se obtiene de dividir el último precio de cotización de la acción entre la utilidad por acción.
- d) **Precio/Valor en libros.** Se obtiene de dividir el último precio de cotización entre el valor en libros.
- e) **EBITDA** (Utilidad antes de intereses, impuestos, depreciaciones y amortizaciones). Es un beneficio que obtiene la empresa antes de intereses, impuestos, depreciaciones y amortizaciones. Se obtiene sumando a la utilidad operativa la depreciación y amortización. Su propósito es mostrar el margen de pérdida o ganancia que está obteniendo la empresa.

Esto permite comparar el valor real o fundamental con el valor de mercado para saber qué tan especulativo es la acción de la empresa en cuestión y así asumir el riesgo de invertir o no en ella. Se dice que una acción está sobrevalorada cuando:

- i) El precio de mercado de la acción supera a su valor en libros.
- ii) La relación entre el precio de mercado de la acción y su utilidad por acción es alto.
- iii) El precio de una acción crece aceleradamente y sostenidamente sin que existan fundamentos financieros o estratégicos.

Se dice que una acción está infravalorada cuando:

- i) El precio de mercado de la acción es menor a su valor en libros.
- ii) La relación entre el precio de mercado de la acción y su utilidad por acción es baja.

- iii) El mercado ajusta el precio de mercado a una cuantía superior al dividendo repartido.

(Bolsa de Valores de El Salvador, en línea).

### 1.2.2. Análisis Técnico.

El análisis técnico tuvo su origen con la teoría Dow propuesta por Charles Henry Dow que trata del reconocimiento de pautas “reales o supuestas, de estudiar un gran número de datos sobre precios, volumen de contratación e indicadores, todo ello en busca de claves para comprar o vender” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.32). Este análisis distingue cuatro tipos de inversionistas: el conocedor o dueño, el especialista o experto, el tradicional y el novato, además asume que los movimientos del mercado lo descuentan todo puesto que cualquier cambio en la oferta y la demanda producida en el mercado real se verá reflejado en el precio así que éste debe ser la prioridad; es decir, el análisis fundamental no será necesario. Asume también que los precios se mueven por tendencias, que serán persistentes o bien se mantendrán por algún periodo, ya que el reconocimiento oportuno del desarrollo de éstas permite que las operaciones de compra y venta vayan en la dirección que tomen. El último supuesto es que los patrones observados en las tendencias se vuelven a repetir en algún período futuro por lo que las predicciones se basarán en ellos. Existen tres tipos de tendencias, a saber:

- A) **Tendencia primaria o principal.** Se refieren al movimiento general o de largo plazo de la acción.
- B) **Tendencia secundaria.** Se refieren a las fluctuaciones alrededor de la tendencia o a los movimientos de menor magnitud respecto a la tendencia general de la acción.
- C) **Tendencia menor o de corta duración.** Son los efectos de algún comentario o noticia que afecta a los precios.

Otros aspectos sobre tendencias que debe conocer el analista para la toma de decisiones son la idea de un soporte y una resistencia. El apoyo es un nivel o área del gráfico por debajo del mercado donde el interés por comprar es lo suficientemente fuerte como para vencer a la presión por vender mientras que la resistencia es lo inverso. La resistencia es un nivel o área de precios por encima del mercado donde la presión por vender vence a la presión por comprar.

La herramienta que permite identificar tendencias es el cálculo de medias móviles, un método de alisado simple que elimina componentes indeseados en las series, además a partir de ello se deriva el criterio para la toma de decisión:

- Si la media móvil cruza al gráfico de precios de abajo a arriba es señal de venta y si la media móvil cruza al gráfico de precios de arriba abajo es señal de compra.

Una de las ventajas de este análisis es que se adapta a cualquier entorno operativo y dimensión de tiempo así que el analista podrá seguir cuantos mercados desee. La gestión del riesgo puede verse desde el análisis entre el precio y el volumen de contratación pues si aumenta el precio pero el volumen es bajo entonces esa relación es debida a la especulación y habrá que tomar una decisión, si vender o comprar aunque posiblemente en este caso se venda ya que pronto vendrá una caída en el precio.

### **1.2.3. Paseo aleatorio.**

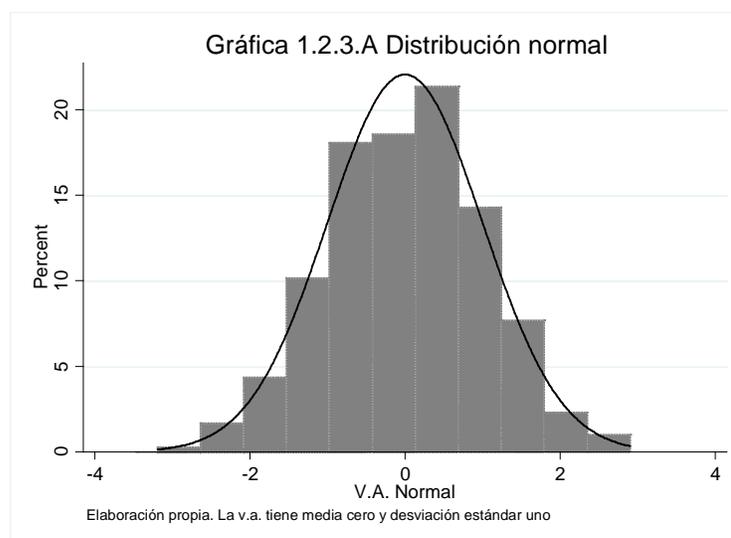
El modelo de Bachelier se puede simplificar a partir de dos premisas, una es que los cambios de precios son estadísticamente independientes y la otra es que se distribuyen con normalidad. Pero el hecho de suponer o decir que hay normalidad en una distribución es una idea que se concibe desde que los astrónomos franceses, entre ellos el destacado Pierre-Simon Laplace, se daban cuenta que sus mediciones “rara vez coincidían exactamente con la estricta regularidad matemática que demandaban las leyes de Newton” (Ball, 2010, p.75). Laplace y Simeón-Denis Poisson pensaron que estos errores eran aleatorios y que “la probabilidad de que se produjera un error concreto (...) decrecía a medida que el tamaño de ese error aumentaba” (Ball, 2010, p.75) así que los astrónomos no dudaron en identificar la relación entre los errores de medición con la teoría de las probabilidades. De esta manera vieron posible la predicción de la frecuencia que tenían los errores y la proporción entre su tamaño y el éxito de aparecer. La distribución del error fue trazada en una gráfica llamada “curva de error” y recibió más tarde el nombre de “distribución normal” pues era común hallar comportamientos similares al de los errores en aquellas partes donde los científicos podían obtener datos. Esta distribución recibe el nombre de “gaussiana” en 1807 ya que fue Carl Friederich Gauss quien estudia sus propiedades<sup>13</sup> (Ball, 2010, pp.74-76). La aplicación de las propiedades de esta distribución es introducida por primera vez a las ciencias sociales mediante documentos de estadísticas demográficas elaboradas por Joseph Fourier (Ball, 2010, p.78).

Si los cambios de precio en el modelo de Bachelier tienen dicha distribución entonces

La mayor parte de los cambios –el 68 por ciento– corresponde a oscilaciones pequeñas dentro de una <<desviación estándar>> (un patrón matemático simple para medir la dispersión de los datos) de la media; el 95 por ciento debería estar dentro de dos desviaciones estándar; el 98 por ciento dentro de tres. Por último, (...) los grandes cambios son extremadamente raros (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.33) (ver gráfica 1.2.3.A).

---

<sup>13</sup> De aquí en adelante es indistinto referirse a esta distribución como gaussiana o normal.



Bachelier concibe su tesis cuando los matemáticos consideraban que las aplicaciones de esta ciencia no merecían que se aplicaran al estudio de los mercados pues la especulación excesiva tenía una mala reputación (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.66). El tema central de su obra, al cual dedica 68 páginas para describirlas, era desarrollar fórmulas para valorar los mercados de futuros, opciones y otras derivaciones que habían surgido dentro del mercado francés de bonos. Dio por hecho que, al no poder determinar todos los factores que influyen en las actividades de dicho mercado, sólo se podía estudiar matemáticamente el estado de él en un instante dado, de esta manera se podrían establecer leyes probabilísticas para la variación de precios en ese instante. Su propuesta fue estimar las posibilidades de que los precios cambien empleando una analogía entre la difusión del calor a través de una sustancia y las oscilaciones del precio de los bonos, por lo que tuvo que adaptar las ecuaciones de la difusión a las oscilaciones. Esto lo llevó a suponer que el mercado de bonos era un juego imparcial donde dichas oscilaciones no tienen memoria; es decir, el cambio que tiene el precio de un bono en un instante no influye en un cambio posterior, así que la probabilidad de que ocurra un alza o una caída de precio es la misma, se dice así que el precio es el justo ya que hubo asumido toda la información proveniente de la oferta y la demanda o bien que se encuentra en equilibrio (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.70-74). De esta idea se dice que los precios siguen un paseo aleatorio por lo que la mejor predicción que se puede hacer sobre el siguiente cambio será el precio actual<sup>14</sup>, empleando un término que aparece en la estadística se dice que “los cambios son una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.74), por ello los precios se ajustarán a la distribución gaussiana y se podrán emplear la media y la varianza como medidas de su comportamiento.

<sup>14</sup> De aquí surge la analogía entre el cambio de precio y el movimiento browniano.

### 1.2.3.1. Movimiento browniano.

Bachelier sin proponérselo hubo llegado a los mismos resultados, pero él a través de la analogía entre la difusión de calor y las oscilaciones de los precios de los bonos franceses, que Albert Einstein publicara en 1905 sobre el movimiento browniano, sólo que él propuso su ecuación para la solución de problemas físicos, aunque este movimiento fue descrito mucho antes por Robert Brown, allá por 1828, con ayuda de un microscopio, al observar el comportamiento que tiene una partícula de polen suspendida en agua. A continuación se presentan dos definiciones que se consideran importantes para el desarrollo del trabajo en capítulos posteriores.

**Definición 1.** Un movimiento browniano o un proceso de Wiener es un proceso aleatorio  $X$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$  que cumple

- i) Con probabilidad 1,  $X(0) = 0$  (es decir, el proceso inicia en el origen) y  $X(t)$  es una función continua de  $t$ .
- ii) Para cualquier  $t \geq 0$  y  $h > 0$  el incremento  $X(t + h) - X(t)$  está distribuido normalmente con media 0 y varianza  $h$ , así

$$P(X(t + h) - X(t) \leq x) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-u^2}{2h}\right) du$$

- iii) Si  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2m}$ , los incrementos  $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$  son independientes.

**Observación.** Los incrementos de  $X$  son estacionarios; es decir,  $X(t + h) - X(t)$  tiene una distribución independiente de  $t$ .

(Falconer, 1990, p.238).

**Definición 2.** Un movimiento browniano con parámetros (Movimiento browniano con desplazamiento) es un proceso estocástico  $X$  con parámetros  $(\mu, \sigma^2)$  que está descrito por la ecuación:

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma Wt, \forall t$$

Donde  $W(t)$  es un proceso de Wiener,  $\mu$  y  $\sigma^2 \neq 0$  son constantes reales y:

$$E[X(t)] = X(0) + \mu t$$

$$Var[X(t)] = \sigma^2 t, \forall t$$

(Cassetti, 2011, p.20).

El “movimiento browniano puede tomar valores negativos. Entonces es discutible utilizar este modelo para describir la evolución del precio de una acción en el tiempo” (Cassetti,

2011, p.20), así que se utilizará el movimiento browniano geométrico, en donde “el logaritmo del precio de una acción sigue un proceso de Wiener” (Cassetti, 2011, p.20)

Si  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  y sea

$$S(t) = e^{X(t)}, \forall t$$

Al aplicar logaritmos en la expresión anterior se tiene

$$\ln(S(t)) = X(t)$$

Para un  $t$  fijo se tiene que  $\ln(S(t)) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ ; es decir, tiende a una distribución log-normal cuya función de densidad es

$$f_{S(t)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 ty}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \text{ para } y > 0$$

El espacio de estado del movimiento browniano geométrico es el intervalo  $(0, \infty)$  así que esto queda en el cuadrante positivo usado en los análisis cuantitativos económicos (Cassetti, 2011, p.21).

#### **1.2.4. Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME).**

La hipótesis de los mercados eficientes, desarrollada en la tesis doctoral de Eugene F. Fama (1964), es un modelo que se basa en la idea de que los mercados son un juego imparcial, así que tanto comprador como vendedor son compensados o bien, los precios de los títulos reflejan toda la información relevante. Si el precio refleja toda la información entonces es considerado un precio justo (fundamental) lo que propicia que tanto comprador como vendedor puedan llegar a un acuerdo que cierre un trato a pesar de que sus opiniones sean diferentes, si así ocurre entonces todas las transacciones que suceden en un mercado activo reflejarán el precio general justo (fundamental) de mercado; es decir, éste reflejará “la mejor estimación general, dada la información disponible, y qué acción es probable que beneficie a su poseedor” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.76), así que de esta manera no habrá posibilidades de obtener ventaja en el mercado (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.76).

Para que un mercado sea eficiente se requiere que

- i) Existan un gran número de compradores y de vendedores.
- ii) Haya facilidad de entrada y salida del mercado para todos los participantes.
- iii) Los precios manifiesten un comportamiento puramente aleatorio de modo que no se dan posibilidades de arbitraje (el arbitraje significa que hay una ganancia sin riesgo) (Ludlow, 1997, p.22).

Además, la eficiencia se da por grados por lo que se hablará de eficiencia débil, semi-fuerte y fuerte

Un mercado posee la eficiencia débil si las series de los precios de las acciones no contienen información que pueda ser utilizada para obtener una mayor rentabilidad que la que podría obtenerse con una cartera con valores tomados al azar, ya que los precios de las acciones se determinan en una caminata aleatoria, o sea, que es imposible predecir los precios futuros a partir de los precios pasados (Ludlow, 1997, p.23).

La caminata aleatoria del precio se expresa de la siguiente manera:

$$p_t = p_{t-1} + a_t$$

Lo cual indica que el precio actual es el precio de ayer ( $p_{t-1}$ ) más el incremento esperado en el precio de la acción ( $a_t$ ) (Lodlow, 1997, p.24, Uribe Gil y Ulloa Villegas, 2011, p.135).

Un mercado posee la eficiencia semi-fuerte, si además de lo anterior los precios del mercado reflejan toda la información hecha pública, ya sea referida a la empresa o a la economía en su conjunto ya que afecta al valor [fundamental] de las acciones; por decir: una guerra islámica con repercusiones en la producción de petróleo, una bomba en el NYSE, la crisis financiera de México en diciembre [de] 1994. Cualquiera de estos al ser figura pública afecta al mercado, pero no pasa nada mientras algunos con información privilegiada lo saben (Ludlow, 1997, p.24).

Un mercado posee la eficiencia fuerte: si además de lo anterior; los precios de mercado reflejan toda la información privada, ya sea referida a la empresa o a la economía en su conjunto ya que afecta al valor [fundamental] de las acciones. El conocimiento de los estados financieros que tendrán que pasar a ser públicos, con sólo ser internos a la empresa ya afectan los precios de las acciones (Ludlow, 1997, p.24).

Las hipótesis para probar caminatas aleatorias está relaciona con la distribución del término de error o perturbación  $a_t$ <sup>15</sup> pues se podrán suponer tres aspectos

- i)  $a_t \sim IID(0, \sigma^2)$  es un proceso independiente e idénticamente distribuido.
- ii)  $a_t \sim INID(0, \sigma^2)$  es un proceso independiente pero no idénticamente distribuido.

---

<sup>15</sup> En Ludlow (1997) el término de error lo representa con las letras  $a_t$  aunque también puede representarse por las letras  $\varepsilon_t$ , es indistinto usar uno u otro término.

- iii)  $a_t$  es un proceso que no es independiente, ni está idénticamente distribuido, pero cuya correlación serial en niveles es igual a cero.  $Cov(a_t, a_s) = 0 \forall t \neq s$  y  $Cov(a_t^2, a_s^2) \neq 0 \forall t \neq s$  (Uribe Gil y Ulloa Villegas, 2011, pp.135-136).

Cabe señalar que las pruebas de eficiencia se realizan sobre la tercera suposición además de que se da por hecho que la distribución de éste es normal mientras que la distribución de los precios es log-normal (movimiento browniano geométrico) (Uribe Gil y Ulloa Villegas, 2011, p.136).

Por último, una generalización de la caminata aleatoria de los precios se da con el concepto de martingala. Una martingala es

Un juego en el que nadie posee algún tipo de ventaja y en el que la evolución de las ganancias es aleatoria. En estos es imposible inferir el valor futuro del precio utilizando cualquier tipo de estimador lineal o no lineal, y el valor esperado de los retornos es cero, condicionado a la historia del juego (Uribe Gil y Ulloa Villegas, 2011, p.135).

Aunque este caso sólo se da cuando la tasa de interés es cero y no existe riesgo.

### **1.2.5. La teoría moderna de la selección de cartera MPT (*Modern Portfolio Theory*).**

El MPT fue desarrollado por Harry Markowitz, ya que buscaba un tema para su tesis doctoral, pues tenía el interés de saber cómo es que las personas deciden entre invertir directamente en una factoría o indirectamente a través de los títulos que pueden emitir las empresas, ello lo condujo a observar que las personas tienden a diversificar sus inversiones, juzgando o considerando el riesgo de una elección y cuánto es que varía el precio de un activo con respecto a otro. La diversificación es una manera en que ellos confeccionan carteras de inversión; adquieren diversos títulos en diferentes cantidades pero nunca a la inversa. En consecuencia, lo que él buscaba era llegar a traducir el riesgo y el beneficio en una ecuación que fuera fácil de manejar por lo que, si el “beneficio esperado, la recompensa, depende del precio más probable [del] activo cuando llegue el momento de vender” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.82) entonces éste debe ser medido por el promedio o la media de los precios posibles antes de vender, y si el riesgo dependiera de qué tan amplios son los cambios en el precio con respecto al precio medio entonces éste estaría medido por la varianza o la desviación estándar. Por lo tanto, lo único que necesitaba saber un inversionista era, estadísticamente hablando, la media y la varianza al momento de vender (criterio de media-varianza) (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.81-83).

Pero como un inversor compra varios títulos distintos, entonces lo que le interesará saber es la correlación que hay entre ellas pues si dos activos están altamente correlacionados

cuando una pérdida la otra probablemente lo hará así que deberá combinar activos de cuyas empresas no estén altamente correlacionadas, de esta manera el riesgo habrá de ser disminuido. Para llegar a una “cartera eficiente” se deberán contemplar distintas combinaciones de los activos adquiridos pues para cada nivel de riesgo habrá una cartera que reporte el mayor beneficio posible y para cada nivel de beneficio habrá una cartera de riesgo mínimo pero la elección depende de cómo esté la economía ya que se podrá optar por la deuda que emite el gobierno si ésta fuera más atractiva en términos de rendimientos. Así funciona, en teoría, el MPT (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.83-85).

Los supuestos del modelo son:

- i) Hay información plena, en todo sentido: noticias, situación fundamental de las empresas, precios, etc.
- ii) Básicamente se conocen rendimientos esperados y riesgos de los activos financieros, así como sus correlaciones.
- iii) Los rendimientos siguen una distribución “Normal” cuya media es el rendimiento esperado y cuya varianza o desviación estándar es la medida del riesgo o volatilidad del activo.
- iv) Hay plena participación en los distintos mercados de activos, donde se abstraen los costos y comisiones y existe la posibilidad de las ventas en corto.
- v) El propósito final es minimizar y tender a controlar el riesgo de un proceso de inversión, en un horizonte de mediano y largo plazo (Galván González, 2010, p.10).

En cuanto al cálculo del rendimiento del portafolio se usa la fórmula:

$$R_{A,B,C,\dots} = P_A R_A + P_B R_B + P_C R_C + \dots$$

Donde  $R_{A,B,C,\dots}$  es el rendimiento del portafolio que está conformado por el activo A, B, C, ...

$P_A, P_B, P_C, \dots$  es la participación (%) del activo A, B, C, ... en el portafolio

$R_A, R_B, R_C, \dots$  es el rendimiento del activo A, B, C, ...

El cálculo del riesgo se efectúa con la formula

$$\begin{aligned} & \text{Riesgo} \\ & = \sqrt{\sigma_A^2 P_A^2 + \sigma_B^2 P_B^2 + \sigma_C^2 P_C^2 + \dots + 2Cov_{AB} P_A P_B + 2Cov_{AC} P_A P_C + 2Cov_{BC} P_B P_C + \dots} \end{aligned}$$

En donde  $\sigma_{A,B,C,\dots}^2$  es la varianza del activo A, B, C, ...

$P_{A,B,C,\dots}^2$  es la participación (%) del activo A, B, C, ... elevado al cuadrado

Así que para el cálculo de la cartera conformada por  $n$  activos se necesita conocer la matriz de varianzas y covarianzas

	A	B	C	...
A	$\sigma_A^2$			
B	$Cov_{AB}$	$\sigma_B^2$		
C	$Cov_{AC}$	$Cov_{BC}$	$\sigma_C^2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Un inconveniente que se traduce en pérdida de eficiencia para este modelo es cuando se evalúa el rendimiento y el riesgo de portafolios que estén conformados por más de 30 activos pues se deberían estar haciendo estos cálculos por cada intervalo en el que los precios cambian (15 minutos), lo cual ya no permite ofrecer carteras a más de un inversor. Este problema lo abordó el doctorando de Markowitz; William F. Sharpe, así que este nuevo ajuste da cabida al modelo de valoración del precio de los activos financieros o CAPM (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.85-86).

### **1.2.6. Modelo de valoración del precio de los activos financieros CAPM (*Capital Asset Pricing Model*).**

El CAPM fue desarrollado por William F. Sharpe a principios de los sesenta (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.80) cuando tuvo la oportunidad de trabajar con Markowitz al ser su doctorando ya que el nulo progreso que tenía con su tesis original, sobre tasación de transferencias, no tenía progreso. Markowitz aceptó asignándole el proyecto de simplificar el modelo de carteras (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.86). Para simplificarlo partió del hecho de que si todos los inversionistas aplicaran las ecuaciones de Markowitz habría menos carteras, habría solo una; la cartera de mercado. Esta cartera se podría estar moviendo conforme los inversores empezaran a ver que otra cartera de mercado fuese mejor que la anterior. La consecuencia inmediata es que la cartera de mercado permite que se empiece a pensar en un indicador que refleje toda la actividad del mismo, en el mercado habrá personas que prefieran mayor beneficio con mayor riesgo y viceversa, así que sobre él se compararán los diferentes activos existentes.

Al ser la deuda de un gobierno un instrumento que también ofrece beneficios al inversor, más bajos pero sin riesgo, entonces él estará en la posibilidad de elegir entre el beneficio medio de la Bolsa o la deuda gubernamental, si eligiese el beneficio del mercado en vez del beneficio de la deuda gubernamental, deberá obtener una prima por el riesgo que asume. De esta manera tendrá que evaluar la correlación que hay entre los activos que conforman su cartera y el comportamiento del mercado pues si un activo cayera el doble de lo que cae el mercado entonces no se podrá elegir, dada la incertidumbre que genera su volatilidad, pero si un activo cayera sólo la mitad de lo que cae el mercado entonces será óptimo para que conforme la cartera, aunque el precio por el que se pagará será alto pero al menos asegura un retorno. Ahora se debe medir la reacción del activo con el mercado puesto que ésta

reflejará qué tan riesgoso sería tenerlo en el portafolio, la medición se hace a través del parámetro beta ( $\beta$ ) que una vez introducido en una fórmula que contempla el beneficio de la deuda de gobierno y la prima de riesgo se podrá saber qué beneficio se espera, asumiendo cierta cantidad de riesgo. Así, el modelo del CAPM queda listo para evaluar portafolios de distintos inversores, se reduce en cálculos y se gana eficiencia. Cabe señalar que John Lintner, Jan Mossin y Jack Treynor hubieron llegado a los mismos resultados siguiendo una metodología distinta, que si bien no se les dio el premio Nobel, sí se les reconoce como coautores del modelo (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.86-89).

Los supuestos del modelo son<sup>16</sup>

- i) Inversionistas adversos al riesgo, maximizadores de la utilidad esperada de su riqueza de fin de período.
- ii) Inversionistas tomadores de precios y con expectativas homogéneas respecto de los retornos de los activos y su distribución de probabilidad.
- iii) Existe un activo libre de riesgo tal que los inversionistas pueden prestar o pedir prestado cantidades infinitas a la tasa libre de riesgo.
- iv) Las cantidades de los activos son fijas. Todos los activos son tratables y perfectamente divisibles.
- v) Mercados sin fricciones, información sin costo y simultáneamente disponible para todos los inversionistas.
- vi) No existen imperfecciones de mercado tales como impuestos, regulaciones o restricciones a la venta corta (Cortazar, en línea).

El modelo se representa como una ecuación lineal en donde el rendimiento requerido por cada activo en particular debe ser igual al rendimiento del activo libre de riesgo más un factor de ajuste por el riesgo en el que se incurre. El factor de ajuste se obtiene del producto que resulta de la prima de riesgo que ofrece el mercado y el riesgo de la inversión individual. El rendimiento de los activos está positivamente relacionado con su riesgo. Si eso funciona para los activos individuales y siendo el mercado la suma de ellos, se puede decir que el rendimiento del mercado es la tasa libre de riesgo más una prima de riesgo.

Así la ecuación se plantea como

$$R_{ME} = R_f + PR$$

Donde  $R_{ME}$  es el rendimiento esperado del mercado,  $R_f$  la tasa libre de riesgo y  $PR$  la prima de riesgo.

---

<sup>16</sup> La exposición, a excepción de los supuestos del modelo, fue tomada de los apuntes sobre el CAPM proporcionados en la materia de Finanzas Bursátiles impartida por el Doctor Ramírez Cedillo en el semestre 2012-II

Para determinar el rendimiento de un activo en particular se desarrolla la fórmula anterior y se tiene que

$$R_E = R_F + \beta(R_{ME} - R_F)$$

Donde  $R_E$  es el rendimiento esperado del activo y  $\beta$  es la reacción del activo con respecto al mercado.

### **1.2.7. Modelo Black-Scholes.**

El contexto en el que surge el modelo está dado por las operaciones realizadas en el mercado recién creado de opciones del Ministerio de Comercio de Chicago el 23 de abril de 1973, en él, estos activos eran más accesibles y las comisiones eran bajas así que esta innovación hacía más barata la especulación, para entrar se pagaba una cuota que en comparación a lo que se pagaba en Nueva York resultaba más barato, independientemente de que las acciones cayeran, los poseedores de sus opciones sólo perderían lo que habían pagado para entrar; es decir, la prima. Ahora la cuestión era si la estimación de la prima podía tener un precio razonable pues ésta era fijada a través de lo que convenían los compradores y los vendedores.

Fue Fischer Black, físico y con doctorado en matemáticas aplicadas, quien tras conocer a Jack Treynor, coautor del CAPM, intentó aplicar esas ideas a los bonos, al dinero líquido y a las garantías. Antes de Black ya había intentos de hacer tal cosa (valorar garantías u opciones), se basaban en tratar de conocer el precio de la acción que tendría al expirar el contrato, algo que era y sigue siendo imposible, así que él planteó sus ideas sobre cómo evaluar una opción sin intentar saber el precio final de las acciones en una ecuación diferencial que no pudo resolver hasta que, estando en el *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) y habiendo conocido, y sido ayudado por Myron S. Scholes, sólo se plantea que lo único que hay que saber es el precio de lanzamiento, el plazo de expiración del contrato y la volatilidad de la acción sobre la cual se da la opción. Con estas tres cosas era fácil ver que si una acción no tiene amplias oscilaciones en su precio, la opción valdrá poco por lo que la posibilidad de que tenga alguna rentabilidad serán pocas, en cambio, si una acción tiene amplias oscilaciones en su precio las opciones valdrán más y habrá más posibilidades de tener alta rentabilidad. A esto se le suma el plazo en que caduca la opción y se llega a la fórmula Black-Scholes en donde, como los modelos anteriores, se asume que el riesgo o la volatilidad puede ser medida por la varianza y la desviación estándar (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.90-93).

El modelo se basa en los siguientes supuestos:

- i) El comportamiento del precio de la acción corresponde al modelo logarítmico normal, con  $\mu$  y  $\sigma$  constantes.

- ii) No hay costos de transacción ni impuestos. Todos los títulos son perfectamente divisibles.
- iii) No hay dividendos sobre la acción durante la vida de la opción.
- iv) No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo.
- v) La negociación de valores es continua.
- vi) Los inversionistas pueden adquirir u otorgar préstamos a la misma tasa de interés libre de riesgo.
- vii) La tasa de interés libre de riesgo a corto plazo,  $r$ , es constante (Benito Castillo, 2012, p.21).

Si no hay arbitraje, el rendimiento de la cartera debe ser la tasa de interés libre de riesgo, de esta manera la ecuación diferencial a resolver es

$$C_0 = S_0N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

Donde  $C_0$  es el precio de la opción,  $S_0$  es el precio actual de la acción,  $X$  el precio de ejercicio al que la opción permite comprar la acción,  $r$  es el interés sin riesgo y  $T$  es el plazo de vencimiento.

Las otras dos funciones,  $N(d_1)$  y  $N(d_2)$ , son las probabilidades de un número aleatorio ( $d$ ) que se distribuye conforme a una campana de Gauss, y menor que las cantidades:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde  $\sigma$  es la desviación estándar del precio de la acción y  $\ln$  es el logaritmo natural. Son, en esencia, las probabilidades de que la opción se amortice al expirar (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.298).

Los modelos descritos a partir del punto 1.2.3 son los que surgen de los aportes de Bachelier al análisis del riesgo. Se considera que son los más representativos en cuanto a que de ellos se han derivado propuestas de mejoras, buscando contemplar la mayor parte de las características de los datos e intentado ampliar la capacidad de pronosticar hechos futuros con mayor certeza.

## Capítulo 2. Caos, fractales y economía.

### 2. El caos determinista.

Las leyes del movimiento de los cuerpos (mecánica clásica) y la ley de la gravedad de Sir Isaac Newton habían dado al mundo una concepción mecanicista de él pues consideraban que sólo era necesario conocer las condiciones en las que se encontraba un cuerpo a la hora de observarse para predecir en dónde se encontraría pasado un tiempo. Laplace tomó esta

idea expresando que “si una inteligencia hubiera conocido la situación de todas las partículas de materia en un momento dado, <<no habría nada inseguro, y tanto el futuro como el pasado estarían abiertos ante ella>>” (Gaarder, 2000, p.281), bajo esta concepción todo estaba determinado en el universo (determinismo) y él pasaba a ser considerado, metafóricamente, una máquina en la que las leyes newtonianas siempre eran válidas. Cautivados por la idea de que el universo se podía mirar como una máquina de movimientos predecibles, los científicos de los siglos XVIII y XIX dieron paso a la Revolución Industrial, etapa en la cual se destaca la aplicación de las leyes de la mecánica clásica a problemas de la vida cotidiana dando como resultado aquellos inventos que tuvieron un gran impacto en la vida de las personas, siendo el más notable la máquina de vapor (Sametband, 1999, p.24, Ball, 2010, p.46). Con el desarrollo de las aplicaciones de la mecánica clásica se fue haciendo evidente la necesidad de comprender más fenómenos, entre los cuales estaban los sistemas dinámicos que tienen un comportamiento errático o anormal en el tiempo. Las observaciones realizadas para fenómenos, de comportamiento anormal, son la primera aproximación que tuvieron los científicos, de finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, al caos pues estos rompían con el esquema del determinismo que había planteado la mecánica de Newton.

La característica que más llamó la atención de los científicos fue la sensibilidad que tienen tales fenómenos a la determinación de sus condiciones iniciales<sup>17</sup> pues un pequeño error en el cálculo de estos conduce a resultados completamente distintos e incluso imprevisibles. Poincaré, en 1908, llamó la atención de ello una vez que se evidenció que la mecánica clásica tenía límites pues no funcionaba para cuerpos que tienen velocidades cercanas a la velocidad de la luz y también para aquellos donde el comportamiento de los átomos son el estudio, pues esos errores de medición, que en su opinión se escapaban de las manos de los científicos, se debían al azar y éste se daba, según él, por dos razones; la primera por la sensibilidad de los sistemas a sus condiciones iniciales y la segunda por las fuerzas que influyen en el comportamiento del fenómeno que se estudia (Sametband, 1999, p.33). Poincaré, para poder afirmar la segunda razón tuvo que crear, a la vez que aportaba una nueva herramienta matemática, la representación del comportamiento de un sistema en un espacio de fases, esto debido a que en 1887 el rey Oscar II de Suecia dijo que daría 2500 coronas a quien pudiera probar si el sistema solar era estable; en el sentido de que los pequeños cambios ocurridos en los movimientos de los planetas sólo podían dar pequeñas alteraciones al comportamiento del sistema, así que hubo contestado que para un sistema formado por dos cuerpos, sólo era necesario aplicar las ecuaciones del movimiento de

---

<sup>17</sup> Para que un sistema sea caótico debe cumplir que sea sensible a las condiciones iniciales, además deberá poseer puntos periódicos densos, que son puntos infinitos y soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño, y por último, dicho sistema no podrá descomponerse en dos subsistemas independientes entre sí ya que las diferencias que se produzcan al determinar las condiciones iniciales acabarán pasando por toda la región del atractor extraño con lo que únicamente se tiene un solo sistema dinámico (transitividad). Tales propiedades son las que definen al caos determinista (Fernández Díaz, 2000, p.88, Parisi, Espinosa, Parisi, 2007, p.907).

Newton y habría respuesta, pero si se introducía un cuerpo más entonces estas ecuaciones ya no podían responder a esta cuestión (Sametband, 1999, p.78, Méndez Alonso, 2005, p.26).

En la década de los 60, cuando se empezaban a estudiar dinámicas no lineales en el *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), Edward Lorenz propuso un modelo atmosférico basado en tres ecuaciones no lineales con tres variables independientes con el cual representó la evolución del clima en un espacio de fases de tres dimensiones, los resultados a los que llegó eran completamente diferentes a los que habitualmente se llegaba con aquellos modelos que emplean cerca de un millón de variables pues encontró que las trayectorias de dichas ecuaciones daban origen a un atractor extraño, el primero descubierto en la ciencia, que parecía tener forma de mariposa en donde cada ala representa un estado posible de la atmósfera que, dependiendo de la condición que se dé, se podrá pasar de estado seco a uno lluvioso y viceversa (Sametband, 1999, pp.103-104). Fue en 1963 cuando Lorenz hace público su hallazgo e inventa el llamado “efecto mariposa”, según el cual propone que

El batir de alas de una mariposa en el Amazonas hoy, podría producir una pequeñísima alteración en el estado de la atmósfera, que si se amplificase duplicándose cada par de días, iría haciendo divergir cada vez más lo que es respecto de lo que hubiera sido sin la mariposa, de modo que varias semanas más tarde aparecería un ciclón en el Caribe, que, de no haber surgido el insecto en cuestión, nunca hubiera surgido (Sametband, 1999, p.104).

En realidad, Lorenz mostraba la excesiva sensibilidad de un sistema a las condiciones iniciales. Sobre sus trabajos otros investigadores empezaron a interesarse por sistemas de este tipo, por ejemplo, en 1974 Robert M. May comprobó que el comportamiento caótico estaba presente en relaciones más sencillas y para esto usó e iteró la ecuación logística, propuesta por Pierre Verhulst en 1845, para la cual halló que si la tasa de crecimiento de la población de una especie se encuentra en el intervalo ( $\approx 3.57, 4$ ) se presenta un comportamiento en el cual la cantidad de posibles resultados sobre la población es infinita y no predecible (bifurcación), pero también halló que si la tasa de crecimiento está, por ejemplo, en el intervalo (1.01, 2), el resultado del total de la población es sólo una o es predecible (Méndez Alonso, 2005, p.28).

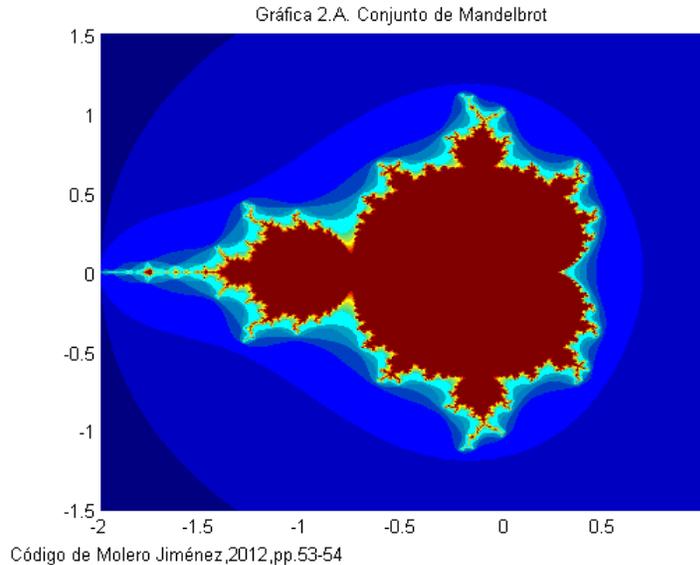
El análisis de sistemas complejos también puede abordarse desde la geometría fractal. Ésta surgió a partir de la conjunción de observaciones realizadas en el campo de la economía y de las formas matemáticas creadas por el hombre, como la curva de Peano que cubre un plano. Fue Benoît B. Mandelbrot quien publicó las definiciones apropiadas para establecerla como tal, además de que acuñó la palabra “fractal” en su ensayo titulado *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*, publicado en 1975. En la introducción de su libro, B. Mandelbrot plantea la necesidad que hay por comprender aquellos problemas de

los que se ha ocupado la ciencia pues estos sólo habían sido explorados superficialmente bajo la óptica del determinismo newtoniano, para alcanzar dicho objetivo empleó viejos conceptos matemáticos, como por ejemplo el concepto de dimensión de Hausdorff, que le permitieron definir nuevas ideas basadas en las irregularidades de los objetos, cuya importancia está en su capacidad de describir con más detalle aquellos fenómenos. Los problemas que abordó no eran nuevos, habían sido propuestos años atrás pero nadie les prestaba atención debido a que el interés de la ciencia por ellos era nulo ya que eran considerados como bromas que la naturaleza hacía a los científicos. Tras minuciosas observaciones e investigaciones, él se dio cuenta de que aquellas estructuras, que parecían a simple vista complejas o caóticas, podían provenir de mecanismos de repetición simples (iteraciones). Generalizando esta idea, llegó a proponer que la mayoría de los fenómenos<sup>18</sup> complejos podían derivarse de reglas matemáticas sencillas. B. Mandelbrot llamó fractales a esas formas complejas e irregulares que partían de unas reglas simples pero que evocaban las propiedades de un sistema caótico. El conjunto que lleva su nombre (que apareció en 1980) fue apodado “la huella dactilar de Dios” (ver gráfica 2.A) por la diversidad de estructuras que en ellas se pueden encontrar tras iterar la ecuación  $Z = Z^2 + C$ . Las figuras creadas tras las iteraciones no se simplifican<sup>19</sup>; es decir, las imágenes se irán complicando a medida que se siga aumentando el número de veces en que es aplicada la fórmula (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.159). Esto es lo que constantemente se observa en la naturaleza; simbiosis entre organismos que dan lugar a la existencia de estructuras complejas en términos de organización (Talanquer, 2003, p.28, Gell-Mann, 1995, pp.253-279).

---

<sup>18</sup> Mandelbrot vio fractales en todas partes pues tuvo la oportunidad de estar presente en diversas áreas de la ciencia: física estadística, cosmología, meteorología, hidrología, geomorfología, anatomía, taxonomía, neurología, lingüística, tecnología de la información, infografía (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.16) y economía.

<sup>19</sup> Lo que sucede cuando se amplifica una figura geométrica euclidiana es que pierde su estructura; por ejemplo, al ampliar el arco de un círculo éste se irá transformando en una línea recta: se simplifica (Talanquer, 2003, p.9).



Para representar el hecho de que un fenómeno sencillo puede presentar una estructura compleja se empleará la ecuación logística, como en el experimento de May. Ésta ilustrará además dos de las características (sensibilidad a las condiciones iniciales y los puntos densos) del caos determinista. La ecuación es la siguiente:

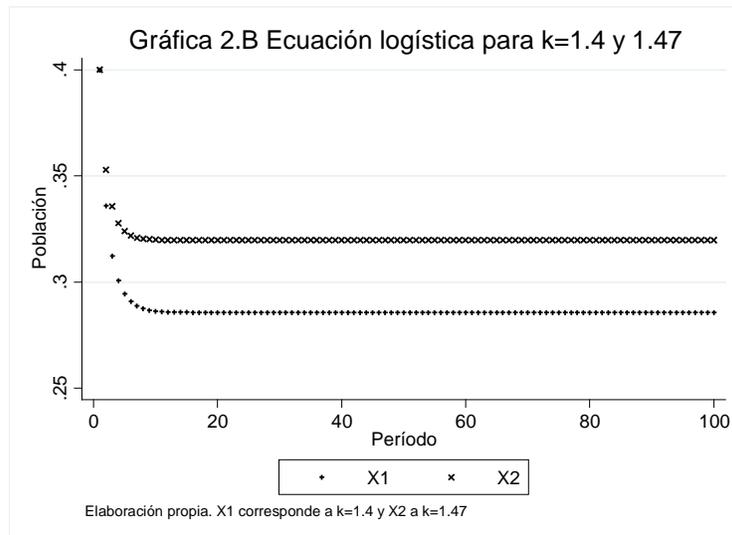
$$X_{t+1} = kX_t(1 - X_t)$$

Donde  $t$  es el tiempo que transcurre desde el periodo inicial  $t = 0$ ,  $X$  es la variable que simboliza al individuo y  $k$  es la tasa anual de crecimiento. Cabe mencionar que esta ecuación describe un sistema dinámico donde el futuro depende del pasado (Sametband, 1999, p.125), así que al ir iterando dicha función se estará tomando el valor de la población del período anterior para calcular el del próximo período. Para facilitar los cálculos se normaliza la variable  $X$  donde 0 es igual a la extinción y 1 (ó 100%) es igual a la población máxima que puede alcanzar una especie (Sametband, 1999, p.124). La proposición de los valores para las variables servirá para ilustrar estados a los que puede llegar un sistema dinámico<sup>20</sup>.

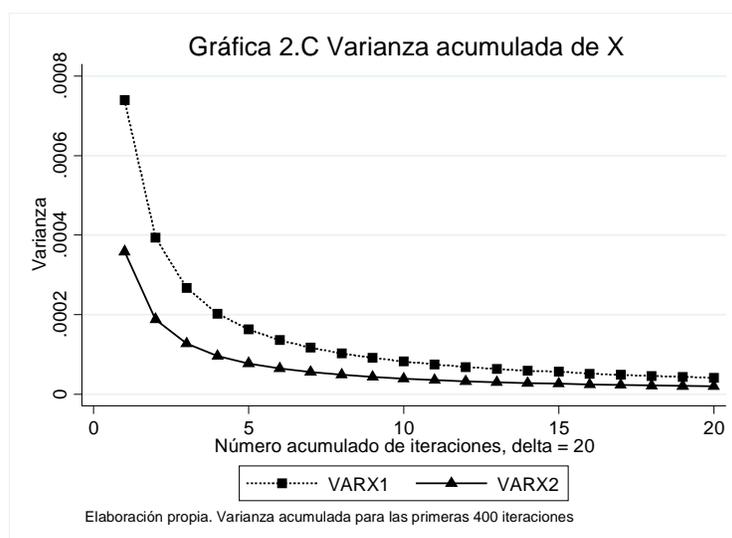
Supóngase que se toma de una muestra sólo el 40% de ella,  $X_0 = 0.4$ , se determina que ésta tendrá una tasa de crecimiento de 1.4% anual,  $k = 1.4$ , si se pretende conocer qué porcentaje sobrevivirá tras varios períodos entonces se itera la ecuación, según los resultados después de 31 repeticiones la población se mantiene estable, llegando a alcanzar una población de sólo el 28.5714294%. Si se supone que hay un error de medición en la tasa de crecimiento del 5%,  $k = 1.47$ , entonces el resultado cambia pues ahora tras 26 repeticiones la población se mantiene estable llegando a un 31.9727895%. Las iteraciones

<sup>20</sup> E. Lomelí (2005) define un sistema dinámico como el estudio de modelos que evolucionan en el tiempo, estos a su vez estudian dos situaciones: el tiempo continuo (ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones de difusión, procesos estocásticos) y el tiempo discreto (métodos iterativos; iteración de mapeos) (p.1).

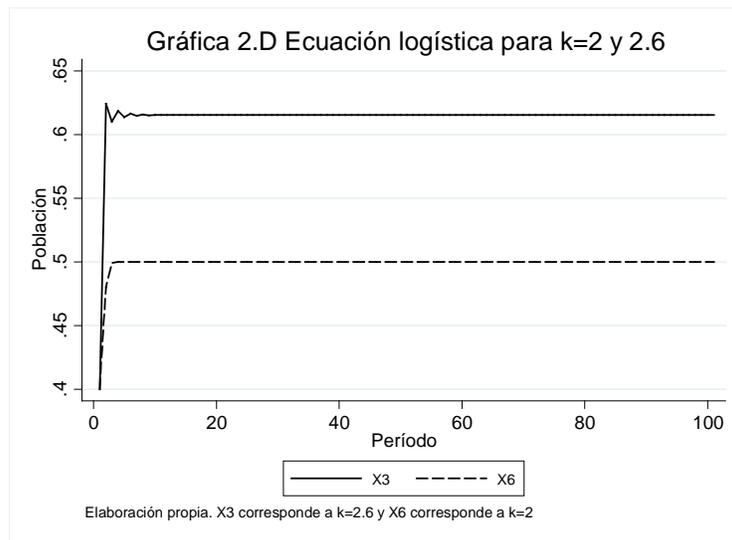
para ambas tasas de crecimiento se muestran en la gráfica 2.B, en ella se puede observar la divergencia entre los porcentajes de la población que se esperaría que alcance la muestra tras 100 iteraciones.



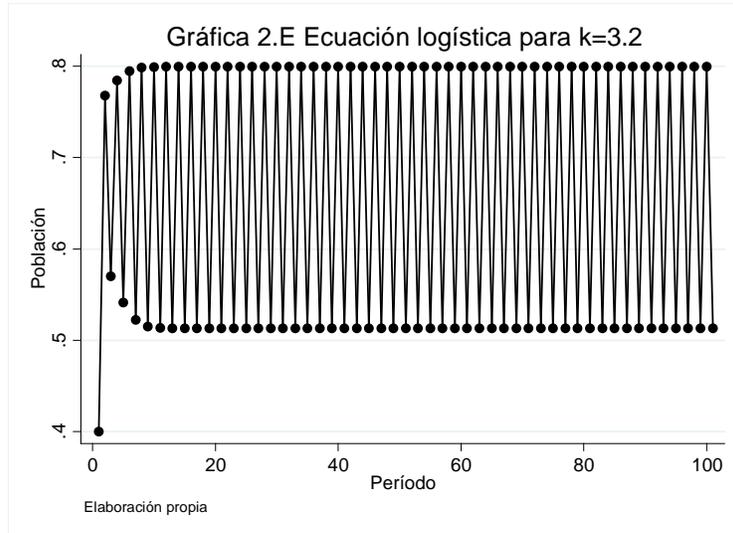
Evaluando la varianza acumulada es como se puede observar (gráfica 2.C) la sensibilidad a la determinación de las condiciones iniciales. Para las primeras 20 iteraciones se exhibe una gran divergencia entre los valores de este parámetro, conforme se van acumulando tal pasa a ser una convergencia asintótica. Esto sería el efecto que se tendría tras incurrir en un error de medición, aparentemente el análisis a largo plazo no se vería afectado puesto que la variabilidad de los resultados del porcentaje de la población es casi despreciable entre ambas tasas de crecimiento pero dentro de las primeras iteraciones es cuando cualquier análisis realizado a los resultados estará sesgado.



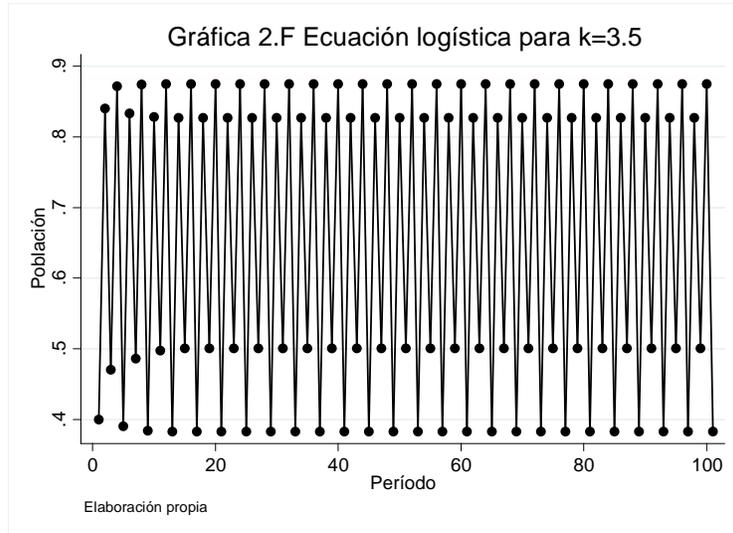
Manteniendo el mismo porcentaje de la población pero cambiando la tasa de crecimiento anual,  $k = 2$  y  $X_0 = 0.4$ , se observa (ver gráfica 2.D) que  $X$  se estabiliza en un valor de 0.5 (ó 50%). Si se hace variar la tasa de crecimiento, dejándolo en un valor de  $k = 2.6$  se observa que antes de estabilizarse la población oscila y después se estabiliza. El valor al cual se estabiliza (0.61538462 ó 61.53%) es llamado atractor punto fijo (Sametband, 1999, pp.58, 128). Existe otro tipo de atractor, que no se presenta en la ecuación logística pero que es considerado importante mencionar, llamado de ciclo límite, éste es propio de comportamientos periódicos lo que implica que un sistema al perder su energía por disipación tenderá a reponerla gracias a algún tipo de energía que obtenga del exterior, como por ejemplo el movimiento del péndulo de un reloj (Sametband, 1999, p.60).



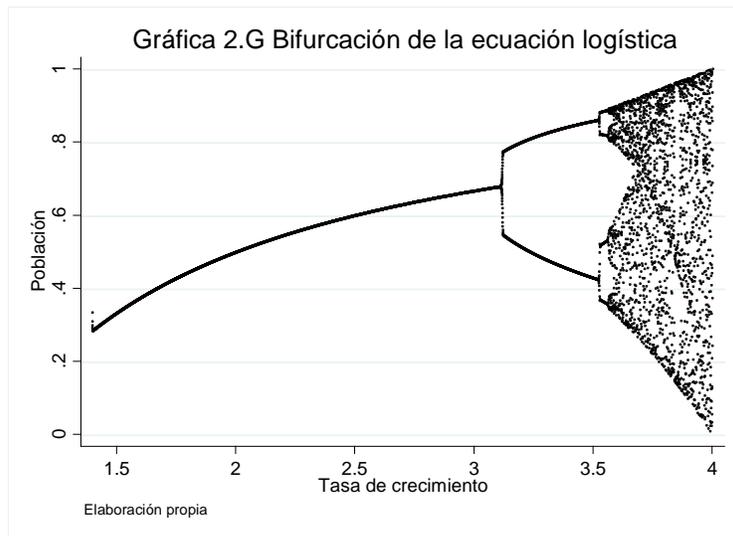
Ahora, si  $k = 3.2$  y  $X_0 = 0.4$  se observa (ver gráfica 2.E) que el sistema oscila entre dos valores o atractores (0.51304451 y 0.79945549). Esta situación se le conoce como bifurcación; doble para estos parámetros, o bien el sistema tiene una periodicidad 2 (Sametband, 1999, p.128). Cuando se habla de bifurcaciones lo importante sería conocer qué tan rápido el sistema puede tomar este comportamiento, una vez que se ha identificado que dicho sistema es sensible a sus condiciones iniciales. Para saber qué tan rápido lo hace se deben calcular los exponentes de Liapunov pues estos miden “el crecimiento medio de errores infinitesimales en un valor inicial después de  $n$  iteraciones” (Fernández Díaz, 2000, p.102) o bien, están midiendo el grado de la sensibilidad del sistema a la determinación de sus condiciones iniciales.



Si ahora los valores son  $k = 3.5$  y  $X_0 = 0.4$ , se observa (ver gráfica 2.F.) que el sistema presenta cuatro atractores: 0.82694071, 0.50088421, 0.87499726 y 0.38281968; ahora ésta será de periodicidad 4 o su bifurcación es cuádruple. A pesar de que la población hipotética tome cuatro posibles valores aún no se llega a un estado caótico puesto que se asume que oscilará entre los valores antes mencionados periódicamente; es decir, en un período la población llegaría a ser de un 82.69% después de haber partido de un 40%, posiblemente por abundancia de alimentos o porque no hubo depredadores, etc. Para el siguiente período la población disminuye, situándose en un 50.08%, producto de un mayor número de individuos que buscaban alimentarse o bien, porque ahora estuvieron expuestos a mayores riesgos. Al siguiente período la población aumenta, alcanzando un 87.49%, posiblemente porque la baja anterior significó un detonante para la preservación de su especie o porque se situaron en un ambiente que los favorecía. Para el siguiente período, último antes de repetir el ciclo, la población disminuye más de lo que lo hizo en el segundo período, ahora su población alcanza un 38.28% por lo que se podría pensar que ahora fueron las condiciones climatológicas las que impulsaron la baja. A partir del siguiente período se vuelve al mismo porcentaje de población y se repite el ciclo.



Si la tasa anual de crecimiento aumentara paulatinamente hasta llegar a un valor de 4.0022 se observa (ver gráfica 2.G) que el sistema a partir de un valor  $k = 3.6$  entra en un régimen caótico pues la población llega a desaparecer (zonas en blanco) luego vuelve a surgir (puntos negros), luego desaparece y luego vuelve a aparecer (puntos densos o soluciones periódicas inestables). No se sabe con exactitud ni de manera aproximada cuál sería el tamaño de la población que alcanzaría de un año a otro, tampoco se puede saber qué factores exógenos estarían incidiendo en un comportamiento como éste puesto que con seguridad son demasiados.



## 2.1. Fractales.

Un fractal es un conjunto u objeto que tiene una forma irregular o interrumpida o fragmentada a cualquier escala. El número que indica qué tan irregular o fragmentado es el conjunto u objeto se llama dimensión fractal y éste no necesariamente será un número

entero. Un conjunto fractal es aquel cuya “dimensión fractal es mayor o igual<sup>21</sup> que su dimensión ordinaria [topológica]” (B. Mandelbrot, 1987, p.168) mientras que un objeto fractal es “un objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente por un conjunto fractal” (B. Mandelbrot, 1987, p.169).

En un espacio euclídeo<sup>22</sup>  $R^E$  la dimensión topológica  $D_T$  y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch  $D$ ; es decir, un espacio métrico<sup>23</sup>  $\Omega$  en el que está definida convenientemente la distancia entre cada par de puntos (B. Mandelbrot, 2009, p.499), toman valores entre 0 y  $E$ ,  $D_T$  siempre es un número entero mientras que  $D$  no necesariamente lo será, sólo están sujetas a la desigualdad de Szpilrajn  $D \geq D_T$  (B. Mandelbrot, 2009, p.32). Con esto, para las figuras euclídeas (cuadrados, triángulos, esferas, etc.) se cumple que  $D = D_T$  pero para un fractal se tiene que  $D > D_T$  con  $D$  pudiendo ser un número entero o fraccional.

Para fractales regulares; es decir, aquellos que tienen escalamiento<sup>24</sup> uniforme en todas direcciones, la estimación de su dimensión se hace mediante la dimensión de semejanza<sup>25</sup>

$$d_s = \log(N)/\log(1/r)$$

Donde  $r$  es la razón de cambio de escala y  $N$  el número de unidades de medida requeridos por el generador<sup>26</sup> (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.300, B. Mandelbrot, 2009, p.70), para aquellos fractales que son más intrincados la estimación de su dimensión se hace a

---

<sup>21</sup> Cuando se tiene duda de si un conjunto u objeto es un fractal o no; es decir, cuando  $D = D_T$  se puede recurrir a la dimensión de capacidad de Frostman ya que es el equivalente a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, así que una definición alterna para un fractal es que la dimensión de capacidad de Frostman sea estrictamente mayor que su dimensión topológica (B. Mandelbrot, 2009, pp.504-506).

<sup>22</sup> Para más detalles sobre su definición y propiedades se puede consultar el capítulo 2 de Martínez Fagundo (2012).

<sup>23</sup> Formalmente, F. Barnsley (1993) define un espacio métrico  $(X, d)$  como un espacio  $X$  junto con una función de valor real  $d: X \times X \rightarrow R$ , la cual mide la distancia entre pares de puntos  $x$  e  $y$  en  $X$ . Se requiere que  $d$  obedezca los siguientes axiomas: I)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ , II)  $0 < d(x, y) < \infty \forall x, y \in X, x \neq y$ , III)  $d(x, x) = 0 \forall x \in X$ , IV)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$  (p.10). La función  $d$  se dice que es una métrica sobre  $X$  y éste es un conjunto en  $R^2$  (Carena, 2012, p.64).

<sup>24</sup> Un fractal que es invariante por cambio de escala se dice que es escalante (B. Mandelbrot, 2009, pp.36-37), este adjetivo es válido tanto para figuras geométricas como para objetos naturales “cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo salvo que están a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas” (B. Mandelbrot, 1987, p.167).

<sup>25</sup> Nos dice Martínez Fagundo (2012) que la semejanza en “matemática se aplicó a una figura que es distinta de otra sólo por el tamaño y cuyas partes guardan respectivamente las mismas proporciones” (p.233). Esta idea es sobre la cual B. Mandelbrot propone la autosemejanza o autosimilitud pues si un trozo de cierta figura es geoméricamente semejante al todo entonces la figura y su generador o cascada (este sustantivo es más común usarlo cuando se habla de turbulencia) son autosemejantes o autosimilares (B. Mandelbrot, 2009, p.60).

<sup>26</sup> Para construir un fractal se necesita un iniciador, un generador y una regla de recursión. El iniciador puede ser cualquier objeto geométrico clásico (para los fractales simples): un cuadrado, un rectángulo, una recta, etc. El generador es la plantilla de la que se obtendrá el fractal, puede usarse un motivo geométrico simple: una línea quebrada, una curva, etc. Por último, la regla de recursión es el proceso de construcción del fractal: la iteración de la combinación del iniciador y el generador (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.140-141).

través de la dimensión de recubrimiento el cual cuenta cuántas cajas o cuadros de distintos tamaños son necesarios para cubrir el fractal, la fórmula para esta estimación es

$$d_b = \lim_{r_n \downarrow 0} \frac{\text{Log}N(r_n)}{\text{Log}(1/r_n)}$$

Donde *lim* es “el límite matemático aproximado por la razón de logaritmos a medida que la razón de reducción *r* [cambio de escala] se acerca a cero” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.301). Cabe mencionar que la dimensión de recubrimiento es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para la cual se debe cumplir que el fractal sea autosemejante; es decir, “que se pueda descomponer en *N* partes relacionadas con el todo por una transformación de semejanza de razón *r*” (B. Mandelbrot, 2009, p.64, Elert, en línea). Es importante para este caso mencionar que si a una figura geométrica de coordenadas (*x, y*) se le aplica una transformación de escalamiento (cambio de escala) con el mismo factor de escala para ambas coordenadas, (*rx, ry*), que genere la misma figura pero de menor o mayor tamaño según sea la razón se dirá que también se ha aplicado una transformación de semejanza o similitud, por esta circunstancia la razón "*r*" es usada para indicar tanto el escalamiento como la semejanza en fractales regulares.

Los rasgos comunes que comparten los fractales son el escalamiento; lo que significa que a diferentes escalas en las que se observe el fractal las partes que lo componen muestran la forma del cuerpo completo, la autosimilitud o autosemejanza; esto significa que el fractal es invariante por la transformación geométrica de semejanza o similitud y por último la autoafinidad; el fractal cambia de escala en más de una dirección que en otra (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.141-142, B. Mandelbrot, 2009, p.37), pero es importante resaltar que estos rasgos se cumplen desde el punto de vista estadístico en la naturaleza ya que habrá casos en los que al ampliar una zona del fractal no se observe que éste sea idéntico al todo aunque éste puede ser similar a alguna otra zona del fractal así que la capacidad del fractal de generar una copia de ella misma a una escala diferente está condicionado por un límite superior y un límite inferior (Talanquer, 2003, p.27).

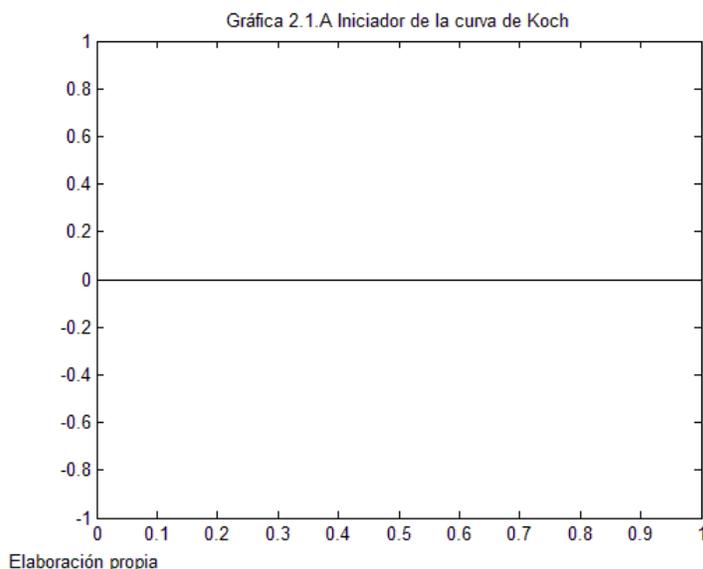
Para ejemplificar los conceptos anteriores se construirá la curva de Koch. Ésta es un fractal regular que forma una tercera parte de una figura que en 1905 Helge von Koch creó, semejante a un copo de nieve, para mostrar una función continua sin derivada<sup>27</sup> ya que en ella no es posible trazar una tangente en alguno de sus puntos además de que su longitud tiende al infinito (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.151). En la primer etapa de la construcción el iniciador es una línea recta que está en el intervalo [0, 1] (ver gráfica

---

<sup>27</sup> B. Mandelbrot en la introducción (Capítulo 1) de su ensayo de 1987 comenta que hasta hace unas décadas las funciones con derivada habían sido estudiadas exhaustivamente pero fue su inquietud quien lo llevó a demostrar que éstas son sólo la excepción de la regla; es decir, en la naturaleza son más abundantes las funciones sin derivada aunque esta idea no era nueva entre los matemáticos pues en 1893 Charles Hermite expresaba esta idea en una carta dirigida al matemático T. Stieljes: “abandono con espanto y horror esta lamentable plaga de las funciones sin derivada” (Navas Ureña, 2009, p.320).

2.1.A), esta recta será descompuesta por  $N$  rectas de razón  $r = 1/3$  (transformación de semejanza o similitud), de esta manera se obtienen tres rectas,  $N = 3$ , que están definidas por los intervalos  $[0, 1/3]$ ,  $(1/3, 2/3)$  y  $[2/3, 1]$  cuya dimensión de semejanza es

$$d_s = \frac{\log(3)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(3)}{\log(3)} = 1$$



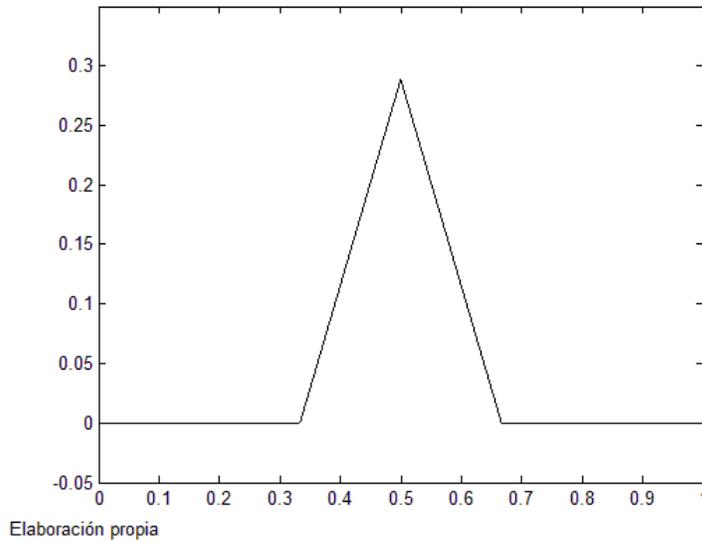
Posteriormente se elimina el tercio central; es decir, la recta que está en el intervalo abierto, para sustituirlo por dos segmentos de recta de longitud  $1/3$  a manera que estos dos formen un ángulo de  $60^\circ$  (transformación de rotación<sup>28</sup>) (ver gráfica 2.1.B). La nueva curva que se ha creado se llama generador y necesitó de 4 unidades de medida ( $N$ ) de razón  $r = 1/3$  para ser formada por lo que su dimensión de semejanza es:

$$d_s = \frac{\log(4)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.261859507$$

<sup>28</sup> Para las nuevas coordenadas  $(x_n, y_n)$  de una figura con coordenadas  $(x, y)$  la transformación de rotación se define como

$x_n = x \cos(A) - y \sin(B)$  e  $y_n = x \sin(A) + y \cos(B)$  donde  $A$  y  $B$  “son los ángulos en que se rotan los lados horizontales y verticales de la figura original, medidos con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente” (Talenquer, 2003, pp.47-49).

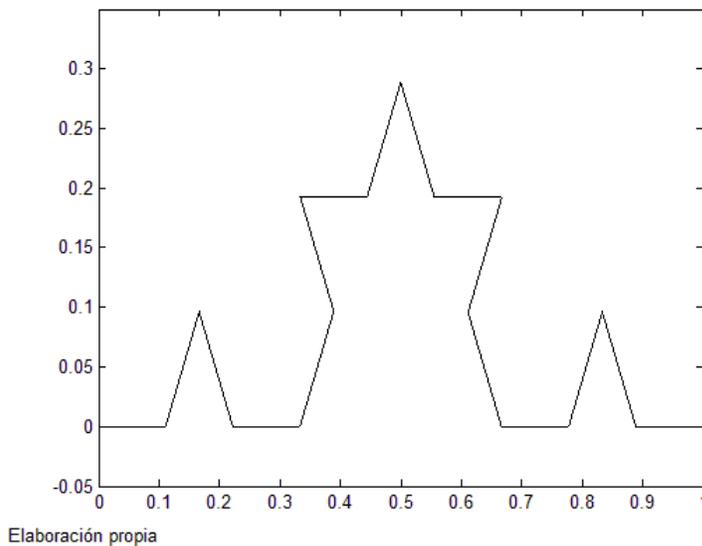
Gráfica 2.1.B Generador de la curva de Koch



En la segunda etapa, a cada uno de los cuatros segmentos de la recta creada por el generador se le adosará (yuxtapondrá) él mismo transformado por un factor de escalamiento de razón  $r = (1/3)^2$  ó  $1/9$  (ver gráfica 2.1.C), o bien al generador se le aplicará una transformación de semejanza que lo reduce pero que le permite tener las mismas características, y ésta será la regla de recursión. Como se observa ahora se necesitan 16 unidades de medida de razón  $r = 1/9$  para construir una nueva curva, semejante a la anterior pero con nueva escala. Si se calcula su dimensión de semejanza se observa que tiene el mismo valor de 1.261859507

$$d_s = \frac{\log(16)}{\log(1/(1/9))} = \frac{\log(16)}{\log(9)} = 1.261859507$$

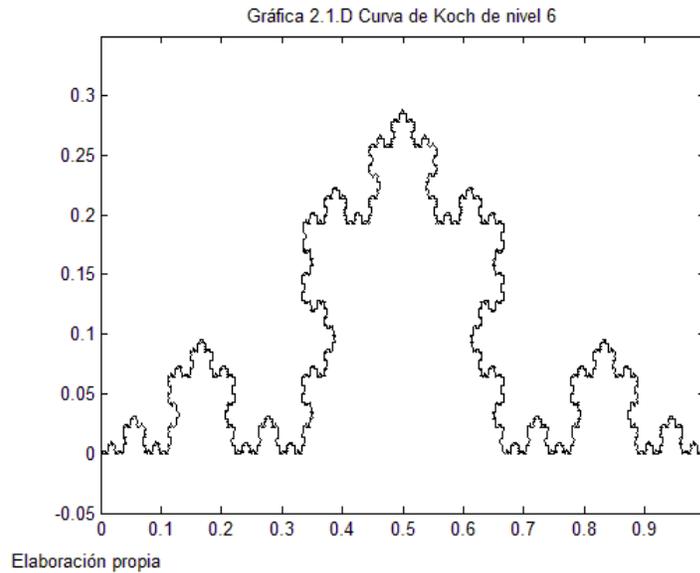
Gráfica 2.1.C Curva de Koch de nivel 2



Si se generaliza el proceso (ver gráfica 2.1.D) se tiene que por cada iteración ( $n$ ) o cada vez que se aplica el generador éste se deberá reducir por un factor de escala  $r = (1/3)^n$  para poder adosarse a los nuevos tramos de las rectas que van surgiendo, de esta manera se observará que para  $n$  iteraciones; es decir, cuando  $r_n \downarrow 0$  se llega a  $\frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.261859507$ :

$$\frac{\log(3)}{\log(3)}, \frac{\log(4)}{\log(3)}, \frac{\log(16)}{\log(9)}, \frac{\log(64)}{\log(27)}, \dots, \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859507$$

(Elert, en línea)



Para poder haber realizado la gráfica de la curva de Koch se ha necesitado la definición de un sistema de funciones iteradas (IFS), ésta dice que tal sistema consiste de una familia de contracciones  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$  en un espacio métrico  $(X, d)$ , con  $M \geq 2$ . De manera general, para cada  $i = 1, \dots, M$  se tiene que  $\phi_i: X \rightarrow X$  y a ella está asignada una constante  $k_i < 1$  de tal forma que  $d(\phi_i(x), \phi_i(y)) \leq k_i d(x, y) \forall x, y \in X$ , además  $k_{\text{máx}} = \text{máx}_{1 \leq i \leq M} k_i$ . Como un caso particular, cuando hay igualdad en las  $k_i$  se dice que el sistema está formado por similitudes contractivas (Carena, 2012, p.72). Siendo este el caso particular de interés, se han definido las contracciones  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$  de la siguiente manera:

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{3} \left[ \left( x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \right), \left( x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right]$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{3} \left[ \left( x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \right), \left( -x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{3}[(x + 2), y]$$

**Nota:** Para las contracciones definidas se tiene que  $M = 4$  y  $k = 1/3$ . A las contracciones que siguen la relación  $\phi: R^2 \rightarrow R^2$  se les conoce como transformaciones afines en el plano (Carena, 2012, p.73).

Las transformaciones de forma matricial quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ T_2(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T_3(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\ T_4(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Plaza, 2011, p.31).

Como cada generador a diferente escala es semejante a la curva de Koch original se dice que este fractal es autosemejante y como a cada escala se puede observar que una parte de la curva es geoméricamente idéntica al todo se dice que también es un fractal escalante, no es autoafín porque la razón de escala que transforma al generador es la misma para cada parte de la curva. Si se sigue indefinidamente la regla de recursión entonces la longitud de la curva tiende a infinito; B. Mandelbrot aborda esta cuestión con el cuestionamiento sobre la medida que tiene la costa de Gran Bretaña ya que a diferente escala de medición se irán notando más y más detalles lo que implicaría que en cada observación la longitud de la costa irá creciendo hasta que ésta llegue a ser infinita (B. Mandelbrot, 2009, p.70, B. Mandelbrot, 1987, p.42, B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.151-152).

## 2.2 Economía fractal.

Es importante mencionar que la geometría fractal tiene sus orígenes en un tema económico que B. Mandelbrot abordó en la década de los 60 mientras se encontraba trabajando para la compañía *International Business Machines* (IBM) pues ésta estaba buscando nuevos usos para los primeros ordenadores. Se le había pedido que analizara el tema de la ley de la distribución de los ingresos personales, la publicación de sus resultados llamaron la atención de unos pocos economistas, entre ellos la del profesor Hendrik S. Houthakker de la universidad de Harvard que en ese momento dirigía un seminario en esta universidad al cual fue invitado para exponer su investigación. B. Mandelbrot recuerda que al llegar al despacho del profesor Houthakker, antes de iniciar su exposición, observó que en el pizarrón se encontraba una gráfica que un alumno del profesor y él habían estado

analizando, ésta era la de las variaciones del precio del algodón (B. Mandelbrot, 2014, pp.234-235). Ellos habían emprendido la tarea de hallar más hechos que reafirmaran las ideas que plasmó Bachelier en su tesis sobre el comportamiento de los precios, lo que llamó la atención de B. Mandelbrot fue la similitud que tenía la gráfica del precio del algodón con la de la distribución de ingresos que presentaría pues ambas tenían la misma forma. A partir de este hallazgo él emprendió la búsqueda de un hecho que relacionara ambas ideas pues en ese momento no había teoría económica alguna capaz de hacerlo.

B. Mandelbrot sabía que Houthakker se había dado cuenta de que el comportamiento del precio del algodón no coincidía con lo que dictaba la tesis de Bachelier pues su varianza no era constante; es decir, en un análisis por período que se hizo la varianza nunca se aproximaba a un límite así que B. Mandelbrot amplió la serie del precio del algodón con datos diarios y mensuales, pues sólo se había utilizado la serie anual, y los sometió al mismo análisis encontrando más de lo mismo; la varianza seguía cambiando. Su hallazgo fue publicado en un trabajo dado a conocer en 1962 con el nombre de “La variación de ciertos precios especulativos” la cual aportaba a la teoría financiera un aspecto fundamental sobre el comportamiento de los precios (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.162). En éste aparece la idea de que los precios son escalantes; es decir, a cualquier escala de tiempo los precios tienen el mismo comportamiento pues están sujetos a los mismos factores de riesgo, en términos de la geometría fractal, a cualquier escala que se observe la serie del precio éste tendrá la misma gráfica intrincada. Para haber llegado a esto, B. Mandelbrot se basó en un ejemplo sobre las leyes potenciales que George Kingsley Zipf describió en su libro *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, éste consiste en contar las frecuencia con la que aparece cada palabra en un texto para así asignar el rango que le corresponde; es decir, el rango número uno se le asigna a la palabra más frecuente, el rango número dos a la segunda más frecuente y así hasta el término de las palabras, posteriormente se traza una gráfica donde se emplea el número de veces que aparece cada palabra y su rango, lo que se observará es una ley potencial: “la curva no desciende con suavidad de la palabra más común a la menos común, sino que cae vertiginosamente al principio y luego de forma más lenta” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.164). Zipf propuso una fórmula para medir la probabilidad de ocurrencia de cada palabra, ella es:

$$Q(r) \approx Fr^{-1/\alpha}$$

Donde  $Q$  es la función de distribución de probabilidad,  $r$  el número de orden de la palabra,  $F$  una constante que Zipf estimó en  $1/10$  y  $1/\alpha$  es el factor crítico de la ley potencial (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.303). Posteriormente, B. Mandelbrot observó que una ley potencial estaba presente en la distribución de los ingresos, trabajo realizado por primera vez en 1909 por Vilfredo Pareto, pues cuando se grafica en escala logarítmica los ingresos contra el número de la población se observa una línea recta, que desciende, cuya pendiente es el factor de ley de potencia. Pareto había estimado este factor, parámetro alfa, en  $-3/2$  lo cual significa que mucha de la riqueza sólo se concentra en pocas manos (B. Mandelbrot

y L. Hudson, 2006, pp.167-169) mientras que hay un gran número de personas en situación de pobreza; en términos del ejemplo de Zipf las palabras más frecuentes son las personas en situación de pobreza mientras que las palabras menos frecuentes son las personas que concentran mayor riqueza. Una vez teniendo esta base, B. Mandelbrot trabajó los datos del precio diario y mensual del algodón obteniendo para cada intervalo una línea recta con pendiente negativa cuyo factor de ley de potencia era  $-1.7$ ; había descubierto que las leyes potenciales son una clase de escalamiento fractal (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.175) o bien, que el comportamiento del precio del algodón a cualquier escala de tiempo seguía el mismo patrón; son más frecuentes los cambios pequeños que los cambios grandes pero ambos siempre están presentes.

B. Mandelbrot fue capaz de ver que el parámetro alfa era aquello que necesitaba para explicar el por qué su gráfica de la distribución del ingreso y la del comportamiento del precio del algodón eran similares, gracias a que la distribución de cada una se apartaba de una normal debido a las observaciones poco frecuentes pero relevantes. Teniendo en cuenta dicho parámetro, él empleó una clase de distribución que su profesor Paul Lévy había concebido dentro de la *École Polytechnique*, llamada por él distribución de probabilidad estable, aunque después B. Mandelbrot la daría a conocer como distribución L-estable en honor y memoria de su profesor (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.173). En ésta, el parámetro que informa sobre qué tan gruesa es la cola de una distribución es alfa, por cola gruesa se entiende que son aquellos valores que están a más de tres desviaciones estándar con respecto a la media. La existencia de una ley potencial que podía ser abordada con las matemáticas de la distribución L-estable era lo que explicaba la relación entre los dos gráficos (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.304).

Hacia finales de 1963, el profesor Paul H. Cootner, un economista de la *Sloan School* del MIT, estaba interesado por incluir su trabajo en un libro, un compendio de consideraciones sobre el estudio de los precios, que publicaría en 1964 con el título *The Random Character of Stock Market Prices*, para que esto fuera así tenía que haber publicado su investigación en una revista de elite ya que los otros trabajos que aparecerían en dicho libro procedían de fuentes debidamente académicas. Probó con varias revistas pero solo una, la *Journal of Business* editada por la universidad de Chicago y que en ese momento uno de los editores era Merton Miller (premio Nobel), aceptó. Cuando fue difundido el libro y prestado atención al trabajo de B. Mandelbrot muchos economistas comenzaron a encontrar las mismas colas gruesas, el mismo escalamiento fractal y por ende la validez de las leyes potenciales. Transcurría el año de 1972 cuando un texto, publicado por Robert R. Officer, mostró evidencia a favor y en contra de estas ideas, a partir de éste otros economistas empezaron a cuestionar las ideas empleando a veces técnicas estadísticas inapropiadas donde las conclusiones eran con frecuencia que ya no se podían continuar aceptando las hipótesis hechas por B. Mandelbrot. Mientras esto sucedía, la teoría de portafolios de Markowitz, la fórmula para valorar opciones de Black-Scholes y las bases de la tesis de

Bachelier fueron ganando más adeptos por lo que las consideraciones sobre el comportamiento de los precios fue desapareciendo y así se impuso la teoría económica moderna (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.176-180).

El éxito de la teoría económica moderna no duró mucho tiempo pues las consideraciones que habían sido ignoradas comenzaron a hacerse evidentes, hubo factores que propiciaron pérdidas monetarias que la teoría no contempló en su forma de operar, producto de sucesos extraordinarios, los menos frecuentes o con una casi despreciable probabilidad de ocurrir. Esto lo experimentaron los inversionistas el 19 de octubre de 1987, fecha en la que el índice Dow Jones cayó 29.2%, pues las carteras valoradas por las fórmulas de la teoría reventaron, la seguridad de las opciones falló haciendo empeorar aún más el panorama ya que provocó que el precio de las acciones bajaran en un intento por deshacerse de ellas (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.96). Pronto se emprendieron nuevos análisis que tenían como objetivo encontrar las razones por las cuales la teoría no se corroboraba con la práctica, lo que se encontró fue lo mismo que había descrito B. Mandelbrot en su trabajo de 1962 sólo que en el contexto de los alcances de los supuestos que hacen los modelos de la teoría económica moderna. Por ejemplo, en 1992 un trabajo de Fama y French indicaba que la teoría de portafolios de Markowitz, mejorada por Sharpe (CAPM), era muy simplificadora pues sólo bastaba estimar el parámetro beta (la reacción del activo con respecto al mercado) para saber qué acciones comprar, cosa que en la práctica no daba los resultados esperados, ellos habían hecho notar que los indicadores de mercado “Precio/Utilidad” y “Precio/Valor en libros” valoraban mejor las acciones debido a que el primero muestra que si la razón es alta entonces la acción tiende a dar menores rendimientos que cuando ésta es alta y la segunda porque una razón baja indica un mejor comportamiento en el tiempo que aquellas con una razón alta. Tiempo después el CAPM fue ampliado con la finalidad de que el modelo pudiera contemplar más factores que estuvieran incidiendo en el comportamiento de la acción. Lo mismo ocurrió con aquellos modelos que basan su análisis en el comportamiento de la varianza, al ver que ésta pocas veces era constante se buscó integrar esta característica a un modelo más general, el GARCH (Heteroscedasticidad Condicional Autoregresiva Generalizada). Propuestas de mejoras a modelos ya existentes y nuevos métodos continúan apareciendo a pesar de que en la práctica es frecuente considerar sus resultados como referencias (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.116-120).

Por otra parte, B. Mandelbrot llegó a resultados distintos tras unificar áreas de estudio que aparentemente se encontraban inconexas gracias a los fractales que junto con su amplio conocimiento en áreas como mecánica de fluidos, hidrología, física estadística, etc., le permitieron proponer métodos de análisis que pueden ser empleados tanto en datos de tipo económicos como en datos de fenómenos naturales. Él comenta que sus propuestas principalmente se basaron en el carácter turbulento de los mercados, en analogía a las características de la turbulencia, pues observó que las continuas variaciones en los precios y en los índices propiciaban que el riesgo en las carteras de inversión fuera subestimado (B.

Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.121). También señaló las deficiencias de los supuestos que hacen los modelos para poder ser empleados pues, por ejemplo, si la hipótesis de los mercados eficientes se cumpliera en cualquiera de sus tres niveles los corredores de bolsa no tendrían por qué estar siguiendo pistas o patrones que les permitieran obtener beneficios de ellos pues las mismas pautas serían visibles para todos los corredores, lo que los impulsaría a comprar y vender para así descontar dicho efecto; es decir, el mercado por sí solo corregiría tal situación, pero se hace justamente lo contrario, van en busca de alguna noticia o hecho que consideran que provocará que el precio de alguna acción comience a subir para poder así apostar con la idea de comprar barato y vender caro. También asumen que si el precio está subiendo posiblemente lo hará unos días más aunque en la tesis de Bachelier eso es inconcebible pues cada cambio en el precio debe ser independiente, el cambio que presente hoy es independiente del cambio que tuvo ayer y no influirá en el cambio que tenga mañana, al respecto, en un estudio realizado por Eugene Fama y Kenneth R. French afirman que “el 10% del rendimiento anual de una acción podía atribuirse a su trayectoria en los ocho años anteriores” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.115).

Para concluir con este punto se plantea considerar cuatro aspectos para poder abordar los temas que aparecerán más adelante. El primero consiste en considerar el hecho de que los inversores no actúan de manera racional, para muestra de esto se puede mencionar que hay una rama de la economía que se encarga de analizar dicho aspecto llamada economía comportamental la cual estudia “cómo se equivoca la gente al interpretar la información y al estimar probabilidades, y cómo influyen las emociones” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.101), un ejemplo representativo de esta situación es la paradoja de Allais en donde un individuo al presentársele una situación de dos maneras distintas se contradice al momento de dar a conocer sus preferencias; es decir, “si uno prefiere [una alternativa] A sobre [una alternativa] B, no tiene sentido que, a continuación, opte B sobre A porque le hayan mostrado las opciones de otro modo” (Crespo, 2011, p.54).

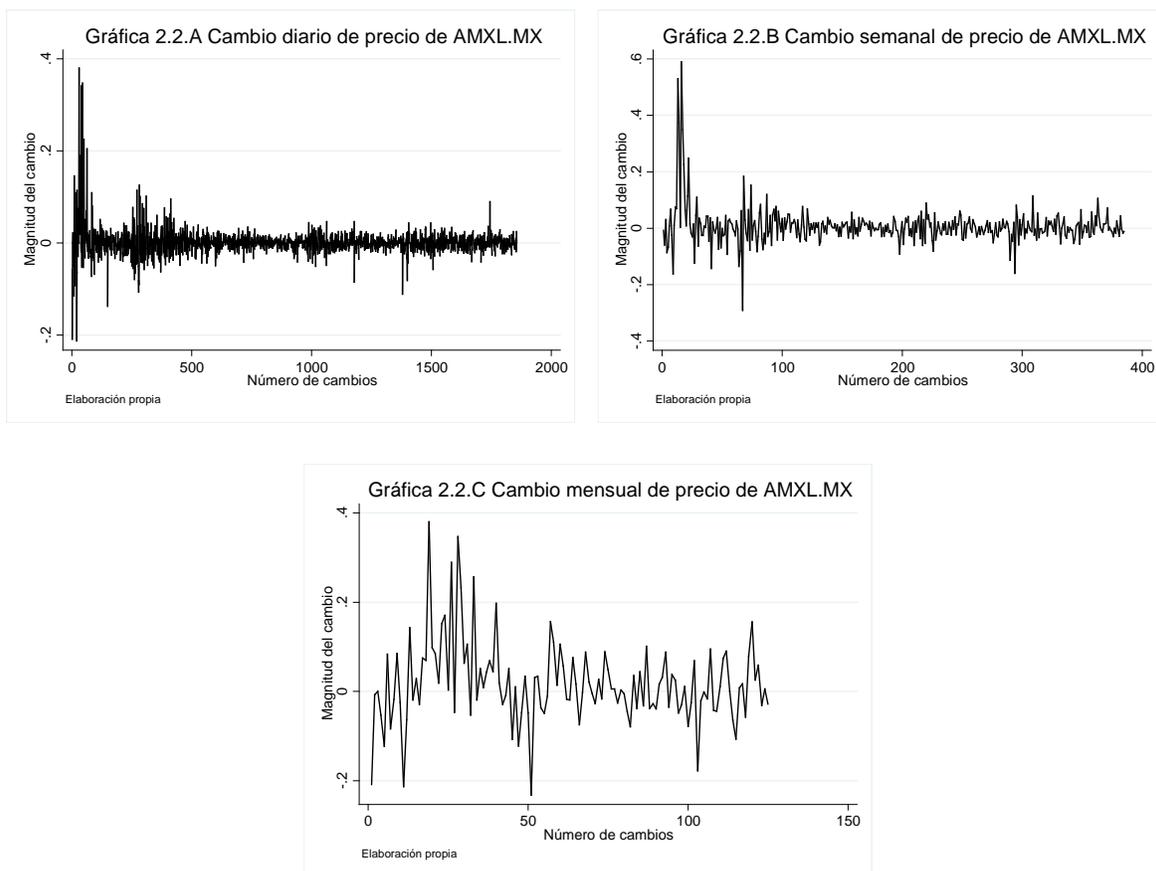
El segundo aspecto consiste en considerar que los inversores no son iguales puesto que sus expectativas no son homogéneas; es decir, al mercado financiero acuden personas con diferentes intereses, unos invierten en valor mientras que otros en crecimiento, unos más compran acciones a veinte años vista para tener una pensión mientras que otros compran y venden a diario (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.102). Según la teoría ortodoxa, dada la misma información se espera que la mayor parte de los inversores tomen las mismas decisiones por ello, bastaría con encontrar una ecuación que describa sus preferencias para poder generalizar la de los demás. Si se compara la composición de la cartera de inversión de dos de los millonarios que están en la lista de Forbes (ver cuadro 2.2.A), Bill Gates y Warren Buffett, se observa que llegan a coincidir, en gran parte, en algunos sectores de la actividad económica pero se observa también que la participación de su capital es totalmente distinta; por ejemplo, mientras que Bill Gates sólo tiene una participación de 0.29% en la Banca Warren Buffett lo hace con un 30.15% mientras que para el caso del

sector Seguros, Gates tiene una participación de 47.28% y Buffett una de 4.29%, si se considera el capital invertido se observa que en la cartera de Gates el capital es de \$15892.7 millones de dólares mientras que la cartera de Buffett el capital es de \$56155 millones de dólares. Al considerar la característica de que ambos son millonarios no se puede concluir que sus expectativas sean las mismas, ni que tengan el mismo horizonte temporal y mucho menos que posean la misma información pues de lo contrario sus carteras serían semejantes en cuanto a participación y capital invertido.

<b>Cuadro 2.2.A. Composición de la cartera de inversión de Bill Gates y Warren Buffett según el sector económico.</b>		
<b>Sector</b>	<b>Bill Gates</b>	<b>Warren Buffett</b>
	<b>Porcentaje</b>	<b>Porcentaje</b>
Alimentación	13.22	28.1
Banca	0.29	30.15
Bienes industriales y servicios	17.71	2.07
Construcción		0.94
Distribución	8.4	4.4
Energía	5.77	3.95
Farmacia	0.23	4.91
Hogar	0.2	6.9
Informática	0.1	
Medios de comunicación	2.81	1.36
Productos químicos	1.42	
Seguros	47.28	4.29
Servicios financieros		12.69
Tecnología	1.54	
Telefonía	0.76	
Varios	0.02	0.03
Viajes	0.25	
Valor total (Millones de dólares)	15892.7	56155
<b>Fuente:</b> Elaboración propia con datos de S. Mazo (en línea)		

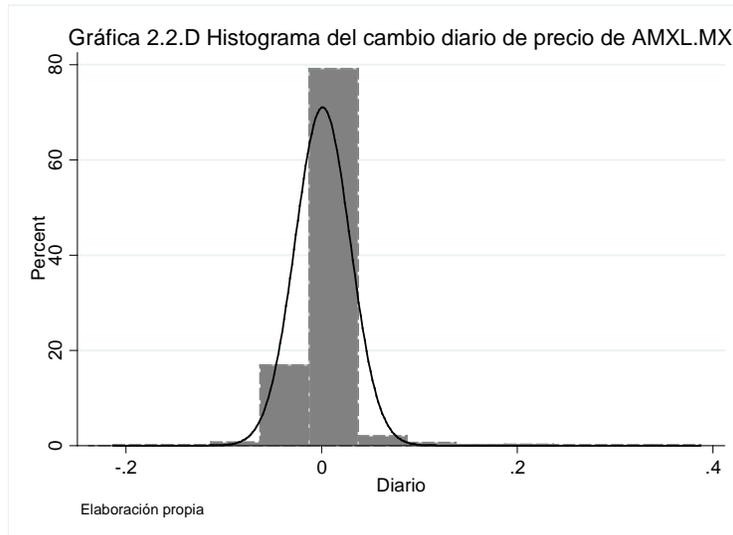
El tercer aspecto consiste en reservar la suposición de que los cambios de precio son continuos sólo para aquellas series que tengan empíricamente una distribución normal pues por lo general éstas serán casos particulares (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.103). Si el cambio de precio cumpliera con ser continuo lo que se observaría es que en un determinado intervalo los cambios pasarían por todos los valores intermedios (Braun, 1999, p.126); por ejemplo, si el intervalo de la magnitud del cambio fuera -0.0121 a -0.0214, los cambios presentados en la serie tendrían que pasar por los valores -0.0121, -0.014425, -0.01675, -0.019075 y -0.0214 considerando una semana de operaciones, este intervalo

corresponde al cambio de precio de la acción de América Móvil (AMXL.MX) para el período del 7 de enero de 2008 al 11 de enero del mismo año. Los valores reales del cambio fueron -0.0121, 0.0178, 0.0042, 0.0264 y -0.0214 por lo que es evidente la ausencia de continuidad. Si se grafica el cambio del precio de la acción de América Móvil en un intervalo diario (ver gráfica 2.2.A), semanal (ver gráfica 2.2.B) y mensual (ver gráfica 2.2.C) para el período del 13 de marzo de 2000 hasta el 16 de diciembre de 2014 se observa en cada caso la carencia de esta característica, además de que son visibles algunos cambios abruptos (los puntos más altos o más bajos en las gráficas). En la práctica, esos cambios abruptos son eliminados pero en este trabajo se les considera importantes puesto que definen la distribución real de los datos.

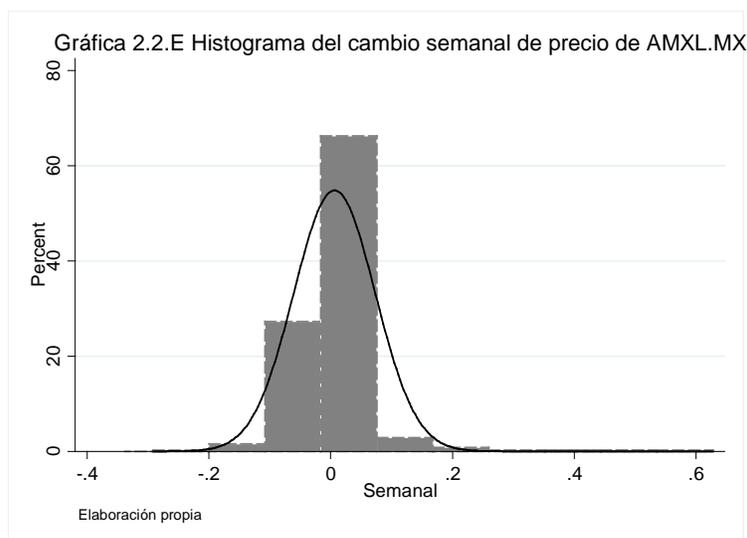


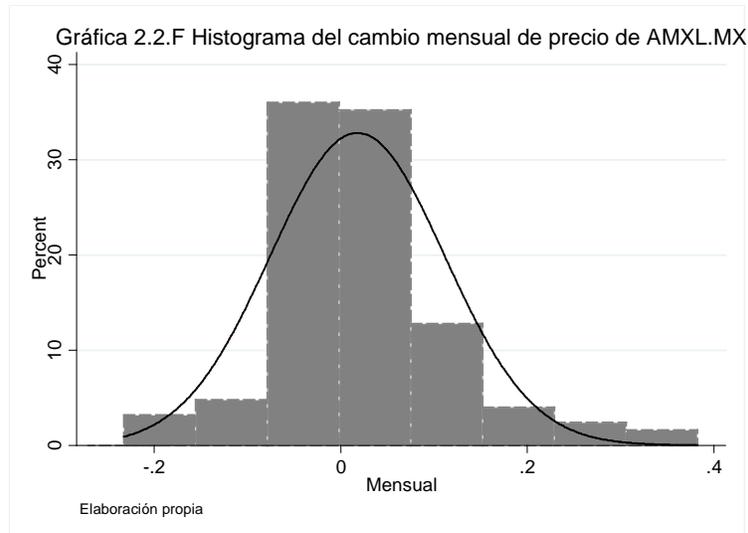
El último aspecto a tener en cuenta es, como en el caso anterior, reservarse la idea de suponer que los cambios de precio sigan un movimiento browniano, especialmente un movimiento browniano geométrico. Esta suposición difícilmente se llega a cumplir en la práctica, sobre todo en las series de precios, pues para modelar el comportamiento de un precio se ha demostrado que resulta, en cierto sentido, más eficiente emplear las representaciones ARIMA o GARCH debido a que las series pueden ser explicadas por su comportamiento pasado, lo que indica que no son independientes y por una tendencia, lo que implicaría la falta de estacionariedad (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.104, García-

Martos y M. Alonso, 2012, p.5). Si se compara la distribución empírica del cambio de precio con una distribución normal (Gillani, en línea, Armengol y otros, 1991, p.21) en teoría se tendría que observar que los datos se deben ajustar a la campana de Gauss pero se observa lo contrario. Para el cambio diario de la acción de América Móvil (ver gráfica 2.2.D) se observa que hay un exceso de cambios muy pequeños (columna central) y cambios muy grandes (colas laterales).



Para el cambio de precio semanal y mensual (gráficas 2.2.E y 2.2.F respectivamente) se observa lo mismo; están muy lejos de tener una distribución normal. De manera intuitiva, se puede ver que hay un escalamiento fractal por la característica de que a escala diaria, semanal y mensual los cambios de precio han sido muy pequeños y grandes (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.114).





## Capítulo 3. Finanzas fractales.

### 3. Diez aspectos sobre las finanzas fractales.

Los supuestos de los modelos basados en el paseo aleatorio no toman en cuenta aquellas situaciones que son más comunes en los fenómenos que intentan describir, por ello se ha considerado la necesidad de plantear sólo aquellas características de mayor relevancia que permitan llevar a cabo el contraste de las hipótesis de B. Mandelbrot, tales consideraciones son únicamente observaciones hechas a partir de situaciones reales por lo que no pueden ser considerados como supuestos, más bien son consideraciones que se habrán de tomar en cuenta si se pretende emplear los fractales como método de análisis.

#### I) Mercados turbulentos<sup>29</sup>.

El adjetivo turbulento es usado para describir el comportamiento de ciertos fenómenos físicos que al ser alterados tienen un comportamiento caótico en el cual el flujo laminar, un movimiento sin alteraciones, se rompe formando una cascada de remolinos o rachas bruscas que a su vez está compuesto por remolinos de menor tamaño y que sorpresivamente puede volver al flujo laminar en una especie de intermitencia; flujo laminar – turbulencia – flujo laminar (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.127). Un mercado turbulento, metafóricamente hablando, presentará períodos en los que su actividad transcurre sin alteraciones o es aparentemente estable (flujo laminar); este comportamiento, por ejemplo, se pudo observar durante el boom en el sector inmobiliario de Estados Unidos, el cual

[Descansaba] en la mayor demanda por casas derivada de la mayor disponibilidad crediticia otorgada por la banca, dada la menor tasa de interés establecida por la Reserva Federal para

<sup>29</sup> De cierta manera se emplearán los títulos de los diez aspectos del capítulo doce de B. Mandelbrot y L. Hudson (2006).

reactivar la economía (en el período 2001-2003), como por los mayores títulos con respaldo en las hipotecas residenciales que eran adquiridos por la banca internacional (Huerta, 2010, p.39).

Llegado a un punto la tendencia aparentemente estable cambia; el mercado entra en un régimen de comportamiento anómalo que a su vez estará presentando períodos transitorios de calma y agitación (turbulencia). En ocasiones el quiebre de tendencia se presenta en forma de crisis o regularmente como períodos de inestabilidad. El boom inmobiliario se fue transformando en una burbuja especulativa que estalló en 2008, producto del incremento de la tasa de interés por parte de la Reserva Federal, propiciando la insolvencia de los pagos por hipotecas a la vez que afectaba a la economía real “porque gran parte de sus activos eran títulos financieros que se desvaloraron, como por la restricción crediticia; lo que repercutió a su vez en la caída de la inversión, del consumo, y por tanto, de sus ingresos” (Huerta, 2010, pp.16-17), y de ser una crisis del sector inmobiliario también pasó a formar parte del sector financiero debido a que los especuladores habían creado títulos coletarizados que consistían en vender deuda con la esperanza de tener mayores rendimientos en el futuro.

Una vez que el mercado atravesó por su período de agitación éste regresa a su aparente estado de calma (flujo laminar) completando así de manera sistemática el proceso de intermitencia de la turbulencia, metafóricamente hablando. A pesar de que han transcurrido alrededor de cinco años (2008-2013) desde que se declarara que el mundo atraviesa una crisis, producto de la crisis hipotecaria de Estados Unidos, se tiene que en este país existe un optimismo para que los precios de las casas empiecen a crecer. De cierta manera el mercado inmobiliario no crece pero sí se mantiene, aunque en los peores niveles históricos, estable (Vallejo, en prensa). Cabe mencionar que en su curso laminar es posible apreciar, aunque a menor escala, el mismo mecanismo de intermitencia así que el proceso que esté generando dicho comportamiento tiene la estructura de un fractal autoafín o bien la estructura del mercado es multifractal (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.129-132), de esta manera sólo se podrá decir, de manera parcial, que el mecanismo que propicia que un mercado sea turbulento está constituido por efectos exógenos (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.237-238), por ejemplo:

Podemos imaginar una reacción en cadena. El clima afecta a las cosechas, y éstas afectan a los precios. La distribución de los recursos naturales en el globo –petróleo, oro y otros minerales– afecta al suministro y, por ende, a los precios. Lo mismo vale para los negocios: el volumen de las firmas en una industria, desde un colosal Microsoft hasta una legión de pequeñas casas de software, también sigue una pauta escalante. Así, la concentración industrial afecta al beneficio y, por ende, a los precios de las acciones. Esto es poco satisfactorio para un análisis económico riguroso de causa y efecto. Pero si necesitamos una

<<historia>> para explicar los datos, ésta es al menos parcialmente plausible. El escalamiento entra en el sistema desde los fundamentos de las pautas meteorológicas, la distribución de recursos y la organización industrial. El escalamiento termina, y realimenta el sistema, en el mercado (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.238).

Por último, la dependencia a largo plazo, en el sentido de B. Mandelbrot<sup>30</sup>, también estará caracterizando a un mercado turbulento pues en este aspecto confluyen una gran variedad de factores; económicos, psicológicos, políticos, sociales, etc., que son difícilmente visibles o cuantificables pero que una vez aglomerados en la dependencia actuarán de tal forma que todo lo acontecido en el pasado seguirá influyendo en el presente y en el futuro teniendo una dispersión semejante a la desintegración en progresión geométrica de una sustancia radiactiva pura (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.195-197), así pues, un precio que esté fluctuando más allá de lo que dicta la ley de la raíz cuadrada del tiempo<sup>31</sup> seguirá una tendencia que continuará al siguiente día y en los días posteriores por lo que a largo plazo el precio se habrá apartado considerablemente de su punto de partida (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.198).

## II) Mercados sumamente arriesgados.

En un mercado turbulento los precios tienden a concentrar grandes cambios y a ser discontinuos, estadísticamente hablando su distribución se aparta de la normal, así que cualquier valoración del riesgo y el rendimiento usando los modelos estándar será errónea o estará subestimando las probabilidades de ruina (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.237). Las personas con posibilidad de invertir intuitivamente saben que los mercados son arriesgados por eso es que prefieren mantener la mayor parte de sus inversiones en activos seguros. Por ejemplo, en un estudio realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico se puede observar (ver cuadro 3.A) que las familias japonesas poseen un 53% de sus activos en forma líquida y un 8% en forma de participaciones, en cambio las familias europeas<sup>32</sup> prefieren mantener un 28% en dinero y sólo un 13% en participaciones, sin embargo las familias estadounidenses mantienen un 13% en dinero y un 33% en acciones (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.240-241). Aunque la aversión al riesgo en cada uno de los tres casos varía, lo que sí es evidente es que las familias se

---

<sup>30</sup> Granger en 1966 publica su trabajo sobre correlaciones a largo plazo entre variables (cointegración) pero son en cierto sentido finitas, B. Mandelbrot propone correlaciones infinitas o mejor dicho llama a esto un fenómeno de memoria infinita o bien dependencia a largo plazo (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.202).

<sup>31</sup> Esta ley proviene del modelo de paseo aleatorio de Bachelier, consiste en que si los incrementos diarios de  $Z(t)$  son gaussianos con desviación estándar  $\sigma(1)$  entonces la desviación estándar del cambio de  $Z(t)$  sobre  $T$  días es igual a  $\sigma(T) = T^{1/2}\sigma(1)$  (B. Mandelbrot, 1963, p.398). O bien, en el sentido físico del movimiento browniano, esto quiere decir que la distancia que cubre una partícula incrementa con la raíz cuadrada del tiempo (Peters, 1994, p.55).

<sup>32</sup> En este estudio sólo se consideraron como países representativos de Europa a Francia, Alemania, Italia, Los Países Bajos, España y Reino Unido (Babeau & Sbrana, 2002, p.5).

preocupan más por el riesgo que hay en el mercado que por los rendimientos promedio (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.241).

<b>Cuadro 3.A Composition of household financial wealth as at the end of 2000 Japan/Europe/ United States (in%)</b>			
	<b>Japan</b>	<b>Europe (6)</b>	<b>US</b>
Currency and deposits	11.4	10.1	1.1
Time deposits, saving deposits and others	41.4	17.3	9.9
Money markets funds	0.2	0.8	3.1
Securities other than shares	4.5	6.8	6.4
Shares and other equity	8.3	21.3	33.1
Mutual funds	2.4	9.5	12.9
Life insurance	17.7	17.2	7.1
Pension funds	9.7	10.7	23.8
Others	4.4	6.2	2.5
Fuente: Babeau & Sbrano, 2002, p.15			

### **III) Relevancia del tiempo mercantil.**

B. Mandelbrot introduce el tiempo como una variable de gran importancia que permite comprender el comportamiento de los mercados pues son en períodos breves donde un inversionista puede ganar o perder grandes fortunas. El tiempo del reloj es distorsionado por el mercado en el llamado tiempo mercantil a través de un proceso multifractal<sup>33</sup> conocido como cascada multiplicativa; cuando el tiempo del reloj avanza, el tiempo mercantil puede ir más rápido o más lento dependiendo del volumen de negociaciones que se den, una vez sucedido esto el resultado es un gráfico de precios donde el rol del proceso multifractal es el de describir “el agrupamiento de las variaciones de precios en zonas de gran convulsión y en áreas de evolución lenta” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.217), esto debido a que los precios tienden a presentar colas anchas y sacudidas de precios (Efecto Noé) así como un efecto de memoria a largo plazo o dependencia a largo plazo (Efecto José) (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.216-222).

La importancia del tiempo mercantil se puede observar si se analiza un acontecimiento histórico llamado "la tormenta monetaria de 1992-93". Las reformas neoliberales de los 80, que en cierto sentido fueron la base para la creación del sistema monetario europeo (SME), propiciaron que en 1992-93 se dieran masivos ataques especulativos a las monedas de los países miembros, siendo el más destacado el realizado por George Soros en las dos turbulentas semanas de septiembre de 1992, muy especialmente el día 16 llamado el miércoles negro. Este día George Soros apostó sobre la Libra Esterlina y ganó unos 2000

<sup>33</sup> Un multifractal “tiene más de una razón escalante en el mismo objeto, de manera que unas partes de éste se reducen rápida y otras lentamente” (B. Mandelbrot, 2006, p.217).

millones de dólares; en un breve lapso se ganó una gran fortuna mientras el mercado exhibía variaciones en los precios (pues los países comenzaron a subir sus tasas de interés) y sin poder predecirse, en un sólo día se dio un cambio abrupto en la tendencia de éste (Barea José y Barea Maite, 1998, pp.26-30, B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.244).

#### **IV) Los precios son discontinuos.**

Los modelos de gestión de riesgo asumen<sup>34</sup> que los precios tienen cambios continuos y con base en ello las fórmulas que proponen tienen validez. Quienes suelen emplear estos modelos realizan ciertos tratamientos a las series de precios pues la mayor parte de las veces estas no pasan las pruebas de normalidad o de aleatoriedad, aspecto de suma importancia para el funcionamiento de estos. Entre los tratamientos que con frecuencia son usados y que se pueden encontrar en B. Mandelbrot (2009) está el de la “desestimación de los extremos estadísticos no representativos” (p.470), el cual distingue entre variaciones de precio ordinarias y grandes, siendo las primeras consideradas aleatorias y gaussianas mientras que las segundas son consideradas como no estocásticas por lo que son eliminadas. Otro tratamiento consiste en mezclar poblaciones aleatorias: “si  $X$  no es gaussiana, a lo mejor es una mezcla de dos, tres o más variables gaussianas sí” (B. Mandelbrot, 2009, p.470). Un tercer tratamiento consiste en aplicar una transformación no lineal a la variable: “cuando  $X$  es positiva y enormemente no gaussiana, a lo mejor  $\arctg X$  pasa [la prueba]” (B. Mandelbrot, 2009, p.470), un cuarto tratamiento o procedimiento es asumir que el precio sigue un movimiento browniano a pesar que la varianza jamás se estabilice en un valor: varianza no constante (B. Mandelbrot, 2009, p.470).

El hecho de asumir que los cambios de precio sean continuos o que los precios sigan un movimiento browniano es un factor que limita el uso de los modelos de gestión de riesgo ya que si se compara la variación del cambio de precio con el comportamiento de un gas perfecto<sup>35</sup> se tiene que éste último “a medida que las moléculas colisionan e intercambian calor, sus billones de transacciones, infinitesimales a título individual, producen colectivamente una temperatura <<media>> genuina, sólo perturbada por gradientes suaves” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.246) mientras que el mecanismo implícito que genera los precios provoca que estos se disparen, caigan a cero o hagan cualquier cosa (el gran número de transacciones no tienden a crear precios medios, siguiendo una analogía con el gas perfecto), además de que implica conocer el presente así como tener una previsión del futuro basado en la tendencia bajista o alcista del mercado (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.246, B. Mandelbrot, 2009, p.468) así que “un fenómeno caracterizado

---

<sup>34</sup> Sólo se consideran los expuestos en el capítulo 1; estos son el modelo de paseo aleatorio de Bachelier, la Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME), la Teoría Moderna de la selección de Carteras (MPT), el Modelo de valoración del precio de los activos financieros (CAPM) y el Modelo Black-Scholes y hacen esta consideración en sus respectivos supuestos, enumerados en el trabajo por los incisos: iii), iii), ii) y i)

<sup>35</sup> Dada la gran utilidad de los métodos que han surgido en la mecánica clásica o newtoniana muchas ciencias han tendido a copiarlos, de esta manera la comparación resulta válida, siendo Bachelier el pionero en el aspecto de tal comparación.

por discontinuidades muy marcadas, [el comportamiento de los precios], no puede explicarse mediante un proceso continuo” (B. Mandelbrot, 2009, p.468), de esta manera la hipótesis de continuidad deja de ser válida para los precios ya que en la física clásica no existe un fenómeno similar a él del cual puedan copiarse las herramientas estadísticas o matemáticas para su tratamiento.

Por último, como los precios no suben gradualmente de centavo en centavo sino que lo hacen dando brincos, esto da cabida a que su distribución sea más amplia lo que impide el uso de la distribución normal o gaussiana, si aún se insiste en usar tal distribución sumando la aplicación de los tratamientos que se mencionaron, aunque existen otros que también se llevan a cabo, es lógico que cualquier estimación del riesgo y rendimiento es inválida o bien, se estaría subestimando el comportamiento real de la variable a estudiar (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.245-247).

## **V) La flexibilidad del tiempo en los mercados.**

Dado que el tiempo es distinto para cada inversor, una visión contraria a los supuestos de los modelos de gestión de riesgo que consideran que los inversores tienen el mismo horizonte temporal, cada escala de tiempo o cada período de tenencia de una acción o un bono tiene su propio nivel de riesgo; si a cada lapso corresponde un nivel diferente de riesgo se sabe que un negocio rápido (un lapso corto) es más susceptible de quiebra que uno pactado en un lapso más amplio.

La observación que hace el modelo fractal de mercado para el aspecto anterior es la de considerar que los mismos factores de riesgo y por ello las mismas fórmulas para evaluarlo son funcionales para cada escala de tiempo puesto que los precios son escalantes; es decir, estadísticamente hablando el riesgo de un día es semejante al riesgo de una semana, un mes o un año mientras que las variaciones de precios son escalantes con respecto al tiempo (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.248).

De lo anterior se considera el uso del adjetivo flexible para el tiempo ya que es el mercado quien actúa como distorsionador de él de la manera en que “cuanto más dramáticos son los cambios de precio, más se expande la escala del tiempo mercantil [,] cuanto más aburrido es el gráfico de precios, más despacio pasa el tiempo del mercado” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.249) o bien el tiempo se “encoge” cuando hay tensión y se “estira” cuando no hay actividad que pueda cambiar el curso de la tendencia del mercado (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.249).

## **VI) Los mercados funcionan igual en todas partes y épocas.**

Se conoce que los mercados, independientemente de las mercancías o bienes que se comercialicen, son considerados lugares, no necesariamente físicos, donde confluyen personas que tienen una necesidad y personas que pueden satisfacer esa necesidad, esta idea sencilla es la esencia del funcionamiento de cualquier mercado que ha estado presente en

cualquier análisis económico realizado desde que la economía pasó a ser una ciencia. Considerando esto se puede estar de acuerdo con que la actividad endógena (su esencia) es continua a pesar de que puedan o no existir factores exógenos que la alteren, dicha actividad también forma parte del proceso de configuración de los precios más no es la única ya que también se pueden considerar como factores de dicho proceso las noticias, las bancarrotas, los informes económicos, las guerras y los anuncios sobre las ganancias que se pueden obtener. Ésta puede ser una de las diversas razones por las cuales hay similitudes entre un mercado y otro, conclusión que da el análisis fractal de los mercados (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.250).

El análisis fractal nombra a esta similitud <<invarianza<sup>36</sup>>>: “una propiedad que permanece inmutable, con independencia de las transformaciones de los datos, la forma o el objeto de estudio” (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.251).

## **VII) Mercados inciertos y burbujas inevitables.**

Estas ideas se describen por dos efectos, el primero de ellos es el efecto Noé el cual contempla un síndrome de discontinuidad y de varianza no constante en los precios. Hay ciertos acontecimientos bursátiles que llegan de repente a los mercados y metafóricamente barren con ellos así que los sucesos más improbables son los más importantes, los saltos o discontinuidad de los precios se acumulan como si fuesen pequeños seísmos (acontecimientos legislativos fundamentales, crisis institucionales, medidas oficiales correctoras, transformaciones organizacionales, contagios difusivos masivos y polarizaciones sociales repentinas [Orléan, 1990, citado por Izquierdo, 1998, p.70]) hasta que de un momento a otro liberan su presión ocasionando las quiebras en los mercados.

El segundo es el llamado efecto José; los cambios de precio al no ser independientes como lo postula la moderna teoría económica provocan que, ocurrido un cambio importante en el precio éste dará lugar a otro cambio importante y a su vez este cambio actual puede ocasionar un cambio casi de la misma magnitud, es claro que estas pautas pueden no ser regulares o predecibles. Un acontecimiento que sea capaz de provocar un cambio considerable en la serie seguirá influyendo de manera indefinida en el comportamiento de ella pues “las correlaciones que les dan vida tardan demasiado tiempo en desaparecer”

---

<sup>36</sup> Citando a M. Lederman & T. Hill (2006) se halla que

Un sistema físico posee una simetría si cabe hacer en él un cambio tal que, tras dicho cambio, el sistema es exactamente el mismo que antes. Llamemos a ese cambio operación o transformación de simetría. Si un sistema continúa siendo el mismo tras someterlo a cierta transformación, decimos que el sistema es invariante respecto a esa transformación” (p.15).

Bajo esta idea, una invarianza es “la igualdad o constancia del sistema en cuanto a forma, apariencia, composición, disposición, etcétera” (M. Lederman & T. Hill, 2006, p.15). En el análisis de series de tiempo se tiene una forma de invarianza llamada estacionariedad, ésta consiste en asumir que un proceso estocástico  $\{X_t\}$  es en amplio sentido estacionario si  $E[X_t^2] < \infty$ ,  $E[X_t] = \mu_x \forall t$  y  $E[X_t X_u] = E[X_{t+h} X_{u+h}] \forall t, u, h$  (La Spada, J. Farmer & Lillo, 2008, p.2). Si se toma una submuestra del proceso ésta debe tener las propiedades mencionadas así que bajo esta lógica sería invariante con respecto cambios de escala.

(Izquierdo, 1998, p.73). Debido a esto, se deja de considerar que las variaciones diarias se deban solamente a la especulación mientras que es aceptado que los cambios ocurridos a largo plazo son producto de las leyes fundamentales implícitas de la economía. La variable tiempo en sus acepciones día, mes, trimestre, etc., puede dejar de emplearse ya que se preferirá hablar sólo de dependencia de largo plazo (Izquierdo, 1998, n.15, p.72, pp.69-73, B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.210, 252-253).

### **VIII) Mercados engañosos.**

Las tendencias o de cierta manera los ciclos que pudieran observarse mediante el uso de técnicas como las ondas de Elliott o de las habituales medias móviles son sólo el reflejo de la creencia colectiva de los analistas hacia observar patrones en las series que pudieran permitir sacar provecho de ellas. Bajo la idea de que los mercados son inherentemente inciertos, lo único cierto es que las series se pueden clasificar en dos tipos, las primeras serían las series persistentes que una vez iniciado el cambio del precio hacia magnitudes y direcciones diferentes seguirá una tendencia que se retroalimenta o bien se refuerza mutuamente, y el otro tipo de series son las antipersistentes, siendo el caso contrario lo que hacen es contrarrestar la tendencia (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.254).

### **IX) Lo más viable es estimar la posible volatilidad futura.**

Si los cambios de precio tienen la peculiaridad de estar dependiendo de cambios pasados entonces se puede decir que los precios pueden exhibir una dependencia sin correlación (ver punto 3.1.3.1). Siendo una paradoja cabe aclarar que hay una distinción entre los cambios y el sentido de los cambios en el precio; si el cambio del precio actual no se relaciona con el inmediato anterior eso no descarta el hecho de que los cambios absolutos sí sean dependientes aunque es muy probable que no se sepa hacia dónde iría el siguiente cambio, habiendo sucedido esto, la correlación desaparece a pesar de que exista dependencia, por otra parte, los cambios de gran magnitud tienden a ir seguidos de cambios de la misma envergadura, lo mismo pasa con los cambios de menor magnitud, en este sentido la volatilidad se agrupa en forma de rachas.

Con base en lo anterior, considerando además que la predicción de la volatilidad no puede ser puntual, se podrá estimar la magnitud y la tendencia de ella aunque también será posible medir su probabilidad de éxito. Lo deseable será invertir en aquellos mercados donde la previsión de la volatilidad sea baja o bien donde se minimice el riesgo, considerando su evaluación con las herramientas estadísticas que serán descritas a partir del punto 3.1 (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.254, 256-257).

### **X) La idea de “valor” tiene límites.**

Esta es una cuestión muy debatida en el campo de la economía política pero de cierta manera ayuda a comprender que no es el valor en sí mismo lo que hace ganar o perder

pequeñas o grandes fortunas a todo agente que especula sino que es la diferencia que hay entre los precios y el arbitraje.

### **3.1. Estadística y probabilidad para variables aleatorias no gaussianas.**

El hecho de afirmar que la ley normal no se cumple en la mayoría de los fenómenos que se observan y se estudian implica que se necesitan ampliar las herramientas habidas en la teoría de probabilidades con la finalidad de que los resultados sean más consistentes. Resulta cómodo pensar que con simples fórmulas uno puede recrear un fenómeno infinidad de veces teniendo la certeza de que los resultados serán siempre los predichos por tales fórmulas pero desafortunadamente muchas de las predicciones en el ámbito económico conllevan factores de incertidumbre que pueden hacer o no cumplir dichos resultados.

Desde el punto de vista de la eficacia, se observa que es más práctico asumir que cualquier fenómeno tiene un comportamiento normal y con base en ello proceder a aplicar cualquiera de las herramientas habidas según sea lo que se concierne pero pocas veces se considera lo perjudicial que esto resulta ser, por eso, a partir de este punto se plantearán las herramientas para tratar fenómenos con distribución distinta a la normal.

#### **3.1.1. Distribuciones estables<sup>37</sup>.**

A este tipo de distribución se le puede encontrar en los textos con diferentes nombres tales como distribución  $\alpha$ -estable, de Lévy-Mandelbrot, Pareto estable, Pareto-Lévy, etc., pero se considera emplear el nombre L-estable o simplemente estable para respetar la exposición de B. Mandelbrot y L. Hudson (2006). Fue estudiada por Paul Lévy y Andrei N. Kolmogorov en la década de los 20-30 al observar que el comportamiento en el límite para la suma de variables aleatorias independientes no necesariamente es la de una ley normal (Izquierdo, 1998, n.10, p.66, Borak, Wolfgang & Weron, 2005-008, p.2), más aún si se trata de una suma de variables aleatorias de colas gruesas, como por ejemplo variables que tienen una distribución de Cauchy. Gnendeko junto con Kolmogorov en 1954 (Roehner & Winiwarter, 1985, p.467) establecieron que este comportamiento conduce a que la distribución estable sea el único límite posible no gaussiano para la suma de variables aleatorias (B. Mandelbrot, 1997, pp.86-87), por ello esta distribución es una generalización de la ley normal así que sigue conservando las operaciones o transformaciones lineales de ésta aunque cabe resaltar que el segundo momento o la varianza no es constante (Konstantopoulos, 2008, p.2, B. Mandelbrot, 1997, pp.86-87). Debido a que el Teorema del Límite Central (TLC) clásico no aborda este límite, es necesario introducir la generalización de dicho teorema el cual establece lo siguiente:

---

<sup>37</sup> Para este punto se omitirán las demostraciones que parecieran necesarias puesto que éstas no son el cometido del trabajo, únicamente se expondrán los resultados que se necesiten para llegar a los objetivos planteados.

Teorema del Límite Central Generalizado (TLCG). Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias distribuidas idénticamente e independientes con función de distribución  $F_X(x)$  que satisface las condiciones<sup>38</sup>

$$1 - F_X(x) \sim cs^{-\mu}, x \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

$$F_X(x) \sim d|x|^{-\mu}, x \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Con  $\mu > 0$ . Entonces existe una secuencia  $a_n$  y  $b_n > 0$  tal que la distribución de la suma normalizada y centrada

$$Z_n = \frac{1}{b_n} \left( \sum_{i=1}^n X_i - a_n \right) \quad (1.3)$$

Converge lentamente a la distribución estable con parámetros

$$a = \begin{cases} \mu, & \mu \leq 2 \\ 2, & \mu > 2 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\beta = \frac{c - d}{c + d} \quad (1.5)$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$F_{Z_n}(x) \Rightarrow G^A(x; a, \beta) \quad (1.6)$$

(V. Uchaikin & M. Zolotarev, 1999, p.62).

Además del TLCG hay otro aspecto que debe considerarse para poder comenzar a describir una distribución estable, ésta es la propiedad de estabilidad. Al igual que el TLC, la generalización de la propiedad de estabilidad de la ley normal da paso al desarrollo de las características más importantes para el trabajo sobre dicha distribución.

Dicha propiedad dice que la suma de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente está también distribuida por la ley normal (V. Uchaikin & M. Zolotarev, 1999, p.64); es decir, sean  $G'$  y  $G''$  dos variables aleatorias gaussianas e independientes, de media cero y varianza igual a  $\sigma'^2$  y  $\sigma''^2$  respectivamente, entonces la suma  $G' + G''$

---

<sup>38</sup> La condición 1.1 y 1.2 con  $\mu < 2$  indican que  $F_X(x)$  tiene una distribución del tipo de ley de potencia, para la cual el teorema del límite central ya no se sostiene (V. Uchaikin & M. Zolotarev, 1999, p.62). La función de distribución de una variable que se distribuye de acuerdo a una ley de potencia es de la forma  $p(x) = Cx^{-a}$ , donde  $p(x)$  es la probabilidad de que la variable tome un valor de  $x$ ,  $a$  es el exponente de la distribución,  $x$  la variable a analizar y  $C$  una constante que depende del tipo de evento (Aljure Jiménez y Andrés Gallego, 2010, p.60). Al aplicar logaritmos a la función de distribución se obtiene el término  $-a$ , siendo el factor de ley de potencia o de escalamiento fractal (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.163), que en una gráfica doble logarítmica de la variable representa la pendiente de la curva, así que este término indica la frecuencia con la que una variable puede tomar valores poco probables (baja frecuencia) y comunes (alta frecuencia).

también es una variable gaussiana de varianza igual a  $\sigma'^2 + \sigma''^2$  (B. Mandelbrot, 1963, p.396). Considerando el caso de la normal reducida se tiene que ésta es la solución a la ecuación

$$s'U + s''U = sU (S)$$

Donde  $s$  es una función de  $s'$  y  $s''$  dada por la relación auxiliar

$$s^2 = s'^2 + s''^2 (A_2)$$

(B. Mandelbrot, 1963, p.396).

Al analizar lo anterior se observa que para el caso de las variables normales las respectivas desviaciones estándar de la ecuación (S) juegan el papel de simples factores de escala. Ahora bien, cuando se trata de variables de cualquier otro tipo o diferentes a la normal, la ecuación (S) posee muchas otras soluciones (B. Mandelbrot, 1963, p.396). Estas múltiples soluciones sólo las pueden satisfacer variables que tienen una distribución común<sup>39</sup> y que su suma sea estable bajo adición, o sean invariantes bajo cambio de escala (B. Mandelbrot, 1997, p.278); es decir, la solución está dada por variables aleatorias estables  $U$ .

Si  $U'$  y  $U''$  son dos variables aleatorias que tienen una distribución común, entonces la suma  $U' + U''$  también sigue la misma distribución; es decir, para cualesquiera  $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1, b_2$  reales se encontrarán  $a > 0$  y  $b$  (Medkov & Kaláshnik, 1981, p.142) tales que:

$$(a_1U + b_1) + (a_2U + b_2) = aU + b (1.7)$$

(B. Mandelbrot, 1997, p.278)

Esto indica que dichas distribuciones únicamente difieren en parámetros de escala y localización;  $a > 0$  y  $b$  respectivamente (Feller, 1996, p.205).

### 3.1.1.1. Función característica de la distribución L-estable.

Siguiendo los resultados de Medkov & Kaláshnik (1981) se encuentra el siguiente teorema.

Teorema. Para que la función de distribución  $F_X(x)$  sea estable, es necesario y suficiente que el logaritmo de su función característica  $\varphi(t)$  tenga la forma

$$\log\varphi(t) = i\delta t - \gamma|t|^a \left[ 1 + i\beta \left( \frac{t}{|t|} \right) \omega(t, a) \right] (1.8)$$

(B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.304, Medkov & Kaláshnik, 1981, p.143)

---

<sup>39</sup> Para expresar, de manera abreviada, que dos variables tienen la misma distribución se usará la expresión  $U \stackrel{d}{=} V$ , que se puede hallar en Feller (1996, p.205).

Con

$$\omega(t, a) = \begin{cases} \tan \frac{\pi a}{2}, & \text{si } a \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln|t|, & \text{si } a = 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

(Medkov & Kaláshnik, 1981, p.143)

Y

$-1 \leq \beta \leq 1, 0 < a \leq 2, \gamma > 0$  (B. Mandelbrot & M. Taylor, 1967, p.1058)

El parámetro más importante es  $a$  (también llamado exponente característico de la ley estable), porque permitirá corroborar la hipótesis sobre si se acepta que se tiene o una distribución gaussiana o una estable pues si  $a = 2$  estrictamente se está manipulando una variable con distribución normal. Otra característica de este parámetro es que determina el grosor de las colas; es decir, determina la probabilidad total contenida en ellas con la particularidad de que si está en el intervalo  $0 < a < 2$  las colas son más gruesas comparadas con las de la distribución normal así que la probabilidad total contenida en las colas se irá incrementando cuando  $a$  se aleja de 2 hacia 0. Cuando  $a = 2$  la media y varianza existen y son finitos, cuando  $1 < a < 2$  la media existe y es finita mientras que la varianza no se establece en algún valor (característica de la ley estable) y por último si  $a = 1$  el parámetro  $\beta$  desaparece o bien es cero y se encuentra que con estos valores se está manipulando una variable que tiene distribución de Cauchy (Fama, 1963, pp.421-422, B. Mandelbrot, 1963, p.397, B. Mandelbrot & M. Taylor, 1967, p.1058).

El parámetro  $\beta$  es un índice de asimetría, si  $\beta = 0$  la distribución es simétrica, si  $\beta > 0$  la distribución está sesgada hacia la derecha y el grado de esta asimetría incrementa en el intervalo  $0 < \beta \leq 1$  cuando  $\beta$  se aproxima a 1 y por el contrario, cuando  $\beta < 0$  la distribución está sesgada hacia la izquierda a la vez que este sesgo se incrementa en el intervalo  $-1 \leq \beta < 0$  cuando  $\beta$  se aproxima a  $-1$  (Fama, 1963, pp.421-422, B. Mandelbrot, 1963, p.397, B. Mandelbrot & M. Taylor, 1967, p.1058).

El parámetro  $\gamma$  es sólo un factor de escala mientras que  $\delta$  es un parámetro de localización. Si  $1 < a \leq 2$  entonces  $\delta$  será la media o la esperanza de la distribución, si  $\beta = 0$  entonces  $\delta$  es el valor de la mediana o moda y por último  $\delta$  no tiene una interpretación obvia cuando  $0 < a < 1$  con  $\beta \neq 0$  (Fama, 1963, pp.421-422, B. Mandelbrot, 1963, p.397, B. Mandelbrot & M. Taylor, 1967, p.1058).

Para finalizar, B. Mandelbrot (1963) hace una observación con respecto a los parámetros  $a$  y  $\beta$  ya que juntos determinan el tipo de distribución de la variable aleatoria estable, dice que ésta puede ser llamada una variable aleatoria estable reducida si  $\gamma = 1$  y  $\delta = 0$  (p.397).

### 3.1.2 Movimiento browniano fraccional.

Cabe señalar que el movimiento browniano fraccional es una generalización del movimiento browniano (B. Mandelbrot, 2009, p.351) por lo que se considera de interés presentarlo ya que además está relacionado con un parámetro que es relevante para el análisis fractal, llamado exponente de Hurst. Este movimiento también cuenta con la característica de poder representar una variable de varianza no estable (B. Mandelbrot, 1972, p.262).

Como un movimiento browniano fraccional  $B_H(t)$  es un proceso gaussiano (B. Mandelbrot & R. Wallis, 1969c, p.329), éste puede ser representado por las propiedades de su media y covarianza (B. Mandelbrot & R. Wallis, 1969a, p.259) así que siguiendo los resultados de Falconer (1990) se dice que  $B_H(t)$  es un proceso aleatorio  $B_H: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  en algún espacio de probabilidad de tal manera que:

- i) Con probabilidad 1,  $B_H(t)$  es continuo y  $B_H(0) = 0$
- ii) Para cualquier  $\tau \geq 0$  y  $h > 0$  el incremento  $B_H(\tau + h) - B_H(\tau)$  tiene la distribución normal con media cero y varianza  $h^{2H}$ , así que

$$P(B_H(\tau + h) - B_H(\tau) \leq x) = (2\pi)^{-1/2} h^{-H} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2h^{2H}) du$$

**Observación.** Sólo para  $0 < H < 1$  el proceso existe y satisface i y ii. Cuando  $H = \frac{1}{2}$  los incrementos  $B_H(\tau + h) - B_H(\tau)$  son estacionarios; es decir, su distribución de probabilidad es independiente de  $\tau$ , pues se está en el caso clásico del movimiento browniano. Para los demás valores del intervalo esto no se cumple pues  $E((B_H(\tau + h) - B_H(\tau))^2) = h^{2H}$  (p.246). Además, comparte la característica del movimiento browniano de tener trayectoria muestral continua (Calvet and Fisher, 2008, p.84).

Con respecto a la función de autocovarianza se tiene que  $C_H(\tau, h) = E(B_H(\tau) \cdot (B_H(\tau + h) - B_H(\tau))) = \frac{1}{2}[(\tau + h)^{2H} - \tau^{2H} - h^{2H}]$ . Como las autocovarianzas sólo dependen del incremento más no del tiempo se podrá escribir la función de autocovarianza como  $C_H(h) = \frac{1}{2}[|h + 1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h - 1|^{2H}]$  para  $|h| \geq 1$ , además para  $h = 0$  se tiene  $C_H(0) = 1$  que es un requisito para la correlación (B. Mandelbrot, 1972, p.262, Diebold, 1999, pp.108-109)

Para  $|h| \geq 1$  hay tres casos en los que  $C_H(h)$  tiene comportamientos diferentes. El primero es el ya conocido ruido blanco con  $H = 0.5$  en donde  $C_H(h) = 0$ , lo que indica que los valores de  $B_H(t)$  son independientes, el segundo caso es para  $H > 1/2$  donde los incrementos o los valores de  $B_H(t)$  tienden a ser del mismo signo y la tendencia que pudo seguir  $B_H(t)$  en el pasado seguirá en el futuro así que se dice que es persistente, por ende  $H$  medirá el grado de la persistencia; dicho esto en otros términos, se da la existencia de una

correlación<sup>40</sup> positiva  $C_H(h) > 0$  entre los incrementos del pasado con los incrementos del futuro que incrementa de 0 a 1 cuando  $H$  incrementa de 0.5 a 1. El tercer y último caso es para  $H < 1/2$  que indica que los incrementos tienden a ser de signos opuestos por lo que la tendencia seguida en el pasado de  $B_H(t)$  se revierte y se dice que es antipersistente, que sería la tendencia a regresar constantemente al lugar de procedencia, en otras palabras, la correlación entre los incrementos pasados y futuros es negativa  $C_H(h) < 0$  y decrece de 0 a  $-0.5$  cuando  $H$  decrece de 0.5 a 0 ó lo que es lo mismo; grandes valores positivos tienden a ser seguidos por grandes valores negativos y vice versa (Falconer, 1990, p.246, B. Mandelbrot, 2009, pp.355-359, B. Mandelbrot, 1969a, p.298, B. Mandelbrot, 1972, pp.262-263).

### 3.1.3. Efecto Noé y José.

Estos efectos, nombrados así por B. Mandelbrot, se presentan en el movimiento browniano fraccional cuando  $H \neq 0.5$ ; es decir, cuando la correlación entre los incrementos o es positiva o negativa pero nunca cero como en el caso del movimiento browniano.

En un análisis estadístico sobre la variable aleatoria a estudiar se puede afirmar que ella presenta uno o ambos efectos cuando su distribución es leptocúrtica (B. Mandelbrot, 1972, p.263), cuando en su boxplot hay outliers (B. Mandelbrot, 1969d, p.84), cuando su varianza no es constante  $EX^2[t] = \infty$  (B. Mandelbrot, 1972, p.267), cuando al graficarla se observan cuasi ciclos o persistencia o tendencias, siendo éstas no periódicas a la vez que su duración es desigual (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.210, B. Mandelbrot, 1969d, p.85, Diebold, 1999, p.106, Nawrocki, 1995, p.2), o bien cuando tiene una memoria de largo plazo o dependencia de largo plazo<sup>41</sup> definida en términos de la covarianza a través de la función de autocorrelación, entendiéndolo el largo plazo como la longitud total disponible de la serie (B. Mandelbrot, 1972, pp.260, 264-265). En sí, el efecto Noé se refiere a los cambios abruptos o discontinuidades presentados en la variable aleatoria mientras que el efecto José hace referencia a la presencia de tendencias en ella, más precisamente estos efectos son visibles en series de tiempo económicas e hidrológicas, entre otras (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.211).

---

<sup>40</sup> Para esta correlación se define lo siguiente. El promedio pasado sobre  $P$  períodos es  $(1/P) \sum_{u=1}^0 X(u)$ , el promedio futuro sobre  $F$  períodos es  $(1/F) \sum_{u=1}^F X(u)$  y la correlación entre el pasado y el futuro es  $\frac{(1+F/P)^{2H} - 1 - (F/P)^{2H}}{2(F/P)^H}$  (B. Mandelbrot, 1969a, pp.296-297).

<sup>41</sup> El efecto de memoria de largo plazo podría ser confundido con los resultados de un modelo autoregresivo de orden  $P$  ya que en estos modelos la variable endógena puede ser explicada por valores de ella misma en períodos pasados. Bajo la metodología de Box-Jenkins el orden autoregresivo puede ser estimado por lo que esto da un número finito de períodos pasados que están explicando a la variable endógena mientras que el efecto memoria es lo contrario; todo el período pasado de la serie sigue explicando indefinidamente a ella misma (B. Mandelbrot y R. Wallis, 1968, p.237).

### 3.1.3.1 Análisis de la función de autocorrelación.

Viendo ambos efectos en términos de la función de autocorrelación se encuentra que es subestimado el grado de dependencia entre  $y_t$  e  $y_{t-\tau}$  de la variable aleatoria cuando el efecto Noé es sobresaliente. Como habitualmente se aplican tratamientos a la *v. a.* (variable aleatoria) para hacerla coincidir con el comportamiento de una *v. a.* normal debido a que las propiedades poblacionales de un ruido blanco son la base sobre la cual se construyen los procesos de serie de tiempo (Diebold, 1999, p.112), además de que es muy extendido el uso de la función de autocorrelación muestral para evaluar si las autocorrelaciones  $\frac{cov(y_t, y_{t-\tau})}{var(y_t)}$  de la *v. a.* están dentro del intervalo de confianza de dos errores estándar  $\pm 2/\sqrt{T}$  para un 95% de confianza (Diebold, 1999, pp.109-122), entonces esto implica suponer que la distribución de las autocorrelaciones muestrales o el correlograma con grandes muestras es  $\hat{\rho}(\tau) \sim N\left(0, \frac{1}{T}\right)$ , una distribución normal de media cero y varianza  $1/T$ , pero lo más importante es que la desviación estándar seguirá la ley de la raíz cuadrada del tiempo; es decir,  $\frac{1}{\sqrt{T}}$  ó  $T^{-1/2}$  (B. Mandelbrot, 1972, pp.263-264), pero si no se aplica transformación alguna que altere la distribución de la *v. a.*; es decir, si se trabaja con una distribución estable con exponente característico en el intervalo  $1 < a < 2$ , entonces la covarianza de  $y_t$  e  $y_{t-\tau}$  será del orden de  $T^{-1/a}$  y la varianza será del orden de  $T^{-2/a}$ , de esto se observa que las bandas de confianza ya no son aplicables por el hecho de que pueden indicar un nivel de significancia ilógicamente alto, además, en vista de que no se trabaja con un ruido blanco se necesitaría establecer para cada *v. a.* estable normas de significancia estadística lo cual es en cierto sentido imposible (B. Mandelbrot, 1972, pp.263-264).

Como en el caso anterior, cuando la *v. a.* se distingue por presentar marcadamente el efecto José también es subestimada la dependencia. Considerese las siguientes definiciones para el ruido blanco:

- a. Función de autocovarianza

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= E(y_t, y_{t-\tau}) \\ \gamma(0) &= var(y_t)\end{aligned}$$

Para  $|\tau| = 0, 1, 2, \dots$

- b. Función de autocorrelación

$$\rho(\tau) = \gamma(\tau) / \gamma(0)$$

Para  $|\tau| = 0, 1, 2, \dots$

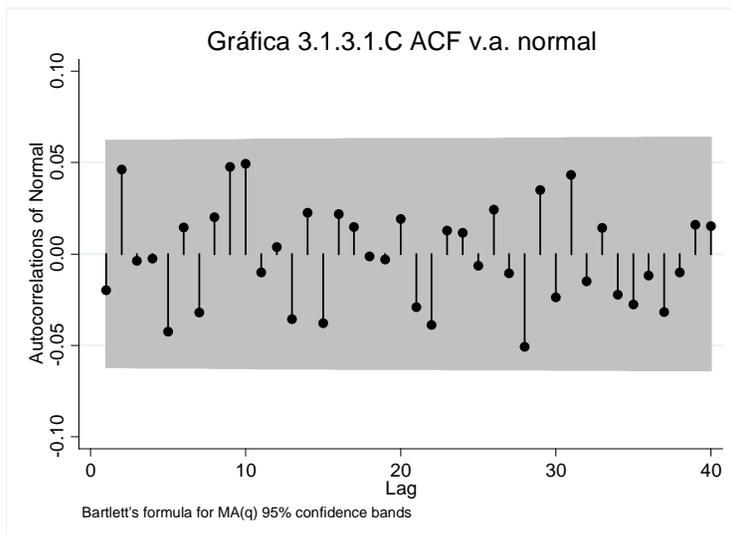
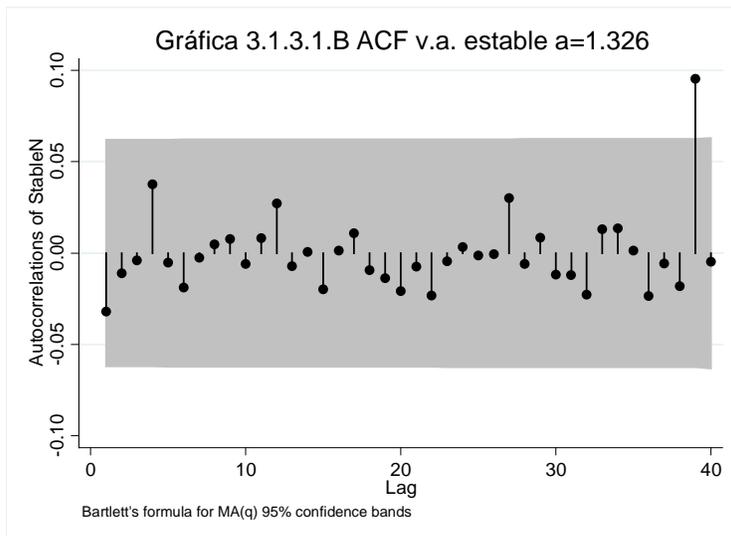
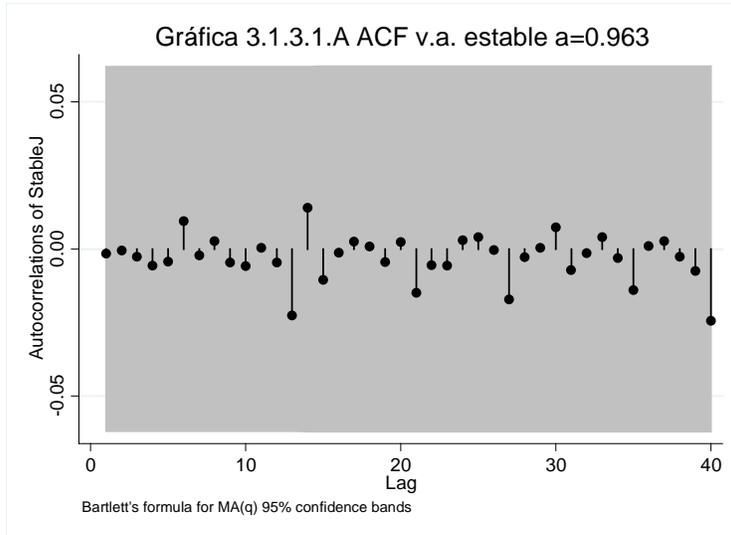
**Observación.** El valor máximo para  $\gamma(\tau)$  es  $\gamma(0)$  y el valor máximo para  $\rho(\tau)$  es 1 que resulta cuando  $\gamma(0)$  ó bien, para la función de autocovarianza  $\tau = 0$  y para la función de autocorrelación  $|\tau| = 1$  (Montenegro, 1989, p.119).

Ahora, a manera de ejemplo teórico, se define a  $M_H(t)$  como la función aleatoria de Gauss-Markov con función de autocorrelación  $[C_H(1)]^h = (2^{2H-1} - 1)^h$  para  $h \geq 0$  ( $h$  es el homólogo de  $\tau$ ) y se compara con la función de autocorrelación de un movimiento browniano fraccional  $B_H(t)$ , la cual es  $C_H(h) = \frac{1}{2}[|h+1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h-1|^{2H}]$ , como ambas funciones de autocorrelación coinciden con la observación que se hizo en el párrafo anterior; es decir,  $h=0$  y  $|h|=1$  entonces ambas funciones aleatorias parecen indistinguibles lo que induce a creer que ambas tienen incrementos independientes sobre los valores observados de  $M_H(t)$  y  $B_H(t)$ . Como  $\gamma(\tau)$  y  $\rho(\tau)$  tienden a cero para  $\tau$  grandes y si se dice que con base a la rapidez a la que lo hacen es la memoria del proceso o bien el grado en que el proceso olvida su pasado y si además el efecto José se caracteriza por tener memoria infinita entonces  $C_H(h)$  para  $H \neq 0.5$  no tiende a cero así que no se puede pensar que  $M_H(t)$  y  $B_H(t)$  sean idénticas, además de que no podrán ser llamadas markovianas<sup>42</sup> (Montenegro, 1989, p.119, B. Mandelbrot, 1972, pp.264-265).

Como ejemplo numérico, se va a simular una *v.a.* normal de media cero y desviación estándar  $1/\sqrt{1000}$  la cual será comparada con dos *v.a.* estables simétricas,  $\beta = 0$ , reducidas,  $\gamma = 1$  y  $\delta = 0$ , y de exponente característico  $a = 0.963$  y  $a = 1.326$  para  $t = 1000$ . Cada *v.a.* estable trata de representar al efecto José y al efecto Noé ( $a = 0.963$  y  $a = 1.326$  respectivamente). Si se observa la gráfica de las autocorrelaciones para ambas *v.a.* estables (gráfica 3.1.3.1.A y 3.1.3.1.B respectivamente) y se compara con la de la *v.a.* normal (gráfica 3.1.3.1.C), se nota que las autocorrelaciones están dentro del intervalo de confianza a un 95% (banda gris), salvo la autocorrelación en el rezago número 39 para la *v.a.* estable de Noé, como en el caso normal. Esto es lo que B. Mandelbrot (1972) llama trampas de la correlación serial (p.293); cuando se presentan cualquiera de los dos efectos.

---

<sup>42</sup> Un proceso markoviano es aquel donde el comportamiento futuro de la serie no depende de su pasado sino de su presente dado (Cáceres, 2003, p.67). Si se compara con la teoría de Bachelier, se tiene que “el precio sigue un proceso estocástico de martingala, en el sentido de que el mercado es <<perfecto>>: todo su pasado ha sido completamente descartado” (B. Mandelbrot, 2009, p.467).



En el ACF de la *v. a.* estable de José se observa el alto nivel de significancia estadística.

### 3.1.4. Análisis R/S.

Dada la limitación que plantea el uso del correlograma, como prueba para inferir estructuras de dependencia, B. Mandelbrot hubo expuesto que las series que exhiben ya sea el efecto Noé o el efecto José o ambos pueden ser analizadas con una prueba que permite estimar el grado de dependencia o el grado de la memoria (B. Mandelbrot, 1972, p.264). La ventaja de ésta es que es robusta (B. Mandelbrot & R. Wallis, 1969d, pp.484, 514) pues su aplicabilidad se extiende tanto a series que pueden cumplir con ser independientes y estar idénticamente distribuidas y por ello no tener memoria o contar con alguna estructura de dependencia, tanto como a series con algún grado de dependencia, ya sea fuerte o débil.

El exponente de interés, dada la información que proporciona y los conceptos que relaciona, es  $H$  pues el rango de valores que puede alcanzar indicará el grado de memoria, la presencia de cuas Ciclos o cuasitendencias o si se trata de una serie aleatoria (Armengol, J. Sabater, S. Vidal & Sabater, 1991, p.21). La prueba recibe el nombre de análisis R/S (B. Mandelbrot & R. Wallis, 1969d, pp.489-490) pues la idea general es valorar cómo la variabilidad que presenta una serie cambia al aumentar la longitud del periodo que es estudiado (Mahalingam, Murugesan & Jayapal, 2012, p.73). Para construirlo se deben considerar las siguientes ideas.

Sea  $X(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una serie de tiempo de longitud  $n$ , donde  $n$  es el total de observaciones disponibles. Si se divide la serie en submuestras,  $l_i$ , que no se solapan y que son contiguas, éstas tendrán una longitud  $d$ , así que  $1 \leq d \leq n$ . Para cada una de las submuestras se considera a  $R(d)_i$  como el rango, que es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de cada  $l_i$ . Si la serie fuese aleatoria, o bien *iid*, se espera que el rango varíe de acuerdo a la raíz cuadrada del tiempo,  $R(d)_i \propto \sqrt{d}$ , puesto que se trata del caso de una serie que sigue un movimiento browniano. Si se estandariza el rango a través de dividirlo por la desviación estándar  $S(d)_i$  de cada  $l_i$  se debe esperar que también sea proporcional a  $\sqrt{d}$  (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, p.305, B. Mandelbrot, 2009, pp.235-354, Peters, 1994, p.61).

Cuando la serie de tiempo presenta características de ser un movimiento browniano fraccional o bien ser de una distribución estable, la variación de las  $R(d)_i/S(d)_i$  no seguirá la ley de la raíz cuadrada del tiempo sino que será descrita por una ley potencial, donde el rango incrementa en proporción a una potencia del horizonte de tiempo disponible de la serie (Anderson & Noss, 2013, p.14). De esta manera las  $R(d)_i/S(d)_i$  seguirán la relación  $(R(d)_i/S(d)_i)_n = c \cdot n^H$ , donde el subíndice  $n$  para las  $R(d)_i/S(d)_i$  se refiere al valor del rango estandarizado de las  $l_i$ ,  $c$  es una constante,  $n$  el número de datos (Mahalingam & Raja, 2014, p.92) y  $H$  es el exponente de Hurst (E. Peters, 1994, p.56, E. Peters, 1991,

p.63), descrito en el punto anterior con la particularidad de estar en el intervalo  $[0, 1]$  de donde ya se conocen los tres posibles casos (B. Mandelbrot, 2009, pp.354, 361).

Al graficar las  $(R(d)_i/S(d)_i)_n$  versus  $n$  en una gráfica doble logarítmica se observará una línea recta, la pendiente de ésta será una aproximación de  $H$  así que para el caso más sencillo, una pendiente de 0.5 indicará que el proceso es aleatorio. Un proceso aleatorio implica que  $E[R(d)/S(d)]$  depende de  $d$  y no de  $n$  (B. Mandelbrot y R. Wallis, 1969e, pp.492-493), por lo tanto el proceso aleatorio cumple con la ley  $\sqrt{d}$  en su media si

$$\lim_{d \rightarrow \infty} d^{-0.5} E[R(d)/S(d)]$$

Existe; es decir, que está definido y que es positivo y finito, así que se llamará a esto R/S independiente. Esto no se cumple cuando

- a)  $d^{-0.5} E[R(d)/S(d)]$  oscila sin límite cuando  $d \rightarrow \infty$ , y
- b) Cuando esta cantidad tiende a cero o a infinito.

En otros casos, la pendiente de la gráfica que se realiza es diferente de 0.5 y se llamará a esto R/S dependiente (B. Mandelbrot y R. Wallis, 1969e, pp.492-496, 504). Cuando  $H < 0.5$ , el grado de antipersistencia crece cuando se acerca a cero, las series de tiempo que poseen esta característica son más volátiles debido a que son más susceptibles de reversiones a la media<sup>43</sup> (E. Peters, 1991, p.64); es decir, los poseedores de este tipo de títulos reaccionan con base en la desviación de su beneficio, comprando cuando el cambio relativo del precio es negativo (exhibiendo demanda positiva) o vendiendo si dicho cambio es positivo (se exhibe una demanda negativa) (Anderson & Noss, 2013, p.10), o bien, la estructura de correlación que posea la serie será negativa (Kristoufek, 2009, p.2). Cuando  $H > 0.5$ , el grado de persistencia se incrementa cuando está más próximo a ser la unidad (E. Peters, 1991, p.65), el efecto de memoria de largo plazo es más marcado pues las correlaciones son significativas positivas (Kristoufek, 2009, p.2) así que la información que se recibe en el mercado seguirá siendo descontada por períodos largos (E. Peters, 1991, p.100) y esto tendrá efectos en los cambios relativos del precio. En este caso, los cuasiciclos o cuasitendencias son más evidentes gráficamente por lo que Peters (1994) afirma que éstas pueden surgir de dos fuentes:

1. Pueden ser ciclos estadísticos, ejemplificados por el fenómeno de Hurst de la persistencia (correlaciones de largo plazo) y cambios abruptos de dirección;
2. Pueden ser el resultado de un sistema dinámico no lineal, o de caos determinístico.

(p.94)

---

<sup>43</sup> Dicho valor debe ser tal que cumpla con ser casi estable para el largo plazo, por ello es considerado como un valor de referencia (Rendón de la Torre y Morales Castro, 2012, p.9).

### 3.1.4.1. Procedimiento para el cálculo de $(R(d)_i/S(d)_i)_n$

Concomitante con lo anterior, se vuelve necesaria una explicación extendida en cuanto a la estimación de  $H$ , para ello se va a puntualizar el procedimiento de la siguiente manera.

- I. Se transforma la serie,  $X(t)$ , aplicando logaritmos. Se realiza la resta para que de esta manera se obtengan razones logarítmicas, dicha serie ahora tendrá una longitud  $m = n - 1$ :

$$Y = \log(x_{i+1}/x_i), i = 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$$

- II. Se divide a  $Y$  en  $\lambda$  subseries contiguas de longitud  $d$ , de tal manera que  $\lambda d = m$ ; es decir, que el total de submuestras posibles multiplicado por la longitud de tales dé la longitud de la serie de razones logarítmicas. Se etiqueta a tales submuestras con  $l_i, i = 1, 2, \dots, \lambda$ . Cada elemento en las  $l_i$  se etiquetan con  $L_{r,i}, r = 1, 2, \dots, d$ . Para cada  $l_i$  de longitud  $d$  se define el promedio como:

$$M_i = d^{-1} \sum_{r=1}^d L_{r,i}$$

- III. Se evalúan las desviaciones acumuladas,  $Z_{s,i}$ , del valor medio para cada submuestra  $l_i$ , esto está definido como:

$$Z_{s,i} = \sum_{r=1}^s (L_{r,i} - M_i); s = 1, 2, \dots, d$$

- IV. El rango,  $R(d)_i$ , de las  $l_i$  se define como el valor máximo menos el mínimo de las  $Z_{s,i}$ , de tal forma que:

$$R_{l_i} = \max(Z_{s,i}) - \min(Z_{s,i}), 1 \leq s \leq d$$

- V. Se calcula la desviación estándar para cada una de las  $l_i$ , ésta está definida como:

$$S_{l_i} = \left( d^{-1} \sum_{r=1}^d (L_{r,i} - M_i^2) \right)^{0.5}$$

- VI. Se estandariza el rango realizando la división  $R_{l_i}/S_{l_i}$ .
- VII. Por último, se evalúa el promedio del rango rescalado para todas las submuestras de longitud  $d$ , esta operación está definida como:

$$(R(d)_i/S(d)_i)_d = \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{\lambda} (R_{l_i}/S_{l_i})$$

(Kharel, 2010, p.4, Weron, 2002, p.112, Peters, 1994, pp.62-63).

Dado que  $(R(d)_i/S(d)_i)_n = c \cdot n^H$ , si se aplica logaritmos a ambos lados de la ecuación se tendrá la expresión

$$\log(R(d)_i/S(d)_i)_n = \log(c) + H\log(n)$$

Que tras realizar una regresión por mínimos cuadrados ordinarios, se obtendrá la estimación del exponente de Hurst y por consiguiente se podrá hacer el análisis de la serie (Anderson & Noss, 2013, p.20, Weron, 2002, p.112).

## Capítulo 4. Análisis fractal de Grupo Carso.

### 4. Grupo Carso, una red compleja.

La teoría de redes o grafos<sup>44</sup> permite analizar aquellos sistemas en los cuales las interacciones que hay entre sus componentes son relevantes ya que de éstas surgen propiedades importantes debido a la complejidad que presentan; es decir, a pesar de poder conocer cómo funciona cada componente de manera individual se puede llegar a un punto en el cual la predictibilidad del comportamiento en red es casi nula ya que el sistema tiene la capacidad de auto organización, por ello es denominado un sistema complejo (Leos Zamorategui, 2011, p.4). Un sistema de este tipo se puede caracterizar por:

- i) Estar compuesto de muchas partes que interactúan entre sí. Así que el adjetivo complejo no sólo indica lo intrincado del sistema sino que también denotará que la red tiene un gran número de componentes.
- ii) Cada componente tiene una función específica a la vez que posee una estructura interna propia.
- iii) Acontecimientos que incidan en sólo una parte del sistema alteran de manera no lineal a toda la red.
- iv) Presenta un comportamiento emergente; es decir, que tiene la capacidad de alcanzar una complejidad global a través de la integración de vínculos simples o bien que es capaz de auto organizarse.
- v) Habrá componentes que tendrán una preferencia por incorporarse a componentes con un alto grado de conectividad llamada así vinculación preferencial.

(Aldana, 2007, p.1, Gastón Beiró, 2008, p.4)

Las definiciones más importantes dentro de dicha teoría se resumen a continuación.

Una red es un conjunto de componentes, los cuales serán llamados vértices o en algunas ocasiones nodos, con conexiones entre ellos, llamados aristas (Newman, 2003, p.168). Los vértices o nodos son la unidad fundamental de la red y las aristas son líneas que conectan dos vértices (Newman, 2003, p.173). La manera de representar una red es mediante una gráfica que se denota por la letra  $\mathbb{G}$  y que consiste en un conjunto de vértices o nodos  $V =$

---

<sup>44</sup> En la literatura habida con respecto a este tema se llega a un consenso en el cual es indistinto usar la palabra grafo o gráfica o red (Newman, 2003, p.168).

$\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  y un conjunto de parejas ordenadas (aristas)  $\mathcal{E} = \{(v_i, v_j)\} \subset V \times V$ . De lo anterior se puede decir que una arista es dirigida si éste va en una sola dirección; es decir, únicamente se tiene la pareja ordenada  $(v_i, v_j)$  y para el caso contrario será no dirigida si para una pareja  $(v_i, v_j)$  existe la pareja  $(v_j, v_i)$ . Por último, se dice que dos aristas son adyacentes si tienen exactamente un vértice en común (Aldana, 2007, p.2, Newman, 2003, p.173, Leos Zamorategui, 2011, p.10).

Otras definiciones que también pueden contemplarse son el grado, el cual indica el número de aristas conectadas a un vértice y éste no necesariamente será igual al número de vértices adyacentes a un vértice ya que puede haber más de una arista entre cualesquiera dos vértices. Por otra parte, se tiene que la trayectoria geodésica se refiere a la trayectoria más corta a través de la red de un vértice a otro, para finalizar se tiene que el diámetro de una red es la longitud (en número de aristas) de la trayectoria geodésica más larga entre cualesquiera dos vértices (Newman, 2003, p.173).

En la teoría existen varios tipos de redes por lo que se centrará la atención en las redes llamadas pequeño mundo ya que éstas se encuentran entre las redes denominadas regulares y las llamadas aleatorias. Una red del tipo pequeño mundo presenta un coeficiente de agrupamiento alto; es decir, la proporción de triángulos existentes en la red en relación con la cantidad total de tercias que se pueden formar; ésta es calculada a través de la fórmula

$$C = \frac{3 \times \text{número de triángulos}}{\text{número de tripletes conectados}}$$

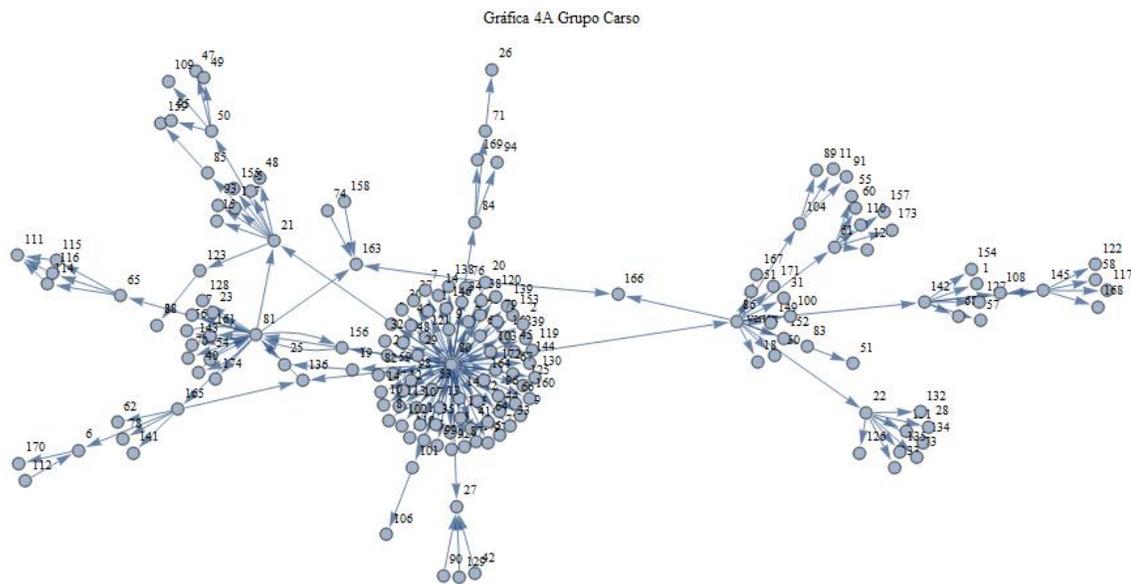
Ésta indica la probabilidad de que dos vecinos de un vértice o nodo sean entre ellos mismos vecinos; es decir, que sean entre ellos adyacentes (Leos Zamorategui, 2011, p.18). La segunda característica de este tipo de red es que tienen una distancia promedio pequeña entre sus vértices (Gastón Beiró, 2008, p.7), ésta es medida por la distancia media geodésica, la cual es definida como

$$\ell = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \sum_{i \geq j} d_{ij}$$

De donde  $d_{ij}$  es la distancia geodésica del vértice  $i$  al vértice  $j$  (Newman, 2003, p.181, Leos Zamorategui, 2011, p.22).

Aplicando algunas ideas antes expuestas a Grupo Carso se puede notar (gráfica 4.A) lo siguiente:

- i) Los nodos o vértices representan a cada una de las empresas que se pudieron encontrar en los reportes anuales del grupo en el período 2000-2012<sup>45</sup>.
- ii) Las aristas representan las conexiones que hay entre cada empresa, todas ellas son catalogadas como dirigidas ya que las subsidiarias de un grupo no pueden tener el control de éste pero éste sí puede tener el control de ellas. Por ejemplo, las subsidiarias no tienen acciones del grupo con derecho a voto pero el grupo sí tiene acciones de las subsidiarias con derecho a voto.
- iii) Se puede encontrar que más de dos aristas son adyacentes por tener un nodo en común: Grupo Carso.



Un análisis exhaustivo sobre la red del Grupo Carso da paso a un trabajo de investigación que está lejos de los objetivos que se han planteado pues la teoría de grafos es basta. La intención de este punto sólo fue mostrar a través de una gráfica lo intrincado que puede llegar a ser la relación de las empresas con el grupo, de la que se puede suponer que entre más penetración tenga el grupo en la economía mexicana más y más empresas pueden incorporarse o bien adquirir los productos o servicios de ella, y por ello seguir creciendo pues esa es la capacidad por la cual sobresalen los sistemas complejos.

#### 4.1. Análisis fractal.

El análisis comienza con pruebas que habitualmente se usan para conocer el comportamiento de los datos, entendiendo esto como el propósito de hallar su distribución empírica para proponer los parámetros que mejor la describan. Para esto, con base en las técnicas que se encuentran en la estadística descriptiva se hará el contraste de normalidad

<sup>45</sup> Para simplificar la gráfica se realizó una lista de las empresas, se les asignó un número con base en un ordenamiento alfabético y se buscó las relaciones entre éstas. El código que genera la gráfica como el listado de las empresas se puede encontrar en el anexo a éste punto.

empleando técnicas visuales y estadísticas debido a que se pretende mostrar que no hay una aproximación a una distribución normal. Posteriormente se irán integrando las ideas expuestas sobre fractales a las técnicas que se propondrán.

#### 4.1.1 Descripción de los datos.

Dado que no se puede tener acceso a datos de alta frecuencia por el costo que ello implica se ha decidido emplear los datos disponibles en la página de internet de Grupo Carso. La periodicidad de los datos es diaria y comienzan a partir del 02/01/1995, se pretende que la muestra tenga 4980 observaciones por lo que la última fecha contemplada será el 30/10/2014. El precio de las acciones se proporciona en una tabla que consta de cuatro columnas, la que se empleará es la columna llamada Cierre pues se asume que es el precio al cierre ajustado. Para el análisis se necesita la periodicidad semanal y mensual, que no son proporcionados en la página del grupo pero que se podría obtener de otra fuente como Yahoo Finanzas. Debido a que los datos que proporciona dicha página no coinciden con los que reporta la página de Grupo Carso en la serie diaria<sup>46</sup> se van a crear ambas basándose en la observación de Akgiray & Geoffrey Booth (1988). Ellos generan, a partir de las series que usan con periodicidad diaria, la serie semanal considerando 5 días de operaciones y la serie mensual considerando 20 días (p.52). La serie semanal será generada promediando 5 días contiguos de operaciones y la serie mensual promediando 20 días contiguos, en consecuencia, la primer serie generada constará de 996 observaciones mientras que la otra contempla sólo 249.

El análisis será realizado al cambio relativo del precio por lo que se debe obtener tal cantidad con base en una transformación que consta de evaluar para cada observación del precio el logaritmo base  $e$  o  $\ln$  haciendo esto para cada serie debido a que B. Mandelbrot y L. Hudson (2006) expresan que de esta manera es más fácil comparar números de distintos órdenes de magnitud (p.299). Con los resultados ahora se calcula el cambio usando las siguientes relaciones, para el cambio relativo del precio diario:

$$\Delta t_{\text{diario}} = \ln X(t + \text{un día}) - \ln X(t)$$

Para el cambio relativo del precio semanal:

$$\Delta t_{\text{semanal}} = \ln X(t + \text{una semana}) - \ln X(t)$$

Y para el cambio relativo del precio mensual:

$$\Delta t_{\text{mensual}} = \ln X(t + \text{un mes}) - \ln X(t)$$

---

<sup>46</sup> Por ejemplo, la serie diaria que proporciona Yahoo comienza el 13/03/2000 para la cual el precio de apertura es 19.31, el precio más alto es 19.31, el precio más bajo es 19.31 y el precio de cierre ajustado es de 5.87, haciendo coincidir esta fecha con la serie que proporciona Grupo Carso se tiene lo siguiente; el precio de apertura es 8.83, el precio más alto es 8.89, el precio más bajo es 8.41 y el precio al cierre ajustado es 8.48

(B. Mandelbrot, 1963, p.405).

Dichas operaciones indican que a las observaciones se les aplica el operador de primera diferencia  $\Delta^{(1)}w_i = w_{i+1} - w_i$  (Tintner, 1940, p.26) con lo que perderán sólo una observación. A partir de ahora se llamará FDGC a la serie diaria del cambio relativo del precio, FSGC a la serie semanal y FMGC a la serie mensual.

#### **4.1.2. Pruebas de normalidad a las series FDGC, FSGC y FMGC.**

Las pruebas van a ser de dos tipos, visuales y una que emplea un estadístico. Para las primeras se va a utilizar el histograma de frecuencias relativas ya que esto permite observar el perfil de la distribución de los datos (C. Canavos, 1988, p.6). C. Canavos menciona que no deben existir más de quince clases para realizar el histograma así que se utilizará una fórmula que proporciona tanto el número (aproximado) de clases y la amplitud que debe tener cada una. La primer parte de la fórmula utiliza la regla de Sturges, la cual proporciona el número de clases que contendrá el histograma y la segunda parte de la fórmula utiliza el rango, que es el resultado de al valor máximo restar el valor mínimo de los datos. Dividiendo el rango entre la regla de Sturges se obtiene la amplitud, por lo tanto la fórmula queda de la siguiente manera:

$$\text{Amplitud de clase} = \frac{\text{Rango}}{\text{Regla de Sturges}} = \frac{\text{Máximo} - \text{Mínimo}}{1 + (3.322 \cdot \log_{10} n)}$$

Donde  $n$  es el número de datos de la serie.

La segunda herramienta visual es la gráfica llamada boxplot la cual “representa cinco resúmenes numéricos acerca de un conjunto de datos con el fin de visualizar su dispersión y asimetría” (Marmolejo-Ramos & Siva Tian, 2010, p.38), la información que proporciona está basada en la mediana que por definición es “el valor para el cual, cuando todas las observaciones se ordenan de manera creciente, la mitad de éstas es menor que este valor y la otra mitad mayor” (C. Canavos, 1988, p.12). El resumen de los datos es: la observación más pequeña, la mediana de la primer mitad de los datos (primer cuartil  $Q_1$ ), la mediana (segundo cuartil,  $Q_2$ ), la mediana de la segunda mitad de los datos (tercer cuartil  $Q_3$ ), y las observaciones más grandes. De lo anterior, si se considera el área entre el primer y el tercer cuartil, que visualmente es la única caja donde están aproximadamente el 50% de las observaciones más cerca de la mediana, se tiene el rango intercuartil ( $IQR = Q_3 - Q_1$ ), el cual indica la dispersión de los datos. Por último, los valores atípicos u outliers son aquellos que están fuera de los bigotes (límite superior o valores más grandes y límite inferior o valores más pequeños) de la caja (Marmolejo-Ramos & Siva Tian, 2010, p.38). Se eligió esta gráfica ya que C. Canavos (1988) hace una observación con respecto al uso de la media y desviación estándar como medidas de tendencia central y dispersión pues

argumenta que no son adecuadas cuando se usan datos de tipo económico financieros (p.22).

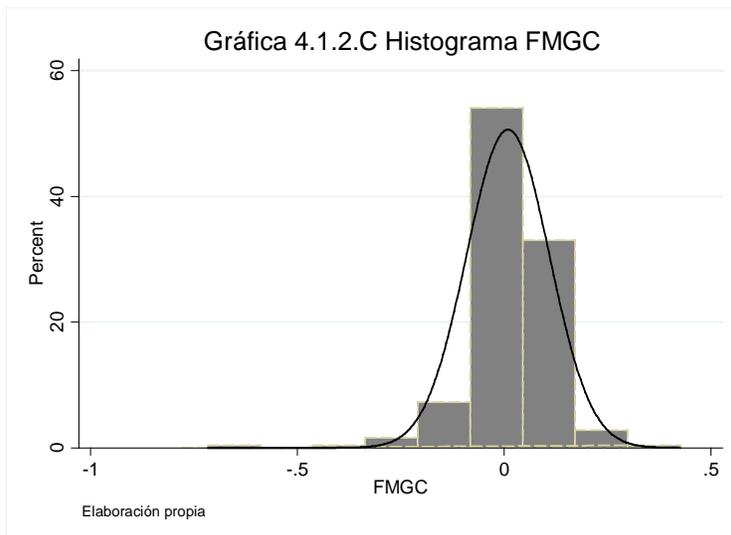
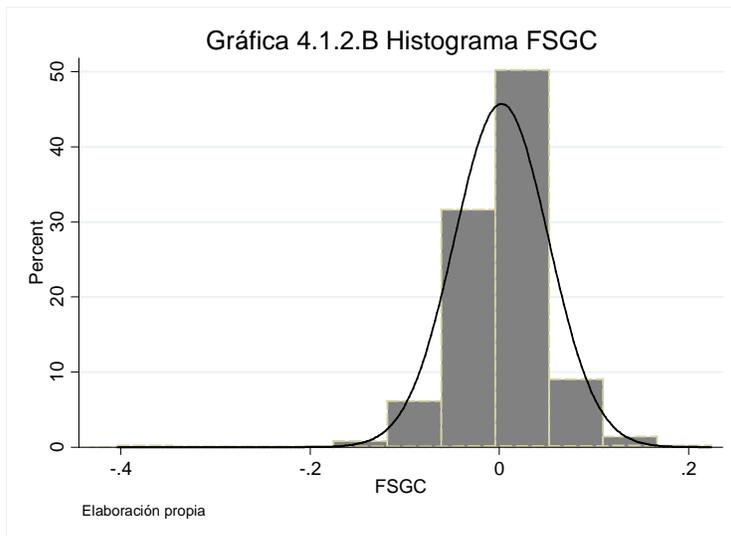
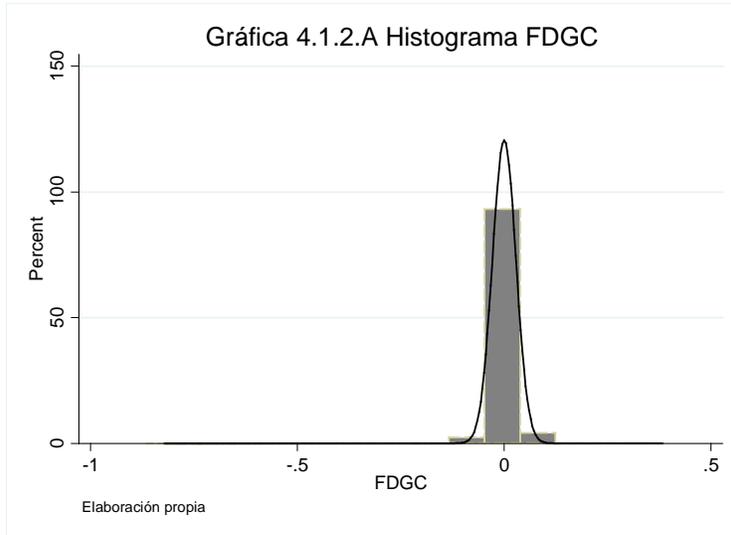
A continuación se presentan los histogramas de frecuencia relativa y los boxplot para cada una de las series.

**a) Histograma para FDGC, FSGC y FMGC.**

En el cuadro 4.1.2.A se hace un resumen con los datos que van a permitir estimar la amplitud y el número de clases pues con base en éstas se construirán los correspondientes histogramas.

<b>Cuadro 4.1.2.A Resumen de los datos</b>			
<b>Concepto</b>	<b>FDGC</b>	<b>FSGC</b>	<b>FMGC</b>
Número de observaciones	4979	995	248
Valor máximo (cambio relativo)	0.32484204	0.21630696	0.42223362
Valor mínimo (cambio relativo)	-0.82133343	-0.40354343	-0.71693707
Rango	1.14617547	0.61985039	1.13917069
Regla de Sturges o número de clases	13.2819061	10.9587683	8.95436848
Amplitud de las clases	0.08629601	0.05656205	0.12721955

Como se había señalado anteriormente, el valor para el número de clases se da de manera aproximada pues es incongruente decir que se va a emplear un número fraccional, para solucionar esto se va a tomar el entero inmediato superior siempre y cuando, después del punto decimal, el número que se tenga sea cinco, y el criterio no se aplica en el caso donde, después del punto decimal, la cifra no sea cinco. De esta manera, para la serie FDGC se van a tener 13 clases, para FSGC se tienen 11 clases y para FMGC se usan 9 clases.



Cabe mencionar que a los histogramas se les añadió una línea continua con el objeto de contrastar la distribución empírica de los datos con una distribución normal. Se puede apreciar que las observaciones de las series se están caracterizando por no seguir tal distribución, también por presentar un sesgo a la izquierda lo que sugiere considerar la forma de su distribución como leptocúrtica (N. Gujarati, 2003, p.858), debido a esto se ha decidido que la media no será utilizada como medida de tendencia central. Si se presta atención a los intervalos (cada rectángulo del histograma) se puede observar que hay una mayor concentración de cambios relativos en aquellos que no superan un cambio de magnitud (en valor absoluto) del orden de 0.09, lo que indicaría que el precio tuvo variaciones frecuentes que no llegan a ser abruptas. También se observan intervalos donde hay pocas observaciones, que son los de cada extremo, prueba de que el precio tuvo cambios significativos que se pueden categorizar como cambios extremos en el sentido de que de un día para otro el precio hubo variado abruptamente, pero con poca frecuencia<sup>47</sup>. Si se adelanta un poco al análisis fractal se puede inferir que esto es una clase de invarianza pues se tiene tres diferentes escalas de tiempo y en ambas se nota que son los mismos patrones: sesgo, concentración y distribución distinta a la normal y aún más, que las series son leptocúrticas, por lo que seguramente el efecto Noé y José estarán presentes.

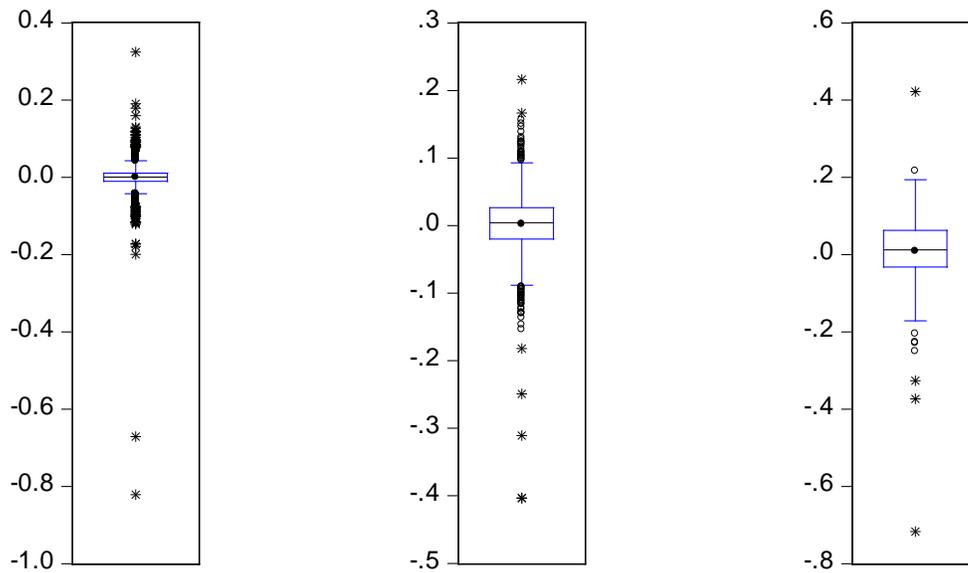
#### **b) Boxplot para FDGC, FSGC y FMGC.**

En las gráficas 4.1.2.D-F se ha representado a la media como un punto y a la mediana como una línea horizontal que cruza la caja ( $Q_2$  o percentil 50avo,  $P_{50}$ , que por definición es el número bajo el cual se encuentra el 50% de las observaciones), la línea superior de cada boxplot representa el límite superior y la línea inferior el límite inferior, la parte superior de la caja o rectángulo corresponde a  $Q_3$  o al percentil 75avo ( $P_{75}$ , valor bajo el cual se encuentra el 75% de las observaciones) y la parte inferior de la caja corresponde a  $Q_1$  o al percentil 25avo ( $P_{25}$ , valor bajo el cual se encuentra el 25% de las observaciones).

---

<sup>47</sup> Se buscó que las variaciones abruptas no obedecieran a “split” o “reverse split” de las acciones pues este tipo de decisiones hace que el precio disminuya o aumente, respectivamente. Lo que se halló es que ni una de las variaciones abruptas identificadas, mayores a 0.09, obedecen a este tipo de decisiones, por ello se dice que éstas fueron debidas a factores psicológicos en los tenedores de los títulos. Por ejemplo, el cambio ocurrido el 6 de enero de 2011, del orden de magnitud de 0.8213, se debió al debut que tuvo Minera Frisco en la BMV pues ese día tuvo un incremento del precio de 26.33% (Valores en El Economista, en prensa).

Gráfica 4.1.2.D Boxplot FDGC Gráfica 4.1.2.E Boxplot FSGC Gráfica 4.1.2.F Boxplot FMGC



Se decidió incluir una tabla (ver cuadro 4.1.2.B) donde se resumen los valores de las medidas proporcionadas por las gráficas anteriores para facilitar el análisis ya que por el tamaño de éstas a simple vista se puede llegar a afirmar que la media y la mediana coinciden. En los tres casos la mediana es más grande que la media por lo que la primera se encontraría situada a la derecha de la segunda, esta es la causa por la que se presenta el sesgo a la izquierda que anteriormente se había señalado. Los asteriscos así como los círculos de cada boxplot representan datos atípicos u oliers, es notoria la presencia de varios de estos datos en cada una de las representaciones. La información que proporciona el *IQR* es sobre la dispersión del 50% de las observaciones centrales, con base en esto se tiene que los cambios se concentran en órdenes de magnitud menores a 0.022, 0.047 y 0.095, valores para las respectivas series. Dicha tendencia hace que la curva de la distribución presentada en los histogramas de arriba sea leptocúrtica.

Cuadro 4.1.2.B Resumen de medidas descriptivas			
Medida	FDGC	FSGC	FMGC
Media	0.0004589	0.0023658	0.0095842
Mediana	0.001187	0.004256	0.0125195
Desviación Estándar	0.0285002	0.0497316	0.1001245
Q1	-0.009858	-0.019746	-0.0318915
Q3	0.011674	0.026705	0.0629425
IQR	0.021532	0.046451	0.094834

Si se llegara a asumir, como se hace habitualmente, que la media y la desviación estándar proporcionan toda la información con respecto al comportamiento de los datos, se podría afirmar que los cambios en el precio en promedio fueron de 0.0005 para FDGC, de 0.002 para FSGC y de 0.001 para FMGC, por lo que se descartarían los cambios abruptos que se observan en los boxplot, además, con base en la información proporcionada por la desviación estándar se podría agregar que la dispersión del 100% de los datos fue del orden de magnitud de 0.03 para FDGC, de 0.05 para y de 0.1 para FMGC cuando en realidad sólo en el 50% de las observaciones centrales la dispersión fue de 0.022 para FDGC, 0.047 para FSGC y de 0.095 para FMGC (considerando cifras redondeadas). La prueba que utiliza un estadístico, y que se va a emplear, es la prueba Jarque-Bera ( $JB$ ) que a continuación se expone.

**c) Prueba Jarque-Bera ( $JB$ ) para FDGC, FSGC y FMGC.**

La prueba está definida como:

$$JB = \frac{n}{6} \cdot \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

Donde  $S$  es el valor del coeficiente de asimetría y  $K$  es el coeficiente de curtosis y  $n$  es el número de observaciones (Thadewald & Büning, 2004, p.5). La asimetría y la curtosis se definen, a su vez, como:

$$S = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\text{tercer momento al rededor de la media}}{\text{desviación estándar elevada al cubo}}$$

$$K = \frac{E(X - \mu)^4}{[E(X - \mu)^2]^2} = \frac{\text{cuarto momento al rededor de la media}}{\text{segundo momento elevado al cuadrado}}$$

(N. Gujarati, 2003, p.858).

El estadístico  $JB$  se distribuye como una  $X^2$  (ji cuadrada) con dos grados de libertad que corresponden a la asimetría y a la curtosis. La hipótesis nula,  $H_0$ , indica que los datos están distribuidos de manera normal o bien tiene dicha distribución mientras que la hipótesis alternativa,  $H_1$ , indica que tiene cualquier otra distribución, o bien su distribución es diferente a la normal. Se va a considerar un nivel de significancia estadística,  $\alpha$ , del 5% así que se va a rechazar la hipótesis nula cuando  $JB \geq X_{\alpha,2}^2$  (Thadewald & Büning, 2004, p.5). En el cuadro 4.1.2.C se resumen los valores que se van a emplear en la prueba.

Cuadro 4.1.2.C Resumen de valores			
Valores	FDGC	FSGC	FMGC
Asimetría	-7.206146	-1.430699	-1.750543
Curtosis	209.1782	14.21726	15.22284
Número de datos	4979	995	248
$X_{0.05,2}^2$	5.99147	5.99147	5.99147
$X_{JB}^2$	8862031.714	5556.018659	1670.439349

El valor de  $X_{0.05,2}^2$  se ha obtenido de las tablas que se proporcionan en N. Gujarati, 2003, p.941 para la distribución Ji-Cuadrada. Con base en el criterio de rechazo de la hipótesis nula, al nivel de significancia que se ha considerado, para las tres series se ha de aceptar la hipótesis alternativa; es decir, su distribución no es una normal, dando la posibilidad de que tengan cualquier otra distribución.

### 4.1.3. Análisis monofractal para FDGC, FSGC y FMGC.

Considerese la idea de fractales autoafines esbozado en el capítulo 2 punto 2.1, la cual dice que este tipo de fractales tiene más de una escala en una misma dirección; es decir, si se observa una parte del fractal, ésta no será idéntica a todo el conjunto pero comparte las mismas características a nivel estadístico. Partiendo de esta idea, se va a asumir a un nivel monofractal<sup>48</sup>; es decir, considerando que cualquier serie puede ser caracterizada por un solo parámetro  $H$  o  $\alpha$ , siendo el exponente de Hurst y el exponente característico de una distribución estable respectivamente, que las series con las que se ha trabajado son explicadas por cualquiera de estos dos parámetros. Esto es parte de una manera alternativa que se propone para trabajar con series financieras o económicas pues lo habitual, en este caso, dentro de la econometría de series de tiempo sería emplear una representación del tipo ARMA, ARIMA, GARCH, etc., para, en cierto sentido, modelar las variaciones (volatilidad) de la serie (B. Mandelbrot, 1997, p.72).

Otro aspecto a considerar es la idea de que si un fractal es invariante por un cambio de escala se dice que es escalante. Esto se relaciona con la propiedad de estabilidad de las distribuciones estables (ver 3.1.1) y es llamada invarianza de escala (Calvet & Fisher, 2008, pp.83-84). La invarianza de escala sugiere que “la forma de la distribución de los rendimientos debe ser la misma cuando la escala del tiempo es cambiada” (B. Mandelbrot,

<sup>48</sup> En la literatura sobre fractales, además de encontrar este adjetivo, también se encuentra el uso del adjetivo autosimilar para referirse a fractales autoafines. La autosimilitud es muy diferente de la autoafinidad pues la primera se usa estrictamente para fractales regulares, como por ejemplo la curva de Koch, y la segunda es un término que da libertad a diferentes reescalamientos en el conjunto de datos (B. Mandelbrot, Fisher & Calvet, 1997, p.7).

Fisher & Calvet, 1997, p.6). F. Fama (1965) hace una observación con respecto al uso de la frase “debe ser la misma” pues comenta que ésta es una expresión verbal imprecisa para una expresión matemática precisa. Rigurosamente hablando, la frase expresa la suma de  $n$  variables con igual distribución por lo que el logaritmo de la función característica de éstas quedaría de la siguiente manera:

$$n \log \varphi(t) = i(n\delta)t - (n\gamma)|t|^\alpha \left[ 1 + i\beta \left( \frac{t}{|t|} \right) \omega(t, \alpha) \right]$$

Por consiguiente se mantiene la estabilidad en la suma de  $n$  variables con igual distribución (pp. 406-407). Habiendo aclarado esto ahora se va a definir un proceso autoafín.

**Definición.**- Un proceso aleatorio  $\{X(t)\}$  que satisface:

$$\{X(ct_1), \dots, X(ct_k)\} \stackrel{d}{=} \{c^H x(t_1), \dots, c^H X(t_k)\}$$

Para algún  $H > 0$  y todos  $c, k, t_1, \dots, t_k \geq 0$ , es llamado autoafín. Se llama a  $H$  el índice de autoafinidad, o exponente escalante o exponente de Hurst, de  $X(t)$ . Hay que recordar que se cumple, para el índice de autoafinidad, que  $0 < H < 1$  (B. Mandelbrot, Fisher & Calvet, 1997, p.7), siendo el ejemplo más representativo de estas características el movimiento browniano fraccional,  $B_H(t)$  (Calvet & Fisher, 2008, p.84). Para comenzar el análisis, primero se va a realizar una prueba gráfica para ver si la forma de la distribución de las series “es la misma”, para ello se va a emplear el método que en 1963 planteó B. Mandelbrot.

#### 4.1.3.1 Método gráfico para contrastar invarianza.

El método consiste en obtener la frecuencia relativa con la que ocurren los cambios, separando los positivos y negativos, para después graficarlos empleando el límite superior de cada clase a la que pertenecen, esto producirá un patrón que se reconoce visualmente. Dicho patrón será una hilera de “puntos” que describen una línea recta con pendiente negativa, esta visualización es la que permite saber si los cambios fueron o no invariantes con el tiempo, además, esto puede ser evidencia de una ley potencial o distribución estable (B. Mandelbrot y L. Hudson, 2006, pp.174-177). Cabe mencionar que la abscisa y la ordena deberán estar en escala logarítmica. Para obtener la frecuencia se emplea la siguiente notación:

$$Fr[\ln X(t+T) - \ln X(t) > u]$$

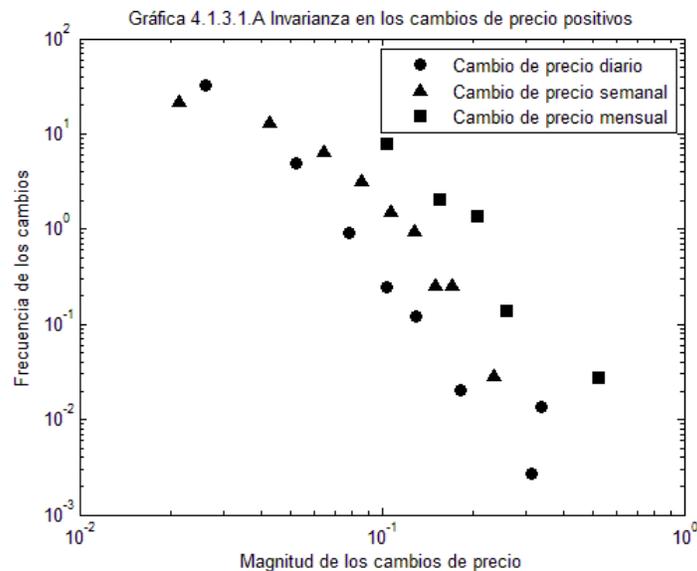
Esto indica que deberán ser contemplados aquellos cambios que sean positivos una vez que se hayan obtenido las primeras diferencias de la serie, además,  $T$  denotará la escala de tiempo que se esté empleando en la serie, así que se usa como escala un día, una semana y un mes. Para los cambios negativos se emplea el siguiente criterio:

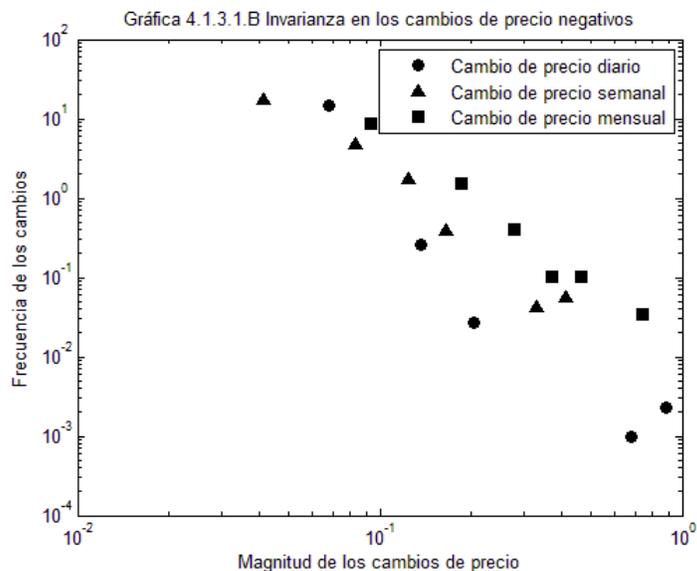
$$Fr[\ln X(t + T) - \ln X(t) < -u]$$

(B. Mandelbrot, 1963, p.405).

Una vez que se hayan obtenido los cambios negativos se deben emplear las observaciones en valor absoluto. Para situar los cambios entre un límite inferior y uno superior basta con construir parte de la tabla que se emplea para realizar histogramas salvo con una modificación. Como esto ya se había trabajado en el punto 4.1.1 inciso “a” sólo resta mencionar que la frecuencia de una clase es el número de observaciones que hay en ella mientras que la frecuencia relativa es el cociente de una frecuencia con respecto al número total de datos (C. Canavos, 1988, p.3). La modificación consiste en normalizar la frecuencia, esto se hace dividiendo la frecuencia entre la amplitud del intervalo al que corresponden, una vez teniendo el cociente se divide entre el total de la observaciones para así tener la frecuencia relativa (T. Brown & S. Liebovitch, 2010, pp.11-14) y posteriormente se realiza la gráfica empleando, en escala logarítmica el límite superior y la frecuencia normalizada.

En los cuadros 4A-F del anexo se pueden encontrar la tablas modificadas que corresponde a cada escala de tiempo, en ellos se aprecia la información que permite realizar las siguientes gráficas.





Para poder interpretar una gráfica de este tipo basta con mencionar que los cambios atípicos se encuentran a la derecha mientras que los más frecuentes se hallan a la izquierda. La razón por la que se considera únicamente el límite superior de cada clase es porque se pretende hallar la probabilidad de que un valor más grande (o más pequeño) que  $u$  sea encontrada en  $U$ , a partir de esta idea se puede emplear la notación  $\Pr\{U > u\} = \Pr\{U < -u\} \sim u^{-\alpha}$  (B. Mandelbrot, 2001, p.113) para indicar que la probabilidad de hallar un valor más grande (o más pequeño) que cierto límite será proporcional a una ley de potencia o, de manera general, a una distribución estable.

Para no solapar demasiado las gráficas se ha decidido hacer dos, una que contempla sólo los cambios positivos para las tres escalas de tiempo y otra donde se contemplan los cambios negativos. Como se puede apreciar, en ambas gráficas las hileras de puntos, triángulos y cuadrados (o sólo puntos) tienden a formar una línea recta con pendiente negativa, que como se hubo dicho en la nota al pie de página número 38, que se encuentra en el punto 3.1.1, es evidencia de que los cambios siguen una ley potencial o bien pueden ser explicadas a través de las distribuciones estables.

Los puntos, triángulos o cuadrados que se encuentran en la parte superior izquierda de las gráficas son los valores de los cambios más comunes que ocurren en las diferentes escalas de tiempo, son pequeños, del orden de magnitud de  $10^{-2}$ , ello obedece a que el precio por períodos, o rachas, no tuvo variaciones exorbitantes o bien no fueron muy grandes, su frecuencia es alta, del orden de magnitud de  $10^1$  a  $10^2$ , en cambio los puntos, triángulos o cuadrados que se encuentran en la parte inferior derecha son aquellos atípicos, poco frecuentes, del orden  $10^{-3}$ , teniendo un tamaño del orden de  $10^{-1}$  a  $10^0$ , pero, a pesar de ser pequeños tienen importancia puesto que dan cabida a la leptocurtosis, o bien a las distribuciones estables. Finalmente, la idea de que los cambios de precios fueron invariantes o escalantes se sostiene para las escalas de tiempo, debido al patrón que forman,

así que los factores que interactúan en la generación del precio en su escala diaria son relevantes en la escala semanal y mensual (B. Mandelbrot, 1997, p.395) puesto que, al ser un grupo, éste está supeditado a la interacción de cada parte que lo integra y cada parte integrante del grupo, al tener una estructura propia, tiene a su vez distintos factores de riesgo. Por ejemplo, un evento reciente que se relaciona con Grupo Carso es el problema que surgió con la entrega, el uso y el paro parcial del servicio en la línea 12 del Sistema de Transporte Colectivo (STC) Metro, que fue adjudicada al consorcio ICA-Carso-Alstom. Tuvo fallos que propiciaron el cierre parcial de algunas estaciones, estos fallos dieron origen a que el consorcio y el Gobierno del Distrito Federal llegaran a un desacuerdo en cuanto a quién se responsabilizaría por hacer las reparaciones pertinentes (Cantera, en prensa, Gutiérrez B., en prensa), tal evento por el momento sigue en pugna así que de alguna manera hay un impacto que está afectando en diferente magnitud a ICA y al grupo, además de que tal evento continuará incidiendo en las actividades de estas empresas.

Retomando lo escrito en la nota al pie de página número 38, se podría obtener el parámetro  $\alpha$  a partir de la pendiente de las rectas formadas suponiendo que la distribución fuera simétrica, pero aquí se tiene una particularidad, si se observa a detalle, hay puntos, cuadrados o triángulos que quedan fuera de la línea recta, ello es debido a que la distribución tiene un sesgo que obedece a la cantidad de cambios positivos y negativos en cada escala, esto se observa en el cuadro 4.1.3.1.A; el número de observaciones contenidas en los cambios positivos excede el número de observaciones de los cambios negativos, esto hace que la estimación de dicho parámetro, existiendo un sesgo, no sea consistente a través usar mínimos cuadrados para obtener la pendiente de la recta que forman cada conjunto de puntos, por ello se empleará una técnica que permite estimar dicho parámetro en presencia de sesgo, además como es relevante el sesgo, también será estimado el parámetro de simetría o parámetro  $\beta$ . Cabe mencionar que, cuando  $\beta < 0$  existe un sesgo a la derecha (*media > mediana > moda*) mientras que, cuando  $\beta > 0$  el sesgo es a la izquierda (*media < mediana < moda*) (Akgiray & Geoffrey Booth, 1988, p.51, B. Mandelbrot, 1963, p.401, B. Mandelbrot, 1997, p.384), siendo este último el caso para las tres variables pues esto se ha mencionado en el punto 4.1.2 incisos “a” y “b”.

<b>Cuadro 4.1.3.1.A Número de observaciones contenidas en los cambios positivos y negativos.</b>						
<b>Concepto</b>	<b>FDGC</b>		<b>FSGC</b>		<b>FMGC</b>	
	<b>&gt; u</b>	<b>&lt; -u</b>	<b>&gt; u</b>	<b>&lt; -u</b>	<b>&gt; u</b>	<b>&lt; -u</b>
Número de observaciones	2832	2147	553	442	141	107

### 4.1.3.2. Estimación del parámetro $\alpha$ y $\beta$ para FDGC, FSGC y FMGC.

El método, propuesto por J. Huston McCulloch (1986), emplea sólo cinco valores cuantiles de la distribución de la que se desea conocer, aproximadamente, el valor de los parámetros en cuestión. Estos valores se relacionan a través de un índice, llamado  $v$ , que, una vez obtenido el valor de éste, se busca en las tablas de los respectivos parámetros y es así como se llega a la estimación de los parámetros. Es un método parsimonioso pues el objetivo que se plantea el autor es la simplicidad y la conveniencia ya que no se asume que los datos deban tener, a priori, un valor de cero en el parámetro de simetría, así que la eficiencia de los estimadores puede estar en un rango del 60 al 81%. Sólo para ciertos casos, por ejemplo cuando  $\alpha = 1$ , la pérdida de eficiencia puede llegar a ser de un 100% (Huston McCulloch, 1986, pp.1121, 1133-1134).

Es relevante mencionar que se emplean los cuantiles, valor bajo el cual se encuentra una determinada proporción de los valores de una distribución, y no otros parámetros debido a que estos permiten consistencia en las estimaciones pues no se ven afectados por datos atípicos y si se agregaran más datos, la variación en la estimación es muy ligera, casi imperceptible (C. Canavos, 1988, pp.7-22, B. Mandelbrot, 1997, p.427).

Se va a resumir la estimación de la siguiente manera:

Déjese que  $x_p$  sea el p-ésimo cuantil poblacional, así que  $S(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = p$ . Ahora, permítase que  $\hat{x}_p$  sea el estimador correspondiente al cuantil de interés de la muestra, por ello será un estimador consistente de  $x_p$ . Se define la siguiente relación o índice:

$$v_\alpha = \frac{x_{.95} - x_{.05}}{x_{.75} - x_{.25}}$$

Cabe mencionar que  $v_\alpha$  es independiente de  $\gamma$  y  $\delta$  y los valores de éste, como una función  $\phi_1(\alpha, \beta)$ , se encuentran en la tabla 4G del anexo. Ahora permítase que  $\hat{v}_\alpha$  sea el estimador consistente de  $v_\alpha$ , por lo que se tendría entonces:

$$\hat{v}_\alpha = \frac{\hat{x}_{.95} - \hat{x}_{.05}}{\hat{x}_{.75} - \hat{x}_{.25}}$$

La cual es una función estrictamente decreciente de  $\alpha$ .

Por otra parte, se define la siguiente relación o índice:

$$v_\beta = \frac{x_{.95} + x_{.05} - 2x_{.5}}{x_{.95} - x_{.05}}$$

Y se deja que, en analogía con  $\hat{v}_\alpha$ ,  $\hat{v}_\beta$  sea el correspondiente valor de la muestra. Al igual que  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$  es independiente de los mismos parámetros. Los valores, como una función  $\phi_2(\alpha, \beta)$ , se encuentran en la tabla 4H del anexo. La particularidad de esta función es que es estrictamente creciente en  $\beta$  para cada  $\alpha$ . Ahora,  $\hat{v}_\beta$  es un estimador consistente de  $v_\beta$ .

Las relaciones:

$$\begin{aligned}v_\alpha &= \phi_1(\alpha, \beta) \\v_\beta &= \phi_2(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

Pueden ser invertidas para dar las relaciones:

$$\begin{aligned}\alpha &= \Psi_1(v_\alpha, v_\beta) \\ \beta &= \Psi_2(v_\alpha, v_\beta)\end{aligned}$$

Por lo tanto, ahora los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser estimados consistentemente mediante:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \Psi_1(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta) \\ \hat{\beta} &= \Psi_2(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta)\end{aligned}$$

Las cuadros 4I y 4J, del anexo, muestran a  $\alpha$  y  $\beta$  como una función de  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  (Huston McCulloch, 1986, pp.1114-1119).

En el cuadro 4K, del anexo, se encuentran los cuantiles necesarios de cada serie para obtener los estimadores  $\hat{v}_\alpha$  y  $\hat{v}_\beta$ . En el cuadro 4.1.3.2.A se exponen los resultados obtenidos a partir de emplear dichos estimadores para encontrar, en las tablas 4I y 4J, los valores que corresponderían a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Es necesario destacar que los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son interpolaciones por lo que en las tablas no se encontrarán como tales. La interpolación lineal es parte del método propuesto y se hace, para el parámetro  $\alpha$ , considerando a  $v_\beta$  constante y empleando los valores de  $v_\alpha$  que se hallen por arriba y por debajo de  $\hat{v}_\alpha$ . Para  $\beta$  se considera a  $v_\alpha$  constante y se emplean los valores de  $v_\beta$  que estén por arriba y por debajo de  $\hat{v}_\beta$ . Por ejemplo, para la frecuencia diaria, considerando tanto cambios positivos como negativos, el valor de  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  son, respectivamente, 3.446 y -0.053. Se busca en el cuadro 4I el valor que corresponda a  $v_\beta$  si únicamente se considera un decimal, en este caso fue 0.1, ahora se buscan los valores que estén por debajo y por arriba de 3.446, en este caso los valores de  $v_\alpha$  que están entre este número son 3.2 y 3.5. Se toman los valores que reportan las tablas y se interpola.

$$\alpha = \left( \left( \frac{3.446 - 3.2}{3.5 - 3.2} \right) (1.386 - 1.480) \right) + 1.480 = 1.403$$

Este procedimiento se realizó para todas las  $\alpha$  y  $\beta$  de las series.

Cuadro 4.1.3.2.A Estimaciones de $v_\alpha$ , $v_\beta$ , $\alpha$ y $\beta$									
	Escalas de tiempo								
	Diario	Semana	Mes	Cambio positivo			Cambio negativo		
				Diario	Semana	Mes	Diario	Semana	Mes
$v_\alpha$	3.446	3.276	3.175	2.905	2.716	2.447	2.561	2.859	3.522
$v_\beta$	-0.053	-0.070	-0.069	0.580	0.544	0.367	0.549	0.581	0.645
$\alpha$	1.403	1.456	1.490	1.608	1.734	1.990	1.866	1.638	1.312
$\beta$	-0.087	-0.116	-0.139	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

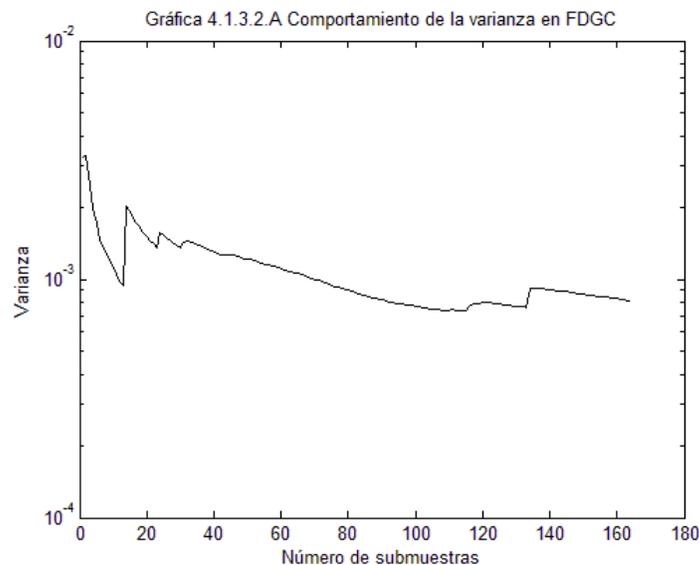
En el cuadro 4.1.3.2.A se han resaltado tres entradas de color gris claro debido a que, al interpolar los valores, el resultado que se obtiene es 1.345, 1.342 y 1.389 para  $\beta$  del cambio positivo diario, del cambio semanal negativo y cambio mensual negativo, respectivamente. Lo que dice el autor es que resulta válido que dichos valores aparezcan pero deben ser considerados como el límite superior que puede alcanzar, por definición, el parámetro de simetría, o sea el valor  $\pm 1$ .

La hipótesis de B. Mandelbrot sobre los cambios en el precio de las series especulativas es que deben tener un parámetro  $\alpha$  que esté entre 1 y 2 ( $1 < \alpha \leq 2$ ). Si esto se cumple entonces la media existe pero la varianza no es finita o bien no se establece en algún valor (B. Mandelbrot, 1963, p.397, B. Mandelbrot, 1997, pp.372, 447). Como se puede observar, cuando no se divide la serie en cambios positivos y negativos, el parámetro alfa de cada una cumple dicha hipótesis, además, se corrobora la idea de que los cambios de precio son escalantes o invariantes debido a que, aproximadamente, tienen el mismo valor del parámetro. Con respecto al parámetro de simetría se puede decir que éste no refleja el sesgo del que se ha hablado pues al ser de signo negativo y tener un valor próximo a 0.1 estaría indicando que la media es más grande que la mediana y este no es el caso.

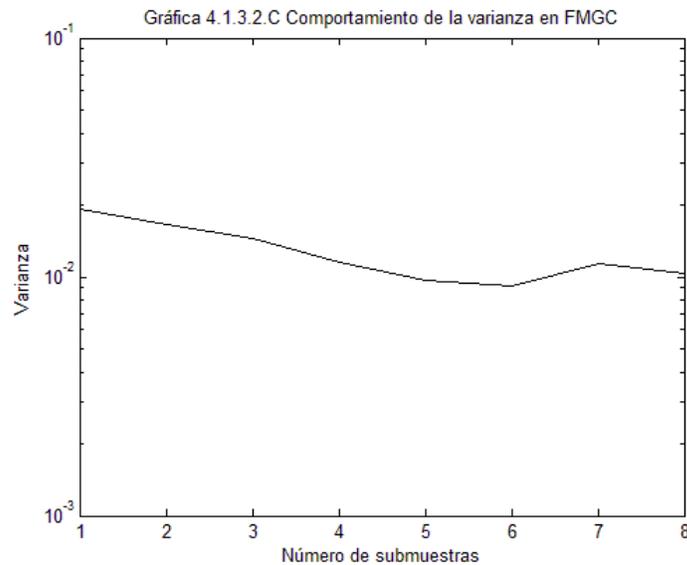
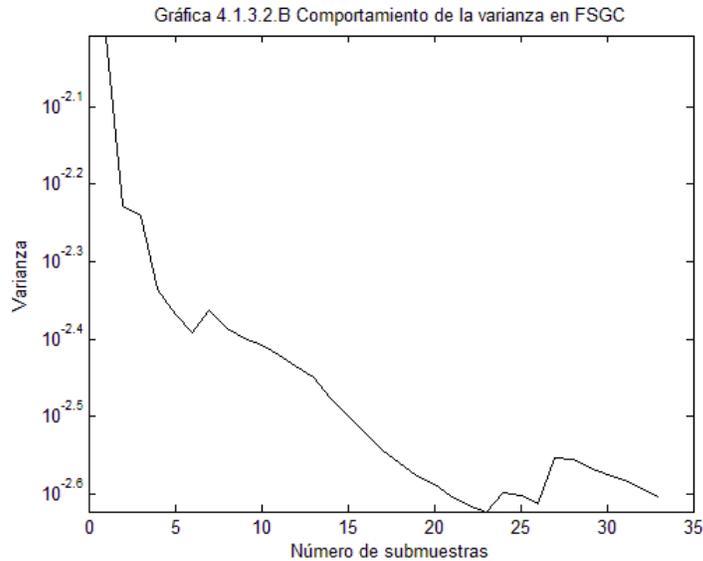
Cuando se obtienen los valores de ambos parámetros para los cambios positivos y negativos de cada frecuencia, se observa una situación contraria a la comentada. El parámetro  $\beta$  sí indica que la mediana es mayor que la media, por eso todas las series tienen el mismo valor de éste y por lo tanto, se verifica el sesgo ya comentado. En cuanto al parámetro  $\alpha$ , en ningún caso se llegan a aproximar y, en particular, para los cambios positivos de la frecuencia mensual se tiene que éste está cercano a 2. A pesar de esto, todas cumplen la hipótesis de B. Mandelbrot. Lo que se puede decir en cuanto a esta discrepancia es que dentro de una misma escala los cambios positivos y negativos tienen una manera independiente de variar, recuérdese que en el punto 3.1.1.1 se expuso que la probabilidad total contenida en las colas se irá incrementando cuando  $\alpha$  se aleja de 2 hacia 0; es decir, tomando como ejemplo la frecuencia mensual, los cambios positivos varían de una manera “suave” o normal, por tener un valor de  $\alpha$  cercano a 2, pero los negativos varían de una

manera más “salvaje” o errática, por estar próximo a  $1^{49}$ . Lo mismo sucede con las otras dos frecuencias; la serie de cambios diarios tiene una variación casi normal cuando se trata de cambios negativos mientras que su variación es poco menos que errática cuando se trata de cambios positivos y la frecuencia semanal varía de manera un poco más errática tanto en cambios positivos y negativos.

Para corroborar el hecho de que la varianza no es constante se va a graficar el comportamiento de ésta. Se comienza tomando una submuestra de los 30 primeros datos de la serie completa; es decir, sin distinguir entre cambios negativos y positivos, y se calcula la varianza, acto seguido se van a tomar 30 observaciones más, por lo tanto se evalúa la varianza, ahora de las 60 primeras observaciones. Se repite esto hasta agotar el total de observaciones. Los valores obtenidos son mostrados en una gráfica semilogarítmica, donde las abscisas serán el número de las submuestras empleadas mientras que las ordenadas serán los valores de la varianza, en escala logarítmica (B. Mandelbrot, 1997, pp.423, 427-428). El resultado se exhibe en las gráficas 4.1.3.2.A-C



<sup>49</sup> Se emplean los adjetivos “suave” y “salvaje” porque con estos B. Mandelbrot caracteriza al efecto Noé y José.



Las gráficas apoyan la idea de la variación suave y errática. Por ejemplo, se dijo que los cambios para la frecuencia diaria tienen una mezcla de variación normal o suave y errática o salvaje, por ello la curva que se forma con los valores de la varianza oscila para las primeras 30 submuestras (salvaje), después disminuye tendiendo casi a alcanzar una estabilidad (suave) para después volver a variar a partir de la submuestra 130 (salvaje). Lo mismo sucede con la frecuencia semanal y mensual, la gráfica de la frecuencia semanal se distingue por su varianza que oscila de una forma salvaje, mostrando una caída pronunciada pero lenta, mientras que la gráfica de la frecuencia mensual se muestra más estable, esto porque los cambios positivos son más y tienen un valor de  $\alpha$  cercano a 2.

Como comentario final, B. Mandelbrot (1997) dice que:

La ausencia de una varianza finita no significa, sin embargo, que seamos incapaces de describir la variabilidad de las variables I-estables. Siempre que el exponente característico “a” sea más grande que 1, los estimadores que implican sólo las primeras potencias de la variable I-estable tienen esperanza finita. Esto significa que los conceptos de variabilidad, tales como los rangos fractiles y las desviaciones medias absolutas, las cuales no implican únicamente primeras potencias, tienen esperanza finita y por tanto son medidas más apropiadas de la variabilidad para éstas distribuciones que su varianza (Traducción propia, p.454).

#### **4.1.3.3. Prueba R/S a FDGC, FSGC y FMGC.**

Como prelude a la aplicación de la prueba R/S se debe revisar si en las series se verifica el efecto de memoria de largo plazo. Esta característica se presenta cuando la función de autocovarianza de los rendimientos en valor absoluto (siendo ésta una manera de aproximar la volatilidad) declina de manera hiperbólica, o tiene un decaimiento lento (W. Lo, 1991, p.1286), cuando los rezagos tienden a infinito o dicho de otra forma, cuando la función de autocorrelación (llamada autocorrelación de la volatilidad) también declina de tal manera. Considerando la notación de la autocovarianza, se tiene que:

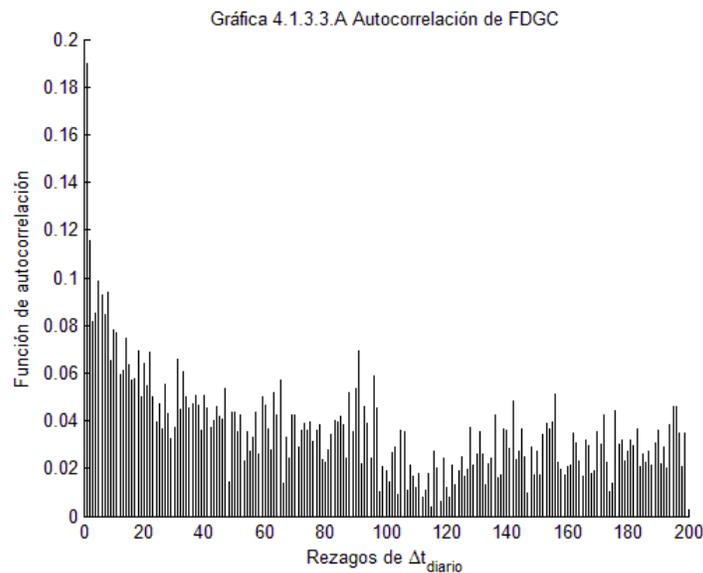
$$E[|\Delta t_n| \cdot |\Delta t_{n-\Delta n}|] \approx \Delta n^{-\gamma}$$

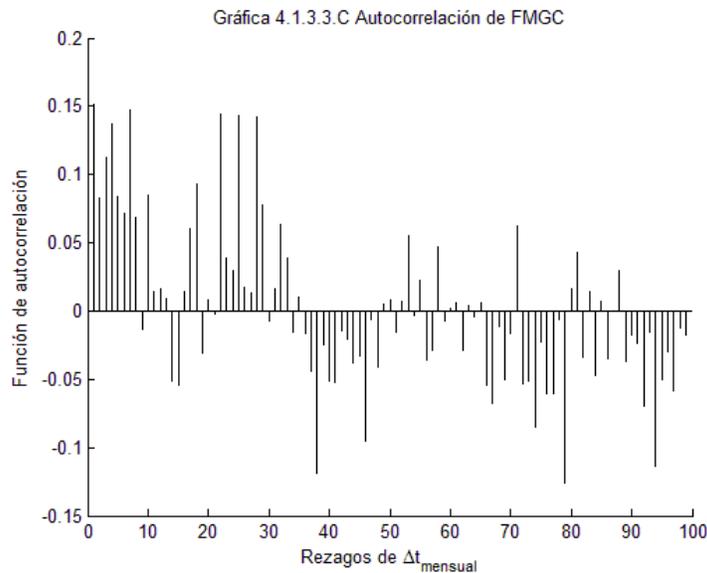
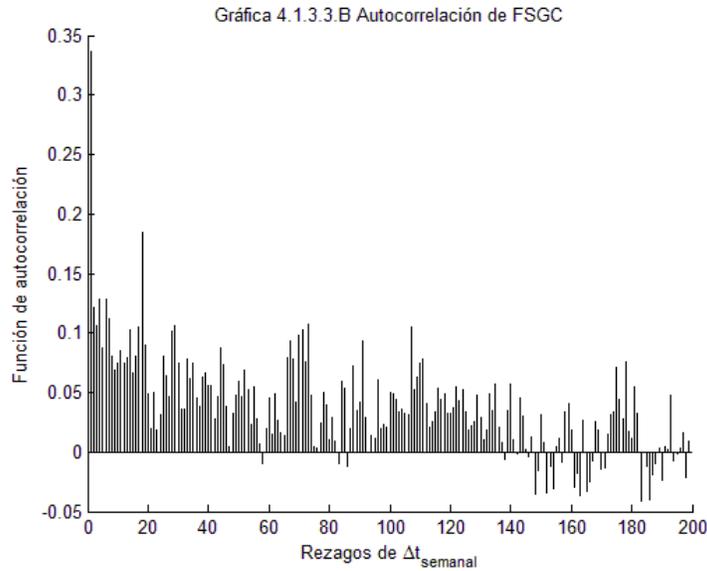
Con  $\gamma < 1$ , o bien, próximo a un valor de 0.5

(Andreoli y otros, 2012, p.1, Calvet & Fisher, 2008, p.23, Lux, 2006, pp.2-4, La Spada y otros, 2008, p.1, Jiang & Zhou, 2007, p.344).

Thomas Lux (2006, p.4) comenta que el parámetro  $\gamma$  ha recibido menos atención que el parámetro  $\alpha$  debido a que su estimación no es directa aunque tenga relación con el exponente de Hurst (La Spada, Doyne Farmer & Lillo, 2008, p.4). Si la función de autocovarianza es proporcional a  $\gamma$ , entonces también lo será la función de autocorrelación (W. J. Granger & Hyung, 2004, p.401). Empleando ésta última, se habrá de graficar la función para 200 rezagos usando las series FDGC y FSMG, mientras que sólo se emplean 100 rezagos para la serie FMGC debido al número de observaciones que la conforman. La gráfica 4.1.3.3.A confirma el efecto de memoria de largo plazo en la serie FDGC pues la función declina de la manera comentada anteriormente. Analizando las restantes, se puede apreciar que la gráfica 4.1.3.3.B perteneciente a la serie FSGC, hasta el rezago 145 llega a confirmar la forma de la declinación y por ello también tal efecto, sin embargo, a partir del siguiente rezago la función comienza a tener un comportamiento distinto. Esto mismo se observa en la gráfica 4.1.3.3.C de la serie FMGC, aquí la declinación es totalmente distinta, con base en este resultado se podría suponer que el efecto de memoria de largo plazo no está contenido en dicha serie.

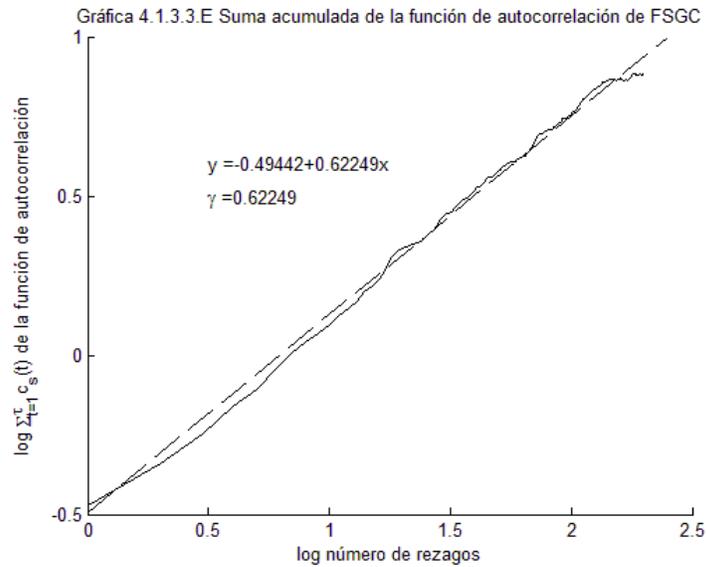
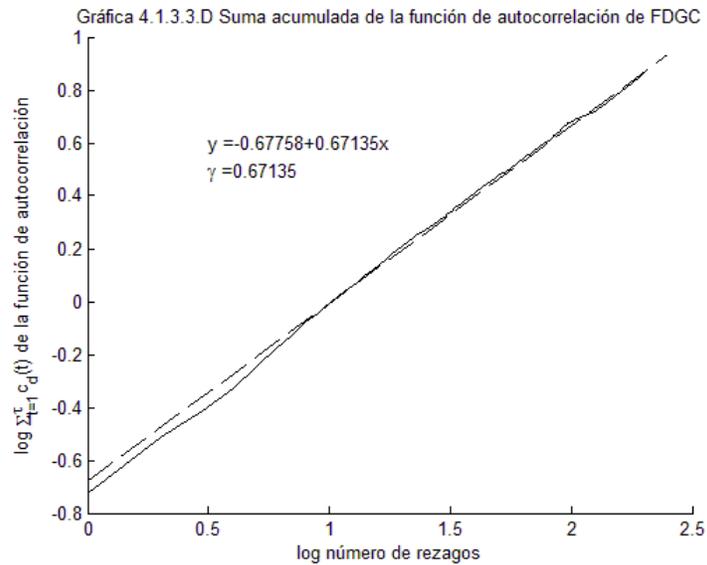
Dado que se han obtenido resultados distintos, producto del comportamiento de la declinación de los rezagos, se considera necesario validar lo observado, para ello se proponen dos pruebas. La primera consiste en obtener la suma acumulada de las autocorrelaciones y representarla en un gráfica doble logarítmica, si se aprecia una línea recta, la propuesta de la existencia del efecto de memoria de largo plazo se mantiene, en caso contrario no es aceptado que dicho efecto esté presente (La Spada, Doyne Farmer & Lillo, 2008, p.4). La segunda es la prueba Dickey-Fuller aumentada. Debido al valor del parámetro  $\alpha$  de cada una de las series se sabe que sólo la media existe mientras que la varianza no es considerada como una medida adecuada gracias a que no es constante, lo que se busca tras la aplicación de esta prueba es confirmar que las series, bajo la hipótesis nula de no tener raíz unitaria, son estacionarias en media (La Spada, Doyne Farmer & Lillo, 2008, p.3), si no es rechazada tal hipótesis se estaría confirmando que hay consistencia tanto con el efecto de memoria de largo plazo como con las observaciones hechas respecto al rango en que debe situarse una serie de tiempo económica ( $1 < \alpha \leq 2$ ). Tras realizar lo anterior, se está en la posibilidad de llevar a cabo la prueba R/S con la certidumbre de que el resultado obtenido será adecuado, además, se puede anticipar que el valor del exponente de Hurst será diferente de 0.5.

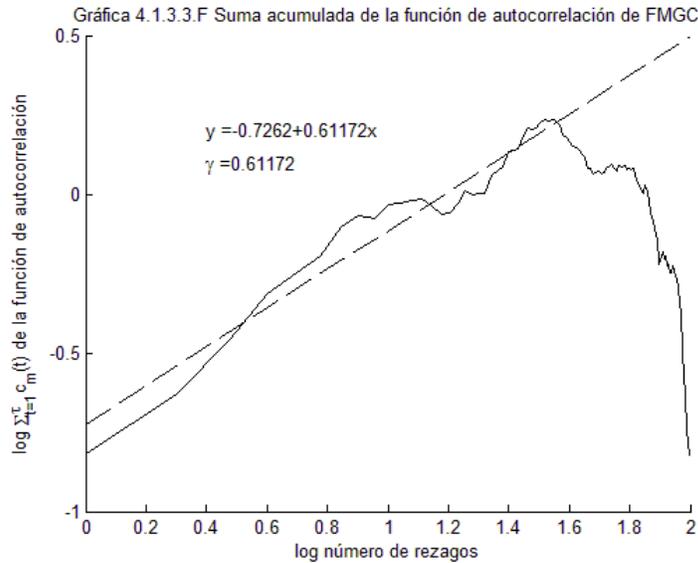




La serie de la suma acumulada de las autocorrelaciones es representada en las siguientes gráficas, para cada serie se ajustó una recta empleando el procedimiento de mínimos cuadrados ordinarios, la pendiente de ésta será considerada como el valor del parámetro  $\gamma$ . Se propone establecer que si dicho valor cumple con la restricción comentada arriba se valida de nueva cuenta el efecto de memoria de largo plazo. Se observa que las series FDGC y FSGC, gráficas 4.1.3.3.D y 4.1.3.3.E respectivamente, continúan afirmando la presencia de dicho efecto, a pesar de que en esta última su gráfica anterior haya mostrado un comportamiento distinto a partir del rezago mencionado. Para la serie FMGC dicho efecto no se sostiene más allá del rezago 30, gráfica 4.1.3.3.F, pues a partir de éste la curva de la suma acumulada de las autocorrelaciones tiende a decaer. Si se toma en cuenta el valor del parámetro  $\alpha$  de los cambios positivos de dicha serie, se podría afirmar que, debido

a su casi normalidad ( $\alpha \approx 2$ ), en el largo plazo se esperaría un comportamiento de tipo gaussiano (Anderson & Noss, 2013, p.16) a pesar de que el efecto de memoria desaparezca siguiendo una progresión geométrica, como lo mencionan B. Mandelbrot y L. Hudson (2006). Considerando la restricción al valor del parámetro, en todos los casos es menor a la unidad, 0.67135, 0.62249 y 0.61172, además están cerca del valor 1/2 por la derecha.



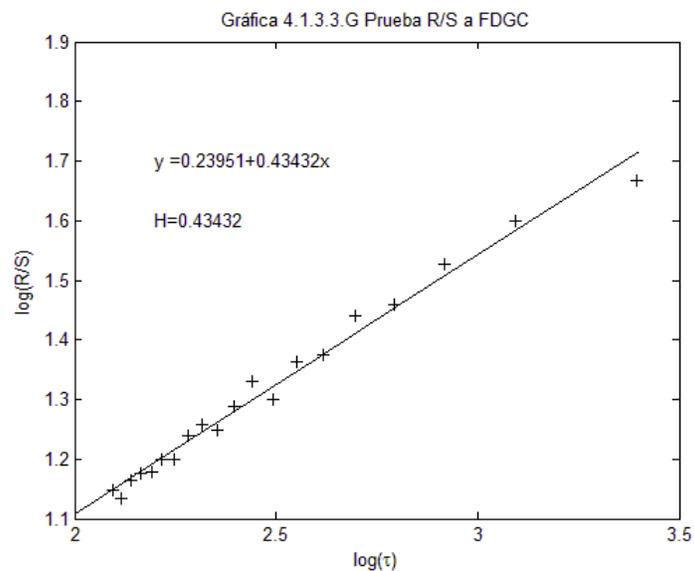


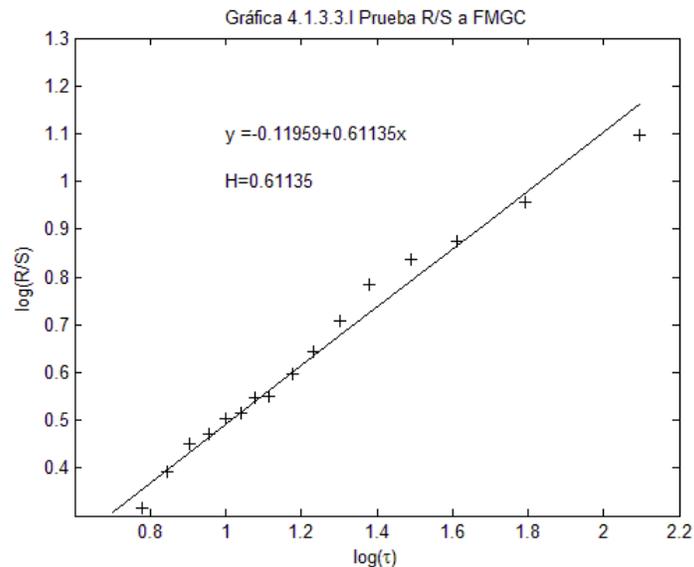
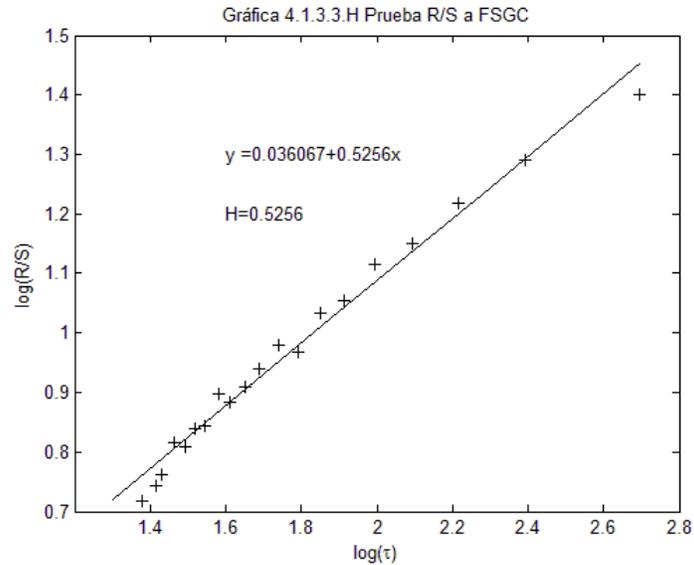
Los resultados de la prueba Dickey-Fuller aumentada se muestran en el cuadro 4.1.3.3.A para cada una de las series. Se realizó en niveles y sin tomar en cuenta tendencia e intercepto, considerando la regla de aceptación o rechazo de la hipótesis nula con la que trabaja N. Gujarati (2003, pp.788-792), se concluye que las series no poseen raíz unitaria, por lo que se considera que son estacionarias únicamente en media, a un nivel de significancia estadística del 5%. Además, si se toma en cuenta la observación que hacen Mahalingam & Raja (2014), la cual establece que entre más negativo sea el resultado más fuerte será el rechazo de la hipótesis alternativa de raíz unitaria o no estacionariedad (p.91), entonces se encuentra concordancia entre la gráfica de la varianza de la serie mensual con la estacionariedad que se asumió sólo en media. Hay que recordar que la varianza en esta gráfica parece estable, contrario a lo que exhiben las correspondientes a las series diaria y semanal. Por ende, se propone afirmar que la serie mensual es más estacionaria (ello también implicaría la tendencia a seguir un comportamiento casi gaussiano) que la serie diaria y semanal, siendo la serie diaria menos estacionaria en comparación con la serie semanal.

Cuadro 4.1.3.3.A Prueba Dickey-Fuller Aumentada				
Serie	$\tau_{calculado}$	$\tau_{tablas}$ a $x\%$ de significancia		
		1%	5%	10%
FDGC	-68.28296	-2.565427	-1.940888	-1.616657
FSGC	-21.26328	-2.567293	-1.941142	-1.616485
FMGC	-14.19707	-2.574358	-1.942115	-1.615842

Habiendo comprobado que las series contienen el efecto de memoria de largo plazo y que el valor de su correspondiente parámetro  $\alpha$  es acertado, queda evaluar el grado de persistencia o antipersistencia de cada una de ellas, con base en esto se podrá afirmar si

existen conjuntamente los efectos José y Noé o bien si se dan de manera individual. Para ello, empleando la prueba R/S, se debe obtener el valor del exponente de Hurst y sobre él realizar el análisis. En las gráficas 4.1.3.3.G-I se obtuvieron los siguientes valores para dicho exponente: 0.43432, 0.5256 y 0.61135. El primer valor, correspondiente a la serie diaria, indica que los rendimientos son antipersistentes, ello da lugar a que tengan una reversión al valor que se comporta como su media (cambios abruptos en determinado momento o efecto Noé), así que en el corto plazo, pero sobre todo en las operaciones hechas en el intradía, se tendrá una alta volatilidad. El valor del exponente de las series restantes indica que son persistentes pero a un nivel diferente ya que el grado va aumentando cuando  $H$  se acerca a la unidad; es decir, la serie mensual es más persistente que la serie semanal. Las series que están en esta categoría presentan cuasitendencias o cuasiciclos, o bien el efecto José, por ello en las gráficas 4A-C del anexo a este punto, sobre todo en la correspondiente a la serie mensual, pueden observarse tendencias alcistas y bajistas, confirmando que cambios positivos o negativos preceden a cambios del mismo tipo hasta que cambia la tendencia, dando origen a esos cuasiciclos, cuya duración no puede estimarse. Lo más probable es que características como las observadas en estas gráficas dan lugar a que actúen factores psicológicos en las decisiones de los inversores para optar por comprar, vender o mantener los títulos con los que estructuran carteras de inversión, esto a su vez también estaría provocando que cada mercado genere una diversidad de escenarios para la diversidad de inversores que hay, tomando en cuenta el horizonte temporal en el que pretenden obtener ganancias (Anderson & Noss, 2013, p.16). Las ideas de este último párrafo tratarán de ser contempladas en un modelo que se propondrá en el punto siguiente, considerando que ya se conocen los parámetros más relevantes.





Autores como Rendón de la Torre y Morales Castro (2012) interpretan el valor de dicho exponente como una probabilidad (p.10), Oprean, Tanasescu & Bratian (2014) lo interpretan como la probabilidad de que dos eventos similares ocurran consecutivamente (p.12) así que si se emplean estas ideas, para la serie diaria se tendría una probabilidad baja, del 43.432%, de que si un cambio fue positivo el siguiente también sea positivo, o viceversa. Esta baja probabilidad podría ser la causante de que a simple vista no se pueda mantener un cuasiciclo. Las probabilidades para la serie semanal y mensual serían 52.56% y 61.135% respectivamente, esto implicaría que se va incrementando la posibilidad, conforme se incrementa la escala de tiempo, de que las series exhiban una tendencia, entendida ésta como “si en promedio la serie incrementa significativamente (respectivamente, decrece) su valor para pequeños pero suficientes desplazamientos en el

tiempo” (Turiel & Pérez-Vicente, 2005, p.481), debido a la ocurrencia de cambios consecutivos dados en una misma dirección.

Por medio del valor del exponente de Hurst estimado se puede encontrar o estimar otro valor, éste es la dimensión de las  $(R(d)_i/S(d)_i)_n$ . Empleando la ayuda que proporciona el programa Benoit Fractal Analysis Sistem se encuentra que la dimensión se define por la relación  $D_{R/S} = 2 - H$ . Un valor de 1.5 correspondería a un movimiento browniano fraccional de incrementos independientes, mientras que valores distintos a éste corresponden a series persistentes o antipersistentes (O. Matos, P. de Moura, E. Krüger & A. Rabello, 2004, p.56). Si se evalúa la dimensión para cada frecuencia se tiene que para la serie diaria éste es de 1.56568, para la serie semanal y mensual son 1.4744 y 1.38865 respectivamente. Estos resultados sólo reflejan la característica fractal de la prueba pues están entre una curva cuya dimensión topológica es 1, y un plano cuya dimensión topológica es 2.

## 4.2. Hipótesis de los Mercados Fractales.

Con base en los resultados de los puntos anteriores y considerando el argumento de E. Peters (1994) que expresa que los modelos que basan su funcionamiento en la proposición de cambios de precio continuos y distribuidos como una normal no son adecuados para las características de colas gruesas y discontinuidades o cambios abruptos encontradas en las series de tiempo financieras o económicas (pp.43-44) se ha decidido incorporar su propuesta llamada Hipótesis de los Mercados Fractales (HMF) como modelo para entrelazar el análisis hecho a los datos con lo que ocurre con la toma de decisiones de los inversores pues son tanto éstas como los horizontes de inversión lo que se supone que induce a que las variaciones del precio tanto del índice de mercado como de las acciones de las empresas que participan en él tengan las características mencionadas en los capítulos 2 y 3. Tal hipótesis se resume de la siguiente manera:

1. El mercado es estable cuando consiste de inversores que cubren un gran número de horizontes de inversión. Esto asegura que haya una amplia liquidez para los traders<sup>50</sup>.
2. El conjunto de información está más relacionado al sentimiento de los mercados y a factores técnicos en el corto plazo que en el largo plazo. Cuando el horizonte de inversión incrementa, la información fundamental de largo plazo domina. En consecuencia, el cambio de precio puede reflejar información importante únicamente para ese horizonte de inversión.

---

<sup>50</sup> Un trader puede ser considerado tanto como una persona que realiza operaciones de compra-venta de activos por cuenta propia como un agente, persona o institución que realiza las mismas actividades (Arco Juan, en línea).

3. Si ocurre un evento que hace cuestionable la validez de la información fundamental, los inversores de largo plazo ya sea que dejen de participar en el mercado o que comiencen a basarse en el conjunto de información de corto plazo. Cuando los horizontes de inversión del mercado se reducen a un nivel uniforme, el mercado comienza a ser inestable. No hay inversores de largo plazo que estabilicen el mercado al ofrecer liquidez para los inversores de corto plazo.

4. Los precios reflejan una combinación de trading técnico de corto plazo y valuación fundamental de largo plazo. Por lo tanto, los cambios de precio en el corto plazo son probables a ser más volátiles, o “ruidosos”, que las operaciones a largo plazo. La tendencia subyacente en el mercado es un reflejo de los cambios en los ingresos esperados, basados en el entorno económico cambiante. Las tendencias de corto plazo son más probables que resulten del comportamiento de la multitud de personas. Esta no es razón para creer que la longitud de las tendencias de corto plazo estén relacionadas con las tendencias económicas de largo plazo.

5. Si un valor no se vincula con el ciclo económico, entonces no habrá una tendencia de largo plazo. El trading, la liquidez, y la información de corto plazo dominarán.

(Traducción propia de E. Peters, 1994, p.49)

Como la Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME) tiene tres formas de eficiencia y sobre éstas se realizan pruebas para verificar a cuál pertenece el objeto de estudio (ver punto 1.2.4), se ha de considerar una sencilla prueba para medir la eficiencia de un mercado o una serie de acciones mediante la propuesta que hacen Gu, Shao & Wang (2013) pues ésta ayudará a conocer si tales sujetos están cerca de la eficiencia débil de la HME o si presentan las características arriba mencionadas de la HMF ya que se asumirá que la forma débil de eficiencia es la más cercana, en el mejor de los casos, a explicar las particularidades ya mencionadas sobre el comportamiento de los datos.

Se construye un índice de eficiencia considerando el valor absoluto de la diferencia entre el valor del exponente de Hurst y la constante 0.5, por lo que ésta queda definida como:

$$EI = |H - 0.5|$$

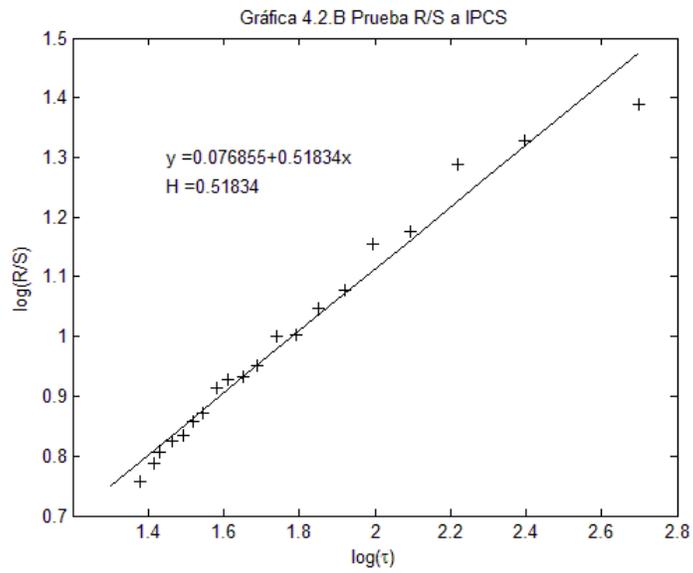
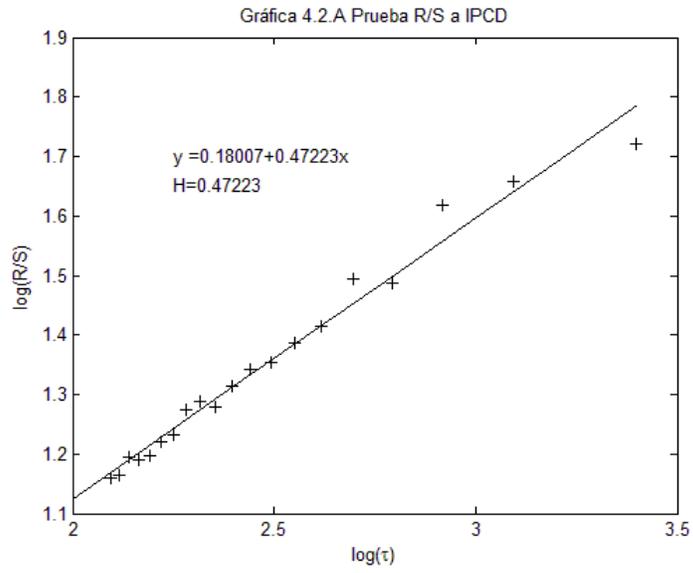
(p.363).

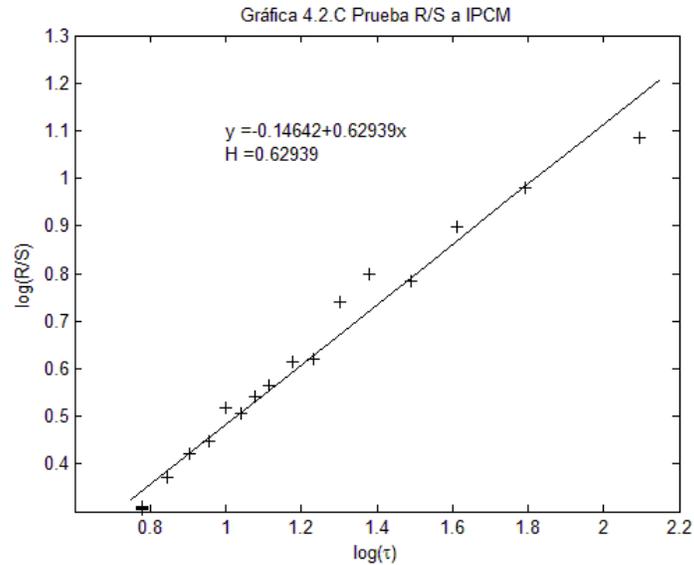
Hipotéticamente, un valor de 0.5 para H implica que la serie es de incrementos independientes y que se encuentran distribuidos normalmente por lo que confirmaría la HME (AlAbdulhadi, Shetty & Alshamali, 2013, p.7878). Kristoufek (2009) señala que tal

valor también puede adjudicarse a una serie dependiente de corto plazo (p.2) por lo que si se llega a confirmar la HME será sólo en su forma débil (Gu, Shao & Wang, 2013, p.363). Si el valor de *EI* es bajo, mayor será la eficiencia del mercado y viceversa pues valores altos de *H* están asociados a series o índices menos eficientes (Kristoufek & Vosvrda, 2013, p.190) así como también a correlaciones de largo plazo en los rendimientos (Budinski-Petković, Lončarević, Jakšić & Vrhovac, 2014, p.44).

En agosto del año 2011 Grupo Carso, Grupo Financiero Inbursa e Inmuebles Carso habían dejado de ser parte de la muestra del IPC (Índice de Precios y Cotizaciones), aunque América Móvil continuó estando en ella. En agosto de 2014 Grupo Carso volvió a incorporarse a la muestra posicionándose en el lugar 14 de las 35 emisoras que conforman el índice (Chávez, en prensa, Jiménez, en prensa), de esto se puede apreciar que posiblemente existe una relación entre el comportamiento del índice, del grupo y sus subsidiarias que pertenecen a la muestra por lo que se ha de medir, por conveniencia, la eficiencia del IPC y del grupo únicamente. La muestra disponible del IPC fue obtenida de la página de Yahoo finanzas, para hacer coincidir el tamaño de la muestra de las acciones del grupo con la del IPC se ha considerado el período que comienza el 03/01/1995 y termina el 30/10/2014, sólo se pierde una observación pues el período del grupo comienza el 02/01/1995. Se realizó el mismo procedimiento para obtener las series de frecuencia semanal y mensual pues los datos son de frecuencia diaria. La frecuencia diaria consta, después de haber evaluado las primeras diferencias, de 4984 datos, las frecuencias semanal y mensual están formadas por 996 y 248 datos respectivamente. Relativamente tienen la misma cantidad de datos por lo que no habrá un sesgo relevante en la estimación de *H*.

El valor de *H* para el IPC diario es de 0.47223 (ver gráfica 4.2.A), para el IPC semanal es de 0.51834 (ver gráfica 4.2.B) y para el IPC mensual es de 0.62939 (ver gráfica 4.2.C). Hay que recordar que los valores de *H* para Grupo Carso en su frecuencia diaria, semanal y mensual son 0.43432, 0.5256 y 0.61135 respectivamente, lo que se observa en ambas series es un aumento del valor de *H* lo que implica una pérdida de eficiencia y correlaciones en los rendimientos en valor absoluto a largo plazo (Turiel & Pérez-Vicente, 2005, p.478), por ello el *EI* de ambos pasa de tener un valor bajo a un valor alto (ver tabla 4.2.A).





<b>Cuadro 4.2.A EI para IPC y Grupo Carso</b>			
Serie	H	Constante	EI
IPC Diario	0.47223	0.5	0.02777
IPC Semanal	0.51834	0.5	0.01834
IPC Mensual	0.62939	0.5	0.12939
GCarso Diario	0.43432	0.5	0.06568
GCarso Semanal	0.5256	0.5	0.0256
GCarso Mensual	0.61135	0.5	0.11135

Cada frecuencia de tiempo u horizonte de inversión (Kristoufek, 2012, p.1250065-5) cuenta con características propias que sólo en el sentido estadístico llegan a ser semejantes a las de las otras dos debido a su naturaleza fractal. Considerando la primer frecuencia se nota que tanto el valor de H del grupo como el del IPC se encuentran por debajo del valor teórico de una serie de distribución normal lo que se interpreta como la posibilidad de que los inversores prefieran este horizonte por las ganancias rápidas que de ella se obtienen, teniendo en cuenta que para invertir en títulos en el país se necesite de intermediarios que estén bajo control y supervisión de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) además de que deberán cumplir con requisitos que las instituciones contemplan para este tipo de actividades. En este horizonte, según la HMF los cambios de precio se deben al comportamiento en multitud, incorporándose además factores psicológicos o sentimentales y técnicos, ejemplo de esta idea fue comentada en la nota al pie de página número 47. El 6 de enero de 2011 se anuncia el debut de Minera Frisco en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), esto propició que las acciones del grupo tuvieran un incremento de precio del 26.33% por el sólo hecho de tal incorporación (Valores en El Economista, en prensa), se asume que los inversores se dejaron llevar por la impresión de que tal minera al pertenecer

a las empresas que puede controlar Carlos Slim tendría una participación en el mercado que propiciaría ganancias extraordinarias en el capital de los inversores.

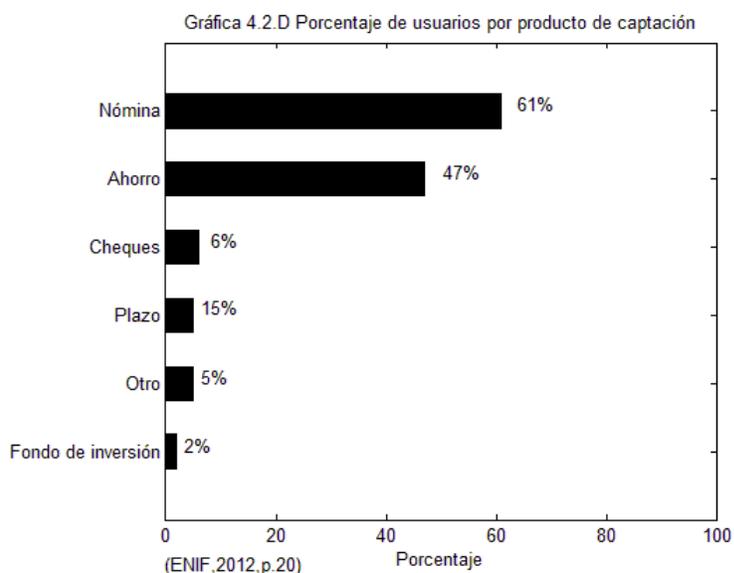
Los valores de  $H$  para la frecuencia semanal del grupo y del IPC están muy cerca del valor 0.5 pero esto no significa que sean eficientes o bien lo pueden ser pero en el sentido de la eficiencia débil. En este horizonte las tendencias que siguen los cambios comienzan a sobresalir pero no se mantienen, son irregulares e impredecibles. Los inversores, por lo tanto no podrían basar sus expectativas en los cambios de precio pasado puesto que si se considera el valor de  $H$  como la posibilidad de que dos eventos consecutivos ocurran se tendría la probabilidad de que un cambio se mantenga fuera de 51.834% y 52.56% para el IPC y para Grupo Carso respectivamente, lo que supone una pérdida de eficiencia en el sentido del análisis técnico ya que prácticamente no hay manera de anticiparse a los estímulos del mercado. Para el caso de Grupo Carso, se pueden adjudicar estas observaciones al valor del parámetro  $\alpha$  de los cambios positivos y negativos pues según las observaciones de B. Mandelbrot dichos valores son una forma de la variación salvaje.

Para la frecuencia mensual la situación cambia ya que el valor de  $H$  para el IPC y del grupo están por arriba de 0.6 lo que conduce a considerarlas como series persistentes, lo que equivale a decir que las tendencias son más marcadas pero aún impredecibles, a partir de aquí la eficiencia se pierde ya que ahora los inversores sí pueden basar sus expectativas de ganancia en los cambios de precio pasados. La HMF dice que los cambios de precio en el largo plazo son menos volátiles y que las tendencias en este horizonte no se relacionan con las tendencias ocurridas en el corto plazo. La conjunción de la menor volatilidad con el efecto de memoria de largo plazo, debido a que los inversores consideran los registros pasados y por tanto juzgan el desempeño de las empresas o en este caso el del grupo para tomar decisiones, son algunos de los factores que se suponen que inducen a que las tendencias se acentúen a pesar de que la impredecibilidad permanece latente. Además, se puede considerar el hecho de que en el largo plazo, según la HMF, exista una relación entre los ciclos económicos y la participación del grupo pues habrá factores exógenos que llegarán a alterar las decisiones de la empresa así que esta observación se suma a las situaciones que definirían el efecto de memoria.

En el trabajo de Kristoufek & Vosvrda (2013) se encuentra un análisis de eficiencia aplicado a 41 mercados, incluido el mexicano, con la particularidad de que el índice que proponen difiere del definido por Gu, Shao & Wang (2013) debido a una mayor complejidad en su estimación aunque esta situación no sesga los resultados, ambos trabajos mencionan la menor eficiencia del IPC. El análisis es poco más detallado en Kristoufek & Vosvrda (2013) pues los autores mencionan que México está dentro de los mercados menos eficientes junto con otros cinco de América Latina, cuatro de Asia y tres de Oceanía, ellos adjudican que la menor eficiencia se relaciona con la ubicación geográfica (p.190); es decir, que esta situación implicará que los mercados de países subdesarrollados tengan límites que

impacten de alguna manera las actividades de las empresas y por ello los inversores tomen la decisión de destinar sus recursos a la compra de acciones de empresas extranjeras.

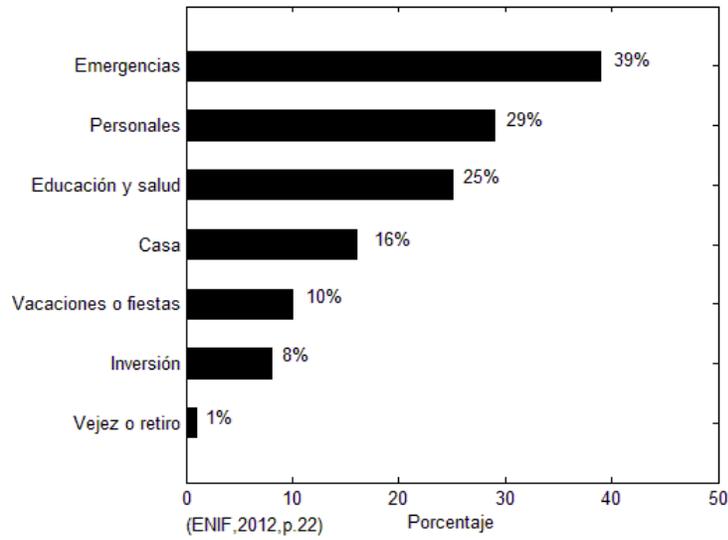
En la Encuesta Nacional de Inclusión Financiera (ENIF) de septiembre de 2012 se encuentran los productos de ahorro formal usados por las personas, la población total encuestada es de 24'999,732 personas adultas, de éstas, el 61% usa principalmente la nómina como instrumento para tal fin seguido del ahorro con un 47%, se destaca que sólo el 2% emplea los fondos de inversión<sup>51</sup> (ver gráfica 4.2.D). El destino que le dan al ahorro formal se muestra en la gráfica 4.2.E, se aprecia que las emergencias (39%), lo personal (29%) y educación y salud (25%) son los principales destinos, en este sentido la inversión cuenta con tan sólo el 8%. La barrera más importante (ver gráfica 4.2.F) que impide a las personas mantener un ahorro es que sus ingresos son insuficientes o variables (73%) además de que o no les interesa o no lo necesitan (16%). Por último, en el ahorro informal sólo el 4% de la población encuestada destina sus recursos a la inversión (ver gráfica 4.2.G).



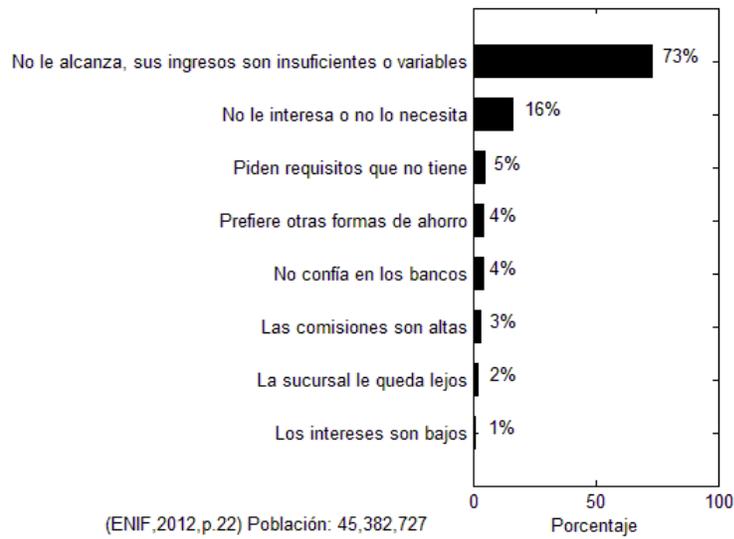
<sup>51</sup> Según el glosario de la ENIF (2012), un fondo de inversión es:

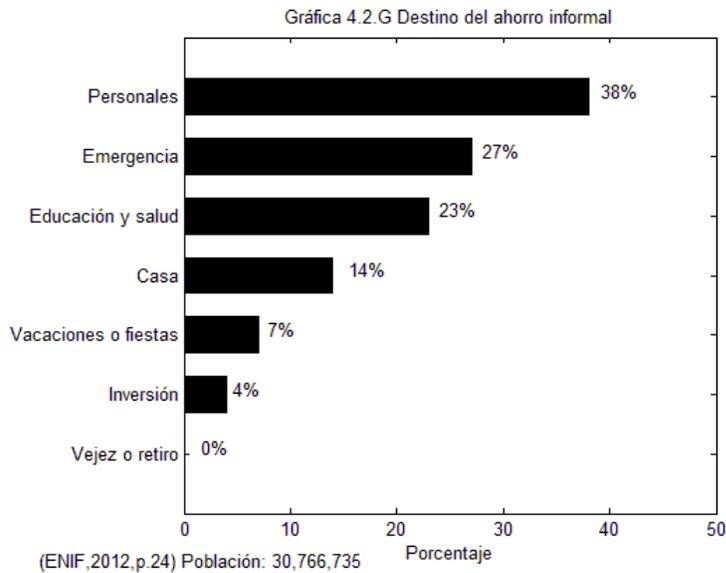
un instrumento financiero que reúne a personas que quieren invertir su dinero. El fondo se integra con el dinero de las personas y una entidad o institución se ocupa de invertirlo (cobrando comisiones) en una serie de activos como acciones, valores gubernamentales, obligaciones bancarias, títulos de renta fija, derivados o una combinación de todos éstos. Pueden tener mejores ganancias que en las cuentas de ahorro, pero también presentar pérdidas (INEGI, en línea).

Gráfica 4.2.E Destino del ahorro formal



Gráfica 4.2.F Barreras al ahorro formal





Además de la proposición de la ubicación geográfica, se considera que la falta de educación financiera, de la que se ha encargado la CONDUSEF (Comisión Nacional para la Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros) de ampliar a través de revistas, recursos electrónicos y atención telefónica (CAT), es un factor que favorece la disminución de la eficiencia del mercado pues comparados con los inversores de Estados Unidos, existe una brecha entre la disponibilidad de los recursos y el destino de estos pues en el estudio ya citado de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (ver cuadro 3.A) las familias estadounidenses tienen mayor preferencia por acciones y otras participaciones (33.1%) y los fondos de pensiones (23.8%), lo que implica que sí tengan una previsión a largo plazo y también que su nivel de educación financiera es relevante.

Cuando se menciona que la serie de las acciones del grupo pierde eficiencia al pasar de un horizonte a otro no implica que su desempeño en la economía real sea deficiente, se hace referencia al comportamiento de la función de autocorrelación de los rendimientos en valor absoluto y a la tendencia de presentar las características de la eficiencia débil. Al ser un grupo que puede impactar la perspectiva de los inversores con noticias de fusiones, adquisiciones o relevantes, éste puede generar breves períodos de especulación que de acuerdo a B. Mandelbrot y L. Hudson (2006) son los más importantes pues reportan mayores beneficios, esto está relacionado a la capacidad de presentar la metáfora de los mercados turbulentos ya que hay una preferencia por el horizonte más corto de inversión, que en este caso sería la frecuencia diaria (Budinski-Petković, Lončarević, Jakšić & Vrhovac, 2014, p.44). Con esto comienza la intermitencia de la turbulencia pero predominará el flujo laminar ya que en los análisis hechos a la suma acumulada de la función de autocorrelación después de aproximadamente 2.5 años el efecto de memoria de largo plazo es menos acentuado, lo que puede dar cabida al comportamiento aproximadamente normal pues cuando se evaluó el parámetro  $\alpha$  para los cambios por

separado de la frecuencia mensual se encontró que el positivo y dominante, por el número de observaciones contenidas, está prácticamente cerca del valor de una distribución normal teórica, pues éste es de 1.990, así que los inversores de largo plazo no podrán obtener mayores beneficios si basan sus predicciones en los precios pasados (por la eficiencia débil) hasta que de nuevo surja la pauta de la turbulencia, lo que implica que los inversores cambien su horizonte al corto plazo y que esto sea estimulado por la aparición de una nueva noticia sobre las actividades del grupo.

La espontaneidad del surgimiento de estas pautas complejas, en la perspectiva de la teoría de redes o la teoría del caos, es lo que le da el adjetivo de estructura fractal al grupo pues la geometría fractal dice que un fractal necesita de un iniciador, un generador y una regla de recursión para poder ser creado, siguiendo una analogía con esto se puede decir que el iniciador son los horizontes de los inversores, sus perspectivas y sentimientos, las condiciones que se necesitan para poder invertir en valores, entre otras, el generador estaría dado por las noticias que dé el grupo sobre sus estrategias de inversión, de expansión, etc., pero que puedan ser relevantes para los inversores, y la regla de recursión sería la invarianza o autoafinidad encontrada en los cambios de precios; es decir, ya que las pautas complejas no son predecibles en duración por carecer de una frecuencia estable o capaz de ser estimada propicia que las propiedades estadísticas ya mencionadas se mantengan en los diferentes horizontes o frecuencias, así que el paso por los diferentes valores de  $H$ , y lo que ello implica, será la característica sobresaliente de dicha regla.

## **Conclusiones.**

La relación que hay entre los modelos expuestos en el capítulo uno y el análisis fractal es la de tener como base un desarrollo progresivo del conocimiento obtenido a partir de estudiar las propiedades estadísticas de los datos. Este conocimiento ha planteado la necesidad de incluir en ellos la mayor parte de las características que se han encontrado pero al hacerlo salta la necesidad de proponer pruebas cada vez más sofisticadas para comprobar tales situaciones.

En el análisis fractal, tales propiedades están incluidas en las consideraciones que se expusieron en el capítulo tres así que para su verificación no fue necesario incluir pruebas sofisticadas o hacer suposiciones, lo que se hizo fue tomar las herramientas que proporciona la estadística descriptiva, modificarlos y con ello contrastar las hipótesis de B. Mandelbrot. La parsimonia en este tipo de análisis le otorga una ventaja frente otras propuestas pues se comprobó que se pueden emplear dos o tres parámetros para proponer resultados.

La intención de hacer este análisis fue la de mostrar cómo, tras la unificación de la teoría del caos con los fractales y el análisis económico, un fenómeno que puede ser sencillo presenta diversos comportamientos y la manera en que esta situación puede ser verificada.

Se subrayó que el uso de la distribución normal como base en los modelos conlleva divergencia entre los resultados y las proyecciones que se hacen. Como el análisis se apoya en el uso de las distribuciones estables, esto permite una disminución de esta situación gracias a una de sus propiedades. Tal propiedad llamada estabilidad permite mantener constante los factores de riesgo relacionados al fenómeno estudiado por lo que es válido emplear las mismas herramientas en diferentes escalas de tiempo. A pesar de que el nivel de riesgo es distinto en cada una, esto no afecta los resultados pues al objeto estudiado se le da la libertad de cambiar o transitar por diferentes estados.

La forma en la que se probó el escalamiento dio como resultado la visualización de una hilera de puntos que describen una línea recta de pendiente negativa con la particularidad de que dicha recta tiene una ligera distorsión provocada por el sesgo. Tras hallar esto se evaluaron los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la distribución estable para los datos pues el escalamiento en los cambios, aunado al sesgo, es evidencia de la existencia de una ley potencial. Los valores obtenidos del parámetro  $\alpha$  confirmaron que los datos admiten la hipótesis de B. Mandelbrot sobre el rango en el que se encuentran las series de tipo económico y financieras.

Los efectos Noé y José fueron evidentes desde las pruebas de normalidad pues los boxplots de cada frecuencia contenían muchos outliers además de que se mostró la leptocurtosis en su distribución. Con los valores del factor de ley de potencia se encontró que la serie presenta ambos efectos de manera simultánea pues los cambios positivos y negativos crean una combinación de comportamiento normal o suave y errático o salvaje. La frecuencia diaria tiene cambios positivos que son erráticos y cambios negativos próximos a ser de distribución normal, lo mismo pasa con la frecuencia mensual sólo que en sentido contrario. La frecuencia más errática es la semanal pues los valores de ambos cambios se aproximan a la unidad. Si se toma en cuenta únicamente el efecto José entonces los datos resaltan el efecto de memoria de largo plazo con la particularidad de que en la frecuencia mensual tal comienza a ser menos pronunciado. Esta situación planteó la necesidad de verificar la idea de que el sentido de los cambios no está correlacionado con el anterior pero en valor absoluto sí así que empleando la gráfica de la función de autocorrelación (que no fue incluido en el trabajo) es como se observó que ésta no decaía de manera hiperbólica, cuando se evaluó en valor absoluto la función presentó tal decaimiento. Para corroborar el efecto de memoria se usó la evaluación de la suma acumulada de esta función obteniendo resultados favorables.

Por otra parte, al pasar del análisis estadístico al análisis teórico se encontró que los factores de riesgo son los mismos en las tres frecuencias usadas, situación que permitió usar las mismas herramientas de análisis en ellas, se verificó que cada frecuencia tiene su propio nivel de riesgo; es decir, a la vez que se cumple la metáfora de los mercados turbulentos, la frecuencia diaria es más riesgosa para los poseedores de dicha acción debido a que están sujetos a los impactos que causan las nuevas noticias sobre las actividades del grupo pero el

alto riesgo también implica mayores beneficios, esto se comprobó con un hecho ocurrido al momento en que entró Minera Frisco a la BMV. Si bien es cierto que es un caso aislado y que puede considerarse no significativo, para el contexto empleado en el trabajo se considera relevante ya que estos hechos aislados son los que definen las propiedades estadísticas de la variable.

Al pasar a la frecuencia semanal el riesgo se convierte en incertidumbre pues se puede estar cerca de un comportamiento casi normal debido al valor reportado de H. Interpretada como una medida de probabilidad, al tener un poco más del 50% de certidumbre de que un cambio dado en una dirección se mantenga, el seguimiento de pautas que reporten mayores beneficios no se sostiene por lo que el análisis técnico no podrá ser usado, esto puede abrir la posibilidad de usar las técnicas mencionadas en el capítulo 1 a partir del punto 1.2.1 hasta el punto 1.2.7 con la reserva de tomar precauciones pues un hecho aislado podría cambiar este comportamiento, incluso la HME en su forma débil puede ser un modelo conveniente para analizar los datos. Con respecto a la frecuencia mensual la situación cambia debido a que la serie es considerada como persistente lo que implica que las cuasitendencias o cuasiciclos sean relevantes. Los inversionistas fundamentales, los que operan a plazos largos, pueden comenzar a seguir las tendencias aunque es claro que éstas son no predecibles y su duración es desigual pero el reforzamiento de la tendencia se considera relevante por el valor de H que está por arriba de 0.6 o del 60%. Si lo mejor es estimar la posible volatilidad futura se podría considerar adquirir las acciones en el presente y dejar que pasen 2.5 años aproximadamente, que es el período que se encontró donde el efecto de memoria de largo plazo es menos acentuado, para que se observe el incremento del capital invertido pues si la serie no sigue un movimiento browniano sí sigue la generalización de éste llamado movimiento browniano fraccional pero en su categoría de ser persistente así que la trayectoria que siga el precio se habrá apartado de su punto de inicio; es decir, si el precio el día de hoy, 10 de abril de 2015, es de \$65.9 entonces probablemente el precio para el 10 de septiembre de 2017 podrá ser 10, 20 ó 30% mayor aunque en su trayectoria pueda caer, subir o mantenerse.

El factor encontrado que se puede mantener o ser invariante en los tres horizontes es la falta de educación financiera y sus implicaciones. Ésta es la que desde la perspectiva de este trabajo incentiva a las personas con capacidad de ahorro, de manera formal o informal, a invertir en títulos pero como en el país, según los resultados de la ENIF 2012, sólo el 2% de las personas encuestadas destina el 8 y 4%, para personas formales e informales respectivamente, de su ingreso a tal rubro se nota que esta situación induce a la pérdida de eficiencia del mercado de valores medido a través del IPC. Coexistiendo con barreras relevantes tales como que el ingreso de los encuestados no es suficiente o es variable o que no les interesa o no lo necesitan se puede suponer que hay factores macroeconómicos que también inducen a que el mercado accionario sea sólo para personas que superen tanto las barreras de inversión de las casas de bolsa como las ya mencionadas. Tal situación,

combinada con las propias del grupo alimentan al sistema, esta particularidad es la que le asigna el adjetivo fractal enfatizando la autoafinidad ya que lleva implícito en todos los niveles un grado distinto de aleatoriedad, además, cada uno de ellos se desarrolla de forma independiente al grupo de tal forma que crean sus propias estructuras complejas pero se integran mediante vínculos simples, una alteración a ellas no afecta de manera lineal a todo el grupo así que la búsqueda de más factores tendría que hacerse mediante aproximaciones sucesivas a los que se encontraron.

Los métodos expuestos son sencillos comparados con los que se pueden encontrar en los textos relacionados al análisis fractal, estos últimos tienen la particularidad de o ser derivados de simulaciones de variables con distribución normal, de necesitar de un software especializado para ser empleados o asumen que los datos deben tener ciertas características por lo que plantean inconvenientes y sugieren contradicciones metodológicas. Por ejemplo, los métodos que se revisaron para estimar los parámetros de una serie que se sabe que tiene una distribución estable condicionan a que ésta debe ser una variable estable reducida. Los datos usados en el trabajo no son simétricos por las razones ya comentadas así que el método propuesto es el más asequible desde el punto en que no restringe y la estimación de un parámetro no está condicionada al valor de los otros. La austeridad de lo expuesto en el capítulo cuatro no sesgó los resultados y sí permitió llegar a cumplir los objetivos planteados y comprobar la hipótesis del trabajo.

Si la intención fuera proponer métodos de pronóstico se necesitaría introducir conceptos más sofisticados que se derivan del uso de los multifractales. Su uso supera los propósitos de este trabajo por lo que sólo se remitirá a mencionar uno de los modelos más relevantes que emplea tal idea, tal es el MMAR (*Multifractal Model of Asset Returns*), en éste las medidas multifractales y los exponentes locales de Hölder tienen la capacidad de describir áreas donde los datos tienden a concentrarse, conocida esta concentración como volatilidad. Conociendo los valores de los exponentes es como se puede simular una serie que si no tendrá la misma apariencia en una gráfica sí tendrá las mismas propiedades estadísticas que la serie original haciendo que sea más fácil hacer proyecciones a largo plazo.

## Anexos.

### A.1 Anexo al Capítulo 1. Punto 1.2.3.

Para generar la gráfica 1.2.3.A se empleó el programa Stata 12. Las instrucciones son las siguientes:

```
set obs 1000
gen obs=_n
tsset obs
gen V.A. Normal=invnorm(uniform() )
histogram V.A. Normal, percent norm width(0.554) title("Gráfica 1.2.3.A
Distribución normal") note ("Elaboración propia. La v.a. tiene media cero
y desviación estándar uno")
```

### A.2 Anexo al Capítulo 2. Punto 2.

Para generar la gráfica 2.A se empleó el programa MatLAB R2013a. Primero se crea, en un script nuevo, la función “Mandelbrot\_plot” que se puede encontrar en Molero Jiménez, 2012, pp.53-54 y éste se guarda como un archivo m.

```
function Mandelbrot_plot(n,k,Xr,Yr)
% Funci3n que dibuja el conjunto de Mandelbrot
% Mandelbrot plot(n,k,Xr,Yr)
% Variables de entrada:
% n - n3mero de puntos de la matriz
% k - n3mero de iteraciones
% Xr - rango de valores del eje x, Xr(1,1) - valor m3n, Xr(1,2)
% - valor m3ax
% Yr - rango de valores del eje y, Yr(1,1) - valor m3n, Yr(1,2)
% - valor m3ax
% ejemplo:
% Mandelbrot plot(500,100,[0 2],[0 2])
% Se crea la matriz con el tama3no definido
x = linspace(Xr(1,1),Xr(1,2),n);
y = linspace(Yr(1,1),Yr(1,2),n);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
W = zeros(length(X),length(Y));
% Se rellena la matriz utilizando el m3todo de Mandelbrot
for m = 1:size(X,2)
for j = 1:size(Y,2)
[w,iter] = Mandelbrot(X(m,j)+Y(m,j)*1i,k);
W(m,j) = W(m,j) + iter;
end
end
% Se pinta el conujnto de Mandelbrot
hold on;
colormap(jet);
pcolor(X,Y,W);
shading interp;
hold off;
% Funci3n para calcular el conjunto de Mandelbrot
function [pri,it] = Mandelbrot(c,m)
k = 0;
z = c;
```

```

while k < m
if abs(z) > 2
pri = 1;
it = k;
return;
end
z = z^2 + c;
k = k + 1;
end
pri = 0;
it = k;

```

Después en un nuevo script se escribe lo siguiente para obtener la gráfica:

```

Mandelbrot_plot(900,25,[-2 1],[-1.5 1.5])
title('Gráfica 2.A. Conjunto de Mandelbrot')
gtext('Código de Molero Jiménez,2012,pp.53-54')

```

Para las gráficas 2.B-G se usó Microsoft Excel para iterar la ecuación logística con los parámetros propuestos, los resultados se cargaron en el programa Stata 12 y para generar las gráficas se emplearon las instrucciones:

```

*Para la gráfica 2.B
gen t
tsset t
line X1 X2 t in 1/100, xtitle("Período") ytitle("Población")
title("Gráfica 2.B Ecuación logística para k=1.4 y 1.47")
note("Elaboración propia. X1 corresponde a k=1.4 y X2 a k=1.47")
*Para la gráfica 2.C
gen t
tsset t
line VARX1 VARX2 t, xtitle("Número acumulado de iteraciones, delta = 20")
ytitle("Varianza") title("Gráfica 2.C Varianza acumulada de X")
note("Elaboración propia. Varianza acumulada para las primeras 400
iteraciones")
*Para la gráfica 2.D
gen t
tsset t
line X3 X6 t, xtitle("Período") ytitle("Población") title("Gráfica 2.D
Ecuación logística para k=2 y 2.6") note("Elaboración propia. X3
corresponde a k=2.6 y X6 corresponde a k=2")
*Para la gráfica 2.E
gen t
tsset t
line X4 t, xtitle("Período") ytitle("Población") title("Gráfica 2.E
Ecuación logística para k=3.2") note("Elaboración propia")
*Para la gráfica 2.F
gen t
tsset t
line X5 t, xtitle("Período") ytitle("Población") title("Gráfica 2.F
Ecuación logística para k=3.5") note("Elaboración propia")
*Para la gráfica 2.G
gen t
tsset t
line X7 t, xtitle("Tasa de crecimiento") ytitle("Población")
title("Gráfica 2.G Bifurcación de la ecuación logística")
note("Elaboración propia")

```

## A.2 Punto 2.1.

Para la gráfica 2.1.A se abre un nuevo script en MaTLAB R2013a y se escribe el siguiente comando:

```
%Se genera un vector columna que contiene una línea recta de longitud
unidad; las abscisas
x = [0:0.001:1]';
%Se desea saber cuántas observaciones fueron generadas
N = size(x,1);
%Se genera una serie de ceros del tamaño de N; las ordenadas
y = zeros(N,1);
%Se hace la gráfica 2.1.B
plot(x,y,'k');
ylim([-1 1]);
title('Gráfica 2.1.A Iniciador de la curva de Koch');
gtext('Elaboración propia');
```

A partir de aquí, cada que se realice una gráfica se va a abrir un nuevo script así que el comando para generar las gráficas 2.1.B-C es el siguiente:

```
%Con base en los resultados anteriores se van a aplicar transformaciones
afines para obtener el generador de la curva, tales transformaciones son
las siguientes
a1 = (1/3)*x;
a11 = (1/3)*y;
a2 = ((1/6*x)+(-(sqrt(3)/6)*y))+1/3;
a22 = ((sqrt(3)/6)*x)+((1/6)*y);
a3 = ((1/6*x)+((sqrt(3)/6)*y))+1/2;
a33 = ((-(sqrt(3)/6)*x)+(1/6*y))+((sqrt(3)/6));
a4 = (1/3*x)+2/3;
a44 = 1/3*y;
%se agrupan las ordenadas con ordenadas y abscisas con abscisas
y1 = [a11;a22;a33;a44];
x1 = [a1;a2;a3;a4];
%Se grafica la primer etapa del proceso
plot(x1,y1,'k');
ylim([-0.05 0.35]);
title('Gráfica 2.1.B Generador de la curva de Koch');
gtext('Elaboración propia');
```

```
%Para la etapa dos, o curva de koch de nivel 2, del proceso se vuelve a
hacer lo mismo, ahora con las series formadas: x1 y y1
b1 = (1/3)*x1;
b11 = (1/3)*y1;
b2 = ((1/6*x1)+(-(sqrt(3)/6)*y1))+1/3;
b22 = ((sqrt(3)/6)*x1)+((1/6)*y1);
b3 = ((1/6*x1)+((sqrt(3)/6)*y1))+1/2;
b33 = ((-(sqrt(3)/6)*x1)+(1/6*y1))+((sqrt(3)/6));
b4 = (1/3*x1)+2/3;
b44 = 1/3*y1;
y2 = [b11;b22;b33;b44];
x2 = [b1;b2;b3;b4];
%Se grafica la segunda etapa
```

```

plot(x2,y2,'k');
ylim([-0.05 0.35]);
title('Gráfica 2.1.C Curva de Koch nivel 2');
gtext('Elaboración propia');

```

Para la gráfica 2.1.D el proceso anterior debe ser repetido tres veces más para llegar a la sexta etapa del proceso, el comando es prácticamente el mismo en cualquier nivel, sólo varían las x e y que se van generando.

```

%6ta etapa
f1 = (1/3)*x5;
f11 = (1/3)*y5;
f2 = ((1/6*x5)+(-(sqrt(3)/6)*y5))+1/3;
f22 = ((sqrt(3)/6)*x5)+((1/6)*y5);
f3 = ((1/6*x5)+((sqrt(3)/6)*y5))+1/2;
f33 = ((-(sqrt(3)/6)*x5)+(1/6*y5))+((sqrt(3)/6));
f4 = (1/3*x5)+2/3;
f44 = 1/3*y5;
y6 = [f11;f22;f33;f44];
x6 = [f1;f2;f3;f4];
%Se grafica la sexta etapa
plot(x6,y6,'k');
ylim([-0.05 0.35]);
title('Gráfica 2.1.D Curva de Koch nivel 6');
gtext('Elaboración propia');

```

## A.2 Punto 2.2.

Para generar las gráficas, primero se cargan los datos provenientes de Microsoft Excel. Los datos son obtenidos de yahoo finanzas y son transformados, primero obteniendo el logaritmo natural de cada observación y después evaluando la serie para la primera diferencia. Se usa el programa Stata 12 para realizar las gráficas.

```

*Para la gráfica 2.2.A
gen t
tsset t
line Diario t, xtitle("Número de cambios") ytitle("Magnitud del cambio")
title("Gráfica 2.2.A Cambio diario de precio de AMXL.MX")
note("Elaboración propia")
*Para la gráfica 2.2.B
gen t
tsset t
line Semanal t, xtitle("Número de cambios") ytitle("Magnitud del cambio")
title("Gráfica 2.2.B Cambio semanal de precio de AMXL.MX")
note("Elaboración propia")
*Para la gráfica 2.2.C
gen t
tsset t
line Mensual t, xtitle("Número de cambios") ytitle("Magnitud del cambio")
title("Gráfica 2.2.C Cambio mensual de precio de AMXL.MX")
note("Elaboración propia")

*Para la gráfica 2.2.D

```

```

histogram Diario, percent norm width(1.429) title("Gráfica 2.2.D
Histograma del cambio diario de precio de AMXL.MX") note (Elaboración
propia)
*Para la gráfica 2.2.E
histogram Semanal, percent norm width(1.699) title("Gráfica 2.2.E
Histograma del cambio semanal de precio de AMXL.MX") note (Elaboración
propia)
*Para la gráfica 2.2.F
histogram Mensual, percent norm width(2.032) title("Gráfica 2.2.F
Histograma del cambuí mensual de precio de AMXL.MX") note (Elaboración
propia)

```

### A.3 Anexo al Capítulo 3. Punto 3.1.3.1.

Primero, se va a cargar la función que permite generar una distribución estable. En el programa MaTLAB R2013a se va a abrir un nuevo script para escribir lo siguiente y posteriormente guardarlo como un archivo m. El código es autoría de Veillete (2012).

```

function r = stblrnd(alpha,beta,gamma,delta,varargin)
%STBLRND alpha-stable random number generator.
% R = STBLRND(ALPHA,BETA,GAMMA,DELTA) draws a sample from the Levy
% alpha-stable distribution with characteristic exponent ALPHA,
% skewness BETA, scale parameter GAMMA and location parameter DELTA.
% ALPHA,BETA,GAMMA and DELTA must be scalars which fall in the following
% ranges :
%   0 < ALPHA <= 2
%   -1 <= BETA <= 1
%   0 < GAMMA < inf
%   -inf < DELTA < inf
%
%
% R = STBLRND(ALPHA,BETA,GAMMA,DELTA,M,N,...) or
% R = STBLRND(ALPHA,BETA,GAMMA,DELTA,[M,N,...]) returns an M-by-N-by-...
% array.
%
%
% References:
% [1] J.M. Chambers, C.L. Mallows and B.W. Stuck (1976)
%     "A Method for Simulating Stable Random Variables"
%     JASA, Vol. 71, No. 354. pages 340-344
%
% [2] Aleksander Weron and Rafal Weron (1995)
%     "Computer Simulation of Levy alpha-Stable Variables and Processes"
%     Lec. Notes in Physics, 457, pages 379-392
%
if nargin < 4
    error('stats:stblrnd:TooFewInputs','Requires at least four input
arguments.');
```

```

if abs(beta) > 1 || ~isscalar(beta)
    error('stats:stblrnd:BadInputs',' "beta" must be a scalar which lies
in the interval [-1,1]');
end
if gamma < 0 || ~isscalar(gamma)
    error('stats:stblrnd:BadInputs',' "gamma" must be a non-negative
scalar');
end
if ~isscalar(delta)
    error('stats:stblrnd:BadInputs',' "delta" must be a scalar');
end
% Get output size
[err, sizeOut] = genOutsize(4,alpha,beta,gamma,delta,varargin{:});
if err > 0
    error('stats:stblrnd:InputSizeMismatch','Size information is
inconsistent.');
```

```

end
%---Generate sample----
% See if parameters reduce to a special case, if so be quick, if not
% perform general algorithm
if alpha == 2 % Gaussian distribution
    r = sqrt(2) * randn(sizeOut);
elseif alpha==1 && beta == 0 % Cauchy distribution
    r = tan( pi/2 * (2*rand(sizeOut) - 1) );
elseif alpha == .5 && abs(beta) == 1 % Levy distribution (a.k.a. Pearson
V)
    r = beta ./ randn(sizeOut).^2;
elseif beta == 0 % Symmetric alpha-stable
    V = pi/2 * (2*rand(sizeOut) - 1);
    W = -log(rand(sizeOut));
    r = sin(alpha * V) ./ ( cos(V).^(1/alpha) ) .* ...
        ( cos( V.*(1-alpha) ) ./ W ).^((1-alpha)/alpha );
elseif alpha ~= 1 % General case, alpha not 1
    V = pi/2 * (2*rand(sizeOut) - 1);
    W = - log( rand(sizeOut) );
    const = beta * tan(pi*alpha/2);
    B = atan( const );
    S = (1 + const * const).^(1/(2*alpha));
    r = S * sin( alpha*V + B ) ./ ( cos(V) ).^(1/alpha) .* ...
        ( cos( (1-alpha) * V - B ) ./ W ).^((1-alpha)/alpha);
else % General case, alpha = 1
    V = pi/2 * (2*rand(sizeOut) - 1);
    W = - log( rand(sizeOut) );
    piover2 = pi/2;
    sclshftV = piover2 + beta * V ;
    r = 1/piover2 * ( sclshftV .* tan(V) - ...
        beta * log( (piover2 * W .* cos(V) ) ./ sclshftV ) );
end
% Scale and shift
if alpha ~= 1
    r = gamma * r + delta;
else
    r = gamma * r + (2/pi) * beta * gamma * log(gamma) + delta;
end

end
%==== function to find output size =====%
```

```

function [err, commonSize, numElements] = genOutsize(nparams,varargin)
    try
        tmp = 0;
        for argnum = 1:nparams
            tmp = tmp + varargin{argnum};
        end
        if nargin > nparams+1
            tmp = tmp + zeros(varargin{nparams+1:end});
        end
        err = 0;
        commonSize = size(tmp);
        numElements = numel(tmp);

    catch
        err = 1;
        commonSize = [];
        numElements = 0;
    end
end

```

Teniendo dicha función ahora se van a generar las series con los parámetros que se han establecido, abriendo un nuevo script se escribe lo siguiente para la primer y segunda serie:

```

stblrnd(0.963,0,1,0,1000,1);
stblrnd(1.326,0,1,0,1000,1);

```

Para la serie que sigue una distribución normal se emplea Stata 12 y en un do file se escribe lo siguiente:

```

set obs 1000
gen obs=_n
tsset obs
gen normal=invnorm(uniform() )*0.0316227766 + 0

```

Los datos generados en MaTLAB R2013a se importan a Stata 12 para hacer las gráficas, para generarlas en un nuevo do file se escriben las siguientes instrucciones.

```

*Para la gráfica 3.1.3.1.A
ac stable1, title("Gráfica 3.1.3.1.A ACF v.a. estable a=0.963")
*Para la gráfica 3.1.3.1.B
ac stable2, title("Gráfica 3.1.3.1.B ACF v.a. estable a=1.326")
*Para la gráfica 3.1.3.1.C
ac normal, title("Gráfica 3.1.3.1.C ACF v.a. normal")

```

## A.4 Anexo al Capítulo 4. Punto 4.

Para generar esta gráfica primero se hizo una lista con las empresas que se encontraron en los reportes del Grupo, se ordenaron alfabéticamente y se les asignó un número, la lista es la siguiente:

1. Administradora Integral de Alimentos S.A. de C.V.
2. Adventure Tile Inc.
3. Allis Chalmers Energy Inc.
4. Alquiladora de Casas S.A. de C.V.
5. Alstom Mexicana S.A. de C.V.
6. Amanco México S.A. de C.V.
7. América Móvil S.A. de C.V.
8. América TELECOM S.A. de C.V.
9. AMX Argentina S.A.
10. Atrios de Chapultepec S.A. de C.V.
11. Autopista Arco Norte S.A. de C.V.
12. Banco Inbursa S.A.
13. Banco Santander Serfín S.A. de C.V.
14. BBVA Bancomer S.A.
15. Bronco Drilling MX S. de R.L. de C.V.
16. Cablena S.A.
17. Cablena S.L.
18. Café Caffé.
19. Carso Energy S.A. de C.V.
20. Carso Global Telecom S.A. de C.V.
21. Carso Infraestructura y Construcción S.A.B. de C.V. (CICSA).
22. CECSA.
23. Centro de Investigación y Desarrollo Condumex (CIDEC).
24. Centro Histórico de la Ciudad de México S.A. de C.V.
25. CFE Concesiones S.A. de C.V.
26. CG Railway.
27. Cigarros la Tabacalera Mexicana S.A. de C.V. (CIGATAM).
28. Ciudad Jardín.
29. Cleaver Brooks de México S.A. de C.V.
30. Cobre de México S.A. de C.V.
31. Comercializadora de Tiendas Internacionales S.A. de C.V.
32. Compañía de Telecomunicaciones de El Salvador S.A. de C.V.
33. Compañía de Teléfonos y Bienes Raíces.
34. Compañía Dominicana de Teléfonos C. por A.
35. Compañía Euler Euzkadi.
36. Compañía Internacional Minera S.A. de C.V.
37. Comunicación Celular S.A.
38. Concesionaria de Carreteras Autopistas y Libramientos de la República Mexicana S.A. de C.V.
39. Concesionaria de Vías Troncales S.A. de C.V.
40. Conductores Latincasa S.A. de C.V.
41. Conducel Austral Comercial e Industrial.
42. Consorcio Bosques.
43. Consorcio de Comunicación de Honduras S.A. de C.V.
44. Consorcio Ecuatoriano de Telecomunicaciones S.A. de C.V.
45. Consorcio Red Uno S.A. de C.V.
46. Construcción, Conservación y Mantenimiento Urbano S.A. de C.V.
47. Construcciones y Trituraciones S.A. de C.V. (COTRISA).
48. Constructora de Infraestructura Latinoamericana CILSA (Antes Aguatl).
49. Constructora Estrella S.A. de C.V. (CESA).
50. Constructora Mexicana de Infraestructura Subterránea S.A. de C.V.
51. Corporación de tiendas Internacionales S.A. de C.V.

52. CTE Telecom Personal S.A. de C.V.
53. CTI Compañía de Teléfonos del Interior S.A.
54. Dana Corporation.
55. DAX.
56. Delphi Automotive Systems.
57. Denny's (Cambia su denominación a Sanborns Café).
58. Discolandia.
59. Distribuidora Telcel S.A. de C.V.
60. Dorians.
61. Dorian's Tijuana S.A. de C.V. (Antes JC Penney).
62. Elementia S.A. (Antes MEXALIT S.A.).
63. Embratel Participacoes S.A.
64. Empresa Nicaragüense de Telecomunicaciones S.A.
65. Empresas Frisco.
66. Enesa S.A. de C.V.
67. ENITEL de Nicaragua S.A. de C.V.
68. Entretenimiento y algo más S.A. de C.V.
69. Estudio Cerámico México S.A. de C.V.
70. Euroline S.A. de C.V.
71. Ferrocarril de Suroeste (FERROSUR).
72. Fideicomiso F-00096 Cabi Coatzacoalcos S.A. de C.V.
73. Forum Coatzacoalcos.
74. France Cables Et Radio.
75. Fuerza y Clima S.A. de C.V.
76. Fundación Carlos Slim A.C.
77. Galaz, Yamazaki, Ruiz Urquiza, S.C.
78. Grupo Aluminio S.A. de C.V.
79. Grupo Calinda S.A. de C.V.
80. Grupo Carso S.A.B. de C.V.
81. Grupo Condumex.
82. Grupo Financiero Inbursa S.A. de C.V.
83. Grupo Internacional S.A.
84. Grupo México S.A.B de C.V.
85. Grupo PC Constructores.
86. Grupo Sanborns.
87. Grupo Telvista S.A. de C.V.
88. Heerema Group.
89. Ideal Panamá S.A.
90. IKM S. de R.L. de C.V.
91. Impulsora del Desarrollo y el Empleo en América Latina, S.A.B. de C.V. (IDEAL).
92. Industrial Cri S.A. de C.V.
93. Infraestructura y Saneamiento Atotonilco S.A. de C.V.
94. Infraestructura y Transportes de México S.A. de C.V. (ITM).
95. Ingenieros Civiles Asociados S.A.B. de C.V. (ICA).
96. Inmobiliaria Altabrisa S.A. de C.V.
97. Inmobiliaria Aluminio S.A. de C.V.
98. Inmobiliaria Carso S.A. de C.V.
99. Inmobiliaria las Trufas S.A. de C.V.
100. Inmobiliaria Para el Desarrollo de Proyectos S.A. de C.V.
101. Inmuebles Cantabria S.A. de C.V.
102. Inmuebles Carso S.A.B. de C.V.
103. Inmuebles Corporativos e Industriales CDX S.A. de C.V.
104. Inmuebles General S.A. de C.V.
105. Inmuebles Magad S.A. de C.V.
106. Inmuebles y Servicios Mexicanos S.A. de C.V.

107. JP Morgan Grupo Financiero.
108. La Feria del Disco México S.A. de C.V.
109. Lombardo Construcciones S.A.B. de C.V.
110. Más.
111. Met-Mex Peñoles.
112. Mexichem S.A.B. de C.V.
113. Minera Frisco S.A.B. de C.V.
114. Minera María S.A. de C.V.
115. Minera San Francisco del Oro S.A. de C.V.
116. Minera Tayahua S.A. de C.V.
117. Mixup.
118. Nacel.
119. Nacel de Centroamérica S.A.
120. Nacional de Cobre S.A. de C.V.
121. Net Servicios de Comunicacao S.A. de C.V.
122. No Problem.
123. Operadora CICSA S.A. de C.V. (antes Swecomex).
124. Operadora de Tiendas Internacionales S.A. de C.V.
125. Operadora Mercantil S.A. de C.V.
126. Pabellón Polanco.
127. Pam Pam S.A. de C.V.
128. PEMEX.
129. Philips Morris.
130. Planteir S.A.
131. Plaza Cuicuilco (Plaza Inbursa).
132. Plaza Insurgentes.
133. Plaza Loreto.
134. Plaza Satélite.
135. Plaza Universidad.
136. Porcelanite S.A. de C.V.
137. Precitubo.
138. Pricewaterhouse Coopers, S.C.
139. Procisa Ecuador S.A.
140. Procosertel S.A.
141. Productos Nacobre S.A. de C.V.
142. Promotora Comercial Sanborns S.A. de C.V.
143. Promotora de Industrias Mecánicas S.A. de C.V. (PROMECA)
144. Promotora Inmobiliaria Fresno S.A. de C.V.
145. Promotora musical S.A. de C.V.
146. Proyectos Educativos Inmobiliarios S.A. de C.V.
147. Radiomóvil Dipsa S.A. de C.V.
148. Renta de Equipo S.A. de C.V.
149. Saks Fifth Avenue.
150. Sanborn Hermanos S.A.
151. Sanborns Café.
152. Sears Operadora México S.A. de C.V.
153. Selmec Equipos Industriales S.A. de C.V.
154. Servicios Globales en comercio Electrónico S.A. de C.V.
155. Servicios Integrales GSM S. de R.L de C.V.
156. Sinergia Soluciones Integrales de Energía S.A. de C.V.
157. Solo un precio.
158. Soutwestern Bell International Holding Corp.
159. Star Médica.
160. Tabasco Oil Company LLC.
161. Telcel.

162. Telecomunicaciones de Guatemala S.A.
163. Teléfonos de México S.A. B. de C.V.
164. Teléfonos del Noroeste S.A. de C.V.
165. Tenedora de Empresas de Materiales para la Construcción S.A. de C.V.  
(TEMACO) [Industrias Nacobre]
166. Tenedora U.S., S.A. de C.V.
167. The Coffee Factory
168. Tower Records
169. Transportes Ferroviarios S.A. de C.V.
170. Tubos Flexibles S.A. de C.V.
171. U.S. Commercial (antes CompUSA)
172. Uninet S.A. de C.V.
173. Waldos
174. Wavin Overseas B.V.
175. Zentrum Zistemaz S.A. de C.V.

Estableciendo las respectivas relaciones entre ellas se emplea el programa Wolfram Mathematica 9 para realizar la gráfica. En un Notebook nuevo se escriben las siguientes instrucciones:

```
Graph[{80 \[DirectedEdge] 138, 80 \[DirectedEdge] 118,  
 80 \[DirectedEdge] 77, 80 \[DirectedEdge] 12, 80 \[DirectedEdge] 10,  
 80 \[DirectedEdge] 44, 80 \[DirectedEdge] 144,  
 80 \[DirectedEdge] 121, 80 \[DirectedEdge] 175,  
 80 \[DirectedEdge] 97, 80 \[DirectedEdge] 153,  
 80 \[DirectedEdge] 36, 80 \[DirectedEdge] 3, 80 \[DirectedEdge] 92,  
 80 \[DirectedEdge] 76, 80 \[DirectedEdge] 24,  
 80 \[DirectedEdge] 148, 80 \[DirectedEdge] 46,  
 80 \[DirectedEdge] 34, 80 \[DirectedEdge] 105,  
 80 \[DirectedEdge] 125, 80 \[DirectedEdge] 146,  
 80 \[DirectedEdge] 99, 80 \[DirectedEdge] 130,  
 80 \[DirectedEdge] 64, 80 \[DirectedEdge] 9, 80 \[DirectedEdge] 63,  
 80 \[DirectedEdge] 52, 80 \[DirectedEdge] 162,  
 80 \[DirectedEdge] 140, 80 \[DirectedEdge] 119,  
 80 \[DirectedEdge] 139, 80 \[DirectedEdge] 41,  
 80 \[DirectedEdge] 30, 80 \[DirectedEdge] 16, 80 \[DirectedEdge] 39,  
 80 \[DirectedEdge] 98, 98 \[DirectedEdge] 12,  
 80 \[DirectedEdge] 67, 80 \[DirectedEdge] 75, 80 \[DirectedEdge] 43,  
 80 \[DirectedEdge] 53, 80 \[DirectedEdge] 45, 80 \[DirectedEdge] 4,  
 80 \[DirectedEdge] 2, 80 \[DirectedEdge] 32, 80 \[DirectedEdge] 37,  
 80 \[DirectedEdge] 29, 80 \[DirectedEdge] 59,  
 80 \[DirectedEdge] 87, 80 \[DirectedEdge] 72, 80 \[DirectedEdge] 96,  
 80 \[DirectedEdge] 14, 80 \[DirectedEdge] 107,  
 80 \[DirectedEdge] 13, 80 \[DirectedEdge] 38,  
 80 \[DirectedEdge] 172, 80 \[DirectedEdge] 69,  
 80 \[DirectedEdge] 147, 80 \[DirectedEdge] 160,  
 80 \[DirectedEdge] 66, 80 \[DirectedEdge] 113,  
 80 \[DirectedEdge] 102, 80 \[DirectedEdge] 84,  
 84 \[DirectedEdge] 71, 71 \[DirectedEdge] 26, 84 \[DirectedEdge] 94,  
 84 \[DirectedEdge] 169, 80 \[DirectedEdge] 33,  
 80 \[DirectedEdge] 164, 80 \[DirectedEdge] 101,  
 101 \[DirectedEdge] 106, 80 \[DirectedEdge] 79,  
 80 \[DirectedEdge] 156, 80 \[DirectedEdge] 21,  
 21 \[DirectedEdge] 85, 85 \[DirectedEdge] 159,  
 21 \[DirectedEdge] 123, 123 \[DirectedEdge] 88,  
 21 \[DirectedEdge] 48, 21 \[DirectedEdge] 137,  
 21 \[DirectedEdge] 155, 21 \[DirectedEdge] 5, 21 \[DirectedEdge] 93,  
 21 \[DirectedEdge] 15, 21 \[DirectedEdge] 50,  
 50 \[DirectedEdge] 95, 50 \[DirectedEdge] 47, 50 \[DirectedEdge] 49,  
 50 \[DirectedEdge] 109, 80 \[DirectedEdge] 19,  
 19 \[DirectedEdge] 25, 80 \[DirectedEdge] 120,  
 80 \[DirectedEdge] 136, 80 \[DirectedEdge] 103,  
 80 \[DirectedEdge] 81, 81 \[DirectedEdge] 21, 81 \[DirectedEdge] 25,  
 81 \[DirectedEdge] 161, 81 \[DirectedEdge] 163,  
 56 \[DirectedEdge] 81, 54 \[DirectedEdge] 81, 81 \[DirectedEdge] 40,  
 40 \[DirectedEdge] 81, 81 \[DirectedEdge] 17,  
 81 \[DirectedEdge] 23, 81 \[DirectedEdge] 143,  
 81 \[DirectedEdge] 128, 81 \[DirectedEdge] 156,  
 156 \[DirectedEdge] 81, 81 \[DirectedEdge] 165,  
 165 \[DirectedEdge] 141, 165 \[DirectedEdge] 78,  
 165 \[DirectedEdge] 136, 136 \[DirectedEdge] 81,  
 81 \[DirectedEdge] 56, 165 \[DirectedEdge] 62,
```

```

165 \[DirectedEdge] 6, 112 \[DirectedEdge] 6, 6 \[DirectedEdge] 170,
81 \[DirectedEdge] 174, 81 \[DirectedEdge] 70,
81 \[DirectedEdge] 65, 65 \[DirectedEdge] 115,
65 \[DirectedEdge] 114, 65 \[DirectedEdge] 116,
115 \[DirectedEdge] 111, 114 \[DirectedEdge] 111,
116 \[DirectedEdge] 111, 80 \[DirectedEdge] 35,
80 \[DirectedEdge] 27, 90 \[DirectedEdge] 27,
129 \[DirectedEdge] 27, 42 \[DirectedEdge] 27,
80 \[DirectedEdge] 82, 80 \[DirectedEdge] 8, 80 \[DirectedEdge] 7,
80 \[DirectedEdge] 20, 20 \[DirectedEdge] 163,
158 \[DirectedEdge] 163, 74 \[DirectedEdge] 163,
20 \[DirectedEdge] 166, 80 \[DirectedEdge] 86,
86 \[DirectedEdge] 171, 86 \[DirectedEdge] 151,
86 \[DirectedEdge] 167, 86 \[DirectedEdge] 18,
86 \[DirectedEdge] 150, 86 \[DirectedEdge] 166,
86 \[DirectedEdge] 152, 86 \[DirectedEdge] 22,
22 \[DirectedEdge] 126, 22 \[DirectedEdge] 131,
22 \[DirectedEdge] 132, 22 \[DirectedEdge] 133,
22 \[DirectedEdge] 134, 22 \[DirectedEdge] 135,
22 \[DirectedEdge] 73, 22 \[DirectedEdge] 28, 86 \[DirectedEdge] 61,
61 \[DirectedEdge] 157, 61 \[DirectedEdge] 110,
61 \[DirectedEdge] 55, 61 \[DirectedEdge] 60,
61 \[DirectedEdge] 124, 61 \[DirectedEdge] 173,
86 \[DirectedEdge] 83, 83 \[DirectedEdge] 51,
86 \[DirectedEdge] 149, 86 \[DirectedEdge] 142,
142 \[DirectedEdge] 68, 142 \[DirectedEdge] 154,
142 \[DirectedEdge] 127, 142 \[DirectedEdge] 57,
142 \[DirectedEdge] 1, 142 \[DirectedEdge] 108,
142 \[DirectedEdge] 145, 145 \[DirectedEdge] 117,
145 \[DirectedEdge] 122, 145 \[DirectedEdge] 58,
145 \[DirectedEdge] 108, 145 \[DirectedEdge] 168,
86 \[DirectedEdge] 104, 104 \[DirectedEdge] 91,
104 \[DirectedEdge] 11, 104 \[DirectedEdge] 89,
86 \[DirectedEdge] 31, Labeled[86 \[DirectedEdge] 100, "vertex"]},
VertexLabels -> "Name", ImagePadding -> 4,
PlotLabel -> "Gráfica 4.A Grupo Carso", ImageSize -> 900]

```

## A.4 Punto 4.1.1.

Para generar las series se escribió el siguiente código en nuevo script en MaTLAB R2013a. La elaboración de tal es propia.

```

%Se cargan los datos de la serie diaria del precio de las acciones y se
etiqueta la serie con el nombre x
%Se determina el número de observaciones
N = size(x,1);
%Se determina el número entero de semanas en las que se puede dividir
P = floor(N/5);
%Si el total de los datos no fuera múltiplo de 5, entonces no serán
contemplados algunos de ellos, por eso se verifica el número total de
observaciones empleadas por medio de la instrucción
F = P*5;
%Se generan las series que contendrán cinco días de observaciones
h = x(1:5:F);
i = x(2:5:F);
j = x(3:5:F);
k = x(4:5:F);

```

```

l = x(5:5:F);
%Se genera una matriz de Px5
A = [h,i,j,k,l];
%Se evalúa el promedio con base en la matriz generada para así obtener la
nueva serie
Semana = mean(A,2);

%Para elaborar la serie mensual se borran los datos generados, ahora las
instrucciones son
N = size(x,1);
%Se determina el número entero de meses en las que se puede dividir
P = floor(N/20);
%Si el número de datos no fuera múltiplo de 20 se daría la posibilidad de
no contemplar algunas observaciones por lo que se va a verificar el
número que puede generar a través de la instrucción
F = P*20;
%Se generan las series que contendrán veinte días de observaciones
h = x(1:20:F);
i = x(2:20:F);
j = x(3:20:F);
k = x(4:20:F);
l = x(5:20:F);
m = x(6:20:F);
n = x(7:20:F);
o = x(8:20:F);
p = x(9:20:F);
q = x(10:20:F);
r = x(11:20:F);
s = x(12:20:F);
t = x(13:20:F);
u = x(14:20:F);
v = x(15:20:F);
w = x(16:20:F);
a = x(17:20:F);
b = x(18:20:F);
c = x(19:20:F);
d = x(20:20:F);
%Se genera una matriz de Px20
A=[h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,a,b,c,d];
%Se evalúa el promedio con base en la matriz generada para así obtener la
nueva serie
Mes = mean(A,2);

```

#### **A.4 Punto 4.1.2. Inciso a.**

Ahora los datos son transformados empleando el programa Microsoft Excel y después son cargados al programa Stata 12 donde, en un nuevo do file se escriben las siguientes instrucciones.

```

histogram FDGC, percent norm width(0.086) title("Gráfica 4.1.2.A
Histograma FDGC") note (Elaboración propia)
histogram FSGC, percent norm width(0.057) title("Gráfica 4.1.2.B
Histograma FSGC") note (Elaboración propia)
histogram FMGC, percent norm width(0.127) title("Gráfica 4.1.2.C
Histograma FMGC") note (Elaboración propia)

```

## Inciso b.

Para generar los boxplot lo único que se hizo fue pasar las series al programa Eviews 7 y por medio del menú que se despliega en el workfile se obtuvieron dichas gráficas.

### A.4 Punto 4.1.3.1.

Para elaborar las gráficas se basó en los siguientes cuadros.

Cuadro 4A. Frecuencia relativa de $> u$ en FDGC				
Clases		$f_i$	Amplitud de la clase	Frecuencia normalizada
$L_i$	$L_s$			
0	0.02605437	2365	0.02605437	32.05216508
0.02605437	0.05210873	367	0.02605437	4.973845491
0.05210873	0.0781631	68	0.02605437	0.921584451
0.0781631	0.10421747	18	0.02605437	0.243948825
0.10421747	0.13027183	9	0.02605437	0.121974413
0.13027183	0.18238057	3	0.05210873	0.020329069
0.18238057	0.3126524	1	0.13027183	0.002710543
0.3126524	0.33870677	1	0.02605437	0.013552713

Cuadro 4B. Frecuencia relativa de $< -u$ en FDGC				
Clases		$f_i$	Amplitud de la clase	Frecuencia normalizada
$L_i$	$L_s$			
0.00014532	0.06819011	2104	0.06804479	14.40186684
0.06819011	0.1362349	37	0.06804479	0.253264769
0.1362349	0.2042797	4	0.06804479	0.027379975
0.2042797	0.68059325	1	0.47631355	0.000977856
0.68059325	0.88472763	1	0.20413438	0.002281665

Cuadro 4C. Frecuencia relativa de $> u$ en FSGC				
Clases		$f_i$	Amplitud de la clase	Frecuencia normalizada
$L_i$	$L_s$			
0	0.02139253	252	0.02139253	21.30165437
0.021392526	0.04278505	153	0.02139253	12.9331473
0.042785053	0.06417758	75	0.02139253	6.339778088
0.064177579	0.08557011	37	0.02139253	3.127623857
0.085570105	0.10696263	18	0.02139253	1.521546741
0.106962632	0.12835516	11	0.02139253	0.92983412
0.128355158	0.14974768	3	0.02139253	0.253591124
0.149747684	0.17114021	3	0.02139253	0.253591124
0.171140211	0.23531779	1	0.06417758	0.028176792

Cuadro 4D. Frecuencia relativa de $< -u$ en FSGC				
Clases		$f_i$	Amplitud de la clase	Frecuencia normalizada
$L_i$	$L_s$			
0.000212469	0.04141876	313	0.04120629	17.18535801
0.041418756	0.08262504	86	0.04120629	4.721855556
0.082625043	0.12383133	31	0.04120629	1.702064212
0.12383133	0.16503762	7	0.04120629	0.38433708
0.165037618	0.32986277	3	0.16482515	0.041178973
0.329862766	0.41227534	2	0.08241257	0.054905297

Cuadro 4E. Frecuencia relativa de $> u$ en FMGC				
Clases		$f_i$	Amplitud de la clase	Frecuencia normalizada
$L_i$	$L_s$			
0.00020846	0.10390389	114	0.10369543	7.796974404
0.10390389	0.15575161	15	0.05184772	2.051835369
0.15575161	0.20759932	10	0.05184772	1.367890246
0.20759932	0.25944704	1	0.05184772	0.136789025
0.25944704	0.51868562	1	0.25923858	0.027357805

Cuadro 4F. Frecuencia relativa de $< -u$ en FMGC				
Clases		$f_i$	Amplitud de la clase	Frecuencia normalizada
$L_i$	$L_s$			
0.00057845	0.09311196	85	0.09253351	8.584917199
0.09311196	0.18564547	15	0.09253351	1.514985388
0.18564547	0.27817898	4	0.09253351	0.403996103
0.27817898	0.37071249	1	0.09253351	0.100999026
0.37071249	0.463246	1	0.09253351	0.100999026
0.463246	0.74084654	1	0.27760053	0.033666342

En MATLAB R2013a, abriendo un nuevo script se escriben las siguientes instrucciones.

```
%Se cargan únicamente los datos del límite superior y frecuencia
normalizada al programa, se etiqueta de la siguiente manera
%Al límite superior se le asigna la letra "x", y a la frecuencia
normalizada se le asigna la letra "y", paso seguido se le asigna la
palabra diario, semana y mes según corresponda y por último se le agrega
nada más las tres primeras letras de la palabra positivo y negativo según
sea el caso, por ejemplo, para el cambio diario positivo se tiene que
graficar la frecuencia y el límite así que xdiariopos significa que se
está tomando el límite superior de la frecuencia diaria del cambio
positivo
loglog(xdiariopos,ydiariopos,'k o','markerfacecolor','k')
```

```

hold on
loglog(xsemanapos,ysemanapos,'k ^','markerfacecolor','k')
hold on
loglog(xmespos,ymespos,'k s','markerfacecolor','k')
hold off
xlabel('Magnitud de los cambios de precio')
ylabel('Frecuencia de los cambios')
title('Gráfica 4.1.3.1.A Invarianza en los cambios de precio positivos')
legend('Cambio de precio diario','Cambio de precio semanal','Cambio de
precio mensual')

%Para la gráfica de cambios negativos
loglog(xdiarioneg,ydiarioneg,'k o','markerfacecolor','k')
hold on
loglog(xsemananeg,ysemananeg,'k ^','markerfacecolor','k')
hold on
loglog(xmesneg,ymesneg,'k s','markerfacecolor','k')
hold off
xlabel('Magnitud de los cambios de precio')
ylabel('Frecuencia de los cambios')
title('Gráfica 4.1.3.1.B Invarianza en los cambios de precio negativos')
legend('Cambio de precio diario','Cambio de precio semanal','Cambio de
precio mensual')

```

## A.4 Punto 4.1.3.2.

<b>Cuadro 4G</b>					
$v_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta)$					
	$\beta$				
$\alpha$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	2.439	2.439	2.439	2.439	2.439
1.90	2.512	2.512	2.513	2.513	2.515
1.80	2.608	2.609	2.610	2.613	2.617
1.70	2.737	2.738	2.739	2.742	2.746
1.60	2.912	2.909	2.904	2.900	2.902
1.50	3.148	3.136	3.112	3.092	3.089
1.40	3.464	3.436	3.378	3.331	3.316
1.30	3.882	3.834	3.720	3.626	3.600
1.20	4.447	4.365	4.171	4.005	3.963
1.10	5.217	5.084	4.778	4.512	4.451
1.00	6.314	6.098	5.624	5.220	5.126
0.90	7.910	7.590	6.861	6.260	6.124
0.80	10.448	9.934	8.779	7.900	7.687
0.70	14.838	13.954	12.042	10.722	10.370
0.60	23.483	21.768	18.332	16.216	15.584
0.50	44.281	40.137	33.002	29.140	27.782

Note que  $\phi_1(\alpha, -\beta) = \phi_1(\alpha, \beta)$

Fuente: Huston McCulloch (1986), p.1115

<b>Cuadro 4H</b>					
$v_\beta = \phi_2(\alpha, \beta)$					
	$\beta$				
$\alpha$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.90	0.000	0.018	0.036	0.053	0.071
1.80	0.000	0.039	0.077	0.113	0.148
1.70	0.000	0.063	0.123	0.178	0.228
1.60	0.000	0.089	0.174	0.248	0.309
1.50	0.000	0.118	0.228	0.320	0.390
1.40	0.000	0.148	0.285	0.394	0.469
1.30	0.000	0.177	0.342	0.470	0.546
1.20	0.000	0.206	0.399	0.547	0.621
1.10	0.000	0.236	0.456	0.624	0.693
1.00	0.000	0.268	0.513	0.699	0.762
0.90	0.000	0.303	0.573	0.770	0.825
0.80	0.000	0.341	0.634	0.834	0.881
0.70	0.000	0.387	0.699	0.890	0.927
0.60	0.000	0.441	0.768	0.936	0.962
0.50	0.000	0.510	0.838	0.970	0.985

Note que  $\phi_2(\alpha, -\beta) = -\phi_2(\alpha, \beta)$

Fuente: Huston McCulloch (1986), p.1116

<b>Cuadro 4I</b>							
$\alpha = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta)$							
	$v_\beta$						
$v_\alpha$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
2.5	1.916	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924
2.6	1.808	1.813	1.829	1.829	1.829	1.829	1.829
2.7	1.729	1.730	1.737	1.745	1.745	1.745	1.745
2.8	1.664	1.663	1.663	1.668	1.676	1.676	1.676
3.0	1.563	1.560	1.553	1.548	1.547	1.547	1.547
3.2	1.484	1.480	1.471	1.460	1.448	1.438	1.438
3.5	1.391	1.386	1.378	1.364	1.337	1.318	1.318
4.0	1.279	1.273	1.266	1.250	1.210	1.184	1.150
5.0	1.128	1.121	1.114	1.101	1.067	1.027	0.973

6.0	1.029	1.021	1.014	1.004	0.974	0.935	0.874
8.0	0.896	0.892	0.887	0.883	0.855	0.823	0.769
10.0	0.818	0.812	0.806	0.801	0.780	0.756	0.691
15.0	0.698	0.695	0.692	0.689	0.676	0.656	0.595
25.0	0.593	0.590	0.588	0.586	0.579	0.563	0.513

Note que  $\Psi_1(v_\alpha, -v_\beta) = \Psi_1(v_\alpha, v_\beta)$

Fuente: Huston McCulloch (1986), p.1117

<b>Cuadro 4J</b>							
<b><math>\beta = \Psi_2(v_\alpha, v_\beta)</math></b>							
	$v_\beta$						
$v_\alpha$	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	0.000	2.160	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2.5	0.000	1.592	3.390	1.000	1.000	1.000	1.000
2.6	0.000	0.759	1.800	1.000	1.000	1.000	1.000
2.7	0.000	0.482	1.048	1.694	1.000	1.000	1.000
2.8	0.000	0.360	0.760	1.232	2.229	1.000	1.000
3.0	0.000	0.253	0.518	0.823	1.575	1.000	1.000
3.2	0.000	0.203	0.410	0.632	1.244	1.906	1.000
3.5	0.000	0.165	0.332	0.499	0.943	1.560	1.000
4.0	0.000	0.136	0.271	0.404	0.689	1.230	2.195
5.0	0.000	0.109	0.216	0.323	0.539	0.827	1.917
6.0	0.000	0.096	0.190	0.284	0.472	0.693	1.759
8.0	0.000	0.082	0.163	0.243	0.412	0.601	1.596
10.0	0.000	0.074	0.147	0.220	0.377	0.546	1.482
15.0	0.000	0.064	0.128	0.191	0.330	0.478	1.362
25.0	0.000	0.056	0.112	0.167	0.285	0.428	1.274

Note que  $\Psi_2(v_\alpha, -v_\beta) = -\Psi_2(v_\alpha, v_\beta)$ . Las entradas en ésta tabla que son más grandes que 1.0 son requeridas para permitir exactitud en una interpolación lineal bivariada cuando  $\beta$  se aproxima a 1.0 desde abajo. Como resultado, un error de muestreo en muestras finitas puede darnos una estimación interpolada de  $\beta$  mas grande que 1.0. En éste caso, la estimación deberá ser truncada de nuevo para 1.0

Fuente: Huston McCulloch (1986), p.1118

Cuadro 4K Cuantiles estimados de las series FDGC, FSGC y FMGC									
$\hat{x}_p$	Escala de tiempo								
	Diario	Semanal	Mensual	Cambio positivo			Cambio negativo		
				Diario	Semanal	Mensual	Diario	Semanal	Mensual
$x_{0.05}$	-0.03785	-0.07713	-0.14838	0.00000	0.00268	0.00469	0.00155	0.00171	0.00154
$x_{0.25}$	-0.00984	-0.01973	-0.03189	0.00389	0.01107	0.02411	0.00557	0.00965	0.01316
$x_{0.5}$	0.00119	0.00426	0.01252	0.00966	0.02329	0.05805	0.01225	0.02315	0.04154
$x_{0.75}$	0.01167	0.02669	0.06294	0.01973	0.04437	0.09299	0.02410	0.04545	0.07710
$x_{0.95}$	0.03630	0.07494	0.15275	0.04601	0.09312	0.17323	0.04900	0.10405	0.22670

Para generar las gráficas se emplea el programa MaTLAB R2013a, escribiendo en un nuevo script las siguientes instrucciones:

```
%Para la gráfica de la varianza en la serie diaria
semilogy(muestra,varianza,'k')
title('Gráfica 4.1.3.2.A Comportamiento de la varianza en FDGC')
xlabel('Número de submuestras')
ylabel('Varianza')
%Para la gráfica de la varianza en la serie semanal
semilogy(muestra,varianza,'k')
title('Gráfica 4.1.3.2.B Comportamiento de la varianza en FSGC')
xlabel('Número de submuestras')
ylabel('Varianza')
%Para la gráfica de la varianza en la serie mensual
semilogy(muestra,varianza,'k')
title('Gráfica 4.1.3.2.C Comportamiento de la varianza en FMGC')
xlabel('Número de submuestras')
ylabel('Varianza')
```

### A.4 Punto 4.1.3.3.

En MaTLAB R2013a se elaboró un código que permite obtener la función de autocorrelación. Ésta se empleó en cada una, para la serie mensual sólo se contemplaron 100 rezagos, esta sería sólo una modificación que se hizo. El código es:

```
%Se crea un vector con el número de rezagos que se quiera hacer a la
variable, en este caso son 200
V = 0:1:200;
%Se crea una matriz con los rezagos realizados
lag = lagmatrix(absmes,V);
%Se extraen los vectores
a1 = lag(:,1);
a2 = lag(:,2);
a3 = lag(:,3);
a4 = lag(:,4);
a5 = lag(:,5);
a6 = lag(:,6);
a7 = lag(:,7);
```

```

a8 = lag(:,8);
a9 = lag(:,9);
a10 = lag(:,10);
a11 = lag(:,11);
a12 = lag(:,12);
a13 = lag(:,13);
a14 = lag(:,14);
a15 = lag(:,15);
a16 = lag(:,16);
a17 = lag(:,17);
a18 = lag(:,18);
a19 = lag(:,19);
a20 = lag(:,20);
a21 = lag(:,21);
a22 = lag(:,22);
a23 = lag(:,23);
a24 = lag(:,24);
a25 = lag(:,25);
a26 = lag(:,26);
a27 = lag(:,27);
a28 = lag(:,28);
a29 = lag(:,29);
a30 = lag(:,30);
a31 = lag(:,31);
a32 = lag(:,32);
a33 = lag(:,33);
a34 = lag(:,34);
a35 = lag(:,35);
a36 = lag(:,36);
a37 = lag(:,37);
a38 = lag(:,38);
a39 = lag(:,39);
a40 = lag(:,40);
a41 = lag(:,41);
a42 = lag(:,42);
a43 = lag(:,43);
a44 = lag(:,44);
a45 = lag(:,45);
a46 = lag(:,46);
a47 = lag(:,47);
a48 = lag(:,48);
a49 = lag(:,49);
a50 = lag(:,50);
a51 = lag(:,51);
a52 = lag(:,52);
a53 = lag(:,53);
a54 = lag(:,54);
a55 = lag(:,55);
a56 = lag(:,56);
a57 = lag(:,57);
a58 = lag(:,58);
a59 = lag(:,59);
a60 = lag(:,60);
a61 = lag(:,61);
a62 = lag(:,62);
a63 = lag(:,63);
a64 = lag(:,64);
a65 = lag(:,65);
a66 = lag(:,66);
a67 = lag(:,67);
a68 = lag(:,68);
a69 = lag(:,69);
a70 = lag(:,70);
a71 = lag(:,71);
a72 = lag(:,72);
a73 = lag(:,73);
a74 = lag(:,74);
a75 = lag(:,75);
a76 = lag(:,76);
a77 = lag(:,77);
a78 = lag(:,78);
a79 = lag(:,79);
a80 = lag(:,80);
a81 = lag(:,81);
a82 = lag(:,82);
a83 = lag(:,83);
a84 = lag(:,84);
a85 = lag(:,85);
a86 = lag(:,86);
a87 = lag(:,87);
a88 = lag(:,88);
a89 = lag(:,89);
a90 = lag(:,90);
a91 = lag(:,91);
a92 = lag(:,92);
a93 = lag(:,93);
a94 = lag(:,94);
a95 = lag(:,95);
a96 = lag(:,96);
a97 = lag(:,97);
a98 = lag(:,98);
a99 = lag(:,99);
a100 = lag(:,100);
a101 = lag(:,101);
a102 = lag(:,102);
a103 = lag(:,103);
a104 = lag(:,104);
a105 = lag(:,105);
a106 = lag(:,106);
a107 = lag(:,107);
a108 = lag(:,108);
a109 = lag(:,109);
a110 = lag(:,110);
a111 = lag(:,111);
a112 = lag(:,112);
a113 = lag(:,113);
a114 = lag(:,114);
a115 = lag(:,115);
a116 = lag(:,116);
a117 = lag(:,117);
a118 = lag(:,118);
a119 = lag(:,119);
a120 = lag(:,120);
a121 = lag(:,121);
a122 = lag(:,122);
a123 = lag(:,123);
a124 = lag(:,124);
a125 = lag(:,125);
a126 = lag(:,126);
a127 = lag(:,127);
a128 = lag(:,128);
a129 = lag(:,129);
a130 = lag(:,130);
a131 = lag(:,131);
a132 = lag(:,132);
a133 = lag(:,133);
a134 = lag(:,134);
a135 = lag(:,135);
a136 = lag(:,136);
a137 = lag(:,137);
a138 = lag(:,138);
a139 = lag(:,139);
a140 = lag(:,140);
a141 = lag(:,141);
a142 = lag(:,142);
a143 = lag(:,143);
a144 = lag(:,144);
a145 = lag(:,145);
a146 = lag(:,146);
a147 = lag(:,147);
a148 = lag(:,148);
a149 = lag(:,149);
a150 = lag(:,150);
a151 = lag(:,151);
a152 = lag(:,152);
a153 = lag(:,153);
a154 = lag(:,154);
a155 = lag(:,155);
a156 = lag(:,156);
a157 = lag(:,157);
a158 = lag(:,158);
a159 = lag(:,159);
a160 = lag(:,160);
a161 = lag(:,161);
a162 = lag(:,162);
a163 = lag(:,163);
a164 = lag(:,164);
a165 = lag(:,165);
a166 = lag(:,166);
a167 = lag(:,167);
a168 = lag(:,168);
a169 = lag(:,169);
a170 = lag(:,170);
a171 = lag(:,171);
a172 = lag(:,172);
a173 = lag(:,173);
a174 = lag(:,174);
a175 = lag(:,175);
a176 = lag(:,176);
a177 = lag(:,177);
a178 = lag(:,178);

```

```

a179 = lag(:,179);
a180 = lag(:,180);
a181 = lag(:,181);
a182 = lag(:,182);
a183 = lag(:,183);
a184 = lag(:,184);
a185 = lag(:,185);
a186 = lag(:,186);
a187 = lag(:,187);
a188 = lag(:,188);
a189 = lag(:,189);
a190 = lag(:,190);
a191 = lag(:,191);
a192 = lag(:,192);
a193 = lag(:,193);
a194 = lag(:,194);
a195 = lag(:,195);
a196 = lag(:,196);
a197 = lag(:,197);
a198 = lag(:,198);
a199 = lag(:,199);
a200 = lag(:,200);
%Ahora el promedio
de cada una de las
series
promedioa1 =
mean(a1(1:end),1);
promedioa2 =
mean(a2(2:end),1);
promedioa3 =
mean(a3(3:end),1);
promedioa4 =
mean(a4(4:end),1);
promedioa5 =
mean(a5(5:end),1);
promedioa6 =
mean(a6(6:end),1);
promedioa7 =
mean(a7(7:end),1);
promedioa8 =
mean(a8(8:end),1);
promedioa9 =
mean(a9(9:end),1);
promedioa10 =
mean(a10(10:end),1);
promedioa11 =
mean(a11(11:end),1);
promedioa12 =
mean(a12(12:end),1);
promedioa13 =
mean(a13(13:end),1);
promedioa14 =
mean(a14(14:end),1);
promedioa15 =
mean(a15(15:end),1);
promedioa16 =
mean(a16(16:end),1);
promedioa17 =
mean(a17(17:end),1);
promedioa18 =
mean(a18(18:end),1);
promedioa19 =
mean(a19(19:end),1);
promedioa20 =
mean(a20(20:end),1);
promedioa21 =
mean(a21(21:end),1);
promedioa22 =
mean(a22(22:end),1);
promedioa23 =
mean(a23(23:end),1);
promedioa24 =
mean(a24(24:end),1);
promedioa25 =
mean(a25(25:end),1);
promedioa26 =
mean(a26(26:end),1);
promedioa27 =
mean(a27(27:end),1);
promedioa28 =
mean(a28(28:end),1);
promedioa29 =
mean(a29(29:end),1);
promedioa30 =
mean(a30(30:end),1);
promedioa31 =
mean(a31(31:end),1);
promedioa32 =
mean(a32(32:end),1);
promedioa33 =
mean(a33(33:end),1);
promedioa34 =
mean(a34(34:end),1);
promedioa35 =
mean(a35(35:end),1);
promedioa36 =
mean(a36(36:end),1);
promedioa37 =
mean(a37(37:end),1);
promedioa38 =
mean(a38(38:end),1);
promedioa39 =
mean(a39(39:end),1);
promedioa40 =
mean(a40(40:end),1);
promedioa41 =
mean(a41(41:end),1);
promedioa42 =
mean(a42(42:end),1);
promedioa43 =
mean(a43(43:end),1);
promedioa44 =
mean(a44(44:end),1);
promedioa45 =
mean(a45(45:end),1);
promedioa46 =
mean(a46(46:end),1);
promedioa47 =
mean(a47(47:end),1);
promedioa48 =
mean(a48(48:end),1);
promedioa49 =
mean(a49(49:end),1);
promedioa50 =
mean(a50(50:end),1);
promedioa51 =
mean(a51(51:end),1);
promedioa52 =
mean(a52(52:end),1);
promedioa53 =
mean(a53(53:end),1);
promedioa54 =
mean(a54(54:end),1);
promedioa55 =
mean(a55(55:end),1);
promedioa56 =
mean(a56(56:end),1);
promedioa57 =
mean(a57(57:end),1);
promedioa58 =
mean(a58(58:end),1);
promedioa59 =
mean(a59(59:end),1);
promedioa60 =
mean(a60(60:end),1);
promedioa61 =
mean(a61(61:end),1);
promedioa62 =
mean(a62(62:end),1);
promedioa63 =
mean(a63(63:end),1);
promedioa64 =
mean(a64(64:end),1);
promedioa65 =
mean(a65(65:end),1);
promedioa66 =
mean(a66(66:end),1);
promedioa67 =
mean(a67(67:end),1);
promedioa68 =
mean(a68(68:end),1);
promedioa69 =
mean(a69(69:end),1);
promedioa70 =
mean(a70(70:end),1);
promedioa71 =
mean(a71(71:end),1);
promedioa72 =
mean(a72(72:end),1);

```

```

promedioa73 =
mean(a73(73:end),1);
promedioa74 =
mean(a74(74:end),1);
promedioa75 =
mean(a75(75:end),1);
promedioa76 =
mean(a76(76:end),1);
promedioa77 =
mean(a77(77:end),1);
promedioa78 =
mean(a78(78:end),1);
promedioa79 =
mean(a79(79:end),1);
promedioa80 =
mean(a80(80:end),1);
promedioa81 =
mean(a81(81:end),1);
promedioa82 =
mean(a82(82:end),1);
promedioa83 =
mean(a83(83:end),1);
promedioa84 =
mean(a84(84:end),1);
promedioa85 =
mean(a85(85:end),1);
promedioa86 =
mean(a86(86:end),1);
promedioa87 =
mean(a87(87:end),1);
promedioa88 =
mean(a88(88:end),1);
promedioa89 =
mean(a89(89:end),1);
promedioa90 =
mean(a90(90:end),1);
promedioa91 =
mean(a91(91:end),1);
promedioa92 =
mean(a92(92:end),1);
promedioa93 =
mean(a93(93:end),1);
promedioa94 =
mean(a94(94:end),1);
promedioa95 =
mean(a95(95:end),1);
promedioa96 =
mean(a96(96:end),1);
promedioa97 =
mean(a97(97:end),1);
promedioa98 =
mean(a98(98:end),1);
promedioa99 =
mean(a99(99:end),1);
promedioa100 =
mean(a100(100:end),1
);

promedioa101 =
mean(a101(101:end),1
);
promedioa102 =
mean(a102(102:end),1
);
promedioa103 =
mean(a103(103:end),1
);
promedioa104 =
mean(a104(104:end),1
);
promedioa105 =
mean(a105(105:end),1
);
promedioa106 =
mean(a106(106:end),1
);
promedioa107 =
mean(a107(107:end),1
);
promedioa108 =
mean(a108(108:end),1
);
promedioa109 =
mean(a109(109:end),1
);
promedioa110 =
mean(a110(110:end),1
);
promedioa111 =
mean(a111(111:end),1
);
promedioa112 =
mean(a112(112:end),1
);
promedioa113 =
mean(a113(113:end),1
);
promedioa114 =
mean(a114(114:end),1
);
promedioa115 =
mean(a115(115:end),1
);
promedioa116 =
mean(a116(116:end),1
);
promedioa117 =
mean(a117(117:end),1
);
promedioa118 =
mean(a118(118:end),1
);
promedioa119 =
mean(a119(119:end),1
);

promedioa120 =
mean(a120(120:end),1
);
promedioa121 =
mean(a121(121:end),1
);
promedioa122 =
mean(a122(122:end),1
);
promedioa123 =
mean(a123(123:end),1
);
promedioa124 =
mean(a124(124:end),1
);
promedioa125 =
mean(a125(125:end),1
);
promedioa126 =
mean(a126(126:end),1
);
promedioa127 =
mean(a127(127:end),1
);
promedioa128 =
mean(a128(128:end),1
);
promedioa129 =
mean(a129(129:end),1
);
promedioa130 =
mean(a130(130:end),1
);
promedioa131 =
mean(a131(131:end),1
);
promedioa132 =
mean(a132(132:end),1
);
promedioa133 =
mean(a133(133:end),1
);
promedioa134 =
mean(a134(134:end),1
);
promedioa135 =
mean(a135(135:end),1
);
promedioa136 =
mean(a136(136:end),1
);
promedioa137 =
mean(a137(137:end),1
);
promedioa138 =
mean(a138(138:end),1
);

```

```

promedioa139 =
mean(a139(139:end),1
);
promedioa140 =
mean(a140(140:end),1
);
promedioa141 =
mean(a141(141:end),1
);
promedioa142 =
mean(a142(142:end),1
);
promedioa143 =
mean(a143(143:end),1
);
promedioa144 =
mean(a144(144:end),1
);
promedioa145 =
mean(a145(145:end),1
);
promedioa146 =
mean(a146(146:end),1
);
promedioa147 =
mean(a147(147:end),1
);
promedioa148 =
mean(a148(148:end),1
);
promedioa149 =
mean(a149(149:end),1
);
promedioa150 =
mean(a150(150:end),1
);
promedioa151 =
mean(a151(151:end),1
);
promedioa152 =
mean(a152(152:end),1
);
promedioa153 =
mean(a153(153:end),1
);
promedioa154 =
mean(a154(154:end),1
);
promedioa155 =
mean(a155(155:end),1
);
promedioa156 =
mean(a156(156:end),1
);
promedioa157 =
mean(a157(157:end),1
);
promedioa158 =
mean(a158(158:end),1
);
promedioa159 =
mean(a159(159:end),1
);
promedioa160 =
mean(a160(160:end),1
);
promedioa161 =
mean(a161(161:end),1
);
promedioa162 =
mean(a162(162:end),1
);
promedioa163 =
mean(a163(163:end),1
);
promedioa164 =
mean(a164(164:end),1
);
promedioa165 =
mean(a165(165:end),1
);
promedioa166 =
mean(a166(166:end),1
);
promedioa167 =
mean(a167(167:end),1
);
promedioa168 =
mean(a168(168:end),1
);
promedioa169 =
mean(a169(169:end),1
);
promedioa170 =
mean(a170(170:end),1
);
promedioa171 =
mean(a171(171:end),1
);
promedioa172 =
mean(a172(172:end),1
);
promedioa173 =
mean(a173(173:end),1
);
promedioa174 =
mean(a174(174:end),1
);
promedioa175 =
mean(a175(175:end),1
);
promedioa176 =
mean(a176(176:end),1
);
promedioa177 =
mean(a177(177:end),1
);
promedioa178 =
mean(a178(178:end),1
);
promedioa179 =
mean(a179(179:end),1
);
promedioa180 =
mean(a180(180:end),1
);
promedioa181 =
mean(a181(181:end),1
);
promedioa182 =
mean(a182(182:end),1
);
promedioa183 =
mean(a183(183:end),1
);
promedioa184 =
mean(a184(184:end),1
);
promedioa185 =
mean(a185(185:end),1
);
promedioa186 =
mean(a186(186:end),1
);
promedioa187 =
mean(a187(187:end),1
);
promedioa188 =
mean(a188(188:end),1
);
promedioa189 =
mean(a189(189:end),1
);
promedioa190 =
mean(a190(190:end),1
);
promedioa191 =
mean(a191(191:end),1
);
promedioa192 =
mean(a192(192:end),1
);
promedioa193 =
mean(a193(193:end),1
);
promedioa194 =
mean(a194(194:end),1
);
promedioa195 =
mean(a195(195:end),1
);

```

```

promedioa196 = mean(a196(196:end),1);
promedioa197 = mean(a197(197:end),1);
promedioa198 = mean(a198(198:end),1);
promedioa199 = mean(a199(199:end),1);
promedioa200 = mean(a200(200:end),1);
%Ahora se resta de cada observación el promedio
A1 = a1-promedioa1;
A2 = a2-promedioa2;
A3 = a3-promedioa3;
A4 = a4-promedioa4;
A5 = a5-promedioa5;
A6 = a6-promedioa6;
A7 = a7-promedioa7;
A8 = a8-promedioa8;
A9 = a9-promedioa9;
A10 = a10-promedioa10;
A11 = a11-promedioa11;
A12 = a12-promedioa12;
A13 = a13-promedioa13;
A14 = a14-promedioa14;
A15 = a15-promedioa15;
A16 = a16-promedioa16;
A17 = a17-promedioa17;
A18 = a18-promedioa18;
A19 = a19-promedioa19;
A20 = a20-promedioa20;
A21 = a21-promedioa21;
A22 = a22-promedioa22;
A23 = a23-promedioa23;
A24 = a24-promedioa24;
A25 = a25-promedioa25;
A26 = a26-promedioa26;
A27 = a27-promedioa27;
A28 = a28-promedioa28;
A29 = a29-promedioa29;
A30 = a30-promedioa30;
A31 = a31-promedioa31;
A32 = a32-promedioa32;
A33 = a33-promedioa33;
A34 = a34-promedioa34;
A35 = a35-promedioa35;
A36 = a36-promedioa36;
A37 = a37-promedioa37;
A38 = a38-promedioa38;
A39 = a39-promedioa39;
A40 = a40-promedioa40;
A41 = a41-promedioa41;
A42 = a42-promedioa42;
A43 = a43-promedioa43;
A44 = a44-promedioa44;
A45 = a45-promedioa45;
A46 = a46-promedioa46;
A47 = a47-promedioa47;
A48 = a48-promedioa48;
A49 = a49-promedioa49;
A50 = a50-promedioa50;
A51 = a51-promedioa51;
A52 = a52-promedioa52;
A53 = a53-promedioa53;
A54 = a54-promedioa54;
A55 = a55-promedioa55;
A56 = a56-promedioa56;
A57 = a57-promedioa57;
A58 = a58-promedioa58;
A59 = a59-promedioa59;
A60 = a60-promedioa60;
A61 = a61-promedioa61;
A62 = a62-promedioa62;
A63 = a63-promedioa63;
A64 = a64-promedioa64;
A65 = a65-promedioa65;
A66 = a66-promedioa66;
A67 = a67-promedioa67;
A68 = a68-promedioa68;
A69 = a69-promedioa69;
A70 = a70-promedioa70;
A71 = a71-promedioa71;
A72 = a72-promedioa72;
A73 = a73-promedioa73;
A74 = a74-promedioa74;
A75 = a75-promedioa75;
A76 = a76-promedioa76;
A77 = a77-promedioa77;
A78 = a78-promedioa78;
A79 = a79-promedioa79;
A80 = a80-promedioa80;

```

A81 = a81-  
promedioa81;  
A82 = a82-  
promedioa82;  
A83 = a83-  
promedioa83;  
A84 = a84-  
promedioa84;  
A85 = a85-  
promedioa85;  
A86 = a86-  
promedioa86;  
A87 = a87-  
promedioa87;  
A88 = a88-  
promedioa88;  
A89 = a89-  
promedioa89;  
A90 = a90-  
promedioa90;  
A91 = a91-  
promedioa91;  
A92 = a92-  
promedioa92;  
A93 = a93-  
promedioa93;  
A94 = a94-  
promedioa94;  
A95 = a95-  
promedioa95;  
A96 = a96-  
promedioa96;  
A97 = a97-  
promedioa97;  
A98 = a98-  
promedioa98;  
A99 = a99-  
promedioa99;  
A100 = a100-  
promedioa100;  
A101 = a101-  
promedioa101;  
A102 = a102-  
promedioa102;  
A103 = a103-  
promedioa103;  
A104 = a104-  
promedioa104;  
A105 = a105-  
promedioa105;  
A106 = a106-  
promedioa106;  
A107 = a107-  
promedioa107;  
A108 = a108-  
promedioa108;

A109 = a109-  
promedioa109;  
A110 = a110-  
promedioa110;  
A111 = a111-  
promedioa111;  
A112 = a112-  
promedioa112;  
A113 = a113-  
promedioa113;  
A114 = a114-  
promedioa114;  
A115 = a115-  
promedioa115;  
A116 = a116-  
promedioa116;  
A117 = a117-  
promedioa117;  
A118 = a118-  
promedioa118;  
A119 = a119-  
promedioa119;  
A120 = a120-  
promedioa120;  
A121 = a121-  
promedioa121;  
A122 = a122-  
promedioa122;  
A123 = a123-  
promedioa123;  
A124 = a124-  
promedioa124;  
A125 = a125-  
promedioa125;  
A126 = a126-  
promedioa126;  
A127 = a127-  
promedioa127;  
A128 = a128-  
promedioa128;  
A129 = a129-  
promedioa129;  
A130 = a130-  
promedioa130;  
A131 = a131-  
promedioa131;  
A132 = a132-  
promedioa132;  
A133 = a133-  
promedioa133;  
A134 = a134-  
promedioa134;  
A135 = a135-  
promedioa135;  
A136 = a136-  
promedioa136;

A137 = a137-  
promedioa137;  
A138 = a138-  
promedioa138;  
A139 = a139-  
promedioa139;  
A140 = a140-  
promedioa140;  
A141 = a141-  
promedioa141;  
A142 = a142-  
promedioa142;  
A143 = a143-  
promedioa143;  
A144 = a144-  
promedioa144;  
A145 = a145-  
promedioa145;  
A146 = a146-  
promedioa146;  
A147 = a147-  
promedioa147;  
A148 = a148-  
promedioa148;  
A149 = a149-  
promedioa149;  
A150 = a150-  
promedioa150;  
A151 = a151-  
promedioa151;  
A152 = a152-  
promedioa152;  
A153 = a153-  
promedioa153;  
A154 = a154-  
promedioa154;  
A155 = a155-  
promedioa155;  
A156 = a156-  
promedioa156;  
A157 = a157-  
promedioa157;  
A158 = a158-  
promedioa158;  
A159 = a159-  
promedioa159;  
A160 = a160-  
promedioa160;  
A161 = a161-  
promedioa161;  
A162 = a162-  
promedioa162;  
A163 = a163-  
promedioa163;  
A164 = a164-  
promedioa164;

```

A165 = a165-
promedioa165;
A166 = a166-
promedioa166;
A167 = a167-
promedioa167;
A168 = a168-
promedioa168;
A169 = a169-
promedioa169;
A170 = a170-
promedioa170;
A171 = a171-
promedioa171;
A172 = a172-
promedioa172;
A173 = a173-
promedioa173;
A174 = a174-
promedioa174;
A175 = a175-
promedioa175;
A176 = a176-
promedioa176;
A177 = a177-
promedioa177;
A178 = a178-
promedioa178;
A179 = a179-
promedioa179;
A180 = a180-
promedioa180;
A181 = a181-
promedioa181;
A182 = a182-
promedioa182;
A183 = a183-
promedioa183;
A184 = a184-
promedioa184;
A185 = a185-
promedioa185;
A186 = a186-
promedioa186;
A187 = a187-
promedioa187;
A188 = a188-
promedioa188;
A189 = a189-
promedioa189;
A190 = a190-
promedioa190;
A191 = a191-
promedioa191;
A192 = a192-
promedioa192;

A193 = a193-
promedioa193;
A194 = a194-
promedioa194;
A195 = a195-
promedioa195;
A196 = a196-
promedioa196;
A197 = a197-
promedioa197;
A198 = a198-
promedioa198;
A199 = a199-
promedioa199;
A200 = a200-
promedioa200;
%Ahora se van a
realizar las
multiplicaciones
(y_(t)-\miu)*(y_(t-
k)-\miu)
M1 =
A1(2:end).*A2(2:end)
;
M2 =
A1(3:end).*A3(3:end)
;
M3 =
A1(4:end).*A4(4:end)
;
M4 =
A1(5:end).*A5(5:end)
;
M5 =
A1(6:end).*A6(6:end)
;
M6 =
A1(7:end).*A7(7:end)
;
M7 =
A1(8:end).*A8(8:end)
;
M8 =
A1(9:end).*A9(9:end)
;
M9 =
A1(10:end).*A10(10:e
nd);
M10 =
A1(11:end).*A11(11:e
nd);
M11 =
A1(12:end).*A12(12:e
nd);
M12 =
A1(13:end).*A13(13:e
nd);

M13 =
A1(14:end).*A14(14:e
nd);
M14 =
A1(15:end).*A15(15:e
nd);
M15 =
A1(16:end).*A16(16:e
nd);
M16 =
A1(17:end).*A17(17:e
nd);
M17 =
A1(18:end).*A18(18:e
nd);
M18 =
A1(19:end).*A19(19:e
nd);
M19 =
A1(20:end).*A20(20:e
nd);
M20 =
A1(21:end).*A21(21:e
nd);
M21 =
A1(22:end).*A22(22:e
nd);
M22 =
A1(23:end).*A23(23:e
nd);
M23 =
A1(24:end).*A24(24:e
nd);
M24 =
A1(25:end).*A25(25:e
nd);
M25 =
A1(26:end).*A26(26:e
nd);
M26 =
A1(27:end).*A27(27:e
nd);
M27 =
A1(28:end).*A28(28:e
nd);
M28 =
A1(29:end).*A29(29:e
nd);
M29 =
A1(30:end).*A30(30:e
nd);
M30 =
A1(31:end).*A31(31:e
nd);
M31 =
A1(32:end).*A32(32:e
nd);

```

```

M32 =
A1(33:end).*A33(33:en
d);
M33 =
A1(34:end).*A34(34:en
d);
M34 =
A1(35:end).*A35(35:en
d);
M35 =
A1(36:end).*A36(36:en
d);
M36 =
A1(37:end).*A37(37:en
d);
M37 =
A1(38:end).*A38(38:en
d);
M38 =
A1(39:end).*A39(39:en
d);
M39 =
A1(40:end).*A40(40:en
d);
M40 =
A1(41:end).*A41(41:en
d);
M41 =
A1(42:end).*A42(42:en
d);
M42 =
A1(43:end).*A43(43:en
d);
M43 =
A1(44:end).*A44(44:en
d);
M44 =
A1(45:end).*A45(45:en
d);
M45 =
A1(46:end).*A46(46:en
d);
M46 =
A1(47:end).*A47(47:en
d);
M47 =
A1(48:end).*A48(48:en
d);
M48 =
A1(49:end).*A49(49:en
d);
M49 =
A1(50:end).*A50(50:en
d);
M50 =
A1(51:end).*A51(51:en
d);
M51 =
A1(52:end).*A52(52:en
d);
M52 =
A1(53:end).*A53(53:en
d);
M53 =
A1(54:end).*A54(54:en
d);
M54 =
A1(55:end).*A55(55:en
d);
M55 =
A1(56:end).*A56(56:en
d);
M56 =
A1(57:end).*A57(57:en
d);
M57 =
A1(58:end).*A58(58:en
d);
M58 =
A1(59:end).*A59(59:en
d);
M59 =
A1(60:end).*A60(60:en
d);
M60 =
A1(61:end).*A61(61:en
d);
M61 =
A1(62:end).*A62(62:en
d);
M62 =
A1(63:end).*A63(63:en
d);
M63 =
A1(64:end).*A64(64:en
d);
M64 =
A1(65:end).*A65(65:en
d);
M65 =
A1(66:end).*A66(66:en
d);
M66 =
A1(67:end).*A67(67:en
d);
M67 =
A1(68:end).*A68(68:en
d);
M68 =
A1(69:end).*A69(69:en
d);
M69 =
A1(70:end).*A70(70:en
d);
M70 =
A1(71:end).*A71(71:en
d);
M71 =
A1(72:end).*A72(72:en
d);
M72 =
A1(73:end).*A73(73:en
d);
M73 =
A1(74:end).*A74(74:en
d);
M74 =
A1(75:end).*A75(75:en
d);
M75 =
A1(76:end).*A76(76:en
d);
M76 =
A1(77:end).*A77(77:en
d);
M77 =
A1(78:end).*A78(78:en
d);
M78 =
A1(79:end).*A79(79:en
d);
M79 =
A1(80:end).*A80(80:en
d);
M80 =
A1(81:end).*A81(81:en
d);
M81 =
A1(82:end).*A82(82:en
d);
M82 =
A1(83:end).*A83(83:en
d);
M83 =
A1(84:end).*A84(84:en
d);
M84 =
A1(85:end).*A85(85:en
d);
M85 =
A1(86:end).*A86(86:en
d);
M86 =
A1(87:end).*A87(87:en
d);
M87 =
A1(88:end).*A88(88:en
d);
M88 =
A1(89:end).*A89(89:en
d);

```

```

M89 =
A1(90:end).*A90(90:en
d);
M90 =
A1(91:end).*A91(91:en
d);
M91 =
A1(92:end).*A92(92:en
d);
M92 =
A1(93:end).*A93(93:en
d);
M93 =
A1(94:end).*A94(94:en
d);
M94 =
A1(95:end).*A95(95:en
d);
M95 =
A1(96:end).*A96(96:en
d);
M96 =
A1(97:end).*A97(97:en
d);
M97 =
A1(98:end).*A98(98:en
d);
M98 =
A1(99:end).*A99(99:en
d);
M99 =
A1(100:end).*A100(10
0:end);
M100 =
A1(101:end).*A101(10
1:end);
M101 =
A1(102:end).*A102(10
2:end);
M102 =
A1(103:end).*A103(10
3:end);
M103 =
A1(104:end).*A104(10
4:end);
M104 =
A1(105:end).*A105(10
5:end);
M105 =
A1(106:end).*A106(10
6:end);
M106 =
A1(107:end).*A107(10
7:end);
M107 =
A1(108:end).*A108(10
8:end);

M108 =
A1(109:end).*A109(10
9:end);
M109 =
A1(110:end).*A110(11
0:end);
M110 =
A1(111:end).*A111(11
1:end);
M111 =
A1(112:end).*A112(11
2:end);
M112 =
A1(113:end).*A113(11
3:end);
M113 =
A1(114:end).*A114(11
4:end);
M114 =
A1(115:end).*A115(11
5:end);
M115 =
A1(116:end).*A116(11
6:end);
M116 =
A1(117:end).*A117(11
7:end);
M117 =
A1(118:end).*A118(11
8:end);
M118 =
A1(119:end).*A119(11
9:end);
M119 =
A1(120:end).*A120(12
0:end);
M120 =
A1(121:end).*A121(12
1:end);
M121 =
A1(122:end).*A122(12
2:end);
M122 =
A1(123:end).*A123(12
3:end);
M123 =
A1(124:end).*A124(12
4:end);
M124 =
A1(125:end).*A125(12
5:end);
M125 =
A1(126:end).*A126(12
6:end);
M126 =
A1(127:end).*A127(12
7:end);

M127 =
A1(128:end).*A128(12
8:end);
M128 =
A1(129:end).*A129(12
9:end);
M129 =
A1(130:end).*A130(13
0:end);
M130 =
A1(131:end).*A131(13
1:end);
M131 =
A1(132:end).*A132(13
2:end);
M132 =
A1(133:end).*A133(13
3:end);
M133 =
A1(134:end).*A134(13
4:end);
M134 =
A1(135:end).*A135(13
5:end);
M135 =
A1(136:end).*A136(13
6:end);
M136 =
A1(137:end).*A137(13
7:end);
M137 =
A1(138:end).*A138(13
8:end);
M138 =
A1(139:end).*A139(13
9:end);
M139 =
A1(140:end).*A140(14
0:end);
M140 =
A1(141:end).*A141(14
1:end);
M141 =
A1(142:end).*A142(14
2:end);
M142 =
A1(143:end).*A143(14
3:end);
M143 =
A1(144:end).*A144(14
4:end);
M144 =
A1(145:end).*A145(14
5:end);
M145 =
A1(146:end).*A146(14
6:end);

```

```

M146 =
A1(147:end).*A147(14
7:end);
M147 =
A1(148:end).*A148(14
8:end);
M148 =
A1(149:end).*A149(14
9:end);
M149 =
A1(150:end).*A150(15
0:end);
M150 =
A1(151:end).*A151(15
1:end);
M151 =
A1(152:end).*A152(15
2:end);
M152 =
A1(153:end).*A153(15
3:end);
M153 =
A1(154:end).*A154(15
4:end);
M154 =
A1(155:end).*A155(15
5:end);
M155 =
A1(156:end).*A156(15
6:end);
M156 =
A1(157:end).*A157(15
7:end);
M157 =
A1(158:end).*A158(15
8:end);
M158 =
A1(159:end).*A159(15
9:end);
M159 =
A1(160:end).*A160(16
0:end);
M160 =
A1(161:end).*A161(16
1:end);
M161 =
A1(162:end).*A162(16
2:end);
M162 =
A1(163:end).*A163(16
3:end);
M163 =
A1(164:end).*A164(16
4:end);
M164 =
A1(165:end).*A165(16
5:end);

M165 =
A1(166:end).*A166(16
6:end);
M166 =
A1(167:end).*A167(16
7:end);
M167 =
A1(168:end).*A168(16
8:end);
M168 =
A1(169:end).*A169(16
9:end);
M169 =
A1(170:end).*A170(17
0:end);
M170 =
A1(171:end).*A171(17
1:end);
M171 =
A1(172:end).*A172(17
2:end);
M172 =
A1(173:end).*A173(17
3:end);
M173 =
A1(174:end).*A174(17
4:end);
M174 =
A1(175:end).*A175(17
5:end);
M175 =
A1(176:end).*A176(17
6:end);
M176 =
A1(177:end).*A177(17
7:end);
M177 =
A1(178:end).*A178(17
8:end);
M178 =
A1(179:end).*A179(17
9:end);
M179 =
A1(180:end).*A180(18
0:end);
M180 =
A1(181:end).*A181(18
1:end);
M181 =
A1(182:end).*A182(18
2:end);
M182 =
A1(183:end).*A183(18
3:end);
M183 =
A1(184:end).*A184(18
4:end);

M184 =
A1(185:end).*A185(18
5:end);
M185 =
A1(186:end).*A186(18
6:end);
M186 =
A1(187:end).*A187(18
7:end);
M187 =
A1(188:end).*A188(18
8:end);
M188 =
A1(189:end).*A189(18
9:end);
M189 =
A1(190:end).*A190(19
0:end);
M190 =
A1(191:end).*A191(19
1:end);
M191 =
A1(192:end).*A192(19
2:end);
M192 =
A1(193:end).*A193(19
3:end);
M193 =
A1(194:end).*A194(19
4:end);
M194 =
A1(195:end).*A195(19
5:end);
M195 =
A1(196:end).*A196(19
6:end);
M196 =
A1(197:end).*A197(19
7:end);
M197 =
A1(198:end).*A198(19
8:end);
M198 =
A1(199:end).*A199(19
9:end);
M199 =
A1(200:end).*A200(20
0:end);
% Ahora se deben
sumar todas las
observaciones
contenidas en las M
SM1 = sum(M1);
SM2 = sum(M2);
SM3 = sum(M3);
SM4 = sum(M4);
SM5 = sum(M5);

```

```

SM6 = sum(M6);
SM7 = sum(M7);
SM8 = sum(M8);
SM9 = sum(M9);
SM10 = sum(M10);
SM11 = sum(M11);
SM12 = sum(M12);
SM13 = sum(M13);
SM14 = sum(M14);
SM15 = sum(M15);
SM16 = sum(M16);
SM17 = sum(M17);
SM18 = sum(M18);
SM19 = sum(M19);
SM20 = sum(M20);
SM21 = sum(M21);
SM22 = sum(M22);
SM23 = sum(M23);
SM24 = sum(M24);
SM25 = sum(M25);
SM26 = sum(M26);
SM27 = sum(M27);
SM28 = sum(M28);
SM29 = sum(M29);
SM30 = sum(M30);
SM31 = sum(M31);
SM32 = sum(M32);
SM33 = sum(M33);
SM34 = sum(M34);
SM35 = sum(M35);
SM36 = sum(M36);
SM37 = sum(M37);
SM38 = sum(M38);
SM39 = sum(M39);
SM40 = sum(M40);
SM41 = sum(M41);
SM42 = sum(M42);
SM43 = sum(M43);
SM44 = sum(M44);
SM45 = sum(M45);
SM46 = sum(M46);
SM47 = sum(M47);
SM48 = sum(M48);
SM49 = sum(M49);
SM50 = sum(M50);
SM51 = sum(M51);
SM52 = sum(M52);
SM53 = sum(M53);
SM54 = sum(M54);
SM55 = sum(M55);
SM56 = sum(M56);
SM57 = sum(M57);
SM58 = sum(M58);
SM59 = sum(M59);
SM60 = sum(M60);
SM61 = sum(M61);
SM62 = sum(M62);

SM63 = sum(M63);
SM64 = sum(M64);
SM65 = sum(M65);
SM66 = sum(M66);
SM67 = sum(M67);
SM68 = sum(M68);
SM69 = sum(M69);
SM70 = sum(M70);
SM71 = sum(M71);
SM72 = sum(M72);
SM73 = sum(M73);
SM74 = sum(M74);
SM75 = sum(M75);
SM76 = sum(M76);
SM77 = sum(M77);
SM78 = sum(M78);
SM79 = sum(M79);
SM80 = sum(M80);
SM81 = sum(M81);
SM82 = sum(M82);
SM83 = sum(M83);
SM84 = sum(M84);
SM85 = sum(M85);
SM86 = sum(M86);
SM87 = sum(M87);
SM88 = sum(M88);
SM89 = sum(M89);
SM90 = sum(M90);
SM91 = sum(M91);
SM92 = sum(M92);
SM93 = sum(M93);
SM94 = sum(M94);
SM95 = sum(M95);
SM96 = sum(M96);
SM97 = sum(M97);
SM98 = sum(M98);
SM99 = sum(M99);
SM100 = sum(M100);
SM101 = sum(M101);
SM102 = sum(M102);
SM103 = sum(M103);
SM104 = sum(M104);
SM105 = sum(M105);
SM106 = sum(M106);
SM107 = sum(M107);
SM108 = sum(M108);
SM109 = sum(M109);
SM110 = sum(M110);
SM111 = sum(M111);
SM112 = sum(M112);
SM113 = sum(M113);
SM114 = sum(M114);
SM115 = sum(M115);
SM116 = sum(M116);
SM117 = sum(M117);
SM118 = sum(M118);
SM119 = sum(M119);

SM120 = sum(M120);
SM121 = sum(M121);
SM122 = sum(M122);
SM123 = sum(M123);
SM124 = sum(M124);
SM125 = sum(M125);
SM126 = sum(M126);
SM127 = sum(M127);
SM128 = sum(M128);
SM129 = sum(M129);
SM130 = sum(M130);
SM131 = sum(M131);
SM132 = sum(M132);
SM133 = sum(M133);
SM134 = sum(M134);
SM135 = sum(M135);
SM136 = sum(M136);
SM137 = sum(M137);
SM138 = sum(M138);
SM139 = sum(M139);
SM140 = sum(M140);
SM141 = sum(M141);
SM142 = sum(M142);
SM143 = sum(M143);
SM144 = sum(M144);
SM145 = sum(M145);
SM146 = sum(M146);
SM147 = sum(M147);
SM148 = sum(M148);
SM149 = sum(M149);
SM150 = sum(M150);
SM151 = sum(M151);
SM152 = sum(M152);
SM153 = sum(M153);
SM154 = sum(M154);
SM155 = sum(M155);
SM156 = sum(M156);
SM157 = sum(M157);
SM158 = sum(M158);
SM159 = sum(M159);
SM160 = sum(M160);
SM161 = sum(M161);
SM162 = sum(M162);
SM163 = sum(M163);
SM164 = sum(M164);
SM165 = sum(M165);
SM166 = sum(M166);
SM167 = sum(M167);
SM168 = sum(M168);
SM169 = sum(M169);
SM170 = sum(M170);
SM171 = sum(M171);
SM172 = sum(M172);
SM173 = sum(M173);
SM174 = sum(M174);
SM175 = sum(M175);
SM176 = sum(M176);

```

```

SM177 = sum(M177);
SM178 = sum(M178);
SM179 = sum(M179);
SM180 = sum(M180);
SM181 = sum(M181);
SM182 = sum(M182);
SM183 = sum(M183);
SM184 = sum(M184);
SM185 = sum(M185);
SM186 = sum(M186);
SM187 = sum(M187);
SM188 = sum(M188);
SM189 = sum(M189);
SM190 = sum(M190);
SM191 = sum(M191);
SM192 = sum(M192);
SM193 = sum(M193);
SM194 = sum(M194);
SM195 = sum(M195);
SM196 = sum(M196);
SM197 = sum(M197);
SM198 = sum(M198);
SM199 = sum(M199);
%Ahora la suma se
multiplica por 1/n-1
y se obtiene la
autocovarianza
ACov1 =
(1/(size(M1,1)-
1))*SM1;
ACov2 =
(1/(size(M2,1)-
1))*SM2;
ACov3 =
(1/(size(M3,1)-
1))*SM3;
ACov4 =
(1/(size(M4,1)-
1))*SM4;
ACov5 =
(1/(size(M5,1)-
1))*SM5;
ACov6 =
(1/(size(M6,1)-
1))*SM6;
ACov7 =
(1/(size(M7,1)-
1))*SM7;
ACov8 =
(1/(size(M8,1)-
1))*SM8;
ACov9 =
(1/(size(M9,1)-
1))*SM9;
ACov10 =
(1/(size(M10,1)-
1))*SM10;
ACov11 =
(1/(size(M11,1)-
1))*SM11;
ACov12 =
(1/(size(M12,1)-
1))*SM12;
ACov13 =
(1/(size(M13,1)-
1))*SM13;
ACov14 =
(1/(size(M14,1)-
1))*SM14;
ACov15 =
(1/(size(M15,1)-
1))*SM15;
ACov16 =
(1/(size(M16,1)-
1))*SM16;
ACov17 =
(1/(size(M17,1)-
1))*SM17;
ACov18 =
(1/(size(M18,1)-
1))*SM18;
ACov19 =
(1/(size(M19,1)-
1))*SM19;
ACov20 =
(1/(size(M20,1)-
1))*SM20;
ACov21 =
(1/(size(M21,1)-
1))*SM21;
ACov22 =
(1/(size(M22,1)-
1))*SM22;
ACov23 =
(1/(size(M23,1)-
1))*SM23;
ACov24 =
(1/(size(M24,1)-
1))*SM24;
ACov25 =
(1/(size(M25,1)-
1))*SM25;
ACov26 =
(1/(size(M26,1)-
1))*SM26;
ACov27 =
(1/(size(M27,1)-
1))*SM27;
ACov28 =
(1/(size(M28,1)-
1))*SM28;
ACov29 =
(1/(size(M29,1)-
1))*SM29;
ACov30 =
(1/(size(M30,1)-
1))*SM30;
ACov31 =
(1/(size(M31,1)-
1))*SM31;
ACov32 =
(1/(size(M32,1)-
1))*SM32;
ACov33 =
(1/(size(M33,1)-
1))*SM33;
ACov34 =
(1/(size(M34,1)-
1))*SM34;
ACov35 =
(1/(size(M35,1)-
1))*SM35;
ACov36 =
(1/(size(M36,1)-
1))*SM36;
ACov37 =
(1/(size(M37,1)-
1))*SM37;
ACov38 =
(1/(size(M38,1)-
1))*SM38;
ACov39 =
(1/(size(M39,1)-
1))*SM39;
ACov40 =
(1/(size(M40,1)-
1))*SM40;
ACov41 =
(1/(size(M41,1)-
1))*SM41;
ACov42 =
(1/(size(M42,1)-
1))*SM42;
ACov43 =
(1/(size(M43,1)-
1))*SM43;
ACov44 =
(1/(size(M44,1)-
1))*SM44;
ACov45 =
(1/(size(M45,1)-
1))*SM45;
ACov46 =
(1/(size(M46,1)-
1))*SM46;
ACov47 =
(1/(size(M47,1)-
1))*SM47;
ACov48 =
(1/(size(M48,1)-
1))*SM48;

```

```

ACov49 =
(1/(size(M49,1)-
1))*SM49;
ACov50 =
(1/(size(M50,1)-
1))*SM50;
ACov51 =
(1/(size(M51,1)-
1))*SM51;
ACov52 =
(1/(size(M52,1)-
1))*SM52;
ACov53 =
(1/(size(M53,1)-
1))*SM53;
ACov54 =
(1/(size(M54,1)-
1))*SM54;
ACov55 =
(1/(size(M55,1)-
1))*SM55;
ACov56 =
(1/(size(M56,1)-
1))*SM56;
ACov57 =
(1/(size(M57,1)-
1))*SM57;
ACov58 =
(1/(size(M58,1)-
1))*SM58;
ACov59 =
(1/(size(M59,1)-
1))*SM59;
ACov60 =
(1/(size(M60,1)-
1))*SM60;
ACov61 =
(1/(size(M61,1)-
1))*SM61;
ACov62 =
(1/(size(M62,1)-
1))*SM62;
ACov63 =
(1/(size(M63,1)-
1))*SM63;
ACov64 =
(1/(size(M64,1)-
1))*SM64;
ACov65 =
(1/(size(M65,1)-
1))*SM65;
ACov66 =
(1/(size(M66,1)-
1))*SM66;
ACov67 =
(1/(size(M67,1)-
1))*SM67;
ACov68 =
(1/(size(M68,1)-
1))*SM68;
ACov69 =
(1/(size(M69,1)-
1))*SM69;
ACov70 =
(1/(size(M70,1)-
1))*SM70;
ACov71 =
(1/(size(M71,1)-
1))*SM71;
ACov72 =
(1/(size(M72,1)-
1))*SM72;
ACov73 =
(1/(size(M73,1)-
1))*SM73;
ACov74 =
(1/(size(M74,1)-
1))*SM74;
ACov75 =
(1/(size(M75,1)-
1))*SM75;
ACov76 =
(1/(size(M76,1)-
1))*SM76;
ACov77 =
(1/(size(M77,1)-
1))*SM77;
ACov78 =
(1/(size(M78,1)-
1))*SM78;
ACov79 =
(1/(size(M79,1)-
1))*SM79;
ACov80 =
(1/(size(M80,1)-
1))*SM80;
ACov81 =
(1/(size(M81,1)-
1))*SM81;
ACov82 =
(1/(size(M82,1)-
1))*SM82;
ACov83 =
(1/(size(M83,1)-
1))*SM83;
ACov84 =
(1/(size(M84,1)-
1))*SM84;
ACov85 =
(1/(size(M85,1)-
1))*SM85;
ACov86 =
(1/(size(M86,1)-
1))*SM86;
ACov87 =
(1/(size(M87,1)-
1))*SM87;
ACov88 =
(1/(size(M88,1)-
1))*SM88;
ACov89 =
(1/(size(M89,1)-
1))*SM89;
ACov90 =
(1/(size(M90,1)-
1))*SM90;
ACov91 =
(1/(size(M91,1)-
1))*SM91;
ACov92 =
(1/(size(M92,1)-
1))*SM92;
ACov93 =
(1/(size(M93,1)-
1))*SM93;
ACov94 =
(1/(size(M94,1)-
1))*SM94;
ACov95 =
(1/(size(M95,1)-
1))*SM95;
ACov96 =
(1/(size(M96,1)-
1))*SM96;
ACov97 =
(1/(size(M97,1)-
1))*SM97;
ACov98 =
(1/(size(M98,1)-
1))*SM98;
ACov99 =
(1/(size(M99,1)-
1))*SM99;
ACov100 =
(1/(size(M100,1)-
1))*SM100;
ACov101 =
(1/(size(M101,1)-
1))*SM101;
ACov102 =
(1/(size(M102,1)-
1))*SM102;
ACov103 =
(1/(size(M103,1)-
1))*SM103;
ACov104 =
(1/(size(M104,1)-
1))*SM104;
ACov105 =
(1/(size(M105,1)-
1))*SM105;

```

```

ACov106 = (1/(size(M106,1)-1))*SM106;
ACov107 = (1/(size(M107,1)-1))*SM107;
ACov108 = (1/(size(M108,1)-1))*SM108;
ACov109 = (1/(size(M109,1)-1))*SM109;
ACov110 = (1/(size(M110,1)-1))*SM110;
ACov111 = (1/(size(M111,1)-1))*SM111;
ACov112 = (1/(size(M112,1)-1))*SM112;
ACov113 = (1/(size(M113,1)-1))*SM113;
ACov114 = (1/(size(M114,1)-1))*SM114;
ACov115 = (1/(size(M115,1)-1))*SM115;
ACov116 = (1/(size(M116,1)-1))*SM116;
ACov117 = (1/(size(M117,1)-1))*SM117;
ACov118 = (1/(size(M118,1)-1))*SM118;
ACov119 = (1/(size(M119,1)-1))*SM119;
ACov120 = (1/(size(M120,1)-1))*SM120;
ACov121 = (1/(size(M121,1)-1))*SM121;
ACov122 = (1/(size(M122,1)-1))*SM122;
ACov123 = (1/(size(M123,1)-1))*SM123;
ACov124 = (1/(size(M124,1)-1))*SM124;

ACov125 = (1/(size(M125,1)-1))*SM125;
ACov126 = (1/(size(M126,1)-1))*SM126;
ACov127 = (1/(size(M127,1)-1))*SM127;
ACov128 = (1/(size(M128,1)-1))*SM128;
ACov129 = (1/(size(M129,1)-1))*SM129;
ACov130 = (1/(size(M130,1)-1))*SM130;
ACov131 = (1/(size(M131,1)-1))*SM131;
ACov132 = (1/(size(M132,1)-1))*SM132;
ACov133 = (1/(size(M133,1)-1))*SM133;
ACov134 = (1/(size(M134,1)-1))*SM134;
ACov135 = (1/(size(M135,1)-1))*SM135;
ACov136 = (1/(size(M136,1)-1))*SM136;
ACov137 = (1/(size(M137,1)-1))*SM137;
ACov138 = (1/(size(M138,1)-1))*SM138;
ACov139 = (1/(size(M139,1)-1))*SM139;
ACov140 = (1/(size(M140,1)-1))*SM140;
ACov141 = (1/(size(M141,1)-1))*SM141;
ACov142 = (1/(size(M142,1)-1))*SM142;
ACov143 = (1/(size(M143,1)-1))*SM143;

ACov144 = (1/(size(M144,1)-1))*SM144;
ACov145 = (1/(size(M145,1)-1))*SM145;
ACov146 = (1/(size(M146,1)-1))*SM146;
ACov147 = (1/(size(M147,1)-1))*SM147;
ACov148 = (1/(size(M148,1)-1))*SM148;
ACov149 = (1/(size(M149,1)-1))*SM149;
ACov150 = (1/(size(M150,1)-1))*SM150;
ACov151 = (1/(size(M151,1)-1))*SM151;
ACov152 = (1/(size(M152,1)-1))*SM152;
ACov153 = (1/(size(M153,1)-1))*SM153;
ACov154 = (1/(size(M154,1)-1))*SM154;
ACov155 = (1/(size(M155,1)-1))*SM155;
ACov156 = (1/(size(M156,1)-1))*SM156;
ACov157 = (1/(size(M157,1)-1))*SM157;
ACov158 = (1/(size(M158,1)-1))*SM158;
ACov159 = (1/(size(M159,1)-1))*SM159;
ACov160 = (1/(size(M160,1)-1))*SM160;
ACov161 = (1/(size(M161,1)-1))*SM161;
ACov162 = (1/(size(M162,1)-1))*SM162;

```

```

ACov163 = (1/(size(M163,1)-1))*SM163;
ACov164 = (1/(size(M164,1)-1))*SM164;
ACov165 = (1/(size(M165,1)-1))*SM165;
ACov166 = (1/(size(M166,1)-1))*SM166;
ACov167 = (1/(size(M167,1)-1))*SM167;
ACov168 = (1/(size(M168,1)-1))*SM168;
ACov169 = (1/(size(M169,1)-1))*SM169;
ACov170 = (1/(size(M170,1)-1))*SM170;
ACov171 = (1/(size(M171,1)-1))*SM171;
ACov172 = (1/(size(M172,1)-1))*SM172;
ACov173 = (1/(size(M173,1)-1))*SM173;
ACov174 = (1/(size(M174,1)-1))*SM174;
ACov175 = (1/(size(M175,1)-1))*SM175;
ACov176 = (1/(size(M176,1)-1))*SM176;
ACov177 = (1/(size(M177,1)-1))*SM177;
ACov178 = (1/(size(M178,1)-1))*SM178;
ACov179 = (1/(size(M179,1)-1))*SM179;
ACov180 = (1/(size(M180,1)-1))*SM180;
ACov181 = (1/(size(M181,1)-1))*SM181;

ACov182 = (1/(size(M182,1)-1))*SM182;
ACov183 = (1/(size(M183,1)-1))*SM183;
ACov184 = (1/(size(M184,1)-1))*SM184;
ACov185 = (1/(size(M185,1)-1))*SM185;
ACov186 = (1/(size(M186,1)-1))*SM186;
ACov187 = (1/(size(M187,1)-1))*SM187;
ACov188 = (1/(size(M188,1)-1))*SM188;
ACov189 = (1/(size(M189,1)-1))*SM189;
ACov190 = (1/(size(M190,1)-1))*SM190;
ACov191 = (1/(size(M191,1)-1))*SM191;
ACov192 = (1/(size(M192,1)-1))*SM192;
ACov193 = (1/(size(M193,1)-1))*SM193;
ACov194 = (1/(size(M194,1)-1))*SM194;
ACov195 = (1/(size(M195,1)-1))*SM195;
ACov196 = (1/(size(M196,1)-1))*SM196;
ACov197 = (1/(size(M197,1)-1))*SM197;
ACov198 = (1/(size(M198,1)-1))*SM198;
ACov199 = (1/(size(M199,1)-1))*SM199;

%Se crea un vector con las autocovarianzas

SelfCov = [ACov1; ACov2; ACov3; ACov4; ACov5; ACov6; ACov7; ACov8; ACov9; ACov10; ACov11; ACov12; ACov13; ACov14; ACov15; ACov16; ACov17; ACov18; ACov19; ACov20; ACov21; ACov22; ACov23; ACov24; ACov25; ACov26; ACov27; ACov28; ACov29; ACov30; ACov31; ACov32; ACov33; ACov34; ACov35; ACov36; ACov37; ACov38; ACov39; ACov40; ACov41; ACov42; ACov43; ACov44; ACov45; ACov46; ACov47; ACov48; ACov49; ACov50; ACov51; ACov52; ACov53; ACov54; ACov55; ACov56; ACov57; ACov58; ACov59; ACov60; ACov61; ACov62; ACov63; ACov64; ACov65; ACov66; ACov67; ACov68; ACov69; ACov70; ACov71; ACov72; ACov73; ACov74; ACov75; ACov76; ACov77; ACov78; ACov79; ACov80; ACov81; ACov82; ACov83; ACov84; ACov85; ACov86; ACov87; ACov88; ACov89; ACov90; ACov91; ACov92; ACov93; ACov94; ACov95; ACov96; ACov97; ACov98; ACov99; ACov100; ACov101; ACov102; ACov103; ACov104; ACov105; ACov106; ACov107; ACov108; ACov109; ACov110; ACov111; ACov112; ACov113; ACov114; ACov115;

```

```

ACov116; ACov117; ACov118; ACov119; ACov120; ACov121; ACov122; ACov123;
ACov124; ACov125; ACov126; ACov127; ACov128; ACov129; ACov130; ACov131;
ACov132; ACov133; ACov134; ACov135; ACov136; ACov137; ACov138;
ACov139;ACov140; ACov141; ACov142; ACov143; ACov144; ACov145; ACov146;
ACov147; ACov148; ACov149; ACov150; ACov151; ACov152; ACov153; ACov154;
ACov155; ACov156; ACov157; ACov158; ACov159; ACov160; ACov161; ACov162;
ACov163; ACov164; ACov165; ACov166; ACov167; ACov168; ACov169; ACov170;
ACov171; ACov172; ACov173; ACov174; ACov175; ACov176; ACov177; ACov178;
ACov179; ACov180; ACov181; ACov182; ACov183; ACov184; ACov185; ACov186;
ACov187; ACov188; ACov189; ACov190; ACov191; ACov192; ACov193; ACov194;
ACov195; ACov196; ACov197; ACov198; ACov199];
%Se calcula la varianza de la muestra sin rezagos
Var = var(a1);
%Se dividen las autocovarianzas entre la varianza para obtener la
autocorrelación
Rho = SelfCov./Var;

```

Para las gráficas se emplean las siguientes líneas:

```

%Se grafican las autocorrelaciones para la serie diaria
hold on
stem(Rho,'k','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',1);
xlabel('Rezagos de \Deltat_m');
ylabel('Función de autocorrelación');
title('Gráfica 4.1.3.3.A Autocorrelación de FDGC');
hold off
%Para la gráfica de la serie semanal
hold on
stem(Rho,'k','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',1);
xlabel('Rezagos de \Deltat_m');
ylabel('Función de autocorrelación');
title('Gráfica 4.1.3.3.B Autocorrelación de FSGC');
hold off
%Para la gráfica de la serie mensual
hold on
stem(Rho,'k','MarkerFaceColor','k','MarkerSize',1);
xlabel('Rezagos de \Deltat_m');
ylabel('Función de autocorrelación');
title('Gráfica 4.1.3.3.C Autocorrelación de FMGC');
hold off

```

Para las gráficas 4.1.3.3.D-F lo que se hizo fue que al código anterior se le agregaron las siguientes líneas:

```

%Ahora se calcula la suma acumulada de Rho
SumAcumRho = cumsum(Rho);
%Para la gráfica doble logarítmica de la autocorrelación de la serie
diaria
logV = log10(V);
logSumAcumRho = log10(SumAcumRho);
hold on
plot(logV(1:99),logSumAcumRho,'k');
xlabel('log número de rezagos');
ylabel('log \Sigma^{\tau_{t=1}}c_d(t) de la función de autocorrelación');
hold on
%Se hace la regresión

```

```

V1 = (1:1:199)';
q = polyfit(log10(V1),log10(SumAcumRho),1);
t = 0:.2:2.4;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'k --')
text(0.5,1,['y = ' num2str(q(2))','+' num2str(q(1)),'x'])
title('Gráfica 4.1.3.3.D Suma acumulada de la función de autocorrelación
de FDGC');
hold off
%Para graficar la serie semanal es el mismo procedimiento que se usó para
la serie diaria
%Para la frecuencia mensual
%Para la gráfica doble logarítmica de la suma acumulada de Rho
logV = log10(V);
logSumAcumRho = log10(SumAcumRho);
hold on
plot(logV(2:100),logSumAcumRho,'k');
xlabel('log número de rezagos');
ylabel('log \Sigma^{\tau_{t=1}}c_m(t) de la función de autocorrelación');
hold on
%Se hace la regresión
V1 = (1:1:30)';
SumAcumRho2 = cumsum(Rho(1:30));
q = polyfit(log10(V1),log10(SumAcumRho2),1);
t = 0:.2:2;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'k --')
text(0.4,0.2,['y = ' num2str(q(2))','+' num2str(q(1)),'x'])
text(0.4,0.1,['\gamma = ',num2str(q(1))])
title('Gráfica 4.1.3.3.F Suma acumulada de la función de autocorrelación
de FMGC');
hold off

```

Para la prueba R/S, el código empleado se encuentra en Pérez Enríquez. Lo que se hizo sólo fue modificarla para que se ajustara a las necesidades de la investigación. Solo se va a poner el ejemplo de la prueba aplicada a la serie mensual pero el funcionamiento es el mismo con cada una de las otras series salvo pequeñas modificaciones al momento de hacer la regresión para ajustar la recta.

```

function H = RSHurst(Y)
%Primero los datos deben ser transformados evaluando el logaritmo natural
de cada observación y después haciendo el cálculo de la primera
diferencia, con estos resultados es con los que trabaja el código.
N = length(Y);
for i = 1:20;
    m = floor(N/(2*i));
    for j=1:i;
        r = Y(1+(j-1)*m:j*m);
        M = mean(r);
        x = (r-M);
        V = cumsum(x);
        R(j) = max(V)-min(V);
        S(j) = std(r);
    end
    tau(i) = m;
end

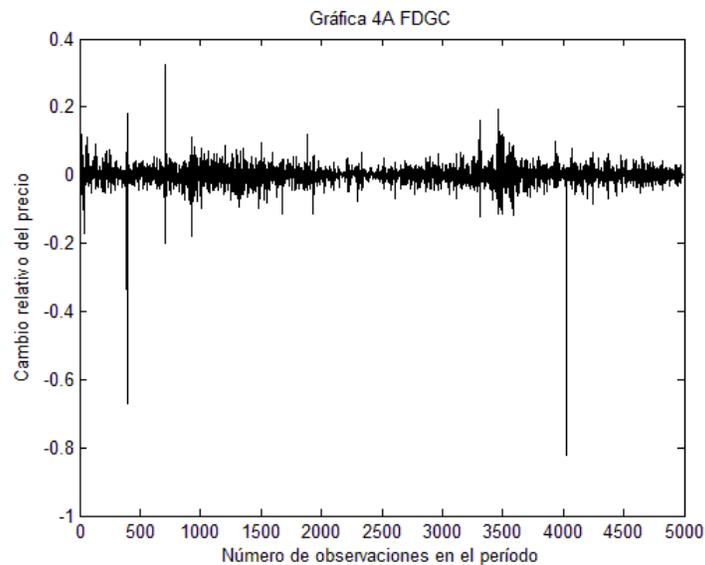
```

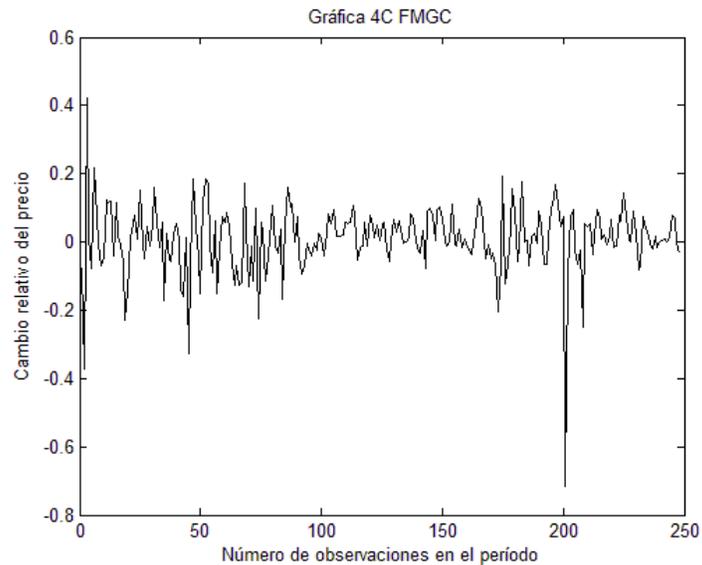
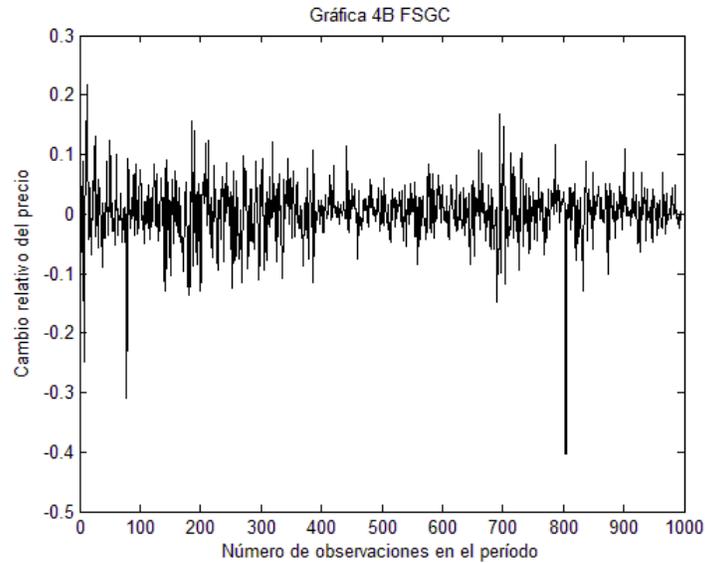
```

RS(i) = mean(R./S);
end
f2=figure;
plot(log10(tau),log10(RS),'k +')
xlabel('log(\tau)')
ylabel('log(R/S)')
hold on
%Aquí es donde se hace la regresión
q = polyfit(log10(tau),log10(RS),1);
t = 0.7:.2:2.2;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'k -');
text(1,1.1,['y = ' num2str(q(2)),'+' num2str(q(1)),'x']);
text(1,1,['H=' ,num2str(q(1))]);
title('Gráfica 4.1.3.3.I Prueba R/S a FMGC');
hold off

```

## A.4 Gráficas del punto 4.1.3.3.





Las gráficas anteriores se generan a través de las siguientes instrucciones en MaTLAB R2013a, habiendo cargado previamente los datos de los cambios relativos del precio para cada una de las frecuencias.

```
%Para la frecuencia diaria
plot(dia,'k');
title('Gráfica 4A FDGC');
xlabel('Número de observaciones en el período');
ylabel('Cambio relativo del precio');
```

```
%Para la frecuencia semanal
plot(semana,'k');
title('Gráfica 4B FSGC');
xlabel('Número de observaciones en el período');
ylabel('Cambio relativo del precio');
```

```

%Para la frecuencia mensual
plot(mes,'k');
title('Gráfica 4C FMGC');
xlabel('Número de observaciones en el período');
ylabel('Cambio relativo del precio');

```

## A.4 Punto 4.2.

Empleando el programa MaTLAB R2013a se evalúa la prueba R/S de las frecuencias del IPC con la misma función del punto anterior salvo que las modificaciones hechas a partir de la línea “%Aquí es donde se hace la regresión” son las siguientes, para la frecuencia diaria:

```

q = polyfit(log10(tau),log10(RS),1);
t = 2:.2:3.5;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'k -');
text(2.25,1.7,['y =' num2str(q(2)),'+' num2str(q(1)),'x']);
text(2.25,1.65,['H=' ,num2str(q(1))]);
title('Gráfica 4.2.A Prueba R/S a IPCD');

```

Para la frecuencia semanal:

```

q = polyfit(log10(tau),log10(RS),1);
t = 1.3:.2:2.8;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'k -');
text(1.45,1.3,['y =' num2str(q(2)),'+' num2str(q(1)),'x']);
text(1.45,1.25,['H =' ,num2str(q(1))]);
title('Gráfica 4.2.B Prueba R/S a IPCS');

```

Y para la frecuencia mensual:

```

q = polyfit(log10(tau),log10(RS),1);
t = 0.75:.2:2.3;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'k -');
text(1,1.1,['y =' num2str(q(2)),'+' num2str(q(1)),'x']);
text(1,1.05,['H =' ,num2str(q(1))]);
title('Gráfica 4.2.C Prueba R/S a IPCM');

```

Para realizar las gráficas 4.2.D-G se abre un nuevo script en MaTLAB R2013a y se escribe lo siguiente:

```

%Gráfica 4.2.D
x = [2, 5, 5, 6, 47, 61];
figure;
barh(x,0.5,'k')
set(gca,'YTickLabel',{'Fondo de
inversión','Otro','Plazo','Cheques','Ahorro','Nómina'});
xlabel('Porcentaje');
title('Gráfica 4.2.D Porcentaje de usuarios por producto de captación');
xlim([0 100]);

```

```

gtext({'2%';'5%';'15%';'6%';'47%';'61%';'(ENIF,2012,p.20)'});

%Gráfica 4.2.E
x = [1, 8, 10, 16, 25, 29, 39];
figure;
barh(x,0.5,'k')
set(gca,'YTickLabel',{'Vejez o retiro','Inversión','Vacaciones o
fiestas','Casa','Educación y salud','Personales','Emergencias'});
xlabel('Porcentaje');
title('Gráfica 4.2.E Destino del ahorro formal');
xlim([0 50]);
gtext({'1%';'8%';'10%';'16%';'25%';'29%';'39%';'(ENIF,2012,p.22)'});

%Gráfica 4.2.F
x = [1, 2, 3, 4, 4, 5, 16, 73];
figure;
barh(x,0.6,'k')
set(gca,'YTickLabel',{'Los intereses son bajos','La sucursal le queda
lejos','Las comisiones son altas','No confía en los bancos','Prefiere
otras formas de ahorro','Piden requisitos que no tiene','No le interesa o
no lo necesita','No le alcanza, sus ingresos son insuficientes o
variables'});
xlabel('Porcentaje');
title('Gráfica 4.2.F Barreras al ahorro formal');
xlim([0 100]);
gtext({'1%';'2%';'3%';'4%';'4%';'5%';'16%';'73%';'(ENIF,2012,p.22)
Población: 45,382,727'});

%Gráfica 4.2.G
x = [0, 4, 7, 14, 23, 27, 38];
figure;
barh(x,0.6,'k')
set(gca,'YTickLabel',{'Vejez o retiro','Inversión','Vacaciones o
fiestas','Casa','Educación y salud','Emergencia','Personales'});
xlabel('Porcentaje');
title('Gráfica 4.2.G Destino del ahorro informal');
xlim([0 50]);
gtext({'0%';'4%';'7%';'14%';'23%';'27%';'38%';'(ENIF,2012,p.24)
Población: 30,766,735'});

```

## Bibliografía.

1. A. Dickey, D. & A. Fuller, W. (1979). *Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root*. [Versión electrónica]. Journal of the American Statistical Association, Volumen 74, 427-431. Disponible en <<http://www.deu.edu.tr/userweb/onder.hanedar/dosyalar/1979.pdf>> [Consulta: 7 de marzo de 2013].
2. Akgiray, V. & Geoffrey Booth, G. (1988). *The Stable-Law Model of Stock Returns*. Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 6, No.1, 51-57.

3. AlAbdulhadi, D., Shetty, S. & Alshamali, M. (2013). *A fractal analysis of the Kuwait stock market*. The International Journal of Finance, Vol.25, No.3, 7875-7888.
4. Aldana, M. (2007). *Complex networks*. Proceeding of the XV Summer School in Physics. Cuernavaca, Morelos: Instituto de Ciencias Físicas, UNAM. 1-26. Disponible en <<http://www.fis.unam.mx/~max/MyWebPage/notastwocolumn.pdf>> [Consulta: 14 de febrero de 2015].
5. Aljure Jiménez, Y. y Gallego, J. A. (2010). *Desigualdad y leyes de potencia*. [Versión electrónica]. Cuadernos de Economía, Vol.29, No. 53, 57-95. Disponible en <<http://www.bdigital.unal.edu.co/22036/>> [Consulta: 18 de abril de 2013].
6. Anderson, N. & Noss, J. (2013). *The Fractal Market Hypothesis and its implications for the stability of financial markets*. [Versión electrónica]. Financial Stability Paper No.23, 3-21. Disponible en <[http://www.bankofengland.co.uk/research/Documents/fspapers/fs\\_paper23.pdf](http://www.bankofengland.co.uk/research/Documents/fspapers/fs_paper23.pdf)> [Consulta: 13 de febrero de 2015].
7. Andreoli, A., Caravenna, F., Dai Pra, P. & Posta, G. (2012). *Scaling and Multiscaling in Financial Series: A Simple Model*. [Versión electrónica]. arXiv:1006.0155v2 [q-fin.ST], 1-32. Disponible en <<http://arxiv.org/pdf/1006.0155v2.pdf>> [Consulta: 20 febrero de 2015].
8. Arco Juan, F.J. Diccionario económico: Trader. <<http://www.expansion.com/diccionario-economico/trader.html>> [Consulta: 01 de abril de 2015].
9. Armengol, J., Sabater, S., Vidal, A & Sabater, F. (1991). *Using the rescaled range analysis for the study of hydrological records: The river Ter as an example*. [Versión electrónica]. Oecologia Aquatica, Vol.10, Núm. 10. 21-33. Disponible en <<http://revistes.iec.cat/index.php/OA/article/viewFile/64414/64272>> [Consulta: 12 de febrero de 2015].
10. Astudillo Ustrúa, P. (1975). *Lecciones de historia del pensamiento económico*. México: Facultad de Derecho, UNAM.
11. B. Mandelbrot, B. (1963). *The variation of certain speculative prices*. The Journal of Business, Vol. 36, No. 4, 394-419.
12. \_\_\_\_\_ (1969). *Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variances*. International Economic Review, Vol.10, 82-111.
13. \_\_\_\_\_ (1972). *Statistical methodology for nonperiodic cycles: From the covariance to R/S analysis*. EUA: IBM.

14. \_\_\_\_\_ (1987). *Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión*. España: Tusquest Editores.
15. \_\_\_\_\_ (1997). *Fractals and scaling in finance*. EUA: Springer.
16. \_\_\_\_\_ (2001). *Scaling in financial prices: I. Tails and dependence*. Quantitative Finance, Vol. 1, 113-123.
17. \_\_\_\_\_ (2009). *La geometría fractal de la naturaleza* (3<sup>a</sup> ed.). España: Tusquest Editores.
18. \_\_\_\_\_ (2014). *El fractalista: Memorias de un científico inconformista*. México: Tusquets Editores.
19. \_\_\_\_\_ Benoit Fractal Analysis Sitem [CD-ROM]. Versión 1.31. EUA: TruSoft International Inc. Programa computacional.
20. B. Mandelbrot, B. & M. Taylor, H. (1967). *On the distribution of stock price differences*. Operations Research, Vol. 15, No.6, 1057-1062.
21. \_\_\_\_\_ & R. Wallis, J. (1968). *Noah, Joseph, and operational hydrology*. New York, EUA: International Business Machines Research Center.
22. \_\_\_\_\_ & R. Wallis, J. (1969a). *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 1: Sample graphs, averages and variances*. Water Resources Research, 5, 283-305.
23. \_\_\_\_\_ & R. Wallis, J. (1969b). *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 2: Rescaled bridge range and "pox diagrams"*. Water Resources Research, 5, 306-326.
24. \_\_\_\_\_ & R. Wallis, J. (1969c). *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 3: Mathematical Appendix*. Water Resources Research, 5, 327-338.
25. \_\_\_\_\_ & R. Wallis, J. (1969d). *Robustness of R/S in measuring noncyclic global statistical dependence*. Water Resources Research, 5, 483-516.
26. \_\_\_\_\_, Fisher, A. & Calvet, L. (1997). *A Multifractal Model of Asset Returns*. Cowles Foundation Discussion Paper No. 1164, 1-31.
27. \_\_\_\_\_ & L. Hudson, R. (2006). *Fractales y finanzas: Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*. España: Tusquest Editores.
28. Babeau, A. & Sbrano, T. (2002). *Household wealth in the national accounts of Europe, The United States and Japan*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.

29. Ball, P. (2010). *Masa crítica: Cambio, caos y complejidad*. México: Fondo de Cultura Económica.
30. Barea, J. y Barea M. (1998). *Después de Maastricht, ¿qué?* España: Ediciones Encuentro.
31. Barunik, J. & Kristoufek, L. (2010). *On Hurst exponent estimation under heavy-tailed distributions*. *Physica A* 389, 3844-3855.
32. Benito Castillo, J. L. (2012). *El modelo de Black I Sholes de valoración de opciones financieras*. España: Facultad de Matemáticas, Universidad de Barcelona. Disponible en <[http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/32883/1/Benito\\_el\\_modelo\\_de\\_Black\\_Sholes.pdf](http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/32883/1/Benito_el_modelo_de_Black_Sholes.pdf)> [Consulta: 7 de marzo de 2013].
33. Bolsa de Valores de El Salvador. *Tópicos financieros*. <[https://www.bves.com.sv/faq\\_details.php?id=161](https://www.bves.com.sv/faq_details.php?id=161)> [Consulta: 7 de marzo de 2013].
34. Borak Szymon, H., Wolfgang, K. & Weron, R. (2005-008). *Stable distributions*. Alemania: Leibniz Information Centre for Economics. Disponible en <<http://www.econstor.eu/bitstream/10419/25027/1/495992003.PDF>> [Consulta: 8 de diciembre de 2014]
35. Braun, E. (1999). *Caos, fractales y cosas raras*. México: Fondo de Cultura Económica.
36. Budinski-Petković, Lj., Lončarević, I., Jakšić, Z.M. & Vrhovac, S.B. (2014). *Fractal properties of financial markets*. *Physica A* 410, 43-53.
37. C. Canavos, G. (1988). *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y métodos*. México: McGraw-Hill.
38. C. Chiang, A. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática* (3<sup>a</sup> ed.). México: McGraw Hill.
39. Calvet, L. & Fisher, A. (2008). *Multifractal Volatility: Theory, forecasting, and pricing*. Burlington, MA: Academic Press.
40. Cantera, S. (2014, 10 de junio). *GDF demanda al consorcio de la Línea 12* [en línea]. CNN Expansión Sección Negocios. Recuperado el 19 de febrero de 2015 de <http://www.cnnexpansion.com/negocios/2014/06/10/gdf-demanda-al-consorcio-de-la-linea-12>
41. Carena, M. (2012). “Teorema del punto fijo en espacios métricos: una aplicación a fractales” en FAMAF XXIV Encuentro de Estudiantes de Matemática Unión Matemática Argentina. Serie “B” Trabajos de Matemática N° 62. Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. 63-80. Disponible en

<[http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie\\_b/BMat62.pdf](http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BMat62.pdf)> [Consulta: 11 de febrero de 2015].

42. Casseti, J. (2011). *Vuelos truncados de Lévy aplicados al estudio de índices de mercado*. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires.

43. Chávez, P. (2014, 19 de agosto). *Grupo Lala y Grupo Carso entran al IPC: La empresa lechera tiene menos de un año de haber entrado a la Bolsa* [En línea]. El Economista sección Termómetro financiero. Recuperado el 01 de abril de 2015 de <http://eleconomista.com.mx/mercados-estadisticas/2014/08/19/grupo-lala-grupo-carso-entran-ipc>.

44. Cortazar, G. (S.A). *Cap. 7. Chile: Pontifica Universidad Católica de Chile*. Disponible en <<http://www.gonzalocortazar.com/cap7.pdf>> [Consulta: 7 de marzo de 2013].

45. Crespo, R. (2011). *La paradoja de Allais*. [Versión electrónica]. Revista de antiguos, año XVIII-julio 2011, 54-55. Disponible en <[http://www.iae.edu.ar/antiguos/Documents/Revista22/IAE22\\_54\\_55.pdf](http://www.iae.edu.ar/antiguos/Documents/Revista22/IAE22_54_55.pdf)> [Consulta: 6 de abril de 2013].

46. Díaz Mata, A. (2008). *Algunas consideraciones sobre el uso de técnicas fractales en el análisis del mercado accionario bursátil mexicano*. [Versión electrónica]. Contaduría y Administración, Núm. 224, enero-abril, 35-57. Disponible en <<http://www.journals.unam.mx/index.php/rca/article/view/4699>> [Consulta: 25 de marzo de 2013].

47. Díaz, N. (2010). *George Soros, maestro de los especuladores del siglo XXI*. En Wordpress, 24 de mayo. < <http://abelgalois.wordpress.com/2010/05/24/george-soros-maestro-de-los-especuladores-del-siglo-xxi/>> [Consulta: 13 de marzo de 2013].

48. Diebold, F. (1999). *Elementos de pronósticos*. México: Thomson Editores.

49. E. Hansen, Bruce. (2013). *Econometrics*. EUA: Universidad de Wisconsin. Disponible en < <http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/econometrics/Econometrics.pdf>> [Consulta: 7 de marzo de 2013].

50. E. J. Newman, M. (2003). *The Structure and Function of Complex Networks*. SIAM Review, Vol.45, No.2, 167-256.

51. E. Lomelí, H. (2005). *Sistemas dinámicos*. México: Departamento académico de matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México. Disponible en <<http://matematicas.itam.mx/sd1/pdf/apuntesSD2.pdf>> [Consulta: 6 de abril de 2013].

52. E. Peters, E. (1991). *Chaos and order in the capital markets: A new view of cycles, prices, and market volatility*. EUA: John Wiley & Sons Inc.
53. \_\_\_\_\_ (1994). *Fractal market analysis: Applying chaos theory to investment and economics*. EUA: John Wiley & Sons Inc.
54. Elert, G. (2005). *Cap. 3 About Dimension*. En *The chaos hypertextbook: Mathematics in the Age of the Computer*. Disponible en <<http://hypertextbook.com/chaos/>> [Consulta: 6 de abril de 2013].
55. EViews 7 [CD-ROM]. Versión 7. EUA: IHS Global Inc. Programa computacional.
56. F. Barnsley, M. (1993). *Fractals everywhere*. (2ª edición). EUA: Morgan Kaufmann.
57. F. Fama, E. (1963). *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*. The Journal of Business, Vol. 36, No.4, 420-429.
58. \_\_\_\_\_ (1965). *Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market*. Management Science, Vol. 11, No. 3, Series A, 404-419.
59. Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications*. Reino Unido: John Wiley & Sons.
60. Feller, W. (1966). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. México: Editorial Limusa.
61. Fernández Díaz, A. (1994). *La economía de la complejidad: Economía dinámica caótica*. España: McGraw Hill.
62. \_\_\_\_\_ (2000). *Dinámica caótica en economía: Teoría y aplicaciones (2ª ed.)*. España: McGraw Hill.
63. Fernández García, J. y Díaz de Urdanivia, C. A. (2000). *Para una breve historia de la econometría*. [Versión electrónica]. *Política y cultura*, núm. 13, 7-32. Disponible en <<http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=26701302>> [Consulta: 7 de marzo de 2013].
64. Frame, M., B. Mandelbrot, B. & Neger, N. *Fractal geometry*. <<http://classes.yale.edu/fractals/>> [Consulta: 6 de abril de 2013].
65. Gaarder, J. (2000). *El mundo de Sofía*. México: Editorial Patria.
66. Galván González, R. (2010). *Curso de inversión y teoría de portafolios*. México: Actinver Casa de Bolsa Fondos de Inversión. Disponible en <<http://www.actinver.com/documentos/CentroEducacionBursanet/Documentos/basico/CURSOPORTAFOLIOS.pdf>> [Consulta: 7 de marzo de 2013].

67. Gálvez Medina, E. T. (2005). *Análisis fractal del mercado de valores de México (1978-2004)*. Tesis de doctorado. Instituto Politécnico Nacional.
68. Gastón Beiró, M. (2008). *Visualización de redes complejas*. Tesis de licenciatura. Universidad de Buenos Aires.
69. Gell-Mann, M. (1995). *El quark y el jaguar: Aventuras en lo simple y lo complejo*. (2ª ed.). España: TusQuets Editores.
70. Gillani, S. (2004). *Goodness of fit test for lognormal distribution*. <<http://www.stata.com/statalist/archive/2004-05/msg01066.html>> [Consulta: 6 de abril de 2013].
71. Gu, R., Shao, Y. & Wang, Q. (2013). *Is the efficiency of stock market correlated with multifractality? An evidence from the Shanghai stock market*. *Physica A* 392, 361-370.
72. Gutiérrez B., H. (2014, 6 de mayo). *Logra GDF suspensión de pago por 489 mdp a la federación por L-12* [en línea]. Diario DF Sección Primera. Recuperado el 19 de febrero de 2015 de <http://diariodf.com.mx/index.php/primera-articulos/41537-logra-gdf-suspension-de-pago-por-489-mdp-a-la-federacion-por-l-12>
73. Hernández Alonso, J. (2000). *Economía cuantitativa*. España: Editorial síntesis.
74. Huerta González, A. (2010). *La crisis en EUA y México: La dificultad de su salida*. México: Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México.
75. Huston McCulloch, J. (1986). *Simple consistent estimators of stable distribution parameters*. *Commun. Statist.-Simula*, Vol.15, No.4, 1109-1136.
76. Instituto Nacional de Estadística y Geografía. *Encuesta Nacional de Inclusión Financiera* 2012. <<http://www.cnbv.gob.mx/Inclusi%C3%B3n/Documents/Encuesta%20Nacional%20de%200IF/An%C3%A1lisis%20Descriptivo%20ENIF%202012.pdf>> [Consulta: 01 de abril de 2015].
77. Instituto Nacional de Estadística y Geografía. *Glosario de la Encuesta Nacional de Inclusión Financiera* 2012. <<http://www3.inegi.org.mx/sistemas/Glosario/paginas/Contenido.aspx?ClvGlo=enif2012&nombre=050&c=33055&s=est>> [Consulta: 01 de abril de 2015].
78. Izquierdo Martín, A. J. (1998). *El declive de los grandes números: Benoit Mandelbrot y la estadística social*. [Versión electrónica]. EMPIRIA. Revista de Metodología de Ciencias Sociales, No 1, pp.51-84. Disponible en <<http://espacio.uned.es:8080/fedora/get/bibliuned:Empiria-1998-2E40FE9D-94EB-94F7-8969-EEE18632F63D/Documento.pdf>> [Consulta: 9 de mayo de 2013].

79. Jiang, Z. & Zhou, W. (2007). *Scale invariant distribution and multifractality of volatility multipliers in stock markets*. [Versión electrónica]. Physica A 381, 343-350. Disponible en <<http://www.paper.edu.cn/selfs/downpaper/zhouweixing-self-200711-3>> [Consulta: 20 de febrero de 2015].
80. Jiménez, R. (2011, 04 de agosto). *Salen de muestra de IPC firmas de Slim* [en línea]. El Universal sección Finanzas. Recuperado el 01 de abril de 2015 de <http://www.eluniversal.com.mx/finanzas/88397.html>.
81. Kharel, P. (2010). *Rescaled Range (R/S) analysis of the stock market returns*. EUA: The University of the South, Sewanee, TN. Disponible en <[http://www.researchgate.net/publication/268407567\\_Rescaled\\_Range%28RS%29\\_analysis\\_of\\_the\\_stock\\_market\\_returns](http://www.researchgate.net/publication/268407567_Rescaled_Range%28RS%29_analysis_of_the_stock_market_returns)> [Consulta: 29 de diciembre de 2014].
82. Klender A. y Cortez A. (2004). *Dinámica no lineal del tipo de cambio: Aplicación al mercado mexicano*. Tesis de doctorado. Universidad de Barcelona.
83. Konstantopoulos, T. (2008). *Central Limit Theorem*. Escocia: School of Mathematical Sciences. Disponible en <[http://www2.math.uu.se/~takis/public\\_html/PAPERS/cltarticle.pdf](http://www2.math.uu.se/~takis/public_html/PAPERS/cltarticle.pdf)> [Consulta: 3 de abril de 2013].
84. Kristoufek, L. (2009). *R/S analysis and DFA: finite simple properties and confidence intervals*. Alemania: Munich Personal RePEc Archive. Disponible en <<http://mpra.ub.uni-muenchen.de/16446/>> [Consulta: 13 de febrero de 2015].
85. \_\_\_\_\_ (2012). *Fractal markets hypothesis and the global financial crisis: Scaling, investment horizons and liquidity*. Advances in Complex Systems, Vol.15, No.6, 1250065-1 - 1250065-13.
86. Kristoufek, L. & Vosvrda, M. (2013). *Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure*. Physica A392, 194-193.
87. La Spada, G., Doyne Farmer, J. & Lillo, F. (2008). *The non-random walk of stock prices: The long-term correlation between signs and sizes*. [Versión electrónica]. arXiv:0711.4596v2 [q-fin.PR], 1-9. Disponible en <<http://arxiv.org/pdf/0711.4596v2.pdf>> [Consulta: 20 de febrero de 2015].
88. Leos Zamorategui, A. (2011). *Sincronización en redes complejas*. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.
89. Ludlow Wiechers, J. (1997). *Modelos, pronósticos y volatilidad de las series de tiempo generadas en la Bolsa Mexicana de Valores*. México: Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco.

90. Lux, T. (2006). *Financial power laws: Empirical evidence, models, and mechanism*. [Versión electrónica]. Economics working paper/ Christian-Albrechts-Universität Kiel, Department of Economics, No. 2006,12, 1-36. Disponible en <<http://econstor.eu/bitstream/10419/3923/1/EWP-2006-12.pdf>> [Consulta: 20 de febrero de 2015].
91. M. Alonso, A. y García-Martos, C. (2012). *Time Series Analysis: Integrated and long-memory processes*. España: Universidad Carlos III de Madrid y Universidad Politécnica de Madrid. Disponible en <<http://www.etsii.upm.es/ingor/estadistica/Carol/TSAtema5petten.pdf>> [Consulta: 12 de febrero de 2015].
92. M. Goodwin, R. (1996). *Caos y dinámica económica*. España: Editorial Prensas universitarias de Zaragoza.
93. M. Lederman, L. & T. Hill, C. (2006). *La simetría y la belleza del universo*. España: Tusquets Editores.
94. M. Wooldridge, J. (2006). *Introducción a la econometría: Un enfoque moderno* (2ª ed.). España: Thomson.
95. Mahalingam, G., Murugesan, S. & Jayapal, G. (2012). *Persistence and Long Range Dependence in Indian Stock Market Returns*. [Versión electrónica]. International Journal of Management & Business Studies, Vol. 2 Issue 4, 72-77. Disponible en <[http://www.researchgate.net/profile/Gayathri\\_Mahalingam/publication/233961366\\_Persistence\\_and\\_Long\\_Range\\_Dependence\\_in\\_Indian\\_Stock\\_Market\\_Returns/links/09e4150d5f2a93883a000000.pdf](http://www.researchgate.net/profile/Gayathri_Mahalingam/publication/233961366_Persistence_and_Long_Range_Dependence_in_Indian_Stock_Market_Returns/links/09e4150d5f2a93883a000000.pdf)> [Consulta: 13 de febrero de 2015].
96. \_\_\_\_\_ & Raja, M. (2014). *Fractal Analysis and Long Range Dependence in S&P CNX Nifty Returns*. [Versión electrónica]. Scientific Management and Advanced Research Trust, Journal of Business Management Studies, Vol. 10 No.2, 88-96. Disponible en <[http://www.smartjournalbms.org/journal/vol-10-2/full-text/Fractal\\_Analysis\\_and\\_Long\\_Range\\_Dependence\\_in\\_S\\_P\\_CNX\\_Nifty\\_Returns.pdf](http://www.smartjournalbms.org/journal/vol-10-2/full-text/Fractal_Analysis_and_Long_Range_Dependence_in_S_P_CNX_Nifty_Returns.pdf)> [Consulta: 13 de febrero de 2015].
97. Marmolejo-Ramos, F. & Siva Tian, T. (2010). *The shifting boxplot. A boxplot based on essential summary statistics around the mean*. International Journal of Psychological Research, Vol. 3, No.1, 37-45.
98. Martínez Fagundo, C. (2012). *Curso de álgebra lineal: Teoría con aplicaciones a la economía*. México: Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México.
99. MaTLAB & Simulink Student Version [CD-ROM]. Versión R2013a (8.1.0.604). EUA: The MathWorks, Inc. Programa computacional.

100. Medkov, K. & Kaláshnik, S. (1981). *Manual de la teoría de las probabilidades y estadística matemática*. Rusia: Editorial MIR.
101. Méndez Alonso, R. (2005). *La evolución biológica como sistema auto-organizado, dinámicas no lineales y sistemas biológicos*. [Versión electrónica]. Ciencias, julio-septiembre, número 079, 26-34. Disponible en <<http://www.revistaciencias.unam.mx/images/stories/Articles/79/CNS07904.pdf>> [Consulta: 6 de abril de 2013].
102. Molero Jiménez, J. (2012). *Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Cuencas de atracción. Sistemas de funciones iteradas. Aplicaciones*. Tesis de licenciatura. Universidad Politécnica de Cartagena.
103. Montenegro García, A. (1989). *La función de autocorrelación y su empleo en el análisis de series de tiempo*. Revista Desarrollo y Sociedad, No.23, 117-132.
104. Muller Durán, N. I. (2008). *Evaluación de la tasa de interés en México mediante el uso de técnicas fractales y neuronales a fin de establecer un mecanismo eficiente de pronóstico*. Tesis de licenciatura. Instituto Politécnico Nacional.
105. N. Gujarati, D. (2003). *Econometría*. (4ª ed.). México: McGraw-Hill.
106. Navas Ureña, J. (2009). *Modelos matemáticos en biología*. España: Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén. Disponible en <[http://matema.ujaen.es/jnavas/web\\_modelos/pdf\\_mmb08\\_09/texto%20completo.pdf](http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf_mmb08_09/texto%20completo.pdf)> [Consulta: 6 de abril de 2013].
107. Nawrocki, D. (1995). *R/S Analysis and Long Term Dependence in Stock Market Indices*. [Versión electrónica]. Managerial Finance, Vol. 21 Issue 7. 1-15. Disponible en <[http://www.researchgate.net/profile/David\\_Nawrocki/publication/2386763\\_RS\\_Analysis\\_and\\_Long\\_Term\\_Dependence\\_in\\_Stock\\_Market\\_Indices/links/0deec52a14f2559781000000.pdf](http://www.researchgate.net/profile/David_Nawrocki/publication/2386763_RS_Analysis_and_Long_Term_Dependence_in_Stock_Market_Indices/links/0deec52a14f2559781000000.pdf)> [Consulta: 13 de febrero de 2015].
108. O. Matos, J. M., P. de Moura, E., E. Krüger, S. & A. Rabello, J. M. (2004). *Rescaled range analysis and detrended fluctuation analysis study of cast irons ultrasonic backscattered signals*. [Versión electrónica]. Chaos, Solitons and Fractals 19, 55-60. Disponible en <<http://www.complexity.ru/papers/science7.pdf>> [Consulta: 20 de febrero de 2015].
109. Ojeda Suárez, R. (2004). *Métodos de predicción para series de tiempo fractales*. Tesis de licenciatura. Universidad de las Américas Puebla.

110. Oprean, C., Tanasescu, C., & Bratian, V. (2014). *Are the capital markets efficient? A fractal market theory approach*. Economic Computation & Economic Cybernetics Studies & Research, Vol. 8, Issue 4, 1-17.

111. Parisi, F., Espinosa, C. y Parisi, A. (2007). *Pruebas de comportamiento caótico en índices bursátiles americanos*. [Versión electrónica]. El Trimestre Económico, vol. LXXIV (4), No. 296, 901-927. Disponible en < <http://finanzas.udp.cl/paper/ce5.pdf>> [Consulta: 8 de mayo de 2014].

112. Pérez Enríquez, R. *Programa en Matlab para el cálculo del exponente de Hurst y dimensión fractal de series de tiempo*. < <http://www.geociencias.unam.mx/~bole/eboletin/progHurstyD1108.pdf>> [Consulta: 23 de febrero de 2015].

113. Petty, W. (2004). *Essays on mankind and political arithmetic*. Reino Unido: Cassell & Co. Disponible en <<http://www.gutenberg.org/dirs/etext04/mkpa10h.htm>> [Consulta: 6 de marzo de 2013].

114. Plaza, S. (2011). *Fractales: una introducción*. Chile: Universidad de Santiago de Chile. Disponible en <<http://fermat.usach.cl/~dinamicos/Fractales.minimonograph.pdf>> [Consulta: 11 de febrero de 2015].

115. Rendón de la Torre, S. y Morales Castro, A. (2012). *Memoria de largo plazo en el índice S&P 500: Un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S*. En XVII Congreso Internacional de Contaduría, Administración e Informática. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1-23. Disponible en < [http://congreso.investiga.fca.unam.mx/es/congreso\\_xvii.php](http://congreso.investiga.fca.unam.mx/es/congreso_xvii.php)> [Consulta: 13 de febrero de 2015].

116. Riobóo Almanzor, J. y Riobóo Lestón, I. (2006). *Historia de la probabilidad y la estadística (V)*. España: Delta, publicaciones universitarias. Disponible en < <http://www.ahepe.es/Documentos/HISTORIA%20DE%20LA%20PROBABILIDAD%20Y%20LA%20ESTADISTICA%20V.pdf>> [Consulta: 10 de marzo de 2013]

117. Roehner, B. & Winiwarter, P. (1985). *Aggregation of independent paretian random variables*. Irlanda: Applied Probability Trust. Disponible en <<http://www.lpthe.jussieu.fr/~roehner/aapr85.pdf>> [Consulta: 8 de diciembre de 2014].

118. S. Mazo, E. (2011, 29 de marzo). *Así es la cartera de los hombres más ricos* [en línea]. Expansión Sección Empresas. Recuperado el 6 de abril de 2013 de <http://www.expansion.com/2011/03/29/empresas/banca/1301352311.html>

119. Sametband, M. J. (1999). *Entre el orden y el caos: La complejidad*. (2ª edición). México: Fondo de Cultura Económica.

120. Sierra Juárez, G. (2007). *Procesos Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales: Valuación y aplicaciones a los derivados y finanzas*. Tesis de doctorado. Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey.
121. Stata Data Analysis and Statistical Software [CD-ROM]. Versión 12.0. EUA: StataCorp. Programa computacional.
122. T. Brown, C. & S. Liebovitch, L. (2010). *Fractal Analysis*. EUA: SAGE Publications, Inc.
123. Talanquer, Vicente. (2003). *Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos*. (3ª edición). México: Fondo de Cultura Económica.
124. Thadewald, T. & Büning, H. (2004). *Jarque-Bera test and its competitors for testing normality: A power comparison*. [Versión electrónica]. School of Business & Economics. Discussion Paper: Economics, No. 2004/9, 1-23. Disponible en <<http://www.econstor.eu/bitstream/10419/49919/1/668828234.pdf>> [Consulta: 18 de febrero de 2015].
125. Tintner, G. (1940). *The variate difference method*. EUA: Principia Press, Inc. Disponible en <<http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m05/>> [Consulta: 14 de febrero de 2015].
126. Turiel, A. & Pérez-Vicente, C. J. (2005). *Role of multifractal sources in the analysis of stock market time series*. Physica A 355, 475-496.
127. Uribe Gil, J. M. y Ulloa Villegas, I. M. (2011). *Revisando la hipótesis de los mercados eficientes: Nuevos datos, nuevas crisis y nuevas estimaciones*. [Versión electrónica]. Cuadernos de Economía, vol. XXX, núm.55, 127-154. Disponible en <<http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/2821/282121963007.pdf>> [Consulta: 7 de marzo de 2013].
128. V. Uchaikin, V. & M. Zolotarev, V. (1999). *Chance and stability stable distributions and their applications*. Rusia: VSP. Disponible en <<http://staff.ulsu.ru/uchaikin/uchzol.pdf>> [Consulta: 8 de diciembre de 2014].
129. Vallejo, C. (2012, 14 de abril). *La crisis inmobiliaria no ha acabado en Estados Unidos* [en línea]. Inversión & Finanzas.com Sección Vivienda. Recuperado el 7 de noviembre de 2013 de [http://www.finanzas.com/noticias/vivienda/2012-04-14/702155\\_crisis-inmobiliaria-acabado-estados-unidos.html](http://www.finanzas.com/noticias/vivienda/2012-04-14/702155_crisis-inmobiliaria-acabado-estados-unidos.html)
130. Valores (2011, 06 de enero). MFRISCO gana 26.33% en su primera sesión [En línea]. El Economista sección Termómetro financiero. Recuperado el 01 de abril de 2015 de <http://eleconomista.com.mx/valores/2011/01/06/acciones-mfrisco-se-disparan-su-debut>.

131. Veillete, M. (2012). *STBL: Alpha stable distributions for MATLAB*. <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37514-stbl--alpha-stable-distributions-for-matlab>> [Consulta: 23 de febrero de 2015].
132. W. J. Granger, C. & Hyung, N. (2004). *Occasional structural breaks and long memory with applications to the S&P 500 absolute stock returns*. [Versión electrónica]. *Journal of Empirical Finance* 11, 399-421. Disponible en <<http://www.long-memory.com/volatility/GrangerHyung2004.pdf>> [Consulta: 20 de febrero de 2014].
133. W. Lo, A. (1991). *Long-Term Memory In Stock Market Prices*. *Econometrica*, Vol. 59, No. 5, 1279-1313.
134. Weron, R. (2002). *Measuring long-range dependence in electricity prices*. Takayasu, H. (ed). *Empirical Science of Financial Fluctuations*, Springer-Tokyo, 110-119. Disponible en <<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0103621>> [Consulta: 13 de febrero de 2015].
135. Wolfram Mathematica 9 [CD-ROM]. Versión 9. EUA: Wolfram Computation Meets Knowledge. Programa computacional.