



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

HAMILTONICIDAD EN GENERALIZACIONES DE  
LOS TORNEOS MULTIPARTITOS

T E S I S  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ

DIRECTORA DE LA TESIS

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA, FACULTAD DE CIENCIAS  
DR. BERNADO LLANO PÉREZ, PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA  
APLICADA

MÉXICO, D. F. JUNIO, 2015.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



«En esa esfera feliz de la plena serenidad científica», Ch. Guignebert



# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>7</b>
<b>Exordio</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
<b>2 Generalizaciones de las digráficas BS</b>	<b>19</b>
2.1 Herramienta algebraica . . . . .	19
2.2 Preámbulo . . . . .	27
2.3 Resultado principal . . . . .	28
<b>3 Sobre las digráficas MLS</b>	<b>43</b>
3.1 Más allá de las generalizaciones de torneos . . . . .	43
3.2 Digráficas multipartitas semicompletas . . . . .	46
3.3 El eslabón perdido . . . . .	47
3.4 Fines . . . . .	49
3.5 Consecuencias locales de la definición . . . . .	50
3.6 Lo que perdemos . . . . .	55
3.7 Lo que queda suelto o algo más . . . . .	56
3.8 Resultados auxiliares . . . . .	59
3.9 Retazos . . . . .	60
3.10 Una versión gráfica de la sección anterior . . . . .	71
<b>Epílogo</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# Agradecimientos

Posiblemente, esta sea la parte de esta tesis más difícil de preparar. No sólo no podría explicarme sin las personas que me rodean, en particular las que me son más cercanas; simple y sencillamente, sin ellas no sería yo lo que soy yo. Incluso, la ausencia de las más lejanas me cambiarían, aún así sea en un ápice. Por lo tanto, este trabajo le debe a todas y cada una de ellas y no sería lo que es sin ellas. Y no es sólo gratitud sino el reconocimiento de que son parte de lo que un- es —y será—.

Sirva lo anterior también de excusa por si se me pasa mencionar a alguien. Nunca me he jactado de tener una buena memoria —entre más inútil un dato, cuanto más probable que lo recuerde— y cualquier omisión no demerita el papel que han tenido.

A mi padre, Salomón, *z"l*, y a mi madre, Ruth, por ser los responsables de mi existencia: no sería sin ell-s.

A Sol, Anita, Paulo y José Luis: no sé qué puedo decir a estas alturas, ¡salud!

A Raúl y Luis, que me han acompañado y acompañan en la Facultad desde el principio.

A Ociel, un lóbulo de mi hígado lleva tu nombre.

A Violeta, Fabrizzio, Karla, Picos, Arita, Chuchín, Rafa y Mini, buen-s compañer-s y amig-s de la facultad.

A Rodrigo y Arturo, muy queridos colegas.

A Memo, es un placer caminar y confabular juntos, otro lóbulo de mi hígado lleva tu nombre.

A Manuel, suavísimo y queridísimo cómplice.

A José Luis y Nahid, querid-s amig-s y discret-s cofrades.

A Gary, mi feliz *eudaimon*.

A Jana, entrañable confidente, amiga y compañera.

De entre mis profesores de la preparatoria, a Guadalupe Ramírez y a Aurelia Vargas; ambas determinaron mi afición por la historia y por la etimología hispánica.

A Julieta Verdugo, q.e.p.d., y Ángel Carrillo, extraordinari-s profesores de la Facultad que me mostraron las delicias de la geometría moderna y del análisis matemático.

A Bernardo Llano, por presentarme los torneos y por sus generosos consejos y enseñanzas, gracias.

A Rita Zuazua, por la calidez y el afecto.

A mis sinodales, Bernardo Llano, Criel Merino, Eugenia O'Reilly y Sergio Rajsbaum, por su cuidadosa lectura de esta tesis y sus comentarios.

A Hortensia, mi tutora, le estoy profundamente agradecido por darme las posibilidades y el espacio, así como un cauce y por las enseñanzas, que exceden por mucho lo que aparece en este trabajo.

Al Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México y, en particular, a Socorro Audiffred y María Inés León por su cálido y dedicado apoyo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y, en particular, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas por ser un terreno fértil.

**Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) IN106613 Hamiltonicidad y pancromaticidad en nuevas clases de digráficas. Agradezco a la DGAPA-UNAM por el apoyo y la beca recibida.**

# Exordio

El presente trabajo forma parte de un proyecto que, a mi parecer, inició por ahí del año 2009: el estudio de los ciclos y las trayectorias hamiltonianas en generalizaciones de los torneos multipartitos. Fue un tema con el que nos topamos accidentalmente. Habíamos abordado el estudio de la existencia y características de los  $(k, l)$ -núcleos en varias clases de las consideradas como *generalizaciones de torneos* —en el sentido en el que los plantea Bang-Jensen en [2]—.

El trabajo fue relativamente directo para el caso de las digráficas cuasitransitivas. Sin embargo, para la segunda clase que abordamos, las digráficas localmente semicompletas en flechas —*arc-locally semicomplete digraphs* en inglés—, consideramos que la información de la que disponíamos era insuficiente para dar una buena caracterización de los  $(k, l)$ -núcleos. El tiempo no apremiaba, por lo que nos dimos a la tarea de ver qué tanto más podíamos decir sobre esa clase de digráficas. Dicho trabajo concluyó con una caracterización completa de dicha clase, que extendía el trabajo que Bang-Jensen ya había hecho para las que eran fuertemente conexas en [4], caracterización que apareció publicada en [16].

Las digráficas localmente semicompletas en flechas fueron una propuesta de Bang-Jensen para obtener una extensión análoga a la que las digráficas localmente semicompletas representan con respecto a los torneos pero con respecto a los torneos bipartitos. Sin embargo, mientras que las digráficas localmente semicompletas dieron lugar a varias familias de digráficas y construcciones novedosas, las digráficas localmente semicompletas en flechas sólo dieron lugar a familias muy restringidas o que ya eran conocidas.

En [5], Bang-Jensen afirmó que:

El teorema 3.3 y el lema 4.1 muestran que uno no puede obtener una nueva generalización común interesante simplemente al reemplazar las definiciones de digráfica localmente semicompleta y di-

gráfica cuasitransitiva por localmente semicompleta en flechas y 3-cuasitransitiva<sup>1</sup>.

La pregunta resultaba, por lo menos para mí, obvia: **¿cómo obtener generalizaciones que sí sean interesantes?**

En principio, ¿qué significa que una familia de digráficas sea *interesante*? Bang-Jensen fijó su atención en los torneos porque son una familia de digráficas *bien conocida*<sup>2</sup> [12, 34]. Para mí, las propiedades más relevantes han sido sobre la existencia de ciclos y trayectorias hamiltonianas.

Sabemos que:

- Las digráficas semicompletas siempre poseen una trayectoria hamiltoniana (teorema de Rédei [33]) y poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas (teorema de Camion [13]).
- Las digráficas bipartitas semicompletas poseen una trayectoria hamiltoniana si y sólo si poseen un casi-factor de ciclos y poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un factor de ciclos (véase [25, 26, 29]).
- las digráficas multipartitas semicompletas poseen al menos una trayectoria hamiltoniana si y sólo si poseen un casi-factor de ciclos y poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un buen factor de ciclos (véase [27, 9]).

Y también se han obtenido los siguientes resultados, algunos de los cuales son de nuestra autoría:

- Las digráficas localmente semicompletas (una generalización de las digráficas semicompletas) poseen una trayectoria hamiltoniana si y sólo si son conexas (véase [2, proposición 3.10]) y poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas (véase [2, teorema 3.3]).
- Las digráficas localmente semicompletas en flechas —que son una generalización de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas—

---

<sup>1</sup>«Theorem 3.3 and Lemma 4.1 show that one cannot obtain an interesting new common generalization of semicomplete and semicomplete bipartite digraphs, simply by replacing the definitions of locally semicomplete digraphs and quasi-transitive digraphs, respectively by arc-locally semicomplete digraphs and 3-quasi-transitive digraphs».

<sup>2</sup>Más aún, tanto Bang-Jensen y Gutin en [7] como Volkmann en [36] afirman que son la clase de digráficas que *mejor* conocemos.

---

poseen una trayectoria hamiltoniana si y sólo si son conexas (véase [16]) y poseen un casi-factor de ciclos y poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un factor de ciclos (véase [4, teorema 6.7]).

- Las digráficas localmente in-semicompletas en flechas y las localmente ex-semicompletas en flechas —generalizaciones de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas— poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un factor de ciclos (véase [37, teorema 3.3]).
- Las digráficas 3-cuasitransitivas (una generalización de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas) poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un factor de ciclos (véase [20, corolario 2.8]).
- Las digráficas  $\mathcal{H}_4$ -libres —una generalización de las digráficas semicompletas y bipartitas semicompletas— poseen una trayectoria hamiltoniana si y sólo si son conexas y poseen un casi-factor de ciclos (véase y [17, teorema 4.14]) y poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un factor de ciclos (véase [16, teorema 4.11]).
- Las digráficas multipartitas extendidas —un caso particular de las digráficas multipartitas semicompletas— poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si son fuertemente conexas y poseen un factor de ciclos (véase [28, lema 7]).

Al año 2004, todas las clases anteriores ya eran conocidas. Las últimas aparecieron en [5].

En [16] introdujimos una nueva operación de digráficas encaminada a lidiar con la pregunta que nos hicimos: la  $\mathcal{P}$ -composición de digráficas, que es una generalización de la composición usual —en el sentido en el que la usa Bang-Jensen pero que también es conocida como suma de Zykov—. La composición, cuando no es trivial, no respeta las particiones, *i.e.*, si las digráficas que componemos son  $k$ -partitas, la composición **no es**  $k$ -partita. Cuando las digráficas que componemos son  $k$ -partitas, podemos pensar la partición como una  $k$ -coloración y, más aún, que todas están coloreadas con el mismo conjunto de colores. La  $\mathcal{P}$ -composición considera estas coloraciones como una  $k$ -coloración de la digráfica resultante y agrega las mismas flechas que la

composición usual siempre que los extremos tengan colores diferentes. Con esto, obtenemos una digráfica  $k$ -partita —y esto no depende en modo alguno de la digráfica que tomemos como índice o base—.

Bang-Jensen, Gutin, Guo y Volkmann dieron una caracterización de las digráficas localmente semicompletas en términos de composiciones en [6]. En particular, una de esas composiciones toma como índice —o base— una digráfica circular —en inglés *round digraph*— y como factores digráficas semicompletas. Si sustituimos la composición y tomamos como factores digráficas bipartitas semicompletas obtendremos digráficas parecidas a las localmente semicompletas pero bipartitas y es plausible pensar que los ciclos hamiltonianos en ellas satisfacen la misma caracterización que para las digráficas bipartitas semicompletas.

En [14], Galeana Sánchez introdujo una nueva operación que guarda cierta relación con las composiciones sobre torneos. Dada una familia de digráficas ajenas en vértices  $D_1, \dots, D_n$ , una digráfica  $D$  es una *suma generalizada de digráficas*, y lo denotamos al decir que  $D$  es subdigráfica de  $D_1 \oplus \dots \oplus D_n$ , si se satisface que

- (i)  $D\langle V(D_i) \rangle$  es isomorfa a  $D_i$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, n\}$  y
- (ii) entre cualquier par de vértices en sumandos distintos hay una y sólo una flecha en  $D$ .

Las flechas entre vértices en un mismo sumando en  $D$  las llamamos *interiores* y las flechas entre vértices en sumandos distintos —que son las que agregamos— las llamamos *exteriores*. Dos propiedades las relacionan con las generalizaciones de torneos. Por una lado, cuando cada una de las digráficas  $D_1, \dots, D_n$  no tiene flechas, todas las sumas generalizadas son torneos  $n$ -partitos. Por el otro, para todo torneo  $T$  de orden  $n$  se tiene que la composición  $T[D_1, \dots, D_n]$  siempre está en  $D_1 \oplus \dots \oplus D_n$ .

Como parte de este proyecto, también hemos obtenido los siguiente resultados sobre estas nuevas clases:

- Dada una gráfica  $D = C_n[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ , en donde  $C_n$  es el  $n$ -ciclo y cada una de las digráficas  $D_i$  es bipartita semicompleta fuertemente conexa —un caso particular de la construcción comentada arriba, pues todos los ciclos son digráficas circulares—,  $D$  posee un ciclo hamiltoniano si y sólo  $D$  posee un factor de ciclos [18].

- 
- Consideremos dos digráficas ajenas en vértices  $D_1$  y  $D_2$ . Si  $D$  está en  $D_1 \oplus D_2$  y  $D$  posee un factor de ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$  que estén conformados por flechas exteriores de  $D$  tales que para cada par de enteros distintos  $i$  y  $j$  en  $\{1, \dots, k\}$ , se satisface alguna de los dos siguientes condiciones:

- tanto  $(C_i, C_j)$  como  $(C_j, C_i)$  poseen flechas exteriores de  $D$  o
- $(C_j, C_i)$  no tiene flechas exteriores de  $D$  y tanto  $(C_j, C_i) \cap A(D_1)$  como  $(C_j, C_i) \cap A(D_2)$  son no vacíos

entonces  $D$  posee un ciclo hamiltoniano [19].

Como puede apreciarse en los ejemplos anteriores, son varias y amplias familias de digráficas en donde las caracterizaciones de la existencia de ciclos y trayectorias hamiltonianas son semejantes —sobre todo, están relacionadas con la existencia de factores y casi-factores de ciclos—.

Desde mi perspectiva, la presente tesis aporta dos cosas. La primera de ella es una técnica basada en el uso de la estructura de las clases laterales de  $\langle (1, 1) \rangle_{\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n}$  en  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$  para analizar el comportamiento de las flechas entre pares de ciclos ajenos. Dicho análisis resulta relevante porque las condiciones que estudiamos para asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano presuponen la existencia de un factor de ciclos o de un casi factor de ciclos. Con base en dicha técnica, damos una caracterización y una condición suficiente para la existencia de ciclos hamiltonianos para dos clases de digráficas en los capítulos 2 y 3.

La segunda de las aportaciones es una clase de digráficas, las digráficas multipartitas localmente semicompletas, que es una generalización de los torneos multipartitos. Más aún, es una generalización común de la clase de los torneos multipartitos y de las digráficas localmente semicompletas.



# Capítulo 1

## Preliminares

En el presente capítulo haremos una breve introducción de los conceptos de la teoría de las gráficas utilizados a lo largo del texto. Como referencia, recomendamos el libro de Bang-Jensen y Gutin [8].

Una *digráfica* consiste de un conjunto, a cuyos elementos llamamos los *vértices* de la digráfica, y de una relación binaria sobre ese conjunto, a cuyos elementos llamamos las *flechas* de la digráfica. Decimos que la digráfica  $D$  es el par ordenado  $(V(D), A(D))$ , en donde  $V(D)$  es el conjunto de los vértices de  $D$  y  $A(D)$  es el conjunto de las flechas de  $D$ . Para el presente trabajo, consideraremos digráficas en las que el conjunto de los vértices es finito y no es vacío y el conjunto de las flechas es una relación irreflexiva. Dada una digráfica  $D = (V(D), A(D))$ , si  $u$  y  $v$  son dos vértices de  $D$  tales que  $(u, v)$  es una flecha de  $D$  entonces diremos que  $u$  es *adyacente hacia*  $v$  y que  $v$  es *adyacente desde*  $u$ ; usualmente la denotaremos por  $u \rightarrow v$  o  $v \leftarrow u$ . Si entre dos vértices  $u$  y  $v$  existe una flecha en algún sentido entonces diremos que  $u$  y  $v$  son adyacentes.

Consideremos una digráfica  $D$ . Si  $u$  y  $v$  son vértices de  $D$  y  $(u, v)$  es una flecha de  $D$ , decimos que *hay una flecha* de  $u$  a  $v$ , que  $u$  *domina*  $v$ , que  $v$  es *dominado* por  $u$ , que  $u$  es *adyacente hacia*  $v$  o que  $v$  es *adyacente desde*  $u$  y lo solemos denotar por  $uv$ ,  $u \rightarrow v$  o  $v \leftarrow u$ . Si  $u \rightarrow v$  o  $v \leftarrow u$ , decimos que  $u$  y  $v$  son *adyacentes*. Si  $u \rightarrow v$  es una flecha en  $D$  pero  $v \rightarrow u$  no es una flecha de  $D$ , decimos que la flecha es *asimétrica*; en otro caso, decimos que la flecha es *simétrica*.

Una *gráfica* es una digráfica  $G$  donde el conjunto de las flechas es una relación simétrica y, en tal caso, a sus elementos se les suele llamar *aristas* en vez de flechas. En las gráficas dos vértices pueden o no ser adyacentes pero

la dirección pierde completamente su relevancia. Es por esto que mientras en las digráficas las flechas se suelen representar como flechas, en el caso de las gráficas las aristas se representan como líneas entre los vértices.

Dada una digráfica  $D$ , le podemos asociar naturalmente una gráfica que tenga el mismo conjunto de vértices de  $D$ . Para ello basta con agregar las flechas necesarias —entre vértices entre los que haya al menos una flecha en la digráfica— para que la relación definida por las flechas sea simétrica. Podríamos decir que «substituimos» cada flecha de  $D$  por una arista. A tal gráfica se le conoce como la *gráfica subyacente de  $D$*  y se le denota por  $\mathcal{UG}(D)$ .

Dadas dos digráficas  $D$  y  $H$ , un *homomorfismo* de  $D$  a  $H$  es una función  $\phi$  de los vértices de  $D$  a los vértices de  $H$  tal que si  $u \rightarrow v$  es una flecha de  $D$  entonces  $\phi(u) \rightarrow \phi(v)$  es una flecha de  $H$ . Si la función  $\phi$  es inyectiva entonces decimos que  $D$  es *subdigráfica* de  $H$ . Si la función  $\phi$  es biyectiva y su inversa también es un homomorfismo entonces decimos que  $D$  y  $H$  son *isomorfas*.

Dada una digráfica  $D$  y un vértice  $u$  de  $D$ , la *exvecindad* de  $v$  en  $D$ , que denotamos como  $N_D^+(v)$ , es el conjunto de los vértices de  $D$  dominados por  $v$  mientras que la *invecindad* de  $v$  en  $D$ , que denotamos como  $N_D^-(v)$ , es el conjunto de los vértices que dominan a  $v$ . El *exgrado* de  $v$  es la cardinalidad de la exvecindad de  $v$  y se denota por  $d_D^+(v)$ . De forma análoga, el *ingrado* de  $v$  es la cardinalidad de la invecindad de  $v$  y se denota por  $d_D^-(v)$ . En la notación anterior, omitiremos el subíndice cuando esto no deje lugar a dudas con respecto a la digráfica sobre la que se habla.

Dada una digráfica  $D$ , un *semicamino* es una sucesión  $u_1 u_2 \cdots u_p$  de vértices de  $D$  tales que  $u_i$  y  $u_{i+1}$  son adyacentes para todo entero  $i$  en  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ . También se le suele llamar  $(u_1, u_p)$ -*semicamino* donde  $u_1$  y  $u_p$  son los *extremos* del *semicamino*. La *longitud* de un *semicamino* es el número de flechas que éste recorre, contando multiplicidades, es decir,  $p-1$ . Si los extremos del *semicamino* son diferentes, se dice que es *abierto*; en otro caso, se dice que es *cerrado*. Por  $V(P)$  denotaremos al conjunto de vértices del *semicamino*, es decir, a  $\{u_1, \dots, u_p\}$ . Dado un *semicamino*  $P$  en una digráfica  $D$ , cualquier arista de  $D$  que no esté en  $P$  y cuyos extremos no sean vértices consecutivos en  $P$  se dice que es una *diagonal* de  $P$ .

Una *semitrayectoria* es un *semicamino* en el que no se repiten vértices. Un *semiciclo* es un *semicamino* cerrados cuyos extremos es el único vértice que se repite.

Dado un *semicamino*  $P = u_1 u_2 \cdots u_p$ , decimos que  $P$  es un *semicamino*

*dirigido* o es un *camino* si se tiene que  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  para todo  $i$  en  $\{1, 2, \dots, p-1\}$  o  $u_i \leftarrow u_{i+1}$  para todo  $i$  en  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ . Si se tiene que  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  para todo  $i$  en  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ , también diremos que  $P$  es un  $(u_1, u_p)$ -camino. Análogamente se definen las trayectorias y los ciclos.

Dado un conjunto  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_p\}$  de ciclos de  $D$ , diremos que  $\mathcal{F}$  es un *factor de ciclos* o simplemente *factor* de  $D$  si los ciclos son mutuamente ajenos en vértices y todo vértice de  $D$  está en algún ciclo de  $\mathcal{F}$ . Dado un conjunto  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_p\}$  de ciclos de  $D$  salvo por  $C_1$  que puede ser una trayectoria, diremos que  $\mathcal{F}$  es un *casi-factor* de  $D$  si los elementos del factor son mutuamente ajenos en vértices y todo vértice de  $D$  está en algún elemento de  $\mathcal{F}$ . En ambos casos, tenemos que el conjunto  $\{V(C_1), \dots, V(C_p)\}$  es una partición de  $V(D)$ . Dada una digráfica  $D$  y una trayectoria  $T$  en  $D$ , diremos que  $T$  es una trayectoria *hamiltoniana* si  $T$  recorre todos los vértices de  $D$ . Si  $T$  es una trayectoria hamiltoniana de  $D$  entonces  $\{T\}$  es un casi-factor de  $D$ . Dada una digráfica  $D$  y un ciclo  $C$  en  $D$ , diremos que  $C$  es un ciclo *hamiltoniano* si  $C$  recorre todos los vértices de  $D$ . En particular, si  $C$  es un ciclo hamiltoniano de  $D$  entonces  $\{C\}$  es un factor de ciclos de  $D$ .

Dada una digráfica  $D$  y un subconjunto  $S$  de sus vértices, la *subdigráfica inducida por  $S$  en  $D$* , denotada como  $D\langle S \rangle$ , tiene por conjunto de vértices a  $S$  y dados dos vértices  $u$  y  $v$  en  $S$ , existe la flecha  $u \rightarrow v$  en  $D\langle S \rangle$  si y sólo si tal flecha existe en  $D$ .

Para cualesquiera dos conjuntos de vértices  $X$  y  $Y$  en una digráfica  $D$ ,  $(X, Y)_D$  denota el conjunto  $\{xy: (x, y) \in A(D), x \in X \text{ y } y \in Y\}$ . Si  $X$  y  $Y$  son subdigráficas de  $D$  entonces por  $(X, Y)_D$  entenderemos  $(V(X), V(Y))_D$ . Cuando no haya confusión, omitiremos el subíndice.

Para cualesquiera dos conjuntos de vértices ajenos  $X$  y  $Y$  en una digráfica  $D$ ,  $X \rightarrow Y$  significa que para cualquier vértice  $x$  en  $X$  y cualquier vértice  $y$  en  $Y$  se tiene que  $x \rightarrow y$ . Además,  $X \Rightarrow Y$  denota que  $(Y, X)_D = \emptyset$ . Finalmente,  $X \mapsto Y$  denota que se tiene tanto que  $X \rightarrow Y$  como  $X \Rightarrow Y$ . Si  $X$  y  $Y$  son subdigráficas de  $D$  entonces por  $X \rightarrow Y$ ,  $X \Rightarrow Y$  y  $X \mapsto Y$  entenderemos  $V(X) \rightarrow V(Y)$ ,  $V(X) \Rightarrow V(Y)$  y  $V(X) \mapsto V(Y)$ , respectivamente.



## Capítulo 2

# Hamiltonicidad en una generalización de las digráficas bipartitas semicompletas

### 2.1 Herramienta algebraica

En lo que sigue daremos por conocidos los conceptos de grupo aditivo, grupo cíclico, isomorfismo de grupos, subgrupo, subgrupo generado por un elemento, subgrupo normal, clases laterales izquierdas y derechas y del grupo de los enteros módulo  $m$  —para cada entero positivo  $m$ —, denotado por  $\mathbb{Z}_m$ . Estos pueden consultarse en [30, 35].

Para cualesquiera dos enteros  $k$  y  $m$  con  $m$  positivo, denotaremos por  $[k]_m$  la clase de los enteros congruentes con  $k$  módulo  $m$ . Dados dos enteros  $m$  y  $n$ , la suma directa de  $\mathbb{Z}_m$  y  $\mathbb{Z}_n$ , denotada por  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ , es el grupo aditivo

$$\{([p]_m, [q]_n) : [p]_m \in \mathbb{Z}_m \text{ y } [q]_n \in \mathbb{Z}_n\}$$

tal que para  $([p_1]_m, [q_1]_n)$  y  $([p_2]_m, [q_2]_n)$  en  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ,  $([p_1]_m, [q_1]_n) + ([p_2]_m, [q_2]_n)$  es  $([p_1 + p_2]_m, [q_1 + q_2]_n)$ . De la definición del grupo de los enteros módulo  $m$  se sigue que  $([p_1]_m, [q_1]_n)$  es igual a  $([p_2]_m, [q_2]_n)$  si y sólo si  $p_1 \equiv p_2 \pmod{m}$  y  $q_1 \equiv q_2 \pmod{n}$ . Notemos que el neutro aditivo de  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$  es  $([0]_m, [0]_n)$  y que dado un elemento  $([p]_m, [q]_n)$  en  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ , su inverso aditivo es  $([-p]_m, [-q]_n)$ .

El subgrupo generado por  $([1]_m, [1]_n)$  en  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ , denotado por  $\langle([1]_m,$

$[1]_n))_{\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n}$ , es

$$\{([k]_m, [k]_n) : ([k]_m, [k]_n) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\}.$$

Para simplificar la notación, por  $G_{m,n}$  denotaremos el grupo  $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$  y por  $H_{m,n}$  denotaremos subgrupo  $\langle ([1]_m, [1]_n) \rangle_{\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n}$ .

**Proposición 1.** *Dados dos enteros positivos  $m$  y  $n$ , se tiene que*

$$H_{m,n} \cong \mathbb{Z}_{\text{mcm}(m,n)},$$

donde  $\text{mcm}(m,n)$  denota el mínimo común múltiplo de  $m$  y  $n$ .

*Demostración.* Primero mostraremos que la función

$$\phi: H_{m,n} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{mcm}(m,n)}$$

es un homomorfismo de grupos. Tomemos  $([p]_m, [q]_n)$  en  $H_{m,n}$ . Por la definición de  $H_{m,n}$ , existe un entero  $k$  tal que  $([p]_m, [q]_n) = ([k]_m, [k]_n)$ . Definamos  $\phi(([p]_m, [q]_n))$  como  $[k]_{\text{mcm}(m,n)}$ .

Tomemos  $([p_1]_m, [q_1]_n)$  y  $([p_2]_m, [q_2]_n)$  en  $H_{m,n}$ . Supongamos que

$$\phi([p_1]_m, [q_1]_n) = [k_1]_{\text{mcm}(m,n)}$$

y

$$\phi([p_2]_m, [q_2]_n) = [k_2]_{\text{mcm}(m,n)}.$$

Es decir, tenemos que  $p_1 \equiv k_1 \pmod{m}$ ,  $q_1 \equiv k_1 \pmod{n}$ ,  $p_2 \equiv k_2 \pmod{m}$  y  $q_2 \equiv k_2 \pmod{n}$ . Se sigue que  $p_1 + p_2 \equiv k_1 + k_2 \pmod{m}$  y  $q_1 + q_2 \equiv k_1 + k_2 \pmod{n}$ . Por lo tanto

$$\phi([p_1]_m, [q_1]_n) + \phi([p_2]_m, [q_2]_n) = \phi([p_1]_m, [q_1]_n) + \phi([p_2]_m, [q_2]_n).$$

De aquí que  $\phi$  es un homomorfismo de grupos. Más aún, la función  $\phi$  es biyectiva, con inversa

$$\phi^{-1}([k]_{\text{mcm}(m,n)}) = ([k]_m, [k]_n).$$

Por lo tanto, los grupos  $H_{m,n}$  y  $\mathbb{Z}_{\text{mcm}(m,n)}$  son isomorfos.  $\square$

**Corolario 2.** *El orden del grupo  $H_{m,n}$  es  $\text{mcm}(m, n)$ .*

**Corolario 3.** *Los grupos  $H_{m,n}$  y  $G_{m,n}$  son isomorfos si y sólo si  $m$  y  $n$  son primos relativos.*

*Demostración.* Si  $m$  y  $n$  son primos relativos entonces  $\text{mcm}(m, n)$  es igual a  $mn$ .  $\square$

**Teorema 4** (Hungerford, teorema 4.2 en la página 38). *Supóngase que  $H$  es un subgrupo del grupo  $G$ .*

- (i) *La congruencia izquierda [resp. derecha] módulo  $H$  es una relación de equivalencia sobre  $G$ .*
- (ii) *La clase de equivalencia de  $a$  en  $G$  bajo la congruencia derecha [resp. izquierda] módulo  $H$  es el conjunto  $H + a = \{h + a : h \text{ en } H\}$  [resp.  $a + H = \{a + h : h \text{ en } H\}$ ].*
- (iii)  *$|H + a| = |H| = |a + H|$  para todo  $a$  en  $G$ .*

**Corolario 5** (Hungerford, corolario 4.3 en la página 38). *Supóngase que  $H$  es un subgrupo del grupo  $G$ .*

- (i)  *$G$  es la unión de las clases laterales derechas [resp. izquierdas] de  $H$  en  $G$ .*
- (ii) *Dos clases laterales derechas [resp. izquierdas] de  $H$  en  $G$  son disjuntas o iguales.*
- (iii) *Para todo  $a$  y  $b$  en  $G$ ,  $H + a = H + b$  si y sólo si  $a - b$  está en  $H$  y  $a + H = b + H$  si y sólo si  $b - a$  está en  $H$ .*
- (iv) *Si  $\mathcal{R}$  es el conjunto de clases laterales derechas distintas de  $H$  en  $G$  e  $\mathcal{L}$  es el conjunto de clases laterales izquierdas distintas de  $H$  en  $G$  entonces  $|\mathcal{R}| = |\mathcal{L}|$ .*

Ya que  $G_{m,n}$  es un grupo abeliano, para cada  $([p]_m, [q]_n)$  en  $G_{m,n}$  tenemos que

$$([p]_m, [q]_n) + H_{m,n} = H_{m,n} + ([p]_m, [q]_n).$$

$\mathcal{R}$  es el conjunto de clases laterales derechas distintas de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$  y  $\mathcal{L}$  es el conjunto de clases laterales izquierdas distintas de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$  entonces se tiene que  $\mathcal{R} = \mathcal{L}$ . Por lo tanto podemos hablar simplemente de las clases laterales de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$ .

Recordemos que dado un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$ , el *índice de  $H$  en  $G$* , que se denota por  $[G : H]$ , es la cardinalidad del conjunto de clases laterales de  $H$  en  $G$ .

Un *sistema completo de representantes de las clases laterales* de un subgrupo  $H$  en un grupo  $G$  es un conjunto  $\{a_i\}$  que consiste de precisamente

un elemento por cada clase lateral de  $H$  en  $G$ . Claramente, el conjunto  $\{a_i\}$  tiene cardinalidad  $[G : H]$ .

**Teorema 6** (Teorema de Lagrange). *Si  $H$  es un subgrupo de un grupo  $G$  entonces  $|G| = [G : H]|H|$ .*

**Lema 7.** *Si  $([p]_m, [q]_n)$  es un elemento de  $G_{m,n}$  entonces  $([p]_m, [q]_n)$  pertenece a  $H_{m,n}$  si y sólo si  $p \equiv q \pmod{\text{mcd}(m, n)}$ .*

*Demostración.* Tomemos  $([p]_m, [q]_n)$  en  $H_{m,n}$ . De aquí que existe un número entero  $k$  tal que

$$([p]_m, [q]_n) = ([k]_m, [k]_n).$$

Por definición,  $p \equiv k \pmod{m}$  y  $q \equiv k \pmod{n}$ . Basta con notar que se tiene que  $p \equiv k \pmod{\text{mcd}(m, n)}$  y que  $q \equiv k \pmod{\text{mcd}(m, n)}$ . Por lo tanto,  $p \equiv q \pmod{\text{mcd}(m, n)}$ .

Ahora consideremos dos enteros  $p$  y  $q$  tales que  $p \equiv q \pmod{\text{mcd}(m, n)}$ . Por lo tanto  $(q - p)/\text{mcd}(m, n)$  es un número entero. Llamemos  $m'$  a  $m/\text{mcd}(m, n)$  y  $n'$  a  $n/\text{mcd}(m, n)$ . Notemos que  $m'$  y  $n'$  son primos relativos, por lo que

$$H_{m',n'} = G_{m',n'}.$$

De aquí que existe un número entero  $k'$  tal que

$$([0]_{m'}, [(q - p)/\text{mcd}(m, n)]_{n'}) = ([k]_{m'}, [k]_{n'}),$$

*i.e.*,

$$0 \equiv k \pmod{m'}$$

y

$$(q - p)/\text{mcd}(m, n) \equiv k \pmod{n'}.$$

Multiplicando por  $\text{mcd}(m, n)$  tenemos que

$$0 \equiv k \text{mcd}(m, n) \pmod{m}$$

y

$$(q - p) \equiv k \text{mcd}(m, n) \pmod{n}.$$

Así,  $([0]_m, [q - p]_n)$  está en  $H_{m,n}$ . Obviamente  $([p]_m, [p]_n)$  también está en  $H_{m,n}$ . Por lo tanto,

$$([p]_m, [q]_n) = ([0]_m, [q - p]_n) + ([p]_m, [p]_n)$$

está en  $H_{m,n}$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 8.** *Los conjuntos*

$$\mathcal{C} = \{([0]_m, [0]_n), ([0]_m, [1]_n), \dots, ([0]_m, [\text{mcd}(m, n) - 1]_n)\}$$

y

$$\mathcal{D} = \{([0]_m, [0]_n), ([1]_m, [0]_n), \dots, ([\text{mcd}(m, n) - 1]_m, [0]_n)\}$$

son conjuntos completos de representantes de las clases laterales de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$ .

*Demostración.* Probémoslo para  $\mathcal{C}$ . Por el teorema de Lagrange, sabemos que el número de clases laterales de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$  es el orden de éste entre el orden de aquél, es decir,  $\text{mcd}(m, n)$ . Este es justo el número de elementos en  $\mathcal{C}$ .

Así, por el tercer inciso del corolario 5 basta con demostrar que para cualquier par  $([p_1]_m, [q_1]_n)$  y  $([p_2]_m, [q_2]_n)$  de elementos en  $\mathcal{C}$ , su diferencia no está en  $H_{m,n}$ . Ya que  $p_1 = 0 = p_2$ , por el lema 7 sólo debemos mostrar que

$$0 \not\equiv q_1 - q_2 \pmod{\text{mcd}(m, n)}.$$

Pero  $q_1$  y  $q_2$  están en el intervalo  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}$ , por lo que  $\text{mcd}(m, n)$  no puede ser divisor de  $q_1 - q_2$ , que es lo que queríamos probar.  $\square$

**Corolario 9.** *Los conjuntos*

$$\{([0]_m, [0]_n) + H_{m,n}, ([0]_m, [1]_n) + H_{m,n}, \dots, ([0]_m, [\text{mcd}(m, n) - 1]_n) + H_{m,n}\}$$

y

$$\{([0]_m, [0]_n) + H_{m,n}, ([1]_m, [0]_n) + H_{m,n}, \dots, ([\text{mcd}(m, n) - 1]_m, [0]_n) + H_{m,n}\}$$

son particiones de  $G_{m,n}$ .

**Corolario 10.** *Si  $([p]_m, [q]_n)$  es un elemento de  $G_{m,n}$  entonces existen  $([0]_m, [q']_n)$  en  $\mathcal{C}$  y  $([p']_m, [0]_n)$  en  $\mathcal{D}$  tales que*

$$([p]_m, [q]_n) + H_{m,n} = ([0]_m, [q']_n) + H_{m,n} = ([p']_m, [0]_n) + H_{m,n}.$$

**Corolario 11.** *Dados  $([i]_m, [j]_n)$  y  $([p]_m, [q]_n)$  en  $G_{m,n}$ , si  $([p]_m, [q]_n)$  está en  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$  entonces tanto  $([p]_m, [q + k \text{mcd}(m, n)]_n)$  como  $([p + k \text{mcd}(m, n)]_m, [q]_n)$  están en  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ , para cualquier número entero  $k$ .*

*Demostración.* Ya que  $([p]_m, [q]_n)$  está en  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ , se sigue que  $([p-i]_m, [q-j]_n)$  está en  $H_{m,n}$ . Por el lema 7 sabemos que  $p-i \equiv q-j \pmod{\text{mcd}(m, n)}$ . Se sigue que tanto  $p-i \equiv (q+k\text{mcd}(m, n)-j) \pmod{\text{mcd}(m, n)}$  como  $(p+k\text{mcd}(m, n)-i) \equiv q-j \pmod{\text{mcd}(m, n)}$  se satisfacen para cualquier número entero  $k$ . Se sigue que  $([p-i]_m, [q+k\text{mcd}(m, n)-j]_n)$  y  $[p+k\text{mcd}(m, n)-i]_m, [q-j]_n)$  están en  $H_{m,n}$ . Por lo tanto,  $([p]_m, [q+k\text{mcd}(m, n)]_n)$  y  $[p+k\text{mcd}(m, n)]_m, [q]_n)$  están en  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ .  $\square$

**Corolario 12.** *Tomemos una clase lateral de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$ , sea  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ . Para cualquier elemento  $[p]_m$  en  $\mathbb{Z}_m$  existe un elemento  $[q]_n$  tal que  $([p]_m, [q]_n)$  está en  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ . Análogamente, para cualquier elemento  $[q]_n$  en  $\mathbb{Z}_n$  existe un elemento  $[p]_m$  en  $\mathbb{Z}_m$  tal que  $([p]_m, [q]_n)$  está en  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ .*

*Demostración.* Por el corolario 8, existe  $([i']_m, [0]_n)$  en  $G_{m,n}$  tal que  $([i']_m, [0]_n) + H_{m,n} = ([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ . Tomemos un elemento  $[p]_m$  en  $\mathbb{Z}_m$ . El algoritmo de la división implica que existen números enteros  $k$  y  $q$ , donde  $q$  es menor que  $\text{mcd}(m, n)$ , tales que  $p-i' = k\text{mcd}(m, n) + q$ . De aquí que  $p-i'-q = k\text{mcd}(m, n)$ , es decir,  $p-i' \equiv q \pmod{\text{mcd}(m, n)}$ . Se sigue que  $([p-i']_m, [q]_n)$  está en  $H_{m,n}$  por el lema 7. Pero  $([p]_m, [q]_n) = ([i']_m, [0]_n) + ([p-i']_m, [q]_n)$ . Por lo tanto,  $([p]_m, [q]_n)$  está en  $([i']_m, [0]_n) + H_{m,n} = ([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ .  $\square$

**Proposición 13.** *Si  $m$  y  $n$  no son primos relativos y  $c$  es el menor número entre  $m$  y  $n$  entonces para cualquier clase lateral de  $H_{m,n}$  en  $G_{m,n}$ , digamos  $([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$ , la función*

$$\phi: ([i]_c, [j]_c) + H_{c,c} \rightarrow ([i]_m, [j]_n) + H_{m,n}$$

*dada por  $([p]_c, [q]_c) \mapsto ([p]_m, [q]_n)$ , para cada  $([p]_c, [q]_c)$  en  $([i]_c, [j]_c) + H_{c,c}$ , es inyectiva.*

*Demostración.* Consideremos dos elementos distintos  $([p_1]_c, [q_1]_c)$  y  $([p_2]_c, [q_2]_c)$  en  $([i]_c, [j]_c) + H_{c,c}$ . Por lo tanto,  $p_1$  es diferente de  $p_2$  o  $q_1$  es diferente de  $q_2$ . Se sigue que  $([p_1]_m, [q_1]_n)$  y  $([p_2]_m, [q_2]_n)$  son distintos. Por lo tanto  $\phi$  es inyectiva.  $\square$

**Teorema 14** (Hungerford, teorema 3.4 en la página 35). *Considérese un grupo  $G$  y  $a$  en  $G$ . Si  $a$  tiene orden finito  $m$ , con  $m > 0$ , entonces:*

- (i)  $m$  es el menor entero positivo tal que  $ma = e$ ;
- (ii)  $ka = e$  si y sólo si  $k \mid m$ ;
- (iii)  $ra = sa$  si y sólo si  $r \equiv s \pmod{m}$ ;
- (iv)  $\langle a \rangle$  consiste de los elementos distintos  $a, 2a, \dots, (m-1)a, ma = e$ ;
- (v) para cada  $k$  tal que  $k \mid m$ ,  $|ka| = m/k$ .

**Teorema 15** (Hungerford, teorema 3.6 en la página 36). *Considérese un grupo cíclico  $G = \langle a \rangle$ . Si  $G$  es de orden finito  $m$  entonces  $ka$  es un generador de  $G$  si y sólo si  $\text{mcd}(k, m) = 1$ .*

**Corolario 16.**  $[p]_m$  es un generador de  $\mathbb{Z}_m$  si y sólo si  $\text{mcd}(m, p) = 1$ .

**Proposición 17.** *Si  $m$  y  $n$  no son primos relativos y  $m$  es menor que  $n$  entonces el orden de  $m$  en  $\mathbb{Z}_n$  es  $n/\text{mcd}(m, n) = \text{mcm}(m, n)/m$  y el índice de  $\langle [m]_n \rangle$  en  $\mathbb{Z}_n$  es  $\text{mcd}(m, n)$ . Más aún,  $\langle [m]_n \rangle_{\mathbb{Z}_n}$  es  $\{[m]_n, [2m]_n, \dots, [(n/\text{mcd}(m, n) - 1)m]_n, [0]_n\}$ .*

*Demostración.* Por definición,  $\text{mcm}(m, n)$  es el menor entero positivo tal que  $\text{mcm}(m, n) = km$  para algún entero  $k$  y  $[\text{mcm}(m, n)]_n = [0]_n$ . Así, tenemos que  $k = \text{mcm}(m, n)/m = n/\text{mcd}(m, n)$ , ya que  $mn = \text{mcd}(m, n)\text{mcm}(m, n)$ .

Por el teorema de Lagrange, tenemos que el índice de  $\langle [m]_n \rangle$  en  $\mathbb{Z}_n$  es  $\text{mcd}(m, n)$ .

Finalmente, por el teorema 14 tenemos que

$$\langle m \rangle_{\mathbb{Z}_n} = \{[m]_n, [2m]_n, \dots, [(n/\text{mcd}(m, n) - 1)m]_n, [0]_n\}.$$

□

**Corolario 18.** *Consideremos dos enteros positivos  $m$  y  $n$ , tales que no sean primos relativos y  $m$  sea menor que  $n$ . Los conjuntos*

$$\{\langle [m]_n \rangle_{\mathbb{Z}_n} + [i]_n : i \in \{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}\}$$

y

$$\{\langle [km + 0]_n, \dots, [km + (\text{mcd}(m, n) - 1)]_n \rangle : k \in \{0, \dots, n/\text{mcd}(m, n) - 1\}\}$$

son particiones de  $\mathbb{Z}_n$ .

*Demostración.* Para el primer conjunto, basta con probar que  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}$  es un sistema completo de representantes de las clases laterales de  $\langle [m]_n \rangle$  en  $\mathbb{Z}_n$ . Tomemos cualquier par de elementos distintos  $i$  y  $j$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}$ ; claramente  $n$  no es divisor de  $i - j$  porque  $|i - j| < \text{mcd}(m, n) \leq n$ . Por el tercer inciso del corolario 5, se sigue que  $i$  y  $j$  pertenecen a distintas clases laterales de  $\langle [m]_n \rangle$  en  $\mathbb{Z}_n$ . Finalmente, notemos que la cardinalidad de  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}$  es justamente  $\text{mcd}(m, n)$ . De aquí que el conjunto  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}$  es un sistema completo de representantes de las clases laterales de  $\langle [m]_n \rangle$  en  $\mathbb{Z}_n$ . Por lo tanto,

$$\{\langle [m]_n \rangle_{\mathbb{Z}_n} + [i]_n : i \in \{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}\}$$

es una partición de  $\mathbb{Z}_n$ .

Dado  $k$  en  $\{0, 1, \dots, n/\text{mcd}(m, n) - 1\}$ , denotemos por  $\mathcal{T}_k$  el conjunto

$$\{[km + 0]_n, [km + 1]_n, \dots, [km + (\text{mcd}(m, n) - 1)]_n\}.$$

Falta por mostrar que

$$\{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{n/\text{mcd}(m, n) - 1}\}$$

es una partición de  $\mathbb{Z}_n$ . Tomemos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{[km]_n + [i]_n : k \in \{0, 1, \dots, n/\text{mcd}(m, n) - 1\}$$

e  $i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}\}$ . Consideremos las proyecciones

$$\pi_1(k) = \{[km]_n + [i]_n : i \in \{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}\},$$

para  $k$  en  $\{0, 1, \dots, n/\text{mcd}(m, n) - 1\}$ , y

$$\pi_2(i) = \{[km]_n + [i]_n : k \in \{0, 1, \dots, n/\text{mcd}(m, n) - 1\}\},$$

para  $i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(m, n) - 1\}$ . Notemos que

$$\pi_1(k) = \mathcal{T}_k$$

y

$$\pi_2(i) = \langle [m]_n \rangle + [i]_n.$$

Así,

$$\bigcup_{i=0}^{\text{mcd}(m, n) - 1} \pi_2(i) = \mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{n/\text{mcd}(m, n) - 1} \pi_1(k).$$

Pero el conjunto de la izquierda es justamente  $\mathbb{Z}_n$ , de lo que se sigue que  $\{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{n/\text{mcd}(m, n) - 1}\}$  es una partición de  $\mathbb{Z}_n$ .  $\square$

## 2.2 Preámbulo

En la década de los ochenta se comenzaron a estudiar los ciclos y las trayectorias en los torneos bipartitos [4] y, en general, en digráficas bipartitas semicompletas. Para el presente capítulo nos interesa el trabajo realizado por Gregory Gutin, Roland Häggkvist y Yannis Manoussakis sobre trayectorias y ciclos hamiltonianos en tal clase de digráficas.

**Teorema 19** (Gutin [26], Häggkvist y Manoussakis [29]). *Una digráfica bipartita semicompleta posee una trayectoria hamiltoniana si y sólo si posee un casi factor de ciclos.*

**Teorema 20** (Gutin [25], Häggkvist y Manoussakis [29]). *Una digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.*

En [4], Bang-Jensen introdujo las digráficas localmente semicompletas en flechas<sup>1</sup> como una generalización tanto de los torneos bipartitos como de los torneos, de forma similar a como generalizó los torneos en [2] Una digráfica es *localmente semicompleta en flechas* si para cualquier flecha  $u \rightarrow v$  en ella, todo vértice  $x$  en la in-vecindad de  $u$  es adyacente a todo vértice  $y$  en la in-vecindad de  $v$ , siempre que  $x$  y  $y$  sean distintos, y todo vértice  $x$  en la ex-vecindad de  $u$  es adyacente a todo vértice  $y$  en la ex-vecindad de  $v$ , siempre que  $x$  y  $y$  sean distintos.

Posteriormente, Bang-Jensen introdujo cuatro nuevas generalizaciones de los torneos bipartitos en [5], las digráficas libres de  $\mathcal{H}_i$ , con  $i$  en  $\{1, 2, 3, 4\}$ . A saber:

- Una digráfica es *libre de  $\mathcal{H}_1$*  si para cualesquiera cuatro vértices distintos  $u, v, w$  y  $x$  tales que  $u \rightarrow v \leftarrow w \leftarrow x$  se tiene que  $u$  y  $x$  son vértices adyacentes.
- Una digráfica es *libre de  $\mathcal{H}_2$*  si para cualesquiera cuatro vértices distintos  $u, v, w$  y  $x$  tales que  $u \leftarrow v \rightarrow w \rightarrow x$  se tiene que  $u$  y  $x$  son vértices adyacentes.
- Una digráfica es *libre de  $\mathcal{H}_3$*  si para cualesquiera cuatro vértices distintos  $u, v, w$  y  $x$  tales que  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$  se tiene que  $u$  y  $x$  son vértices adyacentes.

---

<sup>1</sup>Arc-locally semicomplete digraphs en inglés.

- Una digráfica es *libre de  $\mathcal{H}_1$*  si para cualesquiera cuatro vértices distintos  $u, v, w$  y  $x$  tales que  $u \rightarrow v \leftarrow w \rightarrow x$  se tiene que  $u$  y  $x$  son vértices adyacentes.

Véase la figura 2.1.

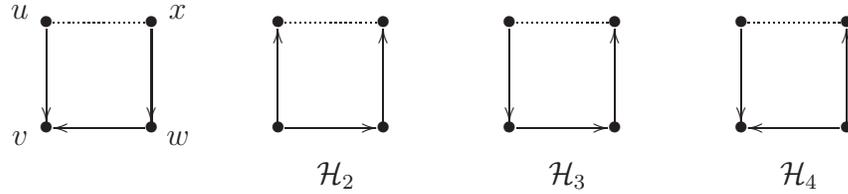


Figura 2.1: Configuraciones  $\mathcal{H}_i$

Notemos que las digráficas libres de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son justamente las digráficas localmente semicompletas en flechas. Las digráficas libres de  $\mathcal{H}_3$  a veces son llamadas *3-cuasitransitivas* y las libres de  $\mathcal{H}_4$  también son conocidas como *3-anticuasitransitivas*.

## 2.3 Resultado principal

El resultado principal de este capítulo consiste en mostrar que el teorema 20, que en un principio se satisfacía para las digráficas bipartitas semicompletas y que luego fue extendido para la clase de las digráficas libres de  $\mathcal{H}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ , también se satisface para las digráficas libres de  $\mathcal{H}_4$ .

La idea sobre la que yace esta prueba es que dado cualquier factor de ciclos con al menos dos ciclos, es posible reducir el número de ciclos en el factor al mezclar dos o tres de ellos en un nuevo ciclo. Para ello, el paso fundamental consiste en analizar el caso en el que el factor está formado por sólo dos ciclos y, en particular, caracterizaremos el comportamiento de las flechas entre esos dos ciclos del factor bajo ciertas condiciones.

Consideremos dos ciclos ajenos

$$C_0 = u_0 u_1 \cdots u_{n_0-1} u_0$$

y

$$C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$$

(respectivamente una trayectoria

$$P_0 = u_0 u_1 \cdots u_{n_0-1} u_{n_0}$$

y un ciclo

$$C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0,$$

ajenos entre sí), un par de flechas  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_r \rightarrow u_s$ , para  $p$  y  $s$  en  $\mathbb{Z}_{n_0}$  y  $q$  y  $r$  en  $\mathbb{Z}_{n_1}$ , se dice que es *un buen par de flechas* si

$$C_0[u_0, u_p] C_1[v_q, v_r] C_0[u_s, u_0]$$

es un ciclo que pasa por los vértices tanto de  $C_0$  como de  $C_1$  (respectivamente

$$P_0[u_0, u_p] C_1[v_q, v_r] P_0[u_s, u_{n_0}]$$

es una trayectoria que pasa por los vértices tanto de  $P_0$  como de  $C_1$ ). Véase la figura 2.2. Así, tenemos la siguiente proposición.

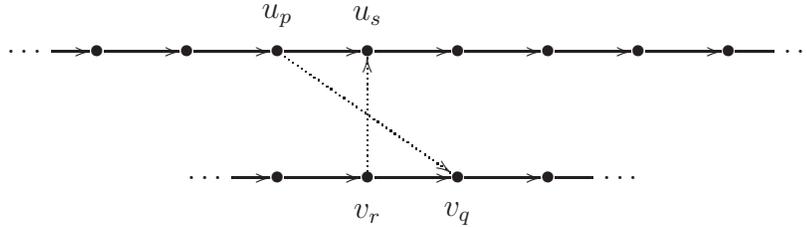


Figura 2.2: El par bueno de flechas  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_r \rightarrow u_s$  da lugar al ciclo  $C_0[u_0, u_p] C_1[v_q, v_r] C_0[u_s, u_0]$  (resp.  $P_0[u_0, u_p] C_1[v_q, v_r] P_0[u_s, u_{n_0}]$ )

**Proposición 21.** *Si  $C_0$  y  $C_1$  son dos ciclos (respectivamente  $P_0$  y  $C_1$  son una trayectoria y un ciclo), ajenos entre sí, en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$  y entre ellos existe un par bueno de flechas entonces existe un ciclo (resp. una trayectoria) que pasa tanto por los vértices tanto de  $C_0$  como de  $C_1$  (resp. tanto de  $P_0$  como de  $C_1$ ).*

El siguiente lema juega un papel central en lo que sigue porque caracteriza el comportamiento de las flechas entre dos ciclos ajenos sin pares buenos de flechas entre sí en una digráfica libre de  $\mathcal{H}_4$ .

**Lema 22.** *Consideremos un par de ciclos ajenos  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_1 u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$  sin pares buenos de flechas entre sí en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$ . Si existe la flecha  $u_p \rightarrow v_q$  (respectivamente  $v_q \rightarrow u_p$ ), para algún  $(p, q)$  en  $\mathbb{Z}_{n_0} \oplus \mathbb{Z}_{n_1}$ , entonces existe un entero  $i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$  tal que  $u_r \rightarrow v_s$  (resp.  $v_s \rightarrow u_r$ ) para todo  $(r, s)$  en  $H_{n_0, n_1} + (i, 0)$ . En particular,  $(p, q)$  está en  $H_{n_0, n_1} + (i, 0)$ . El resultado es el mismo si los ciclos están etiquetados de la forma  $C_0 = u_0 u_1 \cdots u_{n_1-1} u_0$  y  $C_1 = v_0 v_{n_0-1} \cdots v_1 v_0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $u_p \rightarrow v_q$  (respectivamente  $v_q \rightarrow u_p$ ), para algún  $(p, q)$  en  $G_{n_0, n_1}$ . Así, tenemos que

$$u_{p-1} \leftarrow u_p \rightarrow v_q \leftarrow v_{q-1} \quad (\text{resp. } u_{p+1} \rightarrow u_p \leftarrow v_q \rightarrow v_{q+1}).$$

Ya que  $D$  es una digráfica libre de  $\mathcal{H}_4$ , se sigue que  $u_{p-1}$  y  $v_{q-1}$  (resp.  $u_{p+1}$  y  $v_{q+1}$ ) son adyacentes. Por hipótesis sabemos que entre  $C_0$  y  $C_1$  no hay pares buenos de flechas, de aquí que  $u_{p-1} \rightarrow v_{q-1}$  (resp.  $v_{q+1} \rightarrow u_{p+1}$ ). Si continuamos recursivamente, tendremos que  $u_{p-k} \rightarrow v_{q-k}$  (resp.  $v_{p+k} \rightarrow u_{q+k}$ ) para todo entero positivo  $k$ . Recordemos que

$$(p, q) + \langle (-1, -1) \rangle_{G_{n_0, n_1}} \cong (p, q) + \langle (1, 1) \rangle_{G_{n_0, n_1}}$$

y este último es  $H_{n_0, n_1}$ . Notemos que todo elemento en  $(p, q) + H_{n_0, n_1}$  puede escribirse de las formas  $(p - k_0, q - k_0)$  y  $(p + k_1, q + k_1)$ , para algunos enteros positivos  $k_0$  y  $k_1$ . Finalmente, el corolario 8 implica que existe un entero  $i$  en  $\{0, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$  tal que

$$H_{n_0, n_1} + (p, q) \cong H_{n_0, n_1} + (i, 0).$$

Cuando los ciclos están etiquetados de la forma  $C_0 = u_0 u_1 \cdots u_{n_1-1} u_0$  y  $C_1 = v_0 v_{n_0-1} \cdots v_1 v_0$  obtenemos el mismo resultado porque la propiedad de ser libre de  $\mathcal{H}_4$  se preserva al voltear todas las flechas de la digráfica.  $\square$

Para el siguiente corolario, obsérvese que ambos ciclos tienen el mismo sentido por lo que no satisfacen las hipótesis del lema 22. Pero basta con multiplicar por  $-1$  todos los subíndices de las etiquetas de los vértices de alguno de los ciclos para *invertir* su sentido.

**Corolario 23.** *Consideremos un par de ciclos ajenos  $C_2 = w_0 w_{n_2-1} \cdots w_1 w_0$  y  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_1 u_0$  sin pares buenos de flechas entre sí en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$ . Si  $w_p \rightarrow u_q$  (respectivamente  $u_q \rightarrow w_p$ ), para algún  $(p, -q)$  en  $G_{n_2, n_0}$ , entonces existe un entero  $i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(n_2, n_0) - 1\}$  tal que  $w_r \rightarrow u_{-s}$  (resp.  $u_{-s} \rightarrow w_r$ ) para todo  $(r, s)$  en  $H_{n_2, n_0} + (i, 0)$ . En particular,  $(p, -q)$  está en  $H_{n_2, n_0} + (i, 0)$ .*

**Corolario 24.** *Consideremos un par de ciclos ajenos  $C_0$  y  $C_1$ , de longitudes  $n_0$  y  $n_1$ , respectivamente, sin pares buenos de flechas entre sí en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$ . Si  $n_0$  y  $n_1$  son primos relativos y existe una flecha de  $C_0$  a  $C_1$  (respectivamente de  $C_1$  a  $C_0$ ) entonces  $C_0 \rightarrow C_1$  (resp.  $C_1 \rightarrow C_0$ ).*

*Demostración.* Si  $n_0$  y  $n_1$  son primos relativos entonces  $H_{n_0, n_1} \cong G_{n_0, n_1}$  por el corolario 3.  $\square$

**Corolario 25.** *Consideremos un par de ciclos ajenos  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_1 u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$  sin pares buenos de flechas entre sí en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$ . Si  $u_p \rightarrow v_q$  (respectivamente  $v_q \rightarrow u_p$ ), para algún  $(p, q)$  en  $G_{n_0, n_1}$ , entonces para cada  $r$  en  $\mathbb{Z}_{n_0}$  existe  $s$  en  $\mathbb{Z}_{n_1}$  tal que  $u_r \rightarrow v_s$  (resp.  $v_s \rightarrow u_r$ ). Análogamente para cada  $s$  en  $\mathbb{Z}_{n_1}$ .*

*Demostración.* Se sigue del corolario 12.  $\square$

**Corolario 26.** *Consideremos una digráfica  $D$  que sea fuertemente conexa y libre de  $\mathcal{H}_4$  con un factor de dos ciclos. Si las longitudes de los ciclos en ese factor son primos relativos entonces  $D$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* Supongamos que  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_1 u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$  son los ciclos del factor. Ya que  $D$  es fuertemente conexa, existe al menos una flecha desde  $C_1$  a  $C_0$ , sin pérdida de generalidad supongamos que es  $v_0 \rightarrow u_0$ . El conjunto  $\mathcal{A} = \{c: u_c \rightarrow v_c\}$  no es vacío porque

$$H_{n_0, n_1} \cong G_{n_0, n_1}$$

y  $D$  es fuertemente conexa; así, éste tiene un elemento mínimo que es diferente de cero y no es negativo, llamémosle  $a$ . De aquí tenemos que las flechas  $v_{a-1} \rightarrow u_{a-1}$  y  $u_a \rightarrow v_a$  son un par bueno de flechas. Por la proposición 21,  $D$  es hamiltoniana.  $\square$

*Nota.* Consideremos un par de ciclos ajenos  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_1 u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$  en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$  y supongamos que existe la flecha  $u_p \rightarrow v_q$ . Siempre podemos renombrar los vértices de  $C_0$  y  $C_1$  de forma tal que tengamos la flecha  $u_0 \rightarrow v_0$ . Si además pedimos que entre  $C_0$  y  $C_1$  no haya pares buenos de flechas, el lema 22 implicaría que para todo  $(c, c)$  en  $H_{n_0, n_1}$ , existe la flecha  $u_c \rightarrow v_c$ . Más aún, si existe una flecha  $v_s \rightarrow u_r$  entonces existe un entero  $j$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$  tal que  $(r, s)$  está en  $H_{n_0, n_1} + (j, 0)$  por corolario 9. Por lo tanto, para todo  $(p, q)$  en  $H_{n_0, n_1} + (j, 0)$ , tenemos que  $v_q \rightarrow u_p$  por el lema 22. En particular,  $(j, 0)$  está en  $H_{n_0, n_1} + (j, 0)$ . De aquí que exista la flecha  $v_0 \rightarrow u_j$ .

**Lema 27.** Consideremos un par de trayectorias ajenas  $P_0 = u_0u_{n-1}\cdots u_1$  y  $P_1 = v_0v_1\cdots v_{n-1}$  en una digráfica  $D$ . Si  $u_a \rightarrow v_a$  para todo  $(a, a)$  en  $H_{n,n}$  y  $v_a \rightarrow u_{a+j}$  para todo  $(a+j, a)$  en  $H_{n,n} + (j, 0)$ , para algún  $j$  en  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , entonces existe un ciclo que pasa tanto por los vértices de  $P_0$  como por los vértices de  $P_1$ .

En este lema, observemos que las condiciones recaen sobre la relación entre las trayectorias pero no sobre la digráfica en sí.

*Demostración.* Consideraremos dos casos, según  $n$  y  $j$  sean o no primos relativos.

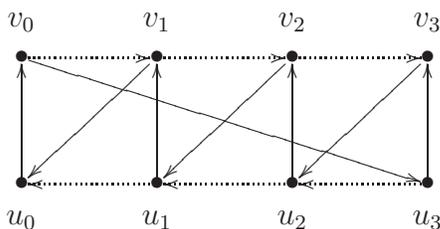


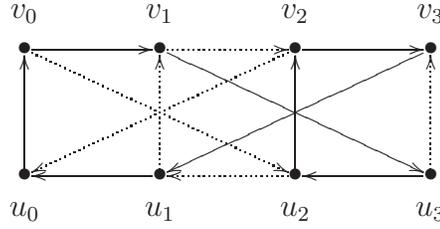
Figura 2.3:  $n = 4$ ,  $j = 3$  y  $\text{mcd}(4, 3) = 1$

Supongamos primero que  $n$  y  $j$  son primos relativos (véase la figura 2.3). Consideremos el camino

$$C = u_0v_0u_jv_ju_{2j}\cdots v_{(n-2)j}u_{(n-1)j}v_{(n-1)j}u_{nj},$$

donde tomamos los índices módulo  $n$ . De hecho,  $C$  es un camino cerrado en  $D$  ya que  $u_{nj} = u_0$ . Observemos que  $\{0, j, 2j, \dots, (n-1)j\}$  es el conjunto de los índices de los vértices en el orden en el que aparecen en  $C$ , una vez por cada una de las dos trayectorias. Ya que  $n$  y  $j$  son primos relativos, el corolario 16 implica que  $\langle j \rangle_{\mathbb{Z}_n} = \mathbb{Z}_n$  y, por lo tanto,  $C$  pasa una y sólo una vez por cada uno de los vértices tanto de  $P_0$  como de  $P_1$ . De aquí que  $C$  es un ciclo que pasa tanto por los vértices de  $P_0$  como por los vértices de  $P_1$ . Ahora supongamos que  $n$  y  $j$  no son primos relativos (véase la figura 2.4). Denotemos el máximo común divisor de  $n$  y  $j$  por  $i$ . Ciertamente

$$C = u_0C_1[v_0, v_{i-1}]C_0[u_{j+i-1}, u_j]C_1[v_j, v_{j+i-1}]C_0[u_{2j+i-1}, u_{2j}] \\ C_1[v_{2j}, v_{2j+i-1}]\cdots C_1[v_{((n/i)-1)j}, v_{((n/i)-1)j+i-1}]C_0[u_{(n/i)j+i-1}, u_{(n/i)j}],$$

Figura 2.4:  $n = 4$ ,  $j = 2$  y  $\text{mcd}(4, 2) = 2$ 

con los subíndices módulo  $n$ , es un camino cerrado ya que  $(n/i)j = \text{mcm}(j, n)$ , *i.e.*,  $u_{(n/i)j} = u_0$ . Observemos que

$$\bigcup_{k=0}^{(n/i)-1} \{kj + 0, kj + 1, \dots, kj + i - 1\}$$

es el conjunto de todos los índices en el orden en el que aparecen en  $C$ , una vez por cada una de las dos trayectorias. Por el corolario 18, recorre todos los vértices tanto de  $P_0$  como de  $P_1$  una y sólo una vez. Por lo tanto,  $C$  es un ciclo que pasa por todos los vértices de  $P_0$  y de  $P_1$ .  $\square$

**Corolario 28.** *Consideremos una digráfica  $D$  que sea fuertemente conexa, libre de  $\mathcal{H}_4$  y con un factor de dos ciclos. Si los ciclos del factor tienen la misma longitud entonces  $D$  es hamiltoniana. Más aún,  $D$  posee un ciclo hamiltoniano que no pasa por al menos una flecha de cada uno de los dos ciclos.*

*Demostración.* Sean  $C_0 = u_0 u_{n-1} \dots u_1 u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$  los ciclos del factor.

Si entre los ciclos del factor hay un par bueno de flechas, sean  $v_{p-1} \rightarrow u_{q-1}$  y  $u_p \rightarrow v_q$ , con  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{Z}_n$ , entonces la proposición 21 implica que existe un ciclo que pasa por todos los vértices de  $D$  pero que no pasa por la flecha  $u_p \rightarrow u_{p-1}$  ni por la flecha  $v_{p-1} \rightarrow v_p$ .

Así, supongamos que entre los ciclos del factor dado no hay pares buenos de flechas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que tenemos la flecha  $u_0 \rightarrow v_0$ . El lema 22 implica que para todo  $(a, a)$  en  $H_{n,n}$ , tenemos la flecha  $u_a \rightarrow v_a$ . Ya que  $D$  es fuertemente conexa, existe al menos una flecha de  $C_1$  a  $C_0$ . Como en la nota 2.3, existe un entero  $j$  en  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que para todo  $(a+j, a)$  en  $H_{n,n} + (j, 0)$ , tenemos que  $v_a \rightarrow u_{a+j}$ .

Basta con aplicar el lema 27 a las trayectorias  $C_0[u_{n-1}, u_0]$  y  $C_1[v_0, v_{n-1}]$  para obtener el ciclo que buscamos. Tal ciclo no pasa por la flecha  $u_0 \rightarrow u_{n-1}$  ni por la flecha  $v_{n-1} \rightarrow v_1$ .  $\square$

Consideremos un par de ciclos ajenos  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_0$  y  $C_1 = v_0 \cdots v_{n_1-1} v_0$  sin pares buenos de flechas entre sí en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$  y supongamos que existe una flecha  $u_p \rightarrow v_q$  con  $(p, q)$  en  $H_{n_0, n_1} + (i, 0)$ , para algún entero  $i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$ . El lema 22 implica que para todo  $(p', q')$  en  $H_{n_0, n_1} + (i, 0)$ , tenemos la flecha  $v_{p'}^0 \rightarrow v_{q'}^1$ . El corolario 11 implica que todos los pares de la forma  $(p + \text{mcd}(n_0, n_1)j, q + \text{mcd}(n_0, n_1)k)$ , para cualesquiera enteros  $j$  y  $k$ , están en  $H_{n_0, n_1} + (i, 0)$ . Si denotamos  $p + \text{mcd}(n_0, n_1)j$  por  $p'$  y  $q + \text{mcd}(n_0, n_1)k$  por  $q'$ , se sigue que  $u_{p'} \rightarrow v_{q'}$ .

**Lema 29.** *Consideremos un par de trayectorias ajenas  $P_0 = u_0 u_{n_0-1} \cdots u_1$  y  $P_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1}$  en una digráfica  $D$ . Si  $u_a \rightarrow v_a$  para todo  $(a, a)$  en  $H_{n_0, n_1}$  y  $v_a \rightarrow u_{a+j}$  para todo  $(a+j, a)$  en  $H_{n_0, n_1} + (j, 0)$ , para algún  $j$  en  $\{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ , entonces existe un ciclo que tiene a  $V(P_0) \cup V(P_1)$  como conjunto de vértices.*

*Demostración.* Si  $n_0$  y  $n_1$  son primos relativos entonces  $D$  es hamiltoniana por el corolario 26. Si  $n_0$  y  $n_1$  son iguales entonces  $D$  es hamiltoniana por el lema 27. De aquí que podamos suponer que  $n_0$  y  $n_1$  no son primos relativos ni iguales. Más aún, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $n_0$  es menor que  $n_1$ . La proposición 13 nos asegura las siguientes contenciones:

$$\{u_a \rightarrow v_a : (a, a) \in H_{n_0, n_0}\} \subseteq \{u_a \rightarrow v_a : (a, a) \in H_{n_1, n_1}\}$$

y

$$\{v_a \rightarrow u_{a+j} : (a+j, a) \in H_{n_0, n_0} + (j, 0)\} \subseteq \{v_a \rightarrow u_{a+j} : (a+j, a) \in H_{n_0, n_1} + (j, 0)\}.$$

Del lema 27 se sigue que existe un ciclo que recorre tanto los vértices de  $P_0[u_{n_0-1}, u_0]$  como de  $P_1[v_0, v_{n_0-1}]$ , llamémosle  $C'$  (véase la figura 2.5). Notemos que tal ciclo no pasa por la flecha  $u_0 \rightarrow v_{n_0-1}$ . Esto y el corolario 12 implican que existe un número entero  $p$  en  $\{0, \dots, n_0 - 1\}$  tal que  $v_{n_0-1} \rightarrow u_p$  es una flecha de  $C'$ , *i.e.*,

$$(p, n_0 - 1) \in H_{n_0, n_1} + (j, 0).$$

De aquí que  $p - j \equiv n_0 - 1 \pmod{\text{mcd}(n_0, n_1)}$ . Ya que  $\text{mcd}(n_0, n_1)$  divide  $n_1 - n_0$ , tenemos que  $0 \equiv n_1 - n_0 \pmod{\text{mcd}(n_0, n_1)}$ . Así,  $p - j \equiv n_1 - 1 \pmod{\text{mcd}(n_0, n_1)}$

(nótese que  $n_1 - 1 = (n_0 - 1) + (n_1 - n_0)$ ) y el lema 7 implican que  $(p - j, n_1 - 1)$  está en  $H_{n_0, n_1}$ , *i.e.*,

$$(p, n_1 - 1) \in H_{n_0, n_1} + (j, 0).$$

Por lo tanto,  $v_{n_1-1} \rightarrow u_p$ . De aquí que el ciclo

$$C = C'[u_p, v_{n_0-1}]P_1[v_{n_0}, v_{n_1-1}]u_p$$

tiene a  $V(P_0) \cup V(P_1)$  como conjunto de vértices (véase la figura 2.6).  $\square$

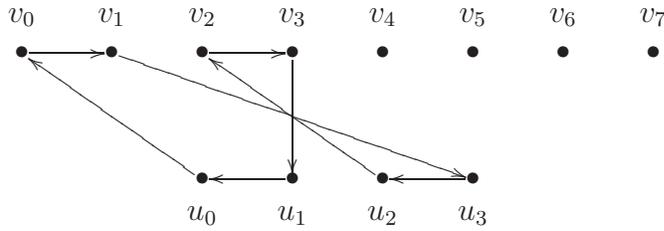


Figura 2.5: Un ciclo que recorre los vértices de  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  en  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$

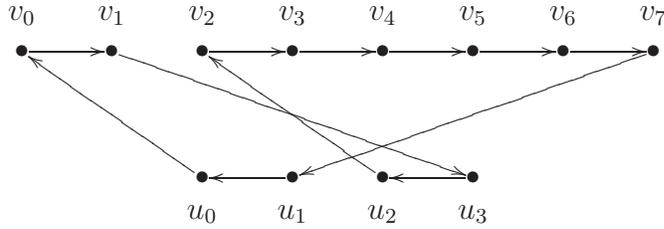


Figura 2.6: Un ciclo hamiltoniano en  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$

**Corolario 30.** Consideremos dos ciclos  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \dots u_0$  y  $C_1 = v_0 \dots v_{n_1-1} v_0$ , ajenos en vértices, en una digráfica dada  $D$ . Si para todo  $(a, a)$  en  $H_{n_0, n_1}$ , existe la flecha  $u_a \rightarrow v_a$  y existe un número entero  $j$  en  $\{0, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$  tal que para todo  $(a+j, a)$  en  $H_{n_0, n_1} + (j, 0)$ , existe la flecha  $v_a \rightarrow u_{a+j}$ , entonces existe un ciclo cuyo conjunto de vértices es  $V(C_0) \cup V(C_1)$ .

**Corolario 31.** Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa, libre de  $\mathcal{H}_4$  y con un factor de dos ciclos entonces  $D$  es hamiltoniana.

*Demostración.* Sean  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \dots u_1 u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \dots v_{n_1-1} v_0$  los dos ciclos del factor, de longitudes  $n_0$  y  $n_1$ , respectivamente. Por la proposición 21

podemos suponer que entre ellos no hay pares buenos de flechas. Como en la nota 2.3, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para todo  $(a, a)$  en  $H_{n_0, n_1}$ , existe la flecha  $u_a \rightarrow v_a$  y que existe un número entero  $j$  en  $\{0, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$  tal que para todo  $(a + j, a)$  en  $H_{n_0, n_1} + (j, 0)$ , existe la flecha  $v_a \rightarrow u_{a+j}$ .

Por el corolario 30, se sigue que  $D$  posee un ciclo hamiltoniano.  $\square$

**Proposición 32.** *Consideremos dos ciclos ajenos  $C_2 = w_0 w_{n_2-1} \dots w_1 w_0$  y  $C_0 = u_0 u_{n_0-1} \dots u_1 u_0$ , sin pares buenos de flechas entre ellos, en una digráfica  $D$  libre de  $\mathcal{H}_4$ . Supongamos que  $w_0 \rightarrow u_{2i-1}$  para todo entero  $i$ , donde tomamos  $2i-1$  módulo  $n_0$ . Si la longitud de  $C_2$  o de  $C_0$  es impar entonces para todo vértice  $w_j$  en  $C_2$  y para todo vértice  $u_k$  en  $C_0$  tenemos que  $w_j \rightarrow u_k$ . En otro caso, para todo vértice  $w_j$  y para todo vértice  $u_k$ , si  $j-k$  es impar entonces  $w_j \rightarrow u_k$ .*

*Demostración.* Tendríamos  $w_{-1} \leftarrow w_0 \rightarrow u_{2i-1} \leftarrow u_{2i}$ , para todo entero  $i$  con  $2i-1$  y  $2i$  módulo  $n_0$ . De aquí que  $w_{-1} \rightarrow u_{2i}$  para todo entero  $i$  con  $2i$  módulo  $n_0$ . Si  $w_j \rightarrow u_{2i}$  (respectivamente  $w_j \rightarrow u_{2i-1}$ ), para algún  $j$  en  $\mathbb{Z}_{n_2}$  y para todo entero  $i$ , con  $2i$  y  $2i-1$  módulo  $n_0$ , tendríamos  $w_{j-1} \leftarrow w_j \rightarrow u_{2i} \leftarrow u_{2i+1}$  (resp.  $w_{j-1} \leftarrow w_j \rightarrow u_{2i-1} \leftarrow u_{2i}$ ). Por lo tanto,  $w_{j-1} \rightarrow u_{2i+1}$  (resp.  $w_{j-1} \rightarrow u_{2i}$ ), para todo entero  $i$  con  $2i+1$  y  $2i$  módulo  $n_0$ . De aquí que si  $C_0$  o  $C_2$  tuviesen longitud impar, lo anterior implica que  $w_j \rightarrow u_i$ , para todo  $(j, i)$  en  $H_{n_2, n_0}$ . En otro caso, por la hipótesis, tendríamos justo que para todo vértice  $w_j$  y para todo vértice  $u_k$ , si  $j-k$  es impar entonces  $w_j \rightarrow u_k$ .  $\square$

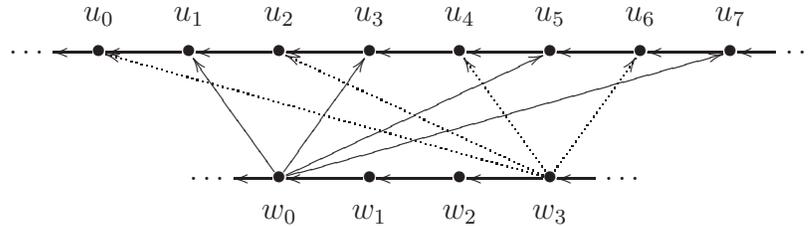


Figura 2.7: El primer paso en la prueba de la proposición 32

**Teorema 33.** *Si  $D$  es una digráfica libre de  $\mathcal{H}_4$ , fuertemente conexas y  $D$  posee un factor de ciclos entonces es hamiltoniana.*

*Demostración.* Tomemos un factor de ciclos  $\mathcal{F}$  de cardinalidad mínima. Si el factor tiene un solo elemento entonces la digráfica es hamiltoniana. Supongamos que el factor tiene al menos dos ciclos. Si entre dos ciclos de  $\mathcal{F}$  hay

un par bueno de flechas entonces, por la proposición 21, podemos mezclar ambos ciclos en un nuevo ciclo, lo cual daría lugar a un nuevo factor de ciclos de cardinalidad menor que la de  $\mathcal{F}$ , lo que es una contradicción. Así, supongamos que entre ningún par de ciclos de  $\mathcal{F}$  hay pares buenos de flechas. Más aún, si entre dos elementos de  $\mathcal{F}$  hay flechas en ambos sentidos entonces, por el corolario 30, llegaríamos a la misma contradicción. Por lo tanto, todas las flechas entre cualesquiera dos ciclos del factor van en la misma dirección. El lema 22 y el corolario 23 caracterizan el comportamiento de las flechas entre pares de ciclos del factor. Ya que  $D$  es fuertemente conexa, existe una sucesión de longitud mínima de elementos del factor de ciclos,  $C_0, C_1, \dots, C_{l-1}$ , tal que todas las flechas que existen entre los vértices de  $C_i$  y los de  $C_{i+1}$  van desde  $C_i$  hacia  $C_{i+1}$ , con  $i$  módulo  $l$ . Primero probaremos que dicha sucesión es de longitud tres (véase la figura 2.8).

Supongamos que  $l$  es mayor o igual que cuatro y consideremos

$$C_0 = v_0^0 v_{n_0-1}^0 \cdots v_1^0 v_0^0,$$

$$C_1 = v_0^1 v_1^1 \cdots v_{n_1-1}^1 v_{n_1}^1 \text{ y}$$

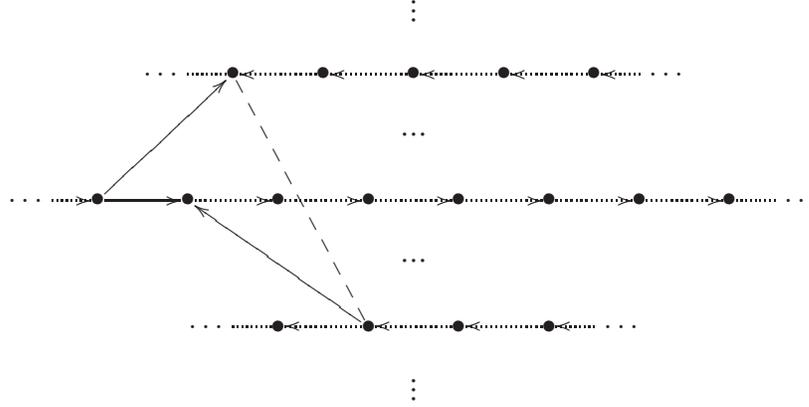
$$C_2 = v_0^2 v_{n_2-1}^2 \cdots v_1^2 v_0^2$$

los tres primeros ciclos en la sucesión. Sabemos que para cualquier entero  $i$  en  $\{0, 1\}$ , existe un entero  $j_i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(n_i, n_{i+1}) - 1\}$  tal que si  $(p, q)$  está en  $H_{n_i, n_{i+1}} + (j_i, 0)$  entonces existe la flecha  $v_p^i \rightarrow v_q^{i+1}$ . Más aún, por el corolario 12 sabemos que para cualquier entero  $p$  módulo  $n_i$  existe un entero  $q$  módulo  $n_{i+1}$  tal que  $(p, q)$  está en  $H_{n_i, n_{i+1}} + (j_i, 0)$ . De aquí que existan un entero  $p$  módulo  $n_1$  y un entero  $q$  módulo  $n_2$  tales que  $(0, p)$  está en  $H_{n_0, n_1} + (j_0, 0)$  y  $(p-1, q)$  está en  $H_{n_1, n_2} + (j_1, 0)$ , *i.e.*,  $v_0^0 \rightarrow v_p^1$  y  $v_{p-1}^1 \rightarrow v_q^2$ . Así, de

$$v_0^0 \rightarrow v_p^1 \leftarrow v_{p-1}^1 \rightarrow v_q^2$$

se sigue que  $v_0^0$  y  $v_q^2$  son adyacentes. Si  $v_0^0 \leftarrow v_q^2$  entonces los ciclos  $C_0, C_1$  y  $C_2$  forman una sucesión de longitud tres, lo que es una contradicción. En el otro caso, habríamos reducido la longitud de la sucesión, lo que también es una contradicción. Por lo tanto, existe una sucesión  $C_0, C_1, C_2, C_0$ .

Sean  $C_0 = v_0^0 v_{n_0-1}^0 \cdots v_0^0$ ,  $C_1 = v_0^1 v_1^1 \cdots v_{n_1}^1$  y  $C_2 = v_0^2 v_{n_2-1}^2 \cdots v_0^2$  los ciclos de la sucesión de ciclos obtenida. Sin pérdida de generalidad podemos renombrar los vértices de forma tal que tengamos las flechas  $v_0^0 \rightarrow v_0^1 \rightarrow v_0^2$ . Por el lema 22, tendríamos las flechas  $v_i^0 \rightarrow v_i^1 \rightarrow v_i^2$  para todo entero  $i$  módulo  $n_j$

Figura 2.8: Sucesión de ciclos en  $\mathcal{F}$ 

en  $v_i^j$ . De aquí que tendríamos que

$$v_i^0 \rightarrow v_i^1 \leftarrow v_{i-1}^1 \rightarrow v_{i-1}^2$$

para todo entero  $i$  módulo  $n_j$  en  $v_i^j$ ; por lo tanto,  $v_{i-1}^2 \rightarrow v_i^0$ . Por el corolario 23, para cada entero  $i$  existe un entero  $c_i$  en  $\{0, 1, \dots, \text{mcd}(n_2, n_0) - 1\}$  tal que para todo  $(r, s)$  en  $H_{n_2, n_0} + (c_i, 0)$ , se tiene que  $v_r^2 \rightarrow v_{-s}^0$ . En particular,

$$(i-1, -i) \in H_{n_2, n_0} + (c_i, 0).$$

Más aún, tenemos que

$$(i-1, -i) + (1-i, 1-i) = (0, 1-2i) \in H_{n_2, n_0} + (c_i, 0),$$

esto es,  $v_0^2 \rightarrow v_{2i-1}^0$  para todo entero  $i$  con  $2i-1$  módulo  $n_0$ . Por la proposición 32, se sigue que si  $C_2$  o  $C_0$  tiene longitud impar entonces para todo vértice  $v_j^2$  en  $C_2$  y para todo vértice  $v_k^0$  en  $C_0$ , tenemos que  $v_j^2 \rightarrow v_k^0$ . En otro caso, para todo vértice  $v_j^2$  y para todo vértice  $v_k^0$ , si  $j-k$  es impar entonces  $v_j^2 \rightarrow v_k^0$ . Si la longitud de  $C_0$  es par entonces  $n_0-1$  es impar; de aquí que  $v_0^2 \rightarrow v_{n_0-1}^0$ . En otro caso, la longitud de  $C_0$  es impar; por lo tanto,  $v_0^2 \rightarrow v_{n_0-1}^0$ .

De lo anterior, se sigue que

$$C = v_0^0 C_1 [v_0^1, v_{n_1-1}^1] C_2 [v_{n_2-1}^2, v_0^2] C_0 [v_{n_0-1}^0, v_0^0]$$

es un ciclo que recorre todos los vértices de  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ , con lo que podríamos dar un factor de ciclos con menos elementos que  $\mathcal{F}$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D$  posee un ciclo hamiltoniano.  $\square$

Ya que toda digráfica bipartita semicompleta es libre de  $\mathcal{H}_4$ , como corolario tenemos el teorema de Gutin, Häggkvist y Manoussakis.

**Corolario 34** (Gutin [25], Häggkvist and Manoussakis [29]). *Una digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.*

Si  $D$  es una digráfica bipartita semicompleta y posee un casi-factor entonces  $D$  posee una trayectoria hamiltoniana. Esto también es cierto para las digráficas libres de  $\mathcal{H}_4$ .

**Lema 35.** *Consideremos una digráfica  $D$  conexa y libre de  $\mathcal{H}_4$ . Dado un factor de ciclos  $\mathcal{F}$  de  $D$ , la digráfica  $D_{\mathcal{F}}$  tiene como conjunto de vértices a  $\mathcal{F}$  y para dos ciclos distintos  $C_1$  y  $C_2$  en  $\mathcal{F}$ , existe la flecha de  $C_1$  hacia  $C_2$  en  $D_{\mathcal{F}}$  si y sólo si existe al menos alguna flecha de  $C_1$  hacia  $C_2$  en  $D$ . Si  $\mathcal{F}$  es un factor de ciclos mínimo entonces  $D_{\mathcal{F}}$  es un torneo transitivo.*

*Demostración.* La minimalidad de  $\mathcal{F}$  y el corolario 30 implican que entre cada par de ciclos todas las flechas van en la misma dirección. El lema 22 describe el comportamiento de las flechas entre cada par de ciclos del factor. Si el factor de ciclos tiene exactamente dos elementos, ya que  $D$  no puede ser fuertemente conexa, se sigue que  $D_{\mathcal{F}}$  es un torneo transitivo con dos vértices. Así, podemos suponer que el factor posee al menos tres ciclos.

Primero probaremos que si  $C_1$  y  $C_2$  son dos ciclos en  $\mathcal{F}$  y existe un vértice  $v$  en  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$  tal que existe una flecha de algún vértice de  $C_1$ , digamos  $x$ , hacia  $v$  y existe una flecha de algún vértice de  $C_2$ , digamos  $y$ , hacia  $v$  entonces  $C_1$  y  $C_2$  son adyacentes. Sea  $x^+$  el sucesor de  $x$  en  $C_1$ ; así, tenemos que  $y \rightarrow v \leftarrow x \rightarrow x^+$ . Por lo tanto,  $C_1$  y  $C_2$  son adyacentes en  $D_{\mathcal{F}}$ .

Ahora probemos que si  $C_1$  y  $C_2$  son dos ciclos en  $\mathcal{F}$  tales que hay al menos una flecha de  $C_1$  a  $C_2$  y existe un vértice  $v$  en  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$  tal que hay al menos una flecha desde  $C_2$  hacia  $v$  entonces  $C_1$  y  $v$  son adyacentes. Supongamos que  $y$  es un vértice de  $C_2$  tal que existe la flecha  $y \rightarrow v$  y sea  $y^+$  el sucesor de  $y$  en  $C_2$ . El lema 22 implica que existe un vértice  $x$  en  $C_1$  tal que  $x \rightarrow y^+$ . Así, tendríamos que  $x \rightarrow y^+ \leftarrow y \rightarrow v$ . Por lo tanto,  $x$  y  $v$  son adyacentes.

De lo anterior se sigue que si tenemos  $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$ ,  $C_1 \rightarrow C_2 \leftarrow C_3$  o  $C_1 \leftarrow C_2 \rightarrow C_3$  en  $D_{\mathcal{F}}$  entonces  $C_1$  y  $C_3$  son adyacentes (en el último caso se

sigue ya que la digráfica conversada<sup>2</sup> de una digráfica libre de  $\mathcal{H}_4$  es también libre de  $\mathcal{H}_4$ ). Es decir,  $D_{\mathcal{F}}$  es una digráfica que es localmente semicompleta y cuasitransitiva. Ya que  $D_{\mathcal{F}}$  es conexa (porque  $D$  lo era) y el factor de ciclos es mínimo, el teorema 33 implica que  $D_{\mathcal{F}}$  es un torneo transitivo.  $\square$

**Corolario 36.** *Consideremos una digráfica  $D$  conexa y libre de  $\mathcal{H}_4$ . Si  $\mathcal{F}$  es un casi-factor mínimo de  $D$  entonces cada ciclo en  $\mathcal{F}$  es adyacente a la trayectoria en  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $C_1, C_2, \dots, C_p$  es una sucesión de ciclos en el casi-factor tal que  $C_i$  y  $C_{i+1}$  son adyacentes, para cada  $i$  en  $\{1, \dots, p-1\}$  y que  $C_p$  y un vértice de la trayectoria del casi-factor son adyacentes, digamos  $v$ . El lema 35 implica que  $C_1$  y  $C_p$  son adyacentes, pues  $\{C_1, \dots, C_p\}$  es un factor de ciclos mínimo en  $D(V(C_1) \cup \dots \cup V(C_p))$ . Si  $C_1$  es adyacente hacia  $C_p$  y  $C_p$  es adyacente hacia  $v$ , se sigue que  $C_1$  y  $v$  son adyacentes como en la prueba del lema 35. Si  $C_1$  es adyacente desde  $C_p$  y  $C_p$  es adyacente desde  $v$ , se sigue que  $C_1$  y  $v$  también son adyacentes. Finalmente, supongamos que existe una flecha de  $v$  a  $C_p$ , sea  $v \rightarrow y$  tal flecha con  $y$  en  $C_p$ , y que  $C_1$  es adyacente hacia  $C_p$ . Por el lema 22, existe un vértice  $x$  en  $C_1$  tal que  $x \rightarrow y$ . Sea  $x^+$  el sucesor de  $x$  en  $C_1$ . Así tenemos que  $v \rightarrow y \leftarrow x \rightarrow x^+$ , por lo que  $C_1$  y  $v$  son adyacentes. Ya que la digráfica conversada de una digráfica libre de  $\mathcal{H}_4$  también es libre de  $\mathcal{H}_4$ , en el caso cuando  $C_p$  es adyacente tanto hacia  $v$  como hacia  $C_1$  también se sigue que  $C_1$  y  $v$  son adyacentes.  $\square$

**Teorema 37.** *Consideremos  $D$  una digráfica conexa y libre de  $\mathcal{H}_4$ . Si  $D$  posee un casi-factor entonces  $D$  posee una trayectoria hamiltoniana.*

*Demostración.* Tomemos un casi-factor de ciclos mínimo. Sea  $P = x_0 \dots x_n$  la trayectoria en el casi-factor de ciclos y tomemos un ciclo en el casi-factor, sea  $C$ . Por el corolario 36,  $C$  y  $P$ , son adyacentes. Primero supongamos que existe una flecha de  $C$  a  $P$ , sea  $i$  el menor entero tal que hay una flecha de un vértice  $y$  en  $C$  hacia  $x_i$ , es decir,  $y \rightarrow x_i$ . Así, tenemos que  $x_{i-1} \rightarrow x_i \leftarrow y \rightarrow y^+$  donde  $y^+$  es el sucesor de  $y$  en  $C$ . Por lo tanto,  $x_{i-1}$  y  $y^+$  son adyacentes. Si  $x_{i-1} \rightarrow y^+$  entonces obtendríamos un buen par de flechas, con lo que habremos reducido el casi-factor de ciclos, lo que es una contradicción. Así,  $y^+ \rightarrow x_{i-1}$ . Por lo tanto  $i = 0$ , por lo que existe una flecha de  $C$  a  $x_0$ . De aquí que

---

<sup>2</sup>Dada una digráfica  $D$ , su digráfica *conversa* se obtiene al invertir el sentido de todas las flechas de  $D$ .

---

podemos mezclar  $C$  y  $P$  en una trayectoria, con lo que habremos reducido el casi-factor.

El caso restante se sigue porque la digráfica conversa de una digráfica libre de  $\mathcal{H}_4$  también es libre de  $\mathcal{H}_4$ .  $\square$



# Capítulo 3

## Sobre las digráficas multipartitas localmente semicompletas

### 3.1 Más allá de las generalizaciones de torneos

En el artículo «Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments» de Jørgen Bang-Jensen [2], se puede leer lo siguiente:

El hecho de que uno pueda decir tanto sobre problemas muy difíciles —para digráficas en general— cuando restringimos nuestra atención a las digráficas semicompletas sugiere que uno debería tratar de descubrir que tanto se pueden extender los resultados ya conocidos para torneos<sup>1</sup>.

Luego, en el artículo «Arc-local tournament digraphs: a generalization of tournaments and bipartite tournaments» también de Bang-Jensen [4], leemos:

En [2], el autor introdujo los torneos locales como una generalización de los torneos. Éstas son las digráficas en las que todo conjunto de sucesores, respectivamente de predecesores, de un vértice inducen un torneo. En [1, 3, 11] mostramos que muchos de los resultados para torneos pueden ser extendido a esta clase

---

<sup>1</sup>«The fact that one can say so much about such –for general digraphs– very difficult problems when we restricted our attention to semicomplete digraphs suggest that one should try to discover how far one can extend the known results for tournaments».

más grande de digráficas [...]. En este artículo extendemos la idea de sólo pedir una estructura especial localmente, para incluir las digráficas bipartitas. A saber, estudiamos las digráficas con la propiedad de que si  $x, y$  son vértices adyacentes entonces todo in-vecino (ex-vecino) de  $x$  es adyacente a todo in-vecino (ex-vecino) de  $y$ . Llamamos a estas gráficas *localmente semicompletas en flechas*. Mostramos que los principales resultados de [24, 25, 26, 29] sobre trayectorias y ciclos hamiltonianos en torneos bipartitos así como los algoritmos polinomiales en [31] pueden ser extendido a las digráficas localmente semicompletas<sup>2</sup>.

Más adelante, en el artículo «Quasi-transitive digraphs» de Bang-Jensen y Jing Huang [10], señalan que:

Es bien conocido que los torneos tienen una estructura muy rica. Podría parecer que dicha riqueza se debe a la forma en cómo están contruidos, a saber, no pares de vértices no adyacentes en los torneos. Sin embargo, recientemente, hemos mostrado en una serie de artículos que hay clases de digráficas mucho más grandes que los torneos y que contienen los torneos como una subclase, para las cuales mucha de esta estructura se preserva. Al estudiar estas gráficas, hemos encontrado que hay dos propiedades de los torneos que resultan ser la fuerza motriz en las pruebas de muchos resultados sobre torneos.

La primera es que para cualquier vértice  $x$ , tanto el conjunto de in-vecinos como el conjunto de ex-vecinos inducen un torneo. Las digráficas con esta propiedad son llamadas *torneos locales*<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>«In [2] the author introduced local tournaments as a generalization of tournaments. These are the digraphs in which every set of successors, respectively predecessors of a vertex induces a tournament. In [1, 3, 11] we showed that many results for tournaments can be extended to this much larger class of digraphs [...]. In this paper we extend the idea, of only requiring a special local structure, to include bipartite digraphs. Namely, we study the digraphs with the property that if  $x, y$  are adjacent vertices, then every in-neighbour (out-neighbour) of  $x$  is adjacent to every in-neighbour (out-neighbour) of  $y$ . We call these graphs *arc-local tournament digraphs* or shorter *arc-local tournaments*. We show that the main results of [24, 25, 26, 29] on hamiltonian paths and cycles in bipartite tournaments as well as the polynomial algorithms in [31] can be extended arc-local tournaments. Furthermore our proofs are very simple in the case of bipartite digraphs».

<sup>3</sup>«It is well known that tournaments have a very rich structure. It may appear that

Me parece que en algún lugar, del cual no me acuerdo, se señala que la clase de los torneos es la intersección de la clase de los torneos locales y de la clase de las digráficas cuasitransitivas. En general, la intersección de la clase de las digráficas localmente semicompletas y la clase de las digráficas cuasitransitiva es la clase de las digráficas semicompletas. Ciertamente, si tenemos una digráfica conexa  $D$  que sea tanto localmente semicompleta como cuasitransitiva con al menos tres vértices  $u$ ,  $v$  y  $w$  tales que  $u$  y  $v$  sean adyacentes y  $v$  y  $w$  sean adyacentes, tendremos cuatro posibilidades:  $u \rightarrow v \rightarrow w$ ,  $u \rightarrow v \leftarrow w$ ,  $u \leftarrow v \rightarrow w$  y  $u \leftarrow v \leftarrow w$ . En el primer y el último casos, como  $D$  es cuasitransitiva se sigue que  $u$  y  $w$  son adyacentes. En los dos casos restantes, como  $D$  es un torneo local se sigue que  $u$  y  $w$  son adyacentes. De aquí que la digráfica resultante es semicompleta.

Esto nos motivó a dar dos nociones equivalentes a las anteriores en [21], que ahora presentamos refinadas. Pero primero, necesitamos de una definición más: dada una semitrayectoria  $P$  en una digráfica  $D$ , cualquier flecha de  $D$  entre dos vértices no consecutivos de  $P$  es una *diagonal* de  $P$ . Además, recordemos que una semitrayectoria es antidirigida si no posee subtrayectorias dirigidas de longitud mayor que uno. Así, tenemos que:

**Teorema 38** (Goldfeder [21]). *Una digráfica es localmente semicompleta si y sólo si toda semitrayectoria no dirigida tiene una diagonal.*

**Teorema 39** (Goldfeder [21]). *Una digráfica es cuasitransitiva si y sólo si toda semitrayectoria no antidirigida tiene una diagonal.*

Claramente, tenemos como corolario que:

**Corolario 40.** *Una digráfica es semicompleta (es decir, localmente semicompleta y cuasitransitiva) si y sólo si toda semitrayectoria no dirigida o no antidirigida tiene una diagonal.*

---

this structure is due to their special structure, namely there are no nonadjacent vertices in tournaments. However, recently, we have shown in a series of papers that there are classes of digraphs much larger than tournaments and containing the tournaments as a subclass, for which much of this structure is preserved. By studying these graphs, we found that there are two properties of tournaments that turn out to be the driving force in the proofs of many tournaments results.

»The first is that for any vertex  $x$  the set of in-neighbours as well as the set of out-neighbors induce a tournaments. The digraphs with this property are called *local tournaments*».

¡Las únicas semitrayectorias que simultáneamente son dirigidas y antidirigidas son las flechas!, es decir, toda semitrayectoria que no es una flecha o no es dirigida o no es antidirigida. Así, llegaremos a que cualquier par de vértices debe ser adyacente.

En [4, 5], Bang-Jensen tuvo la intención (o, al menos, así lo hemos interpretado) de generalizar lo que hizo al definir las digráficas localmente semicompletas en el contexto de las digráficas multipartitas<sup>4</sup>. Sin embargo, posteriormente en [5] señaló sobre esas generalizaciones que «uno no puede obtener una nueva generalización común interesante de las digráficas semicompletas y semicompletas bipartitas, al simplemente reemplazar la definición de ser localmente semicompleta por la de ser localmente semicompleta en flechas»<sup>5</sup>.

## 3.2 Digráficas multipartitas semicompletas

Una digráfica  $D$  se dice que es *multipartita* o *k-partita* si y sólo si existe una partición de  $V(G)$  en  $k$  conjuntos, con  $k \geq 2$ , y a cuyos elementos se los llama las *partes* de la partición, tal que toda flecha de  $D$  tiene extremos en partes distintas. Cuando  $k = 2$ , se dice que  $D$  es *bipartita*.

En las digráficas multipartitas podemos definir conceptos análogos a los torneos y a las digráficas semicompletas que los generalizan. Una digráfica  $D$  es un *torneo multipartito* si y sólo si  $D$  es multipartita y entre cualesquiera dos vértices en partes distintas hay una y sólo una flecha. De forma similar, una digráfica  $D$  es una *digráfica multipartita semicompleta* si y sólo si es multipartita y cualquier par de vértices en partes distintas es adyacente. En ambos conceptos podemos substituir el adjetivo «multipartito, -a» por « $k$ -partito, -a» si queremos señalar el número de elementos de la partición.

En particular, todo torneo de orden  $n$  puede verse como un torneo  $n$ -partito y, análogamente, toda digráfica semicompleta de orden  $n$  se puede ver como una digráfica  $n$ -partita semicompleta. En ambos casos, cada parte es un conjunto unitario.

---

<sup>4</sup>Recordemos que señaló que «En este artículo extendemos la idea de sólo pedir una estructura especial localmente, para incluir las digráficas bipartitas».

<sup>5</sup>«[...] one cannot obtain an interesting new common generalization of semicomplete and semicomplete bipartite digraphs, imply by replacing the definitions of locally semicomplete digraphs and quasi-transitive digraphs, respectively by arc-locally digraphs, respectively 3-quasi-transitive digraphs»

Tanto los torneos multipartitos como las digráficas multipartitas semicompletas constituyen generalizaciones de torneos que se estudian desde hace bastante tiempo, muchísimo más que el del concepto de generalización de un torneo.

¿Cuál podría ser la relación entre los torneos multipartitos y las digráficas multipartitas semicompletas con las equivalencias que dimos arriba? Las equivalencias se extienden naturalmente, a saber:

**Lema 41.** *Una digráfica multipartita conexa  $D$  es multipartita semicompleta si y sólo toda semitrayectoria sin diagonales entre dos vértices en partes distintas de  $D$  es dirigida y antidirigida.*

El lema anterior se sigue ya que las únicas semitrayectorias que son simultáneamente dirigidas y antidirigidas son las flechas. Así, todo par de vértices en partes distintas de  $D$  debe necesariamente ser adyacente.

### 3.3 El eslabón perdido

En todo lo anterior es obvio que falta algo pero cuya definición ya es inmediata.

**Definición 42.** Diremos que una digráfica  $D$  es *multipartita localmente semicompleta* si y sólo si  $D$  es multipartita y toda semitrayectoria sin diagonales entre cualquier par de vértices en partes distintas de  $D$  es dirigida.

Esta definición implica que siempre que exista una semitrayectoria entre dos vértices distintos en una digráfica multipartita localmente semicompleta, en la subdigráfica inducida por los vértices de esa semitrayectoria (véase la figura 3.1) hay una trayectoria entre esos dos vértices (véanse las figuras 3.2 y 3.3). Por lo tanto, la propiedad de ser multipartita localmente semicompleta la heredan todas las subdigráficas inducidas. Esto no implica que las digráficas sean unilateralmente conexas<sup>6</sup>, pues los vértices deben estar en partes distintas. También las digráficas conversas<sup>7</sup> preservan la propiedad de ser multipartita localmente semicompleta.

<sup>6</sup>Una digráfica es *unilateralmente conexa* si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  de la digráfica, existe una  $(u, v)$ -trayectoria o una  $(v, u)$ -trayectoria.

<sup>7</sup>Dada una digráfica  $D$ , su digráfica *conversa* se obtiene al invertir el sentido de todas las flechas de  $D$ .

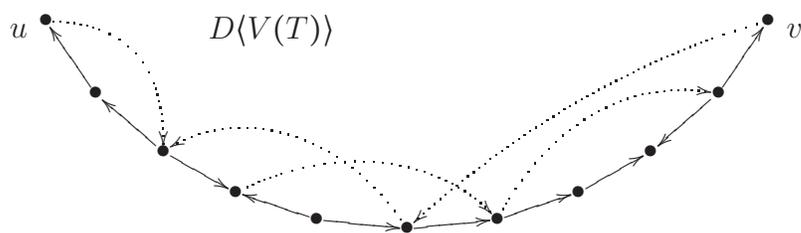


Figura 3.1: Subdigráfica  $D\langle V(T) \rangle$  inducida por una semitrayectoria  $T$  entre los vértices  $u$  y  $v$

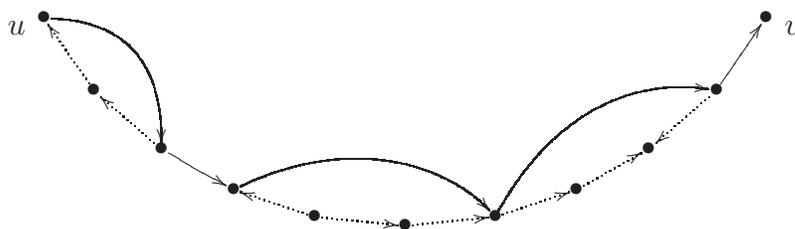


Figura 3.2: Una  $(u, v)$ -trayectoria en la subdigráfica  $D\langle V(T) \rangle$

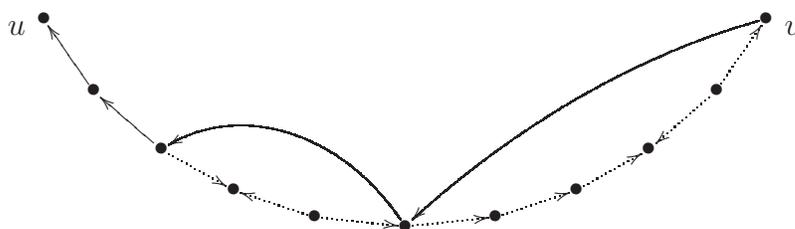


Figura 3.3: Una  $(v, u)$ -trayectoria en la subdigráfica  $D\langle V(T) \rangle$

En otras palabras, una digráfica  $D$  es multipartita localmente semicompleta si cualquier semitrayectoria «corta» entre vértices en partes distintas es dirigida.

Observemos que la clase de las digráficas localmente multipartitas semicompletas contiene tanto a la clase de las digráficas multipartitas semicompletas como a la de las digráficas localmente semicompletas.

### 3.4 Fines

Recordemos que los torneos son la clase de digráficas que mejor conocemos. De ahí que Bang-Jensen se haya preguntado específicamente *qué tanto* podíamos extender lo que sabemos a clases más generales de digráficas.

En particular, los resultados más nítidos que poseemos de tal clase de digráficas son sobre trayectorias y ciclos hamiltonianos, de Rédei en 1934 y de Camion en 1959, respectivamente.

**Teorema 43** (Rédei [33]). *Todo torneo posee una trayectoria hamiltoniana.*

**Teorema 44** (Camion [13]). *Un torneo es hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexo.*

Por esto, el estudio de las trayectorias y los ciclos hamiltonianos suele ser la primera aproximación cuando se trabaja en clases de digráficas *cercanas* a los torneos.

De forma independiente, Gutin en 1982 y Häggkvist y Manoussakis en 1989 caracterizaron la existencia de trayectorias hamiltonianas en los torneos bipartitos —y, por ende, en las digráficas bipartitas semicompletas—. Más aún, Gutin en 1984 y Häggkvist y Manoussakis en 1989 caracterizaron la existencia de ciclos hamiltonianos en los torneos bipartitos.

**Teorema 45** (Gutin [24, 26], Häggkvist and Manoussakis [29]). *Una digráfica bipartita semicompleta  $D$  posee una trayectoria hamiltoniana si y sólo si  $D$  posee un casi-factor de ciclos —esto es, una colección de subdigráficas ajenas en vértices que cubren todos los vértices de  $D$  y tal que una de tales subdigráficas es una trayectoria y el resto son ciclos—.*

**Teorema 46** (Gutin [25], Häggkvist and Manoussakis [29]). *Una digráfica bipartita semicompleta  $D$  posee un ciclo hamiltoniano si y sólo si  $D$  es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos —esto es, una colección de ciclos ajenos en vértices que cubren todos los vértices de  $D$ —.*

En estos dos casos, aparecen dos condiciones nuevas, los casi-factores y los factores de ciclos.

Bang-Jensen introdujo las digráficas localmente semicompletas en [2], su primera propuesta de una clase de digráficas que son una generalización de los torneos, y mostró que preservan la mismas condiciones para asegurar la existencia de trayectorias y ciclos hamiltonianos que los torneos y digráficas semicompletas.

**Teorema 47** (Bang-Jensen [2]). *Dada una digráfica localmente semicompleta, ésta posee una trayectoria hamiltoniana si y sólo si es conexa.*

**Teorema 48** (Bang-Jensen [2]). *Una digráfica localmente semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa.*

Con respecto a las digráficas multipartitas semicompletas, Bang-Jensen, Guo y Gutin probaron las siguientes condiciones suficientes para que éstas tuviesen una trayectoria y un ciclo hamiltonianos.

**Teorema 49.** *Una digráfica multipartita semicompleta  $D$  posee una trayectoria hamiltoniana si y sólo si posee un casi-factor.*

**Teorema 50.** *Si una digráfica multipartita semicompleta es fuertemente conexa y posee un buen factor de ciclos entonces posee un ciclo hamiltoniano.*

### 3.5 Consecuencias locales de la definición

Este trabajo fue motivado originalmente por las digráficas localmente semicompletas en flechas, la primera propuesta de Bang-Jensen de una generalización común de los torneos y torneos bipartitos «en la misma línea en que las digráficas localmente semicompletas generalizaban a los torneos» en [4].

Sin embargo, Bang-Jensen dió una caracterización parcial de las digráficas localmente semicompletas en flechas cuando son fuertemente conexas en [5], la cual fue ampliada para todas las digráficas localmente semicompletas en flechas por Galeana-Sánchez y Goldfeder en [15, 16]. La principal consecuencia de esta caracterización fue el darnos cuenta que esta clase de digráficas no resulta ser una generalización tan amplia como esperábamos, esto es, la familia de clases de digráficas en las que se descomponen las digráficas localmente semicompletas en flechas son ya conocidas o de estructura relativamente sencilla, a diferencia de lo que ocurre con las digráficas localmente semicompletas.

La pregunta que nos rondaba fue: ¿existirá una generalización de las digráficas multipartitas semicompletas en el mismo sentido en que las digráficas localmente semicompletas generalizan a las digráficas semicompletas?

Nuestra respuesta serían, obviamente, las digráficas localmente multipartitas semicompletas. A diferencia de las digráficas localmente semicompletas, su definición no es estrictamente local. Sin embargo, sí tienen una definición local que depende de la estructura de sus semitrayectorias de longitud dos y tres.

Supongamos que  $D$  es una digráfica multipartita localmente semicompleta. Primero consideremos una semitrayectoria de longitud dos  $uvw$  (véase la figura 3.4). Existen cuatro posibles orientaciones distintas de las flechas de tal semitrayectoria. Dos de esas orientaciones darán lugar a una trayectoria. Las otras dos orientaciones posibles son  $u \rightarrow v \leftarrow w$  y  $u \leftarrow v \rightarrow w$ . Si  $u$  y  $w$  están en la misma parte, no se sigue nada. En cambio, si están en partes distintas, de la definición de ser localmente semicompletas en flechas se sigue que, en ambos casos,  $u$  y  $w$  son adyacentes (véase la figura 3.6).

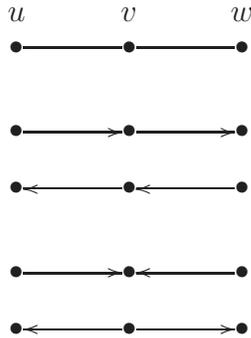


Figura 3.4: Posibles orientaciones de la 2-semitrayectoria

Ahora consideremos una semitrayectoria de longitud tres, sea  $uvw x$  (véase la figura 3.5). Existen ocho orientaciones posibles de las flechas de esa semitrayectoria. Dos de ellas son dirigidas y, en tal caso, de la definición de ser multipartita localmente semicompleta no se sigue nada. Analicemos pues los casos restantes. Es conveniente señalar que las flechas que puedan o no existir entre los vértices dependen de si tales vértices están o no en la misma parte de la digráfica. Si  $u$  y  $x$  son adyacentes, hemos terminado (y, en tal caso, no hay problema si entre  $u$  y  $x$  hay una sólo una flecha o una flecha simétrica). Si  $u$  y  $w$  están en la misma parte y  $v$  y  $x$  están en la misma parte,

ya que la semitrayectoria  $uvwx$  no puede ser inducida se sigue que  $u$  y  $x$  son adyacentes. Así podemos suponer que, ya sean  $u$  y  $w$  o  $v$  y  $x$  están en partes distintas y que  $u$  y  $x$  no son adyacentes. En este punto es conveniente recordar que ninguna semitrayectoria que pase por una flecha simétrica puede ser inducida. Dado que estamos buscando semitrayectorias inducidas entre dos vértices (que no son adyacentes), las flechas que aseguramos que existen no pueden ser simétricas (véanse las figuras 3.7 y 3.8).

Si  $u \rightarrow v \rightarrow w \leftarrow x$  entonces, para que haya una trayectoria entre  $u$  y  $x$ , debe existir la flecha asimétrica  $u \leftarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \rightarrow x$ .

Si  $u \rightarrow v \leftarrow w \rightarrow x$  entonces, para que haya una trayectoria entre  $u$  y  $x$ , debe existir la flecha asimétrica  $u \rightarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \rightarrow x$ .

Si  $u \leftarrow v \rightarrow w \rightarrow x$  entonces, para que haya una trayectoria entre  $u$  y  $x$ , debe existir la flecha asimétrica  $u \rightarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \leftarrow x$ .

Si  $u \rightarrow v \leftarrow w \leftarrow x$  entonces, para que haya una trayectoria entre  $u$  y  $x$ , debe existir la flecha asimétrica  $u \leftarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \rightarrow x$ .

Si  $u \leftarrow v \rightarrow w \leftarrow x$  entonces, para que haya una trayectoria entre  $u$  y  $x$ , debe existir la flecha asimétrica  $u \leftarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \leftarrow x$ .

Finalmente, si  $u \leftarrow v \leftarrow w \rightarrow x$  entonces, para que haya una trayectoria entre  $u$  y  $x$ , debe existir la asimétrica flecha  $u \rightarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \leftarrow x$ . Con lo cual hemos cubierto los seis casos posibles.

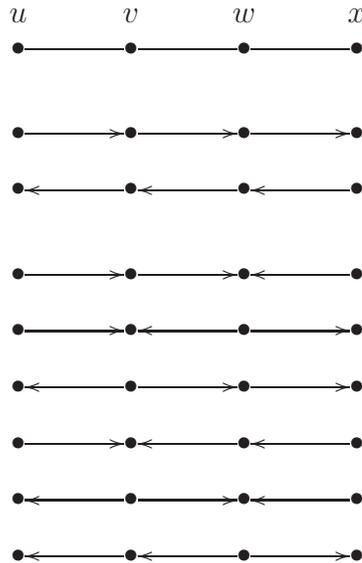


Figura 3.5: Posibles orientaciones de la 3-semi-trayectoria

Estás condiciones corresponderían a la definición local de que una digráfica sea multipartita localmente semicompleta pero resta por probar que si una digráfica las satisface entonces es multipartita localmente semicompleta. Para ello, basta con tomar dos vértices  $u$  y  $v$  en partes distintas y una  $(u, v)$ -semitrayectoria en  $D$ , sea  $T = w_0 w_1 \dots w_p$  con  $w_0 = u$  y  $w_1 = v$ . Debemos probar que si  $T$  no es dirigida entonces  $T$  no es inducida. Si  $T$  tuviese longitud dos, tendríamos que  $w_0 \rightarrow w_1 \leftarrow w_2$  o  $w_0 \leftarrow w_1 \rightarrow w_2$ , y de aquí que  $u$  y  $v$  tendrían que ser adyacentes por las condiciones previas, por lo que  $T$  no sería inducida. Así, supongamos que  $T$  tiene longitud al menos tres. Como  $T$  no es dirigida, existe un índice  $i$  tal que la subsemitrayectoria  $w_i w_{i+1} w_{i+2} w_{i+3}$  de  $T$  no es dirigida. Si  $w_i$  y  $w_{i+2}$  estuviesen en la misma parte y también  $w_{i+1}$  y  $w_{i+3}$  estuviesen en la misma parte, las condiciones locales implicarían que  $w_i$  y  $w_{i+3}$  serían adyacentes, por lo que  $T$  no sería inducida. Por lo tanto podemos suponer que  $w_i$  y  $w_{i+2}$  o  $w_{i+1}$  y  $w_{i+3}$  están en partes distintas. En general, si  $w_i$  y  $w_{i+3}$  fuesen adyacentes entonces  $T$  no sería inducida, así podemos suponer que no lo son. Así, de las últimas cinco condiciones se seguiría que  $w_i$  y  $w_{i+2}$  o  $w_{i+1}$  y  $w_{i+3}$ , con lo cual  $T$  no sería inducida. Por lo tanto, las condiciones locales previas implican que la digráfica es multipartita localmente semicompleta.

Así, tenemos que:

**Teorema 51.** *Una digráfica  $D$  es multipartita localmente semicompleta si y sólo si  $D$  es multipartita semicompleta y satisface las siguientes condiciones:*

1. *En toda semitrayectoria no dirigida  $uvw$  tal que los vértices  $u$  y  $w$  están en partes distintas (véase la figura 3.6, cf. [5, figura 1]),*
  - i. si  $u \rightarrow v \leftarrow w$  entonces  $u$  y  $w$  son adyacentes y*
  - ii. si  $u \leftarrow v \rightarrow w$  entonces  $u$  y  $w$  son adyacentes.*

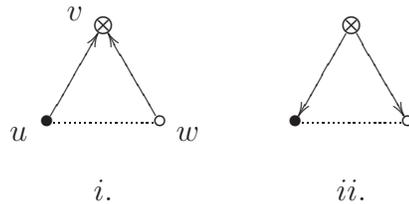


Figura 3.6: Primer caso del teorema 51

2. En toda semitrayectoria no dirigida  $uwvx$  tal que los vértices  $u$  y  $x$  están en partes distintas pero no son adyacentes (observemos que necesariamente  $u$  y  $w$  están en partes distintas o  $v$  y  $x$  están en partes distintas, véanse las figuras 3.7 y 3.8),

- i. si  $u \rightarrow v \rightarrow w \leftarrow x$  entonces existe la flecha asimétrica  $u \leftarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \rightarrow x$ ,
- ii. si  $u \rightarrow v \leftarrow w \rightarrow x$  entonces existe la flecha asimétrica  $u \rightarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \rightarrow x$ ,
- iii. si  $u \leftarrow v \rightarrow w \rightarrow x$  entonces existe la flecha asimétrica  $u \rightarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \leftarrow x$ ,

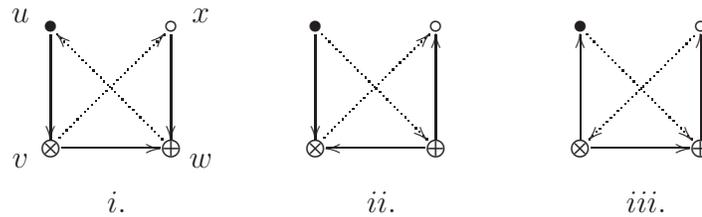


Figura 3.7: Primeros tres subcasos del segundo caso del teorema 51

- iv. si  $u \rightarrow v \leftarrow w \leftarrow x$  entonces existe la flecha asimétrica  $u \leftarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \rightarrow x$ ,
- v. si  $u \leftarrow v \rightarrow w \leftarrow x$  entonces existe la flecha asimétrica  $u \leftarrow w$  o la flecha asimétrica  $v \leftarrow x$  y
- vi. si  $u \leftarrow v \leftarrow w \rightarrow x$  entonces existe la flecha asimétrica  $u \rightarrow x$  o la flecha asimétrica  $v \leftarrow x$ .

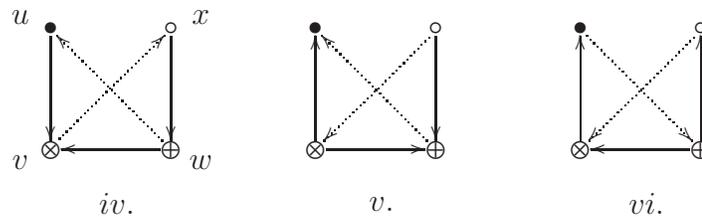


Figura 3.8: Últimos tres subcasos del segundo caso del teorema 51

En lo que sigue, haremos uso principalmente de las condiciones locales.

## 3.6 Lo que perdemos

Las digráficas bipartitas semicompletas son una generalización de las digráficas semicompletas y, a diferencia de éstas, no sólo basta con que sean fuertemente conexas para que sean hamiltonianas. Fue necesario pedir algo más para asegurar que fuese hamiltonianas y, en ese caso, se llegó a una condición necesaria y suficiente; a saber, que sean fuertemente conexas y que posean un factor de ciclos. Tenemos una situación similar con las digráficas multipartitas semicompletas, a las cuales podemos pensar como una generalización de las digráficas bipartitas semicompletas. No basta con pedir que sean fuertemente conexas y posean un factor de ciclos. Pero en este caso, la situación es todavía menos halagüeña ya que sólo conocemos una condición suficiente: debemos pedir que sean fuertemente conexas, posean un factor de ciclos y que tal factor de ciclos sea bueno<sup>8</sup>.

Las digráficas multipartitas localmente semicompletas son una generalización de las digráficas multipartitas semicompletas. En un principio, pensé que las mismas condiciones que hacen a éstas hamiltonianas también harían a aquéllas hamiltonianas. Pero entonces apareció la gráfica de la figura 3.9, una digráfica multipartita localmente semicompleta, fuertemente conexas y con un buen factor de ciclos que no tiene ciclos hamiltonianos.

En las figuras 3.6 y 3.11 aparecen otros ejemplos de digráficas multipartitas localmente semicompletas, fuertemente conexas con un buen factor de ciclos que no poseen ciclos hamiltonianos. De los dos primeros se desprende que podemos dar una familia infinita de tales ejemplos.

Se puede observar que en todos los ejemplos anteriores hay unos pocos vértices con muchos vecinos (los que no son blancos ni negros) y existen dos partes de la partición cuyos vértices no son adyacentes cuando están

---

<sup>8</sup>Un factor de ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$  en una digráfica multipartita completa  $D$  es *bueno* si para cualquier par de ciclos distintos  $C_i$  y  $C_j$  en  $\mathcal{F}$ , se cumple una de las siguientes condiciones:

- (i) Para todo vértice  $u$  en  $C_i$ , se tiene que tanto  $(V(C_j), u)$  como  $(u, V(C_j))$  son diferentes del vacío.
- (ii) Para todo vértice  $u$  en  $C_j$ , se tiene que tanto  $(V(C_i), u)$  como  $(u, V(C_i))$  son diferentes del vacío.
- (iii) Existen un vértice  $u$  en  $C_i$  y un vértice  $v$  en  $C_j$  tales que tanto  $(V(C_j), u)$  como  $(V(C_i), v)$  son vacíos.
- (iv) Existen un vértice  $u$  en  $C_i$  y un vértice  $v$  en  $C_j$  tales que tanto  $(u, V(C_j))$  como  $(v, V(C_i))$  son vacíos.

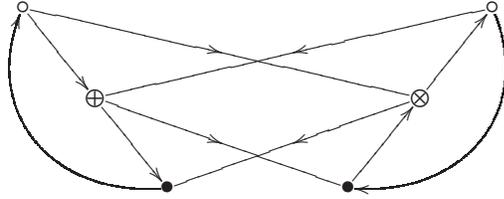


Figura 3.9: Digráfica multipartita localmente semicompleta fuertemente conexa y con un buen factor de ciclos que no es hamiltoniana.

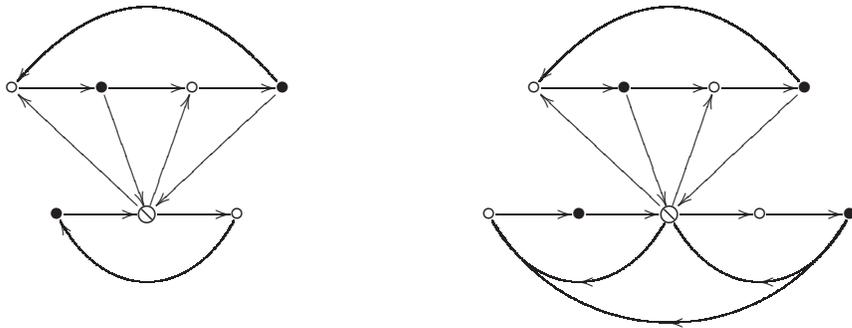


Figura 3.10: Otras digráficas multipartitas localmente semicompletas fuertemente conexas y con un buen factor de ciclos que no son hamiltonianas.

en ciclos diferentes del factor. Creo que ambas condiciones son lógicamente equivalentes y que basta con excluirlas para asegurar la existencia del ciclo hamiltoniano.

### 3.7 Lo que queda suelto o algo más

**Definición 52.** Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta  $D$ . Dados una trayectoria o ciclo  $P$  y una trayectoria de longitud dos  $Q = uvw$  en  $D - P$ , diremos que  $Q$  es una *flecha larga con respecto a  $P$*  de  $D$  si  $V(P) \rightarrow u$ ,  $w \rightarrow V(P)$  y tanto  $(V(P), u)$  como  $(u, V(P))$  son vacíos.

**Definición 53.** Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta  $D$  con partición  $\{V_1, \dots, V_p\}$ . Dados un ciclo  $C$  y un vértice  $v$  de

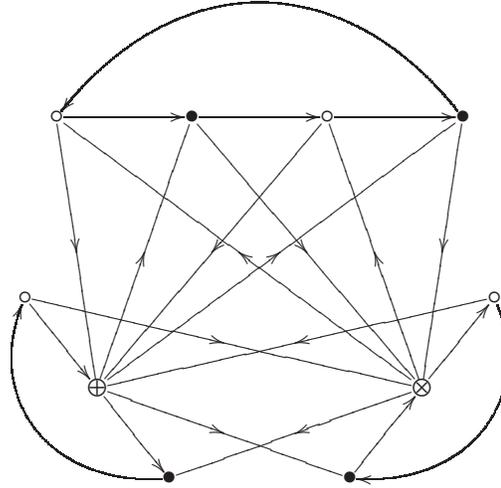


Figura 3.11: Un último ejemplo de una digráfica multipartita localmente semicompleta fuertemente conexa y con un buen factor de ciclos que no es hamiltoniana.

$D$  que no esté en  $C$ , diremos que  $v$  es *alternante* con respecto a  $C$  si existen dos partes diferentes  $V_i$  y  $V_j$  tales que  $V(C) \cap V_i \rightarrow v$  y  $v \rightarrow V(C) \cap V_j$ . En tal caso, también diremos que  $v$  es  $(V_i, V_j)$ -*alternante* con respecto a  $C$ . Véase la figura 3.12.

**Definición 54.** Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta conexa  $D$  con partición  $\{V_1, \dots, V_p\}$ . Dado un factor de ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$  en  $D$ , diremos que  $\mathcal{F}$  *se escinde* si existen dos partes diferentes  $V_i$  y  $V_j$  tales que para todo par de enteros  $r$  y  $s$  en  $\{1, \dots, p\}$  se tiene que tanto  $(V(C_r) \cap V_i, V(C_s) \cap V_j)$  como  $(V(C_r) \cap V_j, V(C_s) \cap V_i)$  son vacíos. En tal caso, también diremos que  $\mathcal{F}$  tiene una  $\{V_i, V_j\}$ -*escisión* (véase la figura 3.13).

**Conjetura 55.** Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta conexa  $D$  cuya partición es  $\{V_1, \dots, V_p\}$  y que posea un factor de ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$ . Si  $\mathcal{F}$  tiene una  $\{V_i, V_j\}$ -*escisión* y  $v$  es un vértice de  $D$  que no está en  $C_i$  pero es adyacente a  $C_\alpha$ , para algún  $\alpha$  en  $\{1, \dots, k\}$ , entonces  $v$  es  $(V_i, V_j)$ -*alternante* o  $(V_j, V_i)$ -*alternante* con respecto a  $C_\alpha$  (véase la figura 3.13).

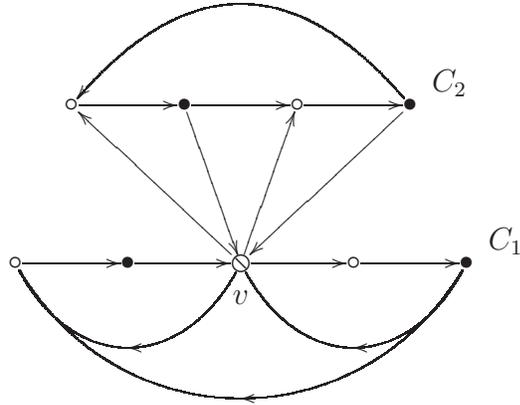


Figura 3.12: Si los vértices de  $V_i$  están representados por «•» y los de  $V_j$  lo están por «◦», el vértice  $v$  es  $(V_i, V_j)$ -alternante con respecto a  $C_2$

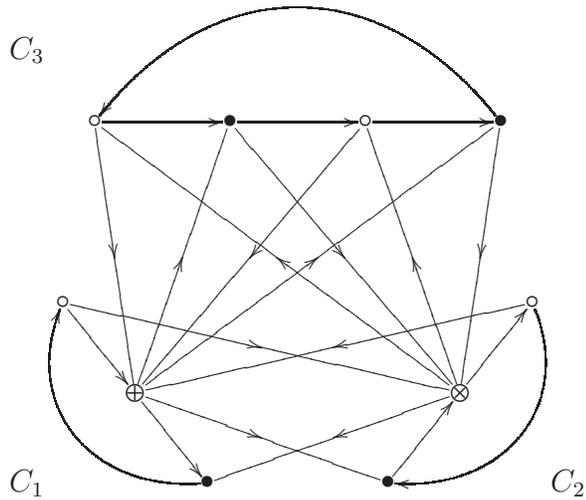


Figura 3.13: Si los vértices de  $V_i$  están representados por «•» y los de  $V_j$  lo están por «◦», el factor  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, C_3\}$  se  $\{V_i, V_j\}$ -escinde

**Conjetura 56.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  cuya partición es  $\{V_1, \dots, V_p\}$  y que posea un factor de ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$ . Si  $\mathcal{F}$  no posee vértices  $(V_i, V_j)$ -alternantes entonces*

$\mathcal{F}$  no se  $\{V_i, V_j\}$ -escinde.

**Conjetura 57.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta conexa  $D$  cuya partición es  $\{V_1, \dots, V_p\}$  y que posea un factor de ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$ . Si  $D$  es fuertemente conexa y posee un buen factor de ciclos  $\mathcal{F}$  que no se escinde entonces  $D$  es hamiltoniana.*

### 3.8 Resultados auxiliares

El artículo de Bang-Jensen, Gutin y Huang en el que dan una condición suficiente para que una digráfica multipartita semicompleta sea hamiltoniana [9] tiene una estructura definida: primero analizan qué pasa en el caso de que el buen factor de ciclos consta de sólo dos elementos y posteriormente abordan el caso general. Haremos lo mismo en lo que sigue.

Recordemos que si  $P$  es una  $(x, y)$ -trayectoria en una digráfica  $D$  y  $Q = v_1v_2\cdots v_t$  es una trayectoria o un ciclo en  $D - P$ , diremos que  $P$  tiene un *socio* (*partner* en inglés) en  $Q$  si existe una flecha (*el socio de  $P$* )  $v_i \rightarrow v_{i+1}$  en  $Q$  tal que  $v_i \rightarrow x$  y  $y \rightarrow v_{i+1}$ . En tal caso, la trayectoria  $P$  puede ser «insertada» en  $Q$  de forma tal que obtendremos una nueva trayectoria o ciclo  $Q[v_i, v_i]PQ[v_{i+1}, v_t]$ . Nosotros sólo emplearemos socios para trayectorias de longitud cero o uno, es decir, para vértices y flechas.

**Lema 58** (Bang-Jensen, Gutin y Huang [9]). *Consideremos una trayectoria  $P = u_1u_2\cdots u_r$  en una digráfica  $D$  y un ciclo  $C$  en  $D - P$ . Si para cada  $i$  en  $\{1, 2, \dots, r-1\}$ , o la flecha  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  tiene un socio o el vértice  $u_i$  tiene un socio en  $C$  y, además,  $u_r$  tiene un socio en  $C$  entonces  $D$  posee un ciclo cuyos vértices son  $V(P) \cup V(C)$ .*

**Lema 59** (Bang-Jensen, Gutin y Huang [9]). *Consideremos una trayectoria  $P = u_1u_2\cdots u_r$  de longitud impar en una digráfica  $D$  y un ciclo  $C$  en  $D - P$ . Si para cada  $i$  en  $\{1, 3, \dots, r-1\}$ , la flecha  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  tiene un socio en  $C$  entonces  $D$  posee un ciclo cuyos vértices son  $V(P) \cup V(C)$ .*

**Lema 60** (Bang-Jensen, Gutin y Huang [9]). *Consideremos un ciclo  $C$  de longitud par en una digráfica  $D$  y un ciclo  $Q$  en  $D - C$ . Si para cada flecha  $u \rightarrow v$  de  $C$ , o la flecha  $u \rightarrow v$  o el vértice  $u$  tiene un socio en  $Q$  entonces  $D$  posee un ciclo cuyos vértices son  $V(C) \cup V(Q)$ .*

### 3.9 Retazos

En esta sección sólo mostramos algunos resultados dan idea de como las técnicas del capítulo anterior en las digráficas localmente multipartitas semi-completas, de forma tal que eventualmente podamos dar más condiciones suficientes para que sean hamiltonianas. En la sección siguiente se ofrece una versión gráfica de los resultados de la presente sección, es recomendable leerlos simultáneamente.

En cada uno de los resultados se enuncian por lo general dos resultados, ya que estos dependen de la dirección de una flecha pero las pruebas son análogas.

**Proposición 61.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_1$ , tales que no hay pares buenos de flechas<sup>9</sup> entre ellos y que ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo.*

*Supongamos que la flecha  $u_i \rightarrow v_j$  está en  $D$ . Se tiene que:*

1. *si  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  están en la misma parte entonces existen las flechas  $u_i \rightarrow v_{j+1}$  y  $u_{i+1} \rightarrow v_j$  y*
2. *si  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  no están en la misma parte entonces  $u_{i+1} \rightarrow v_{j+1}$ .*

*Supongamos que la flecha  $v_j \rightarrow u_i$  está en  $D$ . Se tiene que:*

1. *si  $u_{i-1}$  y  $v_{j-1}$  están en la misma parte entonces existen las flechas  $v_j \rightarrow u_{i-1}$  y  $v_{j-1} \rightarrow u_i$  y*
2. *si  $u_{i-1}$  y  $v_{j-1}$  no están en la misma parte entonces  $v_{j-1} \rightarrow u_{i-1}$ .*

---

<sup>9</sup>Recordemos que dados dos ciclos ajenos  $C_0 = u_0 u_1 \cdots u_{n_0-1} u_0$  y  $C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$  (respectivamente una trayectoria  $P_0 = u_0 u_1 \cdots u_{n_0-1} u_{n_0}$  y un ciclo  $C_1 = v_0 v_1 \cdots v_{n_1-1} v_0$ , ajenos entre sí), un par de flechas  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_r \rightarrow u_s$ , para  $p$  y  $s$  en  $\mathbb{Z}_{n_0}$  y  $q$  y  $r$  en  $\mathbb{Z}_{n_1}$ , se dice que es un buen par de flechas si

$$C_0[u_0, u_p] C_1[v_q, v_r] C_0[u_s, u_0]$$

es un ciclo que pasa por los vértices tanto de  $C_0$  como de  $C_1$  (respectivamente

$$P_0[u_0, u_p] C_1[v_q, v_r] P_0[u_s, u_{n_0}]$$

es una trayectoria que pasa por los vértices tanto de  $P_0$  como de  $C_1$ ).

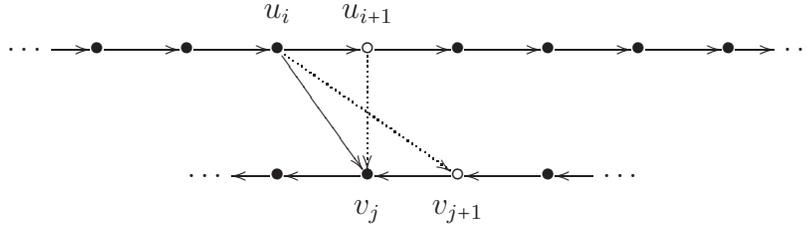


Figura 3.14: Si existe la flecha  $u_i \rightarrow v_j$  y  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  están en la misma parte entonces deben existir las flechas  $u_i \rightarrow v_{j+1}$  y  $u_{i+1} \rightarrow v_j$

*Demostración.* Probaremos el caso en el que existe la flecha  $u_i \rightarrow v_j$ .

Primero supongamos que  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  están en la misma parte (véase la figura 3.14). Así, tanto  $u_{i+1}$  y  $v_j$  como  $u_i$  y  $v_{j+1}$  están en partes diferentes. Ya que tenemos las semitrayectorias  $v_{j+1} \rightarrow v_j \leftarrow u_i$  y  $v_j \leftarrow u_i \rightarrow u_{i+1}$ , por ser  $D$  multipartita localmente semicompleta se sigue que tanto  $v_{j+1}$  y  $u_i$  como  $v_j$  y  $u_{i+1}$  son adyacentes. De existir la flecha  $v_{j+1} \rightarrow u_i$ , tendríamos que el vértice  $u_i$  tiene un socio en  $C_2$  y de existir la flecha  $v_j \rightarrow u_{i+1}$ , tendríamos que el vértice  $v_j$  tiene un socio en  $C_1$ . De esto se sigue que existen las flechas  $u_i \rightarrow v_{j+1}$  y  $u_{i+1} \rightarrow v_j$  en  $D$ .

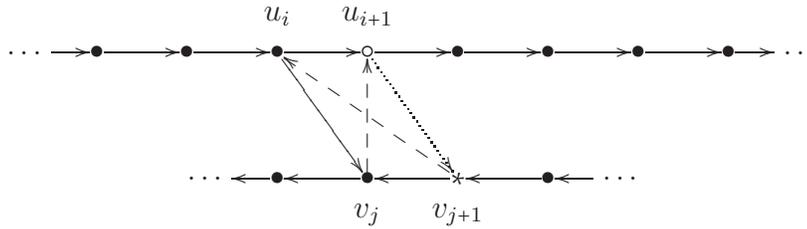


Figura 3.15: Si existe la flecha  $u_i \rightarrow v_j$  y  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  no están en la misma parte entonces tenemos la semitrayectoria  $v_{j+1} \rightarrow v_j \leftarrow u_i \rightarrow u_{i+1}$ . La flecha  $v_j \rightarrow u_{i+1}$  o  $v_{j+1} \rightarrow u_i$  daría un socio al vértice  $v_j$  o  $u_i$ , respectivamente. La flecha  $v_{j+1} \rightarrow u_{i+1}$  junto con la flecha  $u_i \rightarrow v_j$  forman un par bueno de flechas. Por lo tanto, tenemos la flecha  $u_{i+1} \rightarrow v_{j+1}$ .

Ahora supongamos que  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  no están la misma parte (véase la figura 3.15). Tenemos la semitrayectoria  $v_{j+1} \rightarrow v_j \leftarrow u_i \rightarrow u_{i+1}$ . Por ser  $D$  multipartita localmente semicompleta, se sigue que si  $v_{j+1}$  y  $u_{i+1}$  no son adyacentes entonces existen la flecha  $v_{j+1} \rightarrow u_i$  o la flecha  $v_j \rightarrow u_{i+1}$ . Pero la flecha  $v_{j+1} \rightarrow u_i$  le da un socio a  $u_i$  y la flecha  $v_j \rightarrow u_{i+1}$  le da un socio

al vértice  $v_j$ . Por lo tanto,  $v_{j+1}$  y  $u_{i+1}$  son adyacentes. De existir la flecha  $v_{j+1} \rightarrow u_{i+1}$ , tenemos que junto con la flecha  $u_i \rightarrow v_j$  forman un par bueno de flechas, lo cual no es posible. Por lo tanto, tenemos que existe  $u_{i+1} \rightarrow v_{j+1}$ .

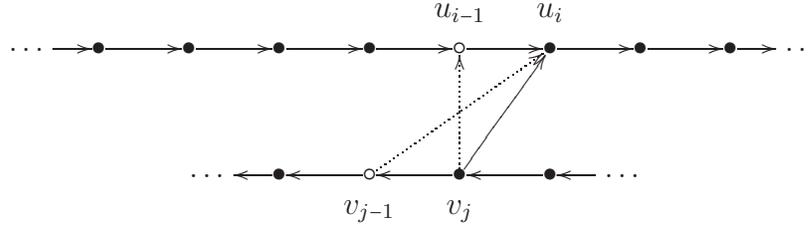


Figura 3.16: Si existe la flecha  $v_j \rightarrow u_i$  y  $u_{i-1}$  y  $v_{j-1}$  están en la misma parte entonces deben existir las flechas  $v_j \rightarrow u_{i-1}$  y  $v_{j-1} \rightarrow u_i$

Las figuras 3.16 y 3.17 ilustran el caso cuando tenemos la flecha  $v_j \rightarrow u_i$ , que es análogo al anterior.

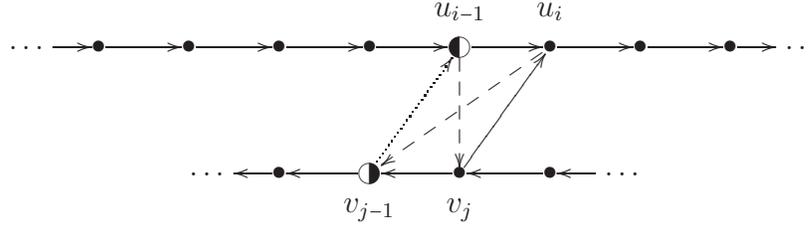


Figura 3.17: Si existe la flecha  $v_j \rightarrow u_i$  y  $u_{i-1}$  y  $v_{j-1}$  no están en la misma parte entonces tenemos la semitrayectoria  $v_{j-1} \rightarrow v_j \leftarrow u_i \rightarrow u_{i-1}$ . La flecha  $u_i \rightarrow v_{j-1}$  o  $u_{i-1} \rightarrow v_j$  daría un socio al vértice  $u_i$  o  $v_j$ , respectivamente. La flecha  $u_{i-1} \rightarrow v_{j-1}$  junto con la flecha  $v_j \rightarrow u_i$  son un par bueno de flechas. Por lo tanto, tenemos la flecha  $v_{j-1} \rightarrow u_{i-1}$ .

□

En lo que sigue, recurriremos a la notación del capítulo anterior e introduciremos un par más de conjuntos.

Recordemos que por  $G_{n_1, n_2}$  denotamos al grupo  $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$  y por  $H_{n_1, n_2}$  denotamos al subgrupo  $\langle (1, 1) \rangle_{G_{n_1, n_2}}$ , de orden  $\text{mcm}(n_1, n_2)$ . Por el corolario 9, sabemos que los conjuntos  $\{(0, 0) + H_{n_1, n_2}, (0, 1) + H_{n_1, n_2}, \dots, (0, \text{mcd}(m, n) - 1) + H_{n_1, n_2}\}$  y  $\{(0, 0) + H_{n_1, n_2}, (1, 0) + H_{n_1, n_2}, \dots, (\text{mcd}(m, n) - 1, 0) + H_{n_1, n_2}\}$  son particiones de  $G_{n_1, n_2}$ .

Consideremos una digráfica  $D$  con un factor de dos ciclos,  $\{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ . Dado un subconjunto  $S$  de  $G_{n_1, n_2}$ , a veces necesitaremos saber cuáles flechas en entre  $C_1$  y  $C_2$  están representadas por algún elemento en  $S$ . Así,  $D\langle S \rangle$  será el subconjunto de las flechas de  $D$  dado por

$$\{u_i \rightarrow v_j, v_j \rightarrow u_i: (i, j) \text{ está en } S\} \cap A(D).$$

Dada una flecha  $u_i \rightarrow v_j$ , ¿qué elementos en  $G_{n_1, n_2}$  representan una flecha de  $D$  paralela a  $u_i \rightarrow v_j$ ?  $\langle \{u_i \rightarrow v_j\} \rangle_{G_{n_1, n_2}}$  es el conjunto

$$\{(p, q): u_p \rightarrow v_q \text{ está en } D\} \cap H_{n_1, n_2} + (i, j).$$

Análogamente, dada la flecha  $v_j \rightarrow u_i$ , el conjunto  $\langle \{u_i \rightarrow v_j\} \rangle_{G_{n_1, n_2}}$  será

$$\{(p, q): v_q \rightarrow u_p \text{ está en } D\} \cap H_{n_1, n_2} + (i, j).$$

En general, dado  $S$  un subconjunto de las posibles flechas entre  $C_1$  y  $C_2$ , el conjunto  $\langle S \rangle_{G_{n_1, n_2}}$  será

$$\bigcup_{f \in S} \langle \{f\} \rangle_{G_{n_1, n_2}}.$$

Es decir,  $\langle S \rangle_{G_{n_1, n_2}}$  es el subconjunto de todos los elementos en  $G_{n_1, n_2}$  que representan flechas entre  $C_1$  y  $C_2$  paralelas a alguna de las flechas dadas en  $S$ .

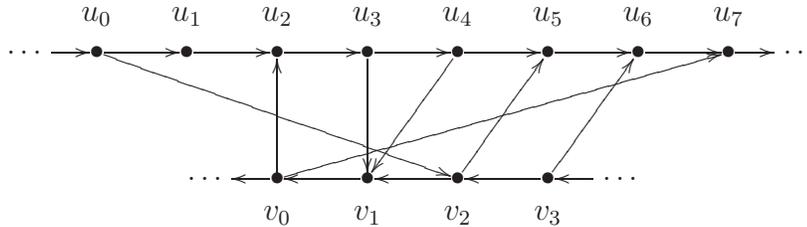


Figura 3.18: Digráfica para ejemplificar algunas definiciones.

*Ejemplo 1.* Considérese la digráfica que aparece en la figura 3.18. Tenemos los siguientes conjuntos.

- $D\langle \{(3, 1), (4, 2), (5, 2)\} \rangle = \{u_3 \rightarrow v_1, v_2 \rightarrow u_3\}$ .
- $D\langle \{H_{8,3} + (3, 0)\} \rangle = \{u_4 \rightarrow v_1, v_2 \rightarrow u_5, v_3 \rightarrow u_6\}$ .

- $\langle \{v_0 \rightarrow u_2\} \rangle_{G_{8,3}} = \{(2, 0)\}$ .
- $\langle \{v_0 \rightarrow u_7\} \rangle_{G_{8,3}} = \{(7, 0), (6, 3), (5, 2)\}$ .
- $\langle \{u_7 \rightarrow v_0\} \rangle_{G_{8,3}} = \{(4, 1)\}$

Observemos que, dado  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$ , tenemos que la flecha  $u_p \rightarrow v_q$  está en  $D$  para todo en  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  si y sólo si  $|D \langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)| = \text{mcm}(n_1, n_2)$ , que son justo las  $\text{mcm}(n_1, n_2)$  flechas paralelas en la misma dirección en la clase lateral  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$ . Análogamente, la flecha  $v_q \rightarrow u_p$  está en  $D$  para todo en  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  si y sólo si  $|D \langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| = \text{mcm}(n_1, n_2)$ .

Dada una digráfica  $D$  con un factor de dos ciclos,  $\{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ , con la notación que introducimos tenemos que existen  $(p, q)$  y  $(r, s)$  en  $G_{n_1, n_2}$ ,  $f$  en  $(C_1, C_2)$  y  $g$  en  $(C_2, C_1)$  tales que  $\langle \{f\} \rangle_{G_{n_1, n_2}} = H_{n_1, n_2} + (p, q)$  y  $\langle \{g\} \rangle_{G_{n_1, n_2}} = H_{n_1, n_2} + (r, s)$  si y sólo si se satisfacen las condiciones del corolario 30.

**Proposición 62.** *Consideremos un par de ciclos,  $C_1 = u_0 \cdots u_{n_1-1} u_0$  y  $C_2 = v_0 v_{n_2-1} \cdots v_1$ , ajenos en vértices en una digráfica dada  $D$ . Dado un entero  $j$  en  $\{0, \dots, \text{mcd}(n_0, n_1) - 1\}$ , las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Para todo  $(a, a)$  en  $\langle (1, 1) \rangle_{G_{n_1, n_2}}$ , existe la flecha  $v_a^0 \rightarrow v_a^1$  y para todo  $(a+j, a)$  en  $\langle (1, 1) \rangle_{G_{n_1, n_2}} + (j, 0)$ , existe la flecha  $v_a^1 \rightarrow v_{a+j}^0$ .*
2.  $\langle \{u_0 \rightarrow v_0\} \rangle_{G_{n_1, n_2}} = H_{n_1, n_2}$  y  $\langle \{v_a \rightarrow u_{a+j}\} \rangle_{G_{n_1, n_2}} = H_{n_1, n_2} + (j, 0)$ .

**Corolario 63** (Nuevo enunciado del corolario 30). *Consideremos dos ciclos  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ , ajenos en vértices, en una digráfica dada  $D$ . Si existen  $f$  en  $(C_1, C_2)$ ,  $g$  en  $(C_2, C_1)$  y dos elementos  $(p, q)$  y  $(r, s)$  en clases laterales distintas de  $G_{n_1, n_2}$  tales que*

- (i)  $\langle \{f\} \rangle_{G_{n_1, n_2}} = H_{n_1, n_2} + (p, q)$  y
- (ii)  $\langle \{g\} \rangle_{G_{n_1, n_2}} = H_{n_1, n_2} + (r, s)$

*entonces existe un ciclo cuyo conjunto de vértices es  $V(C_0) \cup V(C_1)$ .*

Basta con reetiquetar los vértices de los ciclos de la forma  $u'_0 = u_p$  y  $v'_0 = v_q$ . Por la proposición 62 se sigue que se satisfacen las condiciones del corolario 30, el cual nos asegura la existencia de un ciclo sobre los vértices  $V(C_0) \cup V(C_1)$ .

**Proposición 64.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexas  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1u_2\cdots u_{n_1-1}u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2}v_{n_2-1}\cdots v_2v_1$ , tales que ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo. Tomemos  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$ .*

*Si existe  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que*

(i)  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte y

(ii)  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  es no vacío

*entonces tanto  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i+1, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  como  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j+1) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no son vacíos.*

*Análogamente, si existe  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que*

(i)  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte y

(ii)  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  es no vacío

*entonces tanto  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i+1, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  como  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j+1) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no son vacíos.*

*Demostración.* Supongamos que para algún  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tenemos que  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte y que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  es no vacío, es decir, existe  $(r, s)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que  $u_r \rightarrow v_s$ . Recordemos que  $(p-r, q-s)$  está en  $H_{n_1, n_2}$ , es decir, existe un entero  $k$  en  $\{0, \dots, \text{mcm}(n_1, n_2) - 1\}$  tal que  $(k, k) = (p-r, q-s)$ , esto es,  $(r+k, s+k) = (p, q)$ . Sea  $l$  el primer entero en  $\{0, \dots, k\}$  tal que  $u_{p+l}$  y  $v_{q+l}$  están en la misma parte. Por la proposición 61, tenemos que existen las flechas  $u_r \rightarrow v_s, u_{r+1} \rightarrow v_{s+1}, \dots, u_{r+(l-1)} \rightarrow v_{s+(l-1)}$  en  $D$ . También, por la proposición 61, tenemos que las flechas  $u_{r+l} \rightarrow v_{s+(l-1)}$  y  $u_{r+(l-1)} \rightarrow v_{s+l}$  en  $D$ .

Ya que  $(r+(l-1), s+(l-1))$  está en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$ , tenemos que  $(r+l, s+(l-1)) = (r+(l-1), s+(l-1)) + (1, 0)$ , es decir,  $(r+l, s+(l-1))$  está en  $H_{n_1, n_2} + (i, j) + (1, 0) = H_{n_1, n_2} + (i+1, j)$ . De manera similar, ya que  $(r+(l-1), s+(l-1))$  está en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$ , tenemos que  $(r+(l-1), s+l) = (r+(l-1), s+(l-1)) + (0, 1)$ , es decir,  $(r+(l-1), s+l)$  está en  $H_{n_1, n_2} + (i, j) + (0, 1) = H_{n_1, n_2} + (i, j+1)$ .

De lo anterior que las flechas  $u_{r+l} \rightarrow v_{s+(l-1)}$  y  $u_{r+(l-1)} \rightarrow v_{s+l}$  implican que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i+1, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  y  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j+1) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no son vacíos, respectivamente.  $\square$

La proposición anterior es importante porque nos permitirá dar un argumento inductivo.

**Proposición 65.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_0 u_1 \cdots u_{n_1-1} u_0$  y  $C_2 = v_0 v_{n_2-1} \cdots v_1 v_0$ , tal que ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo. Tomemos  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$ .*

*Si suponemos que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no es vacío entonces se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  si y sólo si existe  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte.*

*Si suponemos que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no es vacío entonces se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  si y sólo si existe  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte.*

*Demostración.* Por hipótesis  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no es vacío. Es decir, existe  $(r, s)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que  $u_r \rightarrow v_s$ . Si suponemos que para ninguna pareja  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  se tiene que  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte, por la proposición 61 tenemos que para todas las flechas paralelas a  $u_r \rightarrow v_s$ , es decir, para todo  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tendremos que  $u_p \rightarrow v_q$ . Ya que  $H_{n_1, n_2}$  tiene orden  $\text{mcm}(n_1, n_2)$ , tendremos que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| = \text{mcm}(n_1, n_2)$ .

Para el recíproco, supongamos que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| = \text{mcm}(n_1, n_2)$ , es decir, para todo  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tenemos que  $u_p \rightarrow v_q$ . Por lo tanto  $u_p$  y  $v_q$  no están en la misma parte.  $\square$

**Lema 66.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta conexa  $D$  con un factor de dos ciclos,  $\{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ , tal que  $(C_1, C_2)$  y  $(C_2, C_1)$  no son vacíos y que ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo.*

*Si para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  (es decir, no se satisfacen las condiciones del corolario 63) entonces para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  es no vacío.*

*Si para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  entonces para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  es no vacío.*

En otras palabras, si para ninguna clase lateral de  $H_{n_1, n_2}$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tienen todas las flechas en el mismo sentido (es decir, de  $C_1$  a  $C_2$  o de  $C_2$

a  $C_1$ ) entonces para *todas* las clases laterales de  $H_{n_1, n_2}$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene al menos una flecha en ese sentido.

*Demostración.* Ya que  $(C_1, C_2)$  no es vacío, existe  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  tal que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no es vacío. Ya que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$ , por la proposición 65 existe  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte. Por la proposición 64, tenemos que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i+1, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no es vacío. Inductivamente, para cualquier entero  $k$  tenemos que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i+k, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no es vacío. Finalmente recordemos que  $\{H_{n_1, n_2} + (i, j), H_{n_1, n_2} + (i+1, j), \dots, H_{n_1, n_2} + (i + (\text{mcd}(n_1, n_2) - 1), j)\}$  son todas las clases laterales de  $H_{n_1, n_2}$  en  $G_{n_1, n_2}$ , por lo que tenemos el resultado.  $\square$

**Proposición 67.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \dots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \dots v_2 v_1$ , tal que entre ellos no hay pares buenos de flechas, ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo y  $(C_1, C_2)$  y  $(C_2, C_1)$  no son vacíos.*

*Dado  $g$  en  $\{1, 2\}$ , si para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_g, C_{3-g})| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  entonces para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que tanto  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  como  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no son vacíos.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $g = 1$ . Así, tenemos que para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$ ,  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$ . Por el lema 66 tenemos que para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  es no vacío.

Probaremos que para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$ . Ya que  $(C_2, C_1)$  no es vacío, existe  $(i_0, j_0)$  en  $G_{n_1, n_2}$  tal que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i_0, j_0) \rangle \cap (C_2, C_1)| > 0$ . Supongamos que no es cierto que para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no es vacío. Por el lema 66, existe  $(i_1, j_1)$  tal que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i_1, j_1) \rangle \cap (C_2, C_1)| \geq \text{mcm}(n_1, n_2)$ , esto es,  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i_1, j_1) \rangle \cap (C_2, C_1)| = \text{mcm}(n_1, n_2)$ . Por el párrafo anterior, sabemos que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i_1, j_1) \rangle \cap (C_1, C_2)$  no es vacío, tomemos una flecha  $u_p \rightarrow v_q$  ahí. Ya que  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i_1, j_1) \rangle \cap (C_2, C_1) = \text{mcm}(n_1, n_2)$ , en particular existe la flecha  $v_{p+1} \rightarrow u_{q+1}$ . Ambas forman un par bueno de flechas, lo que es una contradicción. Por lo tanto tenemos que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  y de nuevo por el lema 66,

se sigue que para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)|$  no es vacío.  $\square$

**Corolario 68.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ , tal que entre ellos no hay pares buenos de flechas, ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo y  $(C_1, C_2)$  y  $(C_2, C_1)$  no son vacíos*

*Si para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que tanto  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  como  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no son vacíos entonces para todo  $(i, j)$  se sigue que tanto  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)|$  como  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)|$  son menores que  $\text{mcm}(n_1, n_2)$ .*

*Demostración.* Si suponemos lo contrario, es decir, que para algún  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  tenemos que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)|$  o  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)|$  son iguales a  $\text{mcm}(n_1, n_2)$  entonces, como en la prueba de la proposición 67, obtendríamos un par bueno de flechas, lo que es una contradicción.  $\square$

Que no se tengan todas las flechas en el mismo sentido en una clase lateral implica que en cada clase lateral de  $H_{n_1, n_2}$  en  $G_{n_1, n_2}$  existe un elemento  $(p, q)$  tal que  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte.

**Proposición 69.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ , y tal que ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo.*

*Supongamos que existe  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  tal que  $u_i \rightarrow v_j$  y  $v_j \rightarrow u_i$ . Si  $u_{i-1}$  y  $v_{j-1}$  están en la misma parte y  $u_{i+1}$  y  $v_{j+1}$  están en la misma parte entonces existen las parejas de flechas  $v_q \rightarrow u_{p-1}$ ,  $u_p \rightarrow v_{p+1}$  y  $v_{q-1} \rightarrow u_p$ ,  $u_{p+1} \rightarrow v_q$ .*

*Demostración.* Por la proposición 61, tenemos que la flecha  $u_p \rightarrow v_q$  implica la existencia de las flechas  $u_p \rightarrow v_{p+1}$  y  $u_{p+1} \rightarrow v_q$ . Por la misma proposición, tenemos que la flecha  $v_q \rightarrow u_p$  implica la existencia de las flechas  $v_q \rightarrow u_{p-1}$  y  $v_{q-1} \rightarrow u_p$ . Esas son las flechas buscadas (véase las figuras 3.19 y 3.20).  $\square$

**Corolario 70.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semi-completa conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \cdots v_2 v_1$ , tal que no tienen pares buenos de flechas y ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo.*

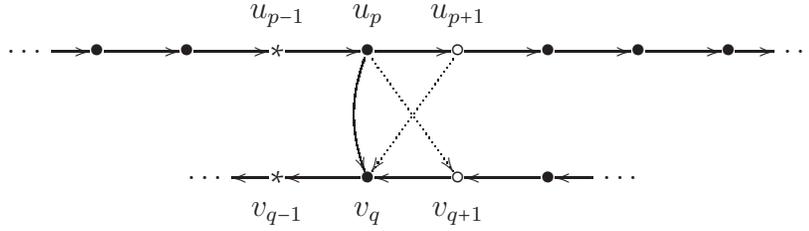


Figura 3.19: Ilustración de la proposición 69

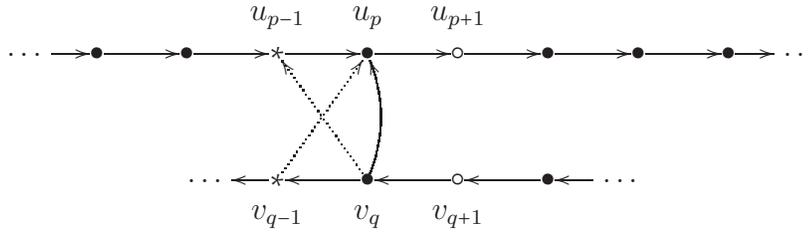


Figura 3.20: Ilustración de la proposición 69

Si para algún  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que tanto  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  como  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no son vacíos entonces existe  $(i', j')$  tal que  $(p, q)$  y  $(r, s)$  son dos elementos distintos de  $H_{n_1, n_2} + (i', j')$  y se tiene que  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_s \rightarrow u_r$ .

*Demostración.* Si en  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle$  no hay flechas simétricas, se tiene el resultado con  $(i', j') = (i, j)$ . Supongamos que tenemos la flecha simétrica  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_q \rightarrow u_p$ . Si  $u_{p-1}$  y  $v_{q-1}$  no están en la misma parte, por la proposición 61 se sigue que  $v_{q-1} \rightarrow u_{p-1}$ , ya que no hay pares buenos de flechas. Así,  $v_{q-1} \rightarrow u_{p-1}$  y  $u_p \rightarrow v_q$  son las flechas buscadas con  $(i', j') = (i, j)$ . Si, por otro lado,  $u_{p+1}$  y  $v_{q+1}$  no están en la misma parte, por la proposición 61 se sigue que  $u_{p+1} \rightarrow v_{q+1}$ , ya que no hay pares buenos de flechas. Así,  $v_q \rightarrow u_p$  y  $u_{p+1} \rightarrow v_{q+1}$  son las flechas buscadas con  $(i', j') = (i, j)$ .

Por lo anterior, podemos suponer que  $u_{p-1}$  y  $v_{q-1}$  están la misma parte y  $u_{p+1}$  y  $v_{q+1}$  están en la misma parte. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u_{p-1}$  y  $v_{q-1}$  están en partes diferentes. Por la proposición 61, tenemos las flechas  $v_q \rightarrow u_{p-1}$  y  $u_p \rightarrow v_{p+1}$  en  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j+1) \rangle$  y las flechas  $v_{q-1} \rightarrow u_p$  y  $u_{p+1} \rightarrow v_q$  en  $D\langle H_{n_1, n_2} + (i+1, j) \rangle$  satisfacen lo que se pide.  $\square$

**Lema 71.** Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta conexa  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 \cdots u_{n_1-1} u_{n_1}$

y  $C_2 = v_{n_2}v_{n_2-1}\cdots v_1$ , tal que ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo. Si  $(C_1, C_2)$  y  $(C_2, C_1)$  no son vacíos y entre ellos no hay pares buenos de flechas entonces existen  $(p, q)$  y  $(r, s)$  en  $G_{n_1, n_2}$  tales que  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (p, q) \rangle \cap (C_1, C_2)| = |D\langle H_{n_1, n_2} + (r, s) \rangle \cap (C_2, C_1)| = \text{mcm}(n_1, n_2)$ .

*Demostración.* Supongamos que para algún  $g$  en  $\{1, 2\}$ , tenemos que para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$ ,  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_g, C_{3-g})| < \text{mcm}(n_1, n_2)$  y que entre  $C_1$  y  $C_2$  no hay pares buenos de flechas.

Por la proposición 67, para todo  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que tanto  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)$  como  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)$  no son vacíos. Ya que no hay pares buenos de flechas entre  $C_1$  y  $C_2$ , por el corolario 68 tenemos que tanto  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_1, C_2)|$  como  $|D\langle H_{n_1, n_2} + (i, j) \rangle \cap (C_2, C_1)|$  son menores que  $\text{mcm}(n_1, n_2)$ .

En lo que sigue, probaremos que existe un par bueno de flechas, es decir, que existen  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  y  $(p, q)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tales que  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_{q+1} \rightarrow u_{p+1}$  son flechas en  $D$ .

Dado  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$ , definiremos  $\phi(H_{n_1, n_2} + (i, j))$  como el menor entero  $k$  en  $\{1, 2, \dots, \text{mcd}(n_1, n_2) - 1\}$  tal que existen  $(p, q)$  y  $(r, s)$  en  $\phi(H_{n_1, n_2} + (i, j))$ , con  $(p, q) \neq (r, s)$ , con  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_s \rightarrow u_r$  y  $(k, k) = (r, s) - (p, q)$ . La condición  $(p, q) \neq (r, s)$  la podemos asegurar por el corolario 70.

Supongamos que para algún  $(i, j)$  en  $G_{n_1, n_2}$  se tiene que  $\phi(H_{n_1, n_2} + (i, j))$  es mayor o igual que dos. Por la definición de la función  $\phi$ , existen  $(p, q)$  y  $(r, s)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i, j)$  tal que  $u_p \rightarrow v_q$  y  $v_s \rightarrow u_r$ . Como  $\phi$  es el menor, no pueden existir las flechas  $u_{p+1} \rightarrow v_{q+1}$  ni  $v_{s-1} \rightarrow u_{r-1}$ . Por la proposición 65, tenemos que  $u_{p+1}$  y  $v_{q+1}$  están en la misma parte y  $u_{r-1}$  y  $v_{s-1}$  están en la misma parte. Por la proposición 61, tenemos que existen las flechas  $u_p \rightarrow v_{q+1}$  y  $v_s \rightarrow v_{r-1}$ .

Por hipótesis teníamos que  $(r, s) - (p, q)$  está en  $H_{n_1, n_2}$ . Observemos que  $(r-1, s) - (p, q+1) = (r, s) - (p, q) - (1, 1)$ . Por lo tanto,  $(r-1, s)$  y  $(p, q+1)$  están en la misma clase lateral de  $H_{n_1, n_2}$  en  $G_{n_1, n_2}$ , a saber,  $H_{n_1, n_2} + (i, j+1)$ .

Pero, más aún, sabemos que  $(r-1, s) - (p, q+1) = (r, s) - (p, q) - (1, 1)$  y  $(r, s) - (p, q) = (\phi(H_{n_1, n_2} + (i, j)), \phi(H_{n_1, n_2} + (i, j)))$  por hipótesis. Entonces,  $(r-1, s) - (p, q+1) = (\phi(H_{n_1, n_2} + (i, j)) - 1, \phi(H_{n_1, n_2} + (i, j)) - 1)$ . Por lo tanto,  $\phi(H_{n_1, n_2} + (i, j+1)) < \phi(H_{n_1, n_2} + (i, j))$ . De aquí que debe existir  $(i_0, j_0)$  en  $G_{n_1, n_2}$  tal que  $\phi(H_{n_1, n_2} + (i_0, j_0)) = 1$ . Es decir, existen  $(p_0, q_0)$  y  $(r_0, s_0)$  en  $H_{n_1, n_2} + (i_0, j_0)$  tal que  $u_{p_0} \rightarrow v_{q_0}$  y  $v_{s_0} \rightarrow u_{r_0}$ . Pero como  $\phi(H_{n_1, n_2} + (i_0, j_0)) = 1$ ,  $r_0 = p_0 + 1$  y  $s_0 = q_0 + 1$ , es decir, son un par bueno de

flechas, lo que es una contradicción.  $\square$

**Teorema 72.** *Consideremos una digráfica multipartita localmente semicompleta  $D$  con un factor de dos ciclos  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1u_2\cdots u_{n_1-1}u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2}v_{n_2-1}\cdots v_2v_1$ . Si  $D$  es fuertemente conexa y ningún vértice de un ciclo posee socios en el otro ciclo entonces  $D$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* Si los ciclos del factor poseen pares buenos de flechas, ya está. Supongamos que no. Por el lema 71, tenemos las condiciones del corolario 30. Por lo tanto,  $D$  es hamiltoniana.  $\square$

Para finalizar, requerimos de introducir un concepto. Dados dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  en una digráfica multipartita semicompleta y un vértice  $u$  en  $C_i$ , con  $i$  en  $\{1, 2\}$ , decimos que  $u$  es *in-singular* con respecto a  $C_{3-i}$  si  $(u, V(C_{3-i}))$  es vacío,  $u$  es *ex-singular* con respecto a  $C_{3-i}$  si  $(V(C_{3-i}), u)$  es vacío y  $u$  es *singular* si es in- o ex-singular.

Como corolario tenemos el siguiente resultado, ya que su prueba usa que ningún vértice en cualquiera de los ciclos tiene socios en el otro —hecho que es consecuencia de resultados previos en el artículo—.

**Corolario 73** (Bang-Jensen, Gutin y Huang [9, Lemma 4.2]). *Dada una digráfica multipartita semicompleta  $D$  con un factor  $\{C_1, C_2\}$ . Si  $C_i$  no tiene vértices singulares con respecto a  $C_{3-i}$ , para  $i$  en  $\{1, 2\}$ , entonces  $D$  es hamiltoniana.*

### 3.10 Una versión gráfica de la sección anterior

Para simplificar la tabla siguiente,  $\mu$  será  $\text{mcm}(n_1, n_2)$  y  $\delta$  será  $\text{mcd}(n_1, n_2)$

En la tabla 3.21, las etiquetas de los renglones son los elementos de  $H_{n_1, n_2}$ , es decir, del subgrupo generado por  $(1, 1)$  en  $G_{n_1, n_2}$  y las etiquetas de las columnas forman un subgrupo de  $G_{n_1, n_2}$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_{n_2}$ . Cada elemento en la tabla (sin considerar las etiquetas) es la suma de las etiquetas de su renglón y columna correspondientes. Cada columna es una clase lateral de  $H_{n_1, n_2}$  en  $G_{n_1, n_2}$  y cualesquiera  $\text{mcd}(n_1, n_2)$  columnas consecutivas forman una partición de  $G_{n_1, n_2}$  en clases laterales. En el caso de que  $n_1$  y  $n_2$  sean coprimos, cada columna contiene a todos los elementos de  $G_{n_1, n_2}$ , sólo que aparecen desplazados.

Dos entradas  $(p, q)$  y  $(r, s)$  son *contiguas* si son consecutivas en el mismo renglón, es decir, si  $r = p$  y  $s = q + 1$ . Son *consecutivas* si son consecutivas en

	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$	$(\mathbf{0}, \mathbf{1})$	$\dots$	$(\mathbf{0}, \mathbf{q})$	$\dots$	$(\mathbf{0}, \mathbf{n}_2)$	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$
$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$\dots$	$(0, q)$	$\dots$	$(0, n_2)$	$(0, 0)$
$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$\dots$	$(1, 1 + q)$	$\dots$	$(1, 1 + n_2)$	$(1, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$(\mathbf{p}, \mathbf{p})$	$(y, y)$	$(y, y + 1)$	$\dots$	$(p, p + q)$	$\dots$	$(p, p + n_2)$	$(p, p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$(\mu, \mu)$	$(\mu, \mu)$	$(\mu, \mu + 1)$	$\dots$	$(\mu, \mu + q)$	$\dots$	$(\mu, \mu + n_2)$	$(\mu, \mu)$
$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$\dots$	$(0, q)$	$\dots$	$(0, n_2)$	$(0, 0)$

Figura 3.21: El grupo  $G_{n_1, n_2} = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$ 

la misma columna, es decir, si  $r = p + 1$  y  $s = q + 1$ . Están en *diagonal-derecha* si  $r = p - 1$  y  $s = q$ , como la entradas  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$  en la tabla 3.21.

Supongamos que  $D$  es una digráfica con un factor de dos ciclos,  $\{C_1, C_2\}$ , donde  $C_1 = u_1 u_2 \dots u_{n_1-1} u_{n_1}$  y  $C_2 = v_{n_2} v_{n_2-1} \dots v_2 v_1$ . Si en  $D$  aparece la flecha  $u_p \rightarrow v_q$ , diremos que la entrada es *derecha* y lo denotaremos como  $\overrightarrow{(u_p, v_q)}$ . Si en cambio aparece la flecha  $v_q \rightarrow u_p$ , diremos que la entrada es *izquierda* y lo denotaremos como  $\overleftarrow{(u_p, v_q)}$ . Y si  $u_p$  y  $v_q$  están en la misma parte, diremos que la entrada está *prohibida* y lo denotaremos por  $\overline{(u_p, v_q)}$ . A la tabla obtenida de esta forma a partir de  $D$  la denotaremos por  $\mathcal{T}(D)$ .

Un vértice en  $C_1$  tiene un socio en  $C_2$  si en  $\mathcal{T}(D)$  hay dos entradas contiguas tal que la de la izquierda es una entrada izquierda y la de la derecha en una entrada derecha. En cambio, un vértice en  $C_2$  tiene un socio en  $C_1$  si hay dos entradas en diagonal-derecha tal que la entrada de la izquierda y abajo es derecha y la entrada de la derecha y arriba es izquierda. Los ciclos tienen un buen par de flechas si existen dos entradas consecutivas tal que la entrada de arriba es derecha y la entrada de abajo es izquierda.

Ahora interpretaremos la sección anterior con base en los conceptos que acabamos de introducir en la tabla 3.22. Dada una columna  $H_{n_1, n_2} + (0, k)$ , la proposición 61 dice que cada vez que aparece una entrada derecha, todas las entradas consecutivas hacia abajo serán derechas (véase la figura 3.14) hasta encontrar una entrada prohibida, en este punto la entrada contigua a la derecha de la entrada anterior a la prohibida será derecha y la entrada en el mismo renglón que la entrada prohibida pero en la columna correspondiente a la clase lateral  $H_{n_1, n_2} + (1, k)$  será derecha (véase la figura 3.15). Análogamente, cada vez que aparece una entrada izquierda, todas las entradas consecutivas hacia arriba serán izquierdas (véase la figura 3.16) hasta encontrar

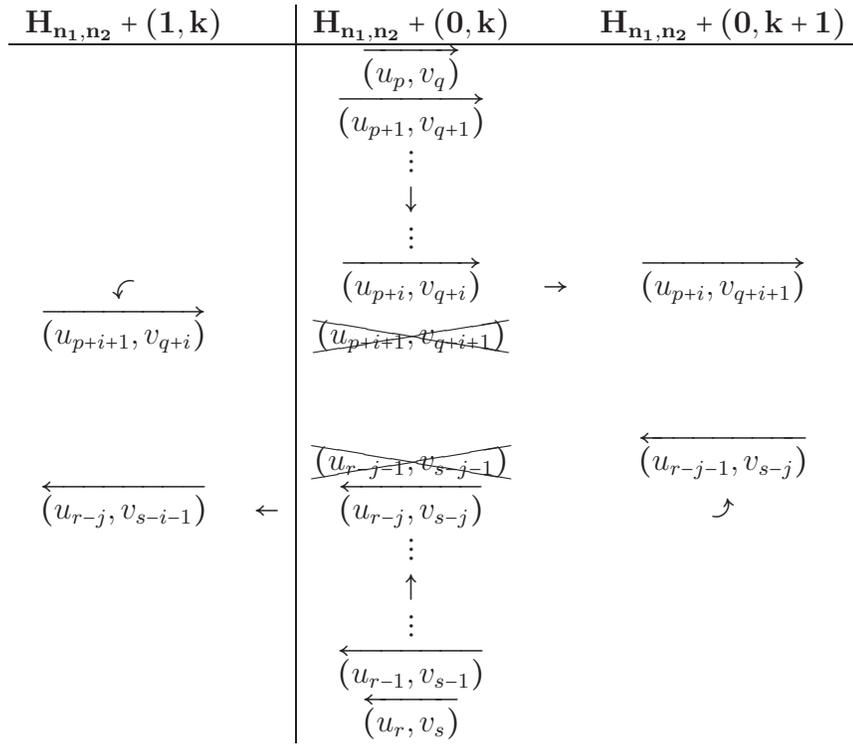


Figura 3.22: Representación de la sección 3.9. Obsérvese que la columna que aparece a la izquierda **no es** la columna que está inmediatamente a la izquierda de la columna central en  $\mathcal{T}(D)$ .

una entrada prohibida, en este punto la entrada en el mismo renglón que entrada anterior a la prohibida pero en la columna correspondiente a la clase lateral  $H_{n_1, n_2} + (1, k)$  será izquierda y la entrada contigua a la derecha de la entrada prohibida será izquierda (véase la figura 3.17). Esto muestra lo que se afirma en la proposición 64.

Que tengamos todas las flechas paralelas significa que existe una columna en la que todas sus entradas son izquierdas o todas sus entradas son derechas. La proposición 65 afirma que cuando en una columna hay una entrada izquierda o derecha pero no es cierto que todas las entradas en esa columna son izquierdas o derechas, respectivamente, implica que hay una entrada prohibida en esa columna.

El lema 66 afirma que si en ninguna columna todas las entradas son derechas o izquierdas y en alguna columna hay una entrada derecha entonces en todas las columnas hay una entrada derecha. Respectivamente si en alguna columna hay una entrada izquierda, en todas las columnas hay entradas izquierdas. La proposición 67 afirma que bajo las mismas condiciones pero, además, suponiendo que entre los ciclos no hay pares buenos de flechas entonces basta que en alguna columna haya una entrada derecha o izquierda para que en todas las columnas haya entradas derechas e izquierdas y el corolario 68 añade que en todas las columnas hay entradas prohibidas.

La proposición 69 dice que si hay entrada que es tanto derecha como izquierda y las entradas inmediatas superior e inferior están prohibidas entonces aparece un par bueno de flechas y el corolario 70 concluye que siempre hay dos entradas distintas, una izquierda y otra derecha (véanse las figuras 3.19 y 3.20).

Finalmente, el lema 71 hace uso de la siguiente observación. En la tabla 3.22, el número de entradas que quedan entre la entrada derecha  $(u_{p+i}, v_{q+i})$  y la entrada izquierda  $(u_{r-j}, v_{s-j})$  en  $H_{n_1, n_2} + (0, k)$  disminuye en uno entre la entrada derecha  $(u_{p+i}, v_{q+i+1})$  y la entrada izquierda  $(u_{r-j-1}, v_{s-j})$  en la columna inmediata derecha,  $H_{n_1, n_2} + (0, k+1)$ . Eventualmente llegaremos a una columna en la que las entradas derecha e izquierda son consecutivas, es decir, son un par bueno de flechas.

# Epílogo

En el principio, nos propusimos llegar a una clase de digráficas que generalizaran los torneos multipartitos de forma análoga a como las digráficas localmente semicompletas generalizan los torneos.

Dos observaciones que aparecieron en [21], y que no tenían relación directa con el tema de dicho trabajo —las digráficas localmente semicompletas en flechas, presentadas en [4]—, constituyeron la clave para dar una generalización *natural* de los torneos multipartitos: las digráficas multipartitas localmente semicompletas.

El teorema 72 extiende el lema 4.2 de [9] —formulado originalmente para las digráficas multipartitas semicompletas— a la clase de las digráficas multipartitas semicompletas.

Además probamos, en el camino, la conjetura de Bang-Jensen que caracteriza la existencia de ciclos hamiltonianos en las digráficas libres de  $\mathcal{H}_4$  y, adicionalmente, también caracterizamos la existencia de trayectorias hamiltonianas en esa misma clase de digráficas.

El corazón de esta tesis es el lema 29. Es el resultado crucial para construir los ciclos y las trayectorias hamiltonianos en las digráficas libres de  $\mathcal{H}_4$  y, curiosamente, dicho lema fue motivado precisamente por la prueba del lema 4.2 en [9] y no es sino un refinamiento de éste.

Todavía falta mucho por hacer. Quedan las conjeturas de la sección 3.7 que, de ser ciertas, darían una condición suficiente para que las digráficas multipartitas localmente semicompletas tuviesen un ciclo hamiltoniano. Esperamos que los resultados que hemos presentado así como una respuesta a las conjeturas aparezcan en [22]. Pero también falta por estudiar la existencia de trayectorias hamiltonianas así como la caracterización de la hamiltonicidad en las digráficas multipartitas semicompletas.

Algunos resultados sobre torneos han podido mejorarse a través de las digráficas localmente semicompletas. Aunque en éstas hay menos flechas, de

cierta forma quedan las flechas *importantes*, lo que permite entender mejor lo que está pasando. Esperamos que las digráficas localmente multipartitas semicompletas arrojen una luz más nítida sobre las digráficas multipartitas semicompletas.

# Bibliografía

- [1] B. Alspach y C. Tabib. A note on the number of 4-circuits in a tournament. En *Theory and practice of combinatorics*, volumen 60 de *North-Holland Math. Stud.*, 13–19 pp. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [2] J. Bang-Jensen, Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments. *J. Graph Theory*, **14(3)** (1990) 371–390.
- [3] J. Bang-Jensen. A note on a special case of the 2-path problem for semicomplete digraphs. In *Graph theory, combinatorics, and applications*, Vol. 1 (Kalamazoo, MI, 1988), 77–86 pp. Wiley, 1991.
- [4] J. Bang-Jensen, Arc-local tournament digraphs: a generalization of tournaments and bipartite tournaments, Technical Report Preprint No. 2, Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, 1993.
- [5] J. Bang-Jensen. The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.* **283** (2004), 1–6.
- [6] J. Bang-Jensen, Y. Guo, G. Gutin y L. Volkmann, A classification of locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.* **167-168** (1997) 101–114.
- [7] J. Bang-Jensen y G. Gutin, Generalizations of tournaments: A survey. *J. Graph Theory*, **28(4)** (1998) 171–202.
- [8] J. Bang-Jensen y G. Gutin. Digraphs: theory, algorithms, and applications. 2a. edición, Ed. Springer, 2009.
- [9] J. Bang-Jensen, G. Gutin y J. Huang, A sufficient condition for a semicomplete multipartite digraph to be Hamiltonian. *Discrete Math.* **161** (1996) 1–12.

- [10] J. Bang-Jensen y J. Huang, Quasi-transitive digraphs. *J. Graph Theory*, **20(2)** (1996) 141–164.
- [11] J. Bang-Jensen, J. Huang y P. Hell, Local tournaments and proper circular arc graphs, *Springer Lecture Notes on Computer Science* **450** (1990) 101–108.
- [12] L. Beineke y K.B. Reid, Tournaments, *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, Nueva York (1979) 169–204.
- [13] P. Camion, Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets, *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959) 2151–2152.
- [14] H. Galeana-Sánchez, A new characterization of perfect graphs. *Discrete Math.* **312** 2751–2755.
- [15] H. Galeana Sánchez e I.A. Goldfeder, A classification of arc-locally semicomplete digraphs. *Elec. Notes in Discrete Math.* **34** 59–64.
- [16] H. Galeana Sánchez e I.A. Goldfeder, A classification of all arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete Math.* **312** (2012) 1883–1891.
- [17] H. Galeana Sánchez e I.A. Goldfeder, Hamiltonian cycles in a generalization of bipartite tournaments with a cycle factor. *Discrete Math.* **315-316** (2014) 135–143. DOI 10.1016/j.disc.2013.10.019.
- [18] H. Galeana Sánchez, I.A. Goldfeder y P. Cano-Vila, Some results on the existence of Hamiltonian cycles in the  $\mathcal{P}$ -composition of digraphs, (*enviado*).
- [19] H. Galeana Sánchez, I.A. Goldfeder y N. Cordero-Michel, Some results on the existence of Hamiltonian cycles in the generalized sum of digraphs, (*enviado*).
- [20] H. Galeana Sánchez, I.A. Goldfeder e I. Urrutia, On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs. *Discrete Math.* **310** (2010) 2495–2498.
- [21] I.A. Goldfeder, *Una clasificación de las digráficas localmente semicompletas en flechas*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.

- 
- [22] I.A. Goldfeder, A new generalization of semicomplete multipartite digraphs, (*en preparación*).
- [23] Ch. Guignebert, *El cristianismo antiguo*. Tr. N. Orfila Reynal. Ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1956.
- [24] G. Gutin, On cycles in complete  $n$ -partite digraphs. Gomel Polytechnic Inst. 1982, Depon. in VINITI 17.05.82, No. 2473 (En ruso).
- [25] G. Gutin, A criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian. *Vesti Acad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk* **1** (1984) 109–110.
- [26] G. Gutin, Effective characterization of complete bipartite digraphs that have a Hamiltonian path. *Kibernetika (Kiev)* **4** (1985) 124–125.
- [27] G. Gutin, Characterization of complete  $n$ -partite digraphs that have a Hamiltonian path. *Kibernetika (Kiev)*, **1** (1988) 107–108.
- [28] G. Gutin, Characterizations of vertex pancyclic and pancyclic ordinary complete multipartite digraphs, *Discrete Math.* **141(1-3)** (1995) 153–162.
- [29] R. Häggkvist y Y. Manoussakis, Cycles and paths in bipartite tournament with spanning configurations. *Combinatorica* **9(1)** (1989) 33–38.
- [30] T.W. Hungerford, *Algebra*. Ed. Springer, 2003.
- [31] Y. Manoussakis y Z. Tuza, Polynomial algorithms for finding cycles and paths in bipartite tournaments. *SIAM J. Disc. Math.* (3) (1990) 537–543.
- [32] J.W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Reinhard and Winston, Nueva York (1969).
- [33] L. Rédei, Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Sci. Szeged* **7** (1934) 39–43.
- [34] K.B. Reid, *Tournaments*, en: *Handbook of Graph Theory*, J.L. Gross y J. Yellen, eds., 2a ed., Chapman and Hall/CRC Press, 2013, 196–225.
- [35] J.J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*. Ed. Prentice Hall, 2003.

- [36] L. Volkmann, Multipartite tournaments: A survey, *Discrete Math.* **307** (2007) 3097–3129.
- [37] S. Wang y R. Wang. The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs, *Discrete Math.* **309** (2009) 6555-6562.