UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

EL TEOREMA DE HOLONOMÍA DE BERGER

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
PATRICIA TANESSÍ QUINTANAR CORTÉS

ÓSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO, D. F. 5 DE MAYO DE 2015.

El teorema de holonomía de Berger

Tanessí Quintanar Cortés

10 de junio de 2015

Índice general

Notación

$\mathcal{F}(M)$: El conjunto de las funciones diferenciables real-valuadas en M.
T_pM: El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p.
$\mathfrak{X}(M)$: El conjunto de todos los campos vectoriales suaves en M.
TM: El haz tangente; es decir, $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$.
$G.x$: La órbita de x.
G_x: El subgrupo de isotropía de x.
$(B, B) = \{a \in G |\, aB \cap B \neq \emptyset\}$
supp f: El soporte de la función f.
τ: El transporte paralelo a lo largo de una curva.
τ^*: El levantamiento horizontal de τ.
$Hol(x)$: el grupo de holonomía con punto de referencia x.
$Hol^\circ(x)$: el grupo de holonomía reducido con punto de referencia x.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una demostración del teorema de holonomía de Berger dada por Carlos Olmos en el artículo “A geometric proof of the Berger Holonomy Theorem”, [5]. Dicho teorema dice lo siguiente:

Supongamos que el grupo de holonomía de una variedad riemanniana irreducible M es no transitivo en la esfera. Entonces M es localmente simétrica.

En 1955, Berger dio una clasificación de los posibles grupos de holonomía para las variedades riemannianas simplemente conexas irreducibles y no simétricas (ver cuadro 1).

En 1961, James Simons escribió el artículo intitulado “On the transitivity of holonomy systems”[20] donde escribe que su objetivo es dar una generalización puramente algebraica de la noción de grupo de holonomía y presentar una demostración corta del teorema de transitividad, el cual afirma que un sistema de holonomía riemanniano irreducible que es no transitivo debe ser simétrico.[1] No fue sino hasta 2005 que Olmos dio una demostración

[1] El resultado de transitividad implica el teorema de holonomía de Berger

Hol(g)	**dim(M)**	**Tipo de variedad**	**Comentarios**
SO(n)	n	variedad orientable	-
U(n)	2n	variedad de Kähler	Kähler
SU(n)	2n	variedad de Calabi-Yau	Ricci-plana, Kähler
Sp(n)·Sp(1)	4n	variedad Cuaternion-Kähler	Einstein
Sp(n)	4n	variedad hiperkähler	Ricci-plana, Kähler
G_2	7	variedad G_2	Ricci-plana
Spin(7)	8	variedad Spin(7)	Ricci-plana

Cuadro 1: Lista de Berger

geométrica de este teorema.

La demostración consiste, para empezar, en encontrar una subvariedad totalmente geodésica de M, cuyo grupo de holonomía esté contenido en la imagen (de la componente conexa) del subgrupo de isotropía de M con respecto a un vector dado, bajo una función llamada representación rebanada (*slice representation*). Después, ver que el grupo de holonomía normal del grupo de holonomía en ese vector (que resulta ser una subvariedad) actúa en nuestra subvariedad totalmente geodésica por isometrías, y finalmente concluir que esta subvariedad es localmente simétrica. Esta variedad se podrá construir gracias a varios resultados que se demostrarán, y finalmente, usando el hecho de que el conjunto de los puntos regulares del espacio tangente en un punto p es abierto y denso, podemos encontrar una familia de espacios que nos ayudarán a concluir que M es localmente simétrica.

Este trabajo se dividirá en cuatro capítulos. En el primero simplemente se darán definiciones y resultados básicos que nos servirán para construir la teoría de los capítulos posteriores. En el segundo capítulo se desarrollará todo lo necesario de la teoría de órbitas. En el tercer capítulo profundizaremos en la teoría de holonomía, que es una parte fundamental de este trabajo, mientras que en la última parte demostraremos el teorema de holonomía de Berger.

Capítulo 1

Preliminares

La idea de este capítulo es dar un panorama general de los hechos básicos que necesitaremos para desarrollar la teoría del resto de la tesis. Se trata pues, de un capítulo que no tendrá casi ninguna demostración pues se parte de que estos hechos son conocidos; como referencia general se puede consultar [1] o [2], por ejemplo. Esta parte se divide en dos secciones; la primera sección es una especie de curso express de geometría diferencial, mientras que la segunda menciona lo más básico que debemos saber sobre acciones de grupo.

1.1. Geometría diferencial

Nuestro objetivo con esta sección es grosso modo introducir las subvariedad riemannianas, pues para demostrar el resultado principal de la tesis, se utiliza la teoría de órbitas de subvariedades. El concepto de espacio normal de una variedad en un punto dado jugará un papel muy importante en el último capítulo. Se definen también los campos de Jacobi y los campos de Killing. Anexamos en esta sección la definición de que un espacio sea localmente simétrico y una útil definición equivalente.

Recordemos que una variedad diferenciable M es un espacio de Hausdorff equipado con un atlas completo y que a cada punto p en nuestra variedad le podemos asociar el espacio tangente T_pM, que es un espacio vectorial, con el cual es más fácil trabajar, pues podemos obtener muchísima información acerca de T_pM. A la unión disjunta de todos los espacios tangentes (en todos los puntos de M) le llamamos el haz tangente y se denota por TM. Es bien sabido que TM tiene estructura de variedad diferenciable y que su dimensión es $2n$ donde n es la dimensión de M. Particularmente importantes son los campos vectoriales, que definimos como sigue:

Definición 1.1.1. *Un campo vectorial V en una variedad M es una función $V : M \to TM$ que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector V_p en T_pM. Diremos que el campo es diferenciable si $V : M \to TM$ es diferenciable. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos diferenciables sobre M.*

La siguiente proposición es importante porque nos da una forma de obtener un campo a partir de otros dos campos dados.

Proposición 1.1.2. *Sean X y Y campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciable M. Entonces existe un único campo vectorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{F}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.*

El campo vectorial Z dado en la proposición anterior es llamado el **corchete** de X y Y, y es denotado por $[X, Y] = XY - YX$. El corchete cumple las siguientes propiedades:

a) $[X, Y] = -[Y, X]$.

b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$.

c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, el tensor L_V que satisface $L_V(f) = Vf$ y $L_VX = [V, X]$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es llamado la **derivada de Lie** relativa a V.

Dada una variedad M y un subconjunto de ésta, es natural preguntarse bajo qué condiciones el subconjunto puede preservar las condiciones de ser variedad diferenciable. La siguiente definición nos da la respuesta.

Definición 1.1.3. *Un subespacio topológico N de M es una subvariedad de M si:*

1. *N es una variedad diferenciable (con la topología inducida);*

2. *La inclusión $\iota : N \to M$ es suave y en cada $p \in M$ su diferencial $d\iota$ es inyectiva.*

Algunas propiedades que cumplen las subvariedades son las siguientes:

Proposición 1.1.4. *Sea N una subvariedad de M. Entonces:*

1. *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a N, entonces la restricción $X|N$ a N es un campo vectorial diferenciable en N.*

2. *Más aún, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ también es tangente a N, entonces el corchete $[X, Y]$ es tangente a P y $[X, Y]|N = [X|N, Y|N]$.*

Hata ahora hemos trabajado con variedades diferenciables; ahora vamos a introducir la noción de variedad riemanniana, que es una variedad con un producto interno en cada espacio tangente, de manera que este producto varíe de manera diferenciable punto a punto. A esta familia de productos internos le llamaremos el tensor métrico. La existencia de este tensor permite definir otras nociones geométricas.

Definición 1.1.5. *Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable M equipada con un tensor métrico g.*

Usaremos de manera indistinta la notación $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ para el tensor métrico.

Supongamos que N es una subvariedad de una variedad riemanniana M. Como cada espacio tangente T_pN de N se puede ver como un subespacio de T_pM, si aplicamos el tensor métrico g de M a cada par de vectores de N, obtenemos un tensor métrico g_N en N, esto es, g_N es el pullback $\iota^*(g)$, donde $\iota : N \to M$ es la inclusión. Podemos de esta forma definir una subvariedad riemanniana:

Definición 1.1.6. *Una subvariedad N de una variedad riemanniana M es una subvariedad riemanniana si el pullback $\iota^*(g)$ es una métrica en N.*

Ahora vamos a ver cuándo dos variedades riemannianas M y M' pueden ser isomorfas. Esto va a a pasar si dada una función $f : M \to M'$, esa función preserva la métrica.

Definición 1.1.7. *Sean M y M' variedades riemannianas con métricas g_M y $g_{M'}$ respectivamente. Una isometría de M a M' es un difeomorfismo $\phi : M \to M'$ que preserva la métrica, es decir, tal que $\phi^*(g_{M'}) = g_M$.*

Algunas de las propiedades que cumplen las isometrías son:

1. La identidad de una variedad riemanniana es una isometría.

2. La composición de isometrías es una isometría.

3. La inversa de una isometría es una isometría.

La conexión de una variedad nos va a permitir ver cuál es la relación de la geometría local en torno a un punto con la misma en torno a otro punto. La conexión es fundamental para definir el transporte paralelo y la curvatura. En el capítulo 3 desarrollaremos más la teoría de conexiones y paralelismo pues con estos conceptos podremos definir holonomía. Sin embargo en este capítulo se da la definición para poder entender qué es la conexión de una subvariedad riemanniana.

Definición 1.1.8. *Una conexión ∇ en una variedad diferenciable M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, y denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ tal que:*

a) $\nabla_X Y$ *es $\mathcal{F}(M)$-lineal en X,*

b) $\nabla_X Y$ *es $\mathbb{R}$-lineal en Y,*

c) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ *para $f \in \mathcal{F}(M)$.*

Teorema 1.1.9. *En una variedad riemanniana M hay una única conexión ∇ tal que*

a) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

b) $Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$,

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ es llamada la ***conexión de Levi-Civita*** *de M y cumple la fórmula de Koszul:*

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &- \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle.\end{aligned}$$

Proposición 1.1.10. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \to M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de α, llamado derivada covariante de V a lo largo de α, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DW}{dt}$, *donde W es un campo vectorial a lo largo de α y f es una función diferenciable en I.*

c) *Si V es inducido por un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$, es decir, $V(t) = Y(\alpha(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$.*

La derivada covariante juega un papel central en la siguiente definición.

Definición 1.1.11. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $\alpha : I \to M$ es* ***paralelo*** *si $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$. Se dice que $V(t)$, $t \in I$, es el* ***transporte paralelo*** *de $V(t_0)$ a lo largo de α, suponiendo que $t_0 \in I$.*

Se puede mostrar que dado un vector $V(t_0)$ tangente a M en el punto $\alpha(t_0)$, su transporte paralelo es único. Además,

Proposición 1.1.12. *El transporte paralelo es una isometría lineal.*

De entre todas las curvas que podemos definir en una variedad, destacamos a las geodésicas, que podemos caracterizar en términos del transporte paralelo.

Definición 1.1.13. *Una geodésica en una variedad riemanniana M es una curva $\gamma : I \to M$ cuyo campo vectorial tangente γ' es paralelo.*

Las geodésicas cumplen varias propiedades importantes; por ejemplo, si tomamos un vector $v \in T_pM$, existe un intervalo I que contiene al 0 y una única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma'(0) = v$, γ es entonces una geodésica con punto inicial p y velocidad v. Además, si tomamos dos geodésicas γ_1 y γ_2 tales que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ y $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0)$ para algún $t_0 \in I$, las geodésicas serán iguales en la intersección de sus dominios.

Vamos a introducir ahora el concepto de función exponencial. Tomamos $p \in M$, entonces existe una vecindad V de p en M, un número $\varepsilon > 0$ y una función C^∞ $\gamma : (-a, a) \times \mathcal{U} \to M$, con $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM | \, q \in V, w \in T_qM, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ es la única geodésica en M que en el punto $t = 0$ pasa por q con velocidad w, para cada $q \in V$ y $w \in T_qM$, con $|w| < \varepsilon$. La función exp: $\mathcal{U} \to M$ dada por

$$\exp(q, w) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}) \quad \text{con } (q, v) \in \mathcal{U}$$

es llamada la **función exponencial** en $\mathcal{U}$.

Para fines prácticos, definimos $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ como

$$\exp_q(v) = \exp(q, v).$$

La función $\exp_q$ es diferenciable y además posee la propiedad de que $\exp_q(0) = q$. Por otra parte, $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ es un difeomorfismo de la bola $B_\varepsilon(0)$ a un subconjunto abierto de M para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Para verificar esto, se calcula $d(\exp_q)_0(v)$, que resulta ser igual a v, es decir, la identidad en T_qM, y por el teorema de la función inversa se sigue que $\exp_q$ es un difeomorfismo local en una vecindad de 0.

Sin embargo, fuera de dicha vecindad, la función exponencial puede dejar de ser inyectiva o de ser un difeomorfismo local. Definimos el **radio de inyectividad** en un punto p de una variedad riemanniana M como el radio de la bola más grande con centro en p para el cual la función exponencial en p es un difeomorfismo. El radio de inyectividad de una variedad riemanniana M es el ínfimo de los radios de inyectividad en todos los puntos de M.

Definiremos ahora el tensor de curvatura de una variedad riemanniana.

Definición 1.1.14. *La curvatura R de una variedad riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ una función $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

donde ∇ es la conexión riemanniana de M.

Enunciaremos algunas propiedades del tensor de curvatura R.

Proposición 1.1.15. *Para todo X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y, Z, W, $T \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$,*

i) $R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$,
$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$.

ii) $R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$,
$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$.

iii) *Identidad de Bianchi:* $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.

iv) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$.

v) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$.

vi) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$.

vii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Nótese que la propiedad iv es simplemente una reformulación de la identidad de Bianchi.

Si tomamos un plano Π (es decir, un subespacio de dimensión 2) de T_pM y una base X, Y de dicho plano, se demuestra que el número

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$$

es independiente de la elección de la base X, Y de Π, y se llama la **curvatura seccional** $K(\Pi)$ de Π.

Veamos ahora quién sería la conexión de Levi-Civita de una subvariedad.

Sea M una subvariedad riemanniana de $\overline{M}$. La métrica en $\overline{M}$ induce a lo largo de M una descomposición ortogonal de $T\overline{M}$ como

$$T\overline{M}|M = TM \oplus \nu M.$$

Llamamos a νM el haz normal de M. En un punto $p \in M$, el espacio normal en p es $\nu_p M$, y entonces para cada $p \in M$, podemos descomponer $T_p\overline{M} = T_pM \oplus \nu_p M$. Denotamos respectivamente por tan y nor las proyecciones en cada uno de estos sumandos.

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, para cada $p \in M$ tomamos una extensión local $\overline{X}$ de X sobre una vecindad $\mathcal{U}$ de p en $\overline{M}$. Definimos entonces $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$ en $\mathcal{U} \cap M$ como la restricción de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ a $\mathcal{U} \cap M$. $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$ está bien definida y es un campo vectorial suave en M.

En particular, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos realizar un procedimiento análogo, extendiendo Y a un campo $\overline{Y}$, al menos localmente. Entonces se sabe que la conexión riemanniana en M está dada por $\nabla_X Y = \tan\overline{\nabla}_X Y$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de M. Por otro lado, si $\mathfrak{X}(M)^\perp$ denota el conjunto de campos normales a M, la función

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$$

tal que

$$\alpha(X,Y) = \mathrm{nor}\overline{\nabla}_X Y$$

es $\mathcal{F}(M)-$bilineal y simétrica. La transformación α es llamada la **segunda forma fundamental** de $M \subset \overline{M}$. Tenemos entonces la ecuación

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

conocida como la fórmula de Gauss. Sea ξ un campo vectorial normal de M. También podemos descomponer $\overline{\nabla}_X\xi$ es su parte normal y su parte tangente:

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi,$$

lo que se conoce como la fórmula de Weingarten. El operador A_ξ es llamado el **operador de forma** de M en la dirección ξ y se relaciona con la segunda forma fundamental con la siguiente ecuación:

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

Por otro lado, la parte normal induce una conexión $\nabla^\perp$ en νM, llamada **conexión normal** en M.

La fórmula de Gauss nos da una forma natural de descomponer campos vectoriales en una curva como sigue: Si Y es un campo vectorial tangente a M en una curva γ en M, entonces $\dot{Y} = Y' + \alpha(\gamma', Y)$, donde $\dot{Y} = \frac{\overline{\nabla}Y}{ds}$ y $Y' = \frac{\nabla Y}{ds}$.

Definición 1.1.16. *Una subvariedad riemanniana M de una variedad riemanniana $\overline{M}$ es totalmente geodésica si su segunda forma fundamental se anula idénticamente.*

La siguiente proposición nos da una idea más tangible de cómo se comportan las subvariedades totalmente geodésicas.

Proposición 1.1.17. *Para $M \subset \overline{M}$, son equivalentes:*

i) *M es totalmente geodésica en $\overline{M}$.*

ii) *Cada geodésica de M también es una geodésica de $\overline{M}$.*

iii) *Si $v \in T_p\overline{M}$ es tangente a M, entonces la geodésica γ_v de $\overline{M}$ permanece inicialmente en M.*

iv) *Si α es una curva en M y $v \in T_{\alpha(0)}M$, el transporte paralelo de v a lo largo de α es el mismo para M y para $\overline{M}$.*

El siguiente teorema es muy importante pues nos da condiciones necesarias y suficientes para saber cuándo existe una subvariedad totalmente geodésica de una variedad dada.

Teorema 1.1.18 (Cartan)**.** *Sea $\overline{M}$ una variedad riemanniana, $p \in \overline{M}$ y V un subespacio lineal de $T_p\overline{M}$. Existe una subvariedad totalmente geodésica M de $\overline{M}$ con $p \in M$ y $T_pM = V$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada geodésica γ en $\overline{M}$ con $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) \in V \cap U_\varepsilon(0)$, el tensor de curvatura de $\overline{M}$ en $\gamma(1)$ preserva el transporte paralelo de V a lo largo de γ de p a $\gamma(1)$.*

La demostración de este teorema se puede revisar en [6].

Ahora introducimos los campos de Jacobi, que nos dan una relación entre la curvatura y las geodésicas.

Definición 1.1.19. *Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una geodésica en M. Un campo vectorial J a lo largo de γ es un campo de Jacobi si satisface la siguiente ecuación para todo $t \in [0, a]$*

$$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0,$$

donde R es el tensor de curvatura. A esta ecuación se le conoce como ecuación de Jacobi.

Sea $\gamma : I \to \overline{M}$ una geodésica en $\overline{M}$ parametrizada por longitud de arco, con $p = \gamma(0) \in M$ y $\dot{\gamma}(0) \in \nu_pM$. Supongamos que $V(s,t) = \gamma_s(t)$ es una variación diferenciable por geodésicas de $\gamma = \gamma_0$ con $c(s) = \gamma_s(0) \in M$ y $\xi(s) = \dot{\gamma}_s(0) \in \nu_{c(s)}M$ para todo s. El campo de Jacobi J a lo largo de γ inducido por esta variación de geodésicas está determinado por sus condiciones iniciales:

$$J(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}V(s,0) = \gamma_s(0) = c(s) = \dot{c}(0) \in T_pM$$

Y usando la fórmula de Weingarten, se tiene que

$$\begin{aligned} J'(0) &= \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}V(s,t) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0}\dot{\gamma}_s(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\xi(s) \\ &= \overline{\nabla}_{J(0)}\xi = -A_{\xi(0)}J(0) + \nabla^{\perp}_{J(0)}\xi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definición 1.1.20. *Un* ***campo de Killing*** *en una variedad riemanniana es un campo vectorial X para el cual la derivada de Lie del tensor métrico se anula, es decir, $L_Xg = 0$.*

Las siguientes condiciones en un campo vectorial X son equivalentes:

1. X es de Killing.
2. $X\langle V, W\rangle = \langle [X, V], W\rangle + \langle V, [X, W]\rangle$ para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.
3. $\langle \nabla_V X, W\rangle + \langle \nabla_W X, V\rangle = 0$ para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.1.21. *Sean X un campo de Killing en M y γ una geodésica en M. Entonces la restricción de X a γ, denotada X_γ, es un campo de Jacobi y $\langle \gamma', X\rangle$ es constante a lo largo de γ.*

Daremos a continuación la definición de variedad riemanniana localmente simétrica, antes necesitaremos el siguiente concepto,

Definición 1.1.22. *Sea M una variedad riemanniana y sea $p \in M$. La simetría geodésica s_p en p es el difeomorfismo local definido en vecindades normales suficientemente pequeñas de p dado por $s_p = \exp_p \circ(-Id_{T_pM}) \circ \exp_p^{-1}$.*

Definición 1.1.23. *Una variedad riemanniana M es localmente simétrica si y sólo si para cada $p \in M$, la simetría geodésica en p es una isometría.*

La siguiente proposición es muy importante en este trabajo pues utilizaremos la equivalencia b)⇔a) para demostrar que cierta variedad que surge en el teorema de holonomía de Berger es localmente simétrica.

Proposición 1.1.24. *Las siguientes condiciones en una variedad riemanniana M son equivalentes:*

a) *M es localmente simétrica.*

b) *Si $L : T_pM \to T_qM$ es una isometría local que preserva la curvatura, entonces hay una isometría ϕ de vecindades normales de p y q tal que $d\phi_p = L$*

c) *En cada punto $p \in M$, la simetría geodésica local s_p es una isometría.*

1.2. Acciones de grupo

En esta sección vamos a ver qué es que un grupo G actúe sobre un espacio X, y además definiremos varios subespacios de X y subgrupos de G que serán muy útiles cuando pasemos al capítulo de teoría de órbitas. Tambien introduciremos los conceptos de grupo de Lie y álgebra de Lie, y veremos cuál es la relación entre éstos.

Recordemos que un grupo es un conjunto G con una operación binaria $G \times G \to G$, $(a,b) \to ab$ que cumple:

1. es asociativa: $(ab)c = a(bc)$
2. la existencia de un elemento neutro $e \in G$, tal que para cada $a \in G$, $ea = a = ae$
3. la existencia de un inverso $a^{-1} \in G$ para cada $a \in G$, tal que $aa^{-1} = e = a^{-1}a$

Si G y G' son dos grupos, un homomorfismo de G en G' es una función $\psi : G \to G'$, que verifica: $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$. Ahora vamos a ver qué es una acción de grupo.

Definición 1.2.1. *Una acción (por la izquierda) de un grupo G en un conjunto X es una función $\Psi : G \times X \to X$, tal que*

a $\Psi(e,x) = x$, *para todo $x \in X$; con e el elemento idéntico en G.*

b $\Psi(a, \Psi(b,x)) = \Psi(ab,x)$, *con $a, b \in G$ y $x \in X$.*

En adelante, y por comodidad, denotaremos a $\Psi(a,x) = ax$. Para cada $a \in G$, definimos la función $\Psi_a : X \to X$ como $\Psi_a(x) = \Psi(a,x)$.

El siguiente tipo de funciones serán relevantes.

Definición 1.2.2. **a)** *Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es G-invariante si $f(ax) = f(x)$ para cualquier $a \in G$*

b) *Sea Ψ una acción de G en M y Φ una acción de G en N, entonces una función $f : M \to N$ tal que $f(\Psi(a,x)) = \Phi(a, f(x))$ es G-equivariante.*

c) *Las dos acciones de grupo del inciso anterior son G-equivalentes si existe un difeomorfismo $f : M \to N$ G-equivariante.*

Si $\Psi : G \times X \to G$ es una acción de G en un conjunto X, la **órbita** del elemento $x \in X$ bajo la acción Ψ, es el subconjunto

$$G.x = \{ax \in X | a \in G\}.$$

Dada una acción de G en X, decimos que dos puntos *son equivalentes* si están en la misma órbita. Esto en efecto define una relación de equivalencia: primero observemos que dos puntos x y y están en la misma órbita (y lo denotamos $x \sim y$) si y sólo si $\exists a \in G$, tal que $y = ax$. Claramente $x \sim x$

pues $x = ex$. Si $x \sim y$ entonces existe $a \in G$ tal que $y = ax, \Rightarrow x = a^{-1}y$, y si $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $y = ax$ y $z = a'y$, por lo que $z = a'ax$ y de esa forma concluimos que $z \sim x$.

Esta relación de equivalencia descompone a X en la unión ajena de sus órbitas. El conjunto de todas las órbitas de la acción se denota por X/G.

Podemos definir una proyección natural $\pi : X \to X/G$. Una **sección** de esta proyección es una función $\sigma : X/G \to X$ que asocia a cada órbita, un representante o forma canónica.

Ahora tomemos $x_0 \in X$ un punto fijo. El **grupo de isotropía (o estabilizador) de** x_0 de la acción Ψ es el subgrupo de G definido por

$$G_{x_0} = \{a \in G | gx_0 = x_0\}.$$

Para cada punto $x_0 \in X$, la acción Ψ define una función suprayectiva

$$\phi : G \to G.x_0, \text{ tal que } a \mapsto ax_0.$$

Esto a su vez define una relación de equivalencia en G dada por: $a \sim a'$ si y sólo si $a^{-1}a' \in G_{x_0}$. El conjunto de clases de equivalencia en G definidas por esta relación se denota por G/G_{x_0}, y sus elementos son llamados clases laterales. Además, existe una función bien definida $\mu : G/G_{X_0} \to G.x_0$ biyectiva dada por $aG_{x_0} \mapsto ax_0$.

Los siguientes conceptos y notaciones son importantes.

Definición 1.2.3.

Si H es un subgrupo de G, $X^H = \{x \in X | ax = x, \forall a \in H\}$ es el conjunto de puntos fijos de H en X.

Si $A \subset X$, definimos $G(A) = \{ax \in X | a \in G, x \in A\}$ es la ***saturación*** *de A. Un subconjunto A es G-**invariante** si $G(A) = A$.*

La acción en X es ***libre*** *si $G_x = \{e \in G\}$, para cada $x \in X$.*

La acción es ***efectiva*** *si el conjunto $\{a \in G | ax = x, \forall x \in X\}$ tiene como único elemento a la identidad.*

La acción es ***transitiva*** *si $G.x = X$ para algún $x \in X$. Esto es equivalente a decir que para cualesquiera $x, y \in X$ existe $a \in G$ con $y = ax$. En este caso también se dice que X es G-homogéneo.*

De entre los grupos, los que nos interesan son los grupos de Lie, que son grupos que además tienen estructura de variedad diferenciable. La definición formal es la siguiente:

Definición 1.2.4. *Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable G que es también un grupo, tal que la multiplicación de grupo*

$$\mu : G \times G \to G$$

y la función que manda g en g^{-1} son funciones diferenciables. Un homomorfismo de grupos de Lie es un homomorfismo de grupos diferenciable entre grupos de Lie.

Observación 1.2.5. *Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G, entonces H es un grupo de Lie encajado con la topología relativa.*

Observación 1.2.6. *Sea V un espacio vectorial y $Gl(V) \subset End(V)$ el subconjunto de transformaciones lineales invertibles. $Gl(V)$es un grupo de Lie bajo composición de funciones y e $=Id$ es su neutro.*

Las siguientes propiedades serán continuamente utilizadas, sobre todo en el capítulo 2.

Proposición 1.2.7.

1. *G_x es un subgrupo cerrado de G, y por lo tanto un grupo de Lie.*
2. *Si $y \in G.x$, entonces $G_y = aG_xa^{-1}$, donde $a \in G$ está dado por $y = ax$. En otras palabras, todos los subgrupos de isotropía de puntos en una misma órbita son isomorfos salvo conjugaciones.*
3. *Si la acción de G en M es transitiva, entonces M es difeomorfa a G/G_x, para cualquier $x \in M$, definido como $aG_x \mapsto ax$.*
4. *$G.x$ es G-invariante, y la función $\Psi_x : G/G_x \to M$ definida como en el punto anterior, define una inmersión inyectiva en $G.x$, que es G-equivariante.*
5. *Si G es compacto, entonces $G.x$ es cerrada en M y la función Ψ_x definida anteriormente es un encaje.*

Sea G un grupo de Lie y tomamos la acción ψ de $G \times G$ en G dada por $\psi((a,b),x) = acb^{-1}$. Esta acción es transitiva pues si $x, y \in G$, $\psi((y,x),x) = yxx^{-1} = y$. Además el subgrupo de isotropía de $e \in G$ es $(G \times G)_e = \{(a,b) \in G \times G | (a,b)e = e\}$, pero $(a,b)e = aeb^{-1} = ab^{-1} = e \Leftrightarrow b = a$, por lo tanto, el subgrupo de isotropía de e es $(G \times G)_e = \Delta = \{(a,a) \in G \times G | a \in G\}$. Restringiendo esta acción a la diagonal, tenemos la acción $\psi(a,x) = axa^{-1}$, a esta acción la llamamos **acción adjunta** de G en sí mismo, y la denotamos $Ad_a(x)$.

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en [11], página 74, lema 6.12.

Proposición 1.2.8. *Sea G un grupo de Lie compacto y H un subrupo cerrado de G, si $aHa^{-1} \subseteq H$ para alguna $a \in G$, se tiene que $aHa^{-1} = H$.*

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y tomamos el grupo $Gl(V)$ de V. Una **representación** de G grupo de Lie en X es una función suave $\rho : G \to Gl(V)$, que a cada $a \in G$ se le asocia Ψ_a.

Sea G un grupo actuando sobre una variedad diferenciable M. Entonces G_x actúa linealmente en T_xM, considerando las diferenciales $d\Psi_a|_x : T_xM \to T_xM$. Esta es llamada la **representación de isotropía** en x dada por el homomorfismo de grupos de Lie $\rho_x : G_x \to Gl(T_xM), \rho_x(a) = d\Psi_a|_x$.

En $Gl(V)$, la multiplicación $Gl(V) \times Gl(V) \to Gl(V)$ tal que $(c,b) \mapsto cb$ induce, al dejar fijo un elemento $a \in G$, dos difeomorfismos:

$$L_a : Gl(V) \to Gl(V), \quad x \mapsto ax,$$

y

$$R_a : Gl(V) \to Gl(V), \quad x \mapsto xa.$$

Llamamos a estos difeomorfismos traslación izquierda por a y traslación derecha por a respectivamente. Además, se tiene que

$$L : Gl(V) \times Gl(V) \to Gl(V), \quad (a,x) \mapsto ax$$

define una acción diferenciable de $Gl(V)$ en sí mismo por la izquierda (respectivamente $R : (x,a) \mapsto xa$ define una acción por la derecha). Esta acción define a su vez una acción de $Gl(V)$ en $C^\infty(Gl(V))$ por la derecha dada por

$$L_a^* : C^\infty(Gl(V)) \to C^\infty(Gl(V)), \quad f \mapsto L_a^* f = f \circ L_a$$

.

Vamos a escribir la definición de álgebra de Lie, y después veremos cómo, dado un grupo, podemos asociarle un álgebra de Lie.

Definición 1.2.9. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *y una aplicación bilineal* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, *llamada corchete de Lie, que satisface las siguientes propiedades:*

1. *antisimetría:* $[X, Y] = -[Y, X]$.
2. *la identidad de Jacobi:* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Un morfismo entre dos álgebras de Lie, $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}'$, *es una transformación lineal* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *que además satisface que* $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

Ahora vamos a empezar a construir el álgebra de Lie de un grupo de Lie dado. Veamos primero la siguiente proposición.

Proposición 1.2.10. *La diferencial de la función* $\mu : G \times G \to G$ *está dada por:*

$$d\mu_{a,b}(X_a, X_b) = (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b)$$

Para cualesquiera $(X_a, Y_b) \in T_aG \times T_bG$.

Demostración. Como función de a, $\mu(a, b) = R_b(a)$ y como función de b, $\mu(a, b) = L_a(b)$, por lo que que cualquier $f \in C^\infty(G)$, se tiene que

$$\begin{aligned}(d\mu_{a,b}(X_a, Y_b))(f) &= (X_a, Y_b)(f \circ \mu(a, b)) \\ &= X_a(f \circ R_b(a)) + Y_b(f \circ L_a(b)) \\ &= (dR_b)_a(X_a)(f) + (dL_a)_b(Y_b)(f).\end{aligned}$$

□

Sea G un grupo de Lie. Para cualquier vector $X_e \in T_eG$, definimos un campo vectorial X en G dado por

$$X_a = (dL_a)(X_e).$$

Observemos que $d(L_a)(X_b) = dL_a \circ dL_b(X_e) = dL_{ab}(X_e) = X_{ab}$.

Definición 1.2.11. *Un campo vectorial invariante por la izquierda en un grupo de Lie* G *es un campo vectorial suave* X *en* G *que satisface* $(dL_a)(X_b) = X_{ab}$.

Cualquier vector $X_e \in T_eG$ determina, como vimos, un campo vectorial invariante por la izquierda en G. Por otro lado, cualquier campo vectorial invariante por la izquierda X, está determinado por su valor X_e en $e \in G$, ya que para $a \in G$, $X(a) = (dL_a)X_e$. Denotamos por $\mathfrak{g}$ al conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda en un grupo de Lie G, es decir,

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) | X \text{ es invariante por la izquierda}\}.$$

Tenemos entonces que $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(TG)$.

Proposición 1.2.12. *La función $\mathfrak{g} \mapsto T_eG$ que manda cada $X \in \mathfrak{g}$ a su valor $X_e \in T_eG$ es un isomorfismo lineal.*

Demostración. Es claro que la función es lineal. Es inyectiva pues si $X_e = 0$, entonces $X_a = dL_a(X_e) = 0$ para todo a. Es suprayectiva pues si $X' \in T_eG$, tomamos $X_a = dL_a(X_e)$ por lo que X es invariante por la izquierda y $X_e = X'$. En particular, tenemos que $\dim G$=$\dim \mathfrak{g}$. □

Proposición 1.2.13. *Si X y $Y \in \mathfrak{g}$, entonces $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Hay que ver que $[X, Y]$ es invariante por la izquierda si X y Y lo son. Observemos que

$$Y(f \circ L_a)(b) = Y_b(f \circ L_a) = (dL_a)_b(Y_b)f = Y_{ab}f = (Yf)(L_ab) = (Yf) \circ L_a(b)$$

para cualquier función diferenciable $f : G \to \mathbb{R}$. Entonces se tiene que

$$X_{ab}(Yf) = (dL_a)_b(X_b)(Yf) = X_b((Yf) \circ L_a) = X_bY(f \circ L_a).$$

De manera análoga, $Y_{ab}Xf = Y_bX(f \circ L_a)$. Entonces

$$\begin{aligned} dL_a([X, Y]_b)f &= X_bY(f \circ L_a) - Y_bX(f \circ L_a) \\ &= X_{ab}(Yf) - Y_{ab}(Xf) = [X, Y]_{ab}(f). \end{aligned}$$

□

Definición 1.2.14. *$\mathfrak{g}$ es el **álgebra de Lie** de G.*

Ahora, como sabemos que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial y G una variedad diferenciable, vamos a dar una función análoga a la función exponencial que dimos en la sección anterior. Antes necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.2.15. *Un subgrupo uniparamétrico en un grupo de Lie G es un homomorfismo suave α de $\mathbb{R}$ a G.*

La definición anterior quiere decir que $\alpha : \mathbb{R} \to G$ es una curva tal que $\alpha(s + t) = \alpha(s)\alpha(t)$ para toda $s, t \in \mathbb{R}$. Se tiene por lo tanto que $\alpha(0) = e$, $\alpha(-t) = \alpha(t)^{-1}$ y que $\alpha(s)\alpha(t) = \alpha(t)\alpha(s)$.

Definición 1.2.16. *Sea* $\mathfrak{g}$ *el álgebra de Lie de* G*. La función exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *manda* X *a* $\alpha_X(1)$*, donde* α_X *es el subgrupo uniparamétrico de* $X \in \mathfrak{g}$ *tal que* $\alpha'(0) = X$*.*

Esta función exponencial manda, como la análoga definida antes, el origen de $\mathfrak{g}$ en p, a las rectas en subgrupos uniparamétricos (geodésicas), y su función diferencial en 0 es el isomorfismo canónico $T_0\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g} \approx T_eG$. Por el teorema de la función inversa se tiene que una vecindad de $0 \in \mathfrak{g}$ es mandada de manera difeomorfa por exp en una vecindad de $e \in G$. Definimos la representación adjunta de G como $\mathrm{Ad} : G \to Gl(\mathfrak{g})$, $g \mapsto I_{g*e}$ donde I_{g*e} es la diferencial de I_g en e.

La representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es el homomorfismo $\mathrm{ad}{:}\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, donde $X \mapsto (\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, Y \mapsto [X,Y])$. Esta puede ser obtenida de Ad con la siguiente igualdad

$$\mathrm{ad}(X)Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y).$$

Ad y ad están relacionadas de la siguiente manera:

$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}(X)),$$

donde Exp es la función exponencial para endomorfismos del espacio vectorial $\mathfrak{g}$.

La forma simétrica, bilineal B en $\mathfrak{g}$ definida por

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ es llamada la **forma de Cartan-Killing** de $\mathfrak{g}$.

Cada automorfismo η de $\mathfrak{g}$ tiene la siguiente propiedad:

$$B(\eta X, \eta Y) = B(X,Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se sigue de esto que $B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) + B(X, \mathrm{ad}(Z)Y) = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Una involución en $\mathfrak{g}$ es un automorfismo θ de $\mathfrak{g}$ cuyo cuadrado es igual a la identidad. Si G es un grupo de Lie real, simplemente conexo, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y B su forma de Killing, una involución de Cartan en $\mathfrak{g}$ es una involución θ en $\mathfrak{g}$ tal que $B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta Y)$ es una forma bilineal positivo definida en $\mathfrak{g}$. Cada álgebra de Lie real, simplemente conexa tiene una involución de Cartan y cualesquiera dos involuciones de Cartan en $\mathfrak{g}$ son conjugadas vía $\mathrm{Ad}(g)$ para alguna $g \in G$.

Sea θ una involución de Cartan en $\mathfrak{g}$, denotamos por $\mathfrak{l}$ el eigenespacio correspondiente al eigenvalor $+1$ de θ y por $\mathfrak{p}$ el eigenespacio correspondiente al eigenvalor -1 de θ. Tenemos entonces la siguiente descomposición para $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p},$$

llamada descomposición de Cartan. Esta descomposición es ortogonal con respecto a B y a B_θ, B es negativa definida en $\mathfrak{l}$ y positiva definida en $\mathfrak{p}$.

Capítulo 2

Teoría de órbitas

Como lo dice en su artículo, Olmos demuestra el teorema de holonomía de Berger utilizando propiedades de las órbitas de subvariedades bajo la acción de un grupo. Es por eso que en este capítulo desarrollaremos la teoría de órbitas que necesitaremos. En la primera sección definiremos una subfamilia del espacio de todas las órbitas a la que llamaremos el conjunto de órbitas principales. Diremos que un punto en una órbita principal es un vector principal y mostraremos que el conjunto de todos los vectores principales es un subconjunto abierto y denso en nuestro espacio. Este conjunto de vectores resultará ser muy importante en nuestro análisis posterior.

El siguiente paso será ver qué propiedades tienen las órbitas bajo una determinada acción. En particular, nos van a interesar las acciones propias, pues, como demostraron Montgomery y Yang, toda acción propia admite una subvariedad llamada rebanada (*slice*) en cada punto, que es lo que nos permite definir a las órbitas principales por una parte, pero por otro podremos definir dos funciones, llamadas la representación de isotropía y la representación rebanada. Las representaciones de isotropía en espacios simétricos simplemente conexos, llamadas s-representaciones, serán particularmente importantes ya que las órbitas de s-representaciones jugarán un papel similar al que juegan los espacios simétricos en geometría riemanniana, que tienen la propiedad de que el transporte paralelo a lo largo de una curva c, τ_c, empezando en un punto dado p, es tal que $dg|_p = \tau_c$ donde g es una isometría y es única. Una órbita de una s-representación tendrá una característica similar pero con respecto a la conexión normal, pero ahora la isometría no será única en general.

2.1. Acciones propias y tipos de órbitas

Vamos a definir algunos conceptos básicos relacionados a las órbitas.

Definición 2.1.1. a. *Si H es un subgrupo de isotropía de una acción de G sobre M, decimos que la órbita $G.x$ es de tipo (H) si el grupo de isotropía G_x es conjugado a H. Dicho de otro modo, si existe $a \in G$ tal que $aGa^{-1} = H$.*

b. *Si H y K son subgrupos de isotropía de (G, M), decimos que $(H) \preceq (K)$ si K es conjugado a un subgrupo de H, es decir, si existe $a \in G$ tal que $aKa^{-1} = H'$ con $H' \subset H$. Diremos que $(H) = (K)$ si H es conjugado a K.*

c. *$M_{(H)}$ es el conjunto de puntos en M que se encuentran en órbitas tipo (H).*

El conjunto de tipos de órbita $\mathcal{O}(G, M)$ es un conjunto parcialmente ordenado con la relación de la definición anterior. Un teorema importante, el teorema de la órbita principal, nos asegura la existencia de un tipo de órbita maximal (H) y muestra que el conjunto $M_{(H)}$ es denso y abierto en M, sin embargo no es para cualquier tipo de acción de G en M que podemos asegurar esto, necesitamos un tipo de acción especial llamado acción propia.

Definición 2.1.2. *Una acción Ψ de un grupo de Lie G en M es propia si la función $\varphi : G \times M \to M \times M$ dada por $\varphi(a, x) = (ax, x)$ es propia.*[1]

Recordemos que las funciones propias entre espacios localmente compactos y Hausdorff son cerradas. Como las variedades son Hausdorff y localmente compactas, nuestra función φ será siempre cerrada.

Necesitaremos algunos resultados antes de poder demostrar el teorema de la órbita principal. El siguiente lema nos da algunas equivalencias del concepto de acciones propias que son muy útiles.

Lema 2.1.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La acción $\Psi : G \times M \to M$ es propia;*

2. *Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ en G y $\{x_n\}$ en M, la convergencia de $\{a_n x_n\}$ y de $\{x_n\}$ implica que $\{a_n\}$ tiene una subsucesión convergente.*

[1] Recordemos que una función $f : X \to Y$ es propia si la preimagen de cada conjunto compacto de Y es un conjunto compacto en X.

3. *Dados K y L subconjuntos compactos de M, el conjunto $(K, L) = \{a \in G|\, aK \cap L \neq \emptyset\}$ es compacto.*

Demostración. Un teorema conocido de análisis dice que un espacio X es compacto si y sólo si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

$1 \Rightarrow 2$) Supongamos que Ψ es propia, definamos φ como en 2.1.2, y sean $\{x_n\}$ convergente a x y $\{a_n x_n\}$ convergente a y. Tomamos U y V vecindades de x y y respectivamente con cerradura compacta. Entonces existe alguna N_0 tal que para toda $n \geq N_0$, $\varphi(a_n, x_n)$ se queda contenido en $\bar{V} \times \bar{U}$, donde $\bar{V} \times \bar{U}$ es compacto. Se sigue que alguna subsucesión de $\{(a_n, x_n)\}$ converge en $G \times M$ por ser φ propia y por el teorema arriba mencionado. En particular, existe una subsucesión de $\{a_n\}$ que converge en G.

$2 \Rightarrow 3$) Sean K y L subconjuntos compactos de M y sea $\{a_n\}$ cualquier sucesión en (K, L), entonces para cada n, existe $x_n \in a_n K \cap L$, por lo que $x_n \in L$ y $a_n^{-1} x_n \in K$, como $\{x_n\}$ y $\{a_n^{-1} x_n\}$ son sucesiones en L y K respectivamente y K y L son compactos, entonces cada una de estas sucesiones tiene una subsucesión convergente. Para no poner más notación, vamos a suponer que ya son $\{x_n\}$ y $\{a_n^{-1} x_n\}$ esas subsucesiones. Ahora, existe por hipótesis una subsucesión $\{a_{n_i}\}$ subsucesión tal que $\{a_{n_i}^{-1}\}$ converge, entonces $\{a_{n_i}\}$ también converge. Como cada subsucesión de (K, L) converge, por el teorema de análisis (K, L) es compacto.

$3 \Rightarrow 1$) Supongamos ahora que para K y L subconjuntos compactos de M, (K, L) es compacto. En particular, (K, K) es compacto. Sea $N \subseteq M \times M$ compacto, y sean $\pi_1 : M \times M \to M$ tal que $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2 : M \times M \to M$ tal que $\pi_2(x, y) = y$. Definimos $K = \pi_1(N) \cup \pi_2(N) \subseteq M$. Entonces $\varphi^{-1}(N) \subseteq \varphi^{-1}(K \times K) = \{(a, x)| ax \in K, x \in K\} \subseteq (K, K) \times K$. Como todo subconjunto compacto en un espacio Hausdorff es cerrado, N es cerrado y por continuidad de φ, $\varphi^{-1}(N)$ es cerrado, y es subconjunto de $(K, K) \times K$ que es compacto (recordemos que producto de compactos es compacto), por lo tanto $\varphi^{-1}(N)$ es compacto. Se sigue que φ es propia. $\square$

Observemos que si G es compacto, entonces cualquier acción de G en M es propia. Las siguientes son algunas consecuencias de tener una acción propia.

Proposición 2.1.4. *Si Ψ es una acción propia, tenemos que:*

i) *G_x es compacto;*

ii) *$G.x$ es cerrado en M, de hecho, la función $\Psi_x : G/G_x \to M$ dada por $\Psi_x(aG_x) = ax$ es cerrada, por lo tanto un encaje en $G.x$;*

iii) *M/G es Hausdorff.*

Demostración. i) $\{x\}$ es compacto, entonces, por el lema 2.1.3

$$(\{x\},\{x\}) = \{a \in G|\, a\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset\} = G_x$$

es compacto.

ii) Por la proposición 1.2.7, sabemos que Ψ_x es una inmersión inyectiva de G/G_x a $G.x$. Vamos a ver que Ψ es cerrada. Recordemos que si $f : X \to Y$ es continua y propia, y si $A \subseteq Y$, entonces $\tilde{f} : f^{-1}(A) \to A$ es propia. Entonces si φ es la función definida en 2.1.2, $\mu : G \to G \times M$ es tal que $\mu(a) = (a, x)$ y $\nu : M \times M \to M$ cumple $\nu(x, ax) = ax$, la transformación $\tilde{\Psi}_x : G \to M$ definida como $\tilde{\Psi}_x = \nu \circ \varphi \circ \mu$ es propia y por lo tanto es cerrada (pues G y M son Hausdorff y localmente compactos). Como $\tilde{\Psi}_x = \Psi_x \circ \pi$ con $\pi : G \to G/G_x$ la función cociente, entonces Ψ_x también es cerrada, entonces es un homeomorfismo y por lo tanto un encaje.

iii) Utilizaremos el siguiente resultado de topología: Sea X un espacio Hausdorff, $\pi : X \to Y$ continua, suprayectiva y abierta, entonces Y es de Hausdorff si y sólo si $\{(x_1, x_2) \in X \times X|\, \pi(x_1) = \pi(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$. Sabemos que $\pi : M \to M/G$ es suprayectiva, abierta y continua. El conjunto por analizar es justamente $\{(ax, x) \in M \times M \mid a \in G, x \in M\}$, que es la imagen de $\varphi : G \times M \to M \times M$; como φ es propia, este conjunto es cerrado. Por el resultado de topología, se tiene que M/G es Hausdorff. □

Tomemos ahora H un subgrupo compacto de G, entonces G actúa transitivamente en el espacio de clases laterales derechas $G/H = \{Ha|\, a \in G\}$ enviando (b, Ha) a Hab. Como H es compacto, esta acción es propia.

El **normalizador** de H en G, denotado por $N_G(H)$ es el subgrupo de G más grande para el cual H es normal, es decir,

$$N_G H = \{a \in G|\, aHa^{-1} = H\}.$$

Si H es cerrado, el normalizador es cerrado en G y por lo tanto un grupo de Lie. $N_G(H)$ actúa por la derecha en G/H como sigue:

$$\Psi(n, Ha) = Hna.$$

La acción puede reescribirse como $\Psi(n, Ha) = nHa$. Veamos que esta acción es propia. Sean K y L subconjuntos compactos de G/H. Un elemento $n \in N_G(H)$ está en (K, L) si y sólo si existen $a, b \in G$, con $Ha \in K$, $Hb \in L$ tales que $Hna = Hb$, lo que ocurre si y sólo si $n = hba^{-1}$ para alguna $h \in H$. Sean $K' = \pi^{-1}(K)$ y $L' = \pi^{-1}(L)$, donde $\pi : G \to G/H$ es la proyección. Como

H es compacto, K' y L' son compactos. Si definimos $\psi : H \times G \times G \to G$ como $\psi(h,a,b) = hba^{-1}$, entonces la imagen S de $H \times K' \times L'$ bajo ψ es compacta en G, y $(K,L) = S \cap N_G(H)$, que es también compacto, pues $N_G(H)$ es cerrado. Por lo tanto la acción es propia. Todos los subgrupos de isotropía son iguales a H.

Ahora vamos a definir las órbitas principales, que como mencionamos al principio del capítulo, jugarán un papel muy importante en nuestro trabajo.

Definición 2.1.5. **(1)** *Una órbita $G.x$ es principal si existe una vecindad abierta $U \subset M$ de x tal que para todo $y \in U$, $(G_y) \preceq (G_x)$. A G_x le llamamos subgrupo de isotropía principal.*

(2) *Diremos que los puntos pertenecientes a alguna órbita principal son regulares y denotaremos por M_r al conjunto de puntos regulares. Definimos $M_s = (M_r)^c$.*

La definición de órbita principal nos dice que una órbita $G.x$ es principal si y sólo si para cada $y \in M$, el grupo de isotropía G_x en x es conjugado en G a algún subgrupo de G_q, lo cual es una propiedad muy fuerte. Como veremos más adelante, la unión de todas las órbitas es un subconjunto abierto y denso en M. Cada órbita principal es una órbita con dimensión máxima. Una órbita no principal de dimensión máxima se conoce como **órbita excepcional**. Una órbita con dimensión menor que la dimensión de la órbita principal es una órbita **singular**.

2.2. Acciones isométricas

El grupo de isometrías $Iso(M)$ de una variedad riemanniana M es un grupo de Lie que actúa sobre M. En esta sección consideraremos a G como un subgrupo cerrado de $Iso(M)$, por lo tanto G será un grupo de Lie, y diremos que G actúa por isometrías.

Estas propiedades son conocidas en geometría riemanniana.

Proposición 2.2.1. *Sea φ una isometría en M, entonces:*

(1) $\varphi \circ \exp_x(tv) = \exp_{\varphi(x)} \circ (td\varphi_x(v))$, *para $t \in \mathbb{R}$;*

(2) *Si ψ es otra isometría de M tal que $\psi(x) = \varphi(x)$ y $d\psi|_x = d\varphi|_x$ para alguna $x \in M$, entonces $\psi = \varphi$;*

(3) *Sea H un subgrupo de M, las componentes conexas del conjunto M^H de φ en M son subvariedades encajadas totalmente geodésicas de M (ver página 12, número 1).*

La siguiente proposición nos da una relación entre que G actúe por isometrías y G actúe propiamente, pero antes necesitaremos el siguiente lema de análisis.

Lema 2.2.2. *Sea X un espacio conexo, métrico y localmente compacto, y sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión de isometrías de X. Si existe un punto $x \in X$ tal que $\varphi_i(x)$ converge, entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{i_k}\}$ que converge a una isometría φ de X.*[2]

Este lema es una consecuencia del teorema de Arzela-Ascoli.

Proposición 2.2.3. *Sea $G \subset Iso(M)$ cerrado. Entonces G actúa propiamente en M, además, la representación de isotropía $\rho : G_x \to Gl(T_xM)$ es un encaje y $\rho(G_x) \subset O(T_xM)$, donde $O(T_xM)$ es el grupo ortogonal de T_xM. Por lo tanto la representación de isotropía es efectiva y ortogonal en T_xM.*

Demostración. Como en el lema 2.1.3, tomamos sucesiones $\{a_n\}$ en G y $\{x_n\}$ en M tales que $\{a_nx_n\}$ converge a y y $\{x_n\}$ converge a x en M.

Se tiene que $d(a_nx, y) \leq d(a_nx, a_nx_n) + d(a_nx_n, y)$. Como a_n es una isometría, $d(a_nx, a_nx_n) = d(x, x_n)$, por lo que tenemos que $d(a_nx, y) \leq d(x, x_n) + d(a_nx_n, y) < \varepsilon$ para toda n suficientemente grande, por lo que que a_nx converge a y. Por el lema 2.2.2, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que converge a una isometría $a \in Iso(M)$. Como G es, por hipótesis, un grupo cerrado, $a \in G$. Por el lema 2.1.3, tenemos que la acción es propia.

Por otro lado, por la proposición 2.1.4, sabemos que G_x es compacto. Tomemos ahora $a, b \in G_x$ (entonces $ax = x = bx$), tales que $\rho_x(a) = \rho_x(b)$. Por la proposición 2.2.1, tenemos que $a = b$, y por lo tanto tenemos que ρ es una inmersión inyectiva con dominio compacto, por lo tanto es un homeomorfismo sobre su imagen, que está contenido en $O(T_pM)$. □

Queremos ver a continuación que dado un grupo G compacto actuando sobre una variedad M, siempre podemos encontrar una métrica en M que sea G-invariante.

Primero, notemos que si G es compacto, entonces (excepto por el signo) existe una forma de volumen invariante por la derecha dg tal que $\int_G dg = 1$. Esto determina una integral normalizada que está bien definida. Más específicamente, tenemos la siguiente definición.

[2] Si f es una isometría en X, entonces definimos la norma $||f|| := \max\{|f(x)| \,|\, x \in X\}$. La convergencia del lema es con respecto a esta norma.

Definición 2.2.4. *Sea G un grupo de Lie y $\int$ una integral en G, $\int$ es invariante por la derecha si para cualquier función integrable f y cualquier $b \in G$, se tiene que*

$$\int_G f \circ L_b \, da = \int_G f da.$$

Si G es compacto, decimos que la integral $\int$ está normalizada si $\int_G da = 1$.

Lema 2.2.5. *Sea G un grupo de Lie compacto actuando en M, $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\int$ una integral invariante por la izquierda y normalizada en G. Entonces $h : M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) = \int_G f(ax) \, da$$

es G-invariante.

Demostración. Se tiene que, para cualquier $c \in G$,

$$\begin{aligned} h(cx) &= \int_G f(cax) \, da = \int_G f(c(ax)) \, da = \int_G f(L_c ax) da \\ &= \int_G f(ax) da = h(x); \end{aligned}$$

en la penúltima igualdad se usó la invarianza de $\int$. □

Si $\rho : G \to Gl(V)$ es una representación de un grupo de Lie compacto G, entonces existe un producto interno $\langle \, , \, \rangle$ en V tal que ρ es ortogonal. Ahora demostraremos que la métrica G-invariante existe.

Proposición 2.2.6. *Sea G un grupo de Lie compacto actuando en M. Entonces existe una métrica riemanniana g en M que es G-invariante.*

Demostración. Sea $\int$ normalizada e invariante por la derecha en G. Sea h una métrica en M, y definimos

$$g_x(X, Y) = \int_G h_{ax}(da_x(X), da_x(Y)) da$$

donde $X, Y \in T_x M$, como $\int$ es invariante por la derecha, se tiene que $g_x(X, Y) = g_{bx}(db_x(X), db_x(Y))$ para cualquier $b \in G$, por lo tanto g es G-invariante. □

2.3. Existencia de rebanadas

En esta sección ya no consideraremos a G como un subgrupo del grupo de isometrías, a menos que se especifique. Una característica de las acciones propias es la existencia de las rebanadas, que son ciertas subvariedades de M asociadas a algún punto $x \in M$. El objetivo principal de esta sección será demostrar el teorema de la rebanada, que asegura que para cada punto $x \in M$, existe una rebanada si la acción de G sobre M es propia. Las rebanadas serán útiles pues éstas nos permitirán reducir el estudio de una acción de G en M a alguna vecindad abierta de x que sea G-invariante bajo la acción de G_x en la rebanada.

Definición 2.3.1. *Sea M una variedad sobre la cual actúa un grupo G. Diremos que una subvariedad encajada S de M es una rebanada en $x \in M$ si existe una vecindad U, G-invariante de $G.x$, y una retracción*[3] *suave G-equivariante $r : U \to G.x$ tal que $S = r^{-1}(x)$. Diremos que la pareja (U, r) es un G-tubo de $G.x$.*

A continuación veremos algunas propiedades de las rebanadas.

Proposición 2.3.2. *Sea G un grupo actuando sobre M. Si S es una rebanada en $x \in M$, entonces*

(a) *$x \in S$ y $G_x(S) = S$, por lo tanto S es una G_x-variedad. Más aún, $aS \cap S \neq \emptyset$ implica que $a \in G_x$, por lo que $(S, S) = G_x$; ver lema 2.1.3.*

(b) *Si $s \in S$, entonces $G_s \subset G_x$ y $G_s = G_{x_s}$. Además, para cualquier $y \in U = G(S)$, $(G_x) \preceq (G_y)$.*

(c) *Si $G.x$ es principal y G_x es compacto, entonces $G_s = G_x$ para $s \in S$.*

(d) *Si $s_1, s_2 \in S$, entonces las órbitas $G_x.s_1$ y $G_x.s_2$ son del mismo tipo si y sólo si las órbitas $G.s_1$ y $G.s_2$ lo son.*

(e) *$S/G_x \cong G(S)/G$, que es una vecindad abierta de $G.x$ en el espacio de órbitas M/G.*

Demostración. **(a)** Como r es una retracción, $r(x) = x$, y como $r^{-1}(x) = S$, se tiene que $x \in S$.

[3] Recordemos que una función continua r de un espacio X a un subespacio A de X es una retracción si y sólo si $r|_A$ es la identidad.

Además, como e, el neutro de G, está en G_x, $S = \{es|s \in S\} \subseteq \{as|a \in G_x, s \in S\} = G_x(S)$; por otro lado, sea $s \in S$ y $a \in G_x$, entonces, como r es G-equivariante, $r(as) = ar(s) = ax = x$, por lo tanto $as \in r^{-1}(x) = S$ y se tiene que $G_x(S) = S$. Esto implica que S es G_x-invariante y por ende una G_x-variedad.

Si $aS \cap S \neq \emptyset$, entonces $as \in S$ para algún $s \in S$, por lo que $x = r(as) = ar(s) = ax$, por lo tanto $a \in G_x$, esto es, $(S, S) \subseteq G_x$, y por el párrafo anterior, $G_x \subseteq (S, S)$, por lo tanto $G_x = (S, S)$.

(b) Primero veamos que $G(S) = U$. Como U es G-invariante y $S \subset U$, entonces $G(S) \subseteq U$. Ahora, sea $y \in U$, entonces $r(y) = ax$ para alguna $a \in G$, entonces $r(a^{-1}y) = a^{-1}r(y) = x$, por lo tanto $a^{-1}y \in S$ y $y \in G(S)$. Se tiene que $U \subseteq G(S)$, es decir, $U = G(S)$.

Ahora, sean $s \in S$ y $a \in G_s$, entonces $x = r(s) = r(as) = ar(s) = ax$, por lo que $a \in G_x$, por lo tanto $G_s \subset G_x$.

Consideremos ahora la acción restringida de G_x en S; tenemos que $(G_x)_s = \{a \in G_x|\, as = s, s \in S\}$, y como ya vimos que $G_s \subset G_x$, entonces $(G_x)_s = G_s \cap G_x = G_s$.

Como cualquier órbita en $G(S) = U$ es de tipo a lo más (G_x), y como $G_s \subset G_x$, entonces G_s es conjugado a algún subgrupo de G_x en particular, por lo tanto $(G_x) \preceq (G_y)$ con $y \in U$.

(c) Ya vimos que $G_s \subset G_x$, por lo que G_s es compacto. Como $G.x$ es principal, para $s \in S$ cercano a x, G_x es conjugado a algún subgrupo de G_s, es decir, $G_s \subset G_x \subset aG_sa^{-1}$. Como G_s es compacto, $G_s = aG_Sa^{-1}$ (ver 1.2.8), por lo tanto $G_s = G_x$ y G_s también es principal. En otras palabras, si $G.x$ es principal, G_x fija a S.

(d) Ya vimos en un inciso anterior que $(G_x)_s = G_s$, por lo que $(G_x)_{s_1}$ y $(G_x)_{s_2}$ son del mismo tipo, si y sólo si existe $a \in G$ tal que $(G_x)_{s_1} = a(G_x)_{s_2}a^{-1}$, si y sólo si $G_{s_1} = aG_{s_2}a^{-1}$ para alguna $a \in G$, si y sólo si G_{s_1} y G_{s_2} son del mismo tipo.

(e) El isomorfismo está dado por $G_x.s \mapsto G.s$. Por el inciso (a), esta función es inyectiva. Como $G(S) = U$ es una vecindad abierta, G-invariante de $G.x$ en M, se tiene que $G(S)/G$ es una vecindad abierta de $G.x$ en M/G. □

Observación 2.3.3. *Recordemos que si G actúa sobre M, entonces G_x actúa linealmente sobre T_xM. Por el inciso (a) de 2.3.2, tenemos que una* *rebanada S en x es G_x-invariante, por lo que G_x también actúa linealmente en T_xS, restringiendo la representación de isotropía a T_xS. A esta restricción se le conoce como* ***representación rebanada*** *en x. Por el inciso (c) de la proposición 2.3.2, como G_x fija a S, entonces la representación rebanada es trivial.*

El siguiente resultado es muy útil.

Proposición 2.3.4. *Sea G actuando en M propiamente y con un solo tipo de órbita, entonces M/G es una variedad diferenciable y $\pi : M \to M/G$ es diferenciable.*

Demostración. Sea S una rebanada en x. Primero observemos que como todas las órbitas son de un solo tipo, entonces todas son principales. Por la observación 2.3.3, la acción de G_x en S es trivial, por el inciso (e) de 2.3.2, se tiene que $S/G_x = S \cong G(S)/G$, pero S ya es una variedad, por lo que damos estructura de variedad diferenciable a M/G usando $G(S)/G$ como los abiertos de nuestro atlas. Además, con esta estructura, π es diferenciable. $\square$

Antes de demostrar el teorema de la rebanada, el cual nos asegura que en cada punto de nuestra variedad podemos encontrar una rebanada si la acción en M es propia, necesitaremos la siguiente definición y algunos resultados.

Definición 2.3.5. *Sea G un grupo que actúa sobre M y $x \in M$. Una subvariedad es una casi-rebanada en $x \in S$ si S es G_x-invariante y existe una sección $\sigma : U \to G$, $U \subset G/G_x$ $G_x \in U$, para $\pi : G \to G/G_x$, tal que la función $\phi : U \times S \to M$, dada por $\phi(u,s) = \sigma(u)s$, es un difeomorfismo de $U \times S$ sobre una vecindad abierta de x en M.*

El siguiente resultado es muy importante ya que nos asegura que podemos encontrar una casi-rebanada en cada $x \in M$. Cabe mencionar que este lema servirá de base para demostrar el teorema de la rebanada.

Lema 2.3.6. *Sea G un grupo actuando en M propiamente, entonces existe una casi-rebanada en todo $x \in M$.*

Demostración. Sea $x \in M$ un punto dado. Consideremos la acción de G_x en M. Por la proposición 2.1.4, G_x es compacto, y por la proposición 2.2.6, podemos encontrar una métrica G_x-invariante, h .

Sea $r > 0$ tal que la bola de radio r alrededor de 0 bajo la exponencial sea un sistema de coordenadas normal en x. Sea $\nu_x(G.x)$ el complemento ortogonal de $T_xG.x$ con respecto a la métrica h. Definimos $S^* =$

$\exp_x(\nu_x(G.x) \cap B_r(0))$, como la métrica es G_x-invariante, S^* es G_x-invariante. Además, S^* es una subvariedad de M, y $x \in S^*$.

Sea $\sigma^* : U^* \to G$ una sección local en G/G_x, con $G_x \in U^*$ tal que $\sigma^*(G_x) = e \in G$, y sea $\phi^* : U^* \times S^* \to M$ un difeomorfismo dado por $(u^*, s^*) = \sigma^*(u^*)s^*$. Como sabemos que $G/G_x \cong G.x$, entonces se tiene que $d\phi^*_{(G_x,x)}(U^* \times x) \cong T_x G.x$.

Además, $\phi^*(G_x, s) = \sigma^*(G_x)s = s$ para toda $s \in S^*$, entonces $d\phi^*$ es un isomorfismo en (G_x, x). Por el teorema de la función inversa existen vecindades U de G_x en U^* y S' de x en S^* tales que la restricción de ϕ^* a $U \times S'$ es un difeomorfismo sobre su imagen.

Usando la métrica G_x-invariante, podemos encontrar un abierto $S \subset S'$, tal que $x \in S$ y S sea G_x-invariante. Definimos $\phi = \phi^*|_{U \times S}$.

Observemos que S y ϕ cumplen con las propiedades necesarias en la definición de casi-rebanada. □

La demostración del siguiente lema se puede encontrar en [4].

Lema 2.3.7. *Sea M una variedad propia sobre la cual actúa un grupo G, $x \in M$ y $U' \subset G/G_x$ una vecindad abierta de G_x. Entonces existe una vecindad abierta V de $x \in M$ tal que $(V, V) \subset U = \pi^{-1}(U')$, donde $\pi : G \to G/G_x$.*

A continuación, demostraremos el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.3.8 (de la rebanada)**.** *Sea G un grupo actuando sobre M propiamente. Entonces existe una rebanada S en todo punto de M.*

Demostración. La demostración consistirá en lo siguiente: Dado $x \in M$, sabemos que podemos encontrar una casi-rebanada en x; construiremos un abierto contenido en esa casi-rebanada que cumpla con las condiciones necesarias para ser una rebanada. Además, con ayuda de la sección asociada a nuestra casi-rebanada, construiremos una retracción que tenga las propiedades necesarias en la definición 2.3.1.

Sea $x \in M$. Por el lema 2.3.6 podemos encontrar una casi-rebanada S^* en x y tenemos una sección $\sigma : U \to G$ asociada a esa casi-rebanada. Podemos suponer que $\sigma(G_x) = e$ como en la demostración del lema 2.3.6.

Como $\pi : G \to G/G_x$, definimos $U' = \pi^{-1}(U) \subset G$. Por el lema 2.3.7, podemos encontrar una vecindad abierta V de x tal que $(V, V) \subset U' \subset G$. Por la proposición 2.1.4, G_x es compacto, y como en la demostración del lema 2.3.6, V es G_x-invariante.

Definimos $S = S^* \cap V$. Como V es G_x-invariante y S^* también, entonces S es G_x-invariante. Sea $U'(S)$ el subconjunto de M definido como $U'(S) =$

$\{\sigma(u)s|\, u \in U, s \in S\}$. Como U' es abierto en G y S es abierto en S^* (pues es la intersección de dos abiertos), se tiene que $U'(S)$ es abierto en M.

Si $as \in G(S)$, entonces $bas = cs$, con $b, c \in G$, y como $cs \in G(S)$, se tiene que $bas \in G(S)$, lo que nos dice que $G(S)$ es G-invariante. Además, $G(S) = G(U'(S))$: Si $a\sigma(u)s \in G(U'(S))$, entonces $a\sigma(u) \in G$, por lo tanto $a\sigma(u)s \in G(S)$. Por otro lado, sea $a \in G$, siempre podemos encontrar $u \in U$ tal que $\sigma(u) = a$, entonces $as = \sigma(u)s = e\sigma(u)s \in G(U'(S))$, por lo tanto $G(S) = G(U'(S))$.

Como $U'(S)$ es abierto en M, $G(S)$ es una vecindad abierta de $G.x$ en M. Definimos $r : G(S) \to G.x$ como $r(as) = ax$. Observemos que $r(s) = r(es) = ex = x$, por lo que $r(as) = ax = ar(s)$, y tenemos entonces que r es G-equivariante.

Además, si $a \in G_x$, como S es G_x-equivariante, entonces $as \in S$, por lo que $a \in (S, S)$, es decir, $G_x \subset (S, S)$. Por otro lado, si $aS \cap S \neq \emptyset$, entonces $a \in U'$ pues como $S \subset V$, entonces $(S, S) \subset (V, V) \subset U'$, y como $\pi^{-1}(U) = U'$, entonces $aG_x \in U$. Sean $s_1, s_2 \in S$ tales que $as_1 = s_2$, y sea $\sigma(aG_x) = ab, b \in G_x$. Podemos tomar entonces $s_1' \in S$ tal que $s_1' = b^{-1}s_1$. Entonces se tiene que $\sigma(aG_x)s_1' = abb^{-1}s_1 = as_1 = s_2 = \sigma(G_x)s_2$. Sea ϕ el difeomorfismo asociado a la casi-rebanada, como $\phi(u, s) = \sigma(u)s$, entonces tenemos que $\phi(aG_x, s_1') = \sigma(aG_x)s_1' = \sigma(G_x)s_2 = \phi(G_x, s_2)$, lo que implica que $aG_x = G_x$ y $s_1' = s_2$, de la primera igualdad se concluye que $a \in G_x$, y por ende $(S, S) \subset G_x$, entonces $(S, S) = G_x$.

Sean $a_1, a_2 \in G$ y $s_1, s_2 \in S$ tales que $a_1s_1 = a_2s_2$, entonces $a_2^{-1}a_1s_1 = s_2$, pero como $(S, S) = G_x$, entonces $a_2^{-1}a_1 \in G_x$, por lo tanto $a_2^{-1}a_1x = x$ es decir $a_1x = a_2x$, concluyendo que si $a_1s_1 = a_2s_2$, $r(a_1s_1) = r(a_2s_2)$, es decir, r está bien definida.

Como ya vimos que $r(s) = x$, entonces $S \subset r^{-1}(x)$. Por otro lado, si $as \in r^{-1}(x)$ entonces $x = r(as) = ax$, por lo que $a \in G_x$, y como S es G_x invariante, entonces $as \in S$, por lo tanto $r^{-1}(x) \subset S$. Se tiene entonces que $r^{-1}(x) = S$.

Observemos que con lo hecho anteriormente, se tiene que $G(S)$, r y S tienen las propiedades requeridas en la definición 2.3.1, por lo que S es una rebanada en x. Como x era arbitrario, entonces se concluye que para cada $x \in M$, podemos encontrar una rebanada S. □

2.4. Acciones riemannianas I

En esta sección estudiaremos las propiedades que tienen las rebanadas cuando el espacio sobre el cual actúa el grupo es una variedad riemanniana.

Se darán las definiciones de representación de isotropía y representación rebanada en el caso riemanniano.

El siguiente teorema es el regreso de la proposición 2.2.3.

Teorema 2.4.1. *Sea G un grupo actuando sobre M efectiva y propiamente. Entonces existe una métrica riemanniana g en M, invariante bajo G, tal que el homomorfismo $\rho : G \to Iso(M)$ dado por $\rho(a) = \Psi_a$ es un encaje. (Ψ es, como siempre, la función de la acción de grupo).*

Demostración. Para cada $x \in M$, denotamos a S_x como la rebanada en x. Sea $\pi : M \in M/G$ la proyección.

M/G es localmente compacto, segundo numerable y Hausdorff por la proposición 2.1.4, inciso iii), por lo tanto M/G es paracompacto (ver [14], es decir, cada cubierta abierta de M/G tiene un refinamiento abierto localmente finito, entonces existe un conjunto numerable $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en M, tal que $\{\pi(S_i)\}$ es una cubierta abierta de M/G, donde $S_i = S_{x_i}$; más aún, $\{G(S_i)\}$ es una cubierta abierta de M, que además es G-invariante claramente. Como M/G es localmente compacto, podemos encontrar vecindades $K_i \subset S_i$ de x_i, tales que $\{\pi(K_i)\}$ siga siendo cubierta abierta de M/G, y $\{G(K_i)\}$ de M, que sea localmente finita.

Definimos las funciones $f_i : S_i \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que sean positivas en K_i, con soporte compacto en S_i. Por la proposición 2.2.6, podemos tomar una función $\tilde{f}_i$ que sea invariante bajo la métrica, que a su vez es G_{x_i} invariante.

Definimos $f_i(as) = \tilde{f}_i(s)$ si $s \in S_i$ y $f_i(x) = 0$ si $x \in M\backslash G(S_i)$. Observemos que $f_i(s) = \tilde{f}_i(s)$, por lo que $f_i(as) = \tilde{f}_i(s) = f_i(s)$, si $s \in S_i$. Además, $f_i(ax) = 0 = f_i(x)$ si $x \in M\backslash G(S_i)$. Por lo tanto f_i es G-invariante.

La función f_i es positiva en K_i, por definición, y como el soporte de f_i es compacto, entonces $\pi(\mathrm{supp} f_i)$ es compacto pues π es continua, y es un subconjunto compacto de M/G.

Sea E_i la restricción de TM a S_i, es decir, $E_i = \{T_sM \,|\, s \in S_i\}$, entonces existe $\tilde{g}_i$ métrica G_{x_i}-invariante en E_i. Sean $X, Y \in T_{as}M$, donde $as \in S_i$, definimos $g_i(X,Y) = \tilde{g}_i((da_s)^{-1}X, (da_s)^{-1}Y)$, que es una métrica G-invariante en $G(S_i)$.

Definimos ahora $g = \sum f_i g_i$. Como f_i es G-invariante y g_i es G-invariante, entonces g es G-invariante. Esta métrica es la que buscábamos. □

La demostración del siguiente resultado está contenida implícitamente en la demostración anterior, haciendo los arreglos correspondientes (para la definición de particiones de la unidad ver [12]).

Teorema 2.4.2. *Sea G un grupo actuando sobre M propia y efectivamente, y sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta localmente finita de M, tal que cada U_α es G-invariante. Entonces existe una partición de la unidad G-invariante $\{f_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$. Si además U_α/G tiene cerradura compacta en M/G, entonces tomamos a f_α tal que su soporte sea un subconjunto compacto en M/G bajo la proyección.*

El siguiente corolario resume las proposiciones 2.4.1 y 2.2.3.

Corolario 2.4.3. *Una acción efectiva de G en M es propia si y sólo si existe una métrica g en M tal que G es isomorfo a un subgrupo cerrado de $Iso(M)$.*

Tenemos también el siguiente corolario.

Corolario 2.4.4. *Si G actúa de manera propia y efectiva sobre M, entonces la representación de isotropía en cada punto $x \in M$ es un encaje de G_x en un subgrupo compacto de $Gl(T_xM)$.*

Demostración. Sea g una métrica G-invariante, la cual podemos obtener por la proposición 2.2.6. Por la proposición 2.2.3, la transformación $a \mapsto da(x)$ es un encaje de grupos de Lie de G_x a $O(T_pM)$, que es un subgrupo compacto de $Gl(T_xM)$. □

Supongamos que G actúa por isometrías en una variedad riemanniana M. Podemos encontrar una rebanada S_x en cada punto de x, lo cual nos da la siguiente descomposición: $T_xM = T_xS_x \oplus T_xG.x$. Así, podemos ver a T_xS_x como el espacio normal $\nu_xG.x$ a la órbita en x.

Además la función $\Psi_a : M \to M$ definida en el capítulo anterior, es una isometría de M. Si $x \in M$ y $a \in G_x$, entonces Ψ_a fija a x, por lo que en cada punto $x \in M$, el grupo de isotropía G_x actúa en T_xM de la siguiente manera:

$$G_x \times T_xM \to T_xM, \text{ tal que } (a, X) \mapsto aX = (\Psi_a)_{*x}X.$$

Como $a \in G_x$ deja invariante a $G.x$, la acción anterior deja invariantes a $T_xG.x$ y a $\nu_xG.x$. Podemos definir entonces dos funciones muy importantes:

$$\rho_x : G_x \times T_xG.x \to T_xG.x, \text{ tal que } (a, X) \mapsto aX.$$

Esta restricción de la acción anterior es llamada la **representación de isotropía** de la acción en x.

$$\sigma_x : G_x \times \nu_xG.x \to \nu_xG.x, \text{ tal que } (a, \xi) \mapsto a\xi.$$

Esta restricción de la acción anterior es llamada la **representación rebanada** de la acción en x. Si $(G_x)_\circ$ es la componente conexa en G_x que contiene a la identidad, a la restricción de la representación rebanada a $(G_p)_\circ$ se le conoce como **representación rebanada conexa**.

La siguiente proposición nos asegura que el regreso de 2.3.2 inciso (c) es válido en el caso riemanniano.

Proposición 2.4.5. *Sea G un grupo actuando sobre una variedad riemanniana M, y sea $x \in M$. Entonces $G.x$ es principal si y sólo si la representación rebanada en x es trivial, es decir, si $a \in G_x$, $da_x(v) = v$ para $v \in T_xS_x$.*

Demostración. Sea $s \in S_x$, entonces $G_s \subset G_x$ por la proposición 2.3.2, entonces $G.x$ es principal si y sólo si $G_x = G_s$, si y sólo si G_x fija a S_x, si y sólo si G_x fija a T_xS_x (usando la proposición 2.2.1). □

2.5. Teorema de la órbita principal

En esta pequeña sección demostraremos el teorema de la órbita principal. Este teorema afirma que el conjunto M_r definido como el subconjunto de M de puntos en alguna órbita principal es abierto y denso en M. Este hecho será importante al demostrar el teorema de holonomía de Berger.

Teorema 2.5.1 (de la órbita principal)**.** *Sea G actuando sobre M propiamente y supongamos que M/G es conexa. Entonces existe una órbita con tipo de órbita maximal (H). Estas órbitas maximales son las órbitas principales. Además, $M_r = M_{(H)}$ es abierto y denso en M y la imagen M_r^* de M_r en $M^* = M/G$ es una variedad diferenciable conexa, donde $\pi : M_r \to M_r^*$ es diferenciable.*

Antes de demostrar el teorema, demostraremos el siguiente lema.

Lema 2.5.2. *Sea K un grupo de Lie compacto actuando ortogonalmente en $\mathbb{R}^n$. Entonces las órbitas no principales no desconectan localmente a $\mathbb{R}^n/K$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la dimensión de $\mathbb{R}^n$.

1. Sea $n = 1$, entonces $K = \{1\}$ o $K = \{\pm 1\}$. Si $K = \{\pm 1\}$, entonces $\mathbb{R}^n/K = [0, \infty)$, además tenemos que $K.x = \{-x, x\}$ si $x \neq 0$ y $K.0 = \{0\}$, por otro lado, $K_x = \{1\}$ si $x \neq 0$ y $K_0 = K = \{\pm 1\}$, por lo tanto la única órbita no principal es $K.0 = \{0\}$ que no desconecta a $[0, \infty)$.

2. Supongamos que para cualquier acción ortogonal de un grupo compacto en $\mathbb{R}^m$, con $m < n$, las órbitas no principales no desconectan localmente a $\mathbb{R}^m/K$. Como K deja a $N = \mathbb{S}^{m-1}$ invariante (pues K actúa ortogonalmente), consideramos la acción restringida de K en $\mathbb{S}^{m-1}$. Sea $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ y S_x una rebanada en x asociada a esta acción restringida. Viendo la representación rebanada de K_x en x, por hipótesis de inducción, las órbitas singulares, no desconectan localmente a T_xS_x/K_x y por lo tanto tampoco deconectan localmente a $\mathbb{S}^{m-1}/K$. Por la linealidad de la acción de K en $\mathbb{R}^n$, las órbitas singulares de $\mathbb{S}^{m-1}$, son exactamente aquellas de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Esto implica que las órbitas singulares de K en $\mathbb{R}^n$ no desconectan a $\mathbb{R}^n/K$. $\square$

Demostración del teorema de la órbita principal. La demostración tendrá varios pasos:

1. Demostrar que existen órbitas principales para la acción de G sobre M.

2. Demostrar que M_r es abierto y denso en M.

3. Demostrar que M_s/G no desconecta localmente a M/G. (Recordemos que $M_s = M_r^c$.)

1. Por la proposición 2.3.2 inciso (c), una órbita principal en un punto x tiene una vecindad donde todas las órbitas en los puntos de la vecindad son del mismo tipo que la órbita principal. Por la proposición 2.1.4, cualquier subgrupo de isotropía es compacto, por lo tanto tiene un número finito de componentes conexas. Consideremos de entre el conjunto de subgrupos de isotropía, aquellos con dimensión mínima, y entre estos, elegimos H con el número de componentes menor. Veamos que (H) es principal: Queremos demostrar que H es conjugado a cualquier otro subgrupo de isotropía. Sea $x \in M$, H su grupo de isotropía, y S_x su rebanada. Sea $G(S_x) = U$, que es abierto. Por la proposición 2.3.2, si $y \in U$, entonces $(H) \preceq (G_y) = (G_s)$, donde $s \in S_x$. Además $G_s \subset H$, pero por la elección de H, debemos tener que $G_s = H$. Esto quiere decir que (H) es principal.

2. Como $G(S_x)$ es abierto, entonces $M_r = \bigcup\limits_{x \in M_r} G(S_x)$ es abierto. Veamos ahora la densidad: Sea $x \in M$ y $U \subset M$ cualquier vecindad abierta de x, y sea S_x una rebanada en x. Elegimos $y \in G(S_x) \cap U$ tal que en esta intersección, G_y tiene dimensión mínima y, entre tales subgrupos, el que tiene número mínimo de componentes. Sea S_y una rebanada

en y y sea $z \in G(S_x) \cap U \cap G(S_y)$ que es una vecindad abierta de y. Entonces existe $a \in G$ tal que $G_z \subset aG_ya^{-1}$. Por cómo elegimos a y, $G_z = aG_ya^{-1}$ y G_y es principal pues es conjugado a cualquier subgrupo de isotropía.

3. Por la proposición 2.2.6, podemos suponer que M tiene una métrica riemanniana G-invariante. Sea $x \in M$ y S_x una rebanada en x. Por la proposición 2.3.2, tenemos que $S_x/G_x \cong G(S_x)/G \subset M/G$ y $(G_s) = (G_x)_s$ para $s \in S_x$. Vamos a probar que las órbitas singulares de la representación rebanada de G_x en T_xS_x no desconectan a T_xS_x/G_x en una vecindad del origen. Como la exponencial es un difeomorfismo G-equivariante, entonces estaremos probando que S_x/G_x no se desconecta por órbitas singulares de G_x en S_x. Como la representación rebanada es ortogonal, usando el lema 2.5.2 concluimos que M_s/G no desconecta localmente a M/G.

   Sólo falta ver que todas las órbitas principales son de un mismo tipo. Dados $x, y \in M_r$, por el inciso 3 podemos encontrar una curva que los conecta γ en M_r/G y cubrir a ésta con abiertos de la forma $G(S_z)/G$, donde $z \in M_r$ y S_z es su rebanada. Entonces el tipo de órbita no puede cambiar a lo largo de γ.

   Por la proposición 2.3.4, se tiene que M_r/G es diferenciable y $\pi|_{M_r}$ es suave. $\square$

2.6. Acciones riemannianas II

En una sección anterior ya estudiamos las propiedades que tienen las rebanadas en una variedad riemanniana, en este caso, estudiaremos propiedades de las acciones actuando sobre variedades riemannianas. También definiremos a las s-representaciones.

Sea G un grupo de Lie actuando sobre M isométricamente, y sea $x \in M$. La órbita $G.x$ es un espacio G-homogéneo bajo la métrica riemanniana inducida. Podemos identificar a G/G_x con $G.x$. Como G_x es compacto por la proposición 2.1.4, el espacio G/G_p es reducible. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{m}$ una descomposición del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Cada $X \in \mathfrak{g}$ determina un campo de Killing X^* en M como

$$X^*_y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(t \mapsto \exp(tX)y)$$

para todo $y \in M$; aquí exp es la exponencial de $\mathfrak{g} \to G$.

Definiremos un tipo especial de acción sobre variedades riemannianas, las acciones polares.

Definición 2.6.1. *Sea M una variedad riemanniana conexa y completa, y sea G un subgrupo cerrado de $Iso(M)$. Una subvariedad encajada, cerrada y completa Σ de M es una sección, si Σ interseca a cada órbita de G y es perpendicular a las órbitas en los puntos de intersección. Si existe una sección en M, diremos que la acción es polar.*

El siguiente resultado nos da una caracterización de las secciones.

Proposición 2.6.2. *Toda sección de una acción polar es totalmente geodésica.*

Demostración. Sea Σ una sección, y sea Σ_r el conjunto de puntos regulares. Sea $x \in \Sigma_r$ y $\xi \in \nu_x\Sigma$, entonces la acción induce un campo de Killing X^* en una vecindad abierta de x, tal que $X_x = \xi$. Como la acción es polar, X^* es perpendicular a Σ. Sea A el operador de forma de Σ. Por la fórmula de Weingarten, se tiene que $\langle A_\xi w, w\rangle = -\langle \nabla_w X^*, w\rangle = 0$ para todo $w \in T_x\Sigma$, pues al ser X^* campo de Killing, ∇X^* es antisimétrica. Por lo tanto, Σ es totalmente geodésica en los puntos Σ_r, pero como Σ_r es denso en Σ por el teorema de la órbita principal, entonces Σ es totalmente geodésica. $\square$

Veamos que la representación rebanada conexa de una acción polar es polar.

Proposición 2.6.3. *La representación rebanada conexa de una acción polar en cualquier punto es polar. Además, si Σ es una sección de la acción polar y $x \in \Sigma$, entonces $T_x\Sigma$ es una sección de la representación rebanada conexa en x.*

Demostración. La codimensión de una órbita principal de la acción de G_x en el espacio normal $\nu_x G.x$ es igual a la dimensión de $T_x\Sigma$. Por un resultado, sabemos que si G es un sugrupo cerrado del grupo de isometrías de una variedad riemanniana M y $p \in M$, entonces $\exp_p(\nu_p(G.p))$ intersecta a cada órbita de la acción de G en M. Vamos a demostrar entonces que $T_x\Sigma$ es perpendicular a las porbitas de G_x.

El álgebra de Lie de G_x se puede ver como el conjunto de todos los endomorfismos antisimétricos de $\nu_x(G.x)$ de la forma $(\nabla X)_x$, donde X es el campo de Killing en M inducido por G_x, pero cada campo de Killing inducido por G es siempre perpendicular a Σ, por lo que para cada $u \in T_x\Sigma$, $\nabla_u X$ es ortogonal a $T_x\Sigma$, ya que Σ es totalmente geodésica. Entonces los campos de Killing inducidos por G_x en $\nu_x G.x$ son perpendiculares a $T_x\Sigma$. $\square$

Definición 2.6.4. *Para cualquier campo de Killing en M inducido por la acción polar de G, denotamos por B_p^X, el endomorfismo antisimétrico en $\nu_p(G.p)$ definido como $\langle B_p^X v, w\rangle = \langle \nabla_v X, w\rangle$, donde $v, w \in \nu_p G.p$ y $p \in M$.*

Sea $\mathfrak{h}^p$ la subálgebra de $\mathfrak{so}(\nu_p G.p)$ generada por todos los endomorfismos B_p^X, denotamos por H^p el subgrupo de Lie conexo de $SO(\nu_p(G.p))$ asociado a $\mathfrak{h}^p$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [6].

Proposición 2.6.5. *El grupo de Lie H^p definido anteriormente, contiene la imagen de $\sigma_p((G_p)_\circ)$ (la representación rebanada conexa en p), además, la acción de H^p en $\nu_p(G.p)$ tiene las mismas órbitas que la representación rebanada conexa en p.*

La siguiente proposición nos da propiedades de las acciones polares. La demostración de las mismas se puede revisar en [6].

Proposición 2.6.6. *Sea G un grupo actuando en una variedad riemanniana M, y $p \in M$, entonces se tiene que:*

i) *Supongamos que la acción es polar y que $\xi \in \nu_p(G.p)$ está fijo bajo la representación rebanada conexa en p. Entonces ξ se extiende localmente a un campo vectorial $\nabla^\perp$-paralelo, G-invariante de $G.p$.*

ii) *Si cada campo vectorial normal equivariante en ua órbita principal es $\nabla^\perp$-paralelo, entonces G actúa de manera polar localmente en M.*

iii) *Supongamos que G actúa polarmente y sea Σ una sección. Si S es una subvariedad conexa totalmente geodésica de M que interseca a todas las órbitas ortogonalmente, entonces existe una isometría $a \in G$ tal que $a(S) \subset \Sigma$.*

iv) *Sea G un subgrupo de Lie conexo de $SO(n)$ que actúa polarmente en $\mathbb{R}^n$. Si S es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ que es localmente G-invariante, entonces G actúa polarmente en S.*

El inciso i) de la proposición anterior implica que si G actúa polarmente en M, entonces cada campo G-equivariante en una órbita principal es $\nabla^\perp$-paralelo ya que la representación rebanada actúa trivialmente en el espacio normal de una órbita principal.

La representación de isotropía de un espacio simétrico simplemente conexo es conocida como una ***s*-representación**. Si el grupo G es conjugado a la imagen de una s-representación, diremos que G actúa como una s-representación.

Dos representaciones $\rho_1 : G_1 \to SO(n)$, $\rho_2 : G_2 \to SO(n)$ serán órbita-equivalentes si existe una isometría $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(G_1.x) = G_2.\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Finalmente, tenemos el siguiente teorema dado por Dadok. Este resultado nos será útil posteriormente.

Teorema 2.6.7. *Cada representación polar en $\mathbb{R}^n$ es órbita-equivalente a una s-representación.*

Capítulo 3

Holonomía

En este capítulo se expondrá la teoría de holonomía necesaria para demostrar el teorema de Berger. Los principales resultados de esta parte de la tesis son el teorema de Ambrose-Singer, el cual nos da una relación entre la curvatura y la holonomía, y el teorema de holonomía normal, que asevera que la representación de holonomía normal de una subvariedad euclidiana coincide con la representación de holonomía de un espacio simétrico.

En primer lugar estudiaremos los haces fibrados, que nos servirán para definir a las conexiones y por lo tanto al transporte paralelo. Este último concepto es crucial para poder definir a los grupos de holonomía. Después enunciaremos el teorema de Ambrose-Singer, y por último nos centraremos en la holonomía normal.

Omitiremos varias demostraciones, tratando de exponer solamente los puntos relevantes para nuestro trabajo. Las demostraciones omitidas aparecen en el texto clásico [7].

3.1. Haces fibrados

Sea G un grupo de Lie y M una variedad, queremos introducir una variedad relacionada con G y M con la propiedad de que localmente se vea como un producto.

Definición 3.1.1. *Un haz fibrado principal (o haz principal) sobre M con grupo G es una variedad P y una acción de G en P que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *G actúa libremente en P por la derecha: $\Psi : P \times G \to P$ tal que $(u, a) \mapsto$*

$ua \in P$. (La definición de actuar libremente se puede encontrar en el capítulo 1.)

(ii) *$M = P/G$ y la proyección $\pi : P \to M$ es diferenciable.*

(iii) *P es localmente trivial en el siguiente sentido: cada punto $x \in M$ tiene una vecindad U tal que existe un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, con $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$ y $\varphi : \pi^{-1}(U) \to G$ está definida como $\varphi(ua) = (\varphi(u))a$ para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ y $a \in G$.*

Denotaremos al haz principal como $P(M, G, \pi)$ o simplemente $P(M, G)$; a P se le conoce como espacio fibrado (o total); diremos que M es el espacio base, G el grupo (o grupo estructural), y finalmente π es la proyección.

Definición 3.1.2. *Para cada punto $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad cerrada de P, llamada la fibra sobre x. Si $u \in \pi^{-1}(x)$, entonces $\pi^{-1}(x)$ es el conjunto de puntos ua, $a \in G$. A este conjunto de puntos se le conoce como la fibra de u.*

Cada fibra $\pi^{-1}(x)$ es difeomorfa a G pues la acción es libre. Se sigue que las órbitas de la acción son precisamente las fibras de cada punto en P y el espacio de órbitas es homeomorfo al espacio $P/G = M$, como se vio en capítulos anteriores.

Definición 3.1.3. *Sea G actuando libremente en $P = M \times G$ como sigue: $\Psi : G \times P \to P$ tal que $(b, x, a) \mapsto (x, ab)$. El haz fibrado (principal) obtenido, $P(M, G)$ se le conoce como haz trivial.*

Proposición 3.1.4 ([7], página 42)**.** *Sea G un grupo de Lie actuando sobre M. La función $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ que $A \mapsto A^*$, donde $\mathfrak{X}(M)$ es el álgebra de Lie de campos vectoriales en M es un homomorfismo de álgebras de Lie. Si G actúa de manera efectiva en M, entonces σ es un isomorfismo. Si σ actúa de manera libre, entonces para cada $A \in \mathfrak{g}$ no nula, $\sigma(A)$ nunca se anula en M.*

Esta proposición nos ayudará a dar la siguiente definición:

Definición 3.1.5. *Dado un haz principal $P(M, G)$, la acción de G en P induce un homomorfismo $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $X^* = \sigma(X)$ es el campo fundamental correspondiente a X.*

Como la acción de G manda cada fibra en sí misma, X_u^* es tangente a la fibra en cada $u \in P$. Por la proposición 3.1.4, como G actúa libremente en

P, X^* nunca se anula en P.

Por el inciso 3 de la definición 3.1.1, podemos elegir una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M donde cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$ tiene asociado un difeomorfismo $g : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ definido como $u \mapsto (\pi(u), \varphi_\alpha(u))$, donde $\varphi_\alpha(ua) = (\varphi_\alpha(u))a$. Si $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, entonces $\varphi_\beta(ua)(\varphi_\alpha(ua))^{-1} = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$. Esto implica que $\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$ depende únicamente de $\pi(u)$.

Definición 3.1.6. *Definimos al conjunto de funciones* $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, *como* $\psi_{\beta_\alpha}(\pi(u)) = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$. *A esta familia de funciones se les conoce como funciones de transición del haz* $P(M, G)$ *correspondiente a la cubierta* $\{U_\alpha\}$ *de* M.

Sea $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ y $u \in P$ tal que $\pi(u) = x$. Entonces

$$\begin{aligned} (1) \qquad \psi_{\gamma\alpha}(x) &= \psi_{\gamma\alpha}(\pi(u)) = \varphi_\gamma(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} \\ &= \varphi_\alpha(u)(\varphi_\beta(u))^{-1}\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} = \psi_{\alpha_\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x) \end{aligned}$$

Proposición 3.1.7. *Sea* M *una variedad,* $\{U_\alpha\}$ *una cubierta abierta de* M *y* G *un grupo de Lie. Dada la familia de funciones* $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, *donde* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *tal que se satisface la ecuación (1), podemos construir un haz principal* $P(M, G)$ *con funciones de transición* $\psi_{\beta\alpha}$.

Demostración. Por la ecuación (1), $\psi_{\alpha\alpha}(x) = e$ con $x \in U_\alpha$, y $\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x) = e$ donde $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Definimos a X_α como $X_\alpha = U_\alpha \times G$ para cada α. Sea $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$. Vamos a denotar a los elementos de X como (α, x, a) donde α es algún índice, $x \in U_\alpha$ y $a \in G$.

Vamos a definir una relación de equivalencia en X: $(\alpha, x, a) \sim (\beta, y, b)$ si y sólo si $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $b = \psi_{\beta\alpha}(x)a$, si y sólo si $x = y$ y $b = a$.

Definimos a P como $X/\sim$. Vamos a ver que G actúa libremente en P y que $P/G = M$.

G actúa sobre P de la siguiente manera: $\Psi : G \times P \to P$ tal que $\Psi(b, (\alpha, x, a)) = (\alpha, x, ab)$, por lo tanto $G_{(\alpha,x,a)} = \{b \in G | (\alpha, x, ab) = (\alpha, x, a)\}$ y $(\alpha, x, ab) = (\alpha, x, a)$ si y sólo si $a = ab$ si y sólo si $b = e$, por lo tanto la acción es libre.

Por otro lado, sean $u, v \in P$, tales que $u = [(\alpha, x, a)]$ y $v = [(\beta, y, b)]$, si $v = uc$, para alguna $c \in G$, entonces $y = x$ y por ende $\pi(v) = \pi(u)$. Por lo contrario, si $\pi(u) = x = y = \pi(v)$, donde $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces $v = uc$ donde $c = a^{-1}(\psi_{\beta\alpha}(x))^{-1}b \in G$.

Con esto demostramos que $P/G = M$.

Le damos a P una estructura diferenciable como sigue: $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es una subvariedad abierta de P, tomamos a $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$. Y además la función $\pi_1 : X \to P$ induce un difeomorfismo de X_α a $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Tenemos entonces que $P(M, G, \pi)$ es un haz principal. Finalmente, las funciones de transición de P correspondientes a la cubierta $\{U_\alpha\}$ son las $\psi_{\beta\alpha}$ dadas anteriormente, si definimos $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ como $\psi_\alpha(u) = (x, a)$, donde $u \in \pi^{-1}(U)$ es la clase de (α, x, a). □

Definición 3.1.8. *Un homomorfismo f de un haz principal $P'(M', G')$ a otro haz $P(M, G)$ es:*

1. *Una función $f' : P' \to P$ y*

2. *Un homomorfismo $f'' : G' \to G$,*

tales que $f'(u'a') = f'(u')f''(a')$ para toda $u' \in P'$, y $a' \in G$.

Cada homomorfismo $f' : P' \to P$ manda cada fibra de P' en una fibra de P y por lo tanto induce una función $f''' : M' \to M$.

Un homomorfismo $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ es una **inyección** si $f' : P' \to P$ es una inmersión y si $f'' : G' \to G$ es un monomorfismo.

Si $f' : P' \to P$ es una inmersión, entonces $f''' : M' \to M$ también es una inmersión. Identificamos a P' con $f'(P')$, G' con $f''(G')$ y M' con $f'''(M')$. Decimos que $P'(M', G')$ es un **subhaz** de $P(M, G)$.

Si además $M = M'$ y f''' es la identidad, $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ es una reducción del grupo G de $P(M, G)$ a G'. Al subhaz $P'(M', G')$ se le conoce como **haz reducido**. Dado $P(M, G)$ y un subgrupo de Lie G' de G, decimos que el grupo G es reducible a G' si existe un haz reducible $P'(M', G')$.

Proposición 3.1.9. *G en $P(M, G)$ es reducible a un subgrupo de Lie G' si y sólo si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M, con un conjunto de funciones de transición $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ que toman valores en G'.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que G es reducible a G' y sea $P'(M, G')$ el haz reducible. Consideremos P' una subvariedad de P. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M y $\pi' : P' \to M$, entonces tenemos un isomorfismo $\phi : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G'$, tal que $u \mapsto (\pi'(u), \varphi'_\alpha)$. Tenemos entonces que las funciones de transición correspondientes toman valores en G'.

Ahora, dada una cubierta $\{U_\alpha\}$ definimos un isomorfismo $\mu : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, extendiendo φ'_α como sigue: Cada $v \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ puede ser representado en la forma $v = ua$ para alguna $a \in G$ y algún $u \in \pi'^{-1}(U_\alpha)$, y definimos $\varphi_\alpha(v) = \varphi'_a(u)a$.

La transformación $\varphi_\alpha(v)$ es independiente de la elección de la representación $v = ua$. Entonces existe un isomorfismo $\mu : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ que $v \mapsto (\pi(v), \varphi_\alpha(v))$. Las correspondientes funciones de transición $\psi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_\beta(v)(\varphi_\alpha(v))^{-1} = \varphi'_\beta(u)(\varphi'_\alpha(u))^{-1}$ toman sus valores en G'.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe una cubierta $\{U_\alpha\}$ de M con un conjunto de funciones de transición $\psi_{\beta\alpha}$ tomado valores en G', donde G' es un subgrupo de G.

Para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\psi_{\alpha\beta}$ es una función diferenciable de $U_\alpha \cap U_\beta$ a un grupo de Lie G, tal que $\psi_{\beta\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset G'$. $\psi_{\beta\alpha}$ es una función diferenciable de $U_\alpha \cap U_\beta$ a G' con respecto a la estructura diferenciable de G' por la proposición 1.3 de [7].

Como un subgrupo de Lie es segundo numerable, por la proposición 3.1.7, podemos construir un haz principal $P'(M, G')$ de $\{U_\alpha\}$ y $\psi_{\beta\alpha}$. Finalmente hacemos una inmersión P' en P como sigue: Sea $f_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ definida como la composición de las funciones siguientes

$$\pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G' \to U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Tenemos que $f_\alpha = f_\beta$ en $\pi'^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $f : P' \to P$ definidos por $\{f_\alpha\}$ es una inyección. □

Sea $P(M, G)$ un haz principal y F una variedad sobre la cual actúa G, por la izquierda, es decir, $(a, \xi) \mapsto a\xi \in F$. Construimos un haz fibrado $E(M, F, G, P)$ asociado a P con fibra F. En la variedad $P \times F$, hacemos que G actúe como sigue: $(a, u, \xi) \mapsto (ua, a^{-1}\xi)$.

Al espacio cociente $P \times F/G$, lo denotaremos como $E = P \times_G F$. La función $P \times F \to M$ tal que $(u, \xi) \mapsto \pi(u)$ induce una proyección $\pi_E : E \to M$. Para cada $x \in M$, el conjunto $\pi_E^{-1}(x)$ es la fibra de E sobre x.

Cada punto $x \in M$ tiene una vecindad U tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo a $U \times G$. Identificando a $\pi^{-1}(U)$ con $U \times G$, , la acción de G en $\pi^{-1}(U) \times F$ está dada por $(x, a, \xi) \mapsto (x, ab, b^{-1}\xi)$.

El isomorfismo $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$ induce entonces un isomorfismo $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$. La proyección $\pi_E : E \to M$ es entonces una función diferenciable. Llamamos a $E(M, F, G, P)$ el haz fibrado sobre M, con fibra F y grupo G, el cual está asociado con el haz principal P.

Proposición 3.1.10. *Sea $P(M, G)$ un haz principal y F una variedad en la cual actúa G. Sea $E(M, F, G, P)$ un haz fibrado asociado con P. Para cada*

$u \in P$ y cada $\xi \in F$, denotamos por $u\xi$ la imagen de (u, ξ) bajo la proyección $\pi_1 : P \times F \to E$. Entonces cada $u \in P$ es una función de F a $F_X = \pi_E^{-1}(x)$ donde $x\pi(u)$ y $(ua)\xi = u(a\xi)$ para $u \in P, a \in G$ y $\xi \in F$.

Sea H un subgrupo cerrado de G. G actúa en G/H. Sea $E(M, G/H, G, P)$ el haz asociado con fibra G/H. Además, H actúa en P por la derecha. Sea P/H el espacio cociente de P bajo esta acción, entonces tenemos lo siguiente.

El haz $E = P \times_G (G/H)$ asociado con P con fibra G/H puede identificarse con P/H como sigue: Un elemento de E representado por $(u, a\xi_0) \in P \times G/H$ es mandado al elemento de P/H representado por $ua \in P$, donde $a \in G$ y ξ_0 es el origen de G/H, es decir, la clase lateral H.

Entonces $P(E, H)$ es un haz principal sobre la base $E = P/H$ con grupo H. La proyección $\pi_2 : P \to E$ es tal que $u \mapsto u\xi$, donde u es considerado como una función de la fibra G/H a la fibra E

Proposición 3.1.11. *El grupo G de $P(M, G)$ es reducible a un subgrupo cerrado H si y sólo si el haz asociado $E(M, G/H, G, P)$ admite una sección $\sigma : M \to E = P/H$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que G es reducible a H y sea $Q(M, H)$ el haz reducido con inmersión $f : Q \to P$. Sea $\mu : P \to E = P/M$ la proyección. Si u y v están en la misma fibra de Q, entonces $v = ua$ para alguna $a \in H$, por lo tanto $\mu(f(v)) = \mu(f(u)a) = \mu(f(u))$. Esto implica que $\mu \circ f$ es constante en cada fibra de Q e induce una fucnión $\sigma : M \to E$, tal que $\sigma(x) = \mu(f(u))$, donde $x = \pi(u)$. σ es entonces una sección de E.

$\Leftarrow$) Dada una sección $\sigma : M \to E$, sea Q el conjunto de puntos $u \in P$ tales que $\mu(u) = \sigma(\pi(u))$, es decir, Q es la imagen inversa de $\sigma(M)$ bajo la proyección $\mu : P \to E = P/H$. Para caada $x \in M$, existe $u \in Q$ tal que $\pi(u) = x$ porque $\mu^{-1}(\sigma(x))$ es no vacío. Dado u y v en la misma fibra de P, si $u \in Q$ entonces $v \in Q$ si y sólo si $v = ua$ para alguna $a \in H$. Esto es porque $\mu(u) = \mu(v)$ si y sólo si $v = ua$ para alguna $a \in H$. Q es una subvariedad cerrada de P y Q es un haz principal. □

3.2. Conexiones y transporte paralelo

En esta sección, tendremos un haz principal $P(M, G)$, y con base en este haz, construiremos una conexión en una variedad M. Una vez teniendo una conexión en nuestra variedad, podremos definir el concepto de transporte paralelo, el cual, como se ha dicho anteriormente, será la base para desarrollar la teoría de holonomía que se estudiará en la siguiente sección.

Sea $P(M,G)$ un haz principal sobre una variedad M con grupo G. Para cada $u \in P$, sea T_uP el subespacio tangente a P en u. Denotaremos por V_u al subespacio de T_uP que consisite en los vectores tangentes a la fibra.

Definición 3.2.1. *Una conexión ∇ en P es una asignación de un subespacio H_u de T_uP para cada $u \in P$ tal que:*

1. $T_uP = V_u \oplus H_u$
2. $H_{ua} = (R_a)_*H_u$ *para todo* $u \in P$ *y* $a \in G$*; es decir, la distribución* $u \mapsto H_u$ *es* G*-ivariante.*
3. H_u *depende diferenciablemente de* u*.*

Llamaremos a V_u el espacio vertical de T_uP y a H_u el espacio horizontal (de T_uP). Un vector $X \in T_uP$ se llama vertical (respectivamente horizontal) si $X \in V_u$ (respectivamente, $X \in H_u$). Por la definición 3.2.1, todo vector $X \in T_uP$ se escribe de manera única como $X = Y + Z$, donde $Y \in V_u$ y $Z \in H_u$. Denotaremos por $vX = Y$ y $hX = Z$.

El inciso 3 de la definición 3.2.1 implica que si X es un campo vertical diferenciable en P también lo son vX y hX. Dada una conexión ∇ en P, definimos una 1-forma ω en P con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G como sigue: Por la sección anterior, sabemos que toda $A \in \mathfrak{g}$ induce un campo vectorial A^* en P llamado el campo vectorial fundamental correspondiente a A, y $A \mapsto (A^*)_u$ es un isomorfismo lineal de $\mathfrak{g}$ en V_u para cada $u \in P$.

Para cada $X \in T_uP$, definimos $\omega_u(X)$ como el único $A \in \mathfrak{g}$ tal que $(A^*)_u$ es igual a la componente vectical de X. Es claro que X es horizontal si y sólo si $\omega(X) = 0$. A la 1-forma ω se le conoce como forma de conexión de ∇.

Proposición 3.2.2. *La forma de conexión ω satisface las siguientes condiciones:*

1. $\omega(A^*) = A$, $\forall A \in \mathfrak{g}$.
2. $(R_a)^*\omega = ad(a^{-1})\omega$*, es decir,* $\omega((R_a)_uX) = ad(a^{-1})\omega(x)$ *para todo* $a \in G, X \in P$*, donde ad es la representación adjunta de* $\mathfrak{g}$ *(definida en la sección dos del capítulo uno). Recíprocamente, dada una 1-forma* ω *en* P *con valores en* $\mathfrak{g}$ *que satisface 1 y 2, existe una conexión* ∇ *en* P *cuya forma de conexión es* ω*.*

Demostración. El inciso 1 se sigue de la definición de ω.

Para demostrar 2, sea $X = vX + hX$ un campo vectorial en P. Si X es horizontal, entonces $(R_a)_*X$ también es horizontal para cada $a \in G$ por el inciso 2 de la definición 3.2.1; por lo tanto $\omega((R_a)_*X)$ y $\mathrm{ad}(a^{-1}\omega(X)$ se anulan.

Si X es vertical, podemos suponer que $X = A^*$ es un campo vectorial fundamental, entonces $(R_a)_*X$ es el campo vectorial fundamental correspondiente a $\mathrm{ad}(a^{-1})A$ por la proposición 5.1, página 51 de [7]. Tenemos entonces que

$$(R_a^*\omega)_u(X) = \omega_{ua}((R_a)_*X) = ad(a^{-1})A = ad(a{-}1)(\omega_u(X)).$$

Supongamos ahora que ω es una 1-forma que satisface 1 y 2. Definimos $H_u = \{X \in T_uP |\, \omega(X) = 0\}$. la función tal que $u \mapsto H_u$ define una conexión cuya forma de conexión es ω. $\square$

La proyección $\pi : P \to M$ induce una función $\pi_* : T_uP \to T_xM$ para toda $u \in P$ donde $x = \pi(u)$. Dada una conexión $(\pi_*)_u|_{H_u} : H_u \to T_xM$ es un isomorfismo.

Definición 3.2.3. *El levantamiento (o levantamiento horizontal) de un campo vectorial X en M es un único campo vectorial $X^* \in P$ el cual es horizontal y se proyecta sobre X, es decir, $(\pi_*)_u(X_u^*) = X_{\pi(u)}$ para todo $u \in P$.*

La siguiente proposición es muy importante pues nos asegura que el levantamiento horizontal de un campo X en M es único.

Proposición 3.2.4. *Dada una conexión en P y un campo vectorial X en M, existe un único levantamiento horizontal X^* de X. El levantamiento es R_a-invariante para toda $a \in G$. Recíprocamente, todo campo vectorial horizontal $X^* \in P$ G-invariante es el levantamiento de un campo vectorial $X \in M$.*

Demostración. Como $(\pi_*)_u|_{H_u} : H_u \to T_xM$ es un isomorfismo, entonces X^* existe y es único. Ahora, sea U una vecindad de un punto $x \in M$ tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$; usando este isomorfismo, obtenemos un campo vectorial diferenciable Y en $\pi^{-1}(U)$ tal que $\pi_*Y = X$. Entonces X^* es la componente horizontal de Y y por lo tanto es diferenciable.

X^* es invariante bajo la acción G porque H_u es G-invariante. Sea X^* un campo vectorial horizontal en P G-invariante. Para toda $x \in M$ tomamos $u \in P$ tal que $\pi(u) = x$ y definimos $X_* = (\pi_*)_u(x_u^*)$.

El vector X_* es independiente de la elección de u, donde $\pi(u) = x$ ya que si $u' = ua$ entonces $\pi_*(X^*u') = \pi_*((R_a)_{*_u}(X_u^*)) = \pi_*(X_u^*)$. $\square$

Veamos algunas propiedades de los levantamientos horizontales.

Proposición 3.2.5. *Sean X^* y Y^* levantamientos de X y Y respectivamente. Entonces tenemos que:*

1. *$X^* + Y^*$ es levantamiento de $X + Y$.*

2. *Para toda función $f \in M$, f^*X^* es el levantamiento horizontal de fX donde $f^* = f \circ \pi$.*

3. *La componente horizontal de $[X^*, Y^*]$ es el levantamiento horizontal de $[X, Y]$.*

Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad coordenada U de M. Sea X_i^* el levantamiento horizontal en $\pi^{-1}(U)$ del campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ en U para cada i. Entonces $X_1^*, \ldots, X_n^*$ forman una base local para la distribución $u \mapsto H_u$ en $\pi^{-1}(U)$.

Expresaremos una forma de conexión ω en P mediante una familia de 1-formas, cada una definida en un subconjunto abierto de la variedad base M de la siguiente manera:

Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M con una familia de isomorfismos $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ y la familia correspondiente de funciones de transición $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$.

Para cada α, sea $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ la sección de U_α definida por $\sigma_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, e)$, con $x \in U_\alpha$ y e el neutro en G.

Sea θ la 1-forma canónica en G definida como la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada invariante por la izquierda determinada de manera única por $\theta(A) = A$ para $a \in \mathfrak{g}$. Para cada $U_\alpha \cap U_\beta$ no vacío, definimos una 1-forma $\theta_{\alpha\beta}$ $\mathfrak{g}$-valuada como $\theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^*\theta$. Para cada α definimos una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada ω_α en U_α como $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega$

Proposición 3.2.6. *Las formas $\theta_{\alpha\beta}$ y ω_α están sujetas a las siguientes condiciones:*

$$\omega_\beta = ad(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta}. \tag{3.1}$$

.

Recíprocamente, para toda familia de 1-formas $\mathfrak{g}$-valuadas $\{\omega_\alpha\}$, cada una definida en U_α y $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ definidas en $U_\alpha \cap U\beta$ que satisfacen la ecuación 3.1, existe una 1-forma de conexión ω en P que define a $\{\omega_\alpha\}$ y al conjunto $\{\theta_{\alpha\beta}\}$.

Definición 3.2.7. *Sea $P(M,G)$ un haz G-principal, y $A \subset M$ cerrado. Decimos que está definida una conexión sobre A si para todo $u \in P$ tal que $\pi(u) \in A$, existe un subespacio H_u de T_uP tal que:*

1. $T_uP = H_u \oplus V_u$
2. $H_{ua} = (R_a)_*(H_u)$, *para toda $a \in G$*

H_u depende diferenciablemente de u en el siguiente sentido: para toda $x \in A$, existe una vecindad U y una conexión ∇_u en el haz G-principal tal que $P|_U = \pi^{-1}(U)$ cumple que el subespacio horizontal definido por ∇_u en $u \in \pi^{-1}(A)$ es H_u.

Sabemos que toda función suave definida sobre un cerrado de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ siempre se puede extender a todo $\mathbb{R}$. Además tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.2.8. *Todo punto de M tiene una vecindad U tal que toda conexión definida en un subconjunto cerrado V de U se puede extender a una conexión sobre U.*

Demostración. Dado un punto de M, consideremos la vecindad coordenada U tal que $\pi^{-1}(U)$ es difeomorfo a $U \times G$ sobre el haz trivial $U \times G \to G$ tal que $(x.y) \mapsto x$.

Tomamos la forma de conexión del haz trivial $\omega : TU \times TG \to \mathfrak{g}$. La forma de conexión está determinada por su comportamiento en $U \times \{e\}$ por lo siguiente: sea $x \in U$, $b \in G$, la acción de G en $U \times G$ sólo actúa en G, como $\tilde{R}_a(x,b) = (x,ba) = (x,R_ab)$, entonces $\tilde{R} = \mathrm{Id}_u \times R_a$.

Por otro lado, sea $(X,Y) \in T_xU \times T_aG$, $\tilde{Y} = (\tilde{R}_a^{-1})_*(Y) \in T_eG = \mathfrak{g}$, por lo tanto $(\tilde{R}_a)_*(X,\tilde{Y}) = (X,(R_a)_*(\tilde{Y})) = (X,Y)$.

Se tiene entonces que $\omega(X,Y) = \omega(\tilde{R}_{a_*}(X,\tilde{Y})) = (\tilde{R}_a)^*\omega(X,\tilde{Y}) = \mathrm{ad}(a^{-1})\omega(X,\tilde{Y})$ por la proposición 3.2.2.

Consideremos ahora $\sigma : U \to U \times G$, tal que $\sigma(x) = (x,e)$, como $X = Y + Z$ donde Y es tangente a $U \times \{e\}$ y Z es vertical, entonces $\sigma_*(\pi_*(X)) = \sigma_*(\pi_*(Y)) = Y$. Se tiene entonces que $\omega(X) = \omega(\sigma_*(\pi_*(X))) + \omega(Z) = \sigma^*(\omega(\pi_*(X))) + A$, donde $A \in \mathfrak{g}$ y A es el único vector tal que su campo fundamental asociado $A^* = Z$ en $\sigma(X)$. Como A sólo depende de Z, no de la conexión, entonces ω está completamente determinada por $\sigma^*\omega$, y tenemos que $X = Y + A^*$.

Por lo contrario, dada una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada γ sobre U definiendo $\omega : T_xU \times T_eG \to \mathfrak{g}$ como $\omega(X) = \gamma(Y) + A$, tenemos una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada sobre $U \times G$. Así, la existencia de ω sólo depende de la existencia de la 1-forma sobre U.

Si $\{A_i\}_n$ es la base de $\mathfrak{g}$, entonces la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada γ sobre U se descompone como $\sum_{i=1}^{n} \gamma^i A_i$ donde γ^i son 1-formas $\mathbb{R}$-valuadas, de esta forma, sólo necesitamos extender a los γ^i. Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son las coordenadas locales sobre U, toda 1-forma $\mathbb{R}$-valuada se escribe como $\gamma^i = \sum_i f^i dx^i$ donde $f^i : V \to \mathbb{R}$ es diferenciable y V es cerrado en U. Como toda función suave definida en un cerrado de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$-valuada siempre se puede extender a todo $\mathbb{R}^n$, podemos extender f^i a todo U, por lo tanto concluimos que cada conexión definida en un subconjunto cerrado de U puede extenderse a una conexión definida en U. $\square$

El siguiente teorema es una consecuencia del lema anterior y nos asegura que podemos extender una conexión definida en un cerrado de M a una conexión en el haz.

Teorema 3.2.9. *Sea $P(M, G)$ un haz principal, con proyección $\pi : P \to M$, y sea $A \subset M$ un subconjunto cerrado de M. Si M es paracompacta, toda conexión definida sobre A se puede extender a una conexión en P.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ una cubierta abierta de M. Como M es paracompacta, existe un refinamiento localmente finito $\{V_i\}$, tal que $\overline{V}_i \subset U_i$. Sea $\{f_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{V_i\}$, y sea γ_i la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada en U_i que extiende a la 1-forma dada sobre $A \cap \overline{V}_i \subset U$. Sea ω_i la forma de conexión correspondiente γ_i en $\pi^{-1}(U_i)$ Sea $g_i = f_i \circ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La 1-forma de conexión sobre P es entonces $\omega = \sum g_i \omega_i$. $\square$

Dada una conexión $\nabla : P \to TP$ en un haz G-principal, definiremos el concepto de transporte paralelo de fibras a lo largo de una curva $\tau : [a, b] \to M$.

Definición 3.2.10. *Una curva $\gamma : [a, b] \to P$ de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos es horizontal si $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$ para toda $t \in [a, b]$. Diremos que el campo $\gamma'(t)$ es horizontal.*

Relacionado con las curvas horizontales está el concepto de levantamiento, el cual definiremos a continuación.

Definición 3.2.11. *Sea $\tau : [a, b] \to M$ una curva $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Un levantamiento horizontal $\tau^* : [a, b] \to P$ es una curva horizontal tal que $\pi(\tau^*(t)) = \tau(t)$ para toda $t \in [a, b]$.*

La noción de levantamiento de curvas se puede aplicar al levantamiento de campos. Si X^* es el levantamiento horizontal de X en TM, entonces la curva integral $\tau^* : [a,b] \to P$ de X^* en $u_0 \in P$ corresponde al levantamiento de la curva integral $\tau : [a,b] \to M$ de X po $x_0 = \pi(u_0) \in M$.

Sin pérdida de generalidad, sea $\tau^*(t_0) = u_0$ y $\tau(t_0) = x_0$. Sea $\tilde{\tau} = \pi \circ \tau^* : [a,b] \to M$; tenemos entonces que:

$$\tilde{\tau}(t_0) = \pi(\tau^*(t_0)) = \pi(u_0) = x_0 \tag{3.2}$$

$$\tilde{\tau}'(t) = \pi_*(\tau'^*)(t) = \pi_*(X^*) = X \text{ en } [a,b] \tag{3.3}$$

Por las ecuaciones 3.2 y 3.3, $\tilde{\tau}$ es curva integral de X y por unicidad $\tau = \tilde{\tau}$ en $[a,b]$, es decir, $\pi(\tau^*(t)) = \tau(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Como τ^* es horizontal (por definición), entonces τ^* es el levantamiento horizontal de τ.

El siguiente resultado nos asegura que el levantamiento es único.

Proposición 3.2.12. *Sea $\tau : [a,b] \to M$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Para un punto arbitrario $u_0 \in P$, donde $x_0 = \pi(u_0)$ y $x_0 = \tau(0)$, existe un único levantamiento horizontal $\tau^* : [a,b] \to P$ de τ, donde $\tau^*(0) = u_0$.*

Antes de demostrar esta proposición, demostraremos el siguiente lema:

Lema 3.2.13. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g} = T_eG$ su álgebra. Sea $Y : [0,1] \to T_eG$ una curva continua. Entonces existe en G una única curva $a(t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $a(0) = e$ y $\frac{d}{dt}a(t)a^{-1}(t) = Y(t)$, para todo $t \in [0,1]$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, bajo una reparametrización, podemos suponer que Y está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos un campo vectorial X en $G \times \mathbb{R}$ como sigue: el valor de X en (a,t) es $(Y(t)a, (\frac{d}{dz})_t) \in T_aG \times T_t\mathfrak{R}$ donde z es un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}$, entonces $X_{(e,0)} = (Y(0), (\frac{d}{dz})_0)$. Sea $(a(t), g(t))$ curva integral de X por $(e,0)$, por ecuaciones diferenciales sabemos que si $y'(t) = (\frac{d}{dz})_t$, entonces $y(t) = t$. Entonces $X_{(a(t),t)} = (Y(t)a(t), (\frac{d}{dz})_t)$ pero $X_{(a(t),t)} = (\frac{d}{dt}a(t), (\frac{d}{dz})_t) = \frac{d}{dt}(a(t),t)$ por lo que $Y(t)a(t) = \frac{d}{dt}a(t)$, entonces $Y(t) = \frac{d}{dt}a(t)a(t)^{-1}$. La curva $a(t)$ es la curva deseada. Veamos que $a(t)$ está definida sobre $[0,1]$. Denotamos a $\exp(tX) = e_t$ Para cada $(e,s) \in G \times \mathbb{R}$ existe un número positivo $\delta_s > 0$ tal que $e_t(e,r)$ está definida para $|r - s| < \delta_s$ y $|t| < \delta_s$. Como $\{e\} \times [0,1] \subset G \times \mathbb{R}$ es compacto, podemos tomar $\delta > 0$ tal que para $r \in [0,1]$, $e_t(e,r)$ está definido para $|t| < \delta$. Tomando $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_r = 1$ y $s_t - s_{t-1} < \delta$, tenemos que $e_t(e,0) = (a(t),t)$ está definida para $t \in [0,s_1]$, $e_u(e,s_1) = (b(u), u + s_1)$ está definido para $u \in [0, s_2 - s_1]$, donde $\frac{d}{du}b(u)b(u)^{-1} = Y(u + s_1)$. Definimos $a(t) = b(t - s_1)a(s_1)$ para $t \in [s_1, s_2], \ldots, e_u(e, s(k-1)) = (c(u), s(k-1) + u)$ está definida para

$u \in [0, s(k) - s(k-1)]$, donde $\frac{d}{du}c(u)c(u)^{-1} = Y(u + s(k-1))$, y definimos $a(t) = c(t - s(k-1))a(s(k-1))$, por lo que $a(t)$ está definida como queríamos. □

Demostración de la proposición 3.2.12. Por la trivialidad local del haz, existe una curva $v(t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en P tal que $v(0) = u(0)$ y $\pi(v(t)) = x(t)$ para $t \in [0,1]$. De existir un levantamiento de τ, debe ser de la forma $u(t) = v(t)a(t)$ donde $a(t)$ es una curva en G tal que $a(0) = e$. Queremos encontrar a la curva $a(t)$ en G que haga a $u(t)$ horizontal. Usando la fórmula de Leibniz, tenemos que $\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}v(t)a(t) + v(t)\frac{d}{dt}a(t)$. Sea ω la forma de conexión de ∇, entonces tenemos que $\omega(\frac{d}{dt}u(t)) = \mathrm{ad}(a(t)^{-1})\omega(\frac{d}{dt}v(t)) + a(t)^{-1}\frac{d}{dt}a(t)$, donde $a(t)^{-1}\frac{d}{dt}a(t)$ es una curva en el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ de G. La curva $u(t)$ es horizontal si y sólo si $\frac{d}{dt}a(t)a(t)^{-1} = -\omega(\frac{d}{dt}v(t))$ para cada t. La construcción de $u(t)$ se reduce entonces al lema 3.2.13. □

Tenemos todo lo necesario para definir transporte paralelo.

Definición 3.2.14. *Sea $\tau : [0,1] \to M$ una curva $\mathcal{C}^1$ por pedazos, y sea $u_0 \in P$ tal que $\pi(u_0) = x_0 = \tau(0)$. Consideramos el único levantamiento horizontal $\tau^* : [0,1] \to P$ de τ de u_0 a u_1 tal que $\pi(u_1) = x$. Si variamos u_0 en la fibra $\pi^{-1}(x_0)$, obtenemos una función que va de la fibra $\pi^{-1}(x_0)$ a la fibra $\pi^{-1}(x_1)$, tal que $u_0 \mapsto u_1$. A esta función la llamamos τ, y es conocida como el transporte paralelo a lo largo de la curva τ.*

Proposición 3.2.15. *El transporte paralelo a lo largo de una curva τ conmuta con la acción de G sobre P, es decir, $\tau \circ R_a = R_a \circ \tau$ para toda $a \in G$.*

Demostración. Sea $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, donde $x_0 = \tau(0)$ y $x_1 = \tau(1)$. Sea τ^* el único levantamiento de τ por u_0 y $\tilde{\tau}(t) = R_a(\tau^*(t))$, entonces $\widetilde{\tau(0)} = u_0a$. Por otro lado, $\tau \circ R_a(u_0) = \tau(u_0a) = \tilde{\tau}(1) = R_a(\tau^*(1)) = \tau(u_0)a = R_a \circ \tau(u_0)$. □

Las siguientes propiedades del transporte paralelo son útiles.

Proposición 3.2.16.

1. *Si τ es una curva diferenciable por pedazos de clase $\mathcal{C}^1$ en M, entonces el transporte paralelo a lo largo de τ^{-1} es la inversa del transporte paralelo a lo largo de τ*

2. *Si τ es una curva de x a y en M y μ es una curva de y a z en M, el transporte paralelo a lo largo de $\mu \circ \tau$ es la composición de los transportes paralelos τ y μ.*

El transporte paralelo a lo largo de $\tau : [a,b] \to M$ es independiente de la parametrización de τ: sea $\tilde{\tau} : [c,d] \to M$ y $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ curvas $\mathcal{C}^1$ por pedazos tal que $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$. Entonces $\tilde{\tau}(\varphi(t)) = \tau(t)$. Sean $\tilde{\tau}^*$ y τ^* Por otra parte $\pi(\tilde{\tau}^*(\varphi(t))) = \tilde{\tau}(\varphi(t)) = \tau(t) = \pi(\tau^*(t))$.

3.3. Holonomía

En esta sección definiremos al grupo de holonomía de una conexión dada ∇ en el haz principal $P(M,G)$. Este concepto está relacionado con el de transporte paralelo definido en la sección anterior. Nuestro objetivo es contar con las herramientas necesarias para poder enunciar el teorema de Ambrose-Singer, el cual relaciona la holonomía con la curvatura.

Para cada punto $x \in M$, denotamos por $C(x)$ el conjunto de lazos en x. Si τ y μ pertenecen a $C(x)$, entonces $\mu \circ \tau$ también está en $C(x)$, definiendo $\mu \circ \tau(s) = \tau(2s)$ si $s \in [0, 1/2]$ y $\mu \circ \tau(s) = \mu(2s-1)$ si $s \in [1/2, 1]$; de esta forma tenemos que $\mu \circ \tau(0) = \tau(0) = x = \mu(1) = \mu \circ \tau(1)$.

Para cada $\tau \in C(x)$, por la proposición 3.2.15, tenemos que $\tau : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ es un isomorfismo. Por la proposición 3.2.16, el conjunto de todos estos isomorfismos τ forma un grupo, al que llamamos el **grupo de holonomía** de ∇ con punto de referencia x.

Sea $C^\circ(x) \subset C(x)$ el conjunto de todos los lazos nulhomotópicos. El conjunto de isomorfismos τ correspondientes a las curvas $\tau \in C^\circ(x)$ también forma un grupo pues el lazo constante también está en $C^\circ(x)$. Este grupo es un subgrupo del grupo de holonomía y se le conoce como **grupo de holonomía reducida de ∇ con punto de referencia** x. Para facilitar el lenguaje, diremos únicamente grupo de holonomía y grupo de holonomía reducida según sea el caso. Los denotaremos como $Hol(x)$ y $Hol^\circ(x)$ respectivamente.

Podemos, con base en estos grupos, construir un subgrupo de G de la siguiente manera: Sea u un punto fijo arbitrario en $\pi^{-1}(x)$, y sea $\tau \in C(x)$, entonces el isomorfismo τ correspondiente determina un elemento $a \in G$, donde $\tau(u) = ua$. Si un lazo $\mu \in C(x)$ determina $b \in G$, entonces tenemos que:

$$(\mu \circ \tau)(u) = \mu(\tau(u)) = \mu(ua) = (\mu(u))a = uba,$$

pues el transporte paralelo conmuta con la acción de G por la proposición

3.2.15; por lo tanto, el elemento determinado por $\mu \circ \tau$ es ba.

El conjunto de elementos $a \in G$, determinado por todos los isomorfismos τ correspondientes a los lazos $\tau \in C(x)$ forma un subgrupo de G: en efecto, tomamos τ_x el lazo constante en x, entonces $\tau_x(u) = u = ue$ por lo tanto el neutro está en nuestro conjunto; supongamos ahora que τ determina al elemento $a \in G$, entonces τ^{-1}, que es el isomorfismo correspondiente al lazo τ en x pero recorrido en sentido contrario, determina a un elemento b, por la proposición 3.2.16, y por la observación anterior, tenemos que $(\tau \circ \tau^{-1})(u) = uab = u = ue$ si y sólo si $ab = e$, si y sólo si $b = a^{-1}$, por lo tanto cada elemento tiene su inverso; por último, estos elementos cumplen con la asociatividad pues son elementos de G que es un grupo.

Denotaremos como $Hol(u)$ a este subgrupo y lo llamaremos el **grupo de holonomía de ∇ con punto de referencia u en P**. Análogamente definimos $Hol^\circ(u)$ el subgrupo de G que consiste en los elementos de G determinados por los isomorfismos τ donde $\tau \in C^\circ(x)$. Como el lazo constante es nulhomotópico, entonces el elemento neutro de G está en $Hol^\circ(u)$, entonces efectivamente $Hol^\circ(u)$ es un subgrupo de G. A este grupo lo llamamos el **grupo de holonomía reducida de ∇ con punto de referencia u en P**.

Ahora daremos otra construcción de $Hol(u)$ usando curvas horizontales: Daremos una relación de equivalencia en P de la siguiente manera; sean $u, v \in P$, $u \sim v \Leftrightarrow u$ y v pueden ser unidos por una curva horizontal. Definimos a $Hol(u)$ como el conjunto de $a \in G$ tales que $u \sim ua$. Como los levantamientos son curvas horizontales, esta construcción nos da los mismos elementos del grupo que con la primera construcción, pues $u \sim v$ implica que $ua \sim va$ para cualquier $u, v \in P, a \in G$.

Proposición 3.3.1. *1. Si $v = ua$, $a \in G$, entonces*

$$Hol(v) = ad(a^{-1})(Hol(u)),$$

es decir, los grupos de holonomía $Hol(v)$ y $Hol(u)$ son conjugados en G. Análogamente, $Hol^\circ(v) = ad(a^{-1})(Hol^\circ(u))$.

2. Si $u, v \in P$ son tales que $u \sim v$, entonces $Hol(u) = Hol(v)$ y $Hol^\circ(u) = Hol^\circ(v)$.

Demostración. 1. Sea $b \in Hol(u)$, entonces tenemos que $u \sim ub$. Por otra parte, $ua \sim (ub)a$ por lo que $ua = v \sim (va^{-1})ba = v(a^{-1}ba)$. Entonces $\mathrm{ad}(a^{-1})(b) \in Hol(v)$ para todo $b \in Hol(u)$. Se sigue que

$Hol(v) \supset \text{ad}(a^{-1})(Hol(u))$. Análogamente, se tiene que $Hol(v) \subset \text{ad}(a^{-1})(Hol(u))$, por lo tanto $Hol(v) = \text{ad}(a^{-1})(Hol(u))$. La demostración de que $Hol^\circ(v) = \text{ad}(a^{-1})(Hol^\circ(u))$ es completamente similar.

2. Si $u \sim v$ entonces $ub \sim vb$ para todo $b \in G$. Como $\sim$ es transitiva, $u \sim ub$ si y sólo si $v \sim vb$, esto es, $b \in Hol(u)$ si y sólo si $b \in Hol(v)$. Veamos ahora que $Hol^\circ(u) = Hol^\circ(v)$. Sea μ^* la curva horizontal en P de u a v. Si $b \in Hol^\circ(u)$, entonces hay una curva τ^* horizontal en P de u a ub tal que la curva $\pi(\tau^*)$ en M es un lazo en $\pi(u)$ nulhomotópico. Se tiene que la composición $(R_b\mu^*)\circ\tau^*\circ\mu^{*-1}$ es una curva horizontal en P de v a vb y su proyección en M es un lazo en $\pi(v)$ nulhomotópico. Entonces $b \in Hol^\circ(v)$; de manera similar, si $b \in Hol^\circ(v)$, entonces $b \in Hol^\circ(u)$.

□

Observación 3.3.2. *Si M es conexa, entonces para cada $u, v \in P$, existe un elemento $a \in G$ tal que $v \sim ua$, y por la proposición anterior, los grupos de holonomía $Hol(u)$, donde $u \in P$, son conjugados entre sí en G y por lo tanto son isomorfos entre sí.*

Ahora vamos a probar que el grupo de holonomía es un grupo de Lie. Para esto, necesitaremos algunos resultados y definiciones previos.

Definición 3.3.3. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de M. Decimos que una curva cerrada τ en un punto x es un $\mathcal{U}$-lazo si se puede descomponer en tres curvas: $\tau = \mu^{-1} \circ \sigma \circ \mu$ donde μ es una curva de x a y y σ es una curva cerrada en y contenido en uno de los abiertos de $\mathcal{U}$.*

Dos curvas τ y τ' son equivalentes si τ' se puede obtener de τ reemplazando un número finito de veces una porción de la curva $\mu \circ \sigma \circ \mu^{-1}$ por una curva trivial y viceversa.

El siguiente es un resultado de Lichnerowicz.

Lema 3.3.4. (de factorización)

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta arbitraria de M. Entonces:

1. *Cualquier curva que sea nulhomotópica es equivalente a un producto finito de $\mathcal{U}$-lazos.*

2. *Si la curva dada es de clase $\mathcal{C}^k$ por pedazos, entonces cada $\mathcal{U}$-lazo en el producto puede ser elegido de la forma $\mu^{-1} \circ \sigma \circ \mu$ donde μ es $\mathcal{C}^k$ por pedazos y σ es $\mathcal{C}^k$.*

Demostración. 1. Sea $\tau = x(t)$, donde $t \in [0,1]$ tal que $x = x(0) = x(1)$. Sea f la homotopía $f : I \times I \to M$ tal que $f(t,0) = x(t)$, $f(t,1) = x$, $f(0,s) = f(1,s) = x$ para cada $s, t \in I$. Dividimos a $I \times I$ en m^2 cuadrados de la misma longitud tales que cada cuadrito se quede en un abierto de $\mathcal{U}$ bajo f. Para cada (i,j), $1 \leq i,\, j \leq m$, sea $\lambda(i,j)$ la curva en $I \times I$ consiste en los segmentos que unen los puntos de la latiz en el siguiente orden:

$$\begin{aligned}(0,0) &\to (0,j/m) \to ((i-1)/m, j/m) \to ((i-1)/m, (j-1)/m) \\ &\to (i/m, (j-1)/m) \to (i/m, j/m) \to ((i-1)/m, j/m) \\ &\to (0, j/m) \to (0,0)\end{aligned}$$

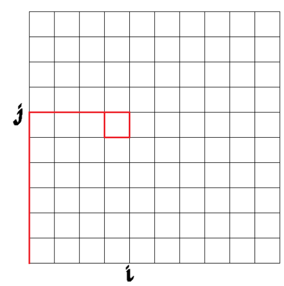

Figura 3.1:

Geométricamente, $\lambda(i,j)$ se ve como un lazo (ver figura 3.1). Sea $\tau(i,j)$ la imagen de $\lambda(i,j)$ bajo f. Tenemos entonces que τ es equivalente al producto de los $\mathcal{U}$-lazos $\tau(m,m) \circ \tau(m-1,m) \circ \cdots \circ \tau(1,m) \circ \tau(m,m-1) \circ \cdots \circ \tau(1,m-1) \circ \cdots \circ \tau(1,1)$.

2. Por el inciso anterior, podemos asumir que la homotopía f es $\mathcal{C}^k$ por pedazos. Podemos asumir también que f es $\mathcal{C}^k$ en cada uno de los m^2 cuadrados y cada $\tau(i,j)$ tiene entonces la propiedad requerida. $\square$

Teorema 3.3.5. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G tal que cada elemento de H puede ser unido con el neutro mediante una curva diferenciable por pedazos de clase $\mathcal{C}^1$ que está contenida en H. Entonces H es un subgrupo de Lie de G.*

Ahora sí, tenemos las herramientas necesarias para demostrar que el grupo de holonomía reducida en $u \in P$ es un subgrupo de Lie de G.

Teorema 3.3.6. *Sea $P(M,G)$ un haz principal cuya variedad base M es conexa y paracompacta y u en P. Entonces*

1. *$Hol^{\circ}(u)$ es un subgrupo de Lie de G.*

2. *$Hol^{\circ}(u)$ es un subgrupo normal de $Hol(u)$ y $Hol(u)/Hol^{\circ}(u)$ es numerable.*

Demostración.

1. Sea $a \in Hol^{\circ}(u)$ obtenido por el transporte paralelo a lo largo de un lazo τ nulhomotópico de clase $\mathcal{C}^k$ por pedazos. Por el lema de factorización 3.3.4, τ es equivalente al producto de $\mathcal{U}$-lazos de la forma $\tau_1^{-1} \circ \mu \circ \tau_1$, donde τ_1 es una curva diferenciable por pedazos de clase $\mathcal{C}^k$ de $x = \pi(u)$ a un punto y, y μ es un lazo diferenciable en y que se queda en una vecindad coordenada de y. El elemento de $Hol^{\circ}(u)$ definido por cada lazo $\tau_1^{-1} \circ \mu \circ \tau_1$ es igual al elemento b de $Hol^{\circ}(u)$ definido por el lazo μ, donde v es el punto obtenido por el transporte paralelo de u a lo largo de τ_1. Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas tal que el punto $(1, \ldots, 1)$ es y, y sea μ definida como $x^i = x^i(t)$, con $i = 1, \ldots, n$. Sea $f^i(t,s) = s + (1-s)x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $0 \geq t$ y $s \in [0,1]$. Entonces $f(t,s) = (f^1(t,s), \ldots, f^n(t,s)) : I \times I \to M$ es una función diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$, tal que $f(t,0)$ es la curva μ y $f(t,1)$ es la curva constante y. Para cada s fija, denotamos por $b(s)$ al elemento de $Hol^{\circ}(v)$ obtenido del lazo $f(t,s)$, con $t \in [0,1]$, entonces $b(0) = b$ y $b(1) = e$. Tenemos entonces que b puede ser unido a la identidad en $Hol^{\circ}(v)$ por una curva diferenciable que se queda en $Hol^{\circ}(v)$. Por lo tanto, el elemento de $Hol^{\circ}(u)$ definido por cada lazo $\tau_1^{-1} \circ \mu \circ \tau_1$ puede ser unido a la identidad. Por el teorema 3.3.6, tenemos que $Hol^{\circ}(u)$ es un subgrupo de Lie de G.

2. Si τ y μ son dos lazos en x y si μ es nulhomotópico, entonces $\tau \circ \mu \circ \tau^{-1}$ es nulhomotópico; por lo tanto, $Hol^{\circ}(u)$ es un subgrupo normal de $Hol(u)$. Sea $\pi_1(M)$ el grupo fundamental de M con punto de referencia x. Definimos un homomorfismo $f : \pi_1(M) \to Hol(u)/Hol^{\circ}(u)$ como sigue: Para cada elemento α de $\pi_1(M)$, sea τ un lazo en x representante de α. Podemos cubrir a τ con un número finito de vecindades coordenadas. Si modificamos a τ en cada vecindad, podemos obtener un lazo diferenciable por pedazos de lase $\mathcal{C}^k$ τ_1 en x que sea homotópico a τ. Sean τ_1 y τ_2 dos lazos como los descritos anteriormente, entonces $\tau_1 \circ \tau_2^{-1}$ es nulhomotópico y define un elemento en $Hol^{\circ}(u)$, por lo tanto τ_1 y τ_2 definen el mismo elemento en $Hol(u)/Hol^{\circ}(u)$, al cual denotaremos por $f(\alpha)$. Tenemos entonces que $f : \pi_1(M) \to Hol(u)/Hol^{\circ}(u)$.

Como M es conexa y paracompacta, entonces M es segundo numerable, por lo tanto $\pi_1(M)$ es numerable (ver [14]), y por lo tanto $Hol(u)/Hol^{\circ}(u)$ también lo es.

□

Obsérvese que en la demostración no se probó que la función $b(s)$ definida en el inciso 1 fuera de clase $\mathcal{C}^k$ en s; sin embargo, esto se sigue de:

Lema 3.3.7. *Sea $f : I \times I \to M$ una función diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$ y $u_0(s)$ con $s \in [0,1]$ una curva diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$ en P tal que $\pi(u_0(s)) = f(0,s)$, donde $\pi : P \to M$ es la proyección. Para cada s fija, sea $u_1(s)$ el punto de P ontenido por el transporte paralelo de $u_0(s)$ a lo largo de la curva $f(t,s)$, donde $t \in I$ y s está fija. Entonces la curva $u_1(s)$, $s \in I$ es diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$.*

Como dijimos al principio de la sección, nuestro objetivo es poder enunciar el teorema de Ambrose-Singer, el cual relaciona la forma de curvatua con la holonomía. Definiremos ahora la forma de curvatura de una conexión.

Definición 3.3.8. *Sea $P(M,G)$ un haz principal y ρ una representación de G sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces $\rho(a)$ es una transformación lineal de V para cada $a \in G$ y $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ para $a, b \in G$. Una forma pseudotensorial de grado r en P de tipo (ρ, V) es una r-forma V-valuada φ en P, tal que $R_a^*\varphi = \rho(a^{-1}) \circ \varphi$ para $a \in G$. Diremos que φ es una forma tensorial si es horizontal, es decir, si $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = 0$ cuando al menos alguno de los vectores tangentes X_i de P es vertical.*

Veamos algunas propiedades que cumplen las formas tensoriales.

Proposición 3.3.9. *Sea φ una r-forma pseudotensorial de tipo (ρ, V) y $h : T_uP \to H_u$ la proyección; entonces*

1. *La forma φh definida como $(\varphi h)(X_1, \ldots, X_r) = \varphi(hX_1, \ldots, hX_r)$ es una forma tensorial de tipo (ρ, V).*

2. *$d\varphi$ es una $(r+1)$-forma pseudotensorial de tipo (ρ, V).*

3. *La $(r+1)$-forma $D\varphi$ definida como $D\varphi = (d\varphi)h$ es una forma tensorial de tipo (ρ, V).*

La forma $D\varphi$ definida en el último inciso de la proposición anterior, se llama la derivada exterior covariante de φ.

Definición 3.3.10. *Si ρ es la representación adjunta de G en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, diremos que una forma tensorial de tipo $(\rho, \mathfrak{g})$ es de tipo adG.*

La forma de conexión ω es una 1-forma pseudotensorial de tipo $\operatorname{ad} G$, y por la proposición 3.3.9, $D\omega$ es una 2-forma tensorial de tipo $\operatorname{ad} G$. A esta 2-forma se le conoce como **forma de curvatura de** ω.

Las siguientes son algunas propiedades de la forma de curvatura.

Proposición 3.3.11. *Sea ω una forma de conexión y Ω su forma de curvatura, entonces:*

1. $d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega X, \omega Y] + \Omega(X,Y)$ *para* $X, Y \in T_uP$.

2. *Si X y Y son campos vectoriales horizontales en P, entonces* $\omega([X,Y]) = -2\Omega(X,Y)$.

3. $D\Omega = 0$.

4. *SI φ una 1-forma tensorial de tipo $\operatorname{ad} G$, entonces*

$$D\varphi(X,Y) = d\varphi(X,Y) + \frac{1}{2}[\varphi(x), \omega(Y)] + \frac{1}{2}[\omega(X), \varphi(Y)]$$

   para $X, Y \in T_uP$.

A la ecuación en el primer inciso se le conoce como ecuación de estructura y a la del tercer inciso como identidad de Bianchi.

Proposición 3.3.12. *Sea $f : P(M', G', \pi') \to P(M, G, \pi)$ un homomorfismo de haces principales tal que la función inducida $f''' : M' \to M$ es un difeomorfismo. Sea ∇' una conexión sobre P' con forma de conexión ω' y forma de curvatura Ω', entonces:*

1. *Existe una única conexión ∇ sobre P tal que f manda los espacios horizontales de ∇' en los espacios horizontales de ∇.*

2. *Si ω y Ω son las formas de conexión y curvatura de ∇ entonces $f^*\omega = f\omega'$, $f^*\Omega = f\Omega'$ y $f\omega'(X') = f_*(\omega'(X'))$ para $X' \in TP'$.*

3. *Sea $u' \in P'$, y $u = f(u') \in P$, entonces $f'' : G' \to G$ es tal que $\Phi(u') \mapsto \Phi(u)$ y $\Phi^\circ(u') \mapsto \Phi^\circ(u)$.*

Proposición 3.3.13. *Sea $Q(M, H)$ un subhaz de $P(M, G)$ donde H es un subgrupo de Lie de G. Supongamos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G admite un subespacio $\mathfrak{m}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ y $ad(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H. Para cada forma de conexión ω en P, la $\mathfrak{h}$-componente ω' de ω restringida a Q es una forma de conexión en Q.*

La conexión definida ω en P es reducible a una conexión en el subhaz Q si y sólo si la restricción de ω a Q es $\mathfrak{h}$-valuada.

Volviendo a los grupos de holonomía, denotaremos por $Hol_k(u)$ el grupo de holonomía obtenido por curvas diferenciables de clase $\mathcal{C}^k$. Tenemos entonces que $Hol_\infty(u) \subset \cdots \subset Hol_2(u) \subset Hol_1(u)$. Queremos ver que todos los $Hol_i(u)$ coniciden. Antes de probar esto, necesitaremos algunos resultados.

Lema 3.3.14. *Sea Q un subconjunto de $P(M,G)$ y H un subgrupo de Lie de G. Supongamos que:*

1. *La proyección $\pi : P \to M$ manda Q sobre M.*
2. *Q es estable por H, es decir, $R_a(Q) = Q$ para cada $a \in H$.*
3. *Si $u, v \in Q$ y $\pi(u) = \pi(v)$ entonces hay un elemento $a \in H$ tal que $v = ua$.*
4. *Cada punto $x \in M$ tiene una vecindad U y una sección $\sigma : U \to P$ tal que $\sigma(U) \subset Q$.*

Entonces $Q(M,H)$ es un subhaz reducido de $P(M,G)$.

Demostración. Para cada $u \in \pi{-}1(U)$, sea $x = \pi(u)$ y $a \in G$ el elemento determinado por $u = \sigma(x)a$. Definimos $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ como $\psi(u) = (x,a)$, Esta función es suprayectiva porque si $(x,a) \in U \times G$ entonces $\psi(u) = (x,a)$ donde $u = \sigma(x)a$. Es inyectiva porque si $\psi(u) = \psi(v) = (\pi(v), a')$ donde $v = \sigma(x)a'$. Entonces $\psi(u) = (\pi(u), a) = (\pi(v), a')$, por lo que $a = a'$ y $\pi(u) = \pi(v) = x$, por lo tanto $v = \sigma(x)a = u$. Concluimos entonces que ψ es un isomorfismo.

Veamos que $\psi : Q \cap \pi^{-1}(U) \to U \times H$ es inyectiva: sean $u, v \in Q \cap \pi^{-1}(U)$ tal que $\psi(u) = \psi(v)$ entonces $(\pi(u), a) = (\pi(v), a')$ por lo que $\pi(u) = \pi(v)$ y por hipótesis existe $c \in H$ tal que $u = vc$. Se sigue que $u = \sigma(x)a = \sigma(x)a'c$ por lo tanto $\psi(u) = (\pi(u), ac) = (\pi(u), a)$ y entonces $ac = a$, por lo que $c = e$ y se concluye que $u = v$.

Introducimos una estructura diferenciable en Q tal que $\psi : Q \cap \pi^{-1}(U) \to U \times H$ es un difeomorfismo. Primero, veamos que $Q \subset \pi^{-1}(U)$. Sea $u \in Q$, $u \in \pi^{-1}(U)$, $x = \pi(u)$ y $u = \sigma(x)a$; como $u \in Q$ y $\sigma(x) \in Q$ entonces $a \in H$ pues $R_a(Q) = Q$ por lo tanto $\psi : Q \to U \times H$. Ahora, por [7] proposición 1.3 página 10, tenemos que $\psi : Q \cap \pi^{-1}(U) \to U \times G$ es diferenciable. Además, $\psi(Q \cap \pi^{-1}(U)) \subset U \times H$ pues $\psi(u) = (x,a)$ y como $R_a(Q) = Q$, no puede pasar que a no sea elemento de H, por lo tanto $\psi : Q \to U \times H$

es diferenciable, y entonces Q es una variedad diferenciable, y Q es un haz principal sobre M con grupo H porque H actúa libremente sobre Q como sigue: $Q \times H \to ua = R_a(u) \in Q$; Q es localmente trivial proque Q es subhaz de P y claramente $H \to G$ es un monomorfismo. □

Lema 3.3.15. *Sea $Q(M,G)$ un subhaz de $P(M,G)$ y ∇ una conexión en P. Si para cada $u \in Q$ el subespacio horizontal de T_uP es tangente a Q, entonces ∇ es reducible a una conexión en Q.*

Demostración. Definimos ∇' la conexión en Q como sigue: el subespacio horizontal de T_uQ con $u \in Q$, con respecto a ∇' es por definición el subespacio horizontal de T_uP con respecto a ∇. Sabemos que una conexión definida por ω en P es reducible a una conexión en un subhaz Q si y sólo si la restricción de ω a Q es $\mathfrak{h}$-valuada. □

El siguiente teorema nos servirá para demostrar que todos los grupos de holonomía coinciden.

Teorema 3.3.16 (de reducción)**.** *Sea $P(M,G)$ un haz fibrado principal con una conexión ∇, y M conexa y paracompacta. Sea u_0 un punto arbitrario de P. Denotamos por $P(u_0)$ el conjunto de puntos en P que pueden ser unidos a u_0 por una curva horizontal, entonces*

1. *$P(u_0)$ es un haz reducido con grupo estructural $\phi(u_0)$.*

2. *La conexión ∇ es reducible a una conexión en $P(u_0)$.*

Demostración. Como M es paracompacta, entonces por la proposición 3.3.6, tenemos que $Hol(u_0)$ es subgrupo de Lie de G. Veamos que $P(u_0)$ y $Hol(u_0)$ satisfacen las condiciones 1, 2 y 3 del lema 3.3.14. Sea $x \in M$ tal que $x = \pi(u)$

1. Como M es compacta, para cada $u, v \in P$ existe $a \in G$ tal que $u \sim va$. En particular, $u \sim ua$ por lo que $u_0 \sim ub$ para alguna b. Ahora, $ub \in \pi^{-1}(x)$ por lo tanto $\pi(uab) = x = \pi(u)$. Se tiene que $\pi : P(u_0) \to M$ es sobre.

2. P_0 cumple que $R_a(P_0) = P_0$ para cada $a \in Hol(u_0)$ pues $u \in P(u_0)$ si y sólo si $u \sim u_0$ si y sólo si $ua \sim u_0a$ donde $a \in Hol(u_0)$ si y sólo si $u_0a \sim u_0$ si y sólo si $ua \sim u_0$ por lo tanto $ua \in P(u_0)$. Además, sea $u \in P(u_0)$ y $a \in Hol(u_0)$ entonces $ua \in P_0$ y como $u \sim u_0$ entonces $u_0 \sim ua$, por lo que $u \in R_a(P(u_0))$.

3. Sea $u, v \in P(u_0)$ y $\pi(u) = \pi(v) = x$, como $u \sim v$, $Hol(u) = Hol(v)$, entonces existe $a \in Hol(u)$ tal que $v = ua$.

4. Para ver que los conjuntos cumplen el inciso 4 del lema 3.3.14, tomemos $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas locales alrededor de x tal que x es el

origen. Sea U vecindad de x tal que $|x^i| < \delta$. Dado cualquier y, punto en U, sea τ_y el segmento de x a y con respecto al sistema de coordenadas. Fijamos $u \in P(u_0)$ tal que $\pi(u) = x$. Sea $\sigma(y)$ el punto de P obtenido por el transporte paralelo de u a lo largo de τ_y, $\sigma : U \to P$ es una sección pues $\sigma(\pi(u)) = \sigma(x) = u$. $\pi(\sigma(y)) = y$ además $\sigma(U) \subset P(u_0)$ pues los levantamientos son curvas horizontales.

Con esto concluimos que el primer inciso del teorema se cumple. El segundo inciso se sigue del lema 3.3.15. □

A $P(u)$ se le conoce como el haz de holonomía por u. Si $u \sim v$ y $u' \in P(u)$, entonces $u' \sim u \sim v$; como $\sim$ es transitiva, tenemos $u' \in P(v)$; es decir, si $u \sim v$, $P(u) \subset P(v)$. Por otro lado, sea $u \sim v$, entonces $v \in P(v)$ y $v \in P(u)$, es decir, se $u \sim v$ entonces $P(v) \subset P(u)$. Concluimos que $u \sim v$ si y sólo si $P(u) \sim P(v)$.

Como $\sim$ es una relación de equivalencia, tenemos que $P(u) = P(v)$ o $P(u) \cap P(v) = \emptyset$; es decir, P se puede descomponer en una unión disjunta de haces de holonomía.

Como cada $a \in G$ manda una curva horizontal en una curva horizontal, es decir, si τ es horizontal, τa es horizontal, tenemos que $R_a(P(u)) = P(ua)$ por lo siguiente: sea $va \in R_a(P(u))$, $v \in P(u)$, entonces $va \sim u$ y $u \sim ua$ por lo que $v \in P(ua)$. Por lo contrario, si $v \in P(ua)$ entonces $v \sim ua \sim u$ por lo tanto $v \in R_a(P(u))$.

Además tenemos que la transformación $R_a : P(u) \to P(ua)$ tal que $u \mapsto ua$ es un isomorfismo; es inyectiva porque si $u, v \in P(u)$ tal que $R_a(u) = R_a(v)$ entonces $ua = va$, es decir, $u = v$; es suprayectiva porque si $v \in P(ua)$, $v \sim ua \sim u$ entonces $v \in P(u)$ y $va = R_a(v)$.

Tenemos el isomorfismo correspondiente de grupos $\mathrm{ad}(a^{-1}) : Hol(u) \to Hol(ua)$ tal que $u \mapsto va^{-1}ba$.

Sean $u, v \in P$. Veamos que existe $a \in G$ tal que $P(v) = P(ua)$; en otras palabras, veamos que $u \sim va$ para alguna $a \in G$. Como se hizo en la demostración de la proposición 3.2.12, tomamos $u \in P$ y $\pi(u) = x$, $\pi(v) = y$ y encontramos el elemento $a \in G$ correspondiente. Por lo que los haces de holonomía $P(u)$. $u \in P$ son todos isomorfos entre sí.

El siguiente teorema se debe a Ozeki y Nomizu.

Teorema 3.3.17. *Todos los grupos de holonomía $Hol_k(u)$ coinciden.*

Demostración. Si demostramos que $Hol_1(u) = Hol_\infty(u)$ terminamos. Por el teorema 3.3.16, $P(u)$ es un subhaz de P con $Hol(u)$ como su grupo estructural. Definimos una distribución S en P como $S_u = T_u(P(u))$ para $u \in P$. Como los haces de holonomía tienen todos la misma dimensión por ser isomorfos, definimos a k como la dimensión de los haces, entonces S es de dimensión k. En [7] se puede revisar la demostración de los siguientes hechos:

1. S es diferenciable e involutiva.
2. Para cada $u \in P$, $P(u)$ es la variedad integral maximal de S por u.
3. Sea S involutiva y una distribución diferenciable en una variedad diferenciable. Supongamos que $x_t, t \in [0,1]$ es una curva $\mathcal{C}^1$ por pedazos cuyos vectores tangentes $\frac{d}{dt}x_t$ pertenecen a S. Entonces toda la curva x_t se queda en la variedad maximal integral W de S por x_0.

Si tomamos a cialquier elemento de $Hol_1(u)$ entocnes u y ua pueden ser unidos por una curva $\mathcal{C}^1$ por pedazos horizontal $u_t, t \in [0,1]$ en P. El vector tangente $\frac{d}{dt}u_t$ en cada punto se queda en $S_{\frac{d}{dt}u_t}$. Por el inciso 3, toda la curva u_t se queda en la variedad integral maximal $W(u)$ de S por u. Por el inciso 2. toda la curva u_t se queda en $P(u)$. En particular ua es un punto de $P(u)$. Como $P(u)$ es un subhaz con grupo estructural $Hol(u)$, $a \in Hol(u)$. □

Como consecuencia de este teorema tenemos que todos los $Hol_k^\circ(u)$ coinciden.

Podemos enunciar ahora el teorema demostrado por Ambrose y Singer en [15].

Teorema 3.3.18 (Ambrose-Singer)**.** *Sea $P(M,G)$ un haz principal, donde M es conexa y paracompacta. Sea ∇ una conexión en P, Ω la forma de curvatura, $Hol(u)$ el grupo de holonomía con punto de referencia $u \in P$ y $P(u)$ el haz de holonomía por u de ∇. Entonces el álgebra de Lie de $\Phi(u)$ es igual al subespacio de $\mathfrak{g}$ (álgebra de Lie de G), generado por todos los elementos de la forma $\Omega_v(X,Y)$, donde $v \in P(u)$ y X y Y son vectores horizontales arbitrarios en v.*

La relevancia de este teorema es que nos garantiza que existe una relación entre el grupo de holonomía de una conexión con su forma de curvatura.

3.4. Holonomía normal

En esta sección definiremos la holonomía normal y daremos el teorema de holonomía normal, el cual dice que la representación de holonomía normal de una subvariedad del espacio euclidiano coincide con la representación de holonomía de un espacio simétrico.

Definición 3.4.1. *Definimos el primer espacio normal, denotado $\mathcal{N}_p^1$, como $\mathcal{N}_p^1 = gen\{\alpha(X,Y) | \, X, Y \in T_pM\} \subset \nu_pM$.*

El espacio $\mathcal{N}_p^1$ es el complemento ortogonal en ν_pM del subespacio lineal de ν_pM que consiste en todos los vectores normales ξ en p para los cuales el operador de forma A_ξ se anula.

Vamos a definir ahora la holonomía normal. Sea M una subvariedad de una forma espacial $\overline{M}^n(\kappa)$, νM el haz normal de M y $\nabla^\perp$ la conexión normal inducida. Si p y q son puntos en M y $\gamma : [0,1] \to M$ es una curva diferenciable por pedazos en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$, el transporte $\nabla^\perp$ paralelo a lo largo de γ induce una isometría lineal $\tau_\gamma^\perp : \nu_pM \to \nu_qM$.

Si tomamos $C(p)$ el conjunto de lazos en p, tenemos la función $\tau^\perp : C(p) \to O(\nu_pM)$ definida como $\gamma \mapsto \tau_\gamma^\perp$. La imagen $\tau^\perp(C(p))$ es un subgrupo de $O(\nu_pM)$. A este subgrupo se le conoce como el **grupo de holonomía normal de M en p.**

Si reemplazamos al espacio $C(p)$ por el espacio $C^\circ(p)$, el grupo resultante es el **grupo de holonomía normal reducida de M en p.**

Las propiedades de la proposición 3.3.6 también son válidas para el grupo de holonomía normal y el grupo de holonomía normal reducida.

Vamos a definir unos campos tensoriales que resultarán ser simétricos en el haz normal de una subvariedad. Sea M una subvariedad de dimensión m de una forma espacial $\overline{M}^n(\kappa)$.

Los polinomios elementales simétricos de n variables $X_1, \ldots, X_n$ denotados como $\sigma_k(X_1,\ldots,X_n)$ para $k=0,\ldots,n$ están definidos como:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(X_1,\ldots,X_n) &= 1\\
\sigma_1(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{1\leq j\leq n} X_j\\
\sigma_2(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{1\leq j<l\leq n} X_jX_l\\
\sigma_3(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{1\leq j<l<i\leq n} X_jX_lX_i\\
&\vdots\\
\sigma_k(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n} X_{j_1}\cdots X_{j_k}
\end{aligned}$$

Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ los eigenvalores de A_ξ. La curvatura media $H_k(\xi)$ de orden $k\in\{1,\ldots,m\}$ con dirección $\xi\in\nu M$ se define como el k-ésimo polinomio elemental simétrico con variables $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ entre la constante $\binom{m}{k}$, es decir,

$$H_k(\xi)=\frac{k!(m-k)!}{m!}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}.$$

Definida de esta forma, obsérvese que H_1 es la curvatura media, es decir, el promedio de las curvaturas principales.

Denotamos por $h_k(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ el campo tensorial simétrico $\mathbb{R}$-valuado en νM obtenido por la polarización de $H_k(\xi)$, es decir,

$$h_k(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\frac{1}{k!}\sum_{\rho=1}^{k}(-1)^{k-\rho}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_\rho\leq k} H_k(\xi_1+\cdots+\xi_{i_\rho}).$$

Supongamos que $h_1,\ldots,h_m$ (o de manera equivalente, $H_1,\ldots,H_m$) son invariantes bajo el $\nabla^\perp$-transporte paralelo, entonces $H_k(\xi(t))$ es constante para cualquier campo vectorial normal paralelo $\xi(t)$ a lo largo de cualquier curva diferenciable por pedazos en M. Como las funciones elementales simétricas de los eigenvalores de $A_{xi(t)}$ son los coeficientes del polinomio característico de $A_{\xi(t)}$, este polinomio no depende de t, por lo tanto $A_{\xi(t)}$ tiene eigenvalores constantes. Por otro lado, si $A_{\xi(t)}$ tiene eigenvalores constantes, entonces $h_1,\ldots,h_m$ y $H_1,\ldots,H_m$ son $\nabla^\perp$-paralelos. A una subvariedad M con esta propiedad se le conoce como **subvariedad con curvaturas principales constantes**.

Las órbitas de s-representaciones son subvariedades con curvaturas principales constantes, como se demuestra en [6], proposición 4.1.6.

Una subclase de la clase de subvariedades con curvaturas principales constantes son aquellas cuyo haz normal es plano. A estas subvariedades se les conoce como **subvariedades isoparamétricas**.

Proposición 3.4.2. *Sea M una subvariedad de una forma espacial $\overline{M}^n(\kappa)$, con curvaturas principales constantes. Entonces para cada $p \in M$, el primer espacio normal $\mathcal{N}_p^1$ es invariante bajo el $\nabla^\perp$-transporte paralelo.*

Demostración. El complemento ortogonal de $\mathcal{N}_p^1$ en $\nu_p M$ está dado por $(\mathcal{N}_p^1)^\perp = \{\xi \in \nu_p M \,|\, A_\xi = 0\}$. Por la definición de subvariedad con curvaturas principales constantes, se tiene que $(\mathcal{N}_p^1)^\perp$ es invariante bajo el $\nabla^\perp$-transporte paralelo, y por lo tanto $\mathcal{N}_p^1$ es invariante bajo el $\nabla^\perp$ transporte paralelo. $\square$

Un conocido resultado de Cartan dice lo siguiente:

Teorema 3.4.3. *M es localmente simétrica si y sólo si el tensor de curvatura es constante bajo transporte paralelo.*

Para la demostración, ver [17].

Por lo tanto, las órbitas de las s-representaciones tienen una propiedad similar a los espacios locamente simétricos. Por un lado, si M es un espacio simétrico y τ es el transporte paralelo a lo largo de una curva c tal que $c(0) = p$, existe una isometría g de M tal que $dg|_p = \tau$, y g es única. Este resultado se le atribuye a Cartan.

Por otro lado, si M' es una órbita de una s-representación, el transporte paralelo normal $\tau^\perp$ a lo largo de una curva c' tal que $c'(0) = p$ tiene la propiedad de que existe una isometría g' de $\mathbb{R}^n$ tal que $g'(M') = M'$ y $dg'|_{\nu_p M} = \tau^\perp$, pero g' en general no es única.

Este último hecho se demostrará en el siguiente capítulo. Un resultado con holonomía normal es el siguiente: diremos que una subvariedad de un espacio euclidiano es completa (full) si no está contenida en ningún subespacio afin propio del espacio ambiente.

Proposición 3.4.4. *Sea G un grupo ortogonal del espacio euclidiano y supongamos que la órbita $G.p$ es full. Entonces la imagen de $(G_p)_\circ$ está contenida, bajo la representación rebanada conexa, en el grupo de holonomía normal en p.*

El siguiente teorema es muy importante, y su demostración puede encontrarse en [19].

Teorema 3.4.5 (de holonomía normal)**.** *Sea M una subvariedad conexa de una forma espacial $\overline{M}^n(\kappa)$. Sea $p \in M$ y sea $(Hol^\circ)^\perp$ el grupo de holonomía normal reducida en p. Entonces $(Hol^\circ)^\perp$ es compacto, existe una única descomposición ortogonal del espacio normal $\nu_p M$ en espacios $(Hol^\circ)^\perp$-invariantes $\nu_p M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$ y existen subgrupos normales $Hol_0, \ldots, Hol_k$ de $(Hol^\circ)^\perp$ tales que:*

1. *$(Hol^\circ)^\perp = Hol_0 \times \cdots \times Hol_k$ (producto directo).*

2. *Hol_i actúa trivialmente en V_j, con $j \neq i$.*

3. *$Hol_0 = \{1\}$ y si $i \geq 1$, entoncces Hol_i actúa irreduciblemente en V_i como la representación de isotropía de un espacio simétrico riemanniano irreducible.*

Si M es una subvariedad del espacio euclidiano, por el teorema de holonomía normal, el grupo de holonomía normal reducida de M actúa en p como una s-representación.

Capítulo 4

Teorema de holonomía de Berger

En este capítulo demostraremos el teorema principal de este trabajo. Dividiremos en dos secciones esta parte. La primera, con algunos resultados previos a la demostración, la segunda con un teorema importante que es la base para resolver el problema, y además se demostrará en esa sección el teorema de holonomía de Berger.

Recordemos que queremos demostrar lo siguiente:

Teorema 4.0.6 (de Holonomía de Berger)**.** *Supongamos que el grupo de holonomía de una variedad riemanniana irreducible M es no transitivo en la esfera. Entonces M es localmente simétrica.*

4.1. Resultados previos

Demostraremos algunos resultados que nos serán útiles posteriormente. Sea G un subgrupo compacto de $SO(n)$, $X \in \mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, v un punto regular y $\xi \in \nu_v(G.v)$. Tomamos la geodésica $\gamma(t) = \exp_v(t\xi)$. El campo de Killing $q \mapsto X(q)$, es un campo de Jacobi si lo restringimos a la geodésica γ, como se vio en el lema 1.1.21. Denotamos como $J_\xi(t)$ a ese campo de Jacobi. Explícitamente, $J_\xi(t) = X(\gamma(t)) = X(\exp_v(t\xi))$. Tenemos entonces que $J_\xi(0) = X(\exp_v(0)) = X(v)$, y $J'_\xi(t) = (X \circ \gamma)'(t) = dX_{\exp_v(t\xi)}(d(\exp_v)_{t\xi}(\xi))$ usando la regla de la cadena. Por lo tanto $J'_\xi(0) = dX_v(\xi)$. Como vimos en el capítulo 1, por 1.1, $dX_v(\xi) = \overline{\nabla}_{X(v)}\xi$, y por la fórmula de Weingarten, tenemos que $\overline{\nabla}_{X(v)}\xi = -A_\xi(X(v)) + \nabla^\perp_{X(v)}\xi$.

Usaremos el siguiente lema cuya demostración se puede revisar en [6].

Lema 4.1.1. *Sea $G \subset SO(n)$ actuando por isometrías en $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p(G.p) = \{X(p)|X \in \mathfrak{m}\}$, donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ es una descomposición de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{l}$ es el álgebra de Lie del subgrupo de isotropía G_p de p. Si $\xi \in \nu_p(G.p)$ y $X \in \mathfrak{m}$, el operador de forma A_ξ de $G.p$ en p con respecto a ξ está dado por*

$$A_\xi X(p) = -(X\xi)^T,$$

donde $(.)^T$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en $T_p(G.p)$.

Recordemos que de la definición 1.2.3, una acción G que actúa sobre X es transitiva si $G.x = X$ para algún $x \in X$

Lema 4.1.2. *Sea G un subgrupo compacto de $SO(n)$ que actúa de manera no transitiva en la esfera y sea v un punto regular. Entonces existe $\xi \in \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$ que no es múltiplo de v, tal que la familia de espacios normales $\nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$ genera a $\mathbb{R}^n$, donde $\gamma(t) = v + t\xi, t \in \mathbb{R}$*

Demostración. Primero veamos que podemos tomar un ξ que no sea múltiplo de v, tal que $\xi \in \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$. Supongamos lo contrario, es decir, $\dim(\nu_v(G.v)) = 1$, entonces $G.v$ sería una subvariedad de codimensión 1 en $\mathbb{R}^n$, además, como G es un subgrupo de $SO(n)$, entonces $G.v \subseteq \mathbb{S}^{n-1}(||v||)$. Por el teorerema de la órbita principal (2.5.1), se tiene que $G.v$ es una subvariedad abierta de $\mathbb{S}^{n-1}(||v||)$. Ahora, como la acción es continua y G es compacto, $G.v$ debe ser compacto en la esfera, esto implica que $G.v = \mathbb{S}^{n-1}(||v||)$ pues $G.v$ es denso en $\mathbb{R}^n$, también por el teorema 2.5.1, y esto contradice la hipótesis de que G es no transitivo en la esfera.

Sea pues $\xi \in \nu_v(G.v)$ no múltiplo de v. Como v es siempre normal a su órbita, por el lema 4.1.1, tenemos que $A_v = -\mathrm{Id}$, donde A_v es el operador de forma de $G.v$. Podemos asumir que $\det(A_\xi) \neq 0$, es decir, que todos los valores propios de A_ξ son diferentes de 0.

Sea $\gamma(t) = v + t\xi$ una geodésica, y sea $\mathbb{V}$ el complemento ortogonal del espacio generado por la familia $\mathbb{N} = \{\nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))|\, t \in \mathbb{R}\}$. Si demostramos que $\mathbb{V} = \{0\}$ concluiríamos la prueba pues esto implicaría que el espacio generado por $\mathbb{N}$ es todo $\mathbb{R}^n$.

Supongamos que $\mathbb{V} \neq \{0\}$. Sea $0 \neq y \in \mathbb{V}$, entonces $y \perp \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $y \in T_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$. Sea $X \in \mathfrak{g}$, tal que $X(v) = y$, y sea $J_\xi(t)$ la restricción de este campo de Killing en la geodésica $\gamma(t)$.

Sabemos que $J_\xi(t)$ es un campo de Jacobi. Por el teorema de existencia y unicidad de campos de Jacobi, si $w = J'_\xi(0)$, entonces $J_\xi(t) = X(v) + tw$. Para cada $\xi \in \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$, como $X(v) + tw \in T_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$, se tiene que $\langle X(v) + tw, \xi\rangle = 0$, pero tenemos que $X(v) = y \perp \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$, por lo que $\langle X(v) + tw, \xi\rangle = \langle X(v), \xi\rangle + t\langle w, \xi\rangle = 0$, y como $\langle y, \xi\rangle = 0$, entonces $t\langle w, \xi\rangle = 0$ por lo que $\langle w, \xi\rangle = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se sigue que $w \perp \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$ cuando $t \neq 0$.

Como $\gamma(0) = v$, que es un punto regular, por la proposición 2.3.2, para t suficientemente pequeño, $\gamma(t)$ es un punto regular para la acción G y por lo tanto, los espacios normales a las órbitas asociadas convergen a $\nu_v(G.v)$, entonces $w \perp \nu_v(G.v)$, por lo que $w \in \mathbb{V}$. Hemos demostrado que si existe un $y \in \mathbb{V}$ no nulo, entonces existe otro $w \in \mathbb{V}$.

Por la forma de las condiciones iniciales, tenemos que $J'_\xi(0) = \nabla^\perp_{X(v)}\xi - A_\xi(X(v))$, como $A_\xi(X(v)) \in \mathbb{V}$ y dado que $X(v)$ es arbitrario, se sigue que $A_\xi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{V}$. Además, como $\mathbb{V}$ es A_ξ-invariante, entonces $\mathbb{V}^\perp$ también es A_ξ-invariante.

Definimos $\mathbb{W}$ como $\mathbb{W} = \mathbb{V}^\perp \cap T_v(G.v)$, y sea $y \in \mathbb{W}$, entonces $A_\xi(y) \in \mathbb{V}^\perp$ y por otro lado $A_\xi(y) = -(\nabla_y \xi)^T \in T_v(G.v)$, por lo tanto $A_\xi(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W}$.

Sea $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $Y(v) \in \mathbb{W}$, entonces el campo de Jacobi $\bar{J}_\xi(t)$ a lo largo de la geodésica $\gamma(t)$ inducido por Y, tiene condiciones iniciales $\bar{J}_\xi(0) = Y(v)$ y $\bar{J}'_\xi(0) = \nabla^\perp_{Y(v)}\xi - A_\xi(Y(v))$, ambos en $\mathbb{V}^\perp$. Por el teorema de existencia y unicidad de campos de Jacobi, $\bar{J}_\xi(t) = Y(v) + (\nabla^\perp_{Y(v)}\xi - A_\xi(Y(v)))$, por lo que $\bar{J}_\xi(t) \perp \mathbb{V}$.

Sean $X_1, \ldots, X_k$ elementos de $\mathfrak{g}$ tales que $\{X_1(v), \ldots, X_k(v)\}$ es una base ortonormal que diagonaliza la restricción de A_ξ a $\mathbb{V}$. Entonces $J^i_\xi(t) = (1 - t\lambda_i)X_i(v) = X_i(v) - (t\lambda_i)X_i(v)$ es el campo de Jacobi relacionado a X_i, donde λ_i es el valor propio de A_ξ asociado a $X_i(v)$, con $i = 1, \ldots, k$. Como λ_i es no nulo, tenemos que

$$\langle J^i_\xi(1/\lambda_i), X_j(v)\rangle = \langle X_i(v) - (1/\lambda_i)\lambda_i X_i(v), X_j(v)\rangle = 0 \quad \forall\, i, j.$$

Tomamos $Z \in \mathfrak{g}$ arbitrario y escribimos $Z = X + Y$ donde X es una combinación lineal de $X_1(v), \ldots, X_k(v)$ y $Y(v) \in \mathbb{W}$. Se tiene que el campo de Jacobi inducido por Z a lo largo de $\gamma(t)$ en $t = 1/\lambda_i$ es perpendicular a $X_i(v)$. Como Z es arbitrario, tenemos que $X_i(v) \in \nu_{\gamma(1/\lambda_i)}(G.\gamma(1/\lambda_i))$ que es una contradicción a menos que $\mathbb{V} = \{0\}$. $\square$

El siguiente lema será de mucha utilidad.

Lema 4.1.3. *Sea $g_t : S \to M$, $|t| < \varepsilon$ una familia diferenciable de subvariedades totalmente geodésicas de una variedad riemanniana M. Si el campo*

$q \mapsto \frac{\partial}{\partial t} g_t(q)$ es perpendicular a la subvariedad S_t entonces $g_t : S_0 \to S_t$ es una isometría, donde S_t es S con la métrica inducida por g_t.

Demostración. Si γ_w es una geodésica de S_0 que pasa por q, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\langle g_{t*q}(w), g_{t*q}(w)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} g_t(\gamma_w(s)), \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} g_t(\gamma_w(s))\rangle,$$

por la regla del producto, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} g_t(\gamma_w(s)), \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} g_t(\gamma_w(s))\rangle &= 2\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} g_t(\gamma_w(s)), g_{t*q}(w)\rangle \\ &= 2\langle \frac{D}{ds}|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t} g_t(\gamma_w(s)), g_{t*q}(w)\rangle,\end{aligned}$$

la última igualdad por el lema de simetría. Ahora, como el campo $\eta_t : q \mapsto \frac{\partial}{\partial t} g_t(q)$ es siempre perpendicular a S_t, tenemos entonces

$$\frac{D}{ds}|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t} g_t(\gamma_w(s)) = \frac{D}{ds}|_{s=0}\eta_t(\gamma_w(s)) = A_{\eta_t} g_{t*q}$$

donde A es el operador de forma de S_t. Por lo tanto, tenemos que

$$2\langle \frac{D}{ds}|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t} g_t(\gamma_w(s)), g_{t*q}(w)\rangle = -2\langle A_{\eta_t} g_{t*q}(w), g_{t*q}(w)\rangle = 0.$$

Entonces $\langle g_{t*q}(w), g_{t*q}(w)\rangle$ no depende de t y por lo tanto es una isometría pues $g_0 : S_0 \to S_0$ es la identidad. □

A continuación, demostraremos un lema que nos dará condiciones necesarias para que una variedad riemanniana M sea localmente simétrica.

Lema 4.1.4. *Sea M una variedad riemanniana con la propiedad de que para cada $p \in M$, cada transformación de holonomía de T_pM se extiende vía la exponencial a una isometría local. Entonces M es localmente simétrica.*

Demostración. Recordemos que por el lema 1.1.24, tenemos que M es localmente simétrica si y sólo si, dada $L : T_pM \to T_qM$ una isometría local que preserva la curvatura, entonces hay una isometría ϕ de vecindades normales de p y q tal que $d\phi_p = L$.

Ahora, podemos asumir que el grupo de holonomía $Hol(p)$ actúa irreduciblemente en T_pM. Consideremos $\mathfrak{L}$ el álgebra de Lie de los campos de Killing definidos en una vecindad de $p \in M$. Así, $\mathfrak{L}(p)$ será un subespacio de T_pM.

Dado $\tau \in Hol(p)$ tenemos que $\tau(\mathfrak{L})(p) \subset \mathfrak{L}(p)$; si $q \in M$ está suficientemente cerca de p, tenemos que $Hol(q)$ no fija p en el siguiente sentido: sea $\exp_q(V) = p$ entonces para todo $\tau \in Hol(p)$, se tiene que $\exp_q(\tau(V)) \neq p$. Entonces $\mathfrak{L}(p)$ no puede ser trivial y como el grupo de holonomía actúa irreduciblemente en T_pM tenemos que $\mathfrak{L}(p) = T_pM$ y por lo tanto M es localmente un espacio homogéneo.

Sea $\mathcal{N}_p$ el normalizador en $\mathfrak{so}(n)$, del álgebra de isotropía de Lie $\mathfrak{hol}_p$ de $Hol(p)$, como M es localmente homogéneo, podemos considerar la función $g : \mathfrak{L} \to \mathcal{N}_p$, tal que $g(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_t^{-1}(\exp(tX))_{*p} = (\nabla X)_p$, donde τ_t denota el transporte paralelo a lo largo de la curva $\exp(tX)_p$ y como las isometrías preservan holonomía, se tiene que $g(X) \in \mathcal{N}_p$.

Si X es un campo de Killing en el álgebra de isotropía $\mathfrak{L}_p$ entonces como $g(X) = (\nabla X)_p$, se sigue que $g(X) = X$. Ahora, si $\alpha \in \mathfrak{hol}_p$, tenemos que $\alpha(p) = 0$, es decir, $\alpha \in \mathfrak{L}_p$, por lo tanto, tenemos las siguientes inclusiones: $\mathfrak{hol}_p \subset \mathfrak{L}_p \subset \mathcal{N}_p \subset \mathfrak{so}(T_pM)$.

Consideremos entonces las siguientes descomposiciones:

$$N_p = \mathfrak{hol}_p \oplus (\mathfrak{hol}_p)^\perp \qquad N_p = \mathfrak{L}_p \oplus (\mathfrak{L}_p)^\perp.$$

Como $\mathfrak{hol}_p$ actúa trivialmente en $(\mathfrak{hol}_p)^\perp$, por lo tanto actúa trivialmente en $(\mathfrak{L}_p)\perp$, se sigue que $Hol(p)$ actúa trivialmente en $\mathcal{N}_p^\perp$.

Sea $\mathfrak{m} \simeq T_pM$ el subespacio complementario $\mathrm{Ad}(Hol(p))$-invariante de $\mathfrak{L}_p$ en $\mathfrak{L}$, y sea $\tilde{g} : \mathfrak{m} \to (\mathfrak{L}_p)^\perp$ la proyección de $(\mathfrak{L}_p)^\perp$ de la restricción $g|_{\mathfrak{m}}$. Como $Hol(p)$ actúa irreduciblemente en $\mathfrak{m} \simeq T_pM$ y trivialmente en $\mathfrak{L}_p^\perp$, se tiene que $\tilde{g} = 0$, concluyendo que $g(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L}_p$. Entonces, para todo $v \in T_pM$ existe un único $X \in \mathfrak{L}$ tal que $g(X) = 0$ y $X(p) = v$; por lo tanto el transporte paralelo a lo largo de la geodésica $\exp(tX)_p$ está dado por $(\exp(tX))_*$, la diferencial de $\exp(tX)$. Por el lema 1.1.24, tenemos que M es localmente simétrica. $\square$

Sea M una variedad riemanniana, $p \in M$ y sea $\rho > 0$ el radio de inyectividad en p. Para cualquier $v \in T_pM$, definimos a $\mathcal{F}_v$ como la familia de subespacios de T_pM tales que, para cada $W \in \mathcal{F}_v$, $v \in W$ y $\exp_p(W_\rho)$ es una subvariedad totalmente geodésica de M localmente simétrica, donde W_ρ es la bola abierta de radio ρ en W.

Con la notación anterior, enunciaremos un resultado que será necesario para demostrar el teorema de holonomía de Berger.

Lema 4.1.5. *Sea M una variedad riemanniana, $p \in M$ y ρ el radio de inyectividad en p. Supongamos que dada cualquier $v \in \Omega$, donde Ω es un* *subconjunto denso de la bola euclidiana $B_\rho^E(0)$, la familia $\mathcal{F}_v$ genera a T_pM. Entonces la simetría geodésica s_p en p es una isometría de la bola geodésica $B_\rho(p)$ de M.*

Demostración. Sea $v \in \Omega$, $W \in \mathcal{F}_v$. Por la definición de $\mathcal{F}_v$, tenemos que $N = \exp_p(W \cap B_\rho^E(0)$ es una subvariedad totalmente geodésica en M y por lo tanto contiene a la geodésica $\gamma_v(t)$, la geodésica tal que $\gamma'(t) = v$.

Tenemos que el operador de Jacobi $R(., \gamma_v')\gamma_v'$ es autoadjunto, por lo que se tiene que $\langle R(X, \gamma_v')\gamma_v', Y\rangle = \langle R(Y, \gamma_v')\gamma_v', x\rangle$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Como N es localmente simétrica, el operador de Jacobi es diagonalizable en un marco paralelo a lo largo de $\gamma_v(t)$. Entonces, para cualquier $w \in T_{\gamma_v}M$, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\langle (s_p)_{*_{\gamma_v(1)}} \exp(tw), (s_p)_{*_{\gamma_v(1)}} \exp(tw)\rangle = 2\langle D_t^2 \exp(-tw), (s_p)_{*_{\gamma_v(1)}} \exp(tw)\rangle$$

Por la ecuación de Jacobi, el primer término se anula, por lo que $(s_p)_{*_{\gamma_v(1)}}$ es una isometría. Como Ω es denso en $B_\rho^E(0)$, se concluye que la simetría geodésica s_p en p es una isometría de la bola geodésica $B_\rho(p)$ de M. $\square$

4.2. Demostración del teorema 4.0.6

En esta sección demostraremos dos cosas, una primera proposición, en la cual construiremos una subvariedad totalmente geodésica de M, para después concluir que esta variedad es totalmente geodésica, así como el teorema de holonomía de Berger, el cual será resultado de todos los lemas y teoremas previos de este capítulo.

Proposición 4.2.1. *Sea M una variedad riemanniana, $p \in M$ y sea ρ el radio de inyectividad en p. Supongamos que el grupo de holonomía Hol de M en p actúa de manera irreducible en T_pM. Sea $v \in T_pM$ y $\nu_v(Hol.v)$ el espacio normal en v de la órbita de holonomía $Hol.v$ en T_pM. Definimos $N^v = \exp_p(\nu_v(Hol.v) \cap B_\rho^E(0))$. Entonces, para toda $0 \neq v \in T_pM$, se tiene que:*

1. *N^v es una variedad totalmmente geodésica de M. Además, el grupo de holonomía Hol^v de N^v en p está contenido en la imagen del subgrupo de isotropía conexo $(Hol_v)^\circ$, bajo la representación rebanada.*

2. *El grupo de holonomía normal $Hol^\perp$ de $Hol.v$ en v actúa por isometrías en N^v de la siguiente manera: cualquier $g \in Hol^\perp$ es la diferencial de una isometría de N^v, la cual fija a p.*

3. N^v es localmente simétrica.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{R}$ la familia de tensores de curvatura algebraicos de T_pM, obtenidos vía el pullback en p, dados por el teorema 3.3.18, la cual genera a $\mathfrak{hol}$ el álgebra de Lie de Hol. Tenemos que $\xi \in \nu_v(Hol.v)$ si y sólo si $\langle \mathfrak{hol}(v), \xi \rangle = 0$, si y sólo si $0 = \langle \bar{R}(X,Y)v, \xi \rangle = \langle \bar{R}(v,\xi)X, Y \rangle$ para todo $X, Y \in T_pM$ y para todo $\bar{R} \in \mathcal{R}$, por lo tanto $\bar{R}(v,\xi) = 0$ para todo $\bar{R} \in \mathcal{R}$.

Tomamos otro elemento $\eta \in \nu_v(Hol.v)$, si $\bar{R} \in \mathcal{R}$, por la identidad de Bianchi (1.1.15) iii), tenemos que $\bar{R}(\xi,\eta)v = \bar{R}(v,\eta)\xi + \bar{R}(\xi,v)\eta = 0$. Como los dos términos de la suma se anulan por lo anterior, tenemos que $\bar{R}(\xi,\eta)$ pertenece al álgebra de isotropía $\mathfrak{hol}_v$ y $\bar{R}(\xi,\eta)\nu_v(Hol.v) \subset \nu_v(Hol.v)$. Se tiene por lo anterior entonces que

$$\bar{R}(\nu_v(Hol.v), \nu_v(Hol.v))\nu_n(Hol.v) \subset \nu_v(Hol.v)$$

para todo $\bar{R} \in \mathcal{R}$.

Tenemos entonces que se cumplen las hipótesis de teorema de Cartan 1.1.18; por lo tanto N^v es totalmente geodésica.

Sea $\mathcal{R}^v$ una subfamilia de $\mathcal{R}$, obtenida haciendo pullback de los tensores de curvatura en p de M, pero sólo usando curvas contenidas en la subvariedad N^v. El álgebra de Lie de Hol^v está dada por el conjunto generado por $\bar{R}(\xi,\eta)|_{\nu_v(Hol.v)}$ donde $\bar{R} \in \mathcal{R}^v$ y $\xi, \eta \in \nu_v(Hol.v) = T_pN^v$. Pero por lo anterior $\bar{R}(\xi,\eta)$ pertenece al álgebra de isotropía en v. Esto quiere decir que el grupo de holonomía Hol^v fija a v. Se sigue entonces que el álgebra de Lie de Hol^v está contenido en la imagen del álgebra de isotropía $\mathfrak{hol}_v$ de Hol en v, bajo la representación rebanada, como queríamos demostrar.

2. Sea $v \in T_pM$ y c una curva $c : [0,1] \to Hol.v$ tal que $c(0) = v$, y sea $\tau_t^\perp$ el transporte paralelo en la conexión normal a lo largo de $c|_{[0,1]}$. Entonces $g_t : \nu_v(Hol.v) \cap B_\rho^E(0) \to M$ definida por $g_t = \exp_p \circ \tau_t^\perp$ es una familia suave de subvariedades totalmente geodésicas. Queremos demostrar que el campo $X_t = \frac{\partial}{\partial t} g_t$ es siempre perpendicular a N^v. Como $c(0) = v$, podemos reemplazar todas las v por $c(t)$ y analizar el caso donde $t = 0$.

Vamos a calcular $X_0(\xi)$, donde $\xi \in \nu_v(Hol.v) \cap B_\rho^E(0)$. Sea $\gamma_\xi(s)$ una geodésica en M, entonces $X_0(s\xi)$ es un campo de Jacobi a lo largo de esta geodésica, con condiciones iniciales $X_0(0) = 0$ y $X_0'(0) = \nabla_0^\perp \xi - A_\xi(c'(0)) = -A_\xi(c'(0))$, donde $\nabla_0^\perp \xi$ se anula pues es la derivada covariante normal, y A es el operador de forma de $Hol.v$.

Ambas condiciones iniciales son perpendiculares a $T_pN^v = \nu_v(Hol.v)$, y como ξ es arbitrario, X_0 es siempre perpendicular a N^v. Por el lema 4.1.3, $g_t : N^v \to N^{c(t)}$ es una isometría. Tomando lazos arbitrarios en $Hol.v$, por

v, por el inciso anterior y por 3.4.4 obtenemos que el grupo de holonomía normal actúa por isometrías en N^v. Por lo tanto $\tau_0^\perp \in Hol^\perp$, y se sigue que $\exp \circ \tau^\perp$ es una isometría.

3. Sea $v \in T_pM$ y sea $c(t)$ una curva en N^v tal que $c(0) = p$. El transporte paralelo $\tau_{c(t)}$ en M a lo largo de $c(t)$ manda el grupo de holonomía $Hol(p)$ de M en p al grupo de holonomía $Hol(q)$ de M en $q = c(1)$ y por lo tanto manda de manera isométrica $Hol(p).v$ en $Hol(q).(\tau_{c(t)}(v))$. Por lo tanto, $\tau_{c(t)} : T_pN^v \to T_qN^{\tau_{c(t)}(v)}$ está bien definida.

Como N^v es totalmente geodésica, se sigue que $T_qN^{\tau_{c(t)}(v)} = T_qN^v$, por lo que N^v y $N^{\tau_{c(t)}(v)}$ coinciden en una vecindad de q. Entonces cada transformación de holonomía de N^v en q se extiende vía la exponencial a una isometría local, y por el lema 4.1.4, se sigue que N^v es localmente simétrica. □

Ahora tenemos todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema 4.0.6.

Demostración del teorema de holonomía de Berger. Sea $p \in M$ y sea $\mathcal{O}$ el conjunto de puntos regulares de T_pM. Entonces $\mathcal{O}$ es abierto y denso.

Como el grupo de holonomía es no transitivo en la esfera, por el lema 4.1.2, dado $v \in \mathcal{O}$ existe $\gamma_\xi(t) = v + t\xi$ en el espacio normal de $Hol.v$ en v que no pasa por el origen, tal que los espacios normales de órbitas de Hol por puntos de γ_ξ contienen a v y generan a T_pM. Se satisface entonces las hipótesis del lema 4.1.5, tomando como $\mathcal{F}_v = \{\nu_{\gamma_\xi(t)}(Hol.\gamma_\xi(t))\}$ y por la proposición 4.2.1, se sigue que M es localmente simétrica en p. □

Bibliografía

[1] M. P. do Carmo; *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[2] B. O'Neill; *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.

[3] R. Berlanga, L. Hernández-Lamoneda, A. Sánchez-Valenzuela; *Introducción a la geometría de grupos de Lie*, notas del VI taller de verano en sistemas dinámicos, CIMAT, Guanajuato 1997.

[4] M. M. Alexandrino, L. Biliotti, R. H. L. Pedrosa; *Lectures on isometrics actions*, XV escola de geometria diferencial, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

[5] C. Olmos; *A geometric proof of the Berger Holonomy Theorem*, Annals of Mathematics, 161 (2005), 579-588.

[6] J. Berndt, S. Console, C. Olmos; *Submanifolds and holonomy*, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[7] S. Kobayashi, K. Nomizu; *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, 1963.

[8] T. Brocker, T. tom Dieck; *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, 1985.

[9] S. Helgason; *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, American Mathematical Society, 2001.

[10] J. M. Lee; *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2003.

[11] P. W. Michor; *Topics in Differential Geometry*, Springer, 2008.

[12] V. Guillemin, A. Pollack; *Topología diferencial*, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[13] C. Prieto; *Topología básica*, Fondo de cultura económica, 2003.

[14] J.R. Munkres; *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[15] W. Ambrose, M. Singer; *A Theorem on Holonomy*, American Mathematical Society, vol. 75, no. 3, pp. 428-443, 1953.

[16] J. A. Álvarez López, E. García-Río; *Differential Geometry; G-structures defined on pseudo-Riemannian manifolds*, Proceedings of the VIII International Colloquium, Santiago de Compostela, Spain, 2008.

[17] K. Maurin; *The Riemann Legacy: Riemannian Ideas on Mathematics and Physics*, springer-science+bussines media, 1997.

[18] C. Olmos, C. Sánchez; *A geometric characterization of the orbits of s-representations*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 195-202, Berlin, 1991.

[19] C. Olmos; *The Normal Holonomy Group*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 110, número 3, pp. 2013-218, 1990.

[20] J. Simons, *On the transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math. 76 (1962), 213–234.