



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**POSIBILIDAD DE
VARIABLES OCULTAS FACTUALES
EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

P R E S E N T A:

NATALIA SÁNCHEZ KUNTZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR
2015

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Alumno

Apellido Paterno: Sánchez
Apellido Materno: Kuntz
Nombre(s): Natalia
Teléfono: 56584582
. Universidad Nacional Autónoma de México
. Facultad de Ciencias
Carrera: Física
Número de Cuenta: 30459284-9

Datos del Tutor

Grado: Dr.
Nombre(s): Eduardo
Apellido Paterno: Nahmad
Apellido Materno: Achar

Datos del Sinodal 1

Grado: Dr.
Nombre(s): Ramón
Apellido Paterno: López
Apellido Materno: Peña

Datos del Sinodal 2

Grado: Dr.
Nombre(s): Carlos Francisco
Apellido Paterno: Pineda
Apellido Materno: Zorrilla

Datos del Sinodal 2

Grado: Dr.
Nombre(s): Elías
Apellido Paterno: Okón
Apellido Materno: Gurvich

Datos del Sinodal 2

Grado: Dr.
Nombre(s): Pablo
Apellido Paterno: Barberis
Apellido Materno: Blostein

Datos del Trabajo Escrito

Título:	Posibilidad de Variables Ocultas Factuales en la Mecánica Cuántica
Número de Páginas:	76 p
Año:	2015

Índice general

Agradecimientos	V
Introducción	VII
1. Realismo	1
1.1. + Localidad	1
1.1.1. EPR	2
1.1.2. Bell	3
1.1.3. Peres	4
1.2. + No-Contextualidad	5
1.2.1. Kochen-Specker	5
1.2.2. GHZ	6
1.3. Salto de No-contextualidad a Localidad	7
2. Realismo Factual	11
2.1. + Factualidad	12
2.1.1. Realidad vs. Teoría	13
2.1.2. Factualidad y Ontología	17
2.2. Predicciones	17
2.2.1. Experimento del Gato de Schrödinger	18
2.2.2. Mediciones en el Marco Factual	22
2.2.3. Experimento de la Desigualdad de Bell	24
2.2.4. Experimento de Bell en el Marco Factual	29
2.3. Salto de Factualidad a No-Contextualidad	43
3. Variables Ocultas Factuales	45
3.1. Teoremas de Imposibilidad	45
3.2. Implicaciones	47
3.2.1. Sobre el Objeto	47
3.2.2. Sobre la Medición	49
3.2.3. Elección en el Marco Factual	52

3.3. Implicaciones del Libre Albedrío	53
4. Conclusiones	55
4.1. Realismo	55
4.2. Factualidad y Experimentos	56
4.3. Libertad de Elección	59
A.	61
A.1. Valor Esperado según Variables Ocultas	61
A.2. Valor Esperado de la Correlación	62
A.3. Suma de las Correlaciones en la Tabla de Peres	63
A.4. Cálculo de Eigenvalores de los Operadores de GHZ	63
A.5. Cálculo de Eigenvalores de los Operadores de Aravind	64
A.6. Cálculo de Eigenvalores de los Operadores de Mermin	66
B.	67
B.1. Demostración de la Desigualdad Factual de Bell	67
B.2. Valor Esperado de la Correlación en un Sistema Preparado	67
B.3. Estadística Inducida por la Postselección	68
C.	71
C.1. Comentario sobre el Segundo Postulado de la Mecánica Cuántica	71
D.	73
D.1. Herramientas de la Teoría	73

Agradecimientos

¿Es en esta sección donde uno da rienda suelta a su meloso ser? Si es así, estoy en el lugar correcto.

Hay varios tipos de lectores: los que no leerán los agradecimientos, los que sólo leerán los agradecimientos, los que se aplicarán a leer cada página de esta tesis (mi mamá), los que leyeron este trabajo antes de ser publicado y los que participaron en su escritura. Esto es para todos ellos.

Comenzaré por una persona importantísima en la realización de este trabajo: querido Eduardo, gracias por tu paciencia, escucha, guía, conocimiento, confianza, libros, horas. Gracias por tu integridad, gracias por tu labor como investigador y por dejarme ser una pequeña parte de esta labor. Gracias por impulsarme en esta primera faceta de mi labor como investigadora.

Hay otras piezas fundamentales en la elaboración de este trabajo, que son también piezas fundamentales en mi vida. Enormemente agradecida con el apoyo para la construcción de ambos (el trabajo y mi vida), guardo en el cajón corazón todas las pláticas con mi madre que me ayudaron a aclarar la mente y ponerla en papel. Tener una mamá atenta, cariñosa, apoyadora y etcéteras que no podría enlistar me llena de gratitud y amor espontáneo. En esta misma línea de sangre está mi papá, el coeditor de mi vida, proveedor de pláticas, cuestionamientos y apapachos. Gracias papá por tu interés, abrigo y cercanía.

Gracias también a Roberto, otra guía y ejemplo de vida. Gracias a María por cuidar de mi querido padre.

Gracias a los que leyeron este trabajo antes de ser publicado. Carlos, Elías, Pablo y Ramón: cada uno de sus comentarios fue importante para ampliar el panorama de la discusión en mi cabeza y para analizar el tema desde otras perspectivas. Espero que este intercambio pueda continuar en un futuro.

Gracias mamá, por aplicarte a leer cada página de esta tesis. Gracias papá por encontrar el tiempo para ello. Gracias a Daria, que me muestra con su risa y sus ojos la jovialidad que vive en mí: te amo topo y no te culpo por no leer ni una página más de esta tesis. A mi abuela Ana por mostrarme otro lado de la vida, por su cariño; a mi abuelo Carlos, por su ligereza y humor. A todos los Ficker, por el afecto. A mi bisabuela Mariquita, namasté por la luz y el brío. A

mi abuela Tita, por ser el pilar de una familia, por ser una chingona. Marcela, Santos, Mónica, Fer, Xime, Valentina, los quiero %#es.

A los de antaño: Eli mi vida, Fabian corazón, Fer querida, Andrea hermosa, Pili ¡mi amor!, Rubén cariño. A Emilio, a Adri, a Nirmal, a Luis, a Biz, a Emilian, a la sangha adorada. A mis maestros. A los más nuevos: Andrés. A los físicos: Juan, Mario, Diana, Adair. A ella: Tania, chulita, gracias por tu cercanía. A los estudiantes, al brillo en su mirada. A los corazones grandes, a las mentes abiertas. A los que juegan a mover el horizonte, a reinventar la armonía, a mi perra Rima. A la perra vida. A las que me ayudan a sobreponerme a tanta perrada: Fátima, Raquel, Lilian, Julieta, Tania (sí, otra Tania), gracias por todas las palabras dichas y los oídos prestados. Gracias a la dicha, a la risa. Gracias a la ciencia y a la fuerza de gravedad.

A los que no leyeron los agradecimientos, por su practicidad, gracias.

Introducción

Houston, tenemos un problema. Houston, ¿me oyes?

¿Se perdió el mensaje, o nunca llegó? ¿Qué pasa? ¿Y si Houston me oyó antes de que yo le llamara y viene camino a salvarme? Tal vez por eso no contesta. Definitivamente, Houston, tenemos un problema.

La idea de que Houston supiera de la llamada de Alicia antes de que Alicia le llamara, no sólo contradice nuestra intuición, sino que paraliza la posibilidad de describir un universo causal y congruente, donde lo único que se pide es que la causa preceda al efecto. Si no tomamos esta suposición como base, toda la física, desde que se llamaba filosofía, sería un instrumento ocioso y sin materia de realidad.

Primer axioma: la causa precede al efecto.

Ahora, si la señal que va de Alicia a Houston viaja más rápido que la velocidad de la luz, según un tercer observador, Octavio, que se mueve con velocidad ν respecto a Alicia, el mensaje llegó antes de haber sido emitido. Como nada le impide a Octavio moverse a cierta velocidad ν respecto a Alicia y ya quedamos que el efecto (mensaje recibido) tiene que suceder después de la causa (mensaje emitido), entonces la señal no puede ir más rápido que la velocidad de la luz. NADA puede ir más rápido que la velocidad de la luz. Esta idea es la columna vertebral de la teoría de relatividad¹.

De la idea de causalidad, surge la idea de localidad. Un fenómeno que ocurre en un punto dado del mapa espacio-temporal no puede tener influencia sobre un punto que se encuentra más lejos que lo que un viaje a la velocidad de la luz le permitiría alcanzar.

Localidad y causalidad son, pues, dos conceptos fundamentales que permean a la realidad. Digamos que es el requerimiento mínimo para mantener la esperanza de poder describir al universo y sus componentes².

¹De un análisis riguroso de la teoría de relatividad suele concluirse que es la información lo que no puede ir más rápido que la velocidad de la luz.

²Gran cantidad de trabajo se ha hecho desde la formulación de la mecánica cuántica y la relatividad para conciliar a éstas dos teorías. Se ha argumentado que la mecánica cuántica, mientras que es no-local es causal, apelando a que en esta teoría no hay transmisión de

Pero entonces llega la mecánica cuántica, y altanera se abre paso violando a la relatividad en sus fundamentos. No es local. No es causal. Las probabilidades en un lado afectan instantáneamente las probabilidades en un lugar lejano e inalcanzable, incluso para la luz. ¿La cuántica, será un modelo de nuestro universo? ¿Es posible completar la teoría para que sea local?

Suponer que es un modelo de nuestro universo significa que las predicciones de la teoría tendrían un reflejo fiel en la práctica, y viceversa, que cualquier fenómeno observado en nuestro universo podría ser descrito por el modelo. Los físicos parten de la idea de que sí es un modelo fiel y observan las implicaciones de ello.

En particular Kochen, Specker, Bell y Peres hacen un detenido análisis de este supuesto, añadiendo no-contextualidad o localidad según el caso, llegando a contradicciones lógicas. Estas contradicciones se muestran en los teoremas de imposibilidad de variables ocultas locales y en los teoremas de imposibilidad de variables ocultas no-contextuales, la desigualdad de Bell siendo uno de los más importantes de éstos.

Retomo estos teoremas de imposibilidad para analizarlos y exponerlos primero y para agregar otro supuesto a la teoría después, buscando que mediante este supuesto, *la factualidad*, se recupere la localidad y la no-contextualidad en la mecánica cuántica. Que mediante este supuesto se cumplan las desigualdades de Bell.

Visto de otra forma, ¿qué pasa si añadimos al supuesto de realismo+1 ($1 = \{\text{localidad, no-contextualidad}\}$) el supuesto de la factualidad? ¿Qué sucede con los análisis de Kochen-Specker, Bell y Peres? ¿Qué sucede con las predicciones de la mecánica cuántica? ¿Qué sucede con la libertad de elección?

información a velocidades superlumínicas. En el marco de estas discusiones se engloba un análisis puntual de la teoría de relatividad para definir conceptos como localidad, micro-causalidad, macro-causalidad, invariante de Lorentz, entre otros, y ver qué tan “relativista” es la mecánica cuántica, en qué sentido sí lo es, en qué sentido no, y en qué sentido puede entonces ésta ser una descripción aceptable del universo y sus componentes. Se ha demostrado que no-localidad no necesariamente implica no-causalidad. Conociendo poco sobre esta demostración y no estando satisfecho con los argumentos que hasta el momento he comprendido, en este trabajo adopto la postura de que la localidad es la base de la causalidad, dejando la discusión pendiente para otro momento.

Capítulo 1

Realismo

Comenzamos por definir realismo como todo aquello que existe previo a ser observado e independiente a las características de dicha observación.

1.1. + Localidad

La localidad está definida a partir de la velocidad de la luz. Si en una teoría las causas están dentro del cono de luz del efecto que generan, esa teoría es local. El cono de luz de un objeto es la frontera física que lo separa del resto del universo, ésta frontera es el límite espacial que puede alcanzar tal objeto viajando a la velocidad de la luz.

Vayamos al origen de la teoría de variables ocultas. Esta teoría emerge de la necesidad de explicar correlaciones no-locales entre dos o más objetos físicos pues, aparentemente, medir en un punto del espacio afecta instantáneamente las predicciones que se pueden hacer sobre otro punto, ajeno y distante. Para no tener que asumir que existe una comunicación instantánea, se asume que los resultados en el otro punto estaban ya determinados y el hecho de que antes de la medición no se pudieran predecir se toma como producto de la ignorancia de ciertas variables: las variables ocultas.

En la física se puede ver como sigue: tomamos un par de partículas, cada una con dos posibles proyecciones de espín, $|0\rangle$ y $|1\rangle$ ¹ preparadas en el estado inicial

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle],$$

al tiempo t_0 este estado describe a las dos partículas. Éstas se alejan entre sí.

¹Al medir la componente z de espín resulta que $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ y que $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$, por ello en la literatura suele usarse $|+\rangle$ de forma equivalente a $|0\rangle$ y $|-\rangle$ de forma equivalente a $|1\rangle$.

Transcurrido un tiempo tal que la separación entre ellas sea de tipo espacial, se mide el espín de la partícula A en dirección \hat{a} . En ese instante se puede saber con exactitud el valor del espín de la partícula B en la dirección $-\hat{a} = \hat{b}$. Antes de medir en A, no había ninguna certeza del resultado en B. Cuesta trabajo pensar que el resultado en B se determinó en el instante en el que se midió en A. Es más natural sugerir que este resultado ya estaba determinado en B como un parámetro real, independiente de las mediciones en A. El realismo de este resultado estaría contenido en las sugeridas variables ocultas.

Las variables ocultas complementarían entonces a la física de probabilidades con dos propiedades fundamentales: realismo y localidad.

1.1.1. EPR

EPR es un sujeto que en realidad son tres. Einstein, Podolsky y Rosen [11]. Ellos cuestionan la completez de la mecánica cuántica a partir de la noción de que la función de onda no tiene toda la información que se puede conocer sobre un sistema. Construyen un argumento utilizando operadores de posición y momento sobre un sistema de dos partículas.

Bohm y Aharonov [1] se basan en este argumento para construir un ejemplo más sencillo de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$ y Bell [3] a su vez toma el ejemplo de Bohm y Aharonov para desarrollar “completando” a la mecánica cuántica con variables ocultas locales, para ver si al agregarlas a la teoría se obtienen las mismas predicciones que en la mecánica cuántica.

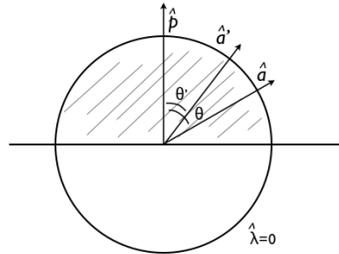
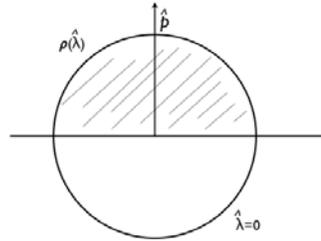
El procedimiento es el que sigue:

Supone que la partícula A tiene una orientación de espín determinada \hat{p} , y asume que las variables ocultas $\hat{\lambda}$ son vectores unitarios con distribución $\rho(\hat{\lambda})$ en el hemisferio en el que apunta \hat{p} .

Plantea que el resultado de una medición sea $\text{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda})$, con $\text{sgn}()$ la función “signo” y \hat{a}' un vector que queda por determinarse. Integra sobre el área de distribución de $\hat{\lambda}$ y determina el valor esperado de una medición,

$$\int_{\Lambda} d\hat{\lambda} \rho(\hat{\lambda}) \text{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}) = \pi - 2\theta'$$

donde θ' es el ángulo entre \hat{p} y \hat{a}' (desarrollo en el apéndice A.1.). Este valor esperado, normalizado, da $1 - \frac{2\theta'}{\pi}$.



Ahora compara este resultado con el resultado que predice la mecánica cuántica para el valor esperado de medir el espín de la partícula A en la dirección \hat{a} .

Al suponer que la orientación de espín de la partícula es \hat{p} , el valor esperado será

$$\langle \hat{a} \cdot \sigma \rangle = \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre \hat{p} y \hat{a} .

De aquí concluye que \hat{a}' se deberá obtener de \hat{a} girándolo hacia \hat{p} hasta que $\cos \theta = 1 - \frac{2\theta'}{\pi}$, y así concordarán las predicciones.

1.1.2. Bell

Bell [4] continúa con el supuesto de la existencia de variables ocultas, reales y locales, para examinar si las predicciones del valor esperado de un par de mediciones se conservan.

El experimento que él plantea va como sigue [5]: Se tiene un par de partículas de espín $\frac{1}{2}$ unidas en un estado inicial de momento angular interno 0. Este sistema se divide en las dos partículas, que, por conservación de momento angular interno, adquirirán orientaciones de espín opuestas. Así, se cumplen las siguientes relaciones entre las mediciones de espín:

$$\begin{aligned} A(\hat{a}, \lambda) &= \pm 1 & B(\hat{b}, \lambda) &= \pm 1 \\ A(\hat{a}, \lambda) &= -B(\hat{a}, \lambda) \end{aligned}$$

donde $A(\hat{a}, \lambda)$ es una medición en la partícula A , en la que el detector tiene orientación \hat{a} , $B(\hat{b}, \lambda)$ es una medición en la partícula B , con orientación \hat{b} y λ representa una o más variables ocultas que se distribuyen como $\rho(\lambda)$.

Asumiendo que existe una anticorrelación perfecta, Bell explora qué sucede con las correlaciones al medir cambiando las orientaciones \hat{a} y \hat{b} .

Define el valor esperado de la correlación como

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda)$$

y utiliza este resultado para calcular la diferencia:

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c}) &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{c}, \lambda) \\ &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) [1 - B(\hat{b}, \lambda) B(\hat{c}, \lambda)] \\ &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) [1 + A(\hat{b}, \lambda) B(\hat{c}, \lambda)] . \end{aligned}$$

Finalmente, por propiedades de valor absoluto de la integral / integral del valor absoluto y recordando que $|A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda)| = 1$, llega a la desigualdad:

$$\begin{aligned}
|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| &\leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) |A(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda)[1 + A(\hat{b}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda)]| \\
&= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [1 + A(\hat{b}, \lambda)B(\hat{c}, \lambda)] \\
&= 1 + E(\hat{b}, \hat{c}) .
\end{aligned}$$

Esta es la desigualdad de Bell. Bell evalúa la desigualdad con base en las predicciones de la mecánica cuántica, $E(\hat{a}, \hat{b}) = -\cos \theta_{ab}$ (desarrollo en el apéndice A.2.) y nota una violación a la misma.

La violación a la desigualdad de Bell alcanza su punto máximo al escoger $\theta_{ab} = \frac{\pi}{2}$, $\theta_{ac} = \frac{\pi}{4}$ y $\theta_{bc} = \frac{\pi}{4}$, resultando en

$$\begin{aligned}
|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| &= |-\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4}| \\
&\leq 1 - \cos \frac{\pi}{4} = 1 + E(\hat{b}, \hat{c}) \\
\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} &\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\longrightarrow \sqrt{2} &\leq 1 \quad [!]
\end{aligned}$$

1.1.3. Peres

Peres [25] explora el mismo problema por otro lado. Formula la posibilidad de llenar una tabla con los valores “reales”, propios de dos partículas anticorrelacionadas, al evaluar estos valores en distintas orientaciones. Dos de las orientaciones (\hat{a} y \hat{b} , una para cada partícula) serán las direcciones en las que las mediciones de hecho se llevaron a cabo y las otras dos orientaciones, (\hat{a}' y \hat{b}') direcciones en las que las mediciones podrían haberse llevado a cabo.

La tabla de N mediciones se vería como sigue

	1	2	3	...	N
$A(\hat{a})$	+1	+1	-1	...	-1
$B(\hat{b})$	-1	+1	-1	...	+1
$A(\hat{a}')$?	?	?	...	?
$B(\hat{b}')$?	?	?	...	?

donde para cada par de valores desconocidos “?” existen cuatro posibilidades (+1-1, -1-1, -1+1, +1+1). Hay entonces 4^N tablas posibles.

Es fácil ver que independientemente de la forma de la tabla, (profundizo en el apéndice A.3.):

$$A(\hat{a})B(\hat{b}) + A(\hat{a}')B(\hat{b}) + A(\hat{a})B(\hat{b}') - A(\hat{a}')B(\hat{b}') = \pm 2 ,$$

de donde

$$\frac{1}{N} \left| \sum_N A(\hat{a})B(\hat{b}) + A(\hat{a}')B(\hat{b}) + A(\hat{a})B(\hat{b}') - A(\hat{a}')B(\hat{b}') \right| \leq 2 ,$$

y la parte izquierda de esta expresión es el valor absoluto de la suma de los promedios de cada correlación, i.e.,

$$|\langle A(\hat{a})B(\hat{b}) \rangle + \langle A(\hat{a}')B(\hat{b}) \rangle + \langle A(\hat{a})B(\hat{b}') \rangle - \langle A(\hat{a}')B(\hat{b}') \rangle| \leq 2 ,$$

y entonces Peres ha llegado a otra forma de la desigualdad de Bell, misma que se viola al sustituir los promedios por los valores esperados de la correlación, $E(\hat{a}, \hat{b}) = -\cos \theta_{ab}$.

De esto saca dos conclusiones: o no está permitido suponer resultados para experimentos que no se han llevado a cabo, o es necesario asumir que los resultados de mediciones en A dependen de lo que pasa en B y viceversa. Como lo primero es equivalente a no poder desarrollar un modelo científico, Peres concluye lo segundo.

1.2. + No-Contextualidad

La no-contextualidad es una cualidad de las propiedades de los objetos, si una propiedad no cambia al cambiar el entorno esta propiedad es no-contextual.

Asumir no-contextualidad es otra forma de llevar localidad a la teoría. Por localidad, una medición en un punto espacio-temporal no puede ser afectada por otras mediciones distantes, es decir, el resultado en un punto será independiente de lo que se mida en todos los otros puntos y partículas del universo. En la no-contextualidad, además de la separabilidad que es natural en la localidad, se asume que una variable realista tomará el mismo valor independientemente del arreglo experimental con el que se mida. Por más natural que suene, este supuesto de no-contextualidad ha sido fuertemente cuestionado debido a que parece no concordar con la mecánica cuántica.

1.2.1. Kochen-Specker

Kochen y Specker [17] muestran con argumentos algebraicos y geométricos la imposibilidad de construir una estructura en la que se puedan insertar valores definidos y no-contextuales para las variables que se desean medir dentro de la mecánica cuántica. Bell [19] se basa en el trabajo de aquéllos para plantear un esquema de una partícula con espín $s = 1$, sobre la que se medirán los cuadrados S_u^2 , S_v^2 y S_w^2 , de tres componentes ortogonales del espín. Dado que $S_i = \{-1, 0, 1\}$ ($i = u, v, w$), S_i^2 tendrá un valor en $\{0, 1\}$ según la dirección de medición, i . Además, las observables S_i^2 en tres direcciones ortogonales, digamos u, v, w , conmutan entre sí y cumplen que:

$$S_u^2 + S_v^2 + S_w^2 = s(s + 1) = 2$$

así que dos orientaciones deberán tener el valor 1 y la tercera, 0.

Bell empieza demostrando que dos vectores separados por un ángulo menor a $\alpha = \tan^{-1}(0.5)$ deberán dar lugar al mismo valor de S_i^2 (ambos 0 o ambos 1). Luego Mermin [20] retoma este resultado y muestra que si dos vectores (\hat{z} , \hat{a}) separados por $\theta = 22.5^\circ < \alpha$, tienen el mismo valor en S_z^2 , S_a^2 (digamos 1), entonces un tercer vector \hat{b} a 22.5° de \hat{a} deberá también tener el valor 1, igual que un cuarto y un quinto. Con lo que llega al eje \hat{y} y de la misma forma avanza hasta el eje \hat{x} , concluyendo que los tres vectores ortogonales, con direcciones \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} , tendrán el mismo valor, 1, cosa que evidentemente contradice en estructura a la mecánica cuántica.

1.2.2. GHZ

Greenberger, Horne y Zeilinger [12] examinan la implicación de suponer no-contextualidad en un esquema sencillo de cuatro partículas con espín $\frac{1}{2}$ y en un sistema de tres partículas que interactúan con un interferómetro. Otros autores [18, 21] utilizan la lógica de GHZ para dar un ejemplo concreto, mostrando que la asignación de valores definidos a un sistema de tres partículas con espín $\frac{1}{2}$ lleva necesariamente a una contradicción.

El argumento se basa en encontrar un sistema en un eigenestado simultáneo de los operadores no-locales de espín, $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3$, $\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3$ y $\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3$, donde cada σ_k^i denota una medición de espín en la partícula i con orientación k . Esto es posible, ya que los tres operadores no-locales conmutan entre sí. Un eigenestado simultáneo de ellos será

$$|\psi\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) .$$

Calculan, entonces, el resultado de las mediciones de los operadores no-locales sobre el estado $|\psi\rangle_{GHZ}$, obteniendo el eigenvalor 1 para cada una de estas mediciones. Argumentan que como los operadores conmutan, estas tres mediciones podrán hacerse en cualquier orden e incluso simultáneamente. Además calculan el resultado de medir con el operador $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$ sobre el mismo estado, obteniendo el eigenvalor -1 . (Véanse los cálculos explícitos en el apéndice A.4.)

Suponen, entonces, la existencia de valores reales previos a la medición en cada partícula para cada orientación, A_x , A_y , B_x , B_y y C_x , C_y . De las afirmaciones anteriores concluyen que el producto de estos valores necesariamente será $A_x B_y C_y = A_y B_x C_y = A_y B_y C_x = 1$ y además $A_x B_x C_x = -1$ pero como $A_{x,y} = \pm 1$, $B_{x,y} = \pm 1$ y $C_{x,y} = \pm 1$, el resultado de elevar cualquiera de ellos al cuadrado será 1, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= (A_x B_y C_y)(A_y B_x C_y)(A_y B_y C_x) \\ &= A_x (A_y)^2 B_x (B_y)^2 C_x (C_y)^2 \\ &= A_x B_x C_x = -1 \quad [!] \end{aligned}$$

contradicción que surge por suponer realismo y no-contextualidad en los valores K_i .

1.3. Salto de No-contextualidad a Localidad

La localidad es menos demandante que la no-contextualidad, pues la localidad sólo exige que eventos lejanos no se influencien entre sí mientras que la no-contextualidad pide que cambios en el sistema con el que se está midiendo no alteren los valores de lo que se está midiendo. Por ejemplo, en el caso de GHZ la observable σ_x^1 tomará el mismo valor independientemente de si se mide en el arreglo $\sigma_x^1\sigma_y^2\sigma_y^3$ o en el arreglo $\sigma_x^1\sigma_x^2\sigma_x^3$.

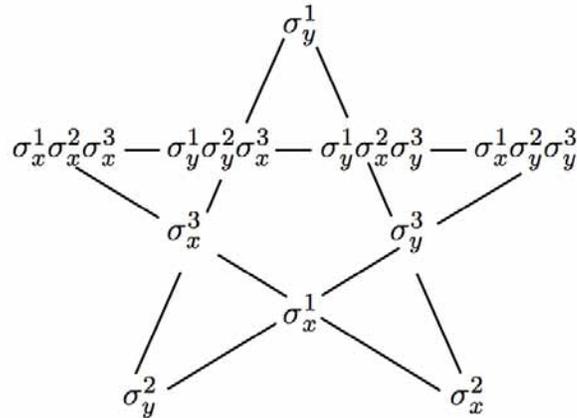
Como una última vertiente de los teoremas de imposibilidad, expondré el caso que construyen Mermin y Peres [22] al combinar los trabajos de Bell, Kochen y Specker, para explicar en qué consisten las sutiles diferencias entre no-contextualidad y localidad y ver claramente cuándo una se puede derivar de la otra y cuándo no.

En un espacio de Hilbert \mathcal{H} de 4 dimensiones proponen el arreglo de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$ que viajan a un detector, mismo que escogerá qué es lo que va a medir, dentro de 6 distintas opciones. Estas opciones son las filas y columnas del cuadro a continuación:

$\sigma_x \otimes \mathbf{I}$	$\mathbf{I} \otimes \sigma_x$	$\sigma_x \otimes \sigma_x$
$\mathbf{I} \otimes \sigma_y$	$\sigma_y \otimes \mathbf{I}$	$\sigma_y \otimes \sigma_y$
$\sigma_x \otimes \sigma_y$	$\sigma_y \otimes \sigma_x$	$\sigma_z \otimes \sigma_z$

Las observables en cada conjunto (renglón o columna) conmutan entre sí, así que es posible obtener valores determinados para todas ellas simultáneamente. Con operaciones sencillas (ver apéndice A.5.) se puede ver que el producto de hacer las mediciones de cualquier fila y de las primeras dos columnas será 1. En cambio, al escoger las mediciones de la tercer columna, el producto de las mismas dará -1. Así, tomando en cuenta los resultados de las 3 filas, el producto de los nueve valores asumidos reales será 1 y tomando en cuenta los resultados de las columnas, el producto será -1. ¿Qué clase de realismo es éste?

Mermin [23] propone otro esquema muy parecido en 8 dimensiones, sólo que ahora se tienen tres partículas y cinco grupos de cuatro observables que forman la estrella a continuación:



Los cinco grupos son las cinco líneas de la estrella y cada observable se encuentra en dos de los grupos. Además, todas las observables de cada grupo conmutan entre sí y por lo tanto es posible definir valores simultáneamente para tales observables. Como el producto de las observables en la línea horizontal da -1 y el producto de las observables de todas las otras líneas da 1 (véase desarrollo en el apéndice A.6.), los valores asignados a las mismas cumplirán también esta relación. De aquí que el producto de todos los resultados de la estrella daría -1, pero como cada observable aparece en dos de los grupos, cada observable se contempla un número par de veces y esto implica que el resultado del producto de todos los valores debería ser 1. Con esto se llega a la misma contradicción que la del caso anterior.

A pesar de que son muy similares, expongo los dos casos porque el primero de ellos no puede ser derivado suponiendo sólo localidad (y no no-contextualidad) y el segundo sí. Veamos:

Comenzamos con el caso de la estrella. Suponemos que las tres partículas que se van a medir están separadas espacialmente entre sí. Por lo tanto la medición sobre una de ellas no deberá influir sobre la medición de las otras dos. Tenemos en la estrella seis observables aisladas cuyo resultado deberá conservar su valor independientemente del grupo en el que se mida, simplemente por localidad. De aquí se concluye el realismo asociado a estas seis observables. Además, las cuatro observables horizontales conmutan y por ende deben existir estados que sean eigenestados simultáneos de todas ellas, con un valor definido para cada una. De aquí que para cualquier sistema preparado en alguno de estos eigenestados podemos asumir que existe un realismo asociado al valor que estas observables están midiendo.

Vemos que en ningún momento se asume realismo por un principio de no-

contextualidad, mientras que en el caso del cuadro de nueve observables las cinco que pertenecen a la tercer fila y la tercer columna no son locales y no adquieren el realismo que les dotaría la separabilidad, y como no conmutan todas entre ellas, tampoco existe un eigenestado simultáneo de estas observables. En este último caso, para asumir realismo es necesario asumir que el realismo supera al contexto en el que se mide.

Capítulo 2

Realismo Factual

En el capítulo anterior di una variedad de ejemplos sobre los distintos tipos de teoremas de imposibilidad de variables ocultas (locales / no-contextuales) para así empezar con el reordenamiento de ideas que requiere la mecánica cuántica si buscamos que sea una teoría completa, realista, local, no-contextual y evaluar hasta qué punto podemos extender dicha teoría para que tenga estas características.

Lo principal es que sea completa y realista. Si es realista y no-local, es tal vez porque la misma realidad es no-local, lo mismo si es contextual. El punto es seguir analizando a la realidad con lupa para saber qué tipo de supuestos podemos hacer en la teoría sin salirnos de la realidad, qué tipo de supuestos debemos hacer más cuidadosamente y si habrá que agregar supuestos para describirla completamente.

Dividí los teoremas de imposibilidad en a) los que asumen localidad y b) los que asumen no-contextualidad, para al final mostrar que asumir no-contextualidad es más fuerte que asumir localidad. De ahí que si la teoría fuera suficientemente satisfactoria como para describir una realidad no-contextual sin llegar a contradicciones, no habría necesidad de cuestionar la localidad de la realidad, pues la teoría automáticamente sería satisfactoria también al describir una realidad local.

Ahora añadiré un tercer supuesto acerca de la realidad y veré si las predicciones que han sido exitosas en la mecánica cuántica se conservan bajo este supuesto. Completaré entonces a la teoría con el mismo y mostraré que este supuesto es más fuerte que la no-contextualidad; en este punto veré si al agregar este supuesto se resuelven los teoremas de imposibilidad y, así, las contradicciones anteriores (que emergen de no-contextualidad y localidad) idealmente serían erradicadas. Finalmente exploraré las implicaciones de este supuesto y su viabilidad.

2.1. + Factualidad

La factualidad es aquello que se muestra en los hechos, incluye todo lo que de hecho sucede y deja fuera todo lo que pudo haber sucedido, argumentando que si no sucedió no es parte de la realidad. Irnos más allá de la factualidad en la teoría implicaría salirnos del universo real y por lo tanto incluir variables en la teoría que no tendrían una contraparte en la realidad.

Comenzaré por definir, con base en 't Hooft [13], dos tipos distintos de estados.

- Estados Ontológicos

Los estados ontológicos $|\Omega_i\rangle$ son los que pueden ocurrir en un marco físico, real. Describen todo lo que se manifiesta en un sistema después de una medición y son ortogonales entre sí.

Nótese que:

Si la dimensión del espacio de Hilbert asociado al operador a describir es n , hay n estados ontológicos en los que el sistema puede estar y

$$\langle \Omega_i | \Omega_j \rangle = \delta_{ij} .$$

Así, los estados ontológicos forman una base del espacio de Hilbert \mathcal{H}_n de la propiedad que describen.

El conjunto de estados ontológicos no es un espacio de Hilbert, pues una combinación lineal de dos o más estados ontológicos no es un estado ontológico.

- Estados Cuánticos

Los estados cuánticos $|\psi_i\rangle$ son todos los estados que se generan a partir de los estados ontológicos asociados a una propiedad. El conjunto de estos estados sí es un espacio de Hilbert.

Nótese que:

Cada estado cuántico se puede ver como una superposición de estados ontológicos,

$$|\psi_i\rangle = \sum_k o_k |\Omega_k\rangle , \quad \text{con} \quad \sum_k |o_k|^2 = 1$$

donde $|o_k|^2$ denota la probabilidad de encontrar al sistema en el estado ontológico $|\Omega_k\rangle$.

Por otra parte, gracias a la mecánica cuántica, sabemos que los resultados de una observación no sólo dependen de las propiedades reales del objeto observado, sino que también influye la forma en que se mide dicho objeto. La representación matemática de una medición es un operador hermitiano, la forma en que se mide determina al operador: dicho operador tiene una serie de eigenvalores y eigenestados particular, el estado resultado de una medición corresponderá a un eigenestado del operador seleccionado para medir, y el valor resultado de la medición será un eigenvalor de dicho operador.

Continuaré, entonces, definiendo tres tipos distintos de operadores según la forma en que actúan sobre el estado que se desea medir.

- Operadores Ontológicos (Beables¹, 't Hooft [14])

La acción de un operador ontológico \hat{B} sobre un estado ontológico resulta en la obtención de una propiedad de ese mismo estado ontológico,

$$\hat{B}|\Omega_i\rangle = b_i|\Omega_i\rangle ;$$

i.e., los estados ontológicos son eigenestados de operadores ontológicos.

- Operadores de Intercambio (Changeables, 't Hooft [14])

Los operadores de intercambio \hat{C} actúan sobre un sistema cambiando su estado ontológico inicial a algún otro estado ontológico de la base,

$$\hat{C}|\Omega_i\rangle = c_{ij}|\Omega_j\rangle , \quad i \neq j .$$

- Operadores de Superposición (Superimposables, 't Hooft [14])

Los operadores de superposición \hat{S} actúan sobre un estado ontológico llevándolo a una superposición de estados ontológicos, o sea, a un estado cuántico,

$$\hat{S}|\Omega_i\rangle = \sum_k s_{ik}|\Omega_k\rangle = s_i|\psi_i\rangle .$$

2.1.1. Realidad vs. Teoría

Es evidente que la descripción de un sistema puede ser muy sencilla (estados ontológicos que se mantienen como estados ontológicos al medir con operadores ontológicos) o muy compleja (estados cuánticos que evolucionan en estados cuánticos superpuestos por medio de operadores de superposición).

¹Aunque Bell [6] introduce mucho antes el concepto de “beables” lo hace sólo para hablar sobre aquello que existe físicamente y la forma matemática que les asigna es la de vector de estado.

Antes de ver de qué depende la sencillez o complejidad de dicha descripción, clasificaré a los elementos de la teoría en dos tipos: aquéllos que tienen una contraparte en la realidad y aquéllos que son sólo herramientas teóricas sin manifestación real.

Para definir el conjunto de elementos que tienen una contraparte en la realidad utilizo suposiciones y proposiciones sobre la realidad y para construir el conjunto de herramientas teóricas utilizo reglas matemáticas.

La teoría está repleta de herramientas que no necesariamente se manifiestan en la realidad. Con las definiciones de la sección anterior en mente expondré cuáles son las herramientas necesarias para describir un sistema.

Herramientas

H 1 base y base ontológica

Queremos conocer una propiedad del sistema, digamos que esta propiedad puede asumir *uno* de entre n diferentes valores reales.

A cada valor de esta propiedad se le asigna un estado distinto del sistema.

El conjunto de n estados ortogonales entre sí forma una *base*

$$\{|\psi_i\rangle_s\}_{i=1}^n \quad (\text{base}).$$

Si todos los estados de la base son ontológicos, tenemos una *base ontológica*

$$\{|\Omega_i\rangle_s\}_{i=1}^n \quad (\text{base ontológica}).$$

H 2 espacio

La base genera un espacio de Hilbert de n dimensiones, \mathcal{H}_n .

H 3 estados

Los elementos del espacio \mathcal{H}_n son estados ontológicos y estados cuánticos que describen matemáticamente aquello que conozco del sistema a analizar.

H 4 operadores

Los artefactos matemáticos que representan una medición sobre el sistema son operadores hermitianos \hat{O} , éstos actúan sobre los estados del espacio de Hilbert y al hacerlo nos devuelven una propiedad de dichos estados.

Si el estado que utilizo para describir al sistema $|\psi\rangle_s$ es eigenestado del operador que utilizo para medir, la medición se ve como una ecuación de eigenvalores:

$$\hat{O}|\psi\rangle_s = o|\psi\rangle_s .$$

Así pues, los operadores ontológicos tienen eigenestados ontológicos y los operadores de superposición tienen eigenestados cuánticos, mientras que los operadores de intercambio no tienen estados propios.

En general, cualquier medición se puede representar con un operador de superposición² \hat{S} y la aplicación de un operador de superposición a un estado arbitrario resulta siempre en un elemento del espacio de Hilbert \mathcal{H}_n de n dimensiones,

$$\hat{S}|\Omega_i\rangle = \sum_{k=1}^n s_{ik}|\Omega_k\rangle = s_i|\psi_i\rangle ,$$

$$\hat{S}|\psi_j\rangle = \hat{S} \sum_{k=1}^n p_{jk}|\Omega_k\rangle = \sum_{k=1}^n p_{jk} \sum_{l=1}^n s_{kl}|\Omega_l\rangle = \sum_{l=1}^n s_{jl}|\Omega_l\rangle = s_j|\psi_j\rangle .$$

Con estas herramientas definidas, haré dos suposiciones sobre la realidad para establecer cuáles herramientas tienen una contraparte en la realidad y cuáles no.

Suposiciones

S 1 existencia ontológica

Existen los estados ontológicos $|\Omega_i\rangle$. La realidad se manifiesta en formas ontológicas.

S 2 inexistencia cuántica

No existen los estados cuánticos no ontológicos $|\psi_i\rangle$. Los estados cuánticos no tienen una contraparte en la realidad.

Ahora enunciaré proposiciones sobre la realidad utilizando las herramientas de la teoría que asumimos tienen una contraparte en la realidad.

Proposiciones

Sobre el universo

²Si bien esto es cierto en general, al detenernos a examinar lo que los operadores de superposición representan físicamente vemos que representan una colección de n mediciones, no una medición individual (cf. (S2) a continuación, apéndice C.1. y sección 3.2.2).

P 1 estado ontológico único

Al tiempo $t = t_0$ el universo está en un y sólo un estado ontológico descrito por $|\Omega(t_0)\rangle_u$.

P 2 estado ontológico constante

$|\Omega(t_0)\rangle_u$ describirá al universo a cualquier tiempo t , i.e.,

$$|\Omega(t)\rangle_u = |\Omega(t_0)\rangle_u = |\Omega\rangle_u .$$

Sobre los sistemas

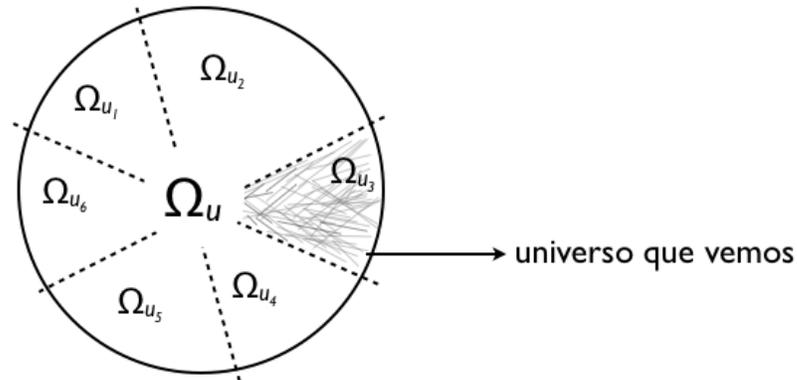
P 3 percepción

Nosotros vemos sólo una fracción del universo.

P 4 partición

Podemos partir al universo en fracciones de universo y al estado ontológico $|\Omega\rangle_u$ en subestados ontológicos $|\Omega\rangle_{u_v}$ como sigue:

universo



donde la línea punteada representa las condiciones a la frontera de cada fracción de universo con subestado ontológico $|\Omega\rangle_{u_v}$ (en adelante “estado cuasi-ontológico” u “ontológico con condiciones a la frontera”).

P 5 estado cuasi-ontológico del sistema

Podemos hacer particiones del universo que vemos y de su estado cuasi-ontológico hasta llegar al estado cuasi-ontológico³ $|\Omega'\rangle_s$ del sistema particular que queremos analizar en el laboratorio.

³Uso tildes para denotar estados cuasi-ontológicos.

En las proposiciones aquí enunciadas partí de un estado ontológico del universo, que es único y constante, para luego enfocarme en el sistema que podemos analizar en el laboratorio, llegando inevitablemente a la manifestación de estados cuasi-ontológicos.

Dado que los estados cuasi-ontológicos no son ontológicos ya que dependen de las condiciones a la frontera, tienen que ser estados cuánticos. En otras palabras, los estados cuánticos tienen condiciones a la frontera; entonces asumimos que el hecho de que aparezcan en la descripción del sistema es sólo debido a la falta de información, carencia inevitable siempre que no conozcamos las condiciones a la frontera. Resumiendo: supongo que los estados cuánticos no son más que una pieza del gran estado ontológico $|\Omega\rangle_u$ que hemos aislado de forma incompleta, ante la imposibilidad de incluir las condiciones a la frontera.

Daré ahora una definición más formal de factualidad utilizando el marco teórico que consta de las suposiciones S1-2, de las herramientas H1-4 y de las proposiciones P1-5.

2.1.2. Factualidad y Ontología

Comienzo enunciando que

El universo está en un estado ontológico $|\Omega\rangle_u$ (S1), éste es único y constante (P1 y P2), comprende todas las variables y toda la información que se manifiesta en la realidad (definición de *ontológico* y *universo*). Los estados cuánticos no tienen una manifestación real en el universo (S2);

entonces,

todo lo que se manifiesta en la realidad es el estado ontológico desplegando sus propiedades internas.

Por lo tanto, de la existencia y unicidad del estado ontológico $|\Omega\rangle_u$, se sigue que todo lo que se manifestó en la realidad es lo único que se pudo haber manifestado dado $|\Omega\rangle_u$. Ésta es la definición de factualidad.

Así pues, (S1), (S2), (P1) y (P2) son condiciones suficientes para concluir que la realidad es factual.

Pero, ¿dónde quedan los estados cuánticos? y ¿para qué sirven todas las herramientas teóricas?

2.2. Predicciones

La mecánica cuántica describe a los objetos físicos mediante funciones que representan probabilidades, o sea, mediante las funciones (también llamadas

“funciones de onda”) que defino arriba como estados cuánticos. Los estados cuánticos son el artefacto matemático que se utiliza para describir dichos objetos y ha logrado hacerlo de manera fiel, cosa que se ha comprobado experimentalmente. Los estados cuánticos sirven y son necesarios siempre que no tenemos completo conocimiento de un sistema dado.

El punto es que podemos añadir factualidad a la teoría y a la vez conservar las matemáticas y predicciones de la mecánica cuántica al asumir que los estados cuánticos son sólo artefactos matemáticos que no tienen una contraparte en la realidad.

Aquí podría surgir una objeción. Factualidad y determinismo están íntimamente relacionados, una teoría factual necesariamente es determinista. Usualmente se ha visto a la mecánica cuántica como una comprobación de que la realidad es no-determinista. Así, por ejemplo, al comentar sobre el experimento de la doble rendija en el que los electrones muestran comportamiento de onda y de partícula, Zettili [26] afirma que “este hallazgo experimental introduce un nuevo concepto fundamental: el mundo microscópico es indeterminista”, las predicciones (comprobadas) de la mecánica cuántica se han interpretado como prueba de un indeterminismo en la realidad.

Lo importante es reformular esta interpretación. La afirmación de que “el mundo microscópico es indeterminista” surge al ver que los electrones asumen propiedades de onda o de partícula dependiendo del arreglo experimental con el que se encuentran. Esto lleva concluir que la propiedad de onda o partícula de un electrón estaba indeterminada hasta un instante antes de examinarla. Además este indeterminismo es gobernado por probabilidades, ya que no hay una certeza sobre la futura naturaleza de las cosas. Así, se concluye que el mundo real no tiene propiedades determinadas *a priori*, que lo que tiene son probabilidades de manifestar una u otra propiedad (excluyentes entre sí) dependiendo de lo que suceda en el futuro (un suceso sería el arreglo experimental elegido para analizarlo, por ejemplo).

¿Se pueden tomar estas afirmaciones y analizarlas dentro de un universo ontológico, de manera que se explique la emergencia de dos propiedades distintas en los electrones que parecieran no tener una relación con su pasado, sino con su futuro (arreglo que se eligirá) y que por lo tanto parecieran no estar determinadas, mostrando que éstas propiedades en realidad sí están determinadas? Veré que sí.

2.2.1. Experimento del Gato de Schrödinger

Empezaré con la interpretación factual del experimento del gato de Schrödinger que construye 't Hooft [15] como sigue:

Tenemos la disposición experimental típica. Un gato adentro de una caja

junto con un átomo que al decaer provocará la muerte del gato. Antes de cerrar la caja el estado del gato será $|\Omega, t_0\rangle_G = |1\rangle$ donde $|1\rangle$ representa el estado “vivo”.

Se toma un átomo inestable que tiene una probabilidad de decaer de 0.4 (sin pérdida de generalidad), así una vez que se cerró la caja no tenemos información directa del estado del gato, pero el estado del átomo será $|\psi, t_c\rangle_A = \sqrt{0.6}|1\rangle + \sqrt{0.4}|0, \gamma\rangle$ donde $|1\rangle$ representa al átomo sin decaer y $|0, \gamma\rangle$ representa al átomo decaído y un fotón γ que emitió al decaer. Entonces el estado del gato será $|\psi, t_c\rangle_G = \sqrt{0.6}|1\rangle + \sqrt{0.4}|0\rangle$ donde $|0\rangle$ representa el estado “muerto” del gato.

Al abrir la caja se verá que el estado del gato es $|\Omega, t_a\rangle_G = |1\rangle$ ó $|\Omega, t_a\rangle_G = |0\rangle$, pero nunca una superposición.

Esto es un ejemplo muy sencillo de un sistema que inició en un estado ontológico $|\Omega, t_0\rangle_S$ pasó por una descripción cuántica $|\psi, t_c\rangle_S$ y terminó en un estado ontológico $|\Omega, t_a\rangle_S$.

¿Cómo se justificaría que el sistema pasó de un estado ontológico a un estado cuántico a otro estado ontológico? Veamos.

Lo primero que hace 't Hooft [16] es tomar en cuenta todos los grados de libertad que interactúan con el gato-átomo. Afirma que dentro de la caja hay una cantidad billonaria de átomos κ y cada uno puede estar en distintos estados, así asume que el espacio fase \mathcal{H}_N que se utiliza para describir el estado de todos los átomos a la vez tiene dimensión N del orden e^κ .

Los entes átomo inestable y gato están, pues, inmersos en un entorno con estado $|\Omega, t\rangle_E \in \mathcal{H}_N$. Entonces el estado inicial del sistema será

$$|\Omega, t_0\rangle_S = |1\rangle_G |1\rangle_A |\Omega, t_0\rangle_E,$$

y al cerrar la caja el estado del sistema será

$$|\psi, t_c\rangle_S = \left(\sqrt{0.6}|1, 1\rangle_{GA} + \sqrt{0.4}|0, 0, \gamma\rangle_{GA} e^{i\varphi(E)} \right) |\psi, t_c\rangle_E.$$

Aquí 't Hooft considera que los átomos del entorno pudieron haber causado una rotación de fase en el átomo que decayó dada por $\varphi(E)$ y denota al entorno con un estado cuántico $|\psi, t_c\rangle_E$, pues asume que el entorno está enredado con el gato-átomo y se desconoce este enredamiento. Finalmente, al abrir la caja el estado del sistema será

$$|\Omega, t_a\rangle_S = |\Omega, t_a\rangle_{GA} |\Omega, t_a\rangle_E$$

($|\Omega, t_a\rangle_{GA}$ representa tanto el estado ontológico del gato como el del átomo inestable).

Lo importante aquí es ¿qué pasa al cerrar la caja? Sabemos que hay N estados posibles $|\psi, t_c\rangle_S$, tomamos una base (ortonormal) del espacio de Hilbert

\mathcal{H}_N dada por $\{|\psi, t_c\rangle_{S_i}\}_{i=1}^N$ y asumimos que a cada tiempo t_{c_q} existe dentro de la caja un estado cuántico con condiciones a la frontera⁴, dado por

$$\begin{aligned} |\psi, t_{c_q}\rangle_S &= \sum_{i=1}^N \alpha_{i_q} |\psi, t_{c_q}\rangle_{S_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_{i_q} (\sqrt{0.6}|1, 1\rangle + \sqrt{0.4}|0, 0, \gamma\rangle e^{i\varphi(E_i)}) |\psi, t_{c_q}\rangle_{E_i}. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz de densidad correspondiente a los estados dentro de la caja estará dada por

$$\begin{aligned} |\psi, t_{c_q}\rangle_S \langle\psi, t_{c_q}| &= \sum_{i=1}^N \alpha_{i_q} |\psi, t_{c_q}\rangle_{S_i} \sum_{j=1}^N \alpha_{j_q} \langle\psi, t_{c_q}| \\ &= \sum_{j,i} \alpha_{i_q} \alpha_{j_q} |\psi, t_{c_q}\rangle_{S_i} \langle\psi, t_{c_q}|; \end{aligned}$$

por ortonormalidad de la base se pide que los coeficientes α cumplan

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{i_q} \alpha_{j_q} = \delta_{ij}$$

para cada q , y la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} |\psi, t_{c_q}\rangle_S \langle\psi, t_{c_q}| &= \\ &= \sum_{i=1}^N |\psi, t_{c_q}\rangle_{S_i} \langle\psi, t_{c_q}| \\ &= \sum_{i=1}^N (\sqrt{0.6}|1, 1\rangle + \sqrt{0.4}|0, 0, \gamma\rangle e^{i\varphi(E_i)}) |\psi, t_{c_q}\rangle_{E_i} \times \\ &\quad \times \langle\psi, t_{c_q}| (\sqrt{0.6}\langle 1, 1| + \sqrt{0.4}\langle 0, 0, \gamma| e^{-i\varphi(E_i)}) \\ &= \sum_{i=1}^N 0.6|1, 1\rangle\langle 1, 1| + \sqrt{0.24}|0, 0, \gamma\rangle\langle 1, 1| [e^{i\varphi(E_i)} |\psi, t_{c_q}\rangle_{E_i} \langle\psi, t_{c_q}|] + \\ &\quad + \sqrt{0.24}|1, 1\rangle\langle 0, 0, \gamma| [|\psi, t_{c_q}\rangle_{E_i} \langle\psi, t_{c_q}| e^{-i\varphi(E_i)}] + 0.4|0, 0, \gamma\rangle\langle 0, 0, \gamma| \end{aligned}$$

y así la matriz de densidad será

$$\rho_\psi = |\psi, t_{c_q}\rangle_S \langle\psi, t_{c_q}| = \begin{pmatrix} 0.6 \mathbf{I} & \sqrt{0.24} \mathbf{X} \\ \sqrt{0.24} \mathbf{X}^* & 0.4 \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N e^{-i\varphi(E_i)} |\psi, t_{c_q}\rangle_{E_i} \langle\psi, t_{c_q}|$.

⁴Recordemos que lo que existe es un estado ontológico y que en la medida en que desconocemos este estado, la descripción que podemos hacer del sistema es la de un estado cuántico, sin olvidar que para hablar de existencia debemos tomar en cuenta las condiciones a la frontera.

Ahora bien, al considerar que los estados del entorno aportan un cambio de fase $\varphi(E_i)$ al azar, con $\varphi(E_i) \in [0, 2\pi)$ y hacer la suma sobre los i estados del entorno para obtener \mathbf{X} , el promedio $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N e^{-i\varphi(E_i)}$ da cero. Así, los elementos de la diagonal se cancelan y la matriz de densidad queda

$$\bar{\rho}_\psi = \begin{pmatrix} 0.6\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0.4\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

como mero resultado del promedio estadístico de los estados del entorno dentro de la caja.

Hice un cambio de notación de ρ_ψ a $\bar{\rho}_\psi$ para destacar que $\bar{\rho}_\psi$ es la matriz de densidad que emerge de los estados cuánticos al considerar condiciones a la frontera (cambios de fase que aporta el entorno). Además, $\bar{\rho}_\psi$ será la matriz de densidad que corresponde a los estados ontológicos y en la misma se observa que la probabilidad de un estado en superposición (entradas fuera de la diagonal) es 0.

Antes de tomar en cuenta al entorno, la matriz de densidad es simplemente ρ_ψ , con elementos en la diagonal distintos de cero. La probabilidad de superposición es distinta de cero, no porque el sistema pueda asumir estados superpuestos, sino porque éste está enredado con el entorno y el aparato matemático está en espera de las condiciones de frontera para poder predecir con exactitud el estado del sistema.

Así, mostramos que considerar tanto el estado cuántico como las condiciones de frontera resulta en la obtención de una descripción ontológica. ¿Qué nos dice la descripción ontológica $\bar{\rho}_\psi$ sobre el sistema gato-átomo inestable-entorno? Simplemente que el sistema evolucionará de acuerdo a ecuaciones deterministas que desconocemos, pero que tienen una distribución estadística. Es decir 60% de estas ecuaciones describen la evolución de un estado inicial del sistema $|\Omega, t_0\rangle_S = |1, 1\rangle_{GA}|\Omega, t_0\rangle_E$ a un estado final $|\Omega, t_a\rangle_S = |1, 1\rangle_{GA}|\Omega, t_a\rangle_E$ y el otro 40% de las ecuaciones describen la evolución de un estado inicial del sistema $|\Omega, t_0\rangle_S = |1, 1\rangle_{GA}|\Omega, t_0\rangle_E$ a un estado final $|\Omega, t_a\rangle_S = |0, 0, \gamma\rangle_{GA}|\Omega, t_a\rangle_E$.

Es importante reparar en un último detalle. El estado ontológico del sistema átomo-gato en términos deterministas no tiene asociada una probabilidad. El átomo va o no va a decaer, no conocemos la ecuación de evolución determinista y por lo tanto hablamos de la probabilidad de decaimiento del átomo, pero la evolución ontológica del sistema en realidad está gobernada por ecuaciones deterministas,

$$|\Omega, t_0\rangle_S \longrightarrow |\Omega, t_a\rangle_S ;$$

esta evolución sería de la forma

$$|1, 1\rangle_{GA}|\Omega, t_0\rangle_E \longrightarrow |1, 1, t_a\rangle_{GA}|\Omega, t_a\rangle_E$$

o de la forma

$$|1, 1\rangle_{GA}|\Omega, t_0\rangle_E \longrightarrow |0, 0, \gamma t_a\rangle_{GA}|\Omega, t_a\rangle_E$$

dependiendo de cuál fuera el estado ontológico final del sistema.

La matriz de densidad asociada a esta evolución consta de un solo elemento en la diagonal distinto de 0, e igual a 1, elemento que corresponde a la descripción determinista del sistema. Desde la perspectiva que se ha adoptado en este trabajo, la matriz de densidad

$$\bar{\rho}_\psi = \begin{pmatrix} 0.6\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0.4\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

se queda aún corta si queremos *la* descripción ontológica del sistema. Todavía necesita una serie de condiciones a la frontera que permitan determinar qué entrada de la diagonal asume el valor 1. Mientras se desconozcan estas condiciones a la frontera, $\bar{\rho}_\psi$ será la descripción más cercana a la ontológica.

2.2.2. Mediciones en el Marco Factual

Para poder contemplar a los resultados experimentales desde el marco aquí construido es importante hacer un análisis del proceso de medición. ¿Qué significa medir? ¿Qué implica medir? ¿Qué clase de estados resultan de una medición? ¿Hay enredamiento con el instrumento de medición? Y si hay enredamiento ¿cómo se explica físicamente, factulamente, ontológicamente este enredamiento?

Comienzo por recordar (P5): la partición del sistema necesariamente lleva a una descripción cuántica con condiciones a la frontera.

Al medir queremos aislar lo más posible el sistema que vamos a analizar. Supongamos que queremos describir una entidad indivisible E , i.e., queremos medir propiedades de E , entonces lo más aislado que esta entidad puede estar es en una interacción con el instrumento de medición, I . Si no hay una interacción, no podemos describir nada.

Ahora, describamos la interacción de la forma usual $\hat{I}|E\rangle = R|E\rangle$, asumiendo que el resultado de la medición fue R . Generalmente se asocia la propiedad R a la entidad E , pero esto es un error. R surge debido a la interacción. R está asociado a I y a E por igual.

¿De dónde sale esta afirmación?

Suponemos, por ejemplo, que la entidad es la misma, E , pero medimos con un instrumento I' descrito por un operador \hat{I}' que no conmuta con \hat{I} ; por una parte el resultado de la medición necesariamente será distinto $\hat{I}'|E\rangle = R'|E\rangle$ pero por otra parte, si $|E\rangle$ es eigenestado de \hat{I} , no puede ser eigenestado de \hat{I}' y ¿cómo fue entonces que se pudo llevar a cabo la medición de \hat{I}' , sobre la misma entidad? Usualmente esto se explica asumiendo que la medición de I' perturba

al estado cambiándolo a un eigenestado $|E'\rangle$ de \hat{I}' . Entonces ahora R' surge en dependencia con I' mientras que I' perturba a E . ¿Qué pasa si volvemos a medir I' ? Pues que se vuelve a perturbar E y ahora podríamos obtener un resultado distinto al inicial $\hat{I}|E\rangle = R''|E\rangle$. Entonces ¿ E ya no es la misma entidad que era al principio de este proceso? ¿Realmente podemos conocer algo de E sin perturbarla? ¿Qué es lo que podemos conocer?

Lo que podemos conocer es el resultado de una interacción $\hat{I}|E\rangle$ y el resultado de esta interacción está íntimamente ligado tanto a I como a E . No tiene sentido hablar de propiedades de E aisladas de I ni de resultados de I aislados de E .

Cuando se mide con un instrumento I' descrito por un operador \hat{I}' que no conmuta con \hat{I} se da a conocer el resultado de una interacción $\hat{I}'|E'\rangle$ distinta a $\hat{I}|E\rangle$.

¿Cambió E ? No: la interacción es otra. ¿Es la misma E ? No: la interacción es otra. ¿Es paradójico esto? No: es factual.

La explicación factual es, de hecho, muy sencilla. Al final de una medición sabemos, por ejemplo, que sucedió $\hat{I}|E\rangle$ y esto es lo único que pudo haber sucedido. El sistema inicial evolucionaría (únicamente) a un eigenestado de \hat{I} y el instrumento se dispondría (únicamente) de esta manera. Que no conociéramos esta descripción es otra cosa. Si al final de otra medición sucede $\hat{I}'|E'\rangle$ de nuevo esto es lo único que pudo haber sucedido en ese instante espacio-temporal. El suceso $\hat{I}|E\rangle$ y el suceso $\hat{I}'|E'\rangle$ son ajenos en tanto que no pueden suceder en el mismo espacio al mismo tiempo y si sucedió uno de ellos el otro no podría haber sucedido. Que se desconozca lo que va a suceder no quiere decir que la historia se pueda desenvolver hacia cualquiera de los dos sucesos. El resultado del suceso final está ya descrito en las ecuaciones de evolución deterministas que desconocemos y a las que no podemos acceder, pues para ello tendríamos que conocer las condiciones a la frontera con el resto del universo.

La descripción ontológica más primaria que se puede hacer de un sistema es, pues, la que habla sobre la interacción $\hat{I}|E\rangle$.

¿Qué pasa si suponemos que existe una propiedad en un objeto que es independiente de la interacción, que nunca está sujeta a interacciones y que nunca será perturbada por las mismas? Pues simplemente que ni siquiera podríamos acceder a esta propiedad: en la medida en la que está completamente aislada del universo que sí interacciona, está completamente aislada de cualquier observación o comparación, y por lo tanto de cualquier posible medición. Si algo así existe no tiene caso preguntarnos sobre su existencia pues ni nosotros afectamos su realidad ni ese algo afecta la nuestra.

Llegamos entonces a asumir que aquello que existe es aquello con lo que podemos interactuar, y la existencia de lo demás nos tiene sin cuidado. Las propiedades de las cosas existen y se manifiestan en la interacción. La descripción ontológica más pura que se puede hacer sobre un objeto involucra necesaria-

mente a un segundo objeto. La descripción ontológica más elemental se basa, pues, en la descripción de una interacción.

El proceso de medición es así una forma de obtener propiedades ontológicas de un sistema, pero es importante resaltar que el sistema en este proceso es la dupla [instrumento de medición]-[objeto medido] y que de alguna forma las condiciones a la frontera del estado cuántico de un objeto son precisamente las elecciones de aparato de medición. El estado cuántico no existe *per-se* sin las condiciones de frontera, lo que existe es el estado ontológico, y cuando el estado ontológico comprende al aparato de medición es imposible hablar de una existencia independiente del objeto que se mide.

¿Dónde queda el determinismo? Pues precisamente en la dupla instrumento-objeto. El estado ontológico del sistema en estos casos estará dado por $|\Omega\rangle_S = |\Omega\rangle_I |\Omega\rangle_O$ ⁵, donde la pareja $|\Omega\rangle_I |\Omega\rangle_O$ está determinada por la forma de $|\Omega\rangle_u$ y sólo puede ser de cierto modo compatible con el estado ontológico del universo. Por ejemplo, en el experimento de la doble rendija nunca encontraremos una pareja en la que el instrumento de medición tenga una rendija abierta y en la pantalla aparezca un patrón de interferencia, formado por los electrones emitidos detrás de la rendija, este “modo ontológico” simplemente es incompatible con $|\Omega\rangle_u$ ⁶.

Con esto en mente expondré un análisis del experimento que viola la desigualdad de Bell.

2.2.3. Experimento de la Desigualdad de Bell

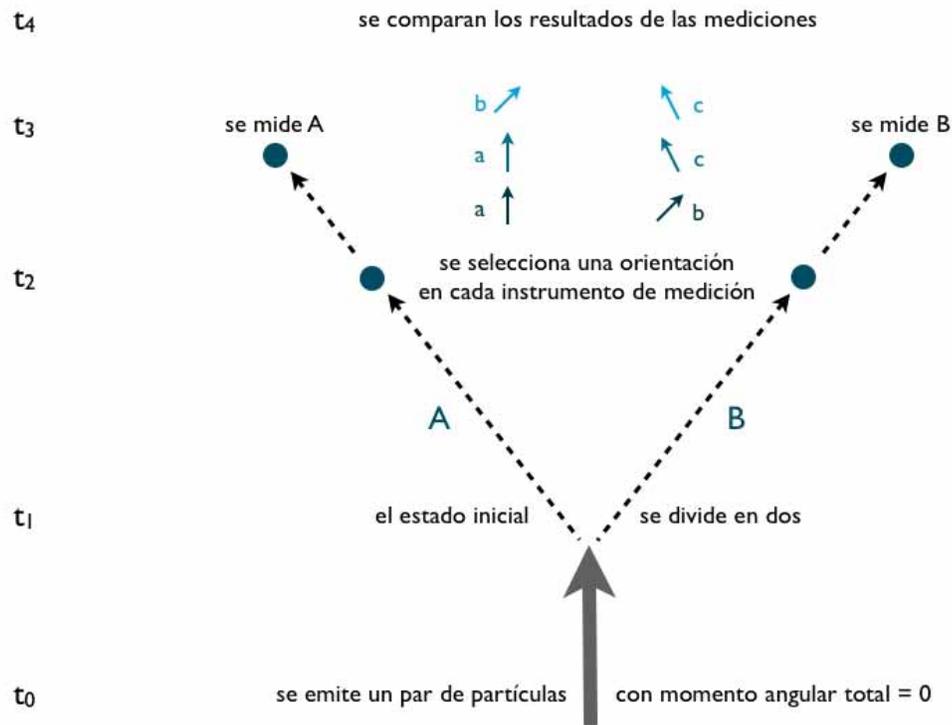
Recordemos el enunciado matemático de la desigualdad de Bell:

$$|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| \leq 1 + E(\hat{b}, \hat{c})$$

y pongamos en un esquema el experimento que él plantea:

⁵Aquí $|\Omega\rangle_S$ es el estado ontológico del sistema, $|\Omega\rangle_I$ el estado ontológico del instrumento de medición y $|\Omega\rangle_O$ es el estado ontológico del objeto medido.

⁶ $|\Omega\rangle_u$ será pues la base de las leyes físicas que gobiernan la fracción de universo que vemos.



El experimento se desenvuelve en un periodo de tiempo (t_0, t_4) en el que a cada tiempo t_i ocurre un suceso relevante. En el enunciado de la desigualdad de Bell hay tres pares de mediciones: ab , ac y bc , donde la primera letra de cada par denota la orientación elegida para medir sobre la partícula A y la segunda la orientación elegida para medir sobre la partícula B.

En términos de factualidad la desigualdad de Bell queda automáticamente descartada, pues los experimentos ab , ac y bc son excluyentes entre sí y no puede compararse “la realidad” de las partículas involucradas en estos tres experimentos ignorando que esta “realidad” está ligada a los cambios en los instrumentos de medición⁷. Por factualidad, si la realidad que se manifestó fue ab , las otras dos realidades no tienen ni tuvieron posibilidad de existencia en ese instante espacio-temporal.

Más que argumentarlo es necesario dar una construcción matemática que describa esto y muestre qué hay detrás de la desigualdad de Bell según la factua-

⁷Cambios que no son arbitrarios, sino que son ontológicos y suceden de acuerdo al estado ontológico del universo. Es decir, los “cambios” en los instrumentos de medición, no sucedieron por hacer una elección distinta cada vez, sino que sucedieron porque era lo único que pudo haber sucedido según $|\Omega\rangle_u$

lidad. Esta construcción matemática, además, debe conservar las predicciones de la mecánica cuántica. Ello, a continuación.

Comenzaré con un análisis detenido del desarrollo que lleva a la desigualdad de Bell.

A cada disposición experimental ab , ac y bc la llamaré “sistema” y las numeraré como sistema 1, 2 y 3 respectivamente. Etiquetaré, entonces, el resultado de cada medición y así la expresión $A^i(\hat{a}, \lambda)$ se leerá como “el resultado de medir sobre la partícula A en el sistema i con orientación \hat{a} dada una variable oculta con valor λ ”.

Con esta notación, la diferencia $E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})$ queda

$$E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A^1(\hat{a}, \lambda) B^1(\hat{b}, \lambda) - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A^2(\hat{a}, \lambda) B^2(\hat{c}, \lambda) ,$$

asumiendo que $A^1(\hat{a}, \lambda) = A^2(\hat{a}, \lambda)$ para cada λ , se iguala esta expresión a

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A^1(\hat{a}, \lambda) B^1(\hat{b}, \lambda) [1 - B^1(\hat{b}, \lambda) B^2(\hat{c}, \lambda)] ,$$

luego, asumiendo que $B^1(\hat{b}, \lambda) = -A^3(\hat{b}, \lambda)$ para cada λ , queda igual a

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A^1(\hat{a}, \lambda) B^1(\hat{b}, \lambda) [1 + A^3(\hat{b}, \lambda) B^2(\hat{c}, \lambda)] .$$

Al agregar el valor absoluto surge la desigualdad

$$\begin{aligned} |E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| &\leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [1 + A^3(\hat{b}, \lambda) B^2(\hat{c}, \lambda)] \\ &= 1 + E(\hat{b}, \hat{c}) , \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de asumir que $B^2(\hat{c}, \lambda) = B^3(\hat{c}, \lambda)$. Así, se ve claramente que el valor esperado en el sistema 3 (bc) está determinado por los valores de $A^3(\hat{b}, \lambda)$ y $B^2(\hat{c}, \lambda)$ y a su vez $A^3(\hat{b}, \lambda)$ está determinado por el valor de $B^1(\hat{b}, \lambda)$ para cada λ . Esto afecta directamente el valor de $E(\hat{b}, \hat{c})$, pues no es un sistema bc cualquiera, sino que debe cumplir condiciones estadísticas específicas dadas por los otros dos sistemas a través de las λ 's. ¿Cuál es, entonces, el resultado de $E(\hat{b}, \hat{c})$, para estas condiciones?

Lo primero que se asume es que tenemos tres sistemas idénticos, digamos que están preparados en el estado inicial $|\Omega(t_0)\rangle_{AB} = |0_a, 1_a\rangle_{AB}$.

Analicemos el sistema 1. Sabemos que

$$A^1(\hat{a}, \lambda) = \{\hat{\sigma}_a | \Omega_{\lambda}(t_3)\rangle_A\} ,$$

donde las llaves denotan el eigenvalor obtenido en la medición de $\hat{\sigma}_a$ sobre el estado $|\Omega_\lambda(t_3)\rangle_A$. Dado el estado inicial $|0_a\rangle$, el estado final es $|\Omega_\lambda(t_3)\rangle_A = |0_a\rangle$ para todo λ y así

$$P(A^1(\hat{a}, \lambda) = 1) = 1 .$$

Para la partícula B ,

$$B^1(\hat{b}, \lambda) = \{\hat{\sigma}_b|\Omega_\lambda(t_3)\rangle_B\}$$

donde

$$B^1(\hat{b}, \lambda) = \{\hat{\sigma}_b|0_b\rangle_B\} = 1 \text{ con probabilidad } P = |\langle 0_b|1_a\rangle|^2$$

y

$$B^1(\hat{b}, \lambda) = \{\hat{\sigma}_b|1_b\rangle_B\} = -1 \text{ con probabilidad } P = |\langle 1_b|1_a\rangle|^2 .$$

Como $|1_a\rangle = \sin \frac{\theta_{ab}}{2} |0_b\rangle - \cos \frac{\theta_{ab}}{2} |1_b\rangle$, entonces

$$P(B^1(\hat{b}, \lambda) = 1) = \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$$

y

$$P(B^1(\hat{b}, \lambda) = -1) = \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} .$$

Con estas probabilidades en mente, el valor esperado de la correlación $E(\hat{a}, \hat{b})$ queda

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{b}) &= [P(A^1(\hat{a}, \lambda) = 1) \times P(B^1(\hat{b}, \lambda) = 1)] \\ &+ [P(A^1(\hat{a}, \lambda) = -1) \times P(B^1(\hat{b}, \lambda) = -1)] \\ &- [P(A^1(\hat{a}, \lambda) = 1) \times P(B^1(\hat{b}, \lambda) = -1)] \\ &- [P(A^1(\hat{a}, \lambda) = -1) \times P(B^1(\hat{b}, \lambda) = 1)] \\ &= [1 \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}] + [0 \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2}] - [1 \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2}] - [0 \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}] \\ &= \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} - \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} = -\cos \theta_{ab} . \end{aligned}$$

Vayamos al sistema 2. Por las mismas razones que en el sistema 1,

$$P(A^2(\hat{a}, \lambda) = 1) = 1$$

y el caso de la partícula B es análogo, sólo que con orientación de medición \hat{c} , de forma que

$$P(B^2(\hat{c}, \lambda) = 1) = \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} ,$$

y

$$P(B^2(\hat{c}, \lambda) = -1) = \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} .$$

Así, haciendo un desarrollo equivalente al de arriba, se obtiene

$$E(\hat{a}, \hat{c}) = -\cos \theta_{ac} .$$

Ahora, queremos el valor esperado $E(\hat{b}, \hat{c})$ de un sistema que estadísticamente cumple $A^2(\hat{b}, \lambda) = -B^1(\hat{b}, \lambda)$. Esto implica lo siguiente para las probabilidades de $A^2(\hat{b}, \lambda)$:

$$P(A^2(\hat{b}, \lambda) = 1) = P(B^1(\hat{b}, \lambda) = -1) = \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$$

y

$$P(A^2(\hat{b}, \lambda) = -1) = P(B^1(\hat{b}, \lambda) = 1) = \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} .$$

Además, por la condición inicial $|\Omega(t_0)\rangle_B = |1_a\rangle$, se tiene para la partícula B que

$$P(B^2(\hat{c}, \lambda) = 1) = \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}$$

y

$$P(B^2(\hat{c}, \lambda) = -1) = \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} ,$$

con lo que $E(\hat{b}, \hat{c})$ queda

$$\begin{aligned} E(\hat{b}, \hat{c}) &= [P(A^2(\hat{b}, \lambda) = 1) \times P(B^2(\hat{c}, \lambda) = 1)] \\ &+ [P(A^2(\hat{b}, \lambda) = -1) \times P(B^2(\hat{c}, \lambda) = -1)] \\ &- [P(A^2(\hat{b}, \lambda) = 1) \times P(B^2(\hat{c}, \lambda) = -1)] \\ &- [P(A^2(\hat{b}, \lambda) = -1) \times P(B^2(\hat{c}, \lambda) = 1)] \\ &= [\cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}] + [\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \times \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}] \\ &- [\cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \times \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}] - [\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}] \\ &= \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} (\sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} - \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) - \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} (\sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} - \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) \\ &= (\cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}) (-\cos \theta_{ac}) = -\cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac} . \end{aligned}$$

Sustituyendo en la desigualdad de Bell con los valores obtenidos para $E(\hat{a}, \hat{b})$, $E(\hat{a}, \hat{c})$ y $E(\hat{b}, \hat{c})$ resulta

$$\begin{aligned} |E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{c})| &\leq 1 + E(\hat{b}, \hat{c}) \\ |-\cos \theta_{ab} + \cos \theta_{ac}| &\leq 1 - \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac}, \end{aligned}$$

desigualdad que se cumple para todo θ_{ab}, θ_{ac} , como se demuestra en el apéndice B.1.

Esto muestra que la desigualdad de Bell se cumple si se toman en cuenta los supuestos que se necesitan para construirla. De hecho, el valor esperado $E(\hat{b}, \hat{c}) = -\cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac}$ no sólo se obtiene con los supuestos de la desigualdad de Bell, se obtiene para todo sistema bc preparado en un estado inicial con orientación \hat{a} (valor propio del operador $\hat{\sigma}_a$), según se demuestra en el apéndice B.2.

Pero ¿por qué el valor esperado $E(\hat{b}, \hat{c})$ que se mide es $-\cos \theta_{bc}$? Más bien la pregunta clave es ¿de dónde surge este valor esperado?

Este valor esperado surge al tener una de las siguientes tres disposiciones:

1 distribución aleatoria

El sistema no está preparado en ninguna orientación inicial determinada, i.e., el ensamble de N estados iniciales contiene $N/2$ estados $|0_z, 1_z\rangle$ con orientación aleatoria \hat{z} y $N/2$ estados $|1_z, 0_z\rangle$ con orientación aleatoria \hat{z} .

2 preselección

El sistema está preparado en una de las orientaciones de medición, i.e., el ensamble consta de N estados iniciales $|0_b, 1_b\rangle$ o de N estados iniciales $|0_c, 1_c\rangle$, o de N estados iniciales $|1_b, 0_b\rangle$ o de N estados iniciales $|1_c, 0_c\rangle$.

3 postselección

Se escogen sólo los estados finales que tengan un valor determinado para una de las dos partículas (e.g. $\{\hat{\sigma}_b|\Omega(t_3)\rangle_A\} = -1$) y se calcula el valor esperado de la correlación según los valores obtenidos en la otra partícula ($\{\hat{\sigma}_c|\Omega(t_3)\rangle_B\}$) sobre estos mismos estados seleccionados. Este caso tal vez quede más claro al final de la siguiente sección.

2.2.4. Experimento de Bell en el Marco Factual

Haré un análisis factual del experimento que “viola” la desigualdad de Bell. Comienzo con una serie de definiciones:

- Par Ontológico

Un par ontológico $|\Omega(t_0)\rangle_{1,2}$ es aquél que existe debido a la interacción entre 1 y 2. Es la descripción completa y conocida de un sistema en un instante dado, t_0 .

- Entorno Causal Futuro de $S(\tau_0)$ en $t = \tau_1$

El entorno causal futuro de $S(\tau_0)$ en $t = \tau_1$ es una superficie espacial, ortogonal a la trayectoria coordenada del tiempo propio de S y por lo tanto paralela a la superficie $(0, x, y, z)$ en el sistema de coordenadas de S en reposo⁸. Esta superficie intersecta con $(t, 0)$ en el punto $(\tau_1, 0)$ y está delimitada por el radio causal de S definido por el cono de luz, $x^2 = (\tau_1 - \tau_0)^2$. El entorno causal futuro de $S(\tau_0)$ en $t = \tau_1$ se denota por ${}^{\tau_1}_{\tau_0}\delta^+S$ y se define matemáticamente como

$${}^{\tau_1}_{\tau_0}\delta^+S = \{(t_1, x) \mid x^2 \leq (\tau_1 - \tau_0)^2 \wedge t_1 = \tau_1\} .$$

(Simétricamente se define el Entorno Causal Pasado de S en $t = \tau_{-1}$ ${}^{\tau_0}_{\tau_{-1}}\delta^-S$).

- Entorno Causal Futuro de $|\Omega(\tau_0)\rangle_{1,2}$ en $t = t_1$

El entorno causal futuro de un par ontológico se define a partir del centro de masa en reposo de este par. Veamos:

- el par ontológico se encuentra en interacción en el instante τ_0 , pero después uno de los componentes del par se separa con velocidad v' respecto al otro componente.
- el centro de masa μ de este par está en reposo, las dos componentes se separan de este centro de masa, una con velocidad v_1 y la otra con velocidad $v_2 = -v_1$.
- a cada tiempo t_i del sistema de coordenadas de μ le corresponde un tiempo propio $\tau_i = t_i\sqrt{(1 - v_1^2)} = t_i\sqrt{(1 - v_2^2)} = t_i\sqrt{(1 - v^2)}$ que es igual para los dos componentes del par, además $\tau_0 = t_0$.

Ahora sí, con estos elementos se define el entorno causal futuro de $\mu(t_0)$ en $t = t_1 = \frac{\tau_1}{\sqrt{(1 - v^2)}}$ de manera equivalente a ${}^{\tau_1}_{\tau_0}\delta^+S$ y su expresión matemática queda como

$${}^{t_1}_{t_0}\delta^+\mu = \left\{ (t_1, x) \mid x^2 \leq (t_1 - t_0)^2 \wedge t_1 = \frac{\tau_1}{\sqrt{(1 - v^2)}} \right\} .$$

⁸En adelante sólo usaré una dimensión espacial x y el sistema de unidades dado por $c = 1$ para simplificar la notación.

■ Operador de Evolución Completa

Un operador de evolución completa \hat{T} es aquél que describe la evolución de un par ontológico en t_0 al estado ontológico de su entorno causal futuro en t_1 como

$$|\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu} = \hat{T}|\Omega(t_0)\rangle_{1,2} .$$

En el caso del experimento de la desigualdad de Bell tenemos el par ontológico inicial $|\Omega(t_0)\rangle_{AB}$. Al tiempo τ_1 la partícula A se separa con velocidad v_A en una dirección y la partícula B con velocidad $v_B = -v_A$ en la dirección opuesta. Al tiempo τ_3 de cada partícula se hace una medición de $\hat{\sigma}_k$ según distintas orientaciones seleccionadas, \hat{k} .

Ahora nos colocamos en el sistema de coordenadas (t, x) del centro de masa en reposo, μ y por simplicidad hacemos $\tau_1 = t_1 = 0$, de este modo $\tau_3 - \tau_1 = \tau_3$. Según este sistema de coordenadas, el punto donde ocurre la medición sobre la partícula A será (t_3, x_3) ,

$$\text{con } t_3^2 = \frac{\tau_3^2}{(1 - v_A^2)} \quad \text{y } x_3 = v_A t_3 .$$

Análogamente para B , la medición ocurre en el punto (t'_3, x'_3) ,

$$\text{con } t'_3 = \frac{\tau_3}{(1 - v_B^2)} = t_3^2 \quad \text{y } x'_3 = v_B t_3 = -x_3 ;$$

i.e., $(t'_3, x'_3) = (t_3, -x_3)$.

Entonces construimos el entorno causal futuro de $\mu(0)$ en t_3 ,

$${}_{t_3} \delta^+ \mu = \left\{ (t_3, x) \mid x^2 \leq t_3^2 \wedge t_3 = \frac{\tau_3}{\sqrt{(1 - v^2)}} \right\} \quad \text{con } v^2 = v_A^2 = v_B^2$$

(evidentemente $(t_3, \pm x_3) \in {}_{t_3} \delta^+ \mu$ pues $x_3^2 = v^2 t_3^2 \leq t_3^2$ ya que $v^2 \leq 1$) y proponemos operadores de evolución completa \hat{T}_i que llevan al par ontológico inicial, $|\Omega(t_1 = 0)\rangle_{AB}$, al estado ontológico de su entorno causal futuro, $|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu}$.

¿Cómo son estos \hat{T}_i 's?

Por definición,

$$\hat{T}_i = |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu} {}_{AB} \langle \Omega(0) | .$$

Así, la forma más general de un operador \hat{T}_i que describe la evolución de un par ontológico $|\Omega(0)\rangle_{AB}$ inicial a su entorno causal futuro $|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu}$, entorno en el que tanto en A como en B ocurre una medición de $\hat{\sigma}$ con orientaciones respectivas $\hat{k}_a \hat{k}_b$, es

$$\hat{T}_i = |\Omega(\tau_3)\rangle_A |\hat{k}_a\rangle_{D_A} |\Omega(\tau_3)\rangle_B |\hat{k}_b\rangle_{D_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} {}_{AB}\langle\Omega(0)|$$

construido con los siguientes elementos:

- $|\Omega(\tau_3)\rangle_A |\hat{k}_a\rangle_{D_A}$, el par ontológico compuesto por el estado ontológico de la partícula A en τ_3 y el estado ontológico del detector sobre A en ese instante.
- $|\Omega(\tau_3)\rangle_B |\hat{k}_b\rangle_{D_B}$, el par ontológico compuesto por el estado ontológico de la partícula B en τ_3 y el estado ontológico del detector sobre B en ese instante.
- $|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}}$, el estado ontológico del conjunto formado por {el entorno causal futuro de $\mu(0)$ en t_3 } menos {los pares ontológicos AD_A , BD_B en t_3 }.
- ${}_{AB}\langle\Omega(0)|$, el estado ontológico del par ontológico inicial, AB .

Cuando a los \hat{T}_i 's se les imponen condiciones a la frontera, la forma que estos operadores asumen debe ser compatible con estas condiciones a la frontera. Por ejemplo, en los sistemas 1, 2 y 3 de la sección anterior se imponen condiciones a la frontera de orientaciones \hat{k}_a, \hat{k}_b determinadas, que dan lugar a ciertos operadores \hat{T}_i 's para cada sistema. Veamos.

Para el sistema 1, se tienen las condiciones a la frontera $\hat{k}_a = \hat{a}$, $\hat{k}_b = \hat{b}$ y entonces los \hat{T}_i 's asumen 4 formas distinguibles:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A} |0_b, \hat{b}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} {}_{AB}\langle\Omega(0)| ; \\ \hat{T}_2 &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A} |1_b, \hat{b}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} {}_{AB}\langle\Omega(0)| ; \\ \hat{T}_3 &= |1_a, \hat{a}\rangle_{AD_A} |0_b, \hat{b}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} {}_{AB}\langle\Omega(0)| ; \\ \hat{T}_4 &= |1_a, \hat{a}\rangle_{AD_A} |1_b, \hat{b}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} {}_{AB}\langle\Omega(0)| . \end{aligned}$$

La distinguibilidad de estos operadores está dada por lo que conocemos sobre el estado final del sistema.

Si además imponemos la condición de frontera para el estado inicial $|\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a, 1_a\rangle_{AB}$, esto tomando un ensamble de N estados iniciales $|0_a, 1_a\rangle_{AB}$, y hacemos N mediciones, la evolución de estos estados estará dada por

$$\hat{T}_1 |0_a, 1_a\rangle_{AB} = |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A} |0_b, \hat{b}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ;}$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}_2|0_a, 1_a\rangle_{AB} &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|1_b, \hat{b}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} \\
&\quad N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ;} \\
\hat{T}_3|0_a, 1_a\rangle_{AB} &= |1_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|0_b, \hat{b}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} \\
&\quad 0 \text{ veces ;} \\
\hat{T}_4|0_a, 1_a\rangle_{AB} &= |1_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|1_b, \hat{b}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} \\
&\quad 0 \text{ veces .}
\end{aligned}$$

Este es un claro ejemplo de preselección, en el que se eliminan los casos donde \hat{T}_3 y \hat{T}_4 suceden al imponer la condición de frontera $|\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a, 1_a\rangle_{AB}$ y se adquiere un ensamble estadístico particular para los operadores \hat{T}_1 y \hat{T}_2 .

Ahora bien, para el sistema 2 (*ac*) los \hat{T}_i 's asumen *otras* 4 formas distinguibles:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_5 &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ; \\
\hat{T}_6 &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ; \\
\hat{T}_7 &= |1_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ; \\
\hat{T}_8 &= |1_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | .
\end{aligned}$$

De nuevo tomamos un ensamble con N estados iniciales $|\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a, 1_a\rangle_{AB}$ y hacemos N mediciones *ac*, obteniendo un ensamble de operadores de evolución completa definido por

$$\begin{aligned}
\hat{T}_5|0_a, 1_a\rangle_{AB} &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} \\
&\quad N \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;} \\
\hat{T}_6|0_a, 1_a\rangle_{AB} &= |0_a, \hat{a}\rangle_{AD_A}|1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} \\
&\quad N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ;} \\
\hat{T}_7|0_a, 1_a\rangle_{AB} &\quad \text{y} \quad \hat{T}_8|0_a, 1_a\rangle_{AB} \\
&\quad 0 \text{ veces .}
\end{aligned}$$

Por último, para el sistema *bc* los \hat{T}_i 's asumen las 4 formas distinguibles:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_9 &= |0_b, \hat{b}\rangle_{AD_A}|0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ; \\
\hat{T}_{10} &= |0_b, \hat{b}\rangle_{AD_A}|1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ; \\
\hat{T}_{11} &= |1_b, \hat{b}\rangle_{AD_A}|0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ; \\
\hat{T}_{12} &= |1_b, \hat{b}\rangle_{AD_A}|1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B}|\Omega(t_3)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{AD_A BD_B\}} AB \langle \Omega(0) | ,
\end{aligned}$$

imponemos la condición de frontera $|\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a, 1_a\rangle_{AB}$ y obtenemos ahora el ensamble de operadores \hat{T}_i 's con la distribución

$$\hat{T}_9 |0_a, 1_a\rangle_{AB} = |0_b, \hat{b}\rangle_{AD_A} |0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta^+\mu \setminus \{AD_A BD_B\}} \\ N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}$$

$$\hat{T}_{10} |0_a, 1_a\rangle_{AB} = |0_b, \hat{b}\rangle_{AD_A} |1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta^+\mu \setminus \{AD_A BD_B\}} \\ N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}$$

$$\hat{T}_{11} |0_a, 1_a\rangle_{AB} = |1_b, \hat{b}\rangle_{AD_A} |0_c, \hat{c}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta^+\mu \setminus \{AD_A BD_B\}} \\ N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}$$

$$\hat{T}_{12} |0_a, 1_a\rangle_{AB} = |1_b, \hat{b}\rangle_{AD_A} |1_c, \hat{c}\rangle_{BD_B} |\Omega(t_3)\rangle_{\delta^+\mu \setminus \{AD_A BD_B\}} \\ N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ,}$$

donde queda explícita la implicación de imponer las condiciones de frontera $\hat{k}_a = \hat{b}$, $\hat{k}_b = \hat{c}$ y $|\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a, 1_a\rangle_{AB}$ con $\hat{b} \neq \hat{a}$ y $\hat{c} \neq \hat{a}$.

¿Pero qué significado físico tienen estos operadores y de dónde surge la distribución estadística que se les asigna?

Los operadores de evolución completa representan físicamente la evolución de un estado ontológico (“ente”) inicial a todo su entorno causal futuro dados un tiempo inicial y un tiempo final. Es aquello que se manifiesta en los sistemas, si asumimos que entre el tiempo inicial y el tiempo final este ente pudo haber interactuado con todo aquello con lo que está conectado causalmente en ese intervalo de tiempo y que la descripción entera de todo con lo que pudo haber interactuado está contenida en su entorno causal futuro, ${}^{t_f}_{t_i}\delta^+$, al tiempo final.

Los operadores de evolución completa son lo que sucede en un sistema, lo que actúa sobre un ente, y lo que comprende todo lo que ignoramos sobre el entorno al que está sujeto dicho ente. La distribución estadística que se les asigna surge de lo que conocemos sobre la evolución de estos entes, mientras más sabemos sobre su entorno causal futuro, más tipos distinguibles de operadores \hat{T}_i 's podemos construir, hasta que, si conociéramos el estado ontológico de todo el $\delta^+\mu$ conoceríamos la evolución determinista del ente inicial dada por un \hat{T}_n particular, distinguible de todos los demás \hat{T}_i 's que podrían haber actuado sobre el ente dado.

Usualmente describimos la evolución de entes “aislados” (separados del par ontológico que conforman) según su estado inicial y su estado final y para ellos utilizamos operadores de evolución aislada, definidos a continuación:

- Operador de Evolución Aislada

Un operador de evolución aislada \hat{E}_A es aquél que describe la evolución del estado ontológico de un ente aislado A según su estado inicial en t_0 y su estado final en t_1 como

$$|\Omega(t_1)\rangle_A = \hat{E}_A |\Omega(t_0)\rangle_A .$$

Es aquello que matemáticamente usamos para describir la evolución de cualquier partícula al considerarla aislada.

Estos operadores de evolución no tienen sentido físico, los que tienen sentido físico son los operadores \hat{T}_i 's. Los operadores de evolución \hat{E}_{A_i} 's están determinados por los operadores \hat{T}_i 's como sigue: asumimos que el ente A es parte del par ontológico $|\Omega(t_0)\rangle_{AB}$ y que este par evoluciona de acuerdo a \hat{T}_i al estado $|\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu}$; recordemos la forma del operador \hat{T}_i :

$$\hat{T}_i = |\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu} {}_{AB}\langle\Omega(t_0)| .$$

Como este operador actúa sobre $|\Omega(t_0)\rangle_{AB}$ y nosotros queremos un operador que actúe sólo sobre $|\Omega(t_0)\rangle_A$ hacemos a \hat{T}_i actuar sobre $|\Omega(t_0)\rangle_B$:

$$\begin{aligned} \hat{T}_i |\Omega(t_0)\rangle_B &= |\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu} {}_{AB}\langle\Omega(t_0)|\Omega(t_0)\rangle_B \\ &= |\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu} {}_A\langle\Omega(t_0)|_B\langle\Omega(t_0)|\Omega(t_0)\rangle_B \\ &= |\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu} {}_A\langle\Omega(t_0)| . \end{aligned}$$

Además, el operador de evolución aislada nos devuelve sólo el estado $|\Omega(t_1)\rangle_A$ dentro de todo el conjunto de estados ontológicos en $\delta+\mu$, entonces hacemos actuar a ${}_{\delta+\mu\setminus\{A\}}\langle\Omega(t_1)|$ sobre la expresión anterior, para obtener sólo aquello que nos interesa. Así vemos que el operador de evolución \hat{E}_{A_i} correspondiente estará dado por

$$\begin{aligned} {}_{\delta+\mu\setminus\{A\}}\langle\Omega(t_1)|\hat{T}_i|\Omega(t_0)\rangle_B &= |\Omega(t_1)\rangle_{AA}\langle\Omega(t_0)| \\ &= \hat{E}_{A_i} \end{aligned}$$

donde queda explícita la importancia de las condiciones a la frontera $|\Omega(t_1)\rangle_{\delta+\mu\setminus\{A\}}$ y el modo en el que determinan la evolución de un ente aislado.

Asumiendo que todo experimento puede verse como una descripción de la forma

$$|\Omega(t_1)\rangle_A = \hat{E}_A |\Omega(t_0)\rangle_A$$

donde \hat{E}_A está determinado por el operador \hat{T} que actuó en dicho experimento, regresamos a los sistemas 1, 2 y 3 de la sección 2.2.3 para calcular cómo es \hat{E}_A en cada caso.

■ sistema 1

Condiciones a la frontera:

$$\hat{k}_a = \hat{a} , \hat{k}_b = \hat{b} \text{ y } |\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a 1_a\rangle_{AB}$$

Operadores de evolución aislada, \hat{E}_{Ai} , \hat{E}_{Bi} :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{A1} &= \delta^{+\mu} \setminus \{A\} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_1 | 1_a \rangle_B \\ &= |0_a\rangle_{AA} \langle 0_a| \\ &N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{A2} &= \delta^{+\mu} \setminus \{A\} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_2 | 1_a \rangle_B \\ &= |0_a\rangle_{AA} \langle 0_a| \\ &N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ,} \end{aligned}$$

i.e., dado un ensamble de N estados iniciales $|0_a 1_a\rangle_{AB}$, la evolución aislada de A está dada por el operador $|0_a\rangle_{AA} \langle 0_a|$ las N veces que se realiza el experimento.

$$\begin{aligned} \hat{E}_{B1} &= \delta^{+\mu} \setminus \{B\} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_1 | 0_a \rangle_A \\ &= |0_b\rangle_{BB} \langle 1_a| \\ &N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{B2} &= \delta^{+\mu} \setminus \{B\} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_2 | 0_a \rangle_A \\ &= |1_b\rangle_{BB} \langle 1_a| \\ &N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \text{ veces ,} \end{aligned}$$

i.e., dado un ensamble de N estados iniciales $|0_a 1_a\rangle_{AB}$ sobre los que se realiza un experimento tipo Bell, la evolución aislada de B está dada por el operador $|0_b\rangle_{BB} \langle 1_a|$ un número $N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$ de veces y por el operador $|1_b\rangle_{BB} \langle 1_a|$ un número $N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$ de veces.

Vemos claramente que la forma de los operadores de evolución en A y en B está relacionada a través del operador \hat{T}_i que los determina. Es decir, si ocurre \hat{T}_1 necesariamente ocurren \hat{E}_{A1} y \hat{E}_{B1} ; si ocurre \hat{T}_2 , necesariamente ocurren \hat{E}_{A2} y \hat{E}_{B2} ; pero no hay forma de que en el mismo sistema ocurran \hat{E}_{A1} y \hat{E}_{B2} , simplemente por las condiciones detrás de la construcción aquí presentada. (Pienso que despreciar las condiciones que dan lugar a este tipo de “apareamientos” en la teoría es lo que experimentalmente emerge como correlaciones inexplicables o estados enredados de formas no-locales).

El valor esperado de la correlación $\hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b$ está dado por la suma de medir $\hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b$ sobre todos los posibles estados finales $|\Omega(t_3)\rangle_{AB}$, según la probabilidad de cada estado. Utilizando los operadores de evolución aislada, esto queda

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b \rangle &= \frac{1}{N} \sum_i A_i B_i \langle \Omega(t_0) | \hat{E}_{A_i}^\dagger \hat{E}_{B_i}^\dagger | \hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b | \hat{E}_{B_i} \hat{E}_{A_i} | \Omega(t_0) \rangle_{A_i B_i} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_i A_i B_i \langle 0_a 1_a | | 0_a \rangle_{A_i A_i} \langle 0_a | \hat{E}_{B_i}^\dagger | \hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b | \hat{E}_{B_i} | 0_a \rangle_{A_i A_i} \langle 0_a | | 0_a 1_a \rangle_{A_i B_i} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_i B_i \langle 1_a | \hat{E}_{B_i}^\dagger [A_i \langle 0_a | \hat{\sigma}_a | 0_a \rangle_{A_i}] \hat{\sigma}_b | \hat{E}_{B_i} | 1_a \rangle_{B_i} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}} B_i \langle 1_a | | 1_a \rangle_{B_i B_i} \langle 0_b | \times 1 \times \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_{B_i B_i} \langle 1_a | | 1_a \rangle_{B_i} \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{i=N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} + 1}^N B_i \langle 1_a | | 1_a \rangle_{B_i B_i} \langle 1_b | \times 1 \times \hat{\sigma}_b | 1_b \rangle_{B_i B_i} \langle 1_a | | 1_a \rangle_{B_i} \\
 &= \frac{1}{N} (N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2})_{B_i} \langle 0_b | \times 1 \times 1 | 0_b \rangle_{B_i} \\
 &+ \frac{1}{N} (N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2})_{B_i} \langle 1_b | \times 1 \times -1 | 1_b \rangle_{B_i} \\
 &= \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} (1) + \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} (-1) \\
 &= -\cos \theta_{ab}
 \end{aligned}$$

donde se utilizó que $\hat{E}_{A_i} = |0_a\rangle_{A_i A_i} \langle 0_a| \forall i$, que $\hat{E}_{B_i} = |0_b\rangle_{B_i B_i} \langle 1_a|$ para $i \in (1, N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2})$ (haciendo un ordenamiento de índices, pero respetando la estadística de los \hat{E}_{B_i} 's) y que $\hat{E}_{B_i} = |1_b\rangle_{B_i B_i} \langle 1_a|$ para $i \in (N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} + 1, N)$. Así se verifica que el valor esperado de la correlación es compatible con la predicción cuántica.

■ **sistema 2**

De manera completamente análoga se obtiene $\langle \hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_c \rangle = -\cos \theta_{ac}$. Vayamos, entonces, directo al caso del sistema tres.

■ **sistema 3**

Condiciones a la frontera:

$$\hat{k}_a = \hat{b}, \hat{k}_b = \hat{c} \text{ y } |\Omega(0)\rangle_{AB} = |0_a 1_a\rangle_{AB}.$$

Operadores de evolución aislada, $\hat{E}_{A_i}, \hat{E}_{B_i}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_{A_9} &= \delta^{+\mu} \setminus \{A\} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_9 | 1_a \rangle_B \\
 &= |0_b\rangle_{AA} \langle 0_a| \\
 &N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{A10} &= \delta^{+\mu \setminus \{A\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{10} | 1_a \rangle_B \\
&= |0_b\rangle_{AA} \langle 0_a| \\
&\qquad N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{A11} &= \delta^{+\mu \setminus \{A\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{11} | 1_a \rangle_B \\
&= |1_b\rangle_{AA} \langle 0_a| \\
&\qquad N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{A12} &= \delta^{+\mu \setminus \{A\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{12} | 1_a \rangle_B \\
&= |1_b\rangle_{AA} \langle 0_a| \\
&\qquad N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ,}
\end{aligned}$$

i.e., dado un ensamble de N estados iniciales $|0_a 1_a\rangle_{AB}$, la evolución aislada de A está dada por el operador $|0_b\rangle_{AA} \langle 0_a|$ un número $N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$ de veces y por el operador $|1_b\rangle_{AA} \langle 0_a|$ un número $N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$ de veces.

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{B9} &= \delta^{+\mu \setminus \{B\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_9 | 0_a \rangle_A \\
&= |0_c\rangle_{BB} \langle 1_a| \\
&\qquad N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{B10} &= \delta^{+\mu \setminus \{B\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{10} | 0_a \rangle_A \\
&= |1_c\rangle_{BB} \langle 1_a| \\
&\qquad N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{B11} &= \delta^{+\mu \setminus \{B\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{11} | 0_a \rangle_A \\
&= |0_c\rangle_{BB} \langle 1_a| \\
&\qquad N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{B12} &= \delta^{+\mu \setminus \{B\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{12} | 0_a \rangle_A \\
&= |1_c\rangle_{BB} \langle 1_a| \\
&\qquad N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ,}
\end{aligned}$$

i.e., dado un ensamble de N estados iniciales $|0_a 1_a\rangle_{AB}$, la evolución aislada de B está dada por el operador $|0_c\rangle_{BB} \langle 1_a|$ un número $N \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}$ de veces y por el operador $|1_c\rangle_{BB} \langle 1_a|$ un número $N \times \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}$ de veces.

De nuevo, mostraré cómo se desarrolla el cálculo del valor esperado de la correlación $\hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c$ utilizando los operadores de evolución aislada. Para ello ordenaré primero los índices de los N sistemas según la ocurrencia de cada \hat{T}_i como sigue:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_i &= \hat{T}_9 \text{ para } i \in (1, N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} = N_1) ; \\
\hat{T}_i &= \hat{T}_{10} \text{ para } i \in (N_1 + 1, N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} = N_2) ; \\
\hat{T}_i &= \hat{T}_{11} \text{ para } i \in (N_2 + 1, N \times (\cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) = N_3) ; \\
\hat{T}_i &= \hat{T}_{12} \text{ para } i \in (N_3 + 1, N) .
\end{aligned}$$

Se puede verificar que se respeta la estadística de ocurrencias de cada tipo de operador \hat{T}_i dada anteriormente. Ahora sí, hago la suma sobre todos los índices, pero separada en cuatro grupos distintos:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c \rangle &= \frac{1}{N} \sum_i \langle \Omega(t_0) | \hat{E}_{Ai}^\dagger \hat{E}_{Bi}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{Bi} \hat{E}_{Ai} | \Omega(t_0) \rangle_{AiBi} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_1} \langle 0_a 1_a | \hat{E}_{A9}^\dagger \hat{E}_{B9}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B9} \hat{E}_{A9} | 0_a 1_a \rangle_{AB} \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \langle 0_a 1_a | \hat{E}_{A10}^\dagger \hat{E}_{B10}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B10} \hat{E}_{A10} | 0_a 1_a \rangle_{AB} \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_2+1}^{N_3} \langle 0_a 1_a | \hat{E}_{A11}^\dagger \hat{E}_{B11}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B11} \hat{E}_{A11} | 0_a 1_a \rangle_{AB} \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_3+1}^N \langle 0_a 1_a | \hat{E}_{A12}^\dagger \hat{E}_{B12}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B12} \hat{E}_{A12} | 0_a 1_a \rangle_{AB} .
\end{aligned}$$

Sustituyo con la forma que adquiere cada \hat{E}_{Ai} según el grupo de índices en el que está contenido:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_1} \langle 0_a 1_a | | 0_a \rangle_{AA} \langle 0_b | \hat{E}_{B9}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B9} | 0_b \rangle_{AA} \langle 0_a | | 0_a 1_a \rangle_{AB} \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \langle 0_a 1_a | | 0_a \rangle_{AA} \langle 0_b | \hat{E}_{B10}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B10} | 0_b \rangle_{AA} \langle 0_a | | 0_a 1_a \rangle_{AB} \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_2+1}^{N_3} \langle 0_a 1_a | | 0_a \rangle_{AA} \langle 1_b | \hat{E}_{B11}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B11} | 1_b \rangle_{AA} \langle 0_a | | 0_a 1_a \rangle_{AB} \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_3+1}^N \langle 0_a 1_a | | 0_a \rangle_{AA} \langle 1_b | \hat{E}_{B12}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B12} | 1_b \rangle_{AA} \langle 0_a | | 0_a 1_a \rangle_{AB} .
\end{aligned}$$

Hago a cada \hat{E}_{Ai} actuar sobre su respectivo $|\Omega(0)\rangle_A$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_1} \langle 1_a | \hat{E}_{B9}^\dagger [A \langle 0_b | \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_A] \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B9} | 1_a \rangle_B \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \langle 1_a | \hat{E}_{B10}^\dagger [A \langle 0_b | \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_A] \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B10} | 1_a \rangle_B \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_2+1}^{N_3} \langle 1_a | \hat{E}_{B11}^\dagger [A \langle 1_b | \hat{\sigma}_b | 1_b \rangle_A] \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B11} | 1_a \rangle_B \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_3+1}^N \langle 1_a | \hat{E}_{B12}^\dagger [A \langle 1_b | \hat{\sigma}_b | 1_b \rangle_A] \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B12} | 1_a \rangle_B .
\end{aligned}$$

Ahora sustituyo con los distintos \hat{E}_{Bi} . Además hago la operación de $\hat{\sigma}_b$ sobre sus eigenvalores; al ser eigenvalores ortonormales, queda

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_1} B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 0_c | \times 1 \times \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_{BB} \langle 1_a | 1_a \rangle_B \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 1_c | \times 1 \times \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_{BB} \langle 1_a | 1_a \rangle_B \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_2+1}^{N_3} B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 0_c | \times -1 \times \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_{BB} \langle 1_a | 1_a \rangle_B \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=N_3+1}^N B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 1_c | \times -1 \times \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_{BB} \langle 1_a | 1_a \rangle_B \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_1} B \langle 0_c | \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_B + \frac{1}{N} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} B \langle 1_c | \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_B \\
&- \frac{1}{N} \sum_{i=N_2+1}^{N_3} B \langle 0_c | \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_B - \frac{1}{N} \sum_{i=N_3+1}^N B \langle 1_c | \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_B \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_1} 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} -1 - \frac{1}{N} \sum_{i=N_2+1}^{N_3} 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=N_3+1}^N -1 \\
&= \frac{1}{N} (N_1) + \frac{1}{N} (- (N_2 - N_1)) - \frac{1}{N} (N_3 - N_2) - \frac{1}{N} (- (N - N_3)) \\
&= \frac{1}{N} (N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) - \frac{1}{N} (N \times \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) \\
&- \frac{1}{N} (N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) + \frac{1}{N} (N \times \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) .
\end{aligned}$$

Finalmente factorizo y llego al resultado

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c \rangle &= \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} (\sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} - \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) - \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} (\sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} - \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2}) \\
&= (\cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}) (-\cos \theta_{ac}) \\
&= -\cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac}
\end{aligned}$$

que es precisamente lo que según la mecánica cuántica resulta para estas condiciones \hat{a} , \hat{b} y \hat{c} (cf. apéndice B.2.). Pero lo interesante surge cuando se hace una postselección.

Postselección

Escojamos, por ejemplo, sólo los estados en los que $\hat{\sigma}_b |\Omega(t_3)\rangle_A = 1 |\Omega(t_3)\rangle_A$, i.e., $|\Omega(t_3)\rangle_A = |0_b\rangle$. Por una parte, teniendo el estado inicial $|0_a\rangle$, la predicción cuántica es

$$\langle 0_a | \hat{\sigma}_b | 0_a \rangle = \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} ;$$

y por otra parte, dada la condición de postselección, sólo los operadores \hat{E}_{A9} y \hat{E}_{A10} (de la forma $|0_b\rangle\langle 0_a|$) describen la evolución aislada de $|\Omega(t_0)\rangle_A$, así pues, suponiendo que la postselección consiste de M sistemas:

$$\begin{aligned}
\langle 0_a | \hat{\sigma}_b | 0_a \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A_i \langle \Omega(t_0) | \hat{E}_{A_i}^\dagger | \hat{\sigma}_b | \hat{E}_{A_i} | \Omega(t_0) \rangle_{A_i} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A \langle 0_a | 0_a \rangle_{AA} \langle 0_b | \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_{AA} \langle 0_a | 0_a \rangle_A \\
&= \frac{1}{M} \times (M \times A \langle 0_b | \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_A) = 1 .
\end{aligned}$$

Lo que esto muestra es que la postselección induce una estadística de detección que hace que el valor promedio $\cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$ sea igual a 1, lo que devuelve estados estadísticamente seleccionados “como si” $\theta_{ab} = 2k\pi$ (discusión sobre este punto en el apéndice B.3.).

¿Qué pasa entonces con \hat{E}_{Bi} , $\langle \hat{\sigma}_c \rangle$ y $\langle \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c \rangle$?

Bueno, todos estos M sistemas son estados que evolucionaron del estado inicial $|0_a 1_a\rangle$ al estado de su entorno causal futuro en t_3 por medio de los operadores \hat{T}_9 o \hat{T}_{10} , lo que determina que la evolución en B está dada por

$$\begin{aligned} \hat{E}_{B9} &= \delta^{+\mu \setminus \{B\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_9 | 0_a \rangle_A \\ &= |0_c\rangle_{BB} \langle 1_a| \\ &M \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces ;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{B10} &= \delta^{+\mu \setminus \{B\}} \langle \Omega(t_3) | \hat{T}_{10} | 0_a \rangle_A \\ &= |1_c\rangle_{BB} \langle 1_a| \\ &M \times \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \text{ veces .} \end{aligned}$$

Con esto calcularé los valores esperados $\langle \hat{\sigma}_c \rangle$ y $\langle \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c \rangle$. Haciendo $M_1 = M \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2}$ para separar por índices, queda

$$\begin{aligned} \langle 1_a | \hat{\sigma}_c | 1_a \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M B_i \langle \Omega(t_0) | \hat{E}_{Bi}^\dagger | \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{Bi} | \Omega(t_0) \rangle_{B_i} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M_1} B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 0_c | \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_{BB} \langle 0_a | 0_a \rangle_B \\ &+ \frac{1}{M} \sum_{i=M_1+1}^M B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 1_c | \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_{BB} \langle 0_a | 0_a \rangle_B \\ &= \frac{1}{M} \times (M_1 \times B \langle 0_c | \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_B) \\ &+ \frac{1}{M} \times ((M - M_1) \times B \langle 1_c | \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_B) \\ &= \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \times 1 + \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} \times -1 = -\cos \theta_{ac} , \end{aligned}$$

i.e., es totalmente local y no le importa la postselección que haya tenido lugar en A . Ahora bien, vayamos al análisis del valor esperado de la correlación. Este sí se ve afectado por la postselección.

Aquí lo importante es recalcar que θ_{ac} está relacionado con θ_{ab} a través de θ_{bc} , el ángulo entre las orientaciones \hat{b} y \hat{c} . Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\theta_{ab} = \theta_{ac} + \theta_{bc}$, poniendo como parámetro fijo \hat{c} . Entonces $\theta_{ac} = \theta_{ab} - \theta_{bc}$ y tenemos M estados seleccionados estadísticamente para que $\langle \hat{\sigma}_b \rangle = 1$, o sea estamos en una distribución estadística “como si” θ_{ab} fuera igual a $2k\pi$, lo que nos dice que la distribución estadística tiene que ser “como si” θ_{ac} fuera igual a $2k\pi - \theta_{bc}$, i.e., estamos en una distribución

estadística “como si” $\theta_{ac} = -\theta_{bc}$. Con ello, la distribución de los operadores de evolución aislada sobre B estará dada por

$$\hat{E}_{B9} = |0_c\rangle_{BB}\langle 1_a| \\ M \times \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} = M \times \sin^2 \frac{-\theta_{bc}}{2} \text{ veces ;}$$

$$\hat{E}_{B10} = |1_c\rangle_{BB}\langle 1_a| \\ M \times \cos^2 \frac{\theta_{ac}}{2} = M \times \cos^2 \frac{-\theta_{bc}}{2} \text{ veces ,}$$

donde $\sin^2 \frac{-\theta_{bc}}{2} = \sin^2 \frac{\theta_{bc}}{2}$ y $\cos^2 \frac{-\theta_{bc}}{2} = \cos^2 \frac{\theta_{bc}}{2}$, haciendo $M_1 = M \times \sin^2 \frac{\theta_{bc}}{2}$, el valor esperado tan anunciado queda

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c \rangle &= \frac{1}{M} \sum_i A_i B_i \langle \Omega(t_0) | \hat{E}_{A_i}^\dagger \hat{E}_{B_i}^\dagger | \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B_i} \hat{E}_{A_i} | \Omega(t_0) \rangle_{A_i B_i} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M_1} B \langle 1_a | \hat{E}_{B9}^\dagger [A \langle 0_b | \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_A] \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B9} | 1_a \rangle_B \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{i=M_1+1}^M B \langle 1_a | \hat{E}_{B10}^\dagger [A \langle 0_b | \hat{\sigma}_b | 0_b \rangle_A] \hat{\sigma}_c | \hat{E}_{B10} | 1_a \rangle_B \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M_1} B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 0_c | \times 1 \times \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_{BB} \langle 1_a | 1_a \rangle_B \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{i=M_1+1}^M B \langle 1_a | 1_a \rangle_{BB} \langle 1_c | \times 1 \times \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_{BB} \langle 1_a | 1_a \rangle_B \\ &= \frac{1}{M} \times (M_1 \times B \langle 0_c | \hat{\sigma}_c | 0_c \rangle_B) \\ &\quad + \frac{1}{M} \times ((M - M_1) \times B \langle 1_c | \hat{\sigma}_c | 1_c \rangle_B) \\ &= \sin^2 \frac{\theta_{bc}}{2} \times 1 + \cos^2 \frac{\theta_{bc}}{2} \times -1 = -\cos \theta_{bc} , \end{aligned}$$

lo que muestra que la correlación “no-local” surge debido a la estadística de distribución inducida por la postselección. Además, en el resultado de $\langle \hat{\sigma}_c \rangle$ se puede ver que esta estadística no afecta directamente la estadística en B , sólo afecta el valor de $\langle \hat{\sigma}_b \hat{\sigma}_c \rangle$ cuando se toman en cuenta las condiciones impuestas por esta postselección.

Entonces, la teoría factual dice que lo que tenemos son pares ontológicos que evolucionan de forma determinista a estados ontológicos de entornos causales futuros según un único operador de evolución \hat{T} , cada que ocurre una evolución ocurre un tipo de operador \hat{T} que por desconocimiento se vuelve indistinguible de otros operadores \hat{T}_i y por ello conviene agruparlos en distribuciones estadísticas según lo que observamos.

Con estos operadores, en estas distribuciones y la evolución de pares ontológicos de dos partículas AB con momento angular total igual a cero, recuperamos los valores esperados para distintos operadores de $\hat{\sigma}_z$ según la dirección de medición y lo más importante, recuperamos los valores esperados de las correlaciones

“no-locales” $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_{z'} \rangle$. Se ve que tanto las predicciones de la mecánica cuántica se recuperan, los valores de las correlaciones “no-locales” emergen de forma local y que la desigualdad de Bell se cumple. Lo único necesario en el experimento y en las ecuaciones que lo describen es cuidar que la realidad descrita sea factual, es decir,

- Cuidar de no asumir que pudieron haber sucedido dos cosas distintas (por ejemplo dos evoluciones distintas descritas por dos operadores \hat{T} distintos) sobre un mismo sistema en un mismo instante.
- Cuidar de no comparar estadísticas correspondientes a preparaciones o postselecciones distintas (por ejemplo, comparar $E(a, b)$ para un estado inicial $|0_a 1_a\rangle$ con $E(b, c)$ para un estado inicial $|0_b 1_b\rangle$), ya que ello distorsiona al promedio llevándolo a valores que nunca asume en la realidad.

2.3. Salto de Factualidad a No-Contextualidad

Recordemos que si una propiedad tiene asociado un realismo no-contextual, este realismo es local en el sentido de que independientemente de que “algo” viva dentro del cono de luz de esta propiedad o no, este “algo” no afecta la realidad de dicha propiedad, precisamente por la no-contextualidad.

De manera similar, si una propiedad tiene asociado un realismo factual, este realismo es no-contextual en el sentido de que tanto el contexto como la propiedad emergen juntos debido a una evolución determinista. Así, el contexto no afecta la realidad de dicha propiedad, pues la propiedad no emerge en dependencia del contexto, sino que es la historia causal la que determina la realidad de los dos, propiedad y contexto juntos.

Entonces, para poder afirmar que la mecánica cuántica es no-local se necesita que sea contextual y para ello se necesita que sea no-factual. Para poder afirmar que la mecánica cuántica es no-factual se necesita demostrar la imposibilidad de variables ocultas factuales. Comencemos entonces por postular una teoría de variables ocultas factuales.

Capítulo 3

Variables Ocultas Factuales

Las variables ocultas factuales son aquéllas que determinan la forma del operador de evolución completa, \hat{T} , que actúa sobre un par ontológico dado $|\Omega\rangle_{1,2}$.

De la información contenida en las variables ocultas factuales se pueden extraer:

- las condiciones a la frontera del sistema que queremos describir.
- el estado ontológico del sistema a todo tiempo t , $t \in (t_i, t_f)$.
- el estado ontológico del entorno causal futuro de $|\Omega\rangle_{1,2}$ en $t = t_f$.

Las variables ocultas factuales determinan la evolución de todo sistema a su entorno causal futuro. Así, estas variables posibilitan una descripción determinista de la mecánica cuántica.

Lo “oculto” de estas variables proviene de la imposibilidad física de conocer todos los valores de los grados de libertad que determinan la evolución de un sistema. Lo único que podemos conocer es el resultado de la acción de estos grados de libertad; el resultado es el resumen de todas las interacciones que dieron lugar a este resultado.

Al desconocer las variables ocultas factuales, tenemos una descripción probabilística, dada por el estado cuántico del sistema.

3.1. Teoremas de Imposibilidad

En el capítulo anterior vimos que la desigualdad de Bell se cumple al asumir variables ocultas factuales. Lo que esto señala es que el teorema de imposibilidad original asume no-factuality, i.e., asume variables ocultas locales y no-factuales.

De manera similar, en todos los teoremas de imposibilidad que desacreditan a la localidad o a la no-contextualidad expuestos en el capítulo 1 (Peres, Kochen-Specker, GHZ) se asumen variables ocultas no-factuales.

La no-factualidad es, por ejemplo, evidente en Kochen-Specker: el desarrollo de este teorema de imposibilidad demanda realismo simultáneo de la observable S_u^2 en 31 direcciones que no conmutan todas entre sí (Peres, 1991 [24]). Esta clase de realismo es imposible de detectar experimentalmente, simplemente por la imposibilidad de existencia simultánea de dos acciones contradictorias (como la imposibilidad de salir corriendo a la derecha y a la izquierda en el mismo instante). Sin embargo, esta demanda se ha hecho basada en la noción de que, dada una partícula, se podría elegir cualquiera de entre las 31 direcciones para medir S_u^2 y así esta partícula habría de poseer un realismo asociado a todas ellas antes de la medición. Dicho realismo es no-factual: asume que podrían suceder 31 cosas distintas sobre un mismo sistema en un mismo instante. De nuevo, el hecho de que se desconozca la medición que se llevará a cabo, no implica que cualquier cosa pudo haber sucedido. Sólo podía suceder lo que sucedió. Factualidad.

De esta forma, al supuesto de no-contextualidad le ha tenido sin cuidado si un suceso es parte de la factualidad o no. Ha asumido que todo aquello que tiene una probabilidad de suceder debe ser parte de la teoría y lo toma como parte de la realidad.

Así como las 31 realidades de Kochen-Specker no pueden co-existir, tampoco pueden co-existir las 4 realidades que se asumen para cada medición en la tabla de Peres: $A(\hat{a})$ y $A(\hat{a}')$ son excluyentes entre sí, y $B(\hat{b})$ y $B(\hat{b}')$ son excluyentes entre sí. Peres asume realismo no-factual al exigir que la tabla sea llenada con valores concretos para todas estas 4 realidades en cada una de las mediciones.

Peres argumenta que no poder llenar la tabla sería equivalente a no poder suponer resultados para experimentos que no se han llevado a cabo, pero el problema no surge por suponer resultados para experimentos que no se han llevado a cabo, esto claro que se puede. Lo que no se puede suponer es que todos esos resultados podrían emerger simultáneamente en un mismo sistema, o suponer que una vez que sucedió uno de ellos ($A(\hat{a})$, por ejemplo), también podría haber sucedido el otro ($A(\hat{a}')$). Antes de realizar el experimento puedo suponer cualquier cosa sobre el futuro del sistema, pero no le puedo asociar realismo a cada una de estas suposiciones. Después de realizar el experimento puedo saber cuál de todas las suposiciones era parte de la realidad y descartar todas las demás como predicciones que simplemente no sucedieron. El realismo se asocia, así, a la única suposición que al final sucedió.

En GHZ se asume realismo simultáneo para dos orientaciones de espín (x y y) en cada una de las tres partículas sobre las que se trabaja. De nuevo, este realismo es imposible de observar.

Entonces, si asumimos que la realidad es factual, los teoremas de imposibilidad tendrán que ser reformulados dentro de un marco en el que no se puedan comparar realidades que de hecho no sucedieron y se tendrán que descartar como reales todas (menos una) las predicciones a futuro basadas en probabilidades, interpretando a la física de probabilidades como una física de incertidumbres respecto a lo que de hecho va a suceder y no como física de potencialidades en la que todos los probables desenlaces tendrían que estar dotados de realismo.

Después de este desarrollo es cuestionable el determinismo de la teoría, ya que puede haber realismo unas veces asociado a la orientación x , otras asociado a y y otras asociado a z “arbitrariamente”. Es importante, por lo tanto, recalcar que el determinismo y el realismo juegan un papel dinámico. El determinismo impone la forma en que el realismo varía con el paso del tiempo. Las variables ocultas factuales son dinámicas, cambian con el tiempo y las interacciones. No son fijas e imperturbables, como se había asumido que tendrían que ser originalmente.

Finalmente, dándole un poco la vuelta a la lógica detrás de estos teoremas de imposibilidad, es válido afirmar que éstos no demuestran que la mecánica cuántica sea no-local o contextual, sino que demuestran la imposibilidad de englobar a la mecánica cuántica en una teoría de variables ocultas no-factuales.

3.2. Implicaciones

Para examinar qué implicaciones tiene el proponer la existencia de variables ocultas factuales, es preciso hacer una revisión de la mecánica cuántica que especifique cómo se modificaría esta teoría en el marco ontológico y factual.

En una teoría que incluye variables ocultas factuales, las predicciones de la mecánica cuántica se conservan por construcción, lo que cambia es la interpretación de lo que la teoría nos dice sobre la realidad.

3.2.1. Sobre el Objeto

En la mecánica cuántica, la interpretación que se hace sobre la naturaleza de los objetos está contenida en los postulados 1, 2 y 5.

A continuación enuncio (traducción literal de Zettili [27]) y comento sobre cada uno de estos postulados. Todos los comentarios están basados en las herramientas y suposiciones dadas en el capítulo 2.

Postulados

- **Postulado 1.** El estado de cualquier sistema físico está especificado en cada tiempo t por un vector de estado $|\psi(t)\rangle$ en un espacio de Hilbert, \mathcal{H} ;

$|\psi(t)\rangle$ contiene (y sirve de base para extraer) toda la información necesaria sobre el sistema. Cualquier superposición de vectores de estado es también un vector de estado.

Comentario. El vector de estado $|\psi(t)\rangle$ puede o no ser una descripción ontológica del sistema, contiene la probabilidad (en términos de lo que se sabe sobre el sistema) de emergencia de los distintos estados ontológicos asociados al sistema y en este sentido contiene toda la información que se tiene sobre el sistema. Cualquier superposición de vectores de estado es un vector de estado con estas cualidades. La primera parte del enunciado del postulado quedaría:

“La información que tenemos sobre cualquier sistema físico está especificada en cada tiempo t por un vector de estado $|\psi(t)\rangle$ en un espacio de Hilbert, \mathcal{H} .”

- **Postulado 2.** A cada cantidad física medible A , llamada observable o variable dinámica, le corresponde un operador lineal Hermitiano \hat{A} cuyos eigenvectores forman una base completa de \mathcal{H} .

Comentario. Dado que A es una cantidad física medible ésta emerge junto con un estado ontológico particular $|\Omega\rangle_A$ del sistema analizado. Todos los posibles estados ontológicos $|\Omega\rangle_{A_i}$'s que especifican todos los posibles valores de A , a_i 's, forman una base ontológica y completa de \mathcal{H} . A cada uno de estos estados les corresponde un operador ontológico \hat{B}_i , de forma que se cumple la ecuación de eigenvalores

$$\hat{B}_i|\Omega\rangle_{A_i} = a_i|\Omega\rangle_{A_i} .$$

Así

“A cada cantidad física medible A , llamada observable o variable dinámica, le corresponde un conjunto de operadores ontológicos $\{\hat{B}_i\}$ cuyos eigenvectores forman una base completa de \mathcal{H} .”

Esto viene a cuento, porque si el operador \hat{A} es un operador de superposición, la expresión $\hat{A}|\Omega\rangle_A$ (y en general $\hat{A}|\psi\rangle_A$) no representa una medición físicamente realizable (más sobre este punto en el apéndice C.1.).

- **Postulado 5.** La evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ de un sistema está gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle ,$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano que corresponde a la energía total del sistema.

Comentario. Con respecto a este postulado, lo único que es importante tener en mente es que “la evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ ” es la evolución temporal de la información que tenemos sobre el sistema.

En esta revisión de los postulados se conserva la esencia de los mismos, lo que cambia es el énfasis ontológico que se les da a estos, i.e., lo que las herramientas matemáticas representan.

3.2.2. Sobre la Medición

La mecánica cuántica habla sobre la medición a través de los postulados 3 y 4. De nuevo, traduzco de Zettili [27] y comento sobre ellos.

- **Postulado 3.** La medición de una observable A puede ser representada formalmente por la acción de \hat{A} sobre un vector de estado $|\psi(t)\rangle$. El único resultado posible de tal medición es uno de los eigenvalores a_n (que son reales) del operador \hat{A} . Si el resultado de una medición de A sobre un estado $|\psi(t)\rangle$ es a_n , el estado del sistema *inmediatamente después* de la medición cambia a $|\psi_n\rangle$:

$$\hat{A} |\psi(t)\rangle = a_n |\psi_n\rangle ,$$

donde $a_n = \langle \psi_n | \psi(t) \rangle$. **Nota:** a_n es la componente de $|\psi(t)\rangle$ cuando éste se proyecta sobre el eigenvector $|\psi_n\rangle$.

Comentario. La medición de A solamente puede ser representada por la acción de un operador ontológico o un operador de intercambio, ya que son éstos los dos tipos de operadores que al actuar sobre un estado dado devuelven un estado ontológico. Tenemos, pues, dos opciones:

$$\hat{B} |\psi(t)\rangle = a_n |\Omega_n\rangle \quad \text{y} \quad \hat{C} |\psi(t)\rangle = a_n |\Omega_n\rangle .$$

Antes de la medición el sistema aislado estaba en un estado ontológico desconocido, $|\Omega_k\rangle$. Si $k = n$, la medición estaría descrita por

$$\hat{B} |\Omega_n\rangle = a_{nn} |\Omega_n\rangle ,$$

mientras que si $k \neq n$, la medición quedaría descrita por

$$\hat{C}|\Omega_k\rangle = a_{kn}|\Omega_n\rangle ,$$

donde $a_{kn} = \langle \Omega_n | \psi(t) \rangle = a_{nn} = a_n$.

En cualquiera de los dos casos podemos asegurar que si el resultado de una medición es $a_{(k)n}$ (el subíndice importante es el n) el estado del sistema aislado inmediatamente después de la medición es $|\Omega_n\rangle$. El estado del sistema pudo o no haber cambiado respecto a su estado antes de la medición, dependiendo de si $k = n \vee k \neq n$.

El estado resultante inmediatamente después de la medición de A es el estado del par ontológico instrumento-objeto $a_n|\Omega_n\rangle$. **Nota:** cuando se ve a $|\psi(t)\rangle$ como una suma de estados ontológicos, a_n es el coeficiente que multiplica al estado ontológico $|\Omega_n\rangle$.

- **Postulado 4.** (espectro discreto) Al medir una observable A de un sistema en un estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener uno de los eigenvalores no degenerados a_n del operador correspondiente \hat{A} está dada por

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle \psi_n | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle \psi | \psi \rangle} ,$$

donde $|\psi_n\rangle$ es el eigenestado de \hat{A} con eigenvalor a_n .

Medir cambia el estado del sistema de $|\psi\rangle$ a $|\psi_n\rangle$. Si el sistema está ya en un eigenestado $|\psi_n\rangle$ de \hat{A} , una medición de A resulta con certeza en el eigenvalor correspondiente $a_n : \hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.

Comentario. $P_n(a_n)$ representa la probabilidad de obtener a_n cuando se parte de una descripción del sistema dada por el estado $|\psi\rangle$.

Si la descripción es ontológica, entonces $|\psi\rangle = |\Omega_k\rangle$ y de nuevo tenemos dos formas de representar a la medición. Con un operador ontológico:

$$\hat{B}|\Omega_k\rangle = a_k|\Omega_k\rangle$$

en cuyo caso $P_n(a_n) = 1$ si $k = n$ y $P_n(a_n) = 0$ si $k \neq n$. O con un operador de intercambio:

$$\hat{C}|\Omega_k\rangle = a_{kl}|\Omega_l\rangle$$

en cuyo caso $P_n(a_n) < 1$, pues no sabemos con certeza cómo actuará \hat{C} sobre $|\Omega_k\rangle$ ya que no conocemos al operador de evolución completa.

Finalmente, si la descripción no es ontológica, entonces $P_n(a_n) < 1$ inevitablemente.

Si el sistema (aislado) está en un eigenestado $|\Omega_n\rangle$ de \hat{B} y nada lo perturba, cada repetición de la medición de A con el operador \hat{B} será un despliegue del estado del par ontológico instrumento-objeto $a_n|\Omega_n\rangle$ y cada vez el valor de A será con certeza a_n .

Por otra parte, si se mide al sistema con un operador de intercambio el estado del sistema aislado cambia de $|\Omega_k\rangle$ a $|\Omega_l\rangle$ con $l \in \{1, m\}$, donde m es el número de elementos en la base ontológica. En este caso, si conocemos al operador de evolución completa \hat{T} y tenemos las condiciones de frontera suficientes, podemos calcular para obtener una expresión de $\hat{C} = a_{kl}|\Omega_l\rangle\langle\Omega_k|$ y así conocer con certeza el valor de l (cf. definición de operador de evolución aislada, sección 2.2.4). Si $l = n$ entonces $P_n(a_n) = 1$ mientras que si $l \neq n$, $P_n(a_n) = 0$.

Todo esto lo enuncio para mostrar que el valor $P_n(a_n) < 1$ surge debido al desconocimiento de todas las variables del sistema y no por un hecho físico o propiedad intrínseca de tal sistema.

Resumo utilizando factualidad: si al medir A se obtiene a_n entonces el sistema evolucionaría con certeza al eigenestado $|\Omega_n\rangle$ y, de forma más estricta, evolucionaría con certeza al estado ontológico del par instrumento-objeto $a_n|\Omega_n\rangle$; la que englobaba probabilidades y desconocía certezas respecto al estado final del sistema era la descripción antes de la medición.

Comentario(bis). Al medir no sólo se da a conocer una propiedad del sistema, sino que también se muestra una propiedad del observador. Antes de la medición desconocemos, por ejemplo, la orientación que se va a elegir para medir. En el instante de la medición dicha orientación se determina. El estado del observador (aparato de medición) pasa de un estado meramente descriptivo (superposición de posibles elecciones) a un estado ontológico. El estado ontológico del sistema $|\Omega_i\rangle$ obtenido en el instante de medición está íntimamente relacionado con el estado ontológico del aparato de medición (σ_i , por decir algo) y no existe independiente a éste. El estado ontológico de lo que se describe siempre surge en dependencia con el estado ontológico de aquello que se utiliza para describirlo. En este sentido, la descripción ontológica debe incluir al todo: aparato y sistema.

Respecto a la medición es importante notar dos cualidades:

1. Hemos dicho que una medición es una interacción, pero a diferencia de cualquier interacción que pudiera suceder en la naturaleza en la que no hay un observador involucrado, una medición puede “perturbar” al sistema

en el sentido de que puede “llevarlo” a distintos estados ontológicos, según el operador con el que se mide.

En realidad lo único que diferencia a una medición de una interacción cualquiera es que en la medición se adquiere conocimiento sobre el sistema. Esta interacción es determinista y no hay perturbación alguna, pues la forma del operador \hat{C} está incluida en las ecuaciones de evolución deterministas, dadas por \hat{T} .

2. Vimos que la evolución determinista hacia el instante de medición resulta en el estado ontológico del par instrumento-objeto. Esto nos dice que no sólo el estado ontológico del sistema (objeto) que estamos analizando estaba determinado antes de la medición, sino que el estado ontológico del instrumento estaba también determinado. Pero ¿qué no es el observador el que elige el estado del instrumento? Pues no. En una teoría de variable ocultas factuales no hay elección y no la hay porque no existe la libertad de elección.

3.2.3. Elección en el Marco Factual

Asumir factualidad implica que el realismo es determinista pero dinámico. Antes de cada medición el realismo asociado a un ente sólo existe en ciertas direcciones, que casualmente son las direcciones en las que elige medirse. Para deshacernos de esta casualidad mágica, debemos asumir que la elección de medir en una dirección dada nunca fue tomada, y no fue tomada porque de hecho no existía la posibilidad de elegir. El realismo y el determinismo en las variables ocultas que gobiernan a las partículas, también impregnarían como realismo y determinismo a la realidad humana, habría “variables ocultas factuales” que gobiernan nuestras elecciones.

La factualidad engloba, entonces, a las “elecciones” de la persona que hace el experimento; de hecho, la persona no tiene ninguna posibilidad de elegir, es simplemente parte de una realidad factual en la que sólo existe una historia posible. Pero, ¿qué significa todo esto?. Primero tenemos que saber si estamos de acuerdo en lo que significa “elección”. Defino:

- Elección

Un proceso de elección es aquél en el que un agente determina el rumbo de un evento a partir de un tiempo t_0 , rumbo que un instante antes de t_0 no podría haber sido predicho aunque se conocieran todas las variables del sistema agente-evento.

La propiedad que le permite a este agente actuar sobre el futuro en desconexión con causas del pasado se llama “libre albedrío”.

De la definición es evidente que un universo físico en el que existiese la posibilidad de elección sería indeterminista y no-causal, pues la elección está por definición desconectada de toda causa y surge por una decisión libre y espontánea del agente que la hace. Es por esto que en toda teoría determinista (y en particular en la factualidad) tendría que ser eliminado el libre albedrío como una propiedad de los agentes.

Por otra parte, Conway y Specker [7] construyen un teorema, el “Teorema del Libre Albedrío”, en el que demuestran que asumir libre albedrío en los agentes implica libre albedrío en la materia y sus componentes. Elaboro un poco sobre ello en la siguiente sección.

3.3. Implicaciones del Libre Albedrío

Hay quienes afirman que irse a la discusión de si existe o no el libre albedrío es salirse de los temas físicos, materiales, centrales de la naturaleza de las cosas. Pero sucede que evadir la existencia del observador en la interacción ha llevado a callejones sin salida y parece que la única alternativa para volver a encaminarnos en el laberinto es aceptar que el observador es fundamental en la interacción, que no podemos ignorar la existencia del mismo y que no podemos hacer suposiciones sobre el mismo sin consecuencias en la teoría. Por estas razones, suponer la existencia del libre albedrío no es una suposición inocente. Tiene implicaciones teóricas. Lo importante en la teoría no es determinar si existe o no el libre albedrío, sino tener claro cuándo las conclusiones a las que se llegan dentro de la teoría surgen por haber asumido su existencia, y entonces regresar y cuestionarnos, ¿por qué asumimos la existencia del libre albedrío? ¿de qué forma está comprobada? ¿qué pasa con la teoría si quitamos este supuesto?.

Hablaré un poco del tipo de conclusiones al que se llega al asumir libre albedrío:

- Asumimos libre albedrío, luego tenemos observadores que pueden elegir orientaciones de aparatos de medición espontáneamente. Entonces tenemos tablas tipo Peres que no podemos llenar porque, en efecto, la naturaleza que permite libre albedrío en los agentes e impone realismo en los entes, exige que existan tablas consistentes que contengan realismo en los entes para cada posibilidad de elección del agente. Estas tablas son inconstruibles. Concluimos que lo que hicimos mal fue haber asociado realismo no-contextual a los entes.
- Conway y Kochen [8] asumen libre albedrío, con este supuesto enuncian que “si la elección de dirección en la cual hacer un experimento espín-1¹

¹Experimento del tipo enunciado en el teorema de imposibilidad de Kochen-Specker.

no es una función de la información accesible a los experimentadores², entonces las respuestas de las partículas de igual manera no son funciones de la información accesible a ellas.” Este es el teorema del libre albedrío y es lo que demuestran en el artículo citado. Conway y Kochen señalan que esto implica que “no puede existir una teoría que prediga con exactitud lo que [las] partículas harán en un futuro simplemente porque éstas no han decidido todavía lo que esto será” [9].

Estas conclusiones nos dejan con un universo en el que no podemos asociar a las partículas realismo independiente del contexto y tampoco predecir la dinámica de evolución de éstas, ya que ellas son libres de cambiar de opinión en el último momento. Pienso que en una teoría que busque describir la naturaleza de las cosas es mejor prescindir del libre albedrío, que prescindir del realismo o de la posibilidad de predicción.

Respondo así las preguntas formuladas arriba:

- ¿Por qué asumimos la existencia del libre albedrío? Porque nuestra percepción presenta cualidades que generan la ilusión del libre albedrío. Todas las mañanas tenemos la sensación de que nos levantamos de la cama porque tomamos la decisión de levantarnos. Desconocer lo que vamos a hacer en seguida genera la ilusión de que estamos decidiendo hacerlo. La repetición constante de esta ilusión nos lleva a una certeza: tenemos la libertad de decidir. Sin embargo, llegamos a esta certeza simplemente por repetición de una ilusión.
- ¿De qué forma está comprobada? La existencia del libre albedrío no está comprobada de ninguna forma.
- ¿Qué pasa con la teoría si quitamos este supuesto? Queda mucho por analizar, pero hemos visto que hay teoremas de imposibilidad que se solucionan al eliminar el libre albedrío englobando a la acción humana en una teoría de variables ocultas factuales. Vimos que por construcción las predicciones experimentales no cambian y que sólo hay una sutil reinterpretación de lo que enuncian los postulados de la mecánica cuántica.

Mi punto de vista es éste: cada que asumimos libre albedrío en la formulación de la teoría y que este libre albedrío tiene un efecto sobre los resultados de los problemas planteados, se llega a contradicciones que pueden verse como demostraciones por reducción al absurdo en las que la suposición absurda es la del libre albedrío.

²Aquí está el supuesto del libre albedrío.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Realismo

Comencé este trabajo con la siguiente definición de realismo:

Todo aquello en las cosas que existe previo a ser observado e independiente a las características de dicha observación.

Después de todo lo que vimos sobre factualidad salta a la vista la segunda parte de este enunciado: “independiente a las características de dicha observación”. Es importante redefinir realismo en el marco factual para no entrar en ambigüedades o contradicciones.

Cuando hice el “Salto de Factualidad a No-Contextualidad” (sección 2.3) especifiqué que “el contexto no afecta la realidad de dicha propiedad, pues la propiedad no emerge en dependencia del contexto, sino que es la historia causal la que determina la realidad de los dos, propiedad y contexto juntos”

Entonces, tanto la observación como las cosas tienen un realismo asociado que hace a la una independiente de las otras y viceversa. Al interactuar, “cosa” y “observación” coinciden en un punto y la evolución de las dos no está sujeta a lo que sucede en ese punto, sino que está ya determinada por ecuaciones deterministas contenidas en el estado ontológico del universo, $|\Omega\rangle_U$, universo del que las dos son parte.

Redefino entonces al realismo como

Todo aquello en las cosas que existe previo a ser observado e independiente a las características de dicha observación, todo aquello que existe durante la observación y todo aquello que existe después de la observación. El realismo es dinámico y está completamente descrito en las ecuaciones deterministas de la evolución de las cosas.

4.2. Factualidad y Experimentos

En el capítulo 2 mostré que tanto el futuro del gato de Schrödinger como el experimento de la desigualdad de Bell pueden ser analizados de forma local y realista sin entrar en contradicciones. Para ello utilicé la noción de “Factualidad y Ontología” (sección 2.1.2) y ciertas herramientas emergentes, las más importantes:

- Par ontológico.
- Entorno causal futuro de un par ontológico.
- Operador de evolución completa.

(doy un recuento de las herramientas de la teoría en el apéndice D.1.). Pero también prometí que daría una descripción determinista del experimento de Young (sección 2.2). Si bien la descripción determinista formal del experimento de la doble rendija queda fuera del alcance de este trabajo, puedo aquí bosquejar un argumento con las herramientas que ya conocemos.

- Experimento de la Doble Rendija.

En el experimento de la doble rendija tenemos tres entes que interactúan: electrón, rendija y pantalla. En la evolución de un electrón hay tres momentos importantes: su emisión, su interacción con la rendija y su llegada a la pantalla.

Vamos a pensar en el segundo de estos pasos: su interacción con la doble rendija. Tenemos rendija A y rendija B , el estado ontológico $|\rightarrow A\rangle_e$ denota a un electrón pasando por la rendija A mientras que el estado ontológico $|\leftarrow A\rangle_e$ denota a un electrón rebotando en la rendija A , i.e., en el primer caso la rendija A estaba abierta, o sea con estado ontológico $|1\rangle_A$ y en el segundo caso estaba cerrada, o sea con estado ontológico $|0\rangle_A$. Tenemos, pues, dos posibles pares ontológicos:

$$|\rightarrow A\rangle_e|1\rangle_A \quad \wedge \quad |\leftarrow A\rangle_e|0\rangle_A$$

pero no pueden ocurrir los dos en un mismo experimento porque la rendija A no puede estar abierta y cerrada a la vez. Los pares ontológicos que pueden emerger en conjunto son

$$|1\rangle_A|\rightarrow A\rangle_e \quad \wedge \quad |\rightarrow B\rangle_e|1\rangle_B$$

cuando la rendija A está abierta, y

$$|\leftarrow A\rangle_e|0\rangle_A \quad \wedge \quad |\rightarrow B\rangle_e|1\rangle_B$$

cuando la rendija A está cerrada. (El caso de las dos rendijas cerradas a nadie le interesa).

Estamos asumiendo que la trayectoria que seguirán los electrones está determinada en sus ecuaciones de evolución. Si la rendija A está cerrada, la muestra de electrones que serán emitidos no puede contener ningún electrón con ecuación de evolución tal que $|\Omega(t_0)\rangle_e = |\rightarrow A\rangle_e$, siendo t_0 el momento en el que el electrón llega a la doble rendija, no porque la rendija influya sobre la ecuación de evolución de los electrones, sino porque el estado $|\rightarrow A\rangle_e|0\rangle_A$ no tiene manifestación real y por lo tanto la evolución determinista del par ontológico $|\Omega(t)\rangle_{eA}$ nunca pasa por ese estado.

El siguiente paso es construir operadores de evolución completa, pares ontológicos y entornos causales futuros de estos pares, de manera que las ecuaciones de evolución de los electrones están estadísticamente distribuidas como sigue:

- si $|\Omega\rangle_{AB} = |1\rangle_A|0\rangle_B$ las ecuaciones de movimiento de los electrones se distribuyen en trayectorias hacia puntos “aleatorios” en la pantalla;
- si $|\Omega\rangle_{AB} = |1\rangle_A|1\rangle_B$ las ecuaciones de movimiento de los electrones se distribuyen en trayectorias de forma que al haber emitido la muestra completa de electrones se verá un “patrón de interferencia” en la pantalla;

con el estado $|\Omega\rangle_{AB}$ también contenido en las ecuaciones de evolución dadas por los operadores de evolución completa.

Así, al dar todas estas herramientas, se demostraría que se puede describir al experimento de la doble rendija asociando realidad y determinismo a cada uno de los electrones involucrados sin llegar a contradicciones.

Lo importante de esto es hacer notar que la factualidad nos provee tanto de herramientas como de teoría para poder recuperar determinismo donde se creía perdido.

De manera similar, en los ejemplos en los que utilizamos las herramientas de factualidad podemos vislumbrar lo que podría convertirse en una explicación local del “enredamiento no-local”.

■ Enredamiento.

En el enredamiento entre dos o más entes físicos siempre están involucradas

ciertas correlaciones que se han interpretado como no-locales al haber descartado la posibilidad de variables ocultas locales.

Cuando consideramos variables ocultas factuales suponemos que existen estados ontológicos que evolucionan mediante operadores de evolución completa hacia su entorno causal futuro. El enredamiento se puede ver como local y determinista si se toma como estado ontológico inicial el par ontológico de los entes en teoría enredados, se hace actuar al operador de evolución completa y se extrae el estado ontológico de cada uno de estos entes a partir del estado ontológico de su entorno causal futuro.

La base ontológica sería aquella base en la que las cosas evolucionan sin enredamiento no-local. Pero no sólo se necesita conocer al ente en su estado ontológico inicial, también se necesitan los operadores de evolución completa. Se necesita una comprensión total de todas las variables que afectan al sistema para poder describir su evolución de forma local y desenredada.

De nuevo, sugiero que cualquier tipo de enredamiento no-local surge por asumir que los entes están en un estado cuántico y que su evolución ocurre mediante operadores de evolución aislada, en vez de asumir a estos estados y estos operadores como meras herramientas matemáticas que representan la fracción que se conoce del universo y se utilizan siempre que se desconce la totalidad.

Tal vez esta noción quede más clara si se revisa el desarrollo del “sistema 1” dentro de la sección 2.2.4, donde se ve que los operadores de evolución aislada de dos entes separados están sujetos a un operador de evolución completa de los dos entes en conjunto. Si solamente se tienen estos operadores de evolución aislada y los entes separados, se puede malinterpretar a las “coincidencias” entre los operadores de evolución aislada como enredamiento no-local, simplemente porque no se está viendo el todo: el operador de evolución completa.

Incluí estos dos problemas (experimento de Young, enredamiento no-local) en la discusión para mostrar lo fértil que puede ser una teoría de variables ocultas factuales, teoría que tiene muchos caminos por recorrer con posibles éxitos y derrotas en puerta. Una explicación factual del experimento de Young y del enredamiento no-local queda pendiente, así como una explicación factual de millares de ejemplos y casos en los que la no-localidad o el no-determinismo viene a cuento en la mecánica cuántica. En fin. Es teoría dispuesta.

4.3. Libertad de Elección

Estamos aquí frente a una teoría que, mientras que por un lado devuelve localidad y realismo a situaciones en las que ambos se veían perdidos, es exitosa en demostrar que no hay violación a la desigualdad de Bell y le quita sentido físico a varios teoremas de imposibilidad de variables ocultas, por otro lado restringe al observador a ecuaciones deterministas. Y no sólo al observador, sino que también restringe a cada componente del universo. Hay un estado ontológico constante $|\Omega\rangle_U$ al que todo en el universo está sujeto y por lo tanto nada tiene libertad de movimiento, de elección, de error. El aleteo de la mariposa, el huracán en Australia, el nacimiento de una estrella, el decaimiento de un muón, todo ello está contenido en $|\Omega\rangle_U$.

La física, con este supuesto detrás, puede ser capaz de explicar muchos más fenómenos que la física que rehuye a este determinismo por salvar la libertad de elección. Tal vez hay que empezar a asumir que sí, el universo está mucho más ordenado de lo que pensamos, desde lo microscópico hasta lo macroscópico, y que tenemos mucha menos capacidad de decidir el rumbo del mismo que lo que creemos. Conocer, eso sí podemos. Aprender, comprender, analizar, construir teorías, ser conscientes. Eso somos. No libres. Sí conscientes.

Regresando a lo importante: mientras no sea descartada la posibilidad de variables ocultas factuales, esta teoría puede permitirnos interpretar a la mecánica cuántica de forma local, no-contextual y realista. Habrá que seguir probando a la teoría en distintos casos para ver qué tan lejos puede llegar.

Para los que todavía abogan por el libre albedrío:

Tal vez estamos sólo en un punto en el que tenemos que elegir (sic.) qué clase de teoría queremos. Si queremos una teoría que describa un universo realista, local y determinista, o preferimos sacrificar este realismo y este determinismo en aras del libre albedrío. La física no necesariamente describe cómo la realidad es, simplemente construye modelos y teorías que son exitosos al compararse con lo que percibimos de la realidad y debe quedarse con el más elegante, el más conciso, más concreto, más lógico y el que tenga mayor posibilidad de comprobación experimental.

La física tiene que ser causal para poder siquiera pretender que hay una correspondencia entre las causas y los efectos y determinar cuál precede a cuál. Si la física pretende predecir cómo evolucionarán los fenómenos en el tiempo, tiene que ser determinista. Este determinismo no puede actuar sólo sobre los objetos y no actuar sobre las personas (o los seres vivos).

Pero para poder ser determinista, causal y por lo tanto local, la física tiene que ser factual. En cambio, si dotamos de libre albedrío al sujeto y lo ponemos a interactuar con la realidad vamos a tener una realidad un tanto caótica en cuanto a que es libre de elegir su estado cada vez que interactúa. Además, como

Conway y Kochen [10] mismos afirman, el teorema de libre albedrío “parece ser el más fuerte y más preciso resultado del tipo de teoremas de imposibilidad, y en particular implica que no puede haber mecanismo relativísticamente invariante del tipo de GRW que explique el colapso de la función de onda.” Así, el libre albedrío sigue llevando a más y más teoremas de imposibilidad, más y más fuertes cada vez. Teoremas de imposibilidad de localidad, de imposibilidad de no-contextualidad, de imposibilidad de construir una mecánica cuántica que sea relativísticamente invariante. Teoremas de imposibilidad de hacer física.

Si yo fuera libre de elegir, me iría por la opción de no libre albedrío para poder seguir trabajando con causalidad y localidad. Si no fuera libre de elegir sólo tendría una opción, lo bueno es que sería la opción de no libre albedrío. En fin, eligiendo o no, invito al físico a trabajar desde la factualidad, hasta toparnos con su imposibilidad. Asumamos mientras tanto que este universo, el físico, no es un universo aleatorio, sin sentido, ni dirección, ni propiedades, ni fundamentos. Es un universo descrito por $|\Omega\rangle_U$, constante.

Apéndice A

A.1. Valor Esperado según Variables Ocultas

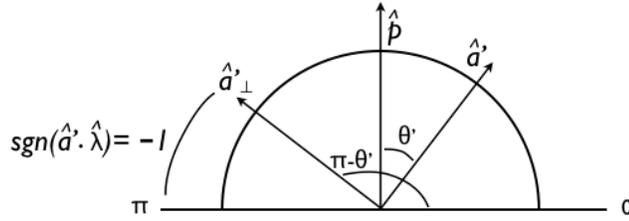
Queremos resolver la integral de distribución

$$\int_{\Lambda} d\hat{\lambda} \rho(\hat{\lambda}) \operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}) ;$$

como sólo en un hemisferio del círculo tenemos $\lambda \neq 0$, podemos integrar sobre un ángulo ϕ que va de 0 a π , poniendo a λ como función de ϕ :

$$\int_0^{\pi} d\phi \rho(\hat{\lambda}(\phi)) \operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) .$$

Tenemos que $\operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) = 1$ cuando el ángulo entre \hat{a}' y $\hat{\lambda}(\phi)$ es $< \pi$ y $\operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) = -1$ cuando el ángulo entre ellos es $> \pi$ (es cero en un conjunto de medida cero, cuando \hat{a}' y $\hat{\lambda}(\phi)$ son paralelos). Ahora suponemos que entre \hat{a}' y \hat{p} hay un ángulo θ' , donde \hat{p} es el vector que define el hemisferio $\hat{\lambda}(\phi) \neq 0$, entonces $\operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) = 1$ en el intervalo $\phi \in (0, \pi - \theta')$; rebasado este intervalo, el ángulo entre \hat{a}' y $\hat{\lambda}(\phi)$ será $> \pi$ y entonces $\operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) = -1$ cuando $\phi \in (\pi - \theta', \pi)$.



De manera que al integrar sobre ϕ de 0 a π queda

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\phi \rho(\hat{\lambda}(\phi)) \operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}(\phi)) &= \int_0^{\pi-\theta'} 1 d\phi + \int_{\pi-\theta'}^\pi -1 d\phi \\ &= \pi - \theta' + (\pi - \theta' - \pi) \\ &= \pi - 2\theta' . \end{aligned}$$

De aquí, al normalizar, resulta

$$\frac{1}{\pi} \int_\Lambda d\hat{\lambda} \rho(\hat{\lambda}) \operatorname{sgn}(\hat{a}' \cdot \hat{\lambda}) = 1 - \frac{2\theta'}{\pi} .$$

A.2. Valor Esperado de la Correlación

Veremos cómo se obtiene la expresión $E(\hat{a}, \hat{b}) = -\cos\theta_{ab}$ en el marco de la mecánica cuántica.

Vayamos por pasos. Suponemos sin pérdida de generalidad que \hat{a} y \hat{b} están en el plano $\hat{x}\hat{z}$ y que \hat{a} es paralelo al eje \hat{z} , por lo tanto, el operador de spin $\hat{\sigma}$ aplicado a \hat{a} y \hat{b} respectivamente, dará

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \cdot \hat{a} &= \hat{\sigma}_z = [|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|] \\ \hat{\sigma} \cdot \hat{b} &= \cos\theta_{ab}\hat{\sigma}_z + \sin\theta_{ab}\hat{\sigma}_x \\ &= \cos\theta_{ab}[|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|] + \sin\theta_{ab}[|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|] . \end{aligned}$$

Ahora suponemos que el sistema está en un estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle + |10\rangle]$ y podemos calcular $E(\hat{a}, \hat{b}) = \langle\psi|(\hat{\sigma} \cdot \hat{a})(\hat{\sigma} \cdot \hat{b})|\psi\rangle$, empezando por

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma} \cdot \hat{a})(\hat{\sigma} \cdot \hat{b}) &= \cos\theta_{ab}[|00\rangle\langle 00| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|] + \\ &+ \sin\theta_{ab}[|00\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 00| - |10\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 10|] , \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \langle\psi|(\hat{\sigma} \cdot \hat{a})(\hat{\sigma} \cdot \hat{b})|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle 01| + \langle 10|] \times \\ &\times \{ \cos\theta_{ab}[|00\rangle\langle 00| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|] + \\ &+ \sin\theta_{ab}[|00\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 00| - |10\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 10|] \} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle + |10\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[\langle 01| + \langle 10|] \times \\ &\times \{ \cos\theta_{ab}[-|01\rangle - |10\rangle] + \sin\theta_{ab}[|00\rangle - |11\rangle] \} \\ &= \frac{1}{2}[-2\cos\theta_{ab}] = -\cos\theta_{ab} , \end{aligned}$$

simplemente por ortonormalidad de la base.

A.3. Suma de las Correlaciones en la Tabla de Peres

La igualdad

$$A(\hat{a})B(\hat{b}) + A(\hat{a}')B(\hat{b}) + A(\hat{a})B(\hat{b}') - A(\hat{a}')B(\hat{b}') = \pm 2 \quad (*)$$

se deriva de evaluar las distintas posibles combinaciones de resultados $A(\hat{a})$, $B(\hat{b})$, $A(\hat{a}')$, $B(\hat{b}')$ como sigue:

- a) Supongamos $A(\hat{a})B(\hat{b}) = 1$: hay dos alternativas, que $A(\hat{a}) = 1$ y $B(\hat{b}) = 1$ o $A(\hat{a}) = -1$ y $B(\hat{b}) = -1$. Tomamos la primera de ellas y elaboramos:

i) $A(\hat{a}) = 1$ y $B(\hat{b}) = 1$

- suponiendo $A(\hat{a}')B(\hat{b}') = 1$, de nuevo hay dos alternativas:

alternativa 1: $A(\hat{a}') = 1$ y $B(\hat{b}') = 1$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(\hat{a})B(\hat{b}) = 1, A(\hat{a}')B(\hat{b}') = 1, \\ A(\hat{a})B(\hat{b}') = 1, -A(\hat{a}')B(\hat{b}') = -1 \quad \checkmark ((*) = 2) \end{aligned}$$

alternativa 2: $A(\hat{a}') = -1$ y $B(\hat{b}') = -1$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(\hat{a})B(\hat{b}) = 1, A(\hat{a}')B(\hat{b}') = -1, \\ A(\hat{a})B(\hat{b}') = -1, -A(\hat{a}')B(\hat{b}') = -1 \quad \checkmark ((*) = -2) \end{aligned}$$

- suponiendo $A(\hat{a}')B(\hat{b}') = -1$, tenemos las alternativas:

alternativa 1: $A(\hat{a}') = -1$ y $B(\hat{b}') = 1$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(\hat{a})B(\hat{b}) = 1, A(\hat{a}')B(\hat{b}') = -1, \\ A(\hat{a})B(\hat{b}') = 1, -A(\hat{a}')B(\hat{b}') = 1 \quad \checkmark ((*) = 2) \end{aligned}$$

alternativa 2: $A(\hat{a}') = 1$ y $B(\hat{b}') = -1$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(\hat{a})B(\hat{b}) = 1, A(\hat{a}')B(\hat{b}') = 1, \\ A(\hat{a})B(\hat{b}') = -1, -A(\hat{a}')B(\hat{b}') = 1 \quad \checkmark ((*) = 2) \end{aligned}$$

Tomamos ahora la segunda alternativa para $A(\hat{a})$ y $B(\hat{b})$:

ii) $A(\hat{a}) = -1$ y $B(\hat{b}) = -1$

el desarrollo es igual al anterior, todas las alternativas resultando en $((*) = \pm 2)$

- b) Si suponemos $A(\hat{a})B(\hat{b}) = -1$, hay dos alternativas: que $A(\hat{a}) = 1$ y $B(\hat{b}) = -1$ o $A(\hat{a}) = -1$ y $B(\hat{b}) = 1$, elaborar sobre cada una de ellas nos lleva a un procedimiento idéntico al del inciso a) en el que se verifica la igualdad (*).

A.4. Cálculo de Eigenvalores de los Operadores de GHZ

Vayamos primero a la obtención de eigenvalores de los operadores $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3$, etc. sobre el estado $|\psi\rangle_{GHZ}$.

Tenemos que

$$\sigma_y^3 |\psi\rangle_{GHZ} = \frac{i}{\sqrt{2}} (|001\rangle + |110\rangle) =: |\psi'\rangle_{GHZ} .$$

Ahora aplicamos el operador σ_y a la segunda partícula, y el estado queda

$$\sigma_y^2 |\psi'\rangle_{GHZ} = \frac{i^2}{\sqrt{2}} (|011\rangle - |100\rangle) =: |\psi''\rangle_{GHZ} .$$

Por último, consideramos la acción de σ_x sobre la primer partícula, que resulta en

$$\sigma_x^1 |\psi''\rangle_{GHZ} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (|111\rangle - |000\rangle) =: |\psi\rangle_{GHZ} ,$$

de donde concluimos que $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 |\psi\rangle_{GHZ} = 1 |\psi\rangle_{GHZ}$. El sistema está en un eigenestado de $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3$ con eigenvalor 1.

Como estas mediciones se pueden hacer intercambiando las etiquetas 1, 2, 3 de cada partícula, hemos comprobado que el sistema está en un eigenestado simultáneo de $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3$, $\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3$ y $\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3$ con eigenvalor 1.

Ahora bien, si asumimos que las partículas tienen valores definidos de espín en cada orientación, el producto entre estos valores será igual al producto de la acción de sus correspondientes operadores. Así $A_x B_y C_y = A_y B_x C_y = A_y B_y C_x = 1$. Por otra parte, la acción de $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$ sobre $|\psi\rangle_{GHZ}$ resulta en

$$\begin{aligned} \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 |\psi\rangle_{GHZ} &= \sigma_x^1 \sigma_x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle - |110\rangle) \\ &= \sigma_x^1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle - |100\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|111\rangle - |000\rangle) \\ &= -|\psi\rangle_{GHZ} , \end{aligned}$$

de donde se deduce que el producto de los supuestos valores definidos $A_x B_x C_x$ será -1 .

Finalmente, como todos estos valores son números reales, cumplen conmutatividad y asociatividad, de ahí que sea válida la igualdad

$$(A_x B_y C_y)(A_y B_x C_y)(A_y B_y C_x) = A_x B_x C_x ,$$

cosa que lleva inmediatamente a una contradicción.

A.5. Cálculo de Eigenvalores de los Operadores de Aravind

Veamos con detalle la forma en que se obtienen los productos de las mediciones en cada fila y cada columna del cuadro

$\sigma_x \otimes \mathbf{I}$	$\mathbf{I} \otimes \sigma_x$	$\sigma_x \otimes \sigma_x$
$\mathbf{I} \otimes \sigma_y$	$\sigma_y \otimes \mathbf{I}$	$\sigma_y \otimes \sigma_y$
$\sigma_x \otimes \sigma_y$	$\sigma_y \otimes \sigma_x$	$\sigma_z \otimes \sigma_z$

Las dos filas de hasta arriba son equivalentes y la acción de los operadores en cada fila puede generalizarse como

$$[\sigma_a \otimes \mathbf{I}][\mathbf{I} \otimes \sigma_a][\sigma_a \otimes \sigma_a]|\psi\rangle$$

donde a indica la orientación de la medición de espín. Sabemos que estos tres operadores conmutan, así que será indistinto el orden en que se apliquen, además de que cada par de operadores separado por \otimes también conmuta. Por lo tanto, la expresión anterior es equivalente a

$$[a_1 \times 1][1 \times a_2][a_1 \times a_2]|\psi\rangle = a_1^2 a_2^2 |\psi\rangle ,$$

si pensamos que a_i es el valor obtenido de medir el espín con orientación a sobre la partícula i .

Como $a_i = \pm 1 \rightarrow a_i^2 = 1$, con lo que podemos concluir que

$$[\sigma_a \otimes \mathbf{I}][\mathbf{I} \otimes \sigma_a][\sigma_a \otimes \sigma_a]|\psi\rangle = 1|\psi\rangle .$$

El argumento es muy similar para las dos columnas de la izquierda, sólo que en cada partícula se escoge una orientación distinta, resultando

$$\begin{aligned} [\sigma_a \otimes \mathbf{I}][\mathbf{I} \otimes \sigma_b][\sigma_a \otimes \sigma_b]|\psi\rangle &= [a_1 \times 1][1 \times b_2][a_1 \times b_2]|\psi\rangle \\ &= a_1^2 b_2^2 |\psi\rangle \\ &= 1|\psi\rangle . \end{aligned}$$

En el tercer renglón y en la tercer columna se utiliza el hecho de que esta base de operadores cumple $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$ (en permutación cíclica) para llegar a los resultados deseados, como sigue:

Tercer renglón:

$$\begin{aligned} [\sigma_x \otimes \sigma_y][\sigma_y \otimes \sigma_x][\sigma_z \otimes \sigma_z]|\psi\rangle &= [\sigma_x \sigma_y \otimes \sigma_y \sigma_x][\sigma_z \otimes \sigma_z]|\psi\rangle \\ &= [i\sigma_z \otimes -i\sigma_z][\sigma_z \otimes \sigma_z]|\psi\rangle \\ &= i(z_1)^2 \times -i(z_2)^2 |\psi\rangle \\ &= 1|\psi\rangle . \end{aligned}$$

Tercer columna:

$$\begin{aligned}
[\sigma_x \otimes \sigma_x][\sigma_y \otimes \sigma_y][\sigma_z \otimes \sigma_z]|\psi\rangle &= [\sigma_x \sigma_y \otimes \sigma_x \sigma_y][\sigma_z \otimes \sigma_z]|\psi\rangle \\
&= [i\sigma_z \otimes i\sigma_z][\sigma_z \otimes \sigma_z]|\psi\rangle \\
&= i(z_1)^2 \times i(z_2)^2 |\psi\rangle \\
&= -1|\psi\rangle .
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos los cálculos necesarios para las afirmaciones asentadas.

A.6. Cálculo de Eigenvalores de los Operadores de Mermin

Los cálculos de la estrella de Mermin siguen la misma lógica que los anteriores. Veamos.

Tenemos cinco grupos de operadores. Las cuatro líneas no-horizontales forman cada una un grupo que se puede generalizar como

$$[\sigma_a^1 \sigma_b^2 \sigma_c^3][\sigma_c^3][\sigma_b^2][\sigma_a^1] .$$

De nuevo, por conmutatividad, el orden es indistinto, $\{a, b, c\} \in \{x, y\}$ representan la orientación de medición de espín y 1, 2, 3 el número de partícula a medir. La acción de este grupo de mediciones sobre un estado arbitrario del sistema $|\psi\rangle$ será

$$\begin{aligned}
[\sigma_a^1 \sigma_b^2 \sigma_c^3][\sigma_c^3][\sigma_b^2][\sigma_a^1]|\psi\rangle &= [a_1 b_2 c_3][c_3][b_2][a_1]|\psi\rangle \\
&= a_1^2 b_2^2 c_3^2 |\psi\rangle \\
&= 1|\psi\rangle .
\end{aligned}$$

Vayamos ahora a la línea horizontal, medir con este grupo sobre el sistema $|\psi\rangle$ resultará en

$$\begin{aligned}
[\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3][\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3][\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3][\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3]|\psi\rangle &= [\sigma_x^1 \sigma_y^1 \sigma_y^1 \sigma_x^1][\sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2][\sigma_x^3 \sigma_x^3 \sigma_y^3 \sigma_y^3]|\psi\rangle \\
&= [(i\sigma_z^1)(-i\sigma_z^1)][(i\sigma_z^2)(i\sigma_z^2)][\sigma_x^3 i\sigma_z^3 \sigma_y^3]|\psi\rangle \\
&= [1(\sigma_z^1)^2][1(\sigma_z^2)^2][i(-i\sigma_y^3)\sigma_y^3]|\psi\rangle \\
&= [1(z_1)^2][1(z_2)^2][1(y_3)^2]|\psi\rangle \\
&= -1|\psi\rangle
\end{aligned}$$

donde el primer reordenamiento es posible debido a la localidad que se asume en cada partícula y las demás igualdades se obtienen con los mismos argumentos del inciso (5.).

Apéndice B

B.1. Demostración de la Desigualdad Factual de Bell

La desigualdad

$$| -\cos \theta_{ab} + \cos \theta_{ac} | \leq 1 - \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac}$$

se cumple si y sólo si

$$\cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac} - 1 \leq \cos \theta_{ac} - \cos \theta_{ab} \leq 1 - \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac}$$

El lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac} - 1 &\leq \cos \theta_{ac} - \cos \theta_{ab} \\ \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac} + \cos \theta_{ab} &\leq \cos \theta_{ac} + 1 \\ \cos \theta_{ab}(\cos \theta_{ac} + 1) &\leq \cos \theta_{ac} + 1 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

se cumple trivialmente, y el lado derecho:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{ac} - \cos \theta_{ab} &\leq 1 - \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac} \\ \cos \theta_{ac} + \cos \theta_{ab} \cos \theta_{ac} &\leq 1 + \cos \theta_{ab} \\ \cos \theta_{ac}(1 + \cos \theta_{ab}) &\leq 1 + \cos \theta_{ab} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

también.

Por lo tanto, esta desigualdad se cumple para todo θ_{ab}, θ_{ac} .

B.2. Valor Esperado de la Correlación en un Sistema Preparado

Tenemos un sistema preparado en el estado inicial $|\Omega\rangle_{AB} = |0_a 1_a\rangle_{AB}$. Se medirá sobre la partícula A con operador $\hat{\sigma}_b$ y sobre la partícula B con operador $\hat{\sigma}_c$, entonces ponemos cada uno de los estados en la base de eigenestados de los operadores que actuarán sobre ellos, i.e.,

$$|0_a\rangle = \cos \frac{\theta_{ab}}{2} |0_b\rangle + \sin \frac{\theta_{ab}}{2} |1_b\rangle ,$$

$$|1_a\rangle = -\cos\frac{\theta_{ac}}{2}|1_c\rangle + \sin\frac{\theta_{ac}}{2}|0_c\rangle ,$$

y calculamos $\langle\hat{\sigma}_b\hat{\sigma}_c\rangle$. Esto a partir de las probabilidades

$$P(\{\hat{\sigma}_b|0_a\rangle_A = 1) = |\langle 0_b|0_a\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta_{ab}}{2} ;$$

$$P(\{\hat{\sigma}_b|0_a\rangle_A = -1) = |\langle 1_b|0_a\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} ;$$

$$P(\{\hat{\sigma}_c|1_a\rangle_B = 1) = |\langle 0_c|1_a\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} ;$$

$$P(\{\hat{\sigma}_c|1_a\rangle_B = -1) = |\langle 1_c|1_a\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta_{ac}}{2} .$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \langle\hat{\sigma}_b\hat{\sigma}_c\rangle &= P(\{\hat{\sigma}_b|0_a\rangle_A = 1) \times P(\{\hat{\sigma}_c|1_a\rangle_B = 1) \\ &+ P(\{\hat{\sigma}_b|0_a\rangle_A = -1) \times P(\{\hat{\sigma}_c|1_a\rangle_B = -1) \\ &- P(\{\hat{\sigma}_b|0_a\rangle_A = 1) \times P(\{\hat{\sigma}_c|1_a\rangle_B = -1) \\ &- P(\{\hat{\sigma}_b|0_a\rangle_A = -1) \times P(\{\hat{\sigma}_c|1_a\rangle_B = 1) \\ &= \cos^2\frac{\theta_{ab}}{2} \times \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} + \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} \times \cos^2\frac{\theta_{ac}}{2} \\ &- \cos^2\frac{\theta_{ab}}{2} \times \cos^2\frac{\theta_{ac}}{2} - \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} \times \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} \\ &= \cos^2\frac{\theta_{ab}}{2}(\sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} - \cos^2\frac{\theta_{ac}}{2}) \\ &+ \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2}(\cos^2\frac{\theta_{ac}}{2} - \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2}) \\ &= \cos^2\frac{\theta_{ab}}{2}(-\cos\theta_{ac}) + \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2}(\cos\theta_{ac}) \\ &= (\cos^2\frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2})(-\cos\theta_{ac}) \\ &= (\cos\theta_{ab})(-\cos\theta_{ac}) = -\cos\theta_{ab}\cos\theta_{ac} , \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

B.3. Estadística Inducida por la Postselección

El primer resultado, $\langle 0_a|\hat{\sigma}_b|0_a\rangle = \cos^2\frac{\theta_{ab}}{2} - \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2}$, es reflejo de una distribución de partículas cuya evolución de un estado inicial $|0_a\rangle$ a un estado final con orientación \hat{b} habrá resultado en el estado $|0_b\rangle$ un cierto número de veces y en el estado $|1_b\rangle$ otro tanto de veces.

Al postseleccionar estamos escogiendo sólo las partículas dentro de esta distribución que habrán de evolucionar al estado $|0_b\rangle$ (en este ejemplo). Aunque

la postselección ocurre al tiempo final y la forma convencional de enunciar esto sería "...estamos escogiendo sólo las partículas que evolucionaron al estado $|0_b\rangle$..." por factualidad, si evolucionaron a tal estado esa evolución es la única que podría haber ocurrido en estas partículas postseleccionadas.

Entonces, el estado inicial de estas partículas es $|0_a\rangle$ y su estado final es $|0_b\rangle$. Las partículas pudieron haber alcanzado este estado final en cualquier tiempo $\in (t_0, t_3)$, luego podemos afirmar que un instante antes de la medición el estado de la partícula era $|0_a\rangle$ con $b = a$ sin importarnos el estado inicial. Esto es, "como si la partícula estuviera en un estado inicial $|0_a\rangle$ tal que $\theta_{ab} = 2k\pi$ ".

Apéndice C

C.1. Comentario sobre el Segundo Postulado de la Mecánica Cuántica

Es trivial concluir de

$$\hat{S}|\Omega_k\rangle = \sum_i s_{ki}|\Omega_i\rangle = s_k|\psi_k\rangle$$

que un operador de superposición no tiene manifestación física, pues ya asumimos que los estados cuánticos no tienen una contraparte en la realidad.

Podemos profundizar un poco. Un operador de superposición actúa sobre un estado ontológico según

$$\hat{S}|\Omega_k\rangle = \sum_i s_{ki}|\Omega_i\rangle .$$

Del lado derecho de esta igualdad tenemos una suma de estados ontológicos y cada uno de estos estados ontológicos es eigenestado de un operador ontológico de forma que

$$\hat{B}_i|\Omega_i\rangle = b_i|\Omega_i\rangle .$$

Ahora, para cada i construimos un operador ontológico $\hat{B}_{ki} = \frac{s_{ki}}{b_i}\hat{B}_i$ y lo hacemos actuar sobre su eigenestado:

$$\hat{B}_{ki}|\Omega_i\rangle = s_{ki}|\Omega_i\rangle ,$$

de donde

$$\begin{aligned}\hat{S}|\Omega_k\rangle &= \sum_k s_{ki}|\Omega_i\rangle \\ &= \sum_k \hat{B}_{ki}|\Omega_i\rangle ,\end{aligned}$$

expresión que permite ver que el operador de superposición es una suma de operadores ontológicos. “Medir” con un operador de superposición es hacer n mediciones distintas con distintos operadores ontológicos en un mismo instante.

Entonces

$$\sum_k \hat{B}_{ki} |\Omega_i\rangle = s_k |\psi_k\rangle$$

y esto (bajo la suposición (S2)) nos dice que no podemos hacer mediciones correspondientes a distintos operadores ontológicos simultáneamente. Era de esperarse, pues cada operador ontológico devuelve un estado ortogonal a los estados correspondientes a los demás operadores ontológicos del conjunto $\{\hat{B}_i\}$, y en el marco de esta teoría las distintas realidades $|\Omega_i\rangle$ son mutuamente excluyentes.

Apéndice D

D.1. Herramientas de la Teoría

Para referencia del lector ordeno un poco las definiciones dadas en este trabajo y aclaro las relaciones entre ellas.

Propuse la división entre **estados ontológicos** $|\Omega\rangle$, que son aquéllos que se manifiestan en la realidad y **estados cuánticos** $|\psi\rangle$, que son aquéllos que sirven como herramientas para hacer predicciones estadísticas siempre que no conozcamos el $|\Omega\rangle$ de aquello que estamos analizando.

Vimos que todos los estados ontológicos distintos asociados a una propiedad forman una **base ontológica** y que los estados cuánticos pueden estar dados en términos de esta base, según la distribución estadística que los determina.

Por otra parte, dí herramientas para el análisis experimental factual. Propuse que a un sistema sólo lo podemos conocer en la interacción y que la forma de la interacción define un **par ontológico** $|\Omega\rangle_{12}$; estos pares ontológicos evolucionan de forma determinista por un **operador de evolución completa** \hat{T} hacia el estado ontológico de su **entorno causal futuro** $\delta^+\mu$, definido a partir del centro de masa μ en reposo del par.

Así como tenemos un operador de evolución completa que nos da la evolución determinista del par ontológico, tenemos un **operador de evolución aislada** \hat{E} que es lo que matemáticamente usamos para describir cómo evoluciona un estado ontológico aislado del par y aislado de su entorno causal futuro.

Además, al inicio hablé de **operadores ontológicos** \hat{B} , **de intercambio** \hat{C} y **de superpopsición** \hat{S} definidos cada uno por su forma de actuar sobre estados ontológicos. De la definición de operador de evolución aislada (cf. “Operador de Evolución Aislada” sección 2.2.4) se sigue que todos estos operadores son de ese tipo y que en términos físicos están determinados por el operador de evolución completa que tuvo lugar en el sistema analizado.

Bibliografia

- [1] AHARONOV, Y. & BOHM, D., *Discussion of Experimental Proof of Einstein, Rosen and Podolsky* Physical Review, Vol. 108, No. 4, 1957; pp. 1070-1076
- [2] BALLENTINE, L.E., *Quantum Mechanics, A Modern Development* World Scientific Publishing Co., London 2000.
- [3] BELL, J.S., *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* p. 14 Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [4] BELL, J.S., op. cit., p. 17
- [5] BELL, J.S., op. cit., p. 36
- [6] BELL, J.S., *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* pp. 52-62 Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [7] CONWAY, J. & KOCHEN, S., *The Free Will Theorem* arXiv:060.4079v1 [quant-ph], 2006.
- [8] CONWAY, J. & KOCHEN, S., op. cit. p. 3
- [9] CONWAY, J. & KOCHEN, S., op. cit. p. 26
- [10] CONWAY, J. & KOCHEN, S., op. cit. p. 2
- [11] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. & ROSEN, N., *Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Physical Review, Vol. 47, 1935; pp. 777-780
- [12] GREENBERGER, D.M., HORNE, M.A., SHIMONY, A. & ZEILINGER, A., *Bell's Theorem Without Inequalities* American Journal of Physics, Vol. 58, No. 12, 1990; pp. 1131-1143
- [13] 'T HOOFT, G., *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics; A View on the Quantum Nature of our Universe, Compulsory or Impossible?* arXiv:1405.1548v1 [quant-ph], 2014. pp. 17-19

-
- [14] 'T HOOFT, G., op. cit. p. 20
- [15] 'T HOOFT, G., *How a Wave Function Can Collapse Without Violating Schrödinger's Equation, and How to Understan Born's Rule* arXiv:1112.1811v2 [quant-ph], 2012.
- [16] 'T HOOFT, G., op. cit. pp. 5-8
- [17] KOCHEN, S. & SPECKER, E.P., *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics* Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 17, No. 1, 1967; pp. 59-87
- [18] MAUDLIN, T., *Quantum Non-Localilty & Relativity* Wiley-Blackwell, West Sussex 2011.
- [19] Expuesto en MERMIN, N.D., *Hidden Variables and the Two Theorems of John Bell* Reviews of Modern Physics, Vol. 65, No. 3, 1993; pp. 806-809
- [20] MERMIN, N.D., *Hidden Variables and the Two Theorems of John Bell* Reviews of Modern Physics, Vol. 65, No. 3, 1993; pp. 803-815
- [21] MERMIN, N.D., *Simple Unified Form for the Major No-Hidden-Variables Thoerems* Physical Review Letters, Vol. 65, No. 27, 1990; pp. 3373-3376
- [22] MERMIN, N.D., Reviews of Modern Physics, op. cit. pp. 809-810
- [23] MERMIN, N.D., Reviews of Modern Physics, op. cit. pp. 810-811
- [24] MERMIN, N.D., Reviews of Modern Physics, op. cit. p. 809
- [25] PERES, A., *Unperformed Experiments Have No Results* American Journal of Physics, Vol. 46, No. 7, 1978; pp. 745-747
- [26] ZETTILI, N., *Quantum Mechanics; Concepts and Applications* John Wiley & Sons Ltd., Second Edition, West Sussex 2009.
- [27] ZETTILI, N., op. cit. p. 166