Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

El Problema de Brezis-Nirenberg

T E S I S

Que para obtener el título de:
Matemática

P R E S E N T A:

Cintia Pacchiano Camacho

Director de tesis:
Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez-Labora

2015

Ciudad Universitaria, D. F.

Datos del alumno
Pacchiano
Camacho
Cintia
56040976
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
411005069

Datos del Tutor
Dra.
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez-Labora

Datos del Sinodal 1
Dr.
Nils Heye
Ackermann

Datos del Sinodal 2
Dra.
Laura
Ortiz
Bobadilla

Datos del Sinodal 3
Dr.
Javier
Páez
Cárdenas

Datos del Sinodal 4
M. en C.
Alejandro Darío
Rojas
Sánchez

Datos del trabajo escrito
El problema de Brezis-Nirenberg.
79 páginas
2015

A mi familia

Agradecimientos

Quiero primero agradecer a la Doctora Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora por haber sido uno de los mejores profesores que tuve y haberme introducido en este mundo de los métodos variacionales. Fue por usted que decidí que esta área es a lo que me gustaría dedicarme. Gracias por haber dirigido mi tesis y por todo su apoyo.

Agradezco a mis sinodales por la revisión de este trabajo y por todas las sugerencias y los consejos respecto al mismo.

A Juan José Alba González por haberme dado la oportunidad de ser su ayudante durante tanto tiempo. Gracias por reforzar mi amor por la teoría de números.

A Juan Carlos Fernández Morelos por haber sido uno de los mejores ayudantes y profesores que tuve en mi carrera. Gracias también por haber revisado y por haberme ayudado en mi tesis.

A Alejandro Darío Sánchez Rojas por haber confiado en mí y darme la oportunidad de ser su ayudante. Gracias por devolverme el gusto por la Topología y por haber dado uno de los más bonitos cursos que tomé en mi carrera.

Al Doctor Javier Páez Cárdenas por todas sus enseñanzas y su paciencia. Fue una casualidad que en el segundo semestre haya llevado su curso, pero qué bueno que lo hice. Es usted una gran persona y un gran profesor, le agradezco su influencia para que haya terminado la carrera como lo hice.

Gracias a mis amigos del cubículo, Lalo, Ximena y Ademar por todos esos agradables momentos que pasamos juntos.

Quiero agradecer particularmente a Manuel y a Hugo por haber insistido en que fuera a estudiar al cubículo. Gracias por ser mis amigos y por haberme acompañado durante toda mi carrera.

A Paco por estar siempre a mi lado, por ser el mejor de los compañeros, por ayudarme en todo momento.

Mi mayor agradecimiento es a mis padres, quienes me han apoyado en todo momento. Todo lo que tengo y he logrado es gracias a ustedes. Los quiero mucho.
Por último y más importante, mi hermano. Fue por él que descubrí las matemáticas y fue por él que quise estudiarlas. Gracias por ser mi mejor maestro y mi mayor ejemplo a seguir. Aprovecho para decirte que estoy muy orgullosa de ti.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los métodos variacionales aparecieron como una respuesta al problema de hallar mínimos de funcionales.

Un ejemplo clásico de problema variacional es el de hallar la trayectoria que minimiza la distancia entre dos puntos en una superficie dada (geodésica).
El problema de minimizar funcionales está muy relacionado con el de minimización de funciones. Se trata de hallar criterios suficientes y necesarios para la existencia del mínimo, así como de condiciones que permitan su cálculo y de algoritmos que nos permitan computarlo.

El cálculo variacional está íntimamente ligado con la teoría de ecuaciones diferenciales (EDO y EDP), ya que las condiciones de existencia de una solución al problema de minimización normalmente dependen de que dicha solución satisfaga cierta ecuación diferencial. Pero como las soluciones minimizan un funcional, la teoría también está ligada a la topología y al análisis funcional.

Nosotros estamos interesados en la existencia de una función u que satisfaga la ecuación elíptica no lineal

$$(\wp_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$, $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω y $p = 2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

La estructura de esta tesis será la siguiente:

En el Capítulo 2, se repasan algunos conceptos que serán fundamentales para probar los resultados importantes de la misma.

En el Capítulo 3, probamos un muy conocido resultado de no existencia de Pohozaev, el cual afirma que si Ω es un dominio estrictamente estrellado y $\lambda \geq 0$ entonces $(\wp_\lambda)$ sólo tiene la solución trivial.

El Capítulo 3 contiene la formulación variacional de nuestro problema. Las soluciones de $(\wp_\lambda)$ corresponderán con los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) :&= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{2^*}\int\limits_\Omega |u|^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

sobre, lo que definimos como la variedad de Nehari,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda(\Omega) :&= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ J'_\lambda(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\} \end{aligned}$$

Por otro lado, probamos también, para $\lambda = 0$, la no existencia de minimizadores de J_λ en $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.

Como la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ **no** es compacta, el funcional J_λ no satisface la condición de Palais-Smale, por lo que hay dificultades tratando de encontrar los puntos críticos bajo métodos variacionales estándar. De hecho, hay un gran contraste entre el caso $p < 2^*$ para el cual la inclusión de Sobolev es compacta, y el caso $p = 2^*$. Varios resultados de existencia para el problema $(\wp_\lambda)$ son conocidos cuando $p < 2^*$.

El problema $(\wp_\lambda)$ fue estudiado por Haim Brezis y Louis Nirenberg en 1983; su motivación residía en que este problema se parece a algunos problemas variacionales en geometría y física, donde la falta de compacidad también ocurre.

En el Capítulo 4 se prueba el Teorema de Brezis-Nirenberg el cual afirma: Si $N \geq 4$, entonces $\forall \lambda \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos una solución no trivial. Este es el resultado más importante de la presente tesis.

Por último, en el Capítulo 5, ya sabiendo la existencia de soluciones para $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$, nuestro interés se centra en dar una cota inferior para el número de soluciones no triviales a nuestro problema. Para ello probamos el siguiente teorema:
Si Ω es un dominio acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, entonces $\exists \lambda_* \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tal que $\forall \lambda \in (\lambda_*, 0)$ el problema $(\wp_\lambda)$ tiene, al menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluciones no triviales, donde $cat_\Omega(\Omega)$ es la categoría de Lusternik-Schnirelmann de Ω.

El teorema anterior se lo debemos a Rey, cuando $N \geq 5$ y a Lazzo cuando $N = 4$.

Este texto está principalmente dirigido a aquellos estudiantes que tengan conocimiento previo en métodos variacionales y estén interesados en ahondar más sobre el tema.
Para leer esta tesis es recomendable haber estudiado libros como [5], [6] y [7].

Capítulo 2

Conceptos y resultados preliminares

Este capítulo está dedicado a revisar algunos de los conceptos que usaremos para probar los principales resultados de esta tesis.

2.1. Preliminares

2.1.1. Fórmula de Green y Gauss

Primero recordemos las siguientes definiciones:

Definición 2.1. *(a)* $C^k(\Omega) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \varphi$ *es* $k-$*veces continuamente diferenciable en* $\Omega\}$.
(b) $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$.
(c) $C_c^k(\Omega) := \{\varphi \in C^k(\Omega) : sop(\varphi)$ *es compacto y* $sop(\varphi) \subset \Omega\ \}$, *donde*

$$sop(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

es el **soporte** *de* φ, $0 \leq k \leq \infty$.

Probaremos ahora unos resultados clásicos de Cálculo.

Proposición 2.2. *(a)* **(Fórmula de Gauss)** *Si* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,\ \forall i = 1, \cdots, N.$$

(b) **(Integración por partes)** *Si* $f \in C^1(\Omega)$ *y* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,\ \forall i = 1, \cdots, N.$$

(c) **(Fórmula de Green)** *Si* $f \in C^2(\Omega)$ *y* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$*, entonces*

$$\int_\Omega (\Delta f)\varphi + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla \varphi = 0$$

Demostración. (a) Sea $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, sea:

$$\overline{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & si \quad x \in \Omega \\ 0, & si \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Entonces, $\overline{\varphi} \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, además existe $r > 0$ tal que $sop(\overline{\varphi}) \subset [-r, r]^N$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $i = 1$ y denotemos

$$(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \equiv \mathbb{R}^N.$$

Entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos:

$$\int_{-r}^{r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_1} dx_1 = \overline{\varphi}(r, y) - \overline{\varphi}(-r, y) = 0,\ \forall\ y \in \mathbb{R}^{N-1},$$

Por el Teorema de Fubini, se tiene:

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-r}^{r} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_1}(t, y)dtdy = 0,$$

con esto concluimos la demostración de (a).

(b) Aplicando (a) al producto $f\varphi$, obtenemos justo lo que queremos.

(c) Al aplicar (b) a las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y φ, y sumando las identidades obtenidas para $i = 1, \cdots, N$ obtenemos el resultado deseado.

□

2.1.2. Los espacios de Lebesgue

Considerando la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, si $p \in [1, \infty)$ definimos:

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \text{ es integrable en } \Omega\}$$

y denotamos por:

$$|f|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$$

a la norma en el espacio $L^p(\Omega)$.

Definición 2.3. *Un espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{R}$) que es completo con la métrica dada por su norma se llama un* **espacio de Banach**.

Teorema 2.4. *$L^p(\Omega)$ con la norma $|\cdot|_p$ es un espacio de Banach.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

Proposición 2.5. *(Desigualdad de Hölder) Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

Corolario 2.6. *Si Ω es acotado y $1 < p < r < \infty$, entonces $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y*

$$|f|_p \leq |\Omega|^{(r-p)/rp} |f|_r, \ \forall f \in L^r(\Omega)$$

donde $|\Omega| := \int_\Omega 1$ es la medida de Lebesgue de Ω en $\mathbb{R}^N$.

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

2.1.3. Diferenciabilidad en espacios de Banach

Sean V y W espacios de Banach, con normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$, respectivamente. El espacio

$$\mathcal{B}(V, W) := \{T : V \to W : T \text{ es lineal y continua } \},$$

con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)} := \sup_{v \in V \smallsetminus \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}$$

resulta ser un espacio de Banach.

Definición 2.7. *Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de V. Una función*

$$F : \mathcal{O} \to W$$

es **diferenciable en el punto** $u_0 \in \mathcal{O}$ *si existe* $T \in \mathcal{B}(V, W)$ *tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(u_0+v) - F(u_0) - Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0.$$

T *se llama* **la derivada de** F **en** u_0 *y se denota*

$$F'(u_0) := T.$$

Se dice que F *es* **diferenciable en** $\mathcal{O}$ *si lo es en cada punto* $u \in \mathcal{O}$*. La función*

$$F' : \mathcal{O} \to \mathcal{B}(V, W),\ u \mapsto F'(u),$$

se llama la **derivada** *de* F *en* $\mathcal{O}$*. Si la función* F' *es continua, decimos que* F *es de clase* C^1 *en* $\mathcal{O}$*.*

Definición 2.8. *Un espacio vectorial* H *(sobre* $\mathbb{R}$*) con un producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*, que es completo respecto a la norma inducida*

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

se llama un **espacio de Hilbert**

Si $\mathcal{O}$ es un abierto de un espacio de Hilbert H y $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, la derivada $F'(u) : H \to \mathbb{R}$ en cada punto $u \in \mathcal{O}$ es, por definición, una función lineal y continua. Así que, el teorema de representación de Fréchet-Riesz afirma la existencia de un único elemento $\nabla F(u) \in H$ tal que

$$\langle \nabla F(u), v \rangle = F'(u)v, \text{ para todo } v \in H.$$

$\nabla F(u)$ se llama el **gradiente** de F en u.

2.2. Espacios de Sobolev

2.2.1. Derivadas débiles

Denotemos por

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u|_\omega \in L^1(\omega),\ \forall \text{ abierto acotado } \omega, \text{ con } \overline{\omega} \subset \Omega\}.$$

Definición 2.9. *Sea* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Decimos que* u *es débilmente diferenciable en* Ω *si existen* $D_i u = v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tales que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i \varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$*. Definimos el gradiente débil de* u *como:*

$$\nabla u := (D_1 u, \cdots, D_N u).$$

2.2.2. Espacios de Sobolev

Definición 2.10. *Sea $p \in [1, \infty)$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como:*

$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u$ *es débilmente dif. en* Ω, $D_i u \in L^p(\Omega)\ \forall i\}$
dotado de la siguiente norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(|u|_p^p + \sum_{i=1}^{N} |D_i(u)|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},\ \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Si $p = 2$, se denota por

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

La norma en este espacio está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (D_i(u))(D_i(v)),\ \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Teorema 2.11. *$W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para todo $p \in [1, \infty)$, y $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$*

Demostración. La demostración se puede consultar en [5, 7]. □

Es sencillo comprobar que $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ para toda $p \in [1, \infty)$ y que $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para toda $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Esto es consecuencia de la fórmula de integración por partes.

Definición 2.12. *El espacio $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.*

Como $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $H^1(\Omega)$, tenemos que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

2.3. Teorema de Rellich-Kondrachov

2.3.1. Convergencia débil

Definición 2.13. *Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión (u_k) en H* **converge débilmente a** *u* **en** *H si, para cada $v \in H$, se cumple que:*

$$\lim_{k \to \infty} \langle u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

u se llama el **límite débil** *de la sucesión* (u_k)

Notación 2.14. *Escribiremos*

$$u_k \rightharpoonup u \ \textbf{débilmente} \ \textit{en } H$$

Proposición 2.15. *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H, entonces (u_k) está acotada en H.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

Teorema 2.16. (Propiedad fundamental de la convergencia débil) *Toda sucesión acotada en H contiene una subsucesión débilmente convergente en H.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

2.3.2. Encajes y compacidad

Teorema 2.17. (Desigualdad de Sobolev) *Sean $N \geq 3$ y $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Existe una constante $C_N > 0$, tal que:*

$$|u|_{2^*} \leq C_N \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [5, 7]. □

Teorema 2.18. (Desigualdad de Poincaré) *Si $p \in [1, 2^*]$ y Ω es acotado, existe una constante $C_{\Omega,p} > 0$, tal que:*

$$|u|_p \leq C_{\Omega,p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [5, 6, 7]. □

La desigualdad de Poincaré tiene las siguientes consecuencias importantes.

Corolario 2.19. *Si Ω es acotado, entonces:*

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} D_i(u) D_i(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ *y la norma inducida,*

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

es equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. *Por consiguiente,* $H_0^1(\Omega)$ *con el producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Claramente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal y simétrica. Veamos que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|u\|^2 \leq \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} \right)^2 \leq C_2 \|u\|^2, \; \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

de esta forma, es evidente que $\langle u, u \rangle > 0$, cuando $u \neq 0$ y que las normas son equivalentes.
Sean $u \in H_0^1(\Omega)$ y $C_2 := C_{\Omega,2}^2 + 1$, como $|u|_2^2 \leq C_{\Omega,2}^2 \|u\|^2$, se tiene que:

$$\left(\|u\|_{H^1(\Omega)} \right)^2 = (|u|_2^2 + \|u\|^2) \leq C_{\Omega,2}^2 \|u\|^2 + \|u\|^2 = (C_{\Omega,2}^2 + 1)\|u\|^2 = C_2 \|u\|^2.$$

Ahora, si $C_1 := 1$, tenemos que : $C_1 \|u\|^2 \leq |u|_2^2 + \|u\|^2 = \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} \right)^2$. □

Corolario 2.20. (Encaje de Sobolev) *Si* Ω *es acotado, entonces*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \text{ para todo } p \in [1, 2^*]$$

y esta inclusión es continua.

Demostración. Sean $u \in H_0^1(\Omega)$ y $p \in [1, 2^*]$, como Ω es acotado, por la desigualdad de Poincaré:

$$\int_\Omega |u|^p \leq (C_{\Omega,p})^p \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{p}{2}} < \infty.$$

con $C_{\Omega,p} > 0$. Por lo tanto $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y esta inclusión es continua. □

Teorema 2.21. (Rellich-Kondrachov) *Si* Ω *es un dominio acotado y* $p \in [1, 2^*)$, *entonces toda sucesión acotada en* $H_0^1(\Omega)$ *contiene una subsucesión que converge fuertemente en* $L^p(\Omega)$.

Demostración. La demostración se puede consultar en [5, 7]. □

Definición 2.22. *Una función* $F : V \to W$ *entre espacios de Banach tal que toda sucesión acotada en* V *contiene una subsucesión cuya imagen bajo* F *converge en* W *se llama un* **operador compacto**.

El teorema de Rellich-Kondrachov afirma que, si Ω es un dominio acotado, la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es un operador compacto para todo $p \in [1, 2^*)$.

Definición 2.23. *Un* **dominio exterior** *es un dominio cuyo complemento $\mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega$ es acotado, posiblemente vacío.*

Ejemplo 2.24. *Si Ω es un dominio exterior en $\mathbb{R}^N$, la inclusión*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

no es un operador compacto.

Demostración. Sean $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \neq 0$, y (ξ_k) una sucesión en Ω tal que $|\xi_k| \to \infty$. Definimos $\varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k)$. Notemos que *sop*$(\varphi_k) \subset \Omega$ para k suficientemente grande, así que $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ para tales k.
Claramente

$$\|\varphi_k\|_1 = \|\varphi\|_1$$

y

$$|\varphi_k|_p = |\varphi|_p.$$

Observemos además que, si $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces ψ y φ_k tienen soportes ajenos para k suficientemente grande. En consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi\varphi_k = 0, \; \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Si alguna subsucesión (φ_{k_j}) convergiese a v en $L^p(\Omega)$, tendríamos que

$$\int_\Omega \psi v = 0, \; \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por tanto, $v = 0$. Pero también se tendría que

$$|v|_p = \lim_{j\to\infty} |\varphi_{k_j}|_p = |\varphi|_p \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, ninguna subsucesión de (φ_k) converge en $L^p(\Omega)$. $\square$

Antes de ver otro ejemplo, enunciaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.25. *Sea (f_k) una sucesión en $L^p(\Omega)$ tal que $f_k \to f$ en $L^p(\Omega)$. Si $p \in [1, \infty)$, entonces existe una subsucesión (f_{k_j}) de (f_k) tal que $f_{k_j}(x) \to f(x)$ para casi toda $x \in \Omega$.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. $\square$

Ejemplo 2.26. *La inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ no es compacta para ningún $q \in [2, 2^*]$, donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el* **exponente crítico de Sobolev**.

Demostración. Sean $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \neq 0$ y (ξ_k) una sucesión en $\mathbb{R}^N$ tal que $|\xi_k| \to \infty$. Definimos $\varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k)$.
Claramente,

$$\|\varphi_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

y

$$|\varphi_k|_q = |\varphi|_q.$$

Observemos que $\varphi_k(x) \to 0$ para $x \in \mathbb{R}^N$. Si alguna subsucesión (φ_{k_j}) convergiese a v en $L^q(\mathbb{R}^N)$, por Teorema 2.25, una subsucesión de ella convergería a v casi dondequiera en $\mathbb{R}^N$ y en consecuencia, $v = 0$ casi dondequiera en $\mathbb{R}^N$. Pero también se tendría que

$$|v|_q = \lim_{j \to \infty} |\varphi_{k_j}|_q = |\varphi|_q \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, ninguna subsucesión de (φ_k) converge en $L^q(\mathbb{R})$. □

Ejemplo 2.27. *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$. Entonces la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ no es compacta.*

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que $0 \in \Omega$. Elegimos $r > 0$ de modo que $B_r(0) \subset \Omega$ y tomamos $\varphi \in C_c^\infty(B_r(0))$ tal que $\varphi \neq 0$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\varphi_k(x) := k^{(N-2)/2N} \varphi(kx).$$

Entonces *sop*$(\varphi_k) \subset B_{r/k}(0) \subset \Omega$ y, en consecuencia, $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$.
Mediante el cambio de variable $kx = y$ se obtiene que

$$\begin{aligned} |\varphi_k|_{2^*}^{2^*} &= \int_\Omega k|\varphi(kx)|^{2^*} dx \\ &= \int_\Omega |\varphi(y)|^{2^*} dy \\ &= |\varphi|_{2^*}^{2^*}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\nabla \varphi_k|_2^2 &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega k^N |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(kx)|^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y)|^2 dy \\
&= |\nabla \varphi|_2^2.
\end{aligned}$$

Así, (φ_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Si una subsucesión de (φ_k) convergiese a una función u en $L^{2^*}(\Omega)$, entonces $|u|_{2^*} = |\varphi|_{2^*} \neq 0$ y, por Teorema 2.25, una subsucesión de ella convergería puntualmente a u casi dondequiera en Ω. Pero $\varphi_k(x) \to 0$ para toda $x \neq 0$. Por tanto, $u = 0$ casi dondequiera en Ω. Esto es una contradicción; lo que prueba que (φ_k) no contiene ninguna subsucesión covergente en $L^{2^*}(\Omega)$. □

Corolario 2.28. *Si $p \in [2, 2^*)$, entonces toda sucesión acotada (u_k) en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión- a la que denotaremos del mismo modo- tal que*

$$\begin{aligned}
&u_k \rightharpoonup u, \text{ en } H_0^1(\Omega), \\
&u_k \to u, \text{ casi dondequiera en } \Omega, \\
&u_k \to u, \text{ en } L^p_{loc}(\Omega).
\end{aligned}$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [6]. □

Corolario 2.29. *Si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Para $\lambda > -\lambda_1$, denotamos por*

$$\langle u, v\rangle_\lambda := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv,$$

$$\|u\|_\lambda := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 \right)^{1/2}$$

Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *$\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$*

2. *La norma $\|\cdot\|_\lambda$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|$. Es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1\|u\| \leq \|u\|_\lambda \leq C_2\|u\|, \; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ es completo con cualquiera de estas normas.

Demostración. Probaremos primero que, para $\lambda > -\lambda_1$, todas las normas $\|\cdot\|_\lambda$ son equivalentes.
Recordemos que,

$$\lambda_1 = \inf_{H_0^1(\Omega)\smallsetminus\{0\}} \tfrac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2},$$

por lo tanto,

$$\|u\|_2^2 \leq \lambda_1^{-1}\|u\|^2, \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega)\smallsetminus\{0\}.$$

Sea $b_2 := \max\{\frac{\lambda}{\lambda_1}+1, 1\} > 0$.
Caso 1: Si $\lambda \geq 0$, entonces

$$\lambda\|u\|_2^2 \leq \tfrac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2.$$

Así,

$$\lambda\|u\|_2^2 + \|u\|^2 \leq \tfrac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2 + \|u\|^2 = \left(\tfrac{\lambda}{\lambda_1}+1\right)\|u\|^2 \leq b_2\|u\|^2.$$

Entonces,

$$\|u\|_\lambda^2 \leq b_2\|u\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_\lambda \leq b_2^{1/2}\|u\|.$$

Caso 2: Si $\lambda \leq 0$, entonces

$$\|u\|_\lambda^2 = \lambda\|u\|_2^2 + \|u\|^2 \leq \|u\|^2 \leq b_2\|u\|^2.$$

Así,

$$\|u\|_\lambda^2 \leq b_2\|u\|^2$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_\lambda \leq b_2^{1/2}\|u\|.$$

En cualquiera de los dos casos obtenemos:

$$\|u\|_\lambda \leq b_2^{1/2}\|u\|. \tag{2.1}$$

Ahora, sea $b_1 := \min\{\frac{\lambda}{\lambda_1}+1, 1\} > 0$.
Caso 1: Si $\lambda \geq 0$, entonces

$$b_1\|u\|^2 \leq \|u\|^2 \leq \lambda\|u\|_2^2 + \|u\| = \|u\|_\lambda^2.$$

Así,

$$b_1\|u\|^2 \leq \|u\|_2^2$$

Por lo tanto,

$$b_1^{1/2}\|u\| \leq \|u\|_2.$$

Caso 2: Si $\lambda \leq 0$, entonces

$$\lambda\|u\|_2^2 \geq \tfrac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2.$$

Así,

$$\lambda\|u\|_2^2 + \|u\|^2 \geq \tfrac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|^2 + \|u\|^2 \geq b_1\|u\|^2.$$

Entonces,

$$\|u\|_\lambda^2 \geq b_1\|u\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_\lambda \geq b_1^{1/2}\|u\|.$$

En cualquiera de los casos, tenemos

$$\|u\|_\lambda \geq b_1^{1/2}\|u\| \tag{2.2}$$

Así, por (2.1) y (2.2) tenemos

$$b_1^{1/2}\|u\| \leq \|u\|_\lambda \leq b_2^{1/2}\|u\|.$$

Haciendo $C_1 := b_1^{1/2}$ y $C_2 := b_2^{1/2}$, podemos concluir

$$C_1\|u\| \leq \|u\|_\lambda \leq C_2\|u\|,$$

como queríamos.

Demostremos ahora que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$.
Claramente $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ es bilineal y simétrica.
Basta probar $\langle v,v\rangle_\lambda = 0$ si y sólo si $v = 0$.
Si $v = 0$, entonces,

$$\langle v,v\rangle_\lambda = \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v + \lambda\int_\Omega v\cdot v = 0 + 0 = 0.$$

Si $\langle v,v\rangle = 0$, entonces $\|v\|_\lambda = 0$.
Así,

$$0 \leq C_1\|v\| \leq 0 \leq C_2\|v\|.$$

Entonces, $\|v\| = 0$ y por lo tanto $v = 0$.
Con esto concluimos nuestra prueba. □

Capítulo 3

No existencia de soluciones

En la primera sección de este capítulo se presenta el resultado de no existencia de Pohozaev, el cual asegura que para $\lambda \geq 0$ y Ω estrictamente estrellado, el problema

$$(\wp_\lambda) := \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

sólo tiene la solución trivial, donde Ω es un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

En la segunda sección de este capítulo se presenta la formulación variacional de nuestro problema. Las soluciones de $(\wp_\lambda)$ corresponderán con los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) : &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{2^*}\int\limits_\Omega |u|^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

sobre, lo que definimos como la variedad de Nehari,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda : &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ J_\lambda'(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\} \end{aligned}$$

y se probará, también, para $\lambda = 0$, la no existencia de minimizadores de J_λ en $\mathcal{N}_\lambda$.

3.1. Resultado de no existencia de Pohozaev

Definición 3.1. *Se dice que un dominio Ω es estrictamente estrellado si existe $x_0 \in \Omega$, tal que $x - x_0 \notin T_x(\partial\Omega)$ para ningún $x \in \partial\Omega$. Dicho de otra forma, $x \cdot \nu > 0$ en $\partial\Omega$, donde ν es la normal exterior unitaria.*

En esta sección demostraremos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Si $\lambda \geq 0$ y Ω es estrictamente estrellado, el problema $(\wp_\lambda)$ sólo tiene la solución trivial.*

Enunciaremos el siguiente teorema pues es clave para la demostración del Teorema 3.2.

Teorema 3.3. (Principio de continuación única) *Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $V \in C^0(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ satisface $-\Delta u + V(x)u = 0$ y $u = 0$ en un subconjunto abierto no vacío de Ω, entonces $u = 0$ en Ω.*

Recordemos que si tenemos dos funciones de clase C^1 $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ y $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$div(gf) = f \cdot \nabla g + div(f)g. \tag{3.1}$$

Lema 3.4. *Si $u \in C^2(\Omega)$ entonces*

$$div((\nabla u \cdot x)\nabla u) = div\left(\tfrac{|\nabla u|^2}{2}x\right) - \tfrac{N-2}{2}|\nabla u|^2 + \Delta u(\nabla u \cdot x).$$

Demostración: De la fórmula (3.1) se sigue que

$$div((\nabla u \cdot x)\nabla u) = \nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u + \Delta u(\nabla u \cdot x),$$
$$div\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) = \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) \cdot x + \frac{|\nabla u|^2}{2}N.$$

Así pues, basta probar que

$$\nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u = \nabla\left(\tfrac{|u|^2}{2}\right) \cdot x + |\nabla u|^2.$$

En efecto

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla u\cdot x)\cdot\nabla u &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\\ &= \sum_j\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}x_i\frac{\partial u}{\partial x_j}+\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\\ &= \sum_i\sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}x_i+|\nabla u|^2\\ &= \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\cdot x+|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

$\square$

La prueba del Teorema 3.2 está basada en la siguiente identidad de Pohozaev:

Proposición 3.5. *(Pohozaev) Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua con primitiva*

$$G(u)=\int_0^u g(v)dv$$

y sea $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ una solución de la ecuación:

$$\begin{cases}-\Delta u = g(u), & en \quad \Omega\\ \quad u=0, & sobre \quad \partial\Omega\end{cases}\tag{3.2}$$

en un dominio suave, abierto y acotado Ω de $\mathbb{R}^N$. Entonces se cumple:

$$\tfrac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - N\int_\Omega G(u)dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2 x\cdot\nu dx=0$$

donde ν denota la normal exterior unitaria.

Demostración: Como u es solución de (3.2) entonces cumple:

$$-\Delta u = g(u), \text{ en } \Omega,$$

es decir:

$$0 = \Delta u + g(u). \tag{3.3}$$

Multiplicando (3.3) por $x \cdot \nabla u$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u + g(u))(x \cdot \nabla u) \\ &= \Delta u(x \cdot \nabla u) + g(u)(x \cdot \nabla u) \end{aligned} \tag{3.4}$$

De la identidad (3.1) se sigue que

$$div\,(G(u)x) = g(u)\nabla u \cdot x + NG(u),$$

y de la identidad (3.4) y el Lema 3.4 se obtiene que

$$\tfrac{N-2}{2}|\nabla u|^2 + NG(u) = div\left(\tfrac{|\nabla u|^2}{2}x - (\nabla u \cdot x)\,\nabla u - G(u)x\right)$$

Así,

$$0 = div\left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x\frac{|\nabla u|^2}{2} + xG(u)\right) + \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2 - NG(u). \tag{3.5}$$

Integrando (3.5) sobre Ω y utilizando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega div\left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x\frac{|\nabla u|^2}{2} + xG(u)\right) + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - N\int_\Omega G(u) \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u(x \cdot \nabla u) \cdot \nu dx - \int_{\partial\Omega} x\frac{|\nabla u|^2}{2} \cdot \nu dx + \int_{\partial\Omega} xG(u) \cdot \nu dx + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - N\int_\Omega G(u). \end{aligned}$$

donde ν denota la normal exterior unitaria.

Como $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que $G(u) = 0$ en $\partial\Omega$ y entonces $\int\limits_{\partial\Omega} xG(u) = 0$.

Así, tenemos

$$0 = \int_{\partial\Omega} \nabla u(x \cdot \nabla u) \cdot \nu dx - \int_{\partial\Omega} x\frac{|\nabla u|^2}{2} \cdot \nu dx + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - N\int_\Omega G(u) \tag{3.6}$$

Fijémonos ahora en : $\int\limits_{\partial\Omega} \nabla u(x \cdot \nabla u) \cdot \nu dx - \int\limits_{\partial\Omega} x\frac{|\nabla u|^2}{2} \cdot \nu dx$

Como en $\partial\Omega$, $\nabla u = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$, entonces $|\nabla u|^2 = |\nu|^2|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2$.

Así,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \nabla u(x\cdot\nabla u)\cdot\nu dx - \int_{\partial\Omega} x\frac{|\nabla u|^2}{2}\cdot\nu dx &= \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\nu(x\cdot\nu\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right))\cdot\nu dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\cdot\nu dx\\
&= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 x\cdot\nu dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 x\cdot\nu dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 x\cdot\nu dx.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\int_{\partial\Omega} \nabla u(x\cdot\nabla u)\cdot\nu dx - \int_{\partial\Omega} x\frac{|\nabla u|^2}{2}\cdot\nu dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 x\cdot\nu dx. \tag{3.7}
$$

Por último, sustituyendo (3.7) en (3.6), obtenemos

$$
\tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 x\cdot\nu dx + \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 - N\int_{\Omega}G(u) = 0
$$

lo cual es el resultado deseado. □

Ahora sí, vayamos con la prueba del Teorema 3.2.

Demostración del Teorema 3.2. Supongamos, sin pérdida de generalidad que Ω es estrictamente estrellado con respecto al origen.
Sean $\lambda \geq 0$ y u solución de $(\wp_\lambda)$.
Sea $g(u) := -\frac{\lambda}{2}u + u|u|^{2^*-2}$ cuya primitiva es $G(u) = \frac{\lambda}{2}|u|^2 + \frac{1}{2^*}|u|^{2^*}$.
Por la Proposición 3.5 tenemos

$$
\frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx - N\int_{\Omega}G(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 x\cdot\nu dx = 0 \tag{3.8}
$$

Multiplicando (3.8) por $\frac{2}{N-2}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2^* \int_{\Omega} G(u) dx + \frac{1}{N-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2^* \int_{\Omega} \left(-\frac{\lambda}{2} |u|^2 + \frac{1}{2^*} |u|^{2^*} \right) dx + \frac{1}{N-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dx \\
&= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - |u|^{2^*} \right) dx + \frac{N}{N-2} \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{N-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dx \\
&= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 - |u|^{2^*} \right) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 + \frac{N}{N-2} \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{N-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dx \\
&= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 - |u|^{2^*} \right) dx + \frac{2}{N-2} \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{N-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dx.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Ahora, como u es solución de $(\wp_\lambda)$, entonces

$$-\Delta u = -\lambda u + |u|^{2^*-2} u.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
-u\Delta u &= -\lambda u^2 + u^2 |u|^{2^*-2} \\
&= -\lambda |u|^2 + |u|^{2^*}.
\end{aligned}
$$

Así, integrando sobre Ω y usando la identidad de Green, obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\lambda \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |u|^{2^*} &= -\int_{\Omega} u \Delta u \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 - |u|^{2^*} \right) dx = 0 \tag{3.10}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.9), obtenemos

$$\tfrac{2}{N-2} \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{N-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dx = 0$$

Por lo tanto,

$$2\lambda\int_{\Omega}|u|^2dx+\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2x\cdot\nu dx=0 \tag{3.11}$$

Ahora, dividiremos nuestra prueba en dos casos.

Caso 1: $\lambda=0$.
Si $\lambda=0$ entonces $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2x\cdot\nu dx=0.$
Como Ω es estrictamente estrellado, entonces $x\cdot\nu>0$ para toda $x\in\partial\Omega$, por lo tanto $\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|=0$ casi dondequiera en $\partial\Omega$, entonces $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$ en $\partial\Omega$.

Así, $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$ en $\partial\Omega$ y por ser u solución de $(\wp_\lambda)$, $u\equiv0$ en $\partial\Omega$, por lo tanto $\nabla u=0$ en $\partial\Omega$.

Definamos,

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}u(x), & x\in\bar{\Omega}\\ 0, & x\in\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}\end{cases}$$

$\bar{u}$ así definida es diferenciable y cumple:

$$-\Delta\bar{u}=|\bar{u}|^{2^*-2}\bar{u} \text{ en } \mathbb{R}^N$$

Entonces,$-|\bar{u}|^{2^*-2}\in C^0(\mathbb{R}^N)$ y $\bar{u}=0$ en $\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}$, el cual es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^N$.
Así, por el principio de continuación única, $\bar{u}=0$ en $\mathbb{R}^N$, entonces $u\equiv0$ en $\bar{\Omega}$, como queríamos.

Caso 2: $\lambda>0$.
Si $\lambda>0$, entonces $2\lambda\displaystyle\int_{\Omega}|u|^2\geq0$. Como Ω es estrictamente estrellado, $x\cdot\nu>0$ para toda $x\in\partial\Omega$.
Por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2x\cdot\nu dx\geq0$$

Como

$$2\lambda\int_{\Omega}|u|^2+\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2x\cdot\nu dx=0$$

Entonces,

$$0 \leq 2\lambda \int_{\Omega} |u|^2 = -\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 x \cdot \nu dx \leq 0$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} |u|^2 = 0 = \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 x \cdot \nu dx.$$

Entonces,

$$\int_{\Omega} |u|^2 = 0$$

Así $|u|^2 = 0$, por lo tanto $u \equiv 0$ en Ω, como queríamos. $\square$

3.2. No existencia de minimizadores

3.2.1. Formulación Variacional del problema

Recordemos que el problema que estamos interesados en estudiar es:

$$(\wp_\lambda) := \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$, $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω y $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Definición 3.6. *Una solución de $(\wp_\lambda)$ es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} |u|^{2^*-2}uv, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando inspiración en el principio de Dirichlet, consideramos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\lambda(u) := \tfrac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Por el Corolario 2.20, se garantiza que este funcional está bien definido.

Proposición 3.7. *J_λ es de clase C^2 y*

$$J_\lambda'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \int_\Omega |u|^{2^*-2}uv, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, u es solución del problema ($\wp_\lambda$) si y sólo si u es punto crítico de J_λ.

Demostración. La demostración se puede consultar en [6]. □

3.2.2. Variedad de Nehari

El conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\lambda(\Omega) &:= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, J_\lambda(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}.\end{aligned}$$

contiene a todos los puntos críticos no triviales de J_λ y tiene las siguientes propiedades:

Proposición 3.8. *(a) Existe $d_0 > 0$ tal que $\|u\|_\lambda \geq d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. En consecuencia, $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ es un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.*
(b) $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ es una subvariedad de clase C^2 de $H_0^1(\Omega)$ y se llama la **variedad de Nehari**.
(c) $u \notin T_u\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ para toda $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.
(d) Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, existe un único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. t_u es el único punto en $(0, \infty)$ para el que cumple que:

$$\max_{t \geq 0} J_\lambda(tu) = J_\lambda(t_u u).$$

Demostración. (a): Combinando la desigualdad de Poincaré con el Corolario 2.29, se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$C|u|_{2^*}^2 \leq \|u\|_\lambda^2, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por tanto,

$$C \leq \frac{\|u\|_\lambda^2}{\left(|u|_{2^*}^{2^*}\right)^{2/2^*}} = \|u\|_\lambda^{2\left(\frac{2^*-2}{2^*}\right)} = \|u\|_\lambda^{\frac{4}{N}}, \ \forall u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega),$$

es decir,

$$d_0 := C^{-2\left(\frac{2^*-2}{2^*}\right)} = C^{-\frac{4}{N}} \leq \|u\|_\lambda, \ \forall u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega).$$

En consecuencia,

$$\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ \|u\|_\lambda \geq d_0 \text{ y } \|u\|_\lambda^2 - |u|_{2^*}^{2^*} = 0\},$$

que es claramente un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.
(b)y (c): Consideremos la función $\Psi : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(u) = \|u\|_\lambda^2 - |u|_{2^*}^{2^*}.$$

Entonces, $\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \Psi^{-1}(0)$, Ψ es de clase C^2 y su derivada está dada por

$$\Psi'(u)v = 2\langle u, v\rangle_\lambda - 2^* \int\limits_\Omega |u|^{2^*-2} uv, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Además, 0 es un valor regular de Ψ ya que

$$\Psi'(u)u = 2\|u\|_\lambda^2 - 2^*|u|_{2^*}^{2^*} = (2 - 2^*)\|u\|_\lambda^2 \neq 0, \ \forall u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega).$$

Esto prueba que $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ es una variedad de clase C^2 y que

$$u \notin \ker \Psi'(u) =: T_u\mathcal{N}_\lambda(\Omega).$$

(d): Sea $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ y sea $J_u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$J_u(t) = J_\lambda(tu) = \left(\tfrac{1}{2}\|u\|_\lambda^2\right) t^2 - \left(\tfrac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}\right) t^{2^*}.$$

Esta función tiene un único punto crítico en $(0, \infty)$ y éste es un máximo. Además para $t \in (0, \infty)$ se cumple que

$$J_u'(t) = J_\lambda'(tu)u = 0 \Leftrightarrow J_\lambda'(tu)tu = 0 \Leftrightarrow tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega).$$

Es decir, J_u tiene un máximo en t si y sólo si $tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Esto prueba ($d$). □

Observemos que

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{N}\|u\|_\lambda^2 = \frac{1}{N}|u|_{2^*}^{2^*}, \quad \forall u \in \mathcal{N}. \tag{3.12}$$

De la proposición anterior podemos concluir lo siguiente.

Corolario 3.9. *(a)* $\inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u) > 0$
(b) Si $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ es un punto crítico de J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, entonces u es un punto crítico no trivial de $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, en consecuencia, una solución no trivial del problema $(\wp_\lambda)$.

Demostración. La afirmación (a) es consecuencia inmediata de la identidad (3.12) y la Proposición 3.8.
(b): Si $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ es un punto crítico de J_λ sobre $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, entonces

$$J_\lambda'(u)v = 0, \ \forall v \in T_u\mathcal{N}_\lambda(\Omega).$$

Además, de la definición de $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ se sigue que $J'_\lambda(u)u = 0$. Como el complemento ortogonal de $T_u\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ tiene dimensión 1 y, por Proposición 3.8, $u \notin T_u\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, se tiene que $H_0^1(\Omega) = T_u\mathcal{N}_\lambda(\Omega) \oplus \{tu : t \in \mathbb{R}\}$. En consecuencia,

$$J'_\lambda(u)v = 0,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, u es un punto crítico de $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. □

3.2.3. No existencia de minimizadores

Definición 3.10. *Para $R > 0$ definimos la $R-$dilatación $u_R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de una función $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$u_R(x) := R^{\frac{2-N}{2}} u(R^{-1}x)$$

Denotemos por:

$$D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \{u \in L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right) :\ u \text{ es d.d y } D_i u \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right),\ i = 1, \cdots, N\}.$$

Lema 3.11. *Si $u \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$, entonces para todo $R > 0$, $u_R \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \text{ y } \int_{\mathbb{R}^N} |u_R|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}$$

Es usual referirse a estas identidades como la invariancia bajo dilataciones.

Demostración. Sean $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y $R > 0$, es claro que $u_R \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$, sea $g_R^i : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$g_R^i(x) := R^{-1}x_i$, donde x_i es la $i-$ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^N$.

Definamos $g_R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ como: $g_R(x) := (g_R^1(x), \cdots, g_R^N) = R^{-1}x$.
g_R así definida es diferenciable, pues sus funciones coordenadas, g_R^i, son diferenciables; además:

$$Dg_R(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_R^1(x) \\ . \\ . \\ . \\ \nabla g_R^N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1} & \cdots & 0 \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & R^{-1} \end{pmatrix} = R^{-1} \cdot Id$$

Ahora, $u_R = R^{\frac{2-N}{2}}(u \circ g_R)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\nabla u_R(x) &= R^{\frac{2-N}{2}} \nabla (u \circ g_R)(x) \\
&= R^{\frac{2-N}{2}} \nabla u(g_R(x)) \cdot Dg_R(x) \\
&= R^{\frac{2-N}{2}} \nabla u(R^{-1}x) \cdot R^{-1} Id = R^{\frac{-N}{2}} \nabla u(R^{-1}) \cdot Id \\
&= R^{\frac{-N}{2}} \nabla u(R^{-1}x). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Entonces, por (3.13) y el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |R^{\frac{-N}{2}} \nabla u(R^{-1}x)|^2 dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} R^{-N} |\nabla u(R^{-1}x)|^2 dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(R^{-1}x)|^2 R^{-N} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \circ g_R|^2 |Dg_R| \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2$$

Por último:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_R|^{2^*} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |R^{\frac{2-N}{2}} u(R^{-1}x)|^{2^*} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} R^{-N} |u(R^{-1}x)| dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(R^{-1}x)|^{2^*} R^{-N} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u \circ g_R|^{2^*} |Dg_R|
\end{aligned}$$

Por el teorema de cambio de variable, tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u \circ g_R|^{2^*} |Dg_R| = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_R|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*},$$

como queríamos. □

Denotemos por

$$c_\lambda(\Omega) := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u),$$

donde J_λ y $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ son el funcional y la variedad de Nehari definidos en las Subsecciones 3.2.1 y 3.2.2, respectivamente.

Observación 3.12. *Si $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$, $u \in \mathcal{N}_0(\Omega)$ y*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \widetilde{\Omega} \setminus \Omega \end{cases}$$

entonces $\bar{u} \in \mathcal{N}_0(\widetilde{\Omega})$ y $J_0(u) = J_0(\bar{u})$.

Proposición 3.13. *Si $\lambda = 0$ entonces $c_\lambda(\Omega)$ no depende de Ω y no se alcanza.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que Ω contiene al origen.
Sean $r, R > 0$ tales que $B_r(0) \subset \Omega \subset B_R(0)$.
Por la Observación 3.12

$$\{J_0(u) : \ u \in \mathcal{N}_0(\Omega)\} \subseteq \{J_0(u) : \ u \in \mathcal{N}(B_R(0))\}.$$

Por lo tanto,

$$c_0(B_R(0)) := \inf_{u \in \mathcal{N}_0(B_R(0))} J_0(u) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_0(\Omega)} J_0(u) =: c_0(\Omega).$$

Análogamente, $c_0(\Omega) \leq c_0(B_r(0))$.

Por otra parte, el Lema 3.11 implica que para cualesquiera $r, R > 0$, $u \in \mathcal{N}_0(B_r(0))$ si y sólo si $u_{r/R} \in \mathcal{N}_0(B_R(0))$ y que $J_0(u) = J_0(u_{r/R})$. Entonces

$$c_0(B_r(0)) = c_0(B_R(0)).$$

En consecuencia, para cualquier dominio acotado Ω,

$$c_0(\Omega) = c_0(B_1(0)) =: c_0$$

Por lo tanto $c_0(\Omega)$ no depende de Ω.
Ahora, supongamos que existe $u_0 \in \mathcal{N}_0(\Omega)$ tal que $J_0(u_0) = c_0 = \inf_{u \in \mathcal{N}_0(\Omega)} J_0(u)$.
Por la Observación 3.12 $\bar{u_0}$ es mínimo de J_0 en $\mathbb{R}^N$.
Por lo tanto $\bar{u_0}$ cumple:

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u_0} = |\bar{u_0}|^{2^*-2} \bar{u_0}, & en \quad \mathbb{R}^N \\ \bar{u_0} = 0, & en \quad \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

lo cual es una contradicción al principio de continuación única.
Por lo tanto c_0 no se alcanza en ningún dominio acotado.

$\square$

Capítulo 4

Teorema de Brezis-Nirenberg

El objetivo principal de este capítulo es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *(Brezis-Nirenberg 1983) Si $N \geq 4$, entonces el problema*

$$(\wp_\lambda)\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tiene al menos una solución no trivial para cualquier $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), 0)$.

4.1. Lema de Brezis-Lieb

Lema 4.2. *Sea H un espacio de Hilbert y sea (u_n) una sucesión en H tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en H. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2) = \|u\|^2.$$

Demostración. Como $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en H,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(2\langle u_n, u\rangle - \|u\|^2\right) \\ &= 2\|u\|^2 - \|u\|^2 = \|u\|^2, \end{aligned}$$

como queríamos. □

En esta sección demostraremos el siguiente lema,

Lema 4.3. *(Brezis-Lieb, 1983) Sean $1 \leq p < \infty$, Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ y (u_n) una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$ para casi toda $x \in \Omega$. Entonces $u \in L^p(\Omega)$ y*

$$\lim_{n\to\infty}\left(|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p\right) = |u|_p^p.$$

Lema 4.4. *Sea $p \in [1,\infty)$. Dada $\varepsilon > 0$ existe $C = C(\varepsilon, p) > 0$ tal que*

$$||a+b|^p - |a|^p| \le \varepsilon|a|^p + C|b|^p,\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Si $b = 0$ la desigualdad se satisface para cualquier $C > 0$. Podemos entonces suponer que $b \neq 0$. Notemos qe todo se reduce a demostrar que

$$||t+1|^p - |t|^p| - \varepsilon|t|^p \le C,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

puesto que, tomando $t = \frac{a}{b}$, obtenemos de ésta la desigualdad deseada.

Definamos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(r) := |r|^p$, entonces $f'(r) = p|r|^{p-2}r$. Por el teorema del valor medio, existe $r \in (t, t+1)$ tal que

$$||t+1|^p - |t|^p| = p|r|^{p-1} \le p(|t|+1)^{p-1}, \text{ si } |t| > 1.$$

Dada $\varepsilon > 0$, definamos $h(s) = p(s+1)^{p-1} - \varepsilon s^p$, para $s \in [0,\infty)$.
Como $h(s) \to -\infty$, cuando $s \to \infty$, existe $M > 0$ tal que, para toda $s > M$, $h(s) < 1$. Entonces,

$$p(s+1)^{p-1} - \varepsilon s^p < 1, \text{ para toda } s > M.$$

Como h es continua, existe $C^1 > 0$ tal que

$$h(s) \le |h(s)| \le C^1, \text{ para toda } |s| \le M.$$

Por lo tanto existe $C > 0$ tal que

$$p(s+1) - \varepsilon s^p < C,\ \forall s \ge 0.$$

En consecuencia, para toda $t \ge 0$,

$$\begin{aligned} ||t+1|^p - |t|^p| - \varepsilon|t|^p &\le p||t|+1|^p - \varepsilon|t|^2 \\ &< C, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Demostración del Lema 4.3. Como $(|u_n|^p)$ es una sucesión acotada en $L^1(\Omega)$ el lema de Fatou A.4, asegura que $u \in L^p(\Omega)$. Sea $\varepsilon > 0$. Definimos

$$v_n := ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon|u_n - u|^p.$$

Sea $C = C(\varepsilon, p)$ como en el Lema 4.4.
Aplicando dicho lema a

$$a := u_n(x) - u(x) \text{ y } b := u(x)$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} v_n(x) &\leq ||u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p| - \varepsilon |u_n(x) - u(x)|^p + |u(x)|^p \\ &\leq (C+1)|u(x)|^p \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

En consecuencia, $v_n^+ := \max\{v_n, 0\}$ cumple que $|v_n^+(x)| \leq (C+1)|u(x)|^p$ para todo $x \in \Omega$. Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesque A.5, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n^+ = 0.$$

Ahora, como (u_n) está acotada en $L^p(\Omega)$ existe $C' > 0$, independiente de ε, tal que

$$\int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| \leq \varepsilon \int_\Omega |u_n - u|^p + \int_\Omega v_n^+ \leq C'\varepsilon + \int_\Omega v_n^+.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| \leq C'\varepsilon, \text{ para toda } \varepsilon > 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \left(|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p - |u|_p^p\right) = 0,$$

como queríamos. □

Más adelante, usaremos el siguiente resultado.

Lema 4.5. *Si $\alpha < 1$, entonces*

$$a^\alpha + b^\alpha \geq (a+b)^\alpha, \ \forall a, b > 0.$$

Además, la igualdad $a^\alpha + b^\alpha = (a+b)^\alpha$ se cumple si y sólo si $ab = 0$.

Demostración. Sea $\alpha \in (0,1)$, entonces $\frac{1}{\alpha} > 1$.
Así, podemos fijarnos en la norma $\|\cdot\|_{1/\alpha}$ en $\mathbb{R}^2$ y en los vectores

$$(a^\alpha, 0), (0, b^\alpha) \in \mathbb{R}^2, \text{ con } a, b > 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} \|(a^\alpha, b^\alpha)\|_{1/\alpha} &= \|(a^\alpha, 0) + (0, b^\alpha)\|_{1/\alpha} \\ &\leq \|(a^\alpha, 0)\|_{1/\alpha} + \|(0, b^\alpha)\|_{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|(a^\alpha, b^\alpha)\|_{1/\alpha} &= (a+b)^\alpha \\ &\leq a^\alpha + b^\alpha \\ &= \|(a^\alpha, 0)\|_{1/\alpha} + \|(0, b^\alpha)\|_{1/\alpha}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha, \text{ para } \alpha \in (0,1), \text{ con } a, b > 0,$$

como queríamos.
Demostremos ahora que la igualdad $a^\alpha + b^\alpha = (a+b)^\alpha$ se cumple si y sólo si $ab = 0$.
Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $a = 0$, entonces

$$a^\alpha + b^\alpha = b^\alpha = (0+b)^\alpha = (a+b)^\alpha,$$

como queríamos.
Ahora, argumentando por contradicción supongamos $a^\alpha + b^\alpha = (a+b)^\alpha$ y $a, b > 0$, con $a \geq b$, así, tenemos

$$\tfrac{1}{a^\alpha}(a^\alpha + b^\alpha) = \tfrac{1}{a^\alpha}(a+b)^\alpha, \text{ entonces } 1 + \left(\tfrac{b}{a}\right)^\alpha = \left(1 + \tfrac{b}{a}\right)^\alpha.$$

Ahora, por la desigualdad de Bernoulli generalizada, tenemos:

$$\left(1 + \tfrac{b}{a}\right)^\alpha \leq 1 + \alpha\left(\tfrac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}1 + \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha &\leq 1 + \alpha\left(\frac{b}{a}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha &\leq \alpha\left(\frac{b}{a}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} &\leq \alpha\end{aligned}$$

Observemos que $\left(\tfrac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \geq 1$.
En efecto, como estamos suponiendo $a \geq b$, entonces $\tfrac{a}{b} \geq 1$, así $\left(\tfrac{a}{b}\right)^{1-\alpha} \geq 1$ y por lo tanto $\left(\tfrac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \geq 1$.
Así, lo que obtuvimos es

$$1 \leq \left(\tfrac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \leq \alpha.$$

Por lo tanto, $1 \leq \alpha$, lo cual es una contradicción, ya que $\alpha \in (0,1)$.
En consecuencia $ab = 0$ como queríamos. $\square$

4.2. Teorema de Brezis-Nirenberg

Recordemos primero que en el Capítulo 3 se prueba que los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) :&= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

sobre la variedad de Nehari

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda(\Omega) :&= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ J'_\lambda(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}. \end{aligned}$$

son las soluciones a nuestro problema

$$(\wp_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, & en \quad \Omega \\ \qquad u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

y en la Sección 3.2 se define:

$$c_\lambda := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Notación 4.6. *En este capítulo,* $\|\cdot\|$ *denotará a la norma* $\|\cdot\|_0$.

Ahora, definamos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$S_\lambda := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ |u|_{2^*}=1}} \{|\nabla u|_2^2 + \lambda |u|_2^2\} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ |u|_{2^*}=1}} \|u\|_\lambda^2.$$

Así, S_0 es la mejor constante de Sobolev para la inclusión

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega).$$

Lema 4.7. S_λ *se alcanza si y sólo si* $c_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u)$ *se alcanza.*

Demostración. Observemos primero que si $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ y $t \in (0, \infty)$ entonces

$$tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \Leftrightarrow t = \left(\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^{2^*}}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

En efecto, por definición

$$\begin{aligned} tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) &\Leftrightarrow \|tu\|_\lambda^2 = |tu|_{2^*}^{2^*} \\ &\Leftrightarrow t^{2^*-2} = \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^{2^*}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|tu|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{1}{N}\|tu\|_\lambda^2 \\ &= \frac{1}{N}t^2\|u\|_\lambda^2 \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^{2^*}}\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^{2^*}}\right)^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

De la Proposición 3.8 (d) se sigue que

$$\begin{aligned} c_\lambda = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u) &= \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} J_\lambda(t_u u) \\ &= \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^{2^*}}\right)^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{N}\left(\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^{2^*}}\right)^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{N}S_\lambda^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es claro que S_λ se alcanza si y sólo si c_λ se alcanza. $\square$

Lema 4.8. *Para toda* $\lambda < 0$,

$$S_\lambda = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \left[\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2}\right] \leq S_0 = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \left[\frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}\right].$$

Demostración. Sea $\lambda < 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_\lambda^2 &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2 \end{aligned}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.
Por tanto,

$$\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$.
Así, tomando ínfimos se obtiene el resultado deseado. □

Lema 4.9. *Si Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, $\lambda < 0$ y si*

$$S_\lambda < S_0$$

entonces

$$S_\lambda = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left[\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} \right]$$

se alcanza.

Demostración. Supongamos $S_\lambda < S_0$. Lo que debemos demostrar es que existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $S_\lambda = \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2}$.

Consideremos una sucesión minimizante (u_m) para S_λ en $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, es decir, una sucesión $(u_m) \subseteq H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $|u_m|_{2^*} = 1$ y

$$\|u_m\|_\lambda^2 \to S_\lambda.$$

Como $(\|u_m\|_\lambda^2)$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, es acotada. Sea b una cota superior para $(\|u_m\|_\lambda^2)$, entonces

$$S_\lambda := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left[\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} \right] \leq \|u_m\|_\lambda^2 \leq b$$

Por lo tanto, (u_m) es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$. Así, por Corolario 2.28 y el teorema de Rellich-Kondrachov 2.21, tenemos una subsucesión (que denotaremos como u_m por comodidad) tal que

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u, \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega) \\ u_m &\to u, \text{ fuertemente en } L^2(\Omega) \\ u_m &\to u, \text{ casi dondequiera en } \Omega. \end{aligned}$$

$$S_0 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \leq \frac{\|u_m\|^2}{|u_m|_{2^*}^2} = \|u_m\|^2.$$

Entonces,

$$S_0 \leq \|u_m\|^2 \tag{4.1}$$

Como

$$S_\lambda = \lim_{m\to\infty} \tfrac{\|u_m\|_\lambda^2}{|u_m|_{2^*}^2} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_\lambda^2$$

Entonces,

$$\|u_m\|_\lambda^2 = |\nabla u_m|_2^2 + \lambda |u_m|_2^2 = S_\lambda + o(1), \tag{4.2}$$

donde $o(1) \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$.
Sumando $\lambda |u_m|_2^2$ a (4.1), obtenemos

$$\|u_m\|_\lambda^2 = |\nabla u_m|_2^2 + \lambda |u_m|_2^2 \geq S_0 + \lambda |u_m|_2^2.$$

Por (4.2), nos queda

$$S_\lambda + o(1) \geq S_0 + \lambda |u_m|_2^2$$

En consecuencia, tendiendo $m \longrightarrow \infty$, tenemos

$$S_\lambda \geq S_0 + \lambda |u|_2^2$$

Por lo tanto,

$$-\lambda |u|_2^2 \geq S_0 - S_\lambda > 0$$

Así,

$$-\lambda |u|_2^2 > 0$$

Por lo tanto $u \neq 0$.

Ahora, de la desigualdad de Sobolev, se sigue que (u_m) está acotada en $L^{2^*}(\Omega)$. Aplicando el lema de Brezis-Lieb 4.3 y el Lema 4.5, obtenemos que

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= S_\lambda \left(\lim_{m\to\infty} |u_m|_{2^*}^{2^*} \right)^{2/2^*} \\
&= S_\lambda \left(\lim_{m\to\infty} |u_m - u|_{2^*}^{2^*} + |u|_{2^*}^{2^*} \right)^{2/2^*} \\
&\leq S_\lambda \left(\lim_{m\to\infty} |u_m - u|_{2^*}^{2^*} + |u|_{2^*}^{2^*} \right) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2 \\
&= \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_\lambda^2 = S_\lambda.
\end{aligned}$$

Como $u \neq 0$, concluimos que

$$\lim_{m\to\infty} |u_m - u|_{2^*}^{2^*} = 0$$

Por lo tanto, $|u|_{2^*} = 1$ y, como $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$S_\lambda \leq \|u\|_\lambda^2 \leq \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_\lambda^2 = S_\lambda.$$

Es decir,

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m\|_\lambda^2 = \|u\|_\lambda^2 = S_\lambda.$$

Por lo tanto, S_λ se alcanza, como queríamos.

$\square$

Notación 4.10. *Denotaremos por $O(\varepsilon^\alpha)$ a una función (que depende de ε) tal que existe una constante $C > 0$ que cumple*

$$|\varepsilon^{-\alpha} O(\varepsilon^\alpha)| \leq C, \text{ para toda } \varepsilon \text{ suficientemente pequeño.}$$

Ahora, consideremos la familia:

$$u_\varepsilon^*(x) := \frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}, \ \varepsilon > 0. \tag{4.3}$$

Para toda $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon^* \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.11. *Para toda $\varepsilon > 0$*

$$-\left[\Delta u_\varepsilon^*(x)\right] = u_\varepsilon^*(x)|u_\varepsilon^*(x)|^{2^*-2}, \tag{4.4}$$

en $\mathbb{R}^N$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x_i}(x) &= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}} \cdot \left(-\left(\frac{N-2}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\right) \cdot 2x_i \\
&= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}} \left(\frac{N-2}{2}\right)\left(\frac{-2x_i}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_\varepsilon^*}{\partial x_i^2}(x) &= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}} \left(\frac{N-2}{2}\right)\left(\frac{-2}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\right) \\
&\quad + \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}} \left(\frac{N-2}{2}\right)(-2x_i)\left(-\frac{N}{2}\right)\left(\frac{1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}\right) \cdot 2x_i \\
&= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}} \left[N(N-2)\right]\left[\frac{x_i^2}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}\right] \\
&\quad + \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}} (N-2)\left[\frac{-1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\right].
\end{aligned}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
-\left[\Delta u_\varepsilon^*(x)\right] &= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}\left[N(N-2)\right]\left[\frac{1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\right] \\
&\quad - \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}\left[N(N-2)\right]\left[\frac{|x|^2}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}\right] \\
&= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}\left[N(N-2)\right]\left[\frac{1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}-\frac{|x|^2}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}\right] \\
&= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}\left[N(N-2)\right]\left[\frac{1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\right]\left[1-\frac{|x|^2}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]}\right] \\
&= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}\left[N(N-2)\right]\left[\frac{\varepsilon^2}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}\right] \\
&= \left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N+2}{4}}\left[\frac{1}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
-\left[\Delta u_\varepsilon^*(x)\right] = \frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N+2}{4}}}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}. \tag{4.5}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon^*(x)|u_\varepsilon^*(x)|^{2^*-2} &= \left[\frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}\right]\left|\frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}\right|^{\frac{4}{N-2}} \\
&= \left[\frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}\right]\left[\frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{2}}\right] \\
&= \frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N+2}{4}}}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N+2}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Así, por (4.5)

$$
-\left[\Delta u_\varepsilon^*(x)\right] = u_\varepsilon^*(x)|u_\varepsilon^*(x)|^{2^*-2}.
$$

Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0$

$$
-\left[\Delta u_\varepsilon^*(x)\right] = u_\varepsilon^*(x)|u_\varepsilon^*(x)|^{2^*-2},
$$

en $\mathbb{R}^N$, como queríamos.

$\square$

Observación 4.12. *Notemos primero que*

$$u_\varepsilon^*(x) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} u_1^* \left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right).$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, u_ε^* es la $\varepsilon-$dilatación de u_1^*.
Así, por la invariancia bajo dilataciones, Lema 3.11, para toda $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon^*\| = \|u_1^*\| \text{ y } |u_\varepsilon^*|_{2^*} = |u_1^*|_{2^*}.$$

Lema 4.13. *Sea $v \in C^2(0,\infty)$ y definamos $u : \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $u(x) := v(|x|)$. Entonces*

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2} u \text{ en } \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$$

si y sólo si

$$-\tfrac{\partial}{\partial r}(r^{N-1} v'(r)) = r^{N-1} |v|^{2^*-2} v \text{ en } (0,\infty).$$

Demostración. Notemos que para cada i y cada $x \neq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$. Se sigue entonces que

$$\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(|x|)\tfrac{x^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\tfrac{1}{|x|} - \tfrac{x^2}{|x|^2}\right).$$

Así,

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \tfrac{N-1}{|x|} v'(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

En consecuencia, obtenemos la equivalencia de que $\frac{\partial}{\partial r}(r^{N-1}v'(r)) = r^{N-1}\left(\frac{N-1}{r}v' + v''\right)$ en $(0,\infty)$. □

Lema 4.14. *Para toda $\varepsilon > 0$,*

$$\tfrac{\|u_\varepsilon^*\|^2}{|u_\varepsilon^*|_{2^*}^2} = S_0$$

Esto es, la mejor constante de Sobolev se alcanza por la familia u_ε^*.

Demostración. Sea $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que satisface:

$$\tfrac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} = \|u\|^2 = S_0$$

(La existencia de tal función u se puede deducir del Teorema A.2).
Por Teorema C.4 de [4], u es radialmente simétrica. Reemplazando u por $|u|$ si es necesario, podemos asumir que u es no negativa.
Por la regla de multiplicadores de Lagrange, para algún $\lambda > 0$, u es solución de

$$-\Delta u = \lambda u|u|^{2^*-2} \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Como $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, el principio fuerte del máximo implica que u es estricamente positiva.
Después de reescalar, podemos asumir

$$-\Delta u = u|u|^{2^*-2}, \text{ en } \mathbb{R}^N$$

Ahora, sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $u^*_{\varepsilon_0}(0) = u(0)$.
Por Lemas 4.4 y 4.13, tanto u como $u^*_{\varepsilon_0}$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en $r = |x|$,

$$r^{1-N}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)u = u|u|^{2^*-2}, \text{ para } r > 0$$

compartiendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(0) &= u^*_{\varepsilon_0}(0) \\ \partial_r u(0) &= \partial_r u^*_{\varepsilon_0}(0) = 0. \end{aligned}$$

Este problema con valores iniciales admite una única solución. Por lo tanto, $u = u^*_{\varepsilon_0}$.
Así, por 4.12,

$$S_0 = \frac{\|u\|^2}{|u|^2_{2^*}} = \frac{\|u^*_{\varepsilon_0}\|^2}{|u^*_{\varepsilon_0}|^2_{2^*}} = \frac{\|u^*_{\varepsilon}\|^2}{|u^*_{\varepsilon}|^2_{2^*}}, \ \forall\varepsilon > 0.$$

Por lo tanto,

$$\forall\varepsilon > 0, \ \frac{\|u^*_{\varepsilon}\|^2}{|u^*_{\varepsilon}|^2_{2^*}} = S_0.$$

como afirmábamos. □

Observación 4.15. *Para toda $\varepsilon > 0$,*

$$S_0^{\frac{N}{2}} = |u^*_\varepsilon|^{2^*}_{2^*} = \|u^*_\varepsilon\|^2, \tag{4.6}$$

Demostración. Para toda $\varepsilon > 0$, u^*_ε cumple:

$$\begin{aligned} -\left[\Delta u^*_\varepsilon(x)\right] &= u^*_\varepsilon(x)|u^*_\varepsilon(x)|^{2^*-2} \\ \Rightarrow \ -u^*_\varepsilon(x)\Delta u^*_\varepsilon(x) &= \left(u^*_\varepsilon(x)\right)^2 |u^*_\varepsilon(x)|^{2^*-2} \\ &= |u^*_\varepsilon(x)|^{2^*} \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (-u^*_\varepsilon \Delta u^*_\varepsilon)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u^*_\varepsilon|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Pero, por la fórmula de Green:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-u^*_\varepsilon \Delta u^*_\varepsilon)dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*_\varepsilon|^2 dx$$

Por lo tanto,

$$\|u_\varepsilon^*\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon^*|^{2^*} = |u_\varepsilon^*|_{2^*}^{2^*}$$

Así, para toda $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon^*\|^2 = |u_\varepsilon^*|_{2^*}^{2^*}.$$

Como, por Lema 4.14:

$$S_0 = \frac{\|u_\varepsilon^*\|^2}{|u_\varepsilon^*|_{2^*}^2}, \text{ para toda } \varepsilon > 0.$$

Entonces,

$$S_0 \cdot \left(\frac{1}{|u_\varepsilon^*|_{2^*}^{2^*-2}} \right) = \frac{\|u_\varepsilon^*\|^2}{|u_\varepsilon^*|_{2^*}^{2^*}} = 1.$$

Así,

$$S_0 = |u_\varepsilon^*|_{2^*}^{2^*-2} = |u_\varepsilon^*|_{2^*}^{\frac{4}{N-2}} = |u_\varepsilon^*|_{2^*}^{\left(\frac{2}{N}\right)\frac{2N}{N-2}}$$

Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0$

$$S_0^{\frac{N}{2}} = |u_\varepsilon^*|_{2^*}^{2^*} = \|u_\varepsilon^*\|^2,$$

como queríamos. $\square$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \in \Omega$.
Sea $R > 0$ tal que $B_{2R}(0) \subset \Omega$.
Fijemos una función $\eta \in C^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\eta(x) = 1$ si $|x| \leq R$ y $\eta(x) = 0$ si $|x| \geq 2R$. Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$u_\varepsilon := \eta u_\varepsilon^* \tag{4.7}$$

Lema 4.16. *Si $N \geq 4$ y $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$, entonces*

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 = S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}), \tag{4.8}$$

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} = S_0^{N/2} + O(\varepsilon^N), \tag{4.9}$$

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 \geq \begin{cases} C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), & si \quad N > 4. \\ C\varepsilon^2 |ln(\varepsilon)| + O(\varepsilon^2), & si \quad N = 4. \end{cases} \tag{4.10}$$

Demostración. Por Observación 4.15, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 = S_0^{N/2} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon^*|^{2^*}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon^*(x) &= \frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[\varepsilon^2+|x|^2\right]^{\frac{N}{2}}}\left[-(N-2)\right]x \\
&= \left[-\left[N(N-2)\right]^{\frac{N-2}{4}}\right](N-2)\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{\frac{N}{2}} x \\
&= -a_N(N-2)\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

donde $a_N := \left[N(N-2)\right]^{\frac{N-2}{4}}$.
Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\eta\nabla u_\varepsilon^* + (\nabla\eta)u_\varepsilon^*|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \eta^2|\nabla u_\varepsilon^*|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} \eta u_\varepsilon^*(\nabla u_\varepsilon^*\cdot\nabla\eta) + \int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla\eta)|^2(u_\varepsilon^*)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1-\eta^2)|\nabla u_\varepsilon^*|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} \eta u_\varepsilon^*(\nabla u_\varepsilon^*\cdot\nabla\eta) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta|^2(u_\varepsilon^*)^2 \\
&= S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}),
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (1-\eta^2)|\nabla u_\varepsilon^*|^2 &= C\varepsilon^{-2}\int_{|x|>R} (1-\eta^2)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^N |x|^2 \\
&\leq C\varepsilon^{N-2}\int_{|x|>R} |x|^{-2N+2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \eta u_\varepsilon^*(\nabla u_\varepsilon^*\cdot\nabla\eta) &\leq C\varepsilon^{-1}\int_{R<|x|<2R} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{N-1} |x| \\
&\leq C\varepsilon^{N-2}\int_{R<|x|<2R} |x|^{-2N+3},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^2 (u_\varepsilon^*)^2 &\leq C \int_{R<|x|<2R} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{N-2} \\
&\leq C\varepsilon^{N-2} \int_{R<|x|<2R} |x|^{-2N+4},
\end{aligned}
$$

donde C denota a distintas constantes positivas.
Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon^*|^{2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \eta^{2^*}) |u_\varepsilon^*|^{2^*} \\
&= S_0^{N/2} + O(\varepsilon^N),
\end{aligned}
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (1 - \eta^{2^*}) |u_\varepsilon^*|^{2^*} &\leq C \int_{|x|>R} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{N} \\
&\leq C\varepsilon^{N} \int_{|x|>R} |x|^{-2N}.
\end{aligned}
$$

De manera análoga se obtiene que

$$
\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 = \int_{|x|\leq R} (u_\varepsilon^*)^2 + \int_{R\leq|x|\leq 2R} u_\varepsilon^2 = \int_{|x|\leq R} (u_\varepsilon^*)^2 + O(\varepsilon^{N-2})
$$

y, dado que

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\leq R} (u_\varepsilon^*)^2 &= \int_{|x|\leq \varepsilon} (u_\varepsilon^*)^2 + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} (u_\varepsilon^*)^2 \\
&\geq C \left[\int_{|x|\leq \varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)^{N-2} + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} \left(\frac{\varepsilon}{2|x|^2} \right)^{N-2} \right] \\
&= C\varepsilon^2 + C\varepsilon^{N-2} \int_{\varepsilon}^{R} r^{-N+3} dr
\end{aligned}
$$

y que

$$
\int_{\varepsilon}^{R} r^{-N+3} dr = \begin{cases} \frac{-1}{N-4}(R^{-N+4} - \varepsilon^{-N+4}), & si \quad N > 4. \\ ln(R) - ln(\varepsilon), & si \quad N = 4. \end{cases}
$$

concluimos que

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 \geq \begin{cases} C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), & si \quad N > 4. \\ C\varepsilon^2|ln(\varepsilon)| + O(\varepsilon^2), & si \quad N = 4. \end{cases}$$

Como queríamos. □

Por último, demostraremos el siguiente lema:

Lema 4.17. *Si Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 4$, y si $\lambda < 0$, entonces, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña,*

$$\tfrac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} < S_0.$$

En particular, $S_\lambda < S_0$.

Demostración. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 4$ y $\lambda < 0$.
Para toda $\varepsilon > 0$ tenemos

$$S_\lambda \leq \frac{||u_\varepsilon||_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \lambda \int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx}{\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx} \tag{4.11}$$

Dividamos en 2 casos:
Caso 1: Si $N \geq 5$, entonces, por Lema 4.16, tenemos

$$S_\lambda \leq \tfrac{S_0^{N/2} + C\lambda\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2})}{\left(S_0^{N-2} + O(\varepsilon^N)\right)^{2/2^*}} = S_0 + C\lambda\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) < S_0,$$

para ε suficientemente pequeña.
Caso 2: Si $N = 4$, entonces, por Lema 4.16, tenemos

$$S_\lambda \leq S_0 + C\lambda\varepsilon^2|ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2) < S_0,$$

para ε suficientemente pequeña.
En cualquiera de los casos obtuvimos:

$$S_\lambda \leq \tfrac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} < S_0.$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, que es justo lo que queríamos. □

Teorema 4.18. *(Brezis-Nirenberg 1983) Si $N \geq 4$, entonces el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos una solución no trivial para $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), 0)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), 0)$.

Para probar que nuestro problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos una solución no trivial, basta con probar que

$$c_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u)$$

se alcanza.
Como $N \geq 4$ y $\lambda < 0$, por Lema 4.17 $S_\lambda < S_0$, lo cual, por Lema 4.9, implica que S_λ se alcanza. Por lo tanto, por Lema 4.7, c_λ se alcanza. Como queríamos. $\square$

Capítulo 5

Multiplicidad de Soluciones

Ya sabiendo que, bajo ciertas condiciones,

$$(\wp_\lambda)\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución, el objetivo de este capítulo es dar una cota inferior para el número de puntos críticos de

$$J_\lambda(u) := \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{2^*}\int\limits_\Omega |u|^{2^*} = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

sobre la variedad de Nehari,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda(\Omega) &:= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ J_\lambda'(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}. \end{aligned}$$

5.1. La categoría de Lusternik-Schnirelmann

5.1.1. El problema de Cauchy

Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{M}$ una subvariedad de clase C^1 de H.

Definición 5.1. *Un* **campo tangente a** $\mathcal{M}$ *es una función* $\chi : \mathcal{M} \to H$ *tal que* $\chi(u) \in T_u\mathcal{M}$ *para todo* $u \in \mathcal{M}$. *El campo* χ *es* **localmente Lipschitz** *si para cada* $u \in \mathcal{M}$ *existen* $r > 0$ *y* $C > 0$ *(que dependen de* u*) tales que*

$$\|\chi(v) - \chi(w)\| \leq C\|v - w\|,\ \forall v, w \in B_r(u),$$

donde $B_r(u) = \{v \in \mathcal{M} : \|v - u\| < r\}$.

Un resultado importante es el siguiente.

Proposición 5.2. *Si $\mathcal{O}$ es abierto en H y $\chi : \mathcal{O} \to H$ de clase C^1, entonces $\chi : \mathcal{O} \to H$ es localmente Lipschitz.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{O}$. Como χ' es continua, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x) \subset \mathcal{O}$ y

$$\|\chi'(y) - \chi'(x)\| < 1, \text{ si } \|y - x\| < \rho.$$

En consecuencia,

$$\|\chi'(y)\| \leq \|\chi'(y) - \chi'(x)\| + \|\chi'(x)\| < 1 + \|\chi'(x)\| := M, \ \forall y \in B_\rho(x).$$

Si $y, z \in B_\rho(x)$ entonces $x_t := (1-t)y + tz \in B(x, \rho)$ para todo $t \in [0,1]$ y el teorema del valor medio asegura que

$$\|\chi(y) - \chi(z)\| \leq \max_{t \in [0,1]} \|\chi'(x_t)\| \|y - z\| \leq M \|y - z\|.$$

Esto concluye la demostración. □

Más adelante, usaremos los siguientes dos lemas para probar el lema de deformación.

Lema 5.3. *Si $\psi : \mathcal{O} \to W$ y $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ son localmente Lipschitz continuas, entonces su producto $f\psi : \mathcal{O} \to W$ es localmente Lipschitz continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathcal{O}$ y sean $\delta_1, C_1 > 0$ tales que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C_1 \|x_2 - x_1\|, \ \forall x_2, x_1 \in B_{\delta_1}(x_0).$$

Sean $\delta_2, C_2 > 0$ tales que

$$\|\psi(x_2) - \psi(x_1)\| \leq C_2 \|x_2 - x_1\|, \ \forall x_2, x_1 \in B_{\delta_2}(x_0).$$

Como $|f(x) - f(x_0)| \leq C_1 \|x - x_0\|$ para todo $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ se tiene que

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + C_1 \|x - x_0\| < |f(x_0)| + C_1 \delta_1, \ x \in B_{\delta_1}(x_0)$$

y como $\|\psi(x) - \psi(x_0)\| \leq C_2 \|x - x_0\|$ para toda $x \in B_{\delta_2}(x_0)$, se tiene que

$$\|\psi(x)\| \leq \|\psi(x_0)\| + C_2 \|x - x_0\| < \|\psi(x_0)\| + C_2 \delta_2, \ x \in B_{\delta_2}(x_0).$$

Sean $C_3 := |f(x_0)| + C_1 \delta_1$ y $C_4 := \|\psi(x_0)\| + C_2 \delta_2$, así tenemos

$$\begin{aligned}
\|f(x_2)\psi(x_2) - f(x_1)\psi(x_1)\| &= \|f(x_2)\psi(x_2) + f(x_1)\psi(x_2) - f(x_1)\psi(x_2) - f(x_1)\psi(x_1)\| \\
&\leq |f(x_1)| \|\psi(x_2) - \psi(x_1)\| + \|\psi(x_2)\| |f(x_2) - f(x_1)| \\
&\leq (C_3 C_2 + C_4 C_1) \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_\delta(x_0),
\end{aligned}$$

donde $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo tanto $f\psi$ es localmente Lipschitz continua. □

Lema 5.4. *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz continua y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{O}$, entonces $\frac{1}{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathcal{O}$ y sean $\delta_1, C_1 > 0$ tales que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C_1 \|x_2 - x_1\|, \; \forall x_2, x_1 \in B_{\delta_1}(x_0).$$

Sea $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x_0)| - |f(x)| < |f(x_0) - f(x)| \leq \tfrac{|f(x_0)|}{2}, \; \forall x \in B_{\delta_2}(x_0).$$

Así

$$\tfrac{1}{|f(x)|} < \tfrac{2}{f(x_0)}, \; \forall x \in B_{\delta_2}(x_0).$$

Por lo que, si $C := \frac{C_1}{f(x_0)^2}$ y $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos

$$|\tfrac{1}{f(x_1)} - \tfrac{1}{f(x_2)}| = |\tfrac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_1)f(x_2)}| \leq \tfrac{C_1\|x_1-x_2\|}{f(x_0)^2} = C\|x_1 - x_2\|, \; \forall x_2, x_1 \in B_\delta(x_0).$$

Por lo tanto $\frac{1}{f}$ es localmente Lipschitz continua. □

Teorema 5.5. *(Existencia y unicidad global) Sea $\chi : \mathcal{M} \to H$ un campo localmente Lipschitz tangente a $\mathcal{M}$. Entonces, para cada $u \in \mathcal{M}$, existe un intervalo abierto $\mathcal{I}(u) := (T^-(u), T^+(u))$ que contiene al origen y una única función $\sigma(\cdot, u) : \mathcal{I}(u) \to \mathcal{M}$ de clase C^1 que es solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) = \chi(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) = u. \end{cases} \tag{5.1}$$

El intervalo $\mathcal{I}(u)$ es máximo, es decir $\sigma(\cdot, u)$ no se puede extender a una solución definida en un intervalo más grande.
Si $\|\chi(\sigma(t,u))\| \leq C < \infty$ para todo $t \in [0, T^+(u))$, entonces $T^+(u) = \infty$. La afirmación análoga vale para $T^-(u)$.
El dominio de σ,

$$\mathcal{D} := \{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} : t \in \mathcal{I}(u)\}.$$

es abierto en $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ y la función $\sigma : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$, definida por (5.1), es continua. La función $\sigma : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ se llama el **flujo generado por** *χ. Si $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ se dice que el flujo es* **global**.

Demostración. La demostración se puede consultar en [8]. □

5.1.2. El flujo gradiente negativo

Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ es una subvariedad de clase C^2 de H y $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Fijemos una función $\psi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en una vecindad $\mathcal{O}$ de $\mathcal{M}$ en H, tal que $\mathcal{M} = \psi^{-1}(a_0)$ para un valor regular a_0 de ψ.

Definición 5.6. *El* **campo gradiente de** J **sobre** $\mathcal{M}$ *es aquel que se obtiene proyectando ortogonalmente a* $\nabla J(u)$ *sobre* $T_u\mathcal{M}$ *para cada* $u \in \mathcal{M}$*, es decir,*

$$\nabla_{\mathcal{M}} J(u) := \nabla J(u) - \frac{\langle \nabla J(u), \nabla\psi(u)\rangle}{\|\nabla\psi(u)\|^2}\nabla\psi(u).$$

Tomando $\mathcal{O}$ *más pequeña en caso necesario, podemos suponer sin perder la generalidad que* $\nabla\psi(u) \neq 0$ *para todo* $u \in \mathcal{O}$*. La Proposición 5.2 asegura entonces que* $\nabla_{\mathcal{M}} J$ *es localmente Lipschitz.*

Definición 5.7. *El* **flujo gradiente negativo de** J **sobre** $\mathcal{M}$ *es la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) = -\nabla_{\mathcal{M}} J(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) = u. \end{cases}$$

Observación 5.8. *Observemos que* $\nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0$ *si y sólo si* u *es un punto crítico de* J *sobre* $\mathcal{M}$*. Es decir, lo puntos críticos de* J *sobre* $\mathcal{M}$ *son los puntos estacionarios del flujo gradiente negativo de* J *sobre* $\mathcal{M}$*.*

Además,

Observación 5.9. *Para cada* $u \in \mathcal{M}$ *se cumple que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\sigma(t,u)) &= \langle \nabla J(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle \\ &= \langle \nabla J(\sigma(t,u)), -\nabla_{\mathcal{M}} J(\sigma(t,u))\rangle \\ &= -\|\nabla_{\mathcal{M}} J(\sigma(t,u))\|^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $t \longmapsto J(\sigma(t,u))$ *es decreciente.*

5.1.3. La Categoría de Lusternik-Schnirelmann

Sean X un espacio topológico, A y B subconjuntos de X.

Definición 5.10. A *es* **deformable** *a* B *en* X *si existe una función continua* $\eta : [0,1] \times A \to X$ *tal que* $\eta(0,x) = x$ *y* $\eta(1,x) \in B$ *para todo* $x \in A$*. Si* A *es deformable a un punto en* X *decimos que* A *es* **contraíble** *en* X*. La función* η *se llama una* **deformación** *de* A *a* B *en* X*.*

Definición 5.11. *La* **categoría de Lusternik-Schnirelmann** *de A en X es el mínimo número de subconjuntos $U_1, \cdots, U_k$ abiertos de X que son contraíbles en X y que cubren a A, es decir, $A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Dicho número se denota por*

$$cat_X(A).$$

Cuando $A = X$, $cat(X) := cat_X(X)$. Si no existe un número finito de subconjuntos de X con esas propiedades, se define $cat_X(A) := \infty$.

5.2. Lema de Deformación

5.2.1. Lema de Deformación

En lo sucesivo $\mathcal{M}$ denotará a una subvariedad de clase C^2 de un espacio de Hilbert H, $J : H \to \mathbb{R}$ a una función de clase C^2 y $\nabla_{\mathcal{M}} J$ al gradiente de J sobre $\mathcal{M}$.

Definición 5.12. *Una sucesión (u_k) que cumple*

$$u_k \in \mathcal{M},\ J(u_k) \to c \text{ y } \nabla_{\mathcal{M}} J(u_k) \to 0,$$

se llama una sucesión de **Palais-Smale** *para J sobre $\mathcal{M}$ en c. Se dice que J satisface la condición de* **Palais-Smale** *$(PS)_{\mathcal{M},c}$ si toda sucesión de este tipo contiene una subsucesión covergente en H. Diremos simplemente que J satisface la condición de* **Palais-Smale** *sobre $\mathcal{M}$ si cumple $(PS)_{\mathcal{M},c}$ para toda $c \in \mathbb{R}$.*

Observación 5.13. *Como $\mathcal{M}$ es cerrada en H, el límite u de tal subsucesión pertenece a $\mathcal{M}$ y es un punto crítico de J sobre $\mathcal{M}$, ya que $\nabla_{\mathcal{M}} J$ es continuo. Además, si $\mathcal{M}$ es compacta, cualquier J satisface esta condición.*

Definición 5.14. *Para $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, definimos*

$$\begin{aligned} J^{-1}X &: = \{u \in \mathcal{M} : J(u) \in X\}, \\ J^a &: = \{u \in \mathcal{M} : J(u) \leq a\}, \\ K_a &: = \{u \in \mathcal{M} : J(u) = a, \nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0\}, \\ B_\delta(K_a) &: = \{u \in \mathcal{M} : dist(u, K_a) < \delta\}, \end{aligned}$$

donde

$$dist(u, A) := \inf \{\|u - v\| : v \in A\}, \text{ si } A \neq \emptyset$$

y

$$dist(u, \emptyset) := \infty.$$

Necesitaremos el siguiente resultado para probar el lema de la deformación.

Lema 5.15. *(a) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces K_c es compacto.*
(b) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ para todo $c \in [a,b]$, con $-\infty < a \leq b < \infty$, y $\delta > 0$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\| \geq \tfrac{\varepsilon}{\delta},\ \forall u \in J^{-1}[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \smallsetminus \bigcup_{c\in[a,b]} B_\delta(K_c).$$

Demostración. La demostración de (a) es clara pues, como J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$, toda sucesión en K_c contiene una subsucesión convergente.
Demostremos (b). Argumentando por contradicción, supongamos que existe una sucesión (u_k) tal que

$$u_k \in \mathcal{M} \smallsetminus \bigcup_{c\in[a,b]} B_\delta(K_c),\ J(u_k) \in [a - \tfrac{1}{k}, b + \tfrac{1}{k}],\ \|\nabla_{\mathcal{M}} J(u_k)\| < \tfrac{1}{\delta k}.$$

Esta sucesión contiene una subsucesión (u_{k_j}) tal que $J(u_{k_j}) \to c \in [a,b]$ y, como J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$, ésta contiene una subsucesión que converge a un punto $u \in K_c \cap (\mathcal{M} \smallsetminus B_\delta(K_c))$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 5.16. *(Lema de deformación) (a) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces, dada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $J^{c+\varepsilon} \smallsetminus B_{3\delta}(K_c)$ es deformable a $J^{c-\varepsilon}$ en $\mathcal{M}$.*
(b) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ y $K_c = \emptyset$ para todo $c \geq a$, entonces $\mathcal{M}$ es deformable a J^a en $\mathcal{M}$.

Demostración. (a): El Lema 5.15 asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\| \geq \tfrac{2\varepsilon}{\delta},\ \forall u \in J^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \smallsetminus B_\delta(K_c).$$

Sean

$$A := (\mathcal{M} \smallsetminus J^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cup B_\delta(K_c),\ B := J^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \smallsetminus B_{2\delta}(K_c).$$

Por Lemas 5.3 y 5.4, la función $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(u) := \tfrac{dist(u,A)}{dist(u,A)+dist(u,B)}.$$

es localmente Lipschitz continua y cumple que $\rho(u) = 1$ en B, y $\rho(u) = 0$ en A. También, por los Lemas 5.3 y 5.4 y la Proposición 5.2, el campo vectorial

$$\chi(u) := \begin{cases} -\rho(u)\frac{\nabla_{\mathcal{M}} J(u)}{\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\|^2}, & si \quad \nabla_{\mathcal{M}} J(u) \neq 0, \\ \quad 0, & si \qquad u \in A. \end{cases}$$

es localmente Lipschitz, además es tangente a $\mathcal{M}$, y cumple que $\|\chi(u)\| \leq \frac{\delta}{2\varepsilon}$ para todo $\forall u \in \mathcal{M}$.
El teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy 5.5, asegura que existe $\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ continua tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) = \chi(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) = u. \end{cases}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\sigma(t,u)) &= \langle \nabla J(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle && (5.2)\\ &= -\langle \nabla J(\sigma(t,u)), \chi(\sigma(t,u))\rangle && (5.3)\\ &= -\rho(\sigma(t,u)) && (5.4)\\ &\leq 0. && (5.5) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $J(\sigma(t,u))$ es decreciente en t. Definamos $\eta(s,u) := \sigma(2\varepsilon s, u)$. Entonces $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in \mathcal{M}$. Sea $u \in J^{c+\varepsilon} \setminus B_{2\delta}(K_c)$. Consideremos dos casos:

1. Si $\eta(s,u) \in J^{c-\varepsilon}$ para algún $s \in [0,1]$ entonces, como $\eta(\cdot,t)$ es decreciente, se tiene que $\eta(1,u) \in J^{c-\varepsilon}$.

2. Si $\eta(s,u) \in J^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ para todo $s \in [0,1]$, observemos que, utilizando el teorema del valor medio,

$$\|\sigma(t,u) - u\| \leq \|\tfrac{d}{ds}\sigma(s,u)\|t \leq \tfrac{\delta t}{2\varepsilon} \leq \delta,\ \forall t \in [0,2\varepsilon].$$

Como $u \notin B_{3\delta}(K_c)$, la desigualdad anterior implica que $\sigma(t,u) \in B$ para todo $t \in [0,2\varepsilon]$ y usando (5.2) concluimos que

$$J(\sigma(2\varepsilon,u)) - J(u) = \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{ds}J(\sigma(s,u))ds = -\int_0^{2\varepsilon} \rho(\sigma(s,u))ds = -2\varepsilon.$$

Por lo tanto, $J(\eta(1,u)) = J(u) - 2\varepsilon \leq c - \varepsilon$ y η es la deformación deseada.
(b): Por Lema 5.15 existe $d < a$ tal que $\nabla_{\mathcal{M}}J(u) \neq 0$ si $J(u) \geq d$. Sea $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\xi(x) = 0$ si $x \leq d$ y $\zeta(x) = 1$ si $x \geq a$. Definimos

$$\chi(u) := \begin{cases} -\zeta(J(u))\frac{\nabla_{\mathcal{M}}J(u)}{\|\nabla_{\mathcal{M}}J(u)\|^2}, & si \quad J(u) \geq d, \\ 0, & si \quad J(u) \leq d. \end{cases}$$

y denotemos por σ al flujo asociado a χ. Observemos que

$$J(u) - J(\sigma(t,u)) = -\int_0^t \frac{d}{dt} J(\sigma(s,u))ds = \int_0^t \zeta(J(\sigma(s,u)))ds \tag{5.6}$$

para todo $t \in [0, T^+(u))$. Por lo tanto,

$$J(u) \geq J(\sigma(t,u)), \ \forall t \in [0, T^+(u)).$$

Sea $u \in \mathcal{M}$ con $J(u) \geq d$. El Lema 5.15 asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\nabla_{\mathcal{M}} J(v)\| \geq \varepsilon$ para $v \in J^{-1}[d-\varepsilon, d+\varepsilon]$. Por lo tanto, $\|\chi(v)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $v \in J^{-1}(-\infty, J(u)+\varepsilon]$.
En particular,

$$\|\chi(\sigma(t,u))\| \leq \tfrac{1}{\varepsilon}, \ \forall t \in [0, T^+(u)).$$

Por lo tanto, $T^+(u) = \infty$ para todo $u \in \mathcal{M}$. Definimos

$$\tau_a(u) := \max\{J(u) - a, 0\} \text{ y } \eta(s,u) := \sigma(s\tau_a(u), u).$$

Entonces $\eta : [0,1] \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ está bien definida, es continua y $\eta(0,u) = u$. Si $J(\eta(1,u)) = J(\sigma(\tau_a(u),u)) \geq a$, la identidad (5.6) implica que

$$J(u) - J(\sigma(\tau_a(u),u)) = \tau_a(u) = J(u) - a.$$

Por lo tanto, $J(\eta(1,u)) = a$ y η es la deformación deseada. □

5.2.2. Teorema de Palais

Definición 5.17. *Un espacio métrico Y es un* **retracto absoluto de vecindad** *(ANR) si para cualquier función continua $f : A \to Y$ definida en un subconjunto cerrado A de un espacio métrico X existen una vecindad U de A en X y una función continua $F : U \to Y$ tal que $F|_A = f$.*

Definición 5.18. *Un subconjunto Z de X es* **localmente cerrado en** *X si es la intersección de un subconjunto abierto y un subconjunto cerrado de X.*

Lema 5.19. *Si X es un ANR y Z es localmente cerrado y contraíble en X, entonces Z tiene una vecindad contraíble en X.*

Demostración. Sean U un subconjunto abierto de X tal que Z es cerrado en U y $\eta : [0,1] \times Z \to X$ una deformación de Z a un punto x_0 en X. Definimos $Y := ([0,1] \times Z) \cup (\{0,1\} \times U)$ y $f : Y \to X$ como

$$\begin{aligned} &f(t,z) := \eta(t,z), && \quad si \quad (t,z) \in [0,1] \times Z, \\ &f(0,x) := x, \quad f(1,x) := x_0, && \quad si \quad x \in U. \end{aligned}$$

Como Y es cerrado en $[0,1] \times U$, existen un abierto W en $[0,1] \times U$ que contiene a Y y una función continua $F : W \to X$ tal que $F \restriction_Y = f$. Para probar la afirmación del lema bastará probar que existe una vecindad V de Z en X tal que $[0,1] \times V \subset W$ pues, en tal caso, $F \restriction_{[0,1]\times V}$ es una deformación de V a x_0 en X.
Ahora bien, como W es abierto en $[0,1] \times X$, para cada $(t,z) \in [0,1] \times Z$ existen abiertos $I_{(t,z)}$ en $[0,1]$ y $V_{(t,z)}$ en X tales que $(t,z) \in I_{(t,z)} \times V_{(t,z)} \subset W$. Puesto que $[0,1] \times \{z\}$ es compacto, existen $t_1, \cdots, t_m \in [0,1]$, tales que

$$[0,1] \times \{z\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} (I_{(t_i,z)} \times V_{(t_i,z)})$$

y, en consecuencia, $[0,1] \times \{z\} \subset [0,1] \times V_z$ donde $V_z := \bigcap_{i=1}^{m} V_{(t_i,z)}$ es abierto en X. Así, $V := \bigcap_{z\in Z} V_z$ es abierto en X, contiene a Z y $[0,1] \times V \subset W$. $\square$

Proposición 5.20. *Sean X un ANR y $A, B \subset X$. Entonces cat_X tiene las siguientes propiedades:*

1. *No trivialidad: $cat_X(A) = 0$ si y sólo si $A = \emptyset$.*
2. *Subaditividad: $cat_X(A \cup B) \leq cat_X(A) + cat_X(B)$.*
3. *Monotonía bajo deformaciones: Si A es cerrado y es deformable a B en X entonces $cat_X(A) \leq cat_X(B)$.*
4. *Continuidad: Si A es cerrado en X, existe una vecindad U de A en X tal que $cat_X(U) = cat_X(A)$.*
5. *Finitud: Si $A = \{x\}$ entonces $cat_X(A) = 1$. Si A es compacto entonces $cat_X(A) < \infty$.*

Demostración. Las primeras dos propiedades son inmediatas.
(3): Sea $\eta : [0,1] \times A \to X$ una deformación de A a B en X. Si $cat_X(B) = \infty$ no hay nada que probar. Si $cat_X(B) = k < \infty$, existen k subconjuntos $U_1, \cdots, U_k$ abiertos y contraíbles en X que cubren a B. Sea

$$A_i := \{x \in A : \eta(1,x) \in U_i\}.$$

Observemos que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ y, como A_i es abierto en A, es localmente cerrado en X. Por otra parte, dado que U_i es contraíble en X, existe una deformación $\theta_i : [0,1] \times U_i \to X$ a un punto x_i de X. Definimos $\widetilde{\theta}_i : [0,1] \times A_i \to X$ como

$$\widetilde{\theta}_i(t,x) := \begin{cases} \eta(2t,x) & si \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \theta_i(2t-1, \eta(2t,x)), & si \quad t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{\theta}_i$ es una deformación de A_i a x_i en X. El Lema 5.19 asegura que existe un abierto contraíble V_i en X que contiene a A_i. En consecuencia, $A \subset V_1 \cup \cdots \cup V_k$, lo que prueba que $cat_X(A) \leq k = cat_X(B)$.
(4): Por la propiedad anterior, $cat_X(A) \leq cat_X(B)$ si $A \subset B$. De modo que , si $cat_X(A) = \infty$, cualquier vecindad de A cumple lo que queremos. Si $cat_X(A) = k < \infty$ y $U_1, \cdots, U_k$ son subconjuntos abiertos y contraíbles en $\mathcal{M}$ que cubren a A, entonces $U := U_1 \cup \cdots \cup U_k$ es una vecindad de A y $cat_X(U) = cat_X(A)$.
(5): Si $x \in X$, el Lema 5.19 asegura que existe un subconjunto U_x abierto contraíble en X que contiene a x. Por tanto, $cat_X(\{x\}) = 1$. Más aún, si A es compacto, la cubierta $\{U_x : x \in A\}$ de A contiene una subcubierta finita. Por tanto, $cat_X(A) < \infty$. □

Teorema 5.21. *(Palais, 1966) Si J está acotado inferiormente en $\mathcal{M}$ y satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ para todo $c \leq b$ entonces*

$$cat(J^b) \leq \sum_{c \leq b} cat_{J^b}(K_c), \tag{5.7}$$

donde $K_c := \{u \in \mathcal{M} : J(u) = c, \nabla J(u) = 0\}$.
En particular, J tiene al menos $cat(J^b)$ puntos críticos con valor crítico $\leq b$.

Demostración. Escogemos $\alpha < \inf_{\mathcal{M}} J$. Entonces $cat_{J^b}(J^\alpha) = 0$.
Para cada $c \in \mathbb{R}$ escogemos una vecindad U de K_c en J^b tal que

$$cat_{J^b}(K_c) = cat_{J^b}(U).$$

Como K_c es compacto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{3\delta}(K_c) \subset U$. El lema de deformación 5.16, asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $J^{c+\varepsilon} \smallsetminus B_{3\delta}(K_c)$ es deformable a $J^{c-\varepsilon}$ en J^b y, por la Proposición 5.20, concluimos que

$$\begin{aligned} cat_{J^b}(J^{c+\varepsilon}) &\leq cat_{J^b}(J^{c+\varepsilon} \smallsetminus B_{3\delta}(K_c)) + cat_{J^b}(B_{3\delta}(K_c)) \\ &\leq cat_{J^b}(J^{c+\varepsilon}) + cat_{J^b}(K_c). \end{aligned}$$

Los intervalos $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ construidos de esta manera forman una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, así que hay un número finito de ellos que cubre a $[\alpha, b]$. Escogemos $c_1, \cdots, c_k \in [\alpha, b]$ y $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k > 0$ de modo que $c_1 = \alpha$, $c_k = b$,

$$\begin{aligned} c_{j+1} - \varepsilon_{j+1} &\leq c_j + \varepsilon_j, \quad \forall j = 1, \cdots, k-1, \\ cat_{J^b}(J^{c_j+\varepsilon_j}) &\leq cat_{J^b}(J^{c_j-\varepsilon_j}) + cat_{J^b}(K_{c_j}), \quad \forall j = 1, \cdots, k. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Iterando las desigualdades (5.8) obtenemos

$$cat(J^b) \leq cat_{J^b}(J^\alpha) + \sum_{j=1}^{k} cat_{J^b}(K_{c_j}) = \sum_{j=1}^{k} cat_{J^b}(K_{c_j})$$

Esto demuestra la desigualdad (5.7). Finalmente, como la cardinalidad de K_{c_j} es al menos $cat_{J^b}(K_{c_j})$ concluimos que J tiene al menos $cat(J^b)$ puntos críticos en J^b. □

5.3. La condición de Palais-Smale

Recordemos que el producto escalar que le dimos a $H_0^1(\Omega)$ es el definido como

$$\langle u, v\rangle_\lambda := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv) \tag{5.9}$$

y denotamos por $\|\cdot\|_\lambda^2$ a la norma inducida por él. Recordemos, también, que las soluciones no triviales de

$$(\wp_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

son los puntos críticos del funcional $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\lambda(u) := \tfrac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \tfrac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

sobre la variedad de Nehari

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda : &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \; J_\lambda'(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \; \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\} \\ &= \Psi^{-1}(0), \end{aligned}$$

donde $\Psi : H_0^1(\Omega) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\Psi(u) = \|u\|_\lambda^2 - |u|_{2^*}^{2^*}.$$

Denotemos por ∇J_λ y $\nabla\Psi$ a los gradientes de J_λ y Ψ respecto al producto escalar (5.9), es decir,

$$\nabla J_\lambda(u) = u - \nabla\Phi, \quad \nabla\Psi(u) = 2u - 2^*\nabla\Phi(u). \tag{5.10}$$

donde

$$\Phi(u) := \tfrac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Entonces,

$$\langle \Phi(u), v\rangle_\lambda = \int_\Omega |u|^{2^*-2}uv, \, \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

y usando las desigualdades de Hölder y Sobolev, obtenemos

$$|\langle \nabla\Phi(u), v\rangle_\lambda| \leq \int_\Omega |u|^{2^*-1}|v| \leq |u|_{2^*}^{2^*-1}|v|_{2^*} \leq C|u|_{2^*}^{2^*-1}\|v\|_\lambda, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.11}$$

Reemplazando v por $\nabla\Phi(u)$ en la desigualdad anterior concluimos que

$$\|\nabla\Phi(u)\|_\lambda \leq C|u|_{2^*}^{2^*-1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{5.12}$$

Proposición 5.22. *Sea (u_k) una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$J_\lambda(u_k) \to c < \tfrac{1}{N}S_0^{N/2},\ \nabla J_\lambda(u_k) \to 0.$$

Entonces (u_k) contiene una subsucesión convergente.

Demostración. Como $(J_\lambda(u_k))$ converge en $\mathbb{R}$, está acotada. Sea $d > 0$ cota superior para $(|J_\lambda(u_k)|)$.
Ahora, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \nabla J_\lambda(u_k), u_k\rangle_\lambda|}{\|u_k\|_\lambda} &\leq \frac{\|\nabla J_\lambda(u_k)\|_\lambda \|u_k\|_\lambda}{\|u_k\|_\lambda} \\ &= \|\nabla J_\lambda(u_k)\|_\lambda \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Así, $\forall k \geq k_0$,

$$|\langle \nabla J_k(u_k), u_k\rangle_\lambda| \leq \|u_k\|_\lambda.$$

Ahora, por (5.10)

$$\begin{aligned} J(u_k) - \frac{1}{2^*}\langle \nabla J_\lambda(u_k), u_k\rangle_\lambda &= J(u_k) - \frac{1}{2^*}\left[\langle u_k, u_k\rangle_\lambda - \langle \nabla\Phi(u_k), u_k\rangle_\lambda\right] \\ &= \frac{1}{2}\|u_k\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u_k|_{2^*}^{2^*} - \frac{1}{2^*}\left[\|u_k\|_\lambda^2 - |u_k|_{2^*}^{2^*}\right] \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right]\|u_k\|_\lambda^2 \\ &= \frac{1}{N}\|u_k\|_\lambda^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\|u_k\|_\lambda^2 &\leq |J_\lambda(u_k)| + \frac{1}{2^*}|\langle \nabla J_\lambda(u_k), u_k\rangle_\lambda| \\ &\leq d + \frac{1}{2^*}\|u_k\|_\lambda. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\|u_k\|_\lambda \leq \text{máx}\,\{1, Nd + \tfrac{N}{2^*}\},\ \forall k \geq k_0,$$

y (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por tanto, pasando a una subsucesión,

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u, \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega). \\ u_k &\to u, \text{ fuertemente en } L^2(\Omega). \\ u_k &\to u, \text{ c.d. en } \Omega. \end{aligned}$$

Afirmación: u es solución (débil) de $(\wp_\lambda)$.

En efecto: Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla u_k \cdot \nabla\varphi + \lambda u_k \varphi) \to \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + \lambda u \varphi). \tag{5.13}$$

Por otra parte, como $u_k \to u$ c.d. en Ω, por el teorema de Egorov A.6, para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto X_ε de Ω con $|X_\varepsilon| < \varepsilon$ tal que

$$|u_k|^{2^*-2}u_k\varphi \to |u|^{2^*-2}u\varphi \text{ uniformemente en } \Omega \smallsetminus X_\varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega \big(|u_k|^{2^*-2}u_k\varphi - |u|^{2^*-2}u\varphi\big)\Big| &\leq \Big|\int_{\Omega\smallsetminus X_\varepsilon} \big(|u_k|^{2^*-2}u_k\varphi - |u|^{2^*-2}u\varphi\big)\Big| \\ &\quad + \Big|\int_{X_\varepsilon} \big(|u_k|^{2^*-2}u_k\varphi - |u|^{2^*-2}u\varphi\big)\Big| \\ &\leq o(1) + |\varphi|_\infty |u_k|_{2^*}^{2^*-1}|X_\varepsilon|^{\frac{1}{2^*}} + |\varphi|_\infty |u|_{2^*}^{2^*-1}|X_\varepsilon|^{\frac{1}{2^*}} \\ &\leq o(1) + C\varepsilon^{1/2^*}. \end{aligned}$$

Como ε es arbitraria concluimos que

$$\int_\Omega |u_k|^{2^*-2}u_k\varphi \to \int_\Omega |u|^{2^*-2}u_k\varphi. \tag{5.14}$$

De (5.13) y (5.14) se sigue que

$$J'_\lambda(u_k)\varphi \to J'_\lambda(u)\varphi.$$

En consecuencia, $J'_\lambda(u)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Esto prueba la afirmación.

Afirmación: $u_k \to u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$.

En efecto: Sea $v_n := u_n - u$. Entonces

$$\|u_n\|_\lambda^2 = \|v_n\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2 + o(1). \tag{5.15}$$

$$|u_n|_{2^*}^{2^*} = |v_n|_{2^*}^{2^*} + |u|_{2^*}^{2^*} + o(1). \tag{5.16}$$

Por lo tanto,

$$J_\lambda(u_k) = J_\lambda(v_k) + J_\lambda(u) + o(1)$$

Como u es solución débil de $(\wp_\lambda)$,

$$J_\lambda(u) = \tfrac{1}{N}\|u\|_\lambda^2 \geq 0.$$

En consecuencia,

$$J_\lambda(v_k) \to c - J_\lambda(u) =: b < \tfrac{1}{N}S_0^{N/2}.$$

De (5.15) y (5.16) se sigue además que

$$\|v_k\|_\lambda^2 = |v_k|_{2^*}^{2^*} + o(1) = Nb + o(1)$$

y, como $v_n \to 0$ fuertemente en $L^2(\Omega)$, se tiene que

$$\|v_k\|^2 = |v_k|_{2^*}^{2^*} + o(1) = Nb + o(1)$$

De la desigualdad de Sobolev

$$S_0|v_k|_{2^*}^2 \leq \|v_k\|^2$$

se sigue que

$$S_0(Nb)^{2/2^*} \leq Nb.$$

Si $b \neq 0$ entonces

$$S_0 \leq (Nb)^{2/N} < S_0$$

lo cual es imposible. Por tanto $b = 0$, es decir $\|v_k\|_\lambda^2 \to 0$.
Esto prueba la afirmación y concluye la demostración de la proposición.

□

Corolario 5.23. *J_λ satisface $(PS)_{\mathcal{N}_\lambda,c}$ para todo $c < \frac{1}{N}S_0^{N/2}$.*

Demostración. Sea (u_k) una sucesión en $\mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_k) \to c \text{ y } \nabla_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u_k) \to 0.$$

Basta probar que

$$\nabla J_\lambda(u_k) \to 0$$

y aplicar la proposición anterior.
Expresemos a $\nabla J(u_k)$ como

$$\nabla J_\lambda(u_k) = \nabla_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u_k) + t_k \nabla\Psi(u_k), \quad t_k \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Multiplicando esta igualdad escalarmente por u_k y usando la Proposición 3.8 concluimos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|\langle \nabla_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u_k), u_k\rangle_\lambda| &= |\langle \nabla J_\lambda(u_k), u_k\rangle_\lambda - t_k\langle \nabla\Psi(u_k), u_k\rangle_\lambda| \\ &= |t_k|(2^* - 2)\|u_k\|_\lambda^2 \\ &\geq c_1|t_k|.\end{aligned}$$

De modo que (5.17) implica a $t_k \to 0$. Por otra parte, usando la desigualdad (5.12), concluimos que existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|\nabla\Psi(u_k)\|_\lambda &\leq 2\|u_k\|_\lambda + 2^*\|\nabla\Phi(u_k)\|_\lambda \\ &\leq 2\|u_k\|_\lambda + 2^*C|u_k|_{2^*}^{2^*-1} \leq c_2\end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Así pues, como $(\nabla\Psi(u_k))$ está acotada, $\nabla_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u_k) \to 0$ y $t_k \to 0$, de la identidad (5.17) se sigue $\nabla J_\lambda(u_k) \to 0$.
Así, por (5.22), (u_k) tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto J_λ satisface $(PS)_{\mathcal{N}_\lambda,c}$ como queríamos. □

5.4. Multiplicidad de Soluciones

Recordemos nuestro problema:

$$(\wp_\lambda)\begin{cases}-\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, & en \quad \Omega\\ \qquad u = 0, & sobre \quad \partial\Omega\end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$, $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω y $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Por el Teorema 4.18, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos una solución no trivial si $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$.

En esta sección probaremos, al fin, la existencia de $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_* < 0$ tal que , para $\lambda_* < \lambda < 0$, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $cat_\Omega(\Omega)$ soluciones no triviales.

Para demostrarlo usaremos la siguiente función $\beta : L^{2^*}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$

$$\beta(u) := \frac{\displaystyle\int_\Omega x|u|^{2^*}dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*}}$$

que se llama la función baricentro.
Tiene las siguientes propiedades,

Lema 5.24. *(a) β es continua.*
(b) Si $\Omega = B_r(0)$ y $u(x) = u(-x)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $\beta(u) = 0$.

Demostración. (a) Sea $(u_k) \subset L^{2^*}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $u_k \to u$ en $L^{2^*}(\Omega)$, $u \neq 0$.
Por el Teorema 2.25, existe u_{k_j} subsucesión tal que

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \text{ para casi toda } x \in \Omega.$$

Sea $g \in L^{2^*}(\Omega)$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|u_k(x)| \leq g(x) \text{ para casi toda } x \in \Omega.$$

Por tanto,

$$x_i|u_{k_j}(x)|^{2^*} \to x_i|u(x)|^{2^*}, \text{ p.c.t } x \in \Omega, \forall i = 1, \cdots, n.$$

y, como Ω es acotado,

$$|x_i||u_{k_j}(x)|^{2^*} \leq C|g(x)|^{2^*}, \text{ p.c.t } x \in \Omega, \forall i = 1, \cdots, n.$$

Usando el teorema de convergencia dominada A.5 tenemos entonces que

$$x_i|u_{k_j}|^{2^*} \to x_i|u_k|^{2^*} \text{ en } L^1(\Omega).$$

Se sigue que $\beta(u_k) \to \beta(u)$
Por lo tanto β es continua.
(b)

$$\begin{aligned} -\int_\Omega x|u(x)|^{2^*} dx &= \int_\Omega - x|u(-x)|^{2^*} dx \\ &= \int_\Omega y|u(y)|^{2^*} dy. \end{aligned}$$

En consecuencia, $-\beta(u) = \beta(u)$. Por lo tanto, $\beta(u) = 0$, como queríamos. □

Proposición 5.25. *Si $u_k \in \mathcal{N}_0(\Omega)$ y $\|u_k\|^2 \to S_0^{N/2}$ entonces*

$$dist(\beta(u_k), \bar{\Omega}) \to 0.$$

Demostración. La demostración es delicada y no la daremos aquí. Se puede consultar en [4]. □

Consideremos la proyección radial

$$\zeta_\lambda : \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \to \mathcal{N}_0(\Omega)$$

dada por

$$\zeta_\lambda(u) := t_u u \text{ donde } t_u := \left(\tfrac{\|u\|^2}{\|u\|_\lambda^2}\right)^{\frac{N-2}{4}}$$

Lema 5.26. *Dada $\delta > 0$ existe $\lambda^* \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tal que, para cualquier $\lambda \in (\lambda^*, 0)$ se cumple que*

$$J_0(\zeta_\lambda(u)) < \tfrac{1}{N} S_0^{N/2} + \delta,$$

para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ con $J_\lambda(u) < \frac{1}{N} S_0^{N/2}$.

Demostración. Sea $C := S_0^{-1}|\Omega|^{2/N}$. De las desigualdades de Hölder y Sobolev se sigue que

$$|u|_2^2 \leq |\Omega|^{2/N} |u|_{2^*}^{2^*} \leq C\|u\|^2, \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, si $\lambda \in (-\frac{1}{C}, 0)$,

$$\|u\|_\lambda^2 = \|u\|^2 + \lambda |u|_2^2 \geq (1 + C\lambda)\|u\|^2, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, si $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ y $J_\lambda(u) < \frac{1}{N} S_0^{N/2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
J_0(\zeta_\lambda(u)) &= \frac{1}{N} \frac{(\|u\|)^{N/2}}{(\|u\|_\lambda^2)^{\frac{N-2}{2}}} \\
&\leq \frac{1}{N} \frac{\|u\|_\lambda^2}{(1 + C\lambda)^{N/2}} \\
&= \frac{J_\lambda(u)}{(1 + C\lambda)^{N/2}} \\
&< \frac{1}{(1 + C\lambda)^{N/2}} \frac{1}{N} S_0^{N/2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $\lambda^* \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tal que, si $\lambda \in (\lambda^*, 0)$, entonces

$$J_0(\zeta_\lambda(u)) < \tfrac{1}{N} S_0^{N/2} + \delta,$$

para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ con $J_\lambda(u) < \frac{1}{N} S_0^{N/2}$. □

Teorema 5.27. *Si Ω es un subconjunto abierto, acotado y suave de $\mathbb{R}^N$ y $N \geq 4$ entonces existe $\lambda^* \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tal que, para todo $\lambda \in (\lambda^*, 0)$ el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $cat(\Omega)$ soluciones.*

Demostración. Sea $r > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\Omega^- &:= \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \geq r\}\\ \Omega^+ &:= \{s \in \mathbb{R}^N : dist(x, \bar{\Omega}) \leq r\}\end{aligned}$$

satisfacen que las inclusiones $\Omega^- \hookrightarrow \Omega$ y $\Omega \hookrightarrow \Omega^+$ son equivalencias homotópicas.
Por la Proposición 5.25 existe $\delta > 0$ tal que

$$\beta(u) \in \Omega^+, \forall u \in \mathcal{N}_0 \text{ con } J_0(u) < \tfrac{1}{N} S_0^{N/2} + \delta$$

y por el Lema 5.26 existe $\lambda^* \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tal que, para cualquier $\lambda \in (\lambda^*, 0)$,

$$J_0(\zeta_\lambda(u)) < \tfrac{1}{N} S_0^{N/2} + \delta, \forall u \in \mathcal{N}_\lambda \text{ con } J_\lambda(u) < \tfrac{1}{N} S_0^{N/2},$$

Fijemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétrica tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{r}{2}$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq r$.
Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$u_\varepsilon := \varphi u_\varepsilon^*,$$

donde

$$u_\varepsilon^*(x) := \frac{\left[N(N-2)\varepsilon^2\right]^{\frac{N-2}{4}}}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{\frac{N-2}{2}}}, \; \varepsilon > 0.$$

Las funciones u_ε y u_ε^* son las definidas en (4.7) y (4.3), respectivamente. Entonces, $sop(u_\varepsilon) \subset B_r(0)$.
Por el Lema 4.17, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} < S_0.$$

Ahora, para cada $\xi \in \Omega^-$ definimos

$$u_{\varepsilon,\xi}(x) := u_\varepsilon(x - \xi).$$

Entonces $sop(u_{\varepsilon,\xi}) \subset B_r(\xi)$ y, por lo tanto, $u_{\varepsilon,\xi} \in H_0^1(\Omega)$. Definimos

$$\begin{aligned}\iota : \Omega^- &\to \mathcal{N}_\lambda(\Omega)\\ \iota(\xi) &= \Pi_\lambda(u_{\varepsilon,\xi}),\end{aligned}$$

donde $\Pi_\lambda : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ es la proyección radial. Entonces

$$\begin{aligned}J_\lambda(\iota(\xi)) &= J_\lambda(\Pi_\lambda(u_{\varepsilon,\xi}))\\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{\|u_{\varepsilon,\xi}\|_\lambda^2}{|u_{\varepsilon,\xi}|_{2^*}^2}\right)^{N/2}\\ &< \frac{1}{N} S_0^{N/2}.\end{aligned}$$

Sea

$$b := \frac{1}{N}\left(\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2}\right)^{N/2}.$$

Tenemos entonces que, si $\lambda \in (\lambda^*, 0)$,

$$\Omega^- \xrightarrow{\ \iota\ } \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \cap J_\lambda^b \xrightarrow{\ \zeta_\lambda\ } \mathcal{N}_0^{\frac{1}{N}S_0^{N/2}+\delta} \xrightarrow{\ \beta\ } \Omega^+.$$

Por el Lema 5.26 (b) se tiene que

$$(\beta \circ \zeta_\lambda \circ \iota)(\xi) = \xi,$$

es decir,

$$\beta \circ \zeta_\lambda \circ \iota \simeq (\Omega^- \hookrightarrow \Omega^+) \simeq id_\Omega$$

En consecuencia,

$$cat(\Omega) \leq cat(\mathcal{N}_\lambda(\Omega) \cap J^b).$$

Por el Corolario 5.23 J_λ satisface $(PS)_{\mathcal{N}_\lambda(\Omega),c}$ para todo $c \leq b$. Así que, por el Teorema 5.21 J_λ tiene al menos $cat(\Omega)$ puntos críticos con valor crítico $\leq b$. $\square$

Apéndice A

Resultados adicionales

Definición A.1. *Denotamos por $D^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ a la completación de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ en la norma $\|u\|_{D^{1,2}} = \|\nabla u\|_{L^2} = |\nabla u|_2$*

Teorema A.2. *Sea $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión minimizante tal que satisface*

$$|u_n|_{2^*} = 1,\ \|u_n\|^2 \to S_0,\ n \to \infty.$$

Entonces, existe una sucesión $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times [0, \infty]$ tal que $(u_n^{y_n,\lambda_n})$ contiene una subsucesión convergente, donde

$$u_n^{y_n,\lambda_n}(x) := \lambda_n^{N-2/2} u_n(\lambda_n x + y_n).$$

En particular existe un minimizador para S_0

Demostración. La demostración se puede consultar en [4]. □

Teorema A.3. *(Gidas-Ni-Nirenberg) Todo estado fundamental del problema*

$$-\Delta u = u|u|^{2^*-2} \text{ en } \mathbb{R}^N$$

es radialmente simétrico respecto a algún punto $a \in \mathbb{R}^N$.

Demostración. La demostración se puede consultar en [6]. □

Teorema A.4. *(Lema de Fatou) Sea $f_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una sucesión de funciones integrable con las siguientes propiedades:*
(i) existe una función integrable $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que $f_k \geq g$ para todo $k \in \mathbb{N}$,
(ii) existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\mathbb{R}^N} f_k \leq M,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $\liminf_{k\to\infty} f_k$ *es integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_k.$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

Teorema A.5. *(de covergencia dominada en L^p) Sea $p \in [1, \infty)$ y sea (f_k) una sucesión en $M(\Omega)$ tal que $f_k(x) \to f(x)$ p.c.t $x \in \Omega$. Si $g \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$|f_k(x)| \leq g(x) \ p.c.t. \ x \in \Omega, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces $f \in L^p(\Omega)$ y

$$\lim_{k\to\infty} |f - f_k|_p = 0$$

Demostración. La demostración se puede consultar en [5]. □

Teorema A.6. *(Teorema de Egorov) Sean X un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ tal que $|X| < \infty$ y $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles tales que $f_k(x) \to f(x)$ p.c.t. $x \in X$.*
Para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto medible $Y \subset X$ tal que
(i) $|X \setminus Y| < \varepsilon$,
(ii) (f_k) converge a f uniformemente en Y.

Demostración. La demostración se puede consultar en [9]. □

Bibliografía

[1] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Commun. Pure Appl. Math **36** (1983), 437-477.

[2] S. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408-1411.

[3] M. Struwe, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1996).

[4] M. Willem, *Minimax theorems*, PNLDE **24**, Birkhäuser (1996).

[5] M. Clapp, *Análisis Matemático*, Colección Papirhos, Instituto de Matemáticas de la UNAM, en prensa.

[6] M. Clapp, *Métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales*, notas de curso en proceso, http://www.matem.unam.mx/mclapp/cursos/.

[7] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid (1984).

[8] N. Ackerman, *El lujo del flujo y teoremas minimax en el cálculo de variaciones*, notas del minicurso impartido en la Escuela de Verano en Ecuaciones Diferenciales, 6-10 de Junio del 2011, Instituto de Matemáticas, UNAM. http://www.matem.unam.mx/nils/documents/notas-festin2011-nils-ackermann.pdf.

[9] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1997).