



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDICIONES DÉBILES EN  
MECÁNICA CUÁNTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

ANAHI ALVARADO SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA

2015



Ciudad Univeritaria, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Resumen

Se realizó una detallada revisión acerca de los conceptos referentes a las *mediciones débiles* de una observable física. Para ello se enunciaron y discutieron los postulados de la mecánica cuántica, con particular énfasis en el tema de la medición, diferenciando entre las mediciones directas y las mediciones indirectas. Se determinó que las mediciones débiles pertenecían a las segundas y se presentó su definición operacional dentro del formalismo de von Neumann al introducir los conceptos de pre- y post-selección. Se discutió cuando es posible asignarle un significado físico a los *valores débiles* y en ese caso cual es ese significado. Con ayuda de este esquema se lograron discernir las ventajas que presentan este tipo de mediciones en la resolución de varias paradojas cuánticas, como el experimento de Hardy, la paradoja de Cheshire y la paradoja de las tres cajas. Además se discutió como utilizando el formalismo de las mediciones débiles más pre- y post- selección fue posible medir ciertas cantidades físicas de forma directa: la función de onda y la trayectoria de un partícula, entre otras. Tales mediciones no son realizables mediante mediciones dentro del formalismo estándar.

Palabras clave: medición débil, valor débil, gatos de Cheshire, Hardy, von Neumann, mediciones indirectas.

---

# Dedicatoria

A...

---

# Agradecimientos

Este trabajo...

Agradezco también el apoyo dado por el programa PAPIIT en el proyecto IN110114.

---

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>4</b>
<b>Índice general</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>I Fundamentos</b>	<b>12</b>
<b>1. Postulados de la Mecánica Cuántica</b>	<b>14</b>
1.1. Postulados de la Mecánica Cuántica en el Formalismo de Dirac . . . . .	14
1.1.1. Postulado I (Descripción del estado de un sistema) . . . . .	14
1.1.2. Postulado II (Descripción de cantidades físicas) . . . . .	15
1.1.3. Postulado III (Resultado de una medición de cantidades físicas) . . .	16
1.1.4. Postulado IV (Probabilidad de medición física) . . . . .	16
1.1.5. Postulado V (Colapso de la función de onda) . . . . .	17
1.1.6. Postulado VI (Evolución temporal) . . . . .	18
1.2. Traza parcial . . . . .	18

1.3.	Matriz de densidad . . . . .	18
1.3.1.	El caso de estados puros y estados mezcla . . . . .	19
1.3.2.	Matriz de densidad reducida . . . . .	20
1.4.	Valores esperados . . . . .	21
1.5.	Postulados de la Mecánica Cuántica en el formalismo de la matriz de densidad	22
1.5.1.	Postulado I (Descripción del estado de un sistema) . . . . .	22
1.5.2.	Postulado II (Descripción de cantidades físicas) . . . . .	23
1.5.3.	Postulado III (Medida de cantidades físicas) . . . . .	23
1.5.4.	Postulado IV (Probabilidad de medición física) . . . . .	23
1.5.5.	Postulado V (Colapso de la función de onda) . . . . .	24
1.5.6.	Postulado VI (Evolución temporal) . . . . .	24
1.6.	Entropía de Von Neumann . . . . .	24
1.6.1.	Entropía de enredamiento bipartita de Von Neumann . . . . .	25
 <b>II Mediciones en Mecánica Cuántica</b>		<b>27</b>
 <b>2. ¿Qué es una medición en Mecánica Cuántica?</b>		<b>29</b>
2.1.	Mediciones proyectivas, el esquema básico . . . . .	32
2.1.1.	La post-selección y la regla de Aharonov-Bergmann-Lebowitz . . . . .	36
2.2.	Mediciones POVM (medición de operadores con valores positivos) . . . . .	38
2.2.1.	Sistemas auxiliares en el formalismo POVM . . . . .	41
2.3.	Mediciones indirectas . . . . .	42
2.3.1.	La pre-medición . . . . .	44
2.3.2.	La lectura: Mediciones proyectivas sobre el medidor . . . . .	46
2.3.3.	Mediciones consecutivas . . . . .	48



2.3.4. Aplicaciones del esquema auxiliar . . . . .	49
<b>III Mediciones débiles en Mecánica Cuántica</b>	<b>58</b>
<b>3. Mediciones débiles</b>	<b>60</b>
3.1. Mediciones débiles en el esquema auxiliar . . . . .	61
3.2. Mediciones débiles y post-selección . . . . .	65
3.3. Relación entre valor débil y la fórmula de Aharonov-Bergmann-Lebowitz (ABL)	68
3.4. Interpretaciones físicas de los valores débiles . . . . .	72
3.4.1. Valores débiles complejos en mediciones cuánticas . . . . .	74
3.4.2. ¿Cómo las mediciones débiles suministran una descripción completa de un sistema cuántico para una observable dicotómica? . . . . .	80
<b>IV Aplicaciones</b>	<b>83</b>
<b>4. Algunas aplicaciones para las mediciones débiles</b>	<b>85</b>
4.1. Mediciones débiles en el protocolo de von Neumann . . . . .	85
4.2. Valores débiles para qubits dobles . . . . .	87
4.3. Paradoja de las tres cajas . . . . .	88
4.3.1. Realización Experimental del Problema de las Cajas Cuánticas . . . . .	91
4.4. Los gatos de Cheshire cuánticos . . . . .	95
4.4.1. Experimento pensado gatos de Cheshire cuánticos . . . . .	99
4.4.2. Experimento pensado gatos de Cheshire cuánticos usando mediciones débiles . . . . .	103
4.4.3. Gato de Cheshire de N electrones . . . . .	105
4.4.4. Observación de un Gato de Cheshire cuántico en un experimento con un interferómetro de onda materia . . . . .	107

4.4.5. Valores débiles no representativos en mecánica cuántica . . . . .	116
4.5. Paradoja de Hardy . . . . .	119
4.6. Medición directa de la función de onda cuántica . . . . .	123
<b>V Conclusiones</b>	<b>131</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>133</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>135</b>

---

# Introducción

El conocimiento de la realidad se va transformando y profundizando en la medida en que se ahonda y se intentan explicar las siempre crecientes preguntas acerca de la naturaleza. La mecánica cuántica, por supuesto, ayuda justamente a contestar muchas de esas preguntas, aunque al mismo tiempo acarrea otras de igual trascendencia, como por ejemplo el tema de *la medición*. Este tema es tan antiguo como la mecánica cuántica misma y su propia interpretación no sólo consiste en *dar* una descripción de la naturaleza por una atenta observación de forma *completamente ajena* a la misma, como sucede dentro del formalismo clásico, sino que en todos los sistemas cuánticos la medición misma se realiza con la ayuda de un nuevo objeto cuántico que se debe tomar en consideración.

Existen diferentes perspectivas desde las cuales se intenta dar una respuesta al problema de la medición en la mecánica cuántica hasta tal punto que en 1983 Wheeler y Zurek [2], publican un tratado en donde se relata la historia de la medición en mecánica cuántica hasta 1983 [9] y desde entonces, el interés en el tema no ha hecho sino incrementar, en particular ahora en lo referente a su conexión con el desarrollo de la teoría de la información cuántica [4] y la fundamentación de la mecánica cuántica [35]. El protocolo de medición más común y más utilizado en la actualidad es el conocido formalismo de Von Neumann propuesto en su compendio de mecánica cuántica de 1932 [1]. Von Neumann cubrió varios de los aspectos fundamentales acerca de la medición y propuso un formalismo estándar, aplicable a la gran mayoría de los sistemas físicos; sin embargo en las última décadas ha sido creciente el énfasis en un nuevo enfoque de medición de observables físicas conocido como el formalismo de las *mediciones indirectas*, en las cuales el proceso de medición es modelado en detalle considerando cómo el sistema bajo estudio interactuó con el aparato de medición.

De entre las mediciones indirectas, existe uno que ha tomado una relevancia trascendente debido a su gran aplicabilidad, el formalismo de las *mediciones débiles*. Desde la aparición del artículo pionero en 1988 de Aharonov, Albert y Vaidman [5], en donde se proponen las mediciones débiles de una observable física como una herramienta para interpretar ciertos

resultados específicos, se han realizado numerosos trabajos referentes al tema. Aharonov y sus colaboradores comenzaron utilizando las características de la mecánica cuántica que la distinguen de la física clásica: una medición en mecánica cuántica irremediamente perturba el sistema medido. Observaron que podían cuantificar la intensidad de la interacción entre el sistema cuántico de interés y el medidor, de tal manera que aunque la perturbación se disminuye progresivamente aún es posible obtener información que se puede extraer a partir del proceso de medición, ellos notaron que aunque la información cada vez es menos clara debido precisamente a la debilidad de la medición, es posible sacar ventaja de este fenómeno de compensación repitiendo el experimento en numerosas ocasiones. Además, mostraron como puede extraer nueva física de este proceso de medición débil cuando se combina con una juiciosa elección del estado inicial (pre-selección) y del estado final (post-selección) del sistema bajo estudio.

El presente trabajo está dedicado al estudio de las mediciones débiles. Lo que se pretende es presentar de manera clara y detallada cuales son las definiciones operacionales que varios autores han ido propuesto referentes a las mediciones débiles, y cual, cuando ello es posible, es la interpretación física que conllevan los valores débiles de una observable física. Se busca en todo momento que el presente escrito sea auto contenido, definiendo y discutiendo en lo posible los conceptos necesarios para llegar al entendimiento del formalismo completo asociado a las mediciones débiles.

En la primera parte se presentan los fundamentos de la mecánica cuántica desde un punto de vista operacional. En el primer capítulo se presentan las reglas básicas del formalismo cuántico en es caso de un sistema simple, mientras que en el segundo y tercer capítulo se generalizan al formalismo del operador de densidad. En el tercer capítulo se discuten las características de los valores esperados cuando se realiza una medición proyectiva y finalmente se estudia la entropía de enredamiento cuántico.

En la segunda parte se discute en detalle lo que es una medición en mecánica cuántica y la interpretación física de los resultados que se obtienen. Posteriormente se hace una distinción clara entre las mediciones proyectivas (von Neumann) y las mediciones indirectas. Se introducen además los conceptos de pre-selección y post-selección, para llegar finalmente a establecer lo que son las mediciones débiles.

En la tercera parte el enfoque ya es tanto a la aplicabilidad como a la interpretación de los valores débiles. Se resuelven algunas paradojas, gatos de Cheshire, la paradoja de las tres cajas, la paradoja de Hardy, y se miden de manera directa algunas propiedades físicas del sistema como la trayectoria de una partícula, la función de onda para un fotón, entre

---

otras. Finalmente, se discute cuando las mediciones débiles representan alguna propiedad física del objeto bajo estudio y de ser así cual es esa propiedad.

---

# Parte I

## Fundamentos

*¿Quién lamenta los estragos, si los frutos son placeres?*

Goethe

---

# Capítulo 1

## Postulados de la Mecánica Cuántica

### 1.1. Postulados de la Mecánica Cuántica en el Formalismo de Dirac

La Mecánica Cuántica es un marco matemático del desarrollo de las teorías físicas [11].

A pesar de que su desarrollo se sitúa en 1900 con el descubrimiento del “cuanto” de Max Planck, fue hasta los años 30 cuando se establecieron los postulados (o principios) matemáticos de la Mecánica Cuántica. Podemos relacionar estos postulados fundamentalmente con los trabajos de Born, Dirac y, sobre todo, de John von Neumann (1932). Estos postulados proveen una conexión entre el mundo físico y el formalismo matemático de la Mecánica Cuántica. A continuación enunciaremos y hablaremos al respecto de cada uno de ellos.

#### 1.1.1. Postulado I (Descripción del estado de un sistema)

Dado un sistema físico aislado, siempre es posible asociarle un espacio vectorial complejo  $\mathcal{H}$ , el cual es además completo, con producto interior, conocido como *espacio de estados*, en el cual el sistema queda completamente descrito para un tiempo  $t_0$ , por un *vector de estado*  $|\psi(t_0)\rangle$  perteneciente a dicho espacio.

Es de suma importancia el hecho de que  $|\psi(t_0)\rangle$  es un vector de estado. Este primer postulado implica el Principio de Superposición, es decir, una combinación lineal de vectores



de estado es un vector de estado. Así

$$|\Psi_i\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle ,$$

es una superposición de los estados  $|\psi_i\rangle$  con amplitud de probabilidad de encontrar al sistema descrito en el estado  $|\psi_i\rangle$  dada por  $\alpha_i$ .

### 1.1.2. Postulado II (Descripción de cantidades físicas)

Cada cantidad física medible  $\mathcal{A}$  está descrita por un operador *Hermitiano*  $\hat{A}$  que actúa en  $\mathcal{H}$ , y cuyos eigenvectores constituyen una base del espacio de estados. Este operador es una *observable*. Se define un operador hermitiano como aquel que es igual a su adjunto:

$$A = \hat{A}^\dagger$$

A partir de esta definición, se pueden deducir dos propiedades esenciales dentro del contexto de la mecánica cuántica:

(i) Los eigenvalores de un operador hermitiano son reales. En efecto, para un función de onda  $|\psi\rangle$  arbitraria, se cumple que

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

.

(ii) Dos eigenvectores correspondientes a dos eigenvalores diferentes son ortogonales entre sí. Observemos que si  $|\phi_m\rangle$  y  $|\phi_n\rangle$  son eigenvectores de  $\hat{A}$  con eigenvalores  $m$  y  $n$  respectivamente, entonces

$$\langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle = n \langle \phi_m | \phi_n \rangle .$$

Pero además

$$\langle \phi_n | \hat{A} | \phi_m \rangle = m \langle \phi_n | \phi_m \rangle .$$

Por la propiedad de hermiticidad

$$\langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_m \rangle \Rightarrow (m - n) \langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0 \Rightarrow \langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0$$

si  $m \neq n$ .

### 1.1.3. Postulado III (Resultado de una medición de cantidades físicas)

El único posible resultado de la medición de una cantidad física  $\mathcal{A}$  es uno de los eigenvalores de la observable  $\hat{A}$ . Una medida de  $\mathcal{A}$  siempre nos da un eigenvalor  $a_n \in \mathbb{R}$ . De esta forma,

$$\hat{A}|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$$

Si los eigenvalores de  $\hat{A}$  son degenerados, esto es,  $|u_n\rangle$  no es único para cada  $a_n$ , denotamos los estados propios como  $|u_n^i\rangle$ , donde se tiene que

$$\hat{A}|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle; \quad i = 1, 2, \dots, g_n$$

En este caso si la base está ortonormalizada, i.e.,  $\langle u_n^i | u_n^i \rangle = 1$ , el vector  $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_n$  puede escribirse como

$$|\psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \implies c_n^i = \langle u_n^i | \Psi \rangle .$$

Así se tiene que la probabilidad  $\mathcal{P}(a_n)$  de encontrar el eigenvalor  $a_n$  al medir  $\mathcal{A}$  es

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \Psi \rangle|^2 .$$

### 1.1.4. Postulado IV (Probabilidad de medición física)

Cuando una cantidad física  $\mathcal{A}$  es medida en un sistema en el estado normalizado  $|\Psi\rangle$ , la probabilidad  $\mathcal{P}(a_n)$  de obtener el eigenvalor  $a_n$  de la correspondiente observable  $\hat{A}$  es

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \Psi \rangle|^2 ,$$

donde  $g_n$  es el grado de la degeneración de  $a_n$  y  $\{|u_n^i\rangle\}$  ( $i = 1, 2, \dots, g_n$ ) es un conjunto ortonormal de vectores que forman una base en el eigensubespacio  $\mathcal{H}_n$  asociado con el eigenvalor  $a_n$  de  $\hat{A}$ .

Para este postulado, es obviamente necesario que si el eigenvalor  $a_n$  es degenerado, la probabilidad  $\mathcal{P}(a_n)$  es independiente de la elección de  $\{|u_n^i\rangle\}$  base en  $\mathcal{H}_n$ . Para verificar esto

consideremos el vector

$$|\psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \implies c_n^i = \langle u_n^i | \Psi \rangle .$$

$|\psi_n\rangle$  es la parte de  $|\Psi\rangle$  la cual pertenece a  $\mathcal{H}_n$ , que es la proyección de  $|\Psi\rangle$  en  $\mathcal{H}_n$ , esto es,

$$|\psi_n\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i | \Psi \rangle = P_n |\Psi\rangle ,$$

donde

$$P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i| ,$$

que es el proyector en  $\mathcal{H}_n$ . Ahora calculamos la raíz de la norma de  $|\psi_n\rangle$  así

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 .$$

Sin embargo,  $\mathcal{P}(a_n)$  es la raíz de la norma de  $|\psi_n\rangle = P_n |\psi\rangle$ , el proyector de  $|\psi\rangle$  en  $\mathcal{H}_n$ . Para esta expresión es claro que el cambio en la base en  $\mathcal{H}_n$  no afecta  $\mathcal{P}(a_n)$ . La probabilidad se escribe

$$\mathcal{P}(a_n) = \langle \Psi | P_n^\dagger P_n | \Psi \rangle ,$$

o usando el hecho de que  $P_n$  es hermitiano ( $P_n^\dagger = P_n$ ) y que este es un proyector ( $P_n^2 = P_n$ ), tenemos

$$\mathcal{P}(a_n) = \langle \Psi | P_n | \Psi \rangle .$$

### 1.1.5. Postulado V (Colapso de la función de onda)

Si la medida de una cantidad física  $\mathcal{A}$  sobre el sistema en el estado  $|\Psi\rangle$  da como resultado  $a_n$ , el sistema *inmediatamente después de la medida* es la proyección normalizada

$$\frac{P_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | P_n | \Psi \rangle}}$$

de  $|\Psi\rangle$  en el eigensubespacio asociado con  $a_n$ , donde

$$P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i| .$$

Entonces

$$|\Psi'\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{g_n} \langle u_n^i | \Psi \rangle |u_n^i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} \langle \Psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \Psi \rangle}}.$$

### 1.1.6. Postulado VI (Evolución temporal)

La evolución del vector de estado  $|\Psi(t)\rangle$  está descrita por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle,$$

donde  $\hat{H}(t)$  es llamado el operador Hamiltoniano del sistema, y es la observable asociada con la energía total de el sistema.

## 1.2. Traza parcial

Es una generalización de la traza. Mientras que la traza es una función a valores escalares sobre operadores, la traza parcial es una función operador valorada. La traza parcial tiene usos en la interpretación de estados relativos de la mecánica cuántica.

Supongamos  $V, W$  espacios vectoriales de dimensiones  $m, n$  respectivamente. La traza parcial  $\text{Tr}_V$  es una función  $L(V \otimes W) \ni T \mapsto \text{Tr}_V(T) \in L(V)$ . Es decir,

$$\text{Tr}_V(R \otimes S) = R \text{Tr}(S) \quad \forall R \in L(V) \quad \forall S \in L(W)$$

y se caracteriza como el el único operador lineal que:

- $\text{Tr}_V : V \otimes W \rightarrow V$  tal que
- $\text{Tr}_V(1_{V \otimes W}) = \dim W \cdot 1_V$   $\text{Tr}_V(T(1_V \otimes S)) = \text{Tr}_V((1_V \otimes S)T) \quad \forall S \in L(W) \quad \forall T \in L(V \otimes W)$

## 1.3. Matriz de densidad

La matriz de densidad conocida también como *operador de estado*, *operador de densidad* u *operador estadístico*  $\hat{\rho}$ , fue por primera vez tratada matemáticamente por John von Neumann en 1927, e independientemente pero menos sistemáticamente tratada por Lev Landau

y Felix Bloch en 1927 y 1946, respectivamente. Es un operador lineal que contiene todas las propiedades estadísticas de un sistema cuántico en la situación más general concebible, es decir, es una generalización de la función de onda.

La matriz de densidad es el análogo en Mecánica Cuántica a una medición de probabilidad en el espacio fase (distribución de probabilidades el espacio de momento y la posición) en un sistema clásico.

Supongamos que un sistema puede ser encontrado en los estados  $|\psi_1\rangle$  con probabilidad  $p_1$  o puede ser encontrado en el estado  $|\psi_2\rangle$  con probabilidad  $p_2$  o puede ser encontrado en el estado  $|\psi_3\rangle$  con probabilidad  $p_3$ , y así sucesivamente. El operador de densidad de este sistema es [14]

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.1)$$

donde  $\{|\psi_i\rangle\}$  no son necesariamente ortogonales y  $\sum_i p_i = 1$ , con  $0 \leq p_i \leq 1$ . En una base ortonormal  $\{|u_m\rangle\}$ , los elementos de la correspondiente matriz de densidad son [14]

$$\rho_{mn} = \sum_i p_i \langle u_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i | u_n \rangle = \langle u_m | \hat{\rho} | u_n \rangle \quad (1.2)$$

Análogamente el operador de densidad puede ser definido en términos de la matriz de densidad como

$$\hat{\rho} = \sum_{mn} |u_m\rangle \rho_{mn} \langle u_n| \quad (1.3)$$

Este tratamiento matemático es muy útil cuando tenemos información incompleta acerca de un sistema, donde típicamente se recurre al concepto de probabilidad cuando una medición se lleva a cabo sobre un subsistema del mismo.

En la práctica los términos de matriz de densidad y operador de densidad son usados indistintamente.

Para poder definir mejor la matriz de densidad es necesario ahondar en la descripción de la estadística de estados puros y estados mezcla.

### 1.3.1. El caso de estados puros y estados mezcla

Un sistema con un vector de estado  $|\psi\rangle$  es llamado estado puro. Sin embargo también es posible describir un sistema que esté en un ensemble estadístico de diferentes vectores de

estado. Por ejemplo, estos pueden tener un 50% probabilidad de que el vector de estado sea  $|\psi_1\rangle$  y un 50% de probabilidad de que el vector sea  $|\psi_2\rangle$ . Este sistema puede ser un estado mezcla.

La matriz de densidad es especialmente usada para estados mezcla, ya que pueden ser caracterizados por una matriz de densidad simple.

Un estado mezcla es diferente para una superposición cuántica. Una superposición de estados puros es otro estado puro; por ejemplo,  $|\psi\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)/\sqrt{2}$ .

Un estado es puro si, y sólo si, su matriz de densidad  $\hat{\rho}$  satisface  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ .

Por otro lado, dadas dos matrices de densidad  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$  cuya traza satisface  $0 \leq \text{Tr} \hat{\rho} \leq 1$  y un escalar real  $0 < \lambda < 1$  siempre se cumple

$$\hat{\rho} = \lambda \hat{\rho}_1 + (1 - \lambda) \hat{\rho}_2 \in \mathcal{H}. \quad (1.4)$$

En el caso en el cual  $\lambda \neq 0, 1$  se cumple  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$  se dice que la matriz de densidad representa un estado puro en caso contrario representa un estado mezcla. En ambos casos existe sólo una matriz de densidad asociada [12].

### 1.3.2. Matriz de densidad reducida

Una importante aplicación del operador de densidad es la caracterización de sistemas que son hechos de dos o más sistemas individuales. Pensemos en enredamiento. Imaginemos que tenemos un sistema donde un observador, que denominaremos A o Alice, tiene una parte del sistema, y otro observador, que llamaremos B o Bob, tiene la otra parte del sistema. Alice y Bob se alejan en direcciones opuestas. Es claro ver que el estado completo del sistema contiene información sobre ambos subsistemas. Por otro lado, debido a que Alice y Bob están muy lejos uno de otro, Alice no sabe nada al respecto del sistema de Bob, a menos que le llame y le pregunte, y viceversa. Nosotros necesitamos una forma de tomar el operador de densidad para el estado completo y reducirlo en un operador de densidad que sólo representa lo que Bob ve. Esto puede ser hecho al calcular la traza parcial, la cual nos da el operador de densidad de Bob. Llamamos a este operador de densidad el operador de densidad reducido [3].

El operador de densidad reducido fue introducido por Paul Dirac en 1930. Es importante notar que muchas propiedades de sistemas cuánticos están completamente determinadas

por los eigenvalores del operador de densidad reducido del sistema [10]. Veámoslo más detalladamente. Si consideremos sistemas  $A$  y  $B$  con sus respectivos espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , el estado del sistema es

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1.5)$$

En general no hay manera para asociar un estado puro a la componente del sistema  $A$ . Sin embargo podemos asociar una matriz de densidad  $\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ , el cual es el operador de proyección en este estado. El estado de  $A$  es la traza parcial de  $\rho$  sobre la base del sistema  $B$ :

$$\rho_A = \sum_j \langle j|_B (|\Psi\rangle \langle\Psi|) |j\rangle_B = \text{Tr}_B \rho , \quad (1.6)$$

donde  $\rho_A$  es la matriz de densidad reducida de  $\rho$  en un subsistema de  $A$ . Coloquialmente nosotros reducimos el sistema  $B$  para obtener la matriz de densidad reducida sobre  $A$ .

Es importante mencionar que la matriz de densidad reducida para un estado puro enredado, puede corresponder a un estado mezcla.

## 1.4. Valores esperados

En Mecánica Cuántica usualmente la información que uno tiene acerca de un sistema es incompleta. Por ejemplo, el estado del sistema puede ser el estado  $|\psi_1\rangle$  con una probabilidad  $p_1$  o el estado del sistema puede ser  $|\psi_2\rangle$  con una probabilidad  $p_2$ , etc. Obviamente

$$p_1 + p_2 + \dots = \sum_k p_k = 1 .$$

Existe un operador hermitiano  $\hat{O}$  con valores propios  $\lambda_i$  y vectores asociados  $|\lambda_i\rangle$  para cualquier cantidad real  $\lambda$ . De Postulado I de la Mecánica Cuántica sabemos que es posible escribir el sistema como una expansión de su vector de estado  $|\Psi\rangle$  en los vectores propios  $\{|\lambda_i\rangle\}$  como [15]

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle . \quad (1.7)$$

Observamos que no se está tomando en cuenta la degeneración. Si existiera degeneración, podemos usar el método de descomposición de Gram-Schmidt. Si además se tienen infinitas copias del estado realizando infinitas mediciones, es posible obtener un promedio para el

resultado  $\lambda$ , calculado como

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_i |c_i|^2 \lambda_i = \sum_i \lambda_i \langle \Psi | (|\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle . \quad (1.8)$$

A esta cantidad se le denomina valor esperado.

En términos de la matriz de densidad, si tenemos un operador  $\hat{A}$  (el cual describe una observable  $A$  de un sistema), el valor esperado  $\langle A \rangle$  está dado por [14]

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_{mn} \langle u_m | \hat{\rho} | u_n \rangle \langle u_n | \hat{A} | u_m \rangle = \sum_{mn} \rho_{mn} A_{nm} = \text{Tr}(\rho A) . \quad (1.9)$$

El valor esperado de  $A$  para un estado mezcla es la suma de los valores esperados de  $A$  para cada uno de los estados puros  $|\psi_i\rangle$ .

## 1.5. Postulados de la Mecánica Cuántica en el formalismo de la matriz de densidad

En una amplia variedad de casos de interés es necesario estudiar un gran número de sistemas idénticos que en su conjunto forman lo que se conoce como *ensemble*. Sin embargo, aunque la preparación de cada uno de los sistemas sea semejante, algunos de ellos se encontrarán en dos o más estados cuánticos distintos. En este sentido, solamente se puede hablar de que un sistema se encuentre en un cierto estado con una *probabilidad característica* por lo cual ya no basta con una sola función de onda para la descripción completa del ensemble. Se dice ahora que el sistema cuántico es una *mezcla*. De esta manera, es claro que una mezcla es una generalización de un sistema cuántico puro y la manera adecuada para el estudio de ellas es definiendo un operador promedio conocido como *operador de densidad o matriz de densidad* denotado comúnmente por  $\hat{\rho}$ . Con ayuda de esta matriz, es posible reformular los distintos postulados de la Mecánica Cuántica para conjuntos de sistemas más generales como se mostrará a continuación.

### 1.5.1. Postulado I (Descripción del estado de un sistema)

Dado un *ensemble* de sistemas físicos aislados, cada uno de ellos representado por un vector de estado perteneciente a un espacio vectorial complejo  $\mathcal{H}$  con producto interior, conocido como *espacio de estados*. El conjunto de sistemas queda completamente descrito



para un tiempo  $t_0$ , por un *operador de densidad*  $\hat{\rho}(t_0)$  que actúa sobre vectores pertenecientes a dicho espacio.

### 1.5.2. Postulado II (Descripción de cantidades físicas)

En el lenguaje de la matriz de densidad, el Postulado II no cambia, de cualquier manera se menciona por completez. Cada cantidad física medible  $\mathcal{A}$  está descrita por un operador *Hermitiano*  $\hat{A}$  que actúa en  $\mathcal{H}$ . Este operador es una *observable*.

### 1.5.3. Postulado III (Medida de cantidades físicas)

En el caso más general, cuando el ensemble está descrito por una mezcla de superposiciones incoherentes de estados puros normalizados (aunque no necesariamente ortogonales)  $|s_a\rangle$ ,  $a = 1, 2, \dots, k$ , cada uno con su respectivo operador de proyección  $\hat{\mathbb{P}}_a$  y con peso estadístico asociado con probabilidad  $p_a$ , la matriz de densidad  $\hat{\rho}$  está dada por

$$\hat{\rho} = \sum_{a=1}^k p_a \hat{\mathbb{P}}_a . \quad (1.10)$$

A la luz de esta consideración, se puede establecer que el valor esperado de una observable física  $\mathcal{A}$  estará determinado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) . \quad (1.11)$$

La ecuación anterior es claramente una generalización al postulado equivalente en el caso de un sistema puro.

### 1.5.4. Postulado IV (Probabilidad de medición física)

Consecuentemente, la probabilidad de obtener como resultado de la medición un valor  $a$ , donde  $a$  es un eigenvalor de  $\hat{A}$ , está dada por

$$\text{Prob}(a|\hat{\rho}) = \langle s_a | \hat{\rho} | s_a \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbb{P}}_a \hat{\rho} \hat{\mathbb{P}}_a) = \text{Tr}(\hat{\mathbb{P}}_a \hat{\rho}) . \quad (1.12)$$

La última ecuación se sigue de la invariancia de la traza bajo permutaciones cíclicas y del hecho de que un proyector  $\hat{\mathbb{P}}$  es idempotente.

### 1.5.5. Postulado V (Colapso de la función de onda)

La condición de colapso condicional o selectivo se enuncia de la siguiente manera. Supóngase que después de la medición se obtiene como resultado particular  $a$ . Como consecuencia la matriz de densidad  $\hat{\rho}$  se colapsa en  $\hat{\rho}_0$ , de acuerdo con la siguiente ecuación

$$\hat{\rho} \rightarrow \frac{\hat{\mathbb{P}}_a \hat{\rho} \hat{\mathbb{P}}_a}{\text{Prob}(a|\hat{\rho})} = \hat{\rho}_0(a) . \quad (1.13)$$

Esta es la llamada regla de Luders de cómo una medición ideal transforma (o colapsa) la matriz de densidad inicial.

### 1.5.6. Postulado VI (Evolución temporal)

La evolución temporal del operador de densidad  $\rho(t)$  está descrita esencialmente por la ecuación de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] ,$$

donde  $\hat{H}(t)$  es llamado el operador Hamiltoniano del sistema.

## 1.6. Entropía de Von Neumann

Llamada así por John von Neumann, la cual es una extensión de el concepto de entropía clásica de Gibbs. Es usada en mecánica cuántica estadística.

Para un sistema mecánico cuántico descrito por una matriz de densidad  $\rho$  la entropía es

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) . \quad (1.14)$$

Como hemos visto si escribimos  $\rho$  en términos de sus eigenvectores  $|1\rangle, |2\rangle \dots$  tenemos,

$$\rho = \sum_j \eta_j |j\rangle \langle j|$$

de esta forma la entropía de von Neumann es,

$$S = - \sum_j \eta_j \ln \eta_j.$$

Así  $S$  puede ser visto como una cantidad de información de la entropía teórica de Shannon. Algunas propiedades son:

- $S(\rho)$  es cero si y sólo si  $\rho$  representa un estado puro.
- $S(\rho)$  es máximo e igual a  $\ln N$  para un estado mixto maximal,  $N$  denota la dimensión del espacio de Hilbert
- $S(\rho)$  es invariante sobre cambios en la base de  $\rho$ .

La entropía de von Neumann es usada en diferentes formas (entropía condicional, entropía relativa, etc [10]. Mediciones enredadas son basadas en algunas relaciones cuánticas directas de la entropía de von Neumann, de ahí nuestro interés en este concepto.

En la siguiente parte analizaremos un poco más el concepto de enredamiento a partir de la entropía de von Neumann.

### 1.6.1. Entropía de enredamiento bipartita de Von Neumann

El enredamiento en un sistema no sólo es uno de los aspectos más intrigantes predichos por la teoría cuántica, también es un recurso fundamental para la teoría de la información cuántica [17].

La entropía de enredamiento es una medición del enredamiento para un estado cuántico.

Para sistemas bipartitas, la entropía de enredamiento  $S_E$  es la entropía de Von Neumann de uno de los estados reducidos en el caso de un estado puro, i.e.,

$$\mathcal{S}_E(\rho_A) = - \text{Tr}[\rho_A \log_2 \rho_A] = \mathcal{S}(\rho_B) , \quad (1.15)$$

donde  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$  y  $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$  son las matrices de densidad reducidas de cada partición.

Es claro que por ya que la entropía depende de un logaritmo en base 2, el máximo enredamiento en una bipartición se da cuando tenemos un  $\log(2)$ .

La entropía de enredamiento es la máxima cantidad de información clásica que la medición de un sistema cuántico puede proporcionar sobre los resultados de las mediciones realizadas [18].

Para el caso de un estado mezcla tenemos la *conurrencia*, donde el enredamiento de formación de un estado mezcla  $\rho$  es el mínimo del promedio de enredamiento de un ensemble de estados puros que representan a  $\rho$ . Esta es la tesis de uno de los trabajos de Wootters [21] de 1998.

---

## Parte II

# Mediciones en Mecánica Cuántica

*No hay hechos, sólo interpretaciones*

Nietzsche

---

## Capítulo 2

# ¿Qué es una medición en Mecánica Cuántica?

La interpretación y el aparato matemático de la Mecánica Cuántica fueron creados hace más de 80 años y desde entonces innumerables experimentos en distintas áreas de la Física la han confirmado. Sin embargo, no hemos obtenido un entendimiento completo de la Mecánica Cuántica y tampoco lo que significa una medición en ella.

En Mecánica Cuántica el proceso de medición siempre tiene un efecto sobre el objeto observado, es decir, no podemos atribuir propiedades a un sistema cuántico aislado. Sólo podemos atribuir cualidades físicas si realizamos una medición.

Se pueden describir diferentes tipos de mediciones de un sistema  $S$ : proyectivas, indirectas, POVM.

Para ayudarnos a aclarar algunos puntos, seguiremos el tratamiento hecho por Kofman y colaboradores en [6]. Imaginemos las siguientes condiciones: un operador  $\hat{A}$  que tiene eigenvalores  $a_i$  discretos y no degenerados, y los correspondientes eigenvectores  $|a_i\rangle$ , y supongamos que el sistema  $S$  se encuentra en el estado  $\rho$ . Una medición de  $A$  nos da el eigenvalor  $a_i$  con probabilidad

$$\mathcal{P}_i = \langle a_i | \rho | a_i \rangle , \quad (2.1)$$

y a causa de esta medición el estado del sistema se convierte en el estado  $|a_i\rangle$  (nuestro llamado colapso de la función de onda).

Como mediciones subsecuentes no pueden proveer ninguna información sobre el estado inicial del sistema, ya que no existe correlación entre los estados del sistema antes y después

de la medición, se dice que las mediciones son *completas*.

Cuando el operador  $\hat{A}$  tiene eigenvalores degenerados, el postulado de proyección al ser generalizado nos arroja que de mediciones subsecuentes se puede extraer información adicional acerca del estado inicial del sistema. Esto es, mediciones de observables con eigenvalores degenerados son generalmente incompletas.

En Mecánica Cuántica una medición cambia el estado del sistema medido. Como resultado, mediciones consecutivas de un sistema cuántico dan como resultado una evolución del sistema, la cual es básicamente diferente de la evolución unitaria debido al hamiltoniano. La evolución inducida por la medición es un fenómeno puramente cuántico. Esta evolución es generalmente aleatoria. Así podemos transformar un estado arbitrario de un sistema cuántico en cualquier otro estado con una probabilidad arbitrariamente cercana a la primera realizando un suficientemente grande número de mediciones proyectivas.

De esta forma podemos inferir al menos dos importantes cualidades de las mediciones cuánticas:

- Obtención de información de los valores de una observable física, es decir, *hacer una medición*.
- Evolución no-unitaria del sistema cuántico (generalmente la evolución de un sistema cuántico es generada por ambos las mediciones y el hamiltoniano).

Cuando las mediciones juegan ambos papeles simultáneamente, tenemos casos muy especiales y de mucho interés. Un ejemplo es la evolución condicional debido a mediciones post-selección. Aquí la información provista por las mediciones se usa para elegir solamente un subconjunto de realizaciones de mediciones inducidas por la evolución aleatoria. Recientemente han aparecido generalizaciones del postulado de proyección para mediciones no ideales y débiles (citar referencia).

Cuando el estado de un sistema después de una medición no es importante, la medición en el caso más general es descrita por la medición obtenida de un operador positivo de valor positivo POVM (por sus siglas en inglés, "positive operator valued measure"),  $\{\hat{E}_k\}$  que satisfacen:

$$\sum_k \hat{E}_k = \mathbb{I}_S , \quad (2.2)$$

donde  $\{\hat{E}_k\}$  son operadores hermitianos con eigenvalores no negativos.  $\hat{E}_k$  determina la



probabilidad de que la *kesima* medición esté dada por

$$\text{Prob}_k = \text{Tr}(E_k \rho) . \quad (2.3)$$

Aquí la medición más general es equivalente a una medición proyectiva de un sistema compuesto que consiste en el sistema  $S$  y un sistema auxiliar.

Las mediciones generales son incompletas ya que el estado después de la medición depende del estado antes de la medición. El cambio del estado inducido por la medición es conmensurable con la intensidad de la medición; de esta forma mediciones débiles cambian el estado débilmente.

Las mediciones pre- y post-seleccionadas (PPS), fueron introducidos por Aharonov, Bergmann y Lebowitz (ABL) [22] para tratar de comprender mejor el papel de las mediciones en Mecánica Cuántica. Las mediciones PPS son hechas sobre ensembles de sistemas cuánticos elegidos en un estado inicial y final determinados.

En 1988 Aharonov, Albert, and Vaidman (AAV) [5] introdujeron el concepto de mediciones PPS débiles. Tales mediciones de una observable  $A$  dan como resultado el llamado valor débil  $A_w$  el cual tiene propiedades inusuales. Un valor débil es generalmente un número complejo, y su magnitud no está acotada, así que la parte real de  $A_w$  puede estar lejos del intervalo de valores propios del operado  $A$  (el nombre del artículo AAV del 1988 lo dice todo: ¿Puede la medición de la proyección del espín de una partícula de espín  $s = 1/2$  dar 100 como resultado?).

Las propiedades inusuales de los valores débiles han sido controversiales desde su aparición. Actualmente se ha hecho un progreso significativo en aclarar la interpretación de los valores débiles e indicado una variedad de situaciones donde proveen señales físicas interesantes.

Finalmente notemos que en el proceso de medición, el sistema total está conformado por el sistema objeto y el aparato de medición. Hemos visto que el proceso de medición es fundamental en Mecánica Cuántica, por ello es muy conveniente ahondar en algunos de los más importantes tipos de medición. Haremos esto basándonos principalmente en uno de los trabajos de Svensson [9].

## 2.1. Mediciones proyectivas, el esquema básico

Los trabajos pioneros sobre mediciones en Mecánica Cuántica debidos a Born y von Neumann, con la correspondiente extensión de Lüders (BNL), han sentado las bases para los desarrollos posteriores concernientes dentro del tema. Estos autores plantearon el proceso general de lo que se conoce como *mediciones proyectivas*, el cual Svensson describe de la siguiente manera.

Por simplicidad considérese primero el caso en el cual el sistema cuántico está representado por un estado puro. Sea  $\mathcal{S}$  el sistema de interés descrito por un ket  $|s\rangle$  normalizado perteneciente a un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_s$  de dimensión finita  $d_s$ . Se busca realizar la medición sobre una observable física  $S$ , a la cual se le asocia un operador Hermitiano  $\hat{S} = \hat{S}^\dagger$ , con su respectivo conjunto completo de eigenestados ortonormales  $|s_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_s$ . Las condiciones planteadas por BNL para la realización de una medición proyectiva son las siguientes

*Regla (1):* Los únicos resultados posibles de medir la observable  $S$  son los respectivos eigenvalores  $s_i$  del operador asociado  $\hat{S}$ .

Como consecuencia, las mediciones de cualquier observable  $S$  siempre darán como resultado números reales ya que por definición  $\hat{S}$  es un operador hermitiano [15].

Es importante resaltar que a lo largo de todo el proceso se consideran mediciones no destructivas, incluso aunque el sistema quede en un nuevo estado.

*Regla (2):* La probabilidad de obtener un eigenvalor particular  $s_i$  (en el caso no degenerado) del operador  $\hat{S}$ , dado que el sistema se encuentra en el estado  $|s\rangle$  es

$$\text{Prob}(s_i|s) = |\langle s_i|s\rangle|^2. \quad (2.4)$$

La generalización al caso en el cual existe degeneración se lleva a cabo de manera trivial, al realizar la correspondiente proyección sobre cada uno de los  $|s_i^k\rangle$  asociados al eigenvalor  $i$  y sumar sobre todos ellos.

*Regla (3):* Inmediatamente después de efectuada la medición, obteniendo como resultado  $s_i$ , el sistema quedará descrito por el respectivo eigenvector asociado  $|s_i\rangle$ . Esta afirmación corresponde a lo que comúnmente se le conoce como *reducción* o *colapso* del estado del sistema  $|s\rangle$  en el estado  $|s_i\rangle$ .

Una propiedad que se sigue directamente de las mediciones proyectivas es que es fácil

calcular el valor promedio de un operador  $\langle \hat{S} \rangle$ ; a partir de los operadores de proyección  $\hat{\mathbb{P}}_i$  simplemente se tiene [10]

$$\langle \hat{S} \rangle = \langle s | \hat{S} | s \rangle = \sum_i s_i \hat{\mathbb{P}}_i . \quad (2.5)$$

Es importante destacar que debido a la regla (2), antes de realizar la medición de un operador  $\hat{S}$  existe una *cierta probabilidad* de obtener como resultado un eigenvalor particular  $s_i$ , pero una vez obtenido es claro que *solamente ese resultado* de todos los posibles *ocurriría* si se efectuara una nueva medición, por lo cual, ya no se habla de probabilidades, sino que se tiene certeza del eigenestado en el cual se encuentra el sistema [15].

Es posible reformular las reglas anteriores desde un punto de vista más general dentro del formalismo del *operador de densidad*, u *operador estadístico* [9], en el cual, el sistema ya no está descrito por un único vector del espacio de Hilbert, sino que está representado precisamente por un operador de densidad. Sin embargo, antes de proseguir en el desarrollo, es conveniente realizar algunas observaciones previas.

Considérese nuevamente un sistema  $\mathcal{S}$  descrito por un *estado puro*  $|s\rangle$ . En este caso, el operador de densidad correspondiente, denotado por  $\hat{\sigma}$ , es simplemente el operador de proyección asociado

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbb{P}}_s = |s\rangle\langle s| . \quad (2.6)$$

Por otra parte, cuando el sistema  $\mathcal{S}$  está descrito por una *mezcla estadística clásica*, i.e., por una superposición incoherente de estados puros normalizados, aunque no necesariamente ortogonales,  $|a\rangle$ ,  $a = 1, 2, \dots, K$ , cada uno con su proyector  $\hat{\mathbb{P}}_a$  y con probabilidad (peso estadístico)  $p_a$ , el operador de densidad  $\hat{\sigma}$  del sistema se escribirá

$$\hat{\sigma}_0 = \sum_{a=1}^K p_a \hat{\mathbb{P}}_a . \quad (2.7)$$

De la ecuación anterior se observa una de las propiedades más importantes de una matriz densidad, que a su vez expresa la condición de normalización, y es que su traza vale 1:

$$\text{Tr}(\hat{\sigma}) = \sum_{a=1}^K p_a \text{Tr}(\hat{\mathbb{P}}_a) = \sum_{a=1}^K p_a = 1 \quad (2.8)$$

A partir de estas consideraciones, es posible proseguir con las condiciones planteadas por BNL para el caso de mediciones proyectivas en el esquema del operador de densidad:

*Regla (1')* : Análoga a la Regla (1).

*Regla (2')*: La probabilidad de obtener un eigenvalor particular  $s_i$  del operador  $\hat{S}$ , dado que el sistema  $\mathcal{S}$  está en el estado  $\hat{\sigma}$ , es

$$\text{Prob}(s_i|\hat{\sigma}) = \sum_a p_a \text{Prob}(\langle s_i | s^{(a)} \rangle) . \quad (2.9)$$

Con la finalidad de reestructurar la segunda y la tercera reglas BNL dentro del presente formalismo, consideraremos primero una nueva expresión para la probabilidad. Debido a que

$$\begin{aligned} \text{Prob}(s_i|a) &= |\langle s_i | s^{(a)} \rangle|^2 \\ &= \langle s_i | s^{(a)} \rangle \langle s^{(a)} | s_i \rangle \\ &= \langle s_i | \hat{\mathbb{P}}_a | s_i \rangle , \end{aligned} \quad (2.10)$$

es evidente que

$$\begin{aligned} \text{Prob}(s_i|\hat{\sigma}) &= \langle s_i | \sum_a p_a \hat{\mathbb{P}}_{s^{(a)}} | s_i \rangle \\ &= \langle s_i | \hat{\sigma} | s_i \rangle . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ahora bien, como los diferentes eigenestados son ortogonales  $\langle s_i | s_j \rangle = \delta_{i,j}$ , se deduce

$$\begin{aligned} \text{Prob}(s_i|\hat{\sigma}_0) &= \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \\ &= \sum_j \langle s_j | s_i \rangle \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \langle s_i | s_j \rangle \\ &= \text{Tr}(\hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_i}) \\ &= \text{Tr}(\hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0) . \end{aligned} \quad (2.12)$$

La última ecuación se sigue de la invariancia de la traza bajo permutaciones cíclicas y del hecho de que los operadores de proyección  $\hat{\mathbb{P}}$  son idempotentes. Con lo anterior, ahora sí se tienen todos los elementos para reformular nuevamente la segunda condición BNL como

*Regla (2'')*: La probabilidad de obtener un eigenvalor particular  $s_i$  del operador  $\hat{S}$ , dado que el sistema  $\mathcal{S}$  está en el estado  $\hat{\sigma}$  es

$$\text{Prob}(s_i|\hat{\sigma}_0) = \text{Tr}(\hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0) . \quad (2.13)$$

Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre en el formalismo de los estados puros, la condición de colapso puede ser establecida en dos diferentes maneras: de forma *condicional* o bien de manera *incondicional*. El procedimiento condicional (o selectivo) se aplica cuando se busca encontrar la matriz de densidad  $\hat{\sigma}_1$  (el subíndice 1 se referirá a entidades después de la medición) después de efectuada la medición *dado que se llega a un resultado particular*  $s_i$  y se escribe como:

*Regla (3')*: La medición de  $\hat{S}$  con el resultado  $s_i$ , transforma a la matriz de densidad  $\hat{\sigma}$  en la matriz de densidad condicional  $\hat{\sigma}_1$  de acuerdo a la regla de Lüders

$$\hat{\sigma}_0 \rightarrow \frac{\hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_i}}{\text{Prob}(s_i|\hat{\sigma}_0)} = \hat{\sigma}_1(|s_i) . \quad (2.14)$$

De las dos últimas reglas mencionadas se pueden realizar un par de observaciones. Ambas condiciones son válidas aún cuando existe degeneración para el eigenvalor  $s_i$ . En este caso, el proyector respectivo es reemplazado por un proyector sobre el subespacio de Hilbert  $\mathcal{H}_s$  generado por los eigenvectores asociados a  $s_i$ . Además cuando la matriz de densidad  $\hat{\sigma}_0$  representa un estado puro la regla (3) se recupera de la (3'). Más aún, la matriz de densidad condicional  $\hat{\sigma}_1(|s_i)$  representa un estado puro provisto del eigenvalor  $s_i$  no degenerado, incluso si el estado inicial es una mezcla.

El procedimiento *incondicional* o *no selectivo* ocurre cuando la medición no es registrada. En ese caso se debe promediar sobre las posibles matrices de densidad condicionales, cada una con su respectiva probabilidad, obteniendo así

*Regla (3'')*: La medición de  $\hat{S}$ , transforma la matriz de densidad inicial  $\hat{\sigma}_0$  en la matriz de densidad incondicional  $\hat{\sigma}_1$  de acuerdo a

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0 &\rightarrow \sum_i \text{Prob}(s_i|\hat{\sigma}_0) \hat{\sigma}_1(|s_i) \\ &= \sum_i (\hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_i}) = \hat{\sigma}_1 . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con lo anterior se completa la descripción BNL para ambos casos, el del formalismo de los estados puros y el de las mezclas estadísticas.

### 2.1.1. La post-selección y la regla de Aharonov-Bergmann-Lebowitz

Consideremos la situación en la cual dos mediciones sucesivas son hechas sobre el mismo sistema, y tomemos en cuenta que todas las mediciones sobre el sistema de estudio serán no destructivas.

Se debe comenzar preparando el sistema en una pre-selección  $\mathcal{S}$  en un estado inicial,  $|s\rangle$ , al cual se le hará una medición de la observable  $\hat{S}$ , teniendo como resultado a uno de los eigenestados  $|s_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_s$  del operador  $\hat{S}$  con una probabilidad  $\text{Prob}(s_i | |s\rangle) = |\langle s_i | s \rangle|^2$  (cf. figura 1). Se realizará una segunda medición sobre el sistema, en este caso sobre la observable  $F$ . Nos interesa el caso cuando la segunda medición proyecta el sistema sobre un eigenestado particular  $|f\rangle$  con eigenvalor  $f$  del correspondiente operador  $\hat{F}$ .

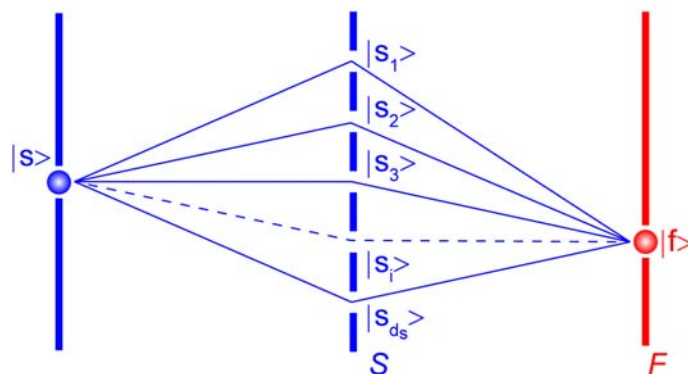


Figura 2.1: Proceso de la regla Aharonov-Bergmann-Lebowitz, (ABL). El sistema es sujeto a una primer medición de una observable  $S$  y finalmente se le realiza una segunda medición, ahora de un observable  $F$ . De los posibles resultados de la segunda medición, aquellos que permiten un particular eigenestado post-seleccionado  $|f\rangle$  de  $F$  son permitidos en la regla ABL. Imagen tomada de [9]

Un pequeño análisis nos muestra que la probabilidad de obtener  $|s_i\rangle$  en la primera medición y  $|f\rangle$  en la segunda es [9]

$$\begin{aligned} \text{Prob}(s_i \&f | |s\rangle) &= \text{Prob}(f | |s_i\rangle) \times \text{Prob}(s_i | |s\rangle) \\ &= |\langle f | s_i \rangle|^2 |\langle s_i | s \rangle|^2 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como cualquiera de los  $d_s$  estados  $|s_i\rangle$  puede ser proyectado a  $|f\rangle$ , la probabilidad total  $\text{Prob}(f | |s\rangle)$  de obtener  $f$  independientemente de los estados intermedios  $|s_i\rangle$  será la suma

de cada probabilidad, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(f | |s\rangle) &= \sum_i \text{Prob}(s_i \& f | |s\rangle) \\ &= \sum_i |\langle f | s_i \rangle|^2 |\langle s_i | s \rangle|^2 . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pensemos ahora en la probabilidad  $\text{Prob}(s_i | |f\rangle \& |s\rangle)$  de encontrar un cierto eigenvalor intermedio  $s_i$ , dado que en la post-selección se obtiene  $f$ .

Las reglas estándar para el cálculo de probabilidades enunciadas por Thomas Bayes en 1763 expresan la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado uno B en términos de la probabilidad condicional del evento B dado A. Dado  $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$  un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes, donde la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y sea  $B$  un suceso del que se conocen las probabilidades condicionales  $P(B | A_i)$ . Entonces, la probabilidad  $P(A_i | B)$  esta dada por

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{P(B)} .$$

Así la también conocida regla de Bayes dice

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B | A_k)P(A_k)} .$$

De esta forma Aharonov-Bergmann-Lebowitz deducen

$$\begin{aligned} \text{Prob}(s_i | |f\rangle \& |s\rangle) &= \frac{\text{Prob}(s_i \& f | |s\rangle)}{\text{Prob}(f | |s\rangle)} \\ &= \frac{|\langle f | s_i \rangle|^2 |\langle s_i | s \rangle|^2}{\sum_j |\langle f | s_j \rangle|^2 |\langle s_j | s \rangle|^2} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cuando  $s_i$  es un eigenvalor degenerado del operador  $\hat{S}$  la regla Aharonov-Bergmann-Lebowitz está dada por

$$\text{Prob}(s_i | |f\rangle \& |s\rangle) = \frac{|\langle f | \hat{\mathbb{P}}_{s_i} |s\rangle|^2}{\sum_j |\langle f | \hat{\mathbb{P}}_{s_j} |s\rangle|^2} , \quad (2.19)$$

con  $\hat{\mathbb{P}}_{s_i}$  el proyector sobre el subespacio correspondiente del eigenvalor  $s_i$ .

De lo anterior se puede obtener un valor promedio  $\langle \hat{S} \rangle_f$  de la observable  $\hat{S}$ , que está condicionado al resultado de  $|f\rangle$  de la post-selección:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S} \rangle_f &= \sum_i s_i \text{Prob}(s_i | |f\rangle \& |s\rangle) \\ &= \sum_i s_i \frac{|\langle f | s_i \rangle|^2 |\langle s_i | s \rangle|^2}{\sum_j |\langle f | s_j \rangle|^2 |\langle s_j | s \rangle|^2} . \end{aligned} \quad (2.20)$$

La regla Aharonov-Bergmann-Lebowitz a sido de gran importancia para posteriores trabajos y ha generado controversia sobre si la regla puede en algún camino ser aplicada *objetivamente*, en otras palabras si no se llevan a cabo las mediciones intermedias de la observable  $S$ .

## 2.2. Mediciones POVM (medición de operadores con valores positivos)

Del postulado referente a las mediciones en la mecánica cuánticas se obtiene:

- Una regla para describir las mediciones estadísticas, i.e., las respectivas probabilidades de los diferentes resultados de las mediciones.
- Una regla para describir el estado después de la medición del sistema.

En el caso en el cual se tiene un experimento donde se realiza una única medición, es de absoluto interés encontrar cuáles son las probabilidades de los distintos resultados de la medición [10].

Para dichos casos, hay una herramienta matemática conocida como el formalismo POVM (Medición de Operadores con Valores Positivos) que se utiliza recurrentemente en la descripción de experimentos donde el sistema solamente puede ser medido una sola vez, además de no ser de interés el estado del sistema después de la medición [17]. Por ejemplo, el caso de un fotón que es destruído por un foto multiplicador durante el proceso de medición.

Supongamos que una medición descrita por los operadores de medición  $\hat{M}_m$  se realiza en un sistema cuántico en el estado  $|\psi\rangle$ . Así la probabilidad de obtener el resultado  $m$  es

$$\text{Prob}(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle . \quad (2.21)$$



Sea

$$\hat{E}_m = \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \text{Prob}(m) = \langle \psi | \hat{E}_m | \psi \rangle , \quad (2.23)$$

donde los  $\hat{E}_m$  son operadores con valores positivos, i.e., los valores esperados siempre van a ser números positivos en el caso de valores diferentes de cero, conocidos como los elementos POVM asociados con la medición, que satisfacen

$$\sum_m \hat{E}_m = \mathbb{I} . \quad (2.24)$$

El conjunto completo de operadores  $\{\hat{E}_m\}$  es conocido como un POVM y son suficientes para determinar las probabilidades de los diferentes resultados de las mediciones

$$\begin{aligned} \langle \psi | \sum_m \hat{E}_m | \psi \rangle &= \langle \psi | \mathbb{I} | \psi \rangle \\ &\Rightarrow \sum_m \langle \psi | \hat{E}_m | \psi \rangle = 1 , \\ &\Rightarrow \sum_m \text{Prob}(m) = 1 . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora considerése una medición proyectiva descrita por operadores de medición  $\hat{P}_m$  que cumplen con la relación de ortonormalidad:

$$\hat{E}_i \hat{E}_j = \delta_{ij} \hat{E}_i , \quad (2.26)$$

y la relación de completez

$$\sum_m \hat{P}_m = \mathbb{I} . \quad (2.27)$$

En este caso, y sólo en este caso, todos los elementos POVM son los mismos que los operadores de medición. Es claro que

$$\hat{E}_m = \hat{P}_m^\dagger \hat{P}_m = \hat{P}_m^2 = \hat{P}_m . \quad (2.28)$$

Ésta es una formula similar a la descomposición de un espacio de Hilbert en un conjunto de proyectores ortogonales,  $\{\hat{E}_m\}$ , definidos a partir de una base ortogonal  $\{|\phi_i\rangle\}$ :

$$\hat{E}_i = |\phi_i\rangle \langle \phi_i| . \quad (2.29)$$

Una de las características de los POVM es que no son necesariamente linealmente independientes. Así el número de elementos pueden ser más grande que la dimensión del espacio de Hilbert donde actúan. Para entender más a detalle otras de las propiedades de estos operadores, es necesario considerar algunos ejemplos ilustrativos.

El primero, es discutido por Nielsen y Chuang [10], es la afirmación de que cualquier medición donde los elementos POVM y los operadores de medición coinciden, es una medición proyectiva.

En efecto, sea  $\hat{E}_m$  un conjunto arbitrario de operadores positivos que cumplen con la relación de completéz  $\sum_m \hat{E}_m = 1$ . Entonces, existe un conjunto de operadores de medición  $\hat{M}_m$  a partir de los cuales se puede definir una medición descrita a partir de los elementos POVM  $\{\hat{E}_m\}$ . Tomando  $\hat{M}_m = \sqrt{\hat{E}_m}$  se cumple que  $\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \sum_m \hat{E}_m = 1$ . Por ello, el conjunto  $\{\hat{M}_m\}$  describe una medición POVM. Bajo este razonamiento, es conveniente definir un POVM como un conjunto completo de operadores  $\{\hat{E}_m\}$  tales que: (a) cada uno de los operadores  $E_m$  sea positivo, y (b) se cumpla la relación de completéz. Nótese que dado un conjunto POVM la probabilidad de que el resultado sea  $m$  está dada por  $p(m) = \langle \psi | \hat{E}_m | \psi \rangle$ .

El segundo ejemplo, ilustra la manera en que se utiliza el formalismo POVM. Suponga que Alice le da a Bob un qubit preparado en uno de los dos estados  $|\psi_1\rangle = |0\rangle$  o  $|\psi_2\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Es imposible para Bob determinar si le ha sido asignado el estado  $|\psi_1\rangle$  o  $|\psi_2\rangle$  con total precisión. Sin embargo, Bob puede realizar una medición en la cual distinga los estados en cualquier instante, con la seguridad de que no cometa un error en la identificación. Para ello, considere un POVM con tres elementos

$$\hat{E}_1 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |1\rangle \langle 1| , \quad (2.30)$$

$$\hat{E}_2 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} , \quad (2.31)$$

$$\hat{E}_3 \equiv I - \hat{E}_1 - \hat{E}_2 . \quad (2.32)$$

Es claro que los tres operadores son positivos y satisfacen la relación de completéz, por lo cual conforman un legítimo POVM. Suponga ahora que a Bob le es dado el estado  $|\psi_1\rangle = |0\rangle$  y realiza una medición descrita por el POVM  $\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3\}$ , en donde existe una probabilidad distinta de cero de que obtenga como resultado  $\hat{E}_1$ , ya que  $\hat{E}_1$  ha sido elegido de tal manera que  $\langle \psi_1 | \hat{E}_1 | \psi_1 \rangle = 0$ . Así, si el resultado de su medición es  $\hat{E}_1$ , entonces Bob puede concluir que el estado que recibió fue el  $|\psi_2\rangle$ . Análogamente, si el resultado de la

medición es  $\hat{E}_2$ , en ese caso recibió el estado  $|\psi_1\rangle$ . Tiempo después, Bob obtendrá como resultado  $\hat{E}_3$ , y no podrá inferir nada acerca de la identidad del estado que ha recibido. El punto crucial es que Bob nunca hace un error al identificar el estado que él ha recibido. Esta infabilidad tiene un precio, y es que en ocasiones Bob no obtiene información acerca de la identidad del estado.

Análogamente, si una medición está descrita por los operadores  $\hat{M}_m$ , es fácil mostrar que siempre se pueden encontrar operadores unitarios  $\hat{U}_m$  tales que  $\hat{M}_m = \hat{U}_m \sqrt{\hat{E}_m}$ , donde  $\hat{E}_m$  es el POVM asociado a la medición.

Los ejemplos anteriores demuestran la utilidad del formalismo POVM acerca de mediciones cuánticas en donde solamente las mediciones estadísticas se pueden realizar.

### 2.2.1. Sistemas auxiliares en el formalismo POVM

Es interesante demostrar que las mediciones proyectivas junto con la dinámica unitaria son suficientes para llevar a cabo una medición en general. Para ello, suponga que se tiene un sistema cuántico en un espacio  $Q$ . Se busca realizar una medición descrita por los operadores de medición  $\hat{M}_m$  del sistema. Bajo esta hipótesis, considérese un sistema auxiliar en el espacio  $M$ , y sea  $\{|m\rangle\}$  una base ortonormal en correspondencia biyectiva con los posibles resultados que se desean implementar. Aunque el esquema auxiliar puede ser visto sólo como un artefacto matemático, también puede ser interpretado como una cantidad física extra del sistema con su respectivo espacio de estados.

Sea  $|0\rangle$  un estado de  $M$ . Defínase un operador  $\hat{U}$  sobre los productos de los estados  $|\psi\rangle|0\rangle$  como

$$\hat{U} |\psi\rangle |0\rangle \equiv \sum_m \hat{M}_m |\psi\rangle |m\rangle . \quad (2.33)$$

Es claro que  $\hat{U}$  preserva el producto interior. En efecto,

$$\langle \phi | \langle 0 | \hat{U}^\dagger \hat{U} |\psi\rangle |0\rangle = \sum_{m,m'} \langle \phi | \hat{M}^\dagger \hat{M} |\psi\rangle \langle m | m' \rangle \quad (2.34)$$

$$= \sum_m \langle \phi | \hat{M}^\dagger \hat{M} |\psi\rangle \quad (2.35)$$

$$= \langle \phi | \psi \rangle . \quad (2.36)$$

Como se ha visto,  $\hat{U}$  puede extenderse a un operador unitario sobre el espacio total

$Q \otimes M$ , por comodidad denotado también como  $\hat{U}$ . Ahora suponga que se busca realizar una medición proyectiva  $\hat{P}_m \equiv \hat{I}_Q \otimes |m\rangle\langle m|$  sobre ambos sistemas. La probabilidad de obtener  $m$  bajo estas circunstancias será

$$p(m) = \langle \psi | \langle 0 | \hat{U}^\dagger \hat{P}_m \hat{U} | \psi \rangle | 0 \rangle \quad (2.37)$$

$$= \sum_{m', m''} \langle \psi | \hat{M}_{m'}^\dagger \langle m' | (\hat{I}_Q \otimes |m\rangle\langle m|) \hat{M}_{m''} | \psi \rangle | m'' \rangle \quad (2.38)$$

$$= \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle , \quad (2.39)$$

en cuyo caso el sistema conjunto después de la medición, estará dado por

$$\frac{\hat{P}_m \hat{U} | \psi \rangle | 0 \rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{P}_m \hat{U} | \psi \rangle}} = \frac{\hat{M}_m | \psi \rangle | m \rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}} . \quad (2.40)$$

De aquí que el estado del sistema en  $M$  después de la medición será  $|m\rangle$ , mientras que en  $Q$  se encontrará en

$$\frac{\hat{M}_m | \psi \rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}} , \quad (2.41)$$

como era de esperarse. Así la dinámica unitaria, las mediciones proyectivas, y la capacidad de introducir sistemas auxiliares, permiten que cualquier medición pueda ser realizada.

A partir de lo anterior, se puede definir uno de los más interesantes conceptos dentro de la mecánica cuántica: el de *enredamiento cuántico*. Considere por ejemplo el estados de un qubit doble

$$| \psi \rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} . \quad (2.42)$$

Así definido, el sistema es un sistema compuesto, en el sentido en el cual no se puede escribir como un producto de estados de sus componentes. Se dice entonces que es un *estado enredado*. Los estados enredados tienen relevancia en computación e información cuánticas, así como en teleportación con efectos que en ocasiones conllevan a resultados controversiales. (ESTO DEBERÍA CAMBIARSE A LA PARTE DE ENREDAMIENTO)

### 2.3. Mediciones indirectas

Para esbozar de forma más clara este tipo de mediciones, tomaremos como base la referencia [9] en la cual se realiza un análisis más profundo del concepto de medición,

tomando en cuenta cómo el proceso de medición es llevado a cabo, qué tipo de aparatos de medición son usados y qué distingue a las mediciones de otros tipos de interacciones. Al análisis que ahonda más en el proceso de medición se le llama *esquema indirecto*.

Introduciremos un dispositivo de medición llamado *medidor* o *apuntador*  $\mathcal{M}$ , el cual será un dispositivo cuántico. Así al leer el medidor uno obtiene información del valor de la observable del sistema objeto. En situaciones experimentales el *medidor* y el *objeto sistema* son propiedades del mismo objeto físico, como el momento y la polarización para fotones. En todo este análisis consideraremos mediciones no destructivas.

El medidor  $\mathcal{M}$  estará definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  con un conjunto completo y ortonormal de estados base  $|m_k\rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots, d_M$ , donde  $d_M$  es la dimensión de  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ , y  $\hat{M}$  es el operador asociado a dichos eigenestados. Denotaremos a la observable  $M$  como la *variable apuntador*, y a los estados  $|m_k\rangle$  los *estados del apuntador*. El hamiltoniano intrínseco del sistema es  $\hat{H}_{\mathcal{M}}$  (por conveniencia supondremos que es cero), y los proyectores en  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  serán  $\hat{\mathcal{O}}_{m_k}$ . Se asumirá que el medidor está preparado en un estado inicial puro  $|m^0\rangle$ , así que la matriz de densidad del medidor será  $\hat{\mu}_0 = |m^0\rangle\langle m^0|$ . Los estados del medidor  $|m^{(0)}\rangle$  y  $|m^{(i)}\rangle$  no son en general eigenestados del operador de medición  $\hat{M}$ , pero sí son superposiciones de tales eigenestados.

El *sistema objeto*  $\mathcal{S}$  (usamos este nombre para distinguirlo del *sistema total* compuesto del medidor y del sistema objeto), está definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  con un conjunto completo y ortonormal de estados base  $|s_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_s$  con  $d_s$  la dimensión del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ .  $\hat{S}$  es el operador asociado a dichos eigenestados. Las dimensiones  $d_s$  y  $d_M$  de los respectivos espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  y  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  no son necesariamente iguales. La observable a estudiar será  $S$ . El hamiltoniano intrínseco del sistema es  $\hat{H}_{\mathcal{S}}$  (y supondremos que al igual que  $\hat{H}_{\mathcal{M}}$  también se anula), y los proyectores en  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  se denotarán como  $\hat{\mathbb{P}}_{s_i}$ . El sistema estará en un estado inicial puro  $|s\rangle^1$  (pre-seleccionado). En este caso la matriz de densidad es  $\hat{\sigma}_0 = |s\rangle\langle s|$ .

El sistema total  $\mathcal{T}$  está compuesto del sistema objeto  $\mathcal{S}$  y el medidor  $\mathcal{M}$ . Su espacio de Hilbert asociado es  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ . El estado inicial del sistema total es  $\tau_0 = \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0$ , es decir, el sistema y el medidor se asumen inicialmente no enredados. El hamiltoniano total es

$$\hat{H}_{\mathcal{T}} = \hat{H}_{\mathcal{S}} + \hat{H}_{\mathcal{M}} + \hat{H}_{int} . \quad (2.43)$$

El hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{int}$  no se anula, y depende de la observable  $S$  a ser medi-

---

<sup>1</sup> $|s\rangle = \sum_{i=1}^{d_s} c_i |s_i\rangle$

da tanto como de la variable apuntador. Como la medición no es destructiva,  $[\hat{H}_{int}, \hat{S}] = 0$ .

### 2.3.1. La pre-medición

El sistema objeto y el medidor evolucionan a través del operador de evolución temporal unitaria dado por

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{\mathcal{T}}\right), \quad (2.44)$$

en lo que es llamado una *pre-medición*. Así para el sistema total  $\mathcal{T}$  la matriz de densidad inicial  $\hat{\tau}_0$  evolucionará unitariamente a  $\hat{\tau}_1$ :

$$\hat{\tau}_0 = \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0 \xrightarrow{\hat{U}} \hat{\tau}_1 = \hat{U} \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0 \hat{U}^\dagger. \quad (2.45)$$

Asumiremos que el estado inicial es una unión de estados puros  $|s_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle$  del sistema objeto y del medidor transformado por  $\hat{U}$  en

$$|s_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \xrightarrow{\hat{U}} \hat{U} (|s_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle) = |s_i\rangle \otimes |m^{(i)}\rangle = \sum_{i=1}^{d_s} c_i |s_i\rangle \otimes |m^{(i)}\rangle, \quad (2.46)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, d_s$  y los estados del medidor  $|m^{(i)}\rangle$  actúan como marcadores del estado del sistema  $|s_i\rangle$ .

La matriz conjunta  $\hat{\tau}_0 = \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0$  evoluciona de acuerdo a

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_0 \xrightarrow{\hat{U}} \hat{\tau}_1 &= \hat{U} \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0 \hat{U}^\dagger \\ &= \sum_{i,j}^{d_s} |m^{(i)}\rangle \otimes |s_i\rangle \langle s_i| \hat{\sigma}_0 |s_j\rangle \langle s_j| \otimes \langle m^{(j)}| \\ &= \sum_{i,j}^{d_s} |m^{(i)}\rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_j} \langle m^{(j)}|, \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde usa el operador de proyección  $\hat{\mathbb{P}}_{s_k} = |s_k\rangle \langle s_k|$ .

Notemos que un estado puro del sistema  $|s_i\rangle$  es invariante bajo esta operación.

Una de las consecuencias más importantes de la pre-medición es que el estado del sistema objeto termina enredado con el estado del medidor, i.e.,  $\hat{\tau}_1$  no puede ser escrita como un producto del estado del objeto y uno del medidor. El operador  $\hat{U}$  entonces correlaciona el

estado del sistema  $|s_i\rangle$  con el estado del medidor  $|m^{(i)}\rangle$  pero no necesariamente de manera única: para cada  $|s_i\rangle$  corresponde un  $|m^{(i)}\rangle$  definido, diferente para diferentes  $|s_i\rangle$ , pero podría coincidir entre  $|m^{(i)}\rangle$  y  $|m^{(j)}\rangle$  expresado por  $\langle m^{(i)} | m^{(j)} \rangle \neq 0$  para  $i \neq j$ .

Para obtener los estados separados del sistema  $\hat{\sigma}_1$ , y  $\hat{\mu}_1$  para el medidor, después de esta pre-medición, tomamos la traza parcial sobre los grados de libertad que no interesan. Es decir nuestro estado podría tener otros grados de libertad aparte de ese, pero para nuestro aparato de medición no es de interés y se eliminan tomando la traza parcial. Así si quiero el estado  $\hat{\sigma}_1$  del sistema, esto significa sumar sobre los estados base  $|m_k\rangle$  para  $\mathcal{H}_M$ , transformando un operador en  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$  en uno  $\mathcal{H}_S$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_0 \xrightarrow{\hat{U}} \hat{\sigma}_1 &= \text{Tr}_M \hat{\tau}_1 \\
 &= \sum_k^{d_m} \langle m_k | \hat{\tau}_1 | m_k \rangle \\
 &= \sum_{i,j}^{d_s} \sum_k^{d_m} \langle m_k | m^{(i)} \rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_j} \langle m^{(j)} | m_k \rangle \\
 &= \sum_{i,j}^{d_s} \langle m^{(j)} | m^{(i)} \rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_j} , \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

ya que los estados  $|m_k\rangle$  son una base en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_M$ .

Como es posible un traslape entre los estados del medidor  $|m^{(i)}\rangle$  y  $|m^{(j)}\rangle$ , la matriz de densidad del sistema  $\hat{\sigma}_1$  después de la pre-medición no solamente tiene elementos diagonales. Si  $\langle m^{(i)} | m^{(j)} \rangle = 0$  para  $i \neq j$ , entonces el esquema auxiliar es el mismo que el esquema proyectivo. El caso general  $\langle m^{(i)} | m^{(j)} \rangle \neq 0$  para  $i \neq j$ , permite la interferencia.

Análogamente, el estado después de la pre-medición considerando el medidor es

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_0 \xrightarrow{\hat{U}} \hat{\mu}_1 &= \text{Tr}_S \hat{\tau}_1 \\
 &= \sum_i^{d_s} \langle s_i | \hat{\tau}_1 | s_i \rangle \\
 &= \sum_i^{d_s} |m^{(i)}\rangle \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \langle m^{(i)} | , \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

con elementos de matriz

$$\langle m_k | \hat{\mu}_1 | m_l \rangle = \sum_i^{d_s} \langle m_k | m^{(i)} \rangle \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \langle m^{(i)} | m_l \rangle , \tag{2.50}$$

expresado en términos de las funciones de onda  $\langle m_k | m^{(i)} \rangle$ .

En la derivación de estas expresiones, hemos usando que

$$\sum_{i,j}^{d_s} \langle s_i | s_j \rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_j} = \sum_{i,j}^{d_s} \delta_{ij} \hat{\mathbb{P}}_{s_j} = \sum_i^{d_s} \hat{\mathbb{P}}_{s_i} .$$

Vemos que una pre-medición puede distinguir entre diferentes valores de  $s_i$  de la observable del sistema  $\hat{S}$  solamente si diferentes funciones de onda del medidor  $\langle m_k | m^{(i)} \rangle$  no se traslapan.

### 2.3.2. La lectura: Mediciones proyectivas sobre el medidor

Leer el medidor significa obtener un eigenvalor  $m_k$  del correspondiente operador  $\hat{M}$  en una acción que es simbolizada por el operador de proyección  $\hat{\mathbb{O}}_{m_k} = |m_k\rangle \langle m_k|$  sobre el correspondiente subespacio del espacio de Hilbert del medidor  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ . Como resultado de la pre-medición, el sistema queda enredado con el medidor.

Ahora, queremos someter a  $\hat{\tau}_1$ , la evolución que sufre nuestra matriz de densidad inicial por hacer la pre-medición, a una medición proyectiva, y el operador de tal medición es  $\hat{\mathbb{O}}_{m_k}$  que se define como el proyector en el estado  $|m_k\rangle$ . Así para la matriz de densidad total usando la regla de Lüders tenemos

$$\hat{\tau}_1 \xrightarrow{\hat{\mathbb{O}}_{m_k}} \hat{\tau}_1(|m_k\rangle) = \frac{(\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{\mathbb{O}}_{m_k}) \hat{\tau}_1 (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{\mathbb{O}}_{m_k})}{\text{Prob}(m_k)} , \quad (2.51)$$

donde  $\hat{\mathbb{I}}_S$  es el operador unitario en el  $\mathcal{H}_S$ . Notemos también que cuando se hace una medición proyectiva el estado que se obtiene después de la medición ya no está normalizado y por tanto no tenemos una función de densidad con traza 1, es por ello que se divide entre  $\text{Prob}(m_k) = \text{Prob}(m_k | \hat{\tau}_1)$  que es la probabilidad de obtener el valor del apuntador  $m_k$  dado el estado  $\hat{\tau}_1$ , dada por

$$\begin{aligned} \text{Prob}(m_k) &= \text{Tr}_{\mathcal{T}} \left[ (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{\mathbb{O}}_{m_k}) \hat{\tau}_1 \right] \\ &= \sum_{i=1}^{d_s} (|\langle m^{(i)} | m_k \rangle|^2 \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{d_s} \text{Prob}(m_k | m^{(i)}) \times \text{Prob}(s_i | \hat{\sigma}_0) . \end{aligned} \quad (2.52)$$



donde se tomó en cuenta que el espacio del sistema objeto es completo, y que

$$\hat{\tau}_1 = \sum_{r,t=1}^{d_s} |m^{(r)}\rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_r} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_t} \langle m^{(j)}|. \quad (2.53)$$

Aquí  $\text{Prob}(m_k | |m^{(i)}\rangle)$  es la probabilidad de obtener el apuntador en  $m_k$ , dado el estado  $|m^{(i)}\rangle$ , que corresponde en la pre-medición al estado  $|s_i\rangle$ . La distribución en  $m_k$  refleja la distribución en  $s_i$  de manera única sólo si diferentes funciones de onda  $\langle m_k | m^{(i)}\rangle$  no se traslapan, es decir, no hay forma de que más de una  $s_i$  contribuya a esta probabilidad.

Finalmente la probabilidad de obtener el valor  $s_i$  en el estado inicial  $\hat{\sigma}_0$  del sistema está dada por  $\text{Prob}(s_i | \hat{\sigma}_0)$ .

Prestemos atención ahora en la matriz de densidad  $\hat{\sigma}_1(|m_k\rangle)$  después de la lectura, la cual representa lo que hace el estado del sistema después de esta acción. Podemos obtenerla en la forma usual tomando la traza parcial de la correspondiente matriz de densidad total:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1(|m_k\rangle) &= \text{Tr}_{\mathcal{M}} \hat{\tau}_1(|m_k\rangle) \\ &= \frac{1}{\text{Prob}(m_k)} \text{Tr}_{\mathcal{M}} \left[ (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{\mathbb{O}}_{m_k}) \hat{\tau}_1 (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{\mathbb{O}}_{m_k}) \right] \\ &= \frac{1}{\text{Prob}(m_k)} \langle m_k | \hat{U} \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0 \hat{U}^\dagger | m_k \rangle \\ &= \frac{1}{\text{Prob}(m_k)} \langle m_k | \hat{U} | m^{(0)} \rangle \hat{\sigma}_0 \langle m^{(0)} | \hat{U}^\dagger | m_k \rangle \\ &= \frac{1}{\text{Prob}(m_k)} \hat{\Omega}_k \hat{\sigma}_0 \hat{\Omega}_k^\dagger, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde  $\hat{\Omega}_k$  es llamado operador de medición, el cual está definido por

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_k &= \langle m_k | \hat{U} \sum_{i=1}^{d_s} |s_i\rangle \langle s_i | m^{(0)} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d_s} \langle m_k | m^{(i)} \rangle |s_i\rangle \langle s_i| \\ &= \sum_{i=1}^{d_s} \langle m_k | m^{(i)} \rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_i}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Si al describir un sistema después de la pre-medición no tenemos cuidado en que resultado se obtuvo de  $m_k$  en la medición proyectiva en el medidor, el sistema debería estar descrito por la suma estadística sobre todas las posibilidades, es decir, tenemos la posibilidad de

medir el estado del sistema al tiempo  $t$  pero no hacemos la medición, entonces en lugar de tener una medición dada se tiene una suma estadística de todas las posibles mediciones:

$$\begin{aligned} \sum_k \text{Prob}(m_k) \times \hat{\sigma}_1(|m_k\rangle) &= \sum_k \hat{\Omega}_k \hat{\sigma}_0 \hat{\Omega}_k^\dagger \\ &= \sum_k \langle m_k | \hat{U} \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0 \hat{U}^\dagger | m_k \rangle = \hat{\sigma}_1 . \end{aligned} \quad (2.56)$$

De esta forma si se quiere un estado mezcla lo puedo obtener poniendo el dispositivo y no midiendo. Es la misma matriz de densidad incondicional  $\hat{\sigma}_1$ , como la que el sistema describe justo después de la pre-medición y antes de que la medición proyectiva sobre el medidor tenga lugar. Notemos que una medición proyectiva en el medidor que no es registrada no tiene efectos sobre la distribución de probabilidad para los eigenvalores  $s_i$ .

La matriz de densidad del medidor después de que la lectura ha sido tomada está dada por

$$\hat{\mu}_1(|m_k\rangle) = \frac{\hat{\mathcal{O}}_{m_k} \hat{\mu}_1 \hat{\mathcal{O}}_{m_k}}{\text{Prob}(m_k)}, \quad (2.57)$$

donde usamos nuestra definición para  $\hat{\mu}_1$  dada en la Ec. (2.49) y nuevamente  $\text{Prob}(m_k)$  aparece dividiendo para garantizar que el sistema está normalizado.

El medidor y el sistema objeto se desenredan después de una medición condicional (pero no después de una medición incondicional).

Casi tenemos todas las herramientas que necesitamos para poder seguir indagando en los resultados del proceso de medición. El siguiente resultado es una herramienta más.

### 2.3.3. Mediciones consecutivas

Para este análisis se considerara el caso de dos mediciones auxiliares sucesivas, donde naturalmente el sistema permanecerá intacto, i.e., las mediciones son no destructivas. El sistema es transformado en pasos de acuerdo a las reglas establecidas.

Asumiremos que cada medición es hecha con un diferente medidor. De las matrices no

condicionales para el sistema, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0 &\xrightarrow{1^a \text{ Medicin}} \hat{\sigma}_1 = \sum_{k_1} \hat{\Omega}_{k_1}^{(1)} \hat{\sigma}_0 \hat{\Omega}_{k_1}^{(1)\dagger} \\ \hat{\sigma}_1 &\xrightarrow{2^a \text{ Medicin}} \hat{\sigma}_2 = \sum_{k_2} \hat{\Omega}_{k_2}^{(2)} \hat{\sigma}_1 \hat{\Omega}_{k_2}^{(2)\dagger} .\end{aligned}$$

Al aplicar la transformación resulta

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_2 &= \sum_{k_1, k_2} \hat{\Omega}_{k_2}^{(2)} \hat{\Omega}_{k_1}^{(1)} \hat{\sigma}_0 \hat{\Omega}_{k_1}^{(1)\dagger} \hat{\Omega}_{k_2}^{(2)\dagger} \\ &= \sum_{k_1, k_2} \hat{\Omega}_{k_2}^{(2)} \hat{\Omega}_{k_1}^{(1)} \hat{\sigma}_1 (\hat{\Omega}_{k_1}^{(1)} \hat{\Omega}_{k_2}^{(2)})^\dagger\end{aligned}\tag{2.58}$$

de donde la generalización a cualquier número de mediciones consecutivas es obvia.

Usando nuestra definición de  $\hat{\Omega}_k$  dada en la Ec. (2.55) y las propiedades de productos de proyectores ortogonales, encontramos

$$\hat{\sigma}_2 = \sum_{i,j} (\langle m^{(j)} | m^{(i)} \rangle)^2 \hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_j} .\tag{2.59}$$

Aquí el segundo aparato de medición es igual al primer aparato.

En el problema anterior tenía distintos medidores. Ahora me olvido de eso y pienso que son los mismos medidores. Así generalizando tengo el resultado de la matriz de densidad después de hacer las  $n$  mediciones en el mismo medidor:

$$\hat{\sigma}_n = \sum_{i,j} (\langle m^{(j)} | m^{(i)} \rangle)^n \hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_j} .\tag{2.60}$$

Nótese que en este proceso no aparece el tiempo.

### 2.3.4. Aplicaciones del esquema auxiliar

Aquí se mostrarán algunas aplicaciones del esquema de medición auxiliar, las cuales serán muy útiles para el tema central de este trabajo.

## El protocolo de von Neumann

El protocolo de von Neumann usa una forma particular para el Hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{int}$  entre el sistema  $\mathcal{S}$  y el medidor  $\mathcal{M}$ . Describiremos el protocolo por simplicidad para el caso en que el estado inicial es un estado puro.

El medidor es asociado a un apuntador variable  $\hat{Q}$  reemplazando  $\hat{M}$  y con estados del puntero  $|q\rangle$  reemplazando a  $|m_k\rangle$ .

Se trasladará al tratamiento discreto en el espacio de Hilbert finito  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  a uno continuo,  $q$ . Se tomara como la posición del apuntador del medidor graduado, y se introducirán las funciones de onda  $\varphi_0(q)$  y  $\varphi_i(q)$  de las expansiones

$$|m^{(0)}\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | m^{(0)}\rangle = \int dq |q\rangle \varphi_0(q) \quad (2.61)$$

$$|m^{(i)}\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | m^{(i)}\rangle = \int dq |q\rangle \varphi_i(q) . \quad (2.62)$$

Supondremos que el estado inicial del apuntador  $\varphi_0(q)$  está centrado en  $q = 0$ , es decir, el valor esperado de  $\langle \hat{Q} \rangle_0$  en el estado inicial se anula. Una elección particular de  $\varphi_0(q)$  puede ser

$$\varphi_0(q) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} e^{\left(-\frac{q^2}{2\Delta^2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (2.63)$$

Así la densidad de probabilidad  $|\varphi_0(q)|^2$  es una Gaussiana con ancho  $\Delta$ .

La elección que hace von Neumann del Hamiltoniano de interacción es

$$\hat{H}_{int} = \gamma \hat{S} \otimes \hat{P} , \quad (2.64)$$

donde  $\gamma$  es una constante de acoplamiento y  $\hat{P}$  es la variable conjugada del medidor a la variable del apuntador  $\hat{Q}$ , es decir,  $\hat{P}$  es momento del medidor que obedece la relación  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$  y  $\hat{S}$  es la observable que se desea medir, y se asume que actúa en un espacio de Hilbert de dimensión finita.

Se supondrá que la medición se realiza en un intervalo de tiempo muy corto  $\delta t_U$ , de forma que la integral temporal  $\int_{t_0}^t dt \hat{H}_{int}$  del operador de evolución  $\hat{U}$  puede ser sustituida por  $\gamma \hat{S} \otimes \hat{P} \delta t_U$ . La combinación  $\gamma \delta t_U = g$  es entonces una constante efectiva de acoplamiento.

Usando la hipótesis de que los Hamiltonianos intrínsecos  $\hat{H}_S$  y  $\hat{H}_M$  se anulan, si consideramos el esquema de interacción, los estados evolucionan sólo con el Hamiltoniano de interacción. Como la medición ocurre en un intervalo de tiempo muy pequeño, puedo entonces aproximar:

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}_\tau\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}_{int}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{P}\right) .\end{aligned}\tag{2.65}$$

La razón de la elección del  $\hat{H}_{int}$  reside en el hecho de que un operador  $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{P}\right)$ , con  $\lambda$  un número real, actúa como un operador de traslación sobre una función de onda con  $\lambda$  en la base  $q$ .

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{P}\right) |\varphi\rangle &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{P}\right) \int dq |q\rangle \varphi(q) \\ &= \int dq |q\rangle \varphi(q + \lambda) .\end{aligned}\tag{2.66}$$

De esta forma

$$|s_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |s_i\rangle \otimes |m^{(i)}\rangle\tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}|s_i\rangle \otimes |m^{(i)}\rangle &= \hat{U} (|s_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{P}\right) (|s_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle) \\ &= |s_i\rangle \otimes (\exp\left(-\frac{i}{\hbar} g s_i \hat{P}\right) |m^{(0)}\rangle) \\ &= |s_i\rangle \otimes (\exp\left(-\frac{i}{\hbar} g s_i \hat{P}\right) \int dq |q\rangle \varphi_0(q)) \\ &= |s_i\rangle \otimes \int dq |q\rangle \varphi_0(q - g s_i) .\end{aligned}\tag{2.68}$$

Así

$$\begin{aligned}
 |m^{(i)}\rangle &= \int dq |q\rangle \langle q | m^{(i)}\rangle \\
 &= \int dq |q\rangle \varphi_i(q) \\
 &= \int dq |q\rangle \varphi_0(q - gs_i) .
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Finalmente encontramos

$$\varphi_i(q) = \varphi_0(q - gs_i) . \tag{2.70}$$

Es decir, el estado inicial del apuntador, es transformado por la pre-medición en una superposición de estados  $\varphi_i(q)$  los cuales son traslaciones del estado inicial por una cantidad  $gs_i$ . En otras palabras el protocolo de von Neumann describe cómo la pre medición cambia el apuntador de  $q = 0$  a uno de los valores  $q = gs_i$ .

Todas las cantidades relevantes a ser medidas pueden ahora ser evaluadas en términos de los estados trasladados  $\varphi_0(q - gs_i)$ . Considérese por ejemplo una matriz de densidad después de la pre-medición. Usando nuestra Ec. (2.49) y sustituyendo  $|m^{(i)}\rangle$  y  $\langle m^{(i)}|$ , respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_1 &= \sum_i |m^{(i)}\rangle \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \langle m^{(i)}| \\
 &= \sum_i \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \int dq dq' |q\rangle \varphi_0(q - gs_i) \varphi_0(q' - gs_i)^* \langle q'| ,
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

que puede ser usada para calcular el valor medio  $\langle h(\hat{Q}) \rangle_1$  de cualquier función  $h(\hat{Q})$  de la observable del apuntador  $\hat{Q}$  después de la pre-medición:

$$\begin{aligned}
 \langle h(\hat{Q}) \rangle_1 &= \text{Tr} \left[ h(\hat{Q}) \hat{\mu}_1 \right] \\
 &= \sum_i \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \int dq h(q) |\varphi_0(q - gs_i)|^2 .
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Así usando que  $\langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle$  es la probabilidad de encontrar al sistema descrito por la matriz de densidad  $\hat{\sigma}_0$  en el estado  $|s_i\rangle$ , y al multiplicar por  $s_i$ , esa es precisamente la definición

de valor esperado, por lo que

$$\begin{aligned}\langle \hat{Q} \rangle_1 &= \sum_i \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_i \rangle \int dq h(q) |\varphi_0(q - gs_i)|^2 \\ &= g \langle \hat{S} \rangle_0 + \langle \hat{Q} \rangle_0 = g \langle \hat{S} \rangle_0 ,\end{aligned}\tag{2.73}$$

donde  $\langle \hat{Q} \rangle_0 = 0$ .

Análogamente usando la Ec. (2.73), el hecho de que la integral en todo el espacio de una función Gaussiana normalizada es uno, y recordando que  $\langle \chi^n \rangle = \sum_i x_i^n \text{Prob}(x_i)$  tenemos, para el caso de una distribución Gaussiana,

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle_1 = \Delta^2 + g^2 \langle \hat{S}^2 \rangle_0 .\tag{2.74}$$

En general, si la función de distribución es simétrica con respecto de  $q$ , se obtiene

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle_1 = \langle \hat{Q}^2 \rangle_0 + g^2 \langle \hat{S}^2 \rangle_0 .\tag{2.75}$$

De esta forma, la varianza de la  $Q$  de la distribución después de la medición es aumentada comparada con el estado inicial por la varianza de la  $S$ :

$$\Delta Q_1^2 = \langle \hat{Q}^2 \rangle_1 - \left( \langle \hat{Q} \rangle_1 \right)^2 = \Delta Q_0^2 + g^2 \Delta S_0^2 ,\tag{2.76}$$

el cual es un resultado muy razonable ya que la interacción que hay entre los dos sistemas es muy fuerte comparada con la evolución de los sistemas por separado. Si los sistemas hubieran sido libres, el Hamiltoniano que se da para la evolución es tan fuerte que los borraría.

### Amplificación por post-selección

En el esquema auxiliar, hay un mayor número de grados de libertad para el medidor que aquellos que existen para el sistema. Esto puede ser usado para extraer nueva información. En particular, una elección juiciosa de un estado post-seleccionado  $|f\rangle$  para el sistema con respecto al pre-seleccionado  $\hat{\sigma}_0$  provee una técnica de amplificación que ha sido explotada por los experimentales [5, 9].

Para explotar los grados de libertad adicionales del medidor, no se toma una lectura del medidor: todas las matrices de densidad deben ser incondicionales. La unión de las matrices

de densidad del sistema después de la pre-medición se transforman como hemos visto en la Ec. (2.53)

$$\hat{\tau}_1 = \sum_{i,j} (|m^{(i)}\rangle \hat{\mathbb{P}}_{s_i} \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbb{P}}_{s_j} \langle m^{(j)}|) .$$

Después de la post-selección  $|f\rangle$  para el sistema, la matriz de densidad se convierte en

$$\hat{\tau}_f = \frac{(\hat{\mathbb{P}}_f \otimes \hat{\mathbb{I}}_M) \hat{\tau}_1 (\hat{\mathbb{P}}_f \otimes \hat{\mathbb{I}}_M)}{\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)} , \quad (2.77)$$

donde

$$\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1) = \text{Tr} \left[ (\hat{\mathbb{P}}_f \otimes \hat{\mathbb{I}}_M) \hat{\tau}_1 \right] . \quad (2.78)$$

Nos enfocamos ahora en la matriz de densidad del medidor  $\hat{\mu}_f = \text{Tr}_S(\hat{\tau}_f)$  después de la post-selección, y la usamos para investigar observables apropiadas para el medidor en ese estado para tratar de obtener un efecto de amplificación mediante la elección del denominador  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$  tan pequeño como sea posible.

Considérese el ejemplo de un qubit descrito por un estado puro:

$$|s\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle , \quad (2.79)$$

donde para tener un estado normalizado los números  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . El estado del sistema se elige como

$$\hat{S} = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1| , \quad (2.80)$$

el cual tiene eigenvalores

$$\begin{aligned} \hat{S} |0\rangle &= (+1) |0\rangle \\ \hat{S} |1\rangle &= (-1) |1\rangle . \end{aligned} \quad (2.81)$$

El operador de evolución es

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{P}\right) , \quad (2.82)$$

con  $\hat{P}$  el operador de medición conjugado a la variable del apuntador  $\hat{Q}$ .

Usando las Ecs. (2.61), (2.66), (2.68), y (2.79), y los eigenvalores de  $\hat{S}$  de (2.81), la



definición de  $\hat{P}$  en la representación de posiciones, dada por

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \partial_q ,$$

y la serie de Taylor de la función alrededor de  $q$ , hallamos que

$$\begin{aligned} |s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle &= |s\rangle \otimes \int dq |q\rangle \varphi_0(q) \\ &\xrightarrow{\hat{U}} \alpha |0\rangle \int dq |q\rangle \varphi_0(q - g) + \beta |1\rangle \int dq |q\rangle \varphi_0(q + g) . \end{aligned} \quad (2.83)$$

De hecho, este es un buen modelo para el dispositivo de Stern-Gerlach, con  $g$  una medida del campo magnético inhomogéneo y  $q$  la coordenada a lo largo del eje  $z$ .

Consideramos como post-selección del estado del sistema

$$|f\rangle = \frac{\alpha_f}{\alpha} |0\rangle + \frac{\beta_f}{\beta} |1\rangle , \quad (2.84)$$

donde

$$\alpha_f = \alpha \langle f | 0 \rangle , \quad (2.85)$$

$$\beta_f = \beta \langle f | 1 \rangle . \quad (2.86)$$

El elemento de matriz de densidad resultante del medidor final  $\hat{\mu}_f$  puede ser escrito encontrando cuál es la matriz de densidad asociada a este estado y proyectándola a izquierda y a derecha en el estado  $|f\rangle$  (obteniendo algo que sólo vive en el espacio del medidor). Con esto podemos encontrar el elemento de matriz entre los estados  $q$  y  $q'$ , de donde resulta

$$\langle q | \hat{\mu}_f | q' \rangle = \frac{\tilde{\varphi}_f(q) \tilde{\varphi}_f(q')^*}{\text{Prob}(f | \hat{\tau}_1)} , \quad (2.87)$$

donde la función de onda  $\tilde{\varphi}_f(q)$  para el medidor después de la post-selección está dada por

$$\tilde{\varphi}_f(q) = \alpha_f \varphi_0(q - g) + \beta_f \varphi_0(q + g) . \quad (2.88)$$

Nuevamente dividimos entre  $\text{Prob}(f | \hat{\tau}_1)$  para tener el estado del sistema normalizado, usan-

do las Ecs. (2.83) y (2.88), obteniendo así

$$\begin{aligned} \text{Prob}(f|\hat{\tau}_1) &= \int dq |\tilde{\varphi}_f(q)|^2 \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re} \left( \int dq \alpha_f \varphi_0(q-g) \beta_f^* \varphi_0(q+g)^* \right). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Es de particular interés encontrar el valor medio  $\langle \hat{Q} \rangle_f$  del apuntador después de la post-selección, que fácilmente podemos calcular con ayuda de la Ec. (2.87), tomando en cuenta que la traza se tomará en un continuo. Usando la base de estados propios del operador  $\hat{Q}$  resulta

$$\langle \hat{Q} \rangle_f = \text{Tr}(\hat{Q} \hat{\mu}_f) = \int_{-\infty}^{\infty} dq q \langle q | \hat{\mu}_f | q \rangle = \frac{g(|\alpha|^2 - |\beta|^2)}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2r \text{Re}(\alpha_f \beta_f^*)}, \quad (2.90)$$

donde supusimos que las funciones  $\varphi_0$  son funciones muy “picudas” alrededor de  $q$ , simétricas, que el traslape entre las dos funciones de onda es real, y se definió

$$r = \int dq \varphi_0(q-g) \varphi_0(q+g)^*. \quad (2.91)$$

Comparemos la expresión para  $\langle \hat{Q} \rangle_f$  con el valor medio  $\langle \hat{Q} \rangle_1$  del apuntador sin ninguna post-selección.

Para calcular  $\langle \hat{Q} \rangle_1$  usamos la ortonormalidad de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , y que  $\int \int dq dq' \langle q | q' \rangle = \int \int dq dq' \delta(q - q')$ . Así tenemos

$$\langle \hat{Q} \rangle_1 = \text{Tr}(\hat{Q} \hat{\mu}_f) = g(|\alpha|^2 - |\beta|^2). \quad (2.92)$$

Es decir, tenemos la posibilidad de alcanzar valores mucho más grandes de  $\langle \hat{Q} \rangle_f$  que de  $\langle \hat{Q} \rangle_1$  debido al denominador  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$  en la expresión para  $\langle \hat{Q} \rangle_f$ . Una vez elegido un valor pequeño para  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$  se puede esperar un gran efecto de amplificación:

$$\frac{\langle \hat{Q} \rangle_f}{\langle \hat{Q} \rangle_1} \gg 1. \quad (2.93)$$

El problema es que el valor esperado va a ser difícil de medir, porque la probabilidad de que el sistema finalice en el estado  $|f\rangle$  es muy pequeña  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$ . Pero si somos capaces de medirlo, dará un valor esperado mucho mayor al que se mediría normalmente. El efecto de amplificación es muy importante para los experimentales [5].

Como podemos observar, el esquema auxiliar es de gran relevancia para entender una medición en Mecánica Cuántica.

---

## Parte III

# Mediciones débiles en Mecánica Cuántica

*Si he hecho descubrimientos invaluables ha sido más por tener paciencia que cualquier otro talento*  
Newton

---

## Capítulo 3

### Mediciones débiles

Durante poco más de un centenar de años la Mecánica Cuántica ha ido contradiciendo la intuición del mundo clásico (no determinismo, no localidad, realidad no objetiva) promoviendo a su vez la incursión en el análisis y resolución de nuevos problemas y con ello el entendimiento cada vez más profundo de los sistemas físicos. Más aún, debido justamente a la libertad de la teoría, heredada de no obedecer ciertas restricciones tal y como lo hace la mecánica clásica, ha sido posible definir nuevos conceptos e interpretar una inmensa cantidad de fenómenos naturales que de otra manera quedarían fuera del alcance de la ciencia (como ejemplo característico se tiene el “efecto túnel”).

Es en este contexto que se definen las *mediciones débiles*. El concepto de medición débil ha permitido incursionar de manera más profunda en el mundo cuántico e interpretar de manera alternativa algunos de los fenómenos físicos que de otra manera resultan paradójicos dentro del rigor clásico (partículas con velocidad mayor a la velocidad de la luz [19], o con energía cinética negativa, o incluso con espín ilimitado [11]).

Para incursionar dentro del concepto de medición débil, se debe recordar que, como se ha mencionado con anterioridad, cuando se realiza una medición en el formalismo de la Mecánica Cuántica el sistema bajo estudio sufre *cambios significativos* del estado en el que se encuentra inicialmente, incluso en el caso en el cual la medición es *no destructiva* (en una medición no destructiva el sistema bajo consideración *no es aniquilado* por el aparato de medición durante el proceso). Dentro del formalismo de medición directa, o medición proyectiva, las perturbaciones del sistema se manifiestan en un cambio en la matriz de densidad del sistema. El cambio ocurre de una matriz inicial  $\hat{\sigma}_0$  a una matriz en general muy distinta  $\hat{\sigma}_1$  que depende de la medición en sí. Bajo estas condiciones se dice que *una medición débil* es una medición que perturba el sistema tan poco como sea posible. El

valor débil de una observable es en general una cantidad compleja que no necesita ser un eigenvalor; de hecho, no necesita ser alguno de los valores clásicamente permitidos. Necesariamente, una medición débil arroja generalmente resultados con menor claridad que una medición directa y en ocasiones es difícil distinguir entre los eigenvalores de la observable bajo estudio. Esta característica es compensada al incrementar la estadística, es decir, repitiendo en un número importante de ocasiones el experimento.

La relevancia de las mediciones débiles reside, como se verá más adelante, en que existen fenómenos que pueden ser entendidos con mayor claridad por medio del uso de interacciones débiles; además de que el método resulta particularmente fructífero cuando se agrega la *post-selección*.

En este capítulo nos basaremos principalmente en los trabajos de Svensson [9] y Aharonov [11].

### 3.1. Mediciones débiles en el esquema auxiliar

Las mediciones débiles deben ser entendidas dentro del *esquema auxiliar*, en el cual el sistema bajo estudio se encuentra *acoplado* con el dispositivo de medición (En la presente descripción se pondrá un especial énfasis en el operador  $\hat{U}$  representativo del sistema y el medidor conjuntos). Sea  $\mathcal{S}$  el sistema a estudiar y  $\hat{S}$  el operador asociado a la observable física de interés. Por simplicidad considérese que este sistema se encuentra en un estado inicial puro representado por el vector de estado  $|s\rangle$ , mientras que el medidor  $\mathcal{M}$  se describe por medio del estado  $|m^{(0)}\rangle$ . Como es de esperarse, la evolución del sistema conjunto obedece a la acción del operador de evolución  $\hat{U}$  actuando sobre el estado inicial  $|s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle$ . A través de,

$$\begin{aligned} |s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle &\xrightarrow{\hat{U}} \hat{U}(|s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{P}\right) [|s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle], \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $\hat{P}$  es el operador de momento asociado al operador de posición del medidor  $\hat{Q}$  y  $g$  una constante que caracteriza a la medición débil, elegida de tal manera que sea pequeña (aproximadamente cero). Esta constante juega un papel fundamental dentro del formalismo ya que gobierna en todo momento la intensidad de la interacción débil. Gracias precisamente a esta condición de que  $g \approx 0$ , es posible realizar una expansión en serie de potencias del

operador de evolución del sistema conjunto, de manera que

$$|m^{(f)}\rangle = \langle f | \exp(-\frac{i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{P}) (|s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &\approx \langle f | s \rangle (1 - \frac{i}{\hbar} g \frac{\langle f | \hat{S} | s \rangle}{\langle f | s \rangle} \hat{P}) |m^{(0)}\rangle \\ &\approx \langle f | s \rangle \exp(-\frac{i}{\hbar} g S_w \hat{P}) |m^{(0)}\rangle , \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $S_w$  es justo el valor débil de  $\hat{S}$ , y está definido a través de la relación,

$$S_w = \frac{\langle f | \hat{S} | s \rangle}{\langle f | s \rangle} . \quad (3.4)$$

En este caso particular se asume por simplicidad  $S_w$  como real, aunque posteriormente se resaltaré la importancia de que puede en general tomar incluso valores complejos. Es importante resaltar que el valor débil depende tanto del estado inicial  $|s\rangle$ , como del estado final  $|f\rangle$  del sistema.

A partir de la ecuación anterior se puede realizar una comparación con el tratamiento basado en el protocolo de von Neumann. En este esquema se interpreta al estado  $|m^{(f)}\rangle$  como el cambio de la función de onda inicial  $\langle q | m^{(0)} \rangle = \varphi_0(q)$  centrada en  $q = 0$  en la función de onda final, determinada por

$$\varphi_f(q) = \langle q | m^{(f)} \rangle = \varphi_0(q - gS_w) , \quad (3.5)$$

donde  $\varphi_f$ , no es otra cosa más que la función de onda inicial centrada en el punto  $gS_w$ , a diferencia de cómo *ocurriría* en el caso del tratamiento original proyectivo en el cual la función de onda queda centrada alrededor de cualquiera de sus eigenvalores  $gs_i$  después de realizada la medición.

Por supuesto, la nueva propiedad del sistema  $\mathcal{S}$  dentro del esquema auxiliar es el valor débil  $S_w$  de la observable  $\hat{S}$ . Este nuevo elemento que, a diferencia del contexto de las mediciones proyectivas, aparece exclusivamente en el esquema auxiliar, ha causado revuelo en la forma de interpretar las mediciones dentro de la mecánica cuántica. Por una parte, ha sido el tema central de profundos debates filosóficos mientras que por otra, ha dado pauta a los físicos experimentales para poder medir y amplificar entidades que se pensaba que no podían ser medidas, tales como trayectorias en una doble rendija o funciones de onda de sistemas específicos.



Considere ahora el caso en el cual la matriz de densidad final representativa del sistema conjunto está dada a partir del estado inicial por

$$\hat{\tau}_1 = \hat{U} \hat{\tau}_0 \hat{U}^\dagger ,$$

con  $\hat{\tau}_0 = \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0$ . Se observa que el estado del sistema se da como el producto directo entre el operador de densidad inicial del sistema  $\hat{\sigma}_0$  y  $\hat{\mu}_0 = |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|$  y la matriz de densidad asociada al medidor (nótese que por simplicidad en este caso particular el medidor se encuentra en un estado puro). Ahora, el operador de evolución  $\hat{U}$  se podrá escribir como

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}_\tau\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}_{int}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{N}\right) , \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{T} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ ,  $\hat{S}$  es el operador asociado a la observable del sistema bajo estudio, y  $\hat{N}$  el operador Hermitiano conjugado del operador de posición del medidor  $\hat{M}$  (evidentemente, el operador  $\hat{N}$  es una generalización del operador  $\hat{P}$  en el protocolo de von Neumann, además de que  $[\hat{M}, \hat{N}] = i\hbar \hat{I}$ ). El Hamiltoniano de interacción  $\hat{H}_{int}$  representa una medición no destructiva de  $\hat{S}$  en el caso en el cual ambos operadores conmutan. De entre todas las posibilidades para que esto ocurra, la elección más simple posible es considerar un operador que sea múltiplo de  $\hat{S}$  (por ejemplo  $g\hat{S}$ ). Por simplicidad se puede introducir la notación  $\hat{X} = g\hat{S} \otimes \hat{N}$ , y con ello

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}_\tau\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{X}\right) \\ &\approx 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{X} - \frac{1}{2\hbar^2} \hat{X}^2 + \mathcal{O}(\hat{X}^3) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para poder proseguir con el desarrollo, nótese que dados dos operadores arbitrarios  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  y un número  $\lambda$  en los complejos, es inmediato verificar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$[\hat{A}, \hat{B}]^k = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]^{k-1}] , \quad (3.8)$$

$$e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} [\hat{A}, \hat{B}]^n , \quad (3.9)$$

con lo cual, es posible encontrar la evolución del sistema conjunto  $\hat{\tau}_1$  de manera aproximada:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_1 &= \hat{U} \hat{\tau}_0 \hat{U}^\dagger \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{X}} \hat{\tau}_0 e^{\frac{i}{\hbar} \hat{X}} \\ &\approx \hat{\tau}_0 - \frac{i}{\hbar} [\hat{X}, \hat{\tau}_0] - \frac{i}{2\hbar^2} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{\tau}_0]] + \dots\end{aligned}\quad (3.10)$$

Si además, se consideran las condiciones iniciales para el estado inicial del operador  $\hat{N}$  dadas por

$$\langle \hat{N} \rangle_0 = \text{Tr}_{\mathcal{M}}(\hat{\mu}_o \hat{N}) = 0, \quad (3.11)$$

$$\langle \hat{N}^2 \rangle_0 = \text{Tr}_{\mathcal{M}}(\hat{\mu}_o \hat{N}^2) \neq 0, \quad (3.12)$$

el operador de densidad asociado al sistema  $\hat{\sigma}_1$  resulta ser

$$\hat{\sigma}_1 = \text{Tr}_{\mathcal{M}}(\hat{\tau}_1) \approx \hat{\sigma}_0 - \frac{g^2}{2\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 [[\hat{\sigma}_0, \hat{S}], \hat{S}]. \quad (3.13)$$

Para llegar a esta última relación se utilizó el hecho de que la traza es invariante ante permutaciones cíclicas. Más aún, es posible escribir de manera directa los elementos de matriz de  $\hat{\sigma}_1$  en la base ortonormal asociada al operador  $\hat{S}$  como

$$\langle s_i | \hat{\sigma}_1 | s_j \rangle \approx \langle s_i | \hat{\sigma}_0 | s_j \rangle \left[ 1 - \frac{g^2}{2\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 (s_i - s_j)^2 \right]. \quad (3.14)$$

En esta última relación, aparece de manera explícita la aportación debida a la medición débil, resaltando el hecho de que se crea una corrección a segundo orden en la intensidad de la medición  $g$  de la matriz de densidad inicial.

Por otra parte, un cálculo directo muestra lo que ocurre cuando se proyecta el estado final del medidor  $|m^{(f)}\rangle$  en el estado inicial  $|m^{(0)}\rangle$ :

$$\langle m^{(0)} | m^{(f)} \rangle \approx 1 - \frac{g^2}{2\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 (s_0 - s_f)^2, \quad (3.15)$$

lo cual significa que para una medición débil existe un traslape entre los diferentes estados del medidor, es decir, no hay diferencia efectiva entre los distintos eigenvalores  $s_i$ , lo cual es una característica particular de las mediciones débiles.

Como ya se mencionó con antelación  $\hat{\tau}_0 = \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\mu}_0$ . Si ahora se considera al estado inicial

del sistema como un estado puro,  $\hat{\sigma}_0 = |s^0\rangle\langle s^0|$ , se obtiene que bajo la misma aproximación el estado final del medidor será

$$\hat{\mu}_1 = \text{Tr}_S(\hat{\tau}_1) \approx \hat{\mu}_0 + \frac{1}{\hbar} g \langle \hat{S} \rangle_0 [\hat{\mu}_0, \hat{N}] - \frac{g^2}{2\hbar^2} \langle \hat{S}^2 \rangle_0 [[\hat{\mu}_0, \hat{N}], \hat{N}]. \quad (3.16)$$

A partir del resultado anterior, se deduce que si se busca encontrar inmediatamente después de la medición el valor medio  $\langle \hat{M} \rangle_f$  del operador asociado a la posición del medidor  $\hat{M}$  (el cual es el conjugado de  $\hat{N}$ ) se debe proceder de manera semejante al caso del protocolo de von Neumann, haciendo la correspondencia entre  $\hat{N}$  y  $\hat{P}$  así como de  $\hat{M}$  con  $\hat{Q}$ ; es decir, se debe tomar la traza parcial sobre los estados del medidor y recordar que el subespacio del medidor es un espacio completo, con lo cual se llega a

$$\langle \hat{M} \rangle_f = \text{Tr}(\hat{M}\hat{\mu}_1) = \langle \hat{M} \rangle_0 + g \langle \hat{S} \rangle_0 + \mathcal{O}(g^3). \quad (3.17)$$

Nótese que al realizar el cálculo anterior, el término de orden  $g^2$  se anula, por lo que el siguiente término después del término lineal es el de orden  $\mathcal{O}(g^3)$ . Aquí aparece de manera explícita la relación entre los valores promedio de la variable  $\hat{M}$  y los del sistema  $\hat{S}$  a través de  $g$ . Esta característica, resulta ser una de las aportaciones más fructíferas de las mediciones débiles.

## 3.2. Mediciones débiles y post-selección

En Mecánica Clásica, el estado inicial de un sistema cerrado determina su estado final y viceversa, por lo cual basta con imponer un conjunto completo de condiciones iniciales de frontera. Esto no sucede en Mecánica Cuántica; el estado inicial de un sistema cerrado *no* determina su estado final, y es posible imponer condiciones completas iniciales y finales de frontera. [11]

Las condiciones de frontera se imponen, es decir, se seleccionan. Cuando se eligen condiciones iniciales de frontera, se dice que se está *pre-seleccionando el estado* (antes de otra medición), mientras que en el caso de condiciones finales se está *post-seleccionando el sistema* (después de otra medición). Juntas, las condiciones de frontera iniciales y finales definen un ensemble pre- y post-seleccionado.

Desde este punto de vista, el siguiente punto a discutir dentro del presente protocolo es especificar el sistema después de realizada la medición débil, es decir, realizar la post-

selección. Sea el estado post-seleccionado  $|f\rangle$ , si se reescribe el sistema por medio de la matriz de densidad completa, entonces

$$\hat{\tau}_1 \approx \hat{\tau}_0 + \frac{1}{\hbar} [\hat{\tau}_0, g\hat{S} \otimes \hat{N}] - \frac{1}{2\hbar^2} [[\hat{\tau}_0, g\hat{S} \otimes \hat{N}], g\hat{S} \otimes \hat{N}]. \quad (3.18)$$

Como el sistema y el medidor están enredados antes de la medición, el estado del medidor  $\hat{\mu}_f$  también será influenciado por la post-selección, por lo cual

$$\hat{\mu}_f = \frac{1}{\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)} \text{Tr}\{(\mathbb{P}_f \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{M}}) \hat{\tau}_1\}. \quad (3.19)$$

Aquí,  $\mathbb{P}_f = |f\rangle\langle f|$  es el proyector estándar sobre los estados del sistema, además de que fue necesario introducir un factor de normalización  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$  para garantizar que la  $\text{Tr}(\hat{\mu}_f) = 1$ , si también se hace referencia a la Ec. (3.18), se llega a

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{S}}[(|f\rangle\langle f| \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{M}}) \hat{\tau}_1] &\approx \langle f|\hat{\sigma}_0|f\rangle \hat{\mu}_0 + \frac{1}{\hbar} [\langle f|\hat{\sigma}_0\hat{S}|f\rangle \hat{\mu}_0 \hat{N} - \langle f|\hat{S}\hat{\sigma}_0|f\rangle \hat{N} \hat{\mu}_0] \\ &- \frac{g^2}{2\hbar^2} [\langle f|\hat{\sigma}_0\hat{S}^2|f\rangle \hat{\mu}_0 \hat{N}^2 + \langle f|\hat{S}^2\hat{\sigma}_0|f\rangle \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 \\ &- 2\langle f|\hat{S}\hat{\sigma}_0\hat{S}|f\rangle \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N}]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si se considera ahora el caso de un estado inicial puro  $\hat{\sigma}_0 = |s\rangle\langle s|$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{S}}[(|f\rangle\langle f| \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{M}}) \hat{\tau}_1] &\approx |\langle f|s\rangle|^2 \hat{\mu}_0 + 2\frac{g}{\hbar} P_a \left( \langle f|\hat{S}|s\rangle \langle s|f\rangle \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) \\ &- \frac{g^2}{\hbar^2} P_h \left( \langle f|\hat{S}^2|s\rangle \langle s|f\rangle \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 \right) \\ &- \langle f|\hat{S}|s\rangle \langle s|\hat{S}|f\rangle \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde el símbolo  $P_a$  se refiere a la parte antihermitiana y  $P_h$  a la parte hermitiana, de lo que aparece entre paréntesis, respectivamente. Además si la proyección  $\langle f|s\rangle \neq 0$ , la relación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{S}}[(|f\rangle\langle f| \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{M}}) \hat{\tau}_1] &\approx |\langle f|s\rangle|^2 \left[ \hat{\mu}_0 + 2\frac{g}{\hbar} P_a \left( S_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) \right. \\ &\left. - \frac{g^2}{\hbar^2} P_h \left( \frac{\langle f|\hat{S}^2|s\rangle}{\langle f|s\rangle} \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 - |S_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde, como se definió anteriormente,  $S_w$  es el valor débil de la observable  $\hat{S}$ .

La relación para la probabilidad  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$  se obtiene de la necesidad de que  $\text{Tr}(\hat{\mu}_f) = 1$ . Si se escribe en la aproximación a segundo orden en la intensidad de la interacción  $g$  con la ayuda de la condición inicial  $\langle \hat{N} \rangle_0 = 0$ , se obtiene

$$\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1) \approx |\langle f|s \rangle|^2 \left[ 1 - \frac{g^2}{\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 \text{Re} \left( \frac{\langle f|\hat{S}^2|s \rangle}{\langle f|s \rangle} - |S_w|^2 \right) \right], \quad (3.23)$$

donde  $\text{Re}$  e  $\text{Im}$  (en la siguiente ecuación) denotan las partes real e imaginaria del número entre paréntesis, respectivamente.

Del resultado anterior se hace notar que la probabilidad de obtener el estado final  $|f\rangle$  después de realizada la pre-medición a partir del estado inicial  $|s\rangle$ , está dado principalmente por la intensidad de la medición  $g$ , y es proporcional al traslape  $|\langle f|s \rangle|^2$ . Este resultado afecta directamente el caso de la amplificación, en la cual, para una mayor amplitud se requiere de un valor pequeño de  $\text{Prob}(f|\hat{\tau}_1)$ , es decir, un valor grande para el valor débil  $S_w$ .

A partir de la última ecuación se puede encontrar la expresión para la matriz de densidad del medidor  $\hat{\mu}_f$ , dado que el estado post-seleccionado del sistema es nuevamente  $|f\rangle$  y que  $\hat{\sigma}_0$  sigue representando un estado puro. La expresión a segundo orden en la intensidad de interacción  $g$  a la que se llega es

$$\hat{\mu}_f \approx \mathcal{D}^{-1} \left[ \hat{\mu}_0 + 2 \frac{g}{\hbar} \text{Im} \left( S_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) - \frac{g^2}{\hbar^2} \text{Re} \left( \frac{\langle f|\hat{S}^2|s \rangle}{\langle f|s \rangle} \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 - |S_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} \right) \right], \quad (3.24)$$

donde se ha definido

$$\mathcal{D} = 1 - \frac{1}{\hbar^2} g^2 \langle \hat{N}^2 \rangle_0 \text{Re} \left( \frac{\langle f|\hat{S}^2|s \rangle}{\langle f|s \rangle} - |S_w|^2 \right). \quad (3.25)$$

Es claro que el valor débil toma una posición central en la expresión para el operador de densidad final del medidor  $\hat{\mu}_f$ ; de hecho, es la única referencia al objeto que permanece cuando se toma la aproximación a primer orden en  $g$ . Además esta ecuación muestra la información concerniente al sistema conjunto (sistema y medidor); el sistema y el medidor se desenredan después de la post-selección. Esta información puede resultar útil para medir ciertas cantidades específicas. Por supuesto, ya que  $S_w$  puede ser deducida a partir de ciertos resultado elegidos del medidor se concluye que es una cantidad medible.

Para profundizar en la última afirmación, sea  $\hat{L}$  cualquier observable del medidor. To-

mando la aproximación a primer orden en  $g$  dentro del numerador (notando que también a primer orden  $\mathcal{D}^{-1} \approx 1 - \frac{ig}{\hbar}(S_w^* - S_w) \langle \hat{N} \rangle_0$ ), se puede encontrar el valor esperado  $\langle \hat{L} \rangle_f$  después de la post-selección:

$$\langle \hat{L} \rangle_f \approx \langle \hat{L} \rangle_0 + \frac{i}{\hbar} g \left[ S_w^* \left( \langle \hat{N} \hat{L} \rangle_0 - \langle \hat{N} \rangle_0 \langle \hat{L} \rangle_0 \right) - S_w \left( \langle \hat{L} \hat{N} \rangle_0 - \langle \hat{N} \rangle_0 \langle \hat{L} \rangle_0 \right) \right]. \quad (3.26)$$

Nótese que en este caso  $S_w$  es un número complejo.

Existen varios casos de interés particular debido a su simplicidad y a que arrojan resultados concretos. El primero es cuando  $\hat{L} = \hat{N}$ , para este caso se obtiene

$$\langle \hat{N} \rangle_f \approx \langle \hat{N} \rangle_0 + \frac{i}{\hbar} g (S_w^* - S_w) (\Delta \hat{N})_0^2. \quad (3.27)$$

De la ecuación anterior, se observa que  $\langle \hat{N} \rangle_f$  es cercano a  $\langle \hat{N} \rangle_0$  cuando  $g \approx 0$ , y depende directamente de la parte imaginaria del valor débil  $S_w$  así como de la fluctuación  $(\Delta \hat{N})_0^2$ .

El segundo caso ocurre cuando se considera  $\hat{L}$  como el operador  $\hat{M}$  conjugado de  $\hat{N}$ . En este caso se tiene, usando la Ec. (3.26) y que la correlación de dos operadores  $\hat{N}$  y  $\hat{L}$  está dada por

$$\text{Corr}(\hat{N}, \hat{L}) = \frac{\text{Cov}(\hat{N}, \hat{L})}{(\Delta \hat{N})(\Delta \hat{L})}, \quad (3.28)$$

donde

$$\text{Cov}(\hat{N}, \hat{L}) = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{N}, \hat{L} \} \rangle - \langle \hat{N} \rangle \langle \hat{L} \rangle, \quad (3.29)$$

que

$$\langle \hat{M} \rangle_f \approx \langle \hat{M} \rangle_0 + \frac{g}{2} (S_w^* + S_w) + \frac{i}{\hbar} g (S_w^* - S_w) \text{Cov}(\hat{N}, \hat{M}). \quad (3.30)$$

En esta última expresión, nuevamente se utiliza  $\mathcal{D}$  expresada a primer orden en  $g$ . Se puede hacer notar que en este caso se recobran los valores reales e imaginarios del valor débil, lo cual resulta de trascendental importancia en el momento de buscar elaborar ciertos experimentos de medición, los cuales se discutirán más adelante.

### 3.3. Relación entre valor débil y la fórmula de Aharonov-Bergmann-Lebowitz (ABL)

La regla de Aharonov Bergmann y Lebowitz (ABL) es un importante resultado para poder explicar mediciones *directas*. Esta regla fue introducida en 1964, mucho antes de el

concepto de medición débil y post-selección.

Svensson [13] nos habla de cómo Aharonov Bergmann y Lebowitz consideraron una situación similar a la empleada en mediciones débiles. Un sistema es preparado (pre-seleccionado) en un estado inicial  $|in\rangle$  y post-seleccionado en un estado final  $|f\rangle$ .

La  $\text{Prob}(o_i|f) \& |in\rangle$  de encontrar la partícula en el eigenvalor particular  $o_i$  de un operador  $\hat{O}$  que representa una observable  $O$  en una medición ordinaria, entre la pre-selección y la post-selección es, usando la regla de Bayes,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(o_i|f) \& |in\rangle &= \frac{\text{Prob}(|o_i\rangle \& |f\rangle \& |in\rangle)}{\text{Prob}(|f\rangle \& |in\rangle)} \\ &\Rightarrow \frac{|\langle f|o_i\rangle|^2 |\langle o_i|in\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|o_j\rangle|^2 |\langle o_j|in\rangle|^2} =: (ABL) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

En el caso en el cual el operador  $\hat{O}$  es un operador de proyección o de número  $\hat{O} = \hat{A} := |a\rangle \langle a|$ , sobre un particular eigenestado  $|a\rangle$ , los eigenvalores de  $\hat{A}$  son 1 y 0.

La fórmula ABL que nos da la probabilidad de encontrar  $|a\rangle$  es

$$\begin{aligned} \text{Prob}(|A| |f\rangle \& |in\rangle) &= \text{Prob}(1|f) \& |in\rangle) \\ &= \frac{|\langle f|A\rangle|^2 |\langle A|in\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|o_j\rangle|^2 |\langle o_j|in\rangle|^2} \\ &= \frac{\langle f|A\rangle \langle A|f\rangle \langle A|in\rangle \langle in|A\rangle}{\sum_j |\langle f|o_j\rangle|^2 |\langle o_j|in\rangle|^2} \\ &= \frac{|\langle f|\hat{A}|in\rangle|^2}{|\langle f|\hat{A}|in\rangle|^2 + |\langle f|(1-\hat{A})|in\rangle|^2} . \end{aligned}$$

Así la probabilidad de fallar es

$$\text{Prob}(0|f) \& |in\rangle) = \frac{|\langle f|(1-\hat{A})|in\rangle|^2}{|\langle f|\hat{A}|in\rangle|^2 + |\langle f|(1-\hat{A})|in\rangle|^2} . \quad (3.32)$$

Cuando  $\langle f|in\rangle \neq 0$ , podemos reescribir estas probabilidades en términos de los valores

débiles como

$$\text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) = \frac{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2}{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2 + \left| \left[ {}_f(1 - \hat{A})_{in} \right]_w \right|^2}, \quad (3.33)$$

con la correspondiente expresión para  $\text{Prob}(0||f\rangle \& |in\rangle)$ .

Notemos que si  $\text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) = 1$  (o a cero), es decir, si se encuentra (o respectivamente no se encuentra) el eigenestado intermedio  $|a\rangle$ , se puede obtener un valor débil  $({}_f\hat{A}_{in})_w = 1$  (o cero), y viceversa. Además si  $({}_f\hat{A}_{in})_w = -1$ , entonces la probabilidad ABL se vuelve  $\text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) = \frac{1}{5}$ . Es muy sencillo corroborar estos cálculos. Primero veamos que nuestra expresión para la probabilidad es

$$\begin{aligned} \text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) &= \frac{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2}{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2 + \left| \left[ {}_f(1 - \hat{A})_{in} \right]_w \right|^2} = \frac{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2}{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2 + \left| \frac{\langle f|(1 - \hat{A})|in\rangle}{\langle f|in\rangle} \right|^2} \\ &= \frac{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2}{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2 + \left| \frac{\langle f|in\rangle}{\langle f|in\rangle} - ({}_f\hat{A}_{in})_w \right|^2} = \frac{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2}{|({}_f\hat{A}_{in})_w|^2 + \left| 1 - ({}_f\hat{A}_{in})_w \right|^2}. \end{aligned}$$

De esta forma sólo basta con sustituir nuestros valores débiles:

$$\text{Si suponemos } ({}_f\hat{A}_{in})_w = 1 \Rightarrow \text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{Si suponemos } ({}_f\hat{A}_{in})_w = 0 \Rightarrow \text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\text{Si suponemos } ({}_f\hat{A}_{in})_w = -1 \Rightarrow \text{Prob}(1||f\rangle \& |in\rangle) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

Es directo el hecho de que podemos reescribir los valores débiles en términos de la probabilidad ABL. Basta con asumir que  $({}_f\hat{A}_{in})_w = ({}_f\hat{A}_{in})_w^*$ , i.e., el valor débil es real. También podemos verlo como que la parte imaginaria del valor débil se desvanece, el cual ha sido el caso en todas las aplicaciones de los valores débiles a las paradojas. Usando esta



expresión la ecuación anterior esta dada por,

$$\begin{aligned}
p = \text{Prob}(1||f\rangle \&|in\rangle) &= \frac{\left| \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w \right|^2}{\left| \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w \right|^2 + \left| \left( {}_f(1 - \hat{A})_{in} \right)_w \right|^2} = \frac{\left| \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w \right|^2}{\left| \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w \right|^2 + \left| 1 - \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w \right|^2} \\
&= \frac{\left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2}{\left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2 + \left( 1 - \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w - \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^* + \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2 \right)} \\
&= \frac{\left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2}{2 \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2 + 1 - 2 \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w}, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

encontramos

$$p = \text{Prob}(1||f\rangle \&|in\rangle) = \frac{\left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2}{2 \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^2 + 1 - 2 \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w},$$

de donde el valor débil de A es

$$\left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w = \frac{p \pm \sqrt{p(1-p)}}{2p-1}, \quad P \neq \frac{1}{2}. \tag{3.35}$$

Hemos introducido la notación  $y = \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w = \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w^*$  y que

$$\begin{aligned}
\implies p(2y^2 + 1 - 2y) - y^2 &= 0 \implies (2p-1)y^2 - 2py + p = 0 \\
\implies y_{1,2} &= \frac{-(-2p) \pm \sqrt{(-2p)^2 - 4(2p-1)p}}{2(2p-1)} = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 8p^2 + 4p}}{4p-2} \\
&= \frac{2p \pm \sqrt{-4p^2 + 4p}}{4p-2} = \frac{p \pm \sqrt{p(1-p)}}{2p-1}.
\end{aligned}$$

Notemos que si le damos los valores encontrados a las probabilidades tenemos

$$\text{Prob}(1||f\rangle \&|in\rangle) = 1 \iff \left( {}_f\hat{A}_{in} \right)_w = 1, \tag{3.36}$$

$$\text{Prob}(1||f\rangle \&|in\rangle) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow ({}_f\hat{A}_{in})_w = -1 \quad o \quad = \frac{1}{3}. \quad (3.37)$$

Podemos concluir que existe una estrecha relación entre la probabilidad ABL  $\text{Prob}(1||f\rangle \&|in\rangle)$  aplicada a un operador de número  $\hat{A} = |a\rangle \langle a|$  y el valor débil  $({}_f\hat{A}_{in})_w$ . En este sentido restringido, hay una relación entre mediciones directas y débiles pre- y post-seleccionadas.

Por supuesto *conceptualmente* las dos nociones son muy diferentes.

### 3.4. Interpretaciones físicas de los valores débiles

Es importante resaltar el hecho que en la teoría cuántica las leyes dinámicas son temporalmente *simétricas*, tal y como ocurre dentro de la mecánica clásica, la *asimetría* ocurre a partir del momento en el cual se realiza una medición. Es de conocimiento común que después de llevada a cabo la medición de una observable física, el sistema colapsa en una nueva función de onda acorde con los resultados de la propia medición. En ese sentido, la diferencia entre el pasado y el futuro *no* es una propiedad intrínseca de la teoría cuántica sino una característica de como se lleva a cabo la interacción debida a la medición debida a la dirección temporal de realización.

Analizaremos en esta sección los trabajos realizados por Lundeen y colaboradores en [27], y por Aharonov y colaboradores en [28]. Los autores nos muestran como los valores débiles representan una novedosa característica de los sistemas cuánticos en el intervalo temporal entre dos mediciones. Ellos son el resultado de un procedimiento de medición que cumple con ciertos requerimientos de debilidad. Recordemos que el formalismo de las mediciones débiles fue introducido inicialmente por Aharonov, Bergman y Lebowitz para simplificar el cálculo de la probabilidad de encontrar un resultado dado en una medición que es realizada entre otras dos mediciones.

Los valores débiles *son una propiedad física* de un sistema cuántico, es decir, una propiedad de un sistema *perteneciente a un ensemble* que es tanto pre- como post-seleccionado, para el caso en el cual se busca medir el sistema de tal manera que no cambie *significativamente* su función de onda una vez realizada la medición intermedia.

Una de las consecuencias de la debilidad de la medición es que la precisión de una sola medición es baja, de tal manera que no provee información alguna, sin embargo, es posible contrarrestar esta característica y obtener resultados consistentes si se realiza la medición sobre un ensemble de sistemas idénticos; por supuesto, el ensemble debe ser de un carácter

especial: debe cumplir con la pre- y post-selección. Al promedio sobre un número grande de repeticiones de la medición débil se le llama *el valor débil*.

De ahí que la propiedad fundamental de los valores débiles sea que *la perturbación causada por ellos puede ser muy pequeña*. Este resultado tiene la ventaja de que se puede realizar la medición de varios operadores subsecuentemente, sin alterar los resultados individuales de cada uno de ellos, aún si estos *no* conmutan; incluso en el caso en el cual la medición se realiza de forma simultánea. Es decir, las mediciones débiles permiten ir más allá de los alcances de las mediciones fuertes, en las cuales es de trascendental importancia el orden en el cual se realizan las mediciones.

Una medición débil puede ser realizada reduciendo *suficientemente* el acoplamiento entre el medidor y el sistema de interés. En este sentido el formalismo de las mediciones débiles posee una gran ventaja a favor de las mediciones directas.

Como consecuencia de las exigencias previamente enunciadas, el valor débil no necesariamente pertenecen al conjunto de eigenvalores de la observable, en muchas ocasiones puede diferir significativamente de los eigenvalores del operador asociado, llegando a ser incluso un valor complejo cuya parte real difiere considerablemente de cualquiera de los eigenvalores.

El valor débil no queda totalmente definido por un sistema que ha sido solamente pre-seleccionado. Es necesario agregar el resultado de la medición futura. Sin embargo, ya que las mediciones débiles no perturban la función de onda inicial, se puede predecir con probabilidad cercana a uno el resultado de una verificación experimental a partir del estado inicial conocido, incluso si el evento de tal medición fue realizado durante el periodo intermedio. Ya que las acciones futuras no afectan los resultados experimentales, si la verificación experimental en el futuro toma o no lugar, el resultado de la medición débil *no* cambia el presente. Cuando no se realiza ninguna verificación experimental en el futuro, el procedimiento anterior es el procedimiento cotidiano asociado con la medición de un valor medio de un ensemble.

En los casos en los cuales los valores débiles son lejanos a los eigenvalores, la probabilidad de obtener un resultado deseado es extremadamente pequeña y no puede ser fácilmente realizada. Sin embargo, es importante reforzar conceptualmente que los valores débiles ciertamente *describen la realidad del sistema cuántico* y son consideradas como la mejor estimación de una observable en un sistema pre- y post-seleccionado.

Aunque las mediciones débiles son realizadas de forma regular, ellas generalmente no arrojan resultados sorprendentes, los cuales aparecen cuando las mediciones se realizan

cuando los ensembles son tanto pre- como post-seleccionados, además de que el resultado post-seleccionado sea un resultado muy improbable.

De hecho, muchas de las realizaciones experimentales realizadas en el laboratorio son mediciones débiles. Por ejemplo, todas las variables termodinámicas son promedios de un número de sistemas microscópicos extremadamente grande y durante una medición típica solamente un pequeño número de micro sistemas son perturbados.

Las mediciones débiles son ideales para examinar las propiedades de evolución del sistema antes de la post-selección. Han sido usadas para simplificar cálculos en redes ópticas, para entender efectos de cristales fotónicos birrefringentes en luz rápida y lenta; han dado luz para el entendimiento de una nueva perspectiva del efecto túnel, y ayudado en la resolución de varias paradojas cuánticas [? ].

Finalmente, aunque las mediciones débiles originalmente fueron formuladas en términos del protocolo de von Neumann para observables asociadas a una sola partícula, es posible generalizarlas en la descripción de varias partículas. De hecho existen varias ideas teóricas sobre mediciones débiles que se centran en observables conjuntas, tales como la paradoja de Hardy, la no localidad de una partícula, etc. Se dice que el valor débil de una observable conjunta es un *valor débil conjunto*.

Las observables conjuntas son extremadamente difíciles de medir por métodos directos debido a que se deben acoplar varias observables a un solo medidor. Mientras tanto al usar mediciones débiles es posible simplificar las dificultades. La idea es medir las observables de forma separada simultáneamente y multiplicar los resultados.

En el régimen de mediciones débiles para la deflexión de  $N$  apuntadores proporcionales a sus valores débiles, el valor débil conjunto de orden  $N$  está relacionado con las correlaciones entre todas las deflexiones de los  $N$  medidores y la complicada combinación de valores débiles conjuntos de menor orden, aunque estos resultados pueden ser expresados de manera bastante simple y elegante si se expresan en términos de las correlaciones de las  $N$  partículas; cuando los valores esperados quedan en términos de productos de los valores esperados de los operadores de aniquilación.

### 3.4.1. Valores débiles complejos en mediciones cuánticas

Como ya se ha mencionado, el valor débil  $A_w$  de cualquier observable  $\hat{A}$  es generalmente un número complejo, en esta sección seguiremos el análisis realizado por Jozsa en [26], en

el cual deriva una interpretación física en términos del cambio promedio de la medición de la posición y el momento del apuntador. En particular, se puede mostrar que este cambio medio de la posición contiene un término conjunto proporcional a la parte imaginaria del valor débil y a la rapidez a la cual el apuntador se extiende en el espacio cuando registra la interacción de la medición.

Es conveniente resaltar nuevamente las dos características que diferencian al formalismo de valores débiles con respecto al tratamiento usual: primero, a parte de preparar el sistema cuántico en un estado inicial determinado, también se le impone una post-selección en; segundo, la interacción de medición es suficientemente débil para que después de la medición, el estado del sistema permanezca imperturbable.

Para poder deducir las propiedades físicas intervinientes en una medición débil general (con valores débiles complejos) considérese la siguiente situación. Supóngase que el sistema y el medidor se encuentran inicialmente en el estado inicial pre-seleccionado  $|\psi_i\rangle$  y  $|\phi\rangle$ , respectivamente, cuya interacción se encuentra regida por el Hamiltoniano  $\hat{H}_{int} = g(t)\hat{A}\hat{p}$  donde  $g(t) = g\delta(t-t_0)$ . Aquí nuevamente  $g$  es la constante de acoplamiento y  $\hat{p}$  el momento conjugado de la posición del medidor  $\hat{q}$ ; nótese que la interacción es impulsiva y toma lugar al tiempo  $t = t_0$ .

Después de efectuada una medición fuerte el estado conjunto estará regido por el operador de evolución y será  $e^{-ig\hat{A}\hat{p}/\hbar}|\psi_i\rangle|\phi\rangle$ ; si se post-selecciona el sistema en el estado  $|\psi_f\rangle$  el estado del medidor será

$$|\alpha\rangle = \langle\psi_f|e^{-ig\hat{A}\hat{p}/\hbar}|\psi_i\rangle|\phi\rangle. \quad (3.38)$$

En la práctica, la post-selección se logra haciendo el experimento en varias ocasiones sobre el estado inicial y completando posteriormente el proceso realizando una medición final del proyector  $\hat{\mathbb{P}}_f$  sobre el estado final para cada realización, eligiendo para el análisis estadístico los resultados en los cuales  $\hat{\mathbb{P}}_f = 1$ .

Una de las proposiciones de la mecánica cuántica es que una medición perturba irrevocablemente el sistema cuántico. La medición se dice que es fuerte si las funciones de onda se trasladan a  $\phi(q - ga_i)$ , donde los valores  $a_i$  son los eigenvalores de  $\hat{A}$ , correspondientes a los estados que tienen un traslape despreciable. En este caso, después de la interacción provocada por la medición, la posición promedio del medidor tendrá un corrimiento dado por  $g \langle \hat{A} \rangle$ . En este punto entra en juego el requerimiento de que la interacción de la medición es suficientemente débil para que sea posible obtener información acerca de  $\hat{A}$  mientras el estado del sistema permanece casi intacto. Para restringir la fuerza de la in-

teracción, durante todo el tratamiento se considera el límite de  $g$  suficientemente pequeña, manteniendo en todos los resultados sólo los términos a primer orden en  $g$ . En este caso las traslaciones  $\phi(q - ga_i)$  tendrán un traslape considerable del orden de  $1 - O(g)$ . Expandiendo la Ec. (3.38) hasta términos de primer orden en  $g$  y suponiendo  $A_w$  suficientemente grande, se llega a

$$|\alpha\rangle \approx \langle \psi_f | \hat{I} - ig\hat{A}\hat{p}/\hbar | \psi_i \rangle |\phi\rangle = \langle \psi_f | \psi_i \rangle (\hat{I} - igA_w\hat{p}/\hbar) |\phi\rangle \quad (3.39)$$

$$\approx \langle \psi_f | \psi_i \rangle e^{-igA_w\hat{p}/\hbar} |\phi\rangle . \quad (3.40)$$

Se observa que todas las propiedades asociadas a la medición del medidor están relacionadas con  $\hat{A}$ ,  $|\psi_i\rangle$  y  $|\psi_f\rangle$  solamente a través del número complejo  $A_w$ .

En general  $A_w$  puede tomar valores complejos y aunque no es inmediatamente claro, afecta a los valores promedio de las variables del medidor.

Matemáticamente, la Ec. (3.39) representa una traslación de  $gA_w$  alrededor de la posición inicial de la función de onda  $\phi(q - gA_w)$ . Sin embargo, como el valor débil es generalmente complejo, la función es solamente trasladada a lo largo del eje de las  $q$  reales, por lo cual sus propiedades cuánticas no son caracterizables de manera directa en términos de traslaciones de  $\phi(q)$ . En la literatura, solamente unos casos especiales restringidos han sido considerados. Por ejemplo, se han introducido los promedios inicial y final del medidor

$$\langle q \rangle_i = \langle \phi | q | \phi \rangle , \quad \langle q \rangle = \frac{\langle \alpha | q | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} . \quad (3.41)$$

También de manera semejante los promedios del momento  $\langle p \rangle_i$  y  $\langle p \rangle_f$ . Además de considerarse las varianzas de ambos en el estado inicial del medidor  $|\phi\rangle$ , recuérdese que  $Var_q = (\Delta q)^2$  y  $Var_p = (\Delta p)^2$ . Los casos que han sido estudiados son los siguientes: (i) Si  $A_w$  es real, entonces  $\langle q \rangle_f = \langle q \rangle_i + gA_w$ , (ii) si  $A_w$  es complejo pero el medidor está valuado en los reales, entonces  $\langle q \rangle_f = \langle q \rangle_i + gRe(A_w)$  y  $\langle p \rangle_f = \langle p \rangle_i + 2gIm(A_w)Var_p$ ; finalmente (iii) también se ha estudiado el caso en el cual la parte imaginaria de  $A_w$  contribuye a la operación no unitaria, lo cual puede estar asociado con un incremento o decremento del tamaño de  $\langle \alpha | \alpha \rangle$  del ensemble pre- y post-seleccionado durante los experimentos.

Considérese nuevamente el caso más general, en el cual  $A_w$  es un número complejo y la función de onda  $\phi(q) \equiv \langle q | \phi \rangle$  toma también valores complejos. Es posible entonces demostrar lo siguiente.

*Teorema* Sea  $A_w = a + ib$ . Entonces después de una interacción de medición de von

Neumann débil sobre un sistema con estados pre- y post- seleccionados  $|\psi_i\rangle$  y  $|\psi_f\rangle$  respectivamente, el promedio de la posición y del momento del medidor satisfacen,

$$\langle q \rangle_f = \langle q \rangle_i + ga + gb(m \frac{d}{dt} Var_q), \quad (3.42)$$

$$\langle p \rangle_f = \langle p \rangle_i + 2gb Var_p. \quad (3.43)$$

Aquí  $m$  es la masa del medidor y  $(d/dt)Var_q$  es la derivada temporal de la varianza de la posición en el tiempo  $t_0$  de la interacción de la medición impulsiva.

Esto significa que hay una contribución al cambio promedio de la posición del medidor proporcional a la parte imaginaria de  $A_w$  y la rapidez a la cual el apuntador cambia en el espacio en términos de la interacción.

Para derivar la Ec. (3.42) se sustituye  $p = -i\hbar\partial/\partial q$  en la Ec. (3.39) y se hace la proyección del ket  $|\alpha\rangle$  sobre el bra  $\langle q|$ , ya que  $\alpha(q) = \langle q|\alpha\rangle$ . Al realizar la expansión en  $g$ , permitiendo sólo los términos de orden lineales y multiplicando por el conjugado  $\alpha^*(q)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha(q)\alpha^*(q) = & |\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2 [|\phi(q)|^2 - ag(\phi(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi^*(q) + \phi^*(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q)) \\ & + ibg(\phi(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi^*(q) - \phi^*(q)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q))] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nótese que el coeficiente de  $ga$  es la derivada espacial de la densidad de probabilidad  $|\phi(q)|^2$ , mientras que el coeficiente  $gb$  es la parte espacial de la corriente de probabilidad conservada para  $|\phi\rangle$ . Para explorar de manera más profunda estas características es posible introducir,

$$\phi = Re^{iS} \quad , \quad \rho = R^2 \quad (3.45)$$

con lo cual se llega a

$$\alpha(q)\alpha^*(q) = |\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2 [\rho - ag\rho' + 2bgS'\rho] \quad (3.46)$$

En esta última expresión las cantidades primadas significan derivación con respecto a la posición del medidor. Por otra parte, para encontrar  $\langle q \rangle_f$ , es necesario observar que por definición,

$$\langle q \rangle_f = \frac{\int dq \alpha^*(q) q \alpha(q)}{\int dq \alpha^*(q) \alpha(q)} \quad (3.47)$$

definiendo a  $\mu = \langle q \rangle_i$ , y expandiendo la expresión anterior a primer orden en  $g$  tanto en el numerador como en el denominador, es posible llegar a

$$\langle q \rangle_f = \mu - ag \int dq(q - \mu)\rho' + bg \int dq(q - \mu)\rho S' \quad (3.48)$$

donde la integral se realiza sobre todo el espacio. Al integrar por partes cada uno de los términos anteriores de la Ec. (3.48) y recordando que  $q$  tiende a cero en los límites de integración, nuevamente al considerar sólo los términos lineales en  $g$  se obtiene,

$$\langle q \rangle_f = \mu + ag - bg \int dq(q - \mu)^2(\rho S')' \quad (3.49)$$

Ahora considérese la ecuación de Schrödinger del medidor en el tiempo de interacción  $t_0$ ,

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + V(q)\phi \quad (3.50)$$

Sustituyendo la Ec. (3.45) y derivando con respecto al tiempo a  $\phi$  al tomar la parte imaginaria de la ecuación resultante y reescribiéndola en términos de  $\rho$  da la ecuación de continuidad para la conservación de la probabilidad,

$$\frac{1}{2}\rho(\text{punto}) = \frac{\hbar}{2m}(\rho' S' + \rho S'') = -\frac{\hbar}{2m}(\rho S')' \quad (3.51)$$

de donde finalmente,

$$(\rho S')' = -\frac{m}{\hbar}\rho(\text{punto}) \quad (3.52)$$

a partir de esto y considerando la Ec. (3.49) finalmente se recupera

$$\langle q \rangle_f = \langle q \rangle_i + ga + gb\left(\frac{m}{\hbar} \frac{d}{dt} Var_q\right) \quad (3.53)$$

como se esperaba. Nótese que  $Var_q = (\Delta q)_i^2$  está definida como la fluctuación cuadrática respecto de la función de onda inicial  $\mu = \langle q \rangle_i$ . Observe que una función de onda inicial (instantáneamente) tiene valores reales (hasta una fase constante) si y sólo si  $S' = 0$ , y entonces  $dVar_q/dt = 0$ . Así es posible observar los resultados previamente mencionados para el cambio en  $\langle q \rangle$  en casos restringidos.

Es posible desarrollar una derivación alternativa en la representación de Heisenberg de la Ec. (3.53) la cual generaliza inmediatamente a otras observables del medidor (tales como



$p$ ) relacionadas con  $q$ . Sea  $M$  cualquier observable del medidor. Por definición,

$$\langle \hat{M} \rangle_f = \frac{\langle \alpha | \hat{M} | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}. \quad (3.54)$$

Además, a partir de la Ec. (3.39) se obtiene,

$$\langle \hat{M} \rangle_f = \langle \hat{M} \rangle_i + 2gb \text{Cov}(\hat{M}, \hat{P}) + iga \langle [\hat{p}, \hat{M}] \rangle. \quad (3.55)$$

La ecuación anterior es resultado de que  $\text{Cov}(\hat{M}, \hat{P}) = \langle \{\hat{M}, \hat{P}\} \rangle / 2$  y de realizar nuevamente las expansiones tanto en el numerador como en el denominador a primer orden en  $g$ . Además se toma en cuenta que  $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ . Nótese que para cualquier observable arbitraria  $\hat{N}$ , se tiene que el valor medio en el estado  $|\phi\rangle$  es  $\langle N \rangle_i = \langle \phi | \hat{N} | \phi \rangle$ .

Es interesante presentar algunos casos particulares, por ejemplo cuando la observable en cuestión es  $\hat{M} = \hat{q}$  se tienen las relaciones de conmutación  $[p, q] = -i\hbar$  y las ecuaciones de movimiento de Heisenberg son, considerando

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \hat{V}(q),$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} q = \langle [q, \hat{H}] \rangle = \frac{i\hbar \langle p \rangle}{m}, \quad (3.56)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} q^2 = \langle [q^2, \hat{H}] \rangle = \frac{i\hbar \langle pq + qp \rangle}{m}. \quad (3.57)$$

Sustituyendo ambas expresiones en la Ec. (3.55) es posible obtener

$$\langle q \rangle_f \approx \langle q \rangle_i + 2gv \text{Cov}(\hat{q}, \hat{p})_i + iga \langle [\hat{p}, \hat{q}] \rangle_i.$$

En esta expresión el último termino se hace cero. Desarrollando la ecuación anterior y observando que

$$i\hbar \frac{d}{dt} q^2 = i\hbar \frac{d}{dt} (\Delta q)^2 + \frac{2}{m} \langle q \rangle \langle p \rangle,$$

se recupera finalmente la Ec. (3.53) nuevamente,

$$\langle q \rangle_f = \langle q \rangle_i + \hbar ag + mgb \frac{d}{dt} (\Delta \hat{q})^2.$$

Si en lugar de ello, se selecciona  $\hat{M} = p$ , entonces  $\hat{p}\hat{M} - \hat{M}\hat{p}$  en el coeficiente de  $ga$  en Ec. (3.55) se vuelve cero y el coeficiente se vuelve  $2\langle p \rangle^2 - 2\langle p^2 \rangle_i = 2\text{Var}_p$ , dando como

resultado

$$\langle p \rangle_f \approx \langle p \rangle_i + 2gb \text{Cov}(\hat{p}, \hat{p}) = \langle p \rangle_i + 2gb(\Delta\hat{p})^2,$$

como se esperaba según el teorema. Note que la observable del medidor  $p$  conmuta con la interacción de medición Hamiltoniana  $g\hat{A}p$ , así que el cambio en  $\langle p \rangle$  es un artefacto de post-selección en vez de un efecto dinámico cuántico, en contraste con el caso más interesante del cambio en  $\langle q \rangle$ .

### 3.4.2. ¿Cómo las mediciones débiles suministran una descripción completa de un sistema cuántico para una observable dicotómica?

En la teoría cuántica estándar la descripción más completa de un sistema cuántico a un tiempo dado es determinado por su matriz de densidad. Esta es la información maximal acerca del sistema, basado en los resultados de los experimentos realizados en el pasado.

En esta sección, nos basaremos en el trabajo realizado por Aharonov y colaboradores en [25]. Los autores hacen una descripción que provee la información maximal posible acerca del sistema cuántico.

En la presente sección se probará que

**Teorema:** Si el resultado de una medición directa es conocido con precisión, entonces es igual al correspondiente valor obtenido de una medición débil.

Mostraremos que para una clase de variables dicotómicas el teorema inverso es también verdadero.

Consideremos el estado tal que la probabilidad de encontrar el resultado  $A = a_n$  en una medición fuerte de  $A$  es uno. Dada como

$$\text{Prob}(A = a_n) = \frac{|\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | \hat{P}_{A=a_n} | \phi_i \rangle|^2}{\sum_k |\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | \hat{P}_{A=a_k} | \phi_i \rangle|^2} = 1, \quad (3.58)$$

de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | \hat{P}_{A=a_k} | \phi_i \rangle = 0 \quad \text{para toda } k \neq n. \quad (3.59)$$

Consideremos para este caso el valor débil de  $A$  y el operador de identidad  $I$ . Tomemos la representación espectral del operador  $A$  (donde tenemos la suma sobre todos los valores propios y de los proyectores en los correspondientes subespacios de esos valores propios) y de la identidad, dados como

$$A = \sum_k a_k \hat{P}_{A=a_k}, \quad (3.60)$$

$$I = \sum_k a_k \hat{P}_{A=a_k}. \quad (3.61)$$

al sustituir en nuestra definición de medición débil, y tomando en cuenta la Ec. (3.59), obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_w &= \frac{\langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle}{\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | A | \phi_i \rangle}{\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | \phi_i \rangle} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | \sum_k a_k \hat{P}_{A=a_k} | \phi_i \rangle}{\sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \psi_i | \sum_k a_k \hat{P}_{A=a_k} | \phi_i \rangle} \\ &= a_1. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Es claro que siempre podemos llegar a la Ec. (3.62), haciendo una generalización de los estados  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ .

El resultado anterior significa que cualquiera que sea el resultado de una medición directa dado que el resultado es obtenido con probabilidad uno, la medición débil dará el mismo resultado.

Ahora los autores siguen el tratamiento para probar el teorema inverso en el caso de variables dicotómicas (tales como operadores de proyección, componentes de espín de partículas con espín 1/2, etc.)

**Teorema:** Si el valor débil de una variable dicotómica es igual a alguno de sus eigenvalores, entonces el resultado de una medición directa de esta variable es igual a ese eigenvalor con probabilidad uno.

Efectivamente, si una variable  $A$  tiene sólo dos distintos eigenvalores  $a_1$  y  $a_2$ , entonces de nuestra definición de valor débil y nuestras representaciones espectrales dadas en Ec. (3.60)

y la Ec. (3.61), tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle_w &= \frac{\langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle}{\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle} \\
 &= \frac{\langle \psi_i | \sum_k a_k \hat{P}_{A=a_k} | \phi_i \rangle}{\langle \psi_i | \sum_k a_k \hat{P}_{A=a_k} | \phi_i \rangle} \\
 &= \frac{\langle \psi_i | (a_1 \hat{P}_{A=a_1} + a_2 \hat{P}_{A=a_2}) | \phi_i \rangle}{\langle \psi_i | (\hat{P}_{A=a_1} + \hat{P}_{A=a_2}) | \phi_i \rangle} = a_1.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Cuando un valor débil se define (es decir, el denominador en la Ec. (3.64) no es cero), podemos, con simples manipulaciones algebraicas de la ecuación Ec. (3.64) encontrar que

$$\begin{aligned}
 (a_2 - a_1) \langle \psi_i | \hat{P}_{A=a_2} | \phi_i \rangle &= 0 \quad \text{con } a_1 \neq a_2 \\
 \Rightarrow \langle \psi_i | \hat{P}_{A=a_2} | \phi_i \rangle &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Este resultado muestra que la probabilidad de encontrar el valor  $a_2$  se hace cero, y así una medición directa de  $A$  necesariamente da  $A = a_1$ .

Este teorema, provee una poderosa herramienta para analizar situaciones en las que operadores no conmutativos con valores definidos se usan para investigar diversos problemas.

---

Parte IV

Aplicaciones

*Las ideas no son responsables de lo que los hombres hacen de ellas.*

Heisenberg

---

## Capítulo 4

# Algunas aplicaciones para las mediciones débiles

En este capítulo tomaremos como base los trabajos realizado por B. E. Y. Svensson en el 2013 [9, 13]

### 4.1. Mediciones débiles en el protocolo de von Neumann

Notemos que la función de onda del medidor después de la premedición pero antes de la post-selección es

$$\varphi_1(q) \approx \varphi_0\left(q - g \langle s | \hat{S} | s \rangle\right). \quad (4.1)$$

usando las Ecs. (2.72) y (2.73), tenemos

$$\langle \hat{Q} \rangle_1 = g \langle \hat{S} \rangle_0 = \langle s | \hat{S} | s \rangle. \quad (4.2)$$

Para medir  $\langle s | \hat{S} | s \rangle$ , se requieren de muchas mediciones sobre el sistema  $\mathcal{S}$  para poder encontrar sus eigenvalores y sus probabilidades. De aquí que aparezcan en principio directamente de las mediciones débiles sobre mediciones auxiliares a través de la función de onda de este ultimo.

Pero, ¿es más fácil hacer las mediciones débiles necesarias sobre el sistema auxiliar que determinar  $\langle s | \hat{S} | s \rangle$  en la forma convencional? veamoslo,

De las Ecs. (3.27) y (3.30) sustituyendo  $\hat{N} \rightarrow \hat{P}$  y  $\hat{M} \rightarrow \hat{Q}$ , respectivamente, se tiene

$$\langle \hat{P} \rangle_f \approx \langle \hat{P} \rangle_0 + \frac{i}{\hbar} g (S_w^* - S_w) (\Delta \hat{P})_0^2, \quad (4.3)$$

$$\langle \hat{Q} \rangle_f \approx \langle \hat{Q} \rangle_0 + \frac{g}{2} (S_w^* + S_w) + \frac{i}{\hbar} g (S_w^* - S_w) \text{Cov}(\hat{P}, \hat{Q}). \quad (4.4)$$

En general  $\langle \{\hat{P}, \hat{Q}\} \rangle_0 \neq 0$ , pero el término del anticonmutador se anula para una función de onda del medidor inicial  $\varphi_0(q)$  que es puramente real.

Estos resultados significan que el valor medio  $S_w$  para la observable  $\hat{S}$  del sistema, pueden ser directamente leídos de la posición media de las variables del apuntador  $\hat{Q}$  y  $\hat{P}$  después de la operación de post-selección.

Aparentemente es más difícil medir el valor esperado (en términos de los valores débiles), ya que involucra no sólo los valores esperados sino también las dispersiones y las covariancias a un tiempo inicial. Por otro lado el valor débil sólo se tiene que medir dado el estado inicial y final, por lo que aquí se afirma que de acuerdo a estas expresiones es más fácil medir los valores débiles que los valores esperados.

Ahora de es fácil ver que al sustituir en nuestra Ec. (3.26) los términos de  $\langle \hat{N} \hat{L} \rangle$  y  $\langle \hat{L} \hat{N} \rangle$  como

$$\begin{aligned} \langle \hat{N} \hat{L} \rangle &= \langle [\hat{N}, \hat{L}] \rangle_0 + \langle \{ \hat{N}, \hat{L} \} \rangle_0, \\ \langle \hat{L} \hat{N} \rangle &= \langle [\hat{L}, \hat{N}] \rangle_0 + \langle \{ \hat{L}, \hat{N} \} \rangle_0, \end{aligned}$$

puede ser escrita como

$$\langle \hat{L} \rangle_f \approx \langle \hat{L} \rangle_0 + \frac{i}{2\hbar} g (S_w^* + S_w) \langle [\hat{N}, \hat{L}] \rangle_0 + \frac{i}{\hbar} \text{Cov}(\hat{N}, \hat{L})_0 (S_w^* + S_w). \quad (4.5)$$

Ahora al sustituir  $\hat{L} = \hat{P}^2$  y  $\hat{L} = \hat{Q}^2$ , respectivamente, tenemos

$$\langle \hat{P}^2 \rangle_f \approx \langle \hat{P}^2 \rangle_0 + \frac{i g}{\hbar} (S_w^* - S_w) \left( \langle \hat{P}^3 \rangle_0 - \langle \hat{P} \rangle_0 \langle \hat{P}^2 \rangle_0 \right), \quad (4.6)$$

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle_f \approx \langle \hat{Q}^2 \rangle_0 + g (S_w^* + S_w) \langle \hat{Q} \rangle_0 + \frac{i g}{\hbar} (S_w^* - S_w) \text{Cov}(\hat{P}, \hat{Q}^2)_0. \quad (4.7)$$



Así es inmediato ver que

$$\left(\Delta\hat{M}\right)_f^2 \approx \left(\Delta\hat{M}\right)_0^2 + \frac{ig}{\hbar} (S_w^* - S_w) \left[ \text{Cov}(\hat{N}, \hat{M}^2)_0 - \langle \hat{M} \rangle_0 \text{Cov}(\hat{N}, \hat{M})_0 \right], \quad (4.8)$$

$$\left(\Delta\hat{N}\right)_f^2 \approx \left(\Delta\hat{N}\right)_0^2 + \frac{ig}{\hbar} (S_w^* - S_w) \left[ \langle \hat{N}^3 \rangle_0 + \langle \hat{N} \rangle_0 \left( \langle \hat{N}^2 \rangle_0 - 2 \langle \hat{N} \rangle_0^2 \right) \right]. \quad (4.9)$$

Ya que lo que se mide son las dispersiones cuadráticas, las dispersiones en la pre-selección no van a ser iguales que en la post-selección, ya que habrá una modificación que es proporcional a las mediciones débiles.

El resultado significa que la dispersión de los estados del apuntador que sobreviven a la post-selección están aproximadamente igualmente dispersos que la dispersión inicial en el estado del apuntador.

## 4.2. Valores débiles para qubits dobles

En este caso se requiere de una aproximación ligeramente distinta ya que no se puede definir un operador unitario  $\hat{U}$ .

Nuestro punto de partida es la función de onda enredada,

$$\begin{aligned} |s\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle &= (\alpha |0\rangle_S + \beta |1\rangle_S) \otimes \left( \cos\frac{\vartheta}{2} |0\rangle_{\mathcal{M}} + \sin\frac{\vartheta}{2} |1\rangle_{\mathcal{M}} \right) \\ &\xrightarrow{\hat{U}} \alpha |0\rangle_S \otimes \left( \cos\frac{\vartheta}{2} |0\rangle_{\mathcal{M}} + \sin\frac{\vartheta}{2} |1\rangle_{\mathcal{M}} \right) \\ &\quad + \beta |1\rangle_S \otimes \left( \sin\frac{\vartheta}{2} |0\rangle_{\mathcal{M}} + \cos\frac{\vartheta}{2} |1\rangle_{\mathcal{M}} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

y después de la premedición

$$\alpha |0\rangle_S \otimes \left( \cos\frac{\vartheta}{2} |0\rangle_{\mathcal{M}} + \sin\frac{\vartheta}{2} |1\rangle_{\mathcal{M}} \right) + \beta |1\rangle_S \otimes \left( \sin\frac{\vartheta}{2} |0\rangle_{\mathcal{M}} + \cos\frac{\vartheta}{2} |1\rangle_{\mathcal{M}} \right). \quad (4.11)$$

Por inspección, se observa que una medición débil es aquella en la cual la variable angular  $\vartheta$  está cerca de  $\frac{\pi}{2}$ . Para explorar este hecho, se elige  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$  y se hace una expansión en serie de Taylor en el parámetro  $\epsilon$  quedándonos a primer orden en el mismo.

Al calcular el  $\cos \frac{\vartheta}{2}$  y  $\sin \frac{\vartheta}{2}$  tenemos

$$\cos \frac{\vartheta}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \epsilon)$$

y

$$\sin \frac{\vartheta}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \epsilon).$$

Así la Ec. (4.11) queda escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_S + \beta |1\rangle_S) \otimes (|0\rangle_M + |1\rangle_M) \\ & + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_S - \beta |1\rangle_S) \otimes (|0\rangle_M - |1\rangle_S) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Buscamos el valor esperado del sistema del medidor, para ello calculamos la matriz de densidad para nuestra ultima ecuación, y calculando los parámetros de Stockes  $S_i = \frac{\sigma_i}{2}$  con  $\sigma_i$  las matrices de Pauli tenemos, quedándonos a orden cero,

$$\langle \hat{S}_1^M \rangle_f = 1. \quad (4.13)$$

Y si nos quedamos a orden  $\epsilon$  la contribución es

$$\langle \hat{S}_2^M \rangle_f = i \epsilon \frac{[-(\alpha_f - \beta_f)(\alpha_f + \beta_f)^* + (\alpha_f - \beta_f)^*(\alpha_f + \beta_f)]}{\left[ |\alpha_f + \beta_f|^2 + \frac{\epsilon^2}{2} |\alpha_f - \beta_f|^2 \right]}. \quad (4.14)$$

Finalmente quedándonos a orden  $\epsilon^3$ , nuestra contribución es

$$\langle \hat{S}_3^M \rangle_f = \frac{\epsilon(\alpha_f - \beta_f)(\alpha_f + \beta_f)^* + \epsilon(\alpha_f - \beta_f)^*(\alpha_f + \beta_f)}{|\alpha_f + \beta_f|^2 + \frac{\epsilon^2}{2} |\alpha_f - \beta_f|^2}. \quad (4.15)$$

### 4.3. Paradoja de las tres cajas

Se colocan tres cajas sobre una mesa y se comienza a jugar *un juego de cajas*. Un jugador, el movedor de cajas, desplaza rápidamente una *moneda* (que llamaremos partícula a partir de ahora) entre tres cajas, mientras el resto tratan de adivinar donde está. En un juego de cajas clásico la partícula está ciertamente en una de las cajas y el *cajeador* ciertamente

sabe dónde está. ¿Qué pasa en un juego cuántico de cajas? [11]

En esta sección seguiremos el análisis que hizo Svensson en [13], sobre la llamada paradoja de las tres cajas.

Una partícula cuántica puede estar en una superposición de los tres estados  $A$ ,  $B$  y  $C$  un estado por cada caja. Svensson nos comenta que los estados que representan a la partícula en la caja  $A$  se representan como  $|A\rangle$ ; análogamente para  $B$  y  $C$ , i.e., el medir debajo de una de las cajas es como medir el operador de proyección.

El cajeador puede preparar la moneda en el estado inicial

$$|in\rangle = \frac{(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)}{\sqrt{3}},$$

y el estado post-seleccionado será

$$|f\rangle = \frac{(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)}{\sqrt{3}}.$$

Ahora consideraremos una medición (intermedia en el tiempo) del operador de proyección  $\hat{A} = |A\rangle\langle A|$ , el cual es un operador de número que al medir cuenta el número de partículas en la caja  $A$ . Su valor medio da la probabilidad de encontrar la partícula en la caja  $A$ . Lo anterior es análogo para el caso de la caja  $B$  y  $C$ .

Estamos interesados en la probabilidad  $\text{Prob}(A|f\rangle \& |in\rangle)$  de encontrar la partícula en la caja  $A$  cuando midamos el operador de proyección  $\hat{A}$ , así como las probabilidades correspondientes para  $B$  y  $C$ .

Consideremos primero una ecuación fuerte de los respectivos operadores de número. La regla ABL ya mencionada con anterioridad dada como

$$\text{Prob}(1|f\rangle, |in\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{A}|in\rangle|^2}{|\langle f|\hat{A}|in\rangle|^2 + |\langle f|(1-\hat{A})|in\rangle|^2}. \quad (4.16)$$

con esta relación, y usando que cada entre cada caja son distintas y que por ello son ortogonales sus estados, tenemos

$$\text{Prob}(A|f\rangle \& |in\rangle) = 1, \quad (4.17)$$

$$\text{Prob}(B|f\rangle \& |in\rangle) = 1 \quad \text{y} \quad (4.18)$$

$$\text{Prob}(C | |f\rangle \& |in\rangle) = \frac{1}{5}. \quad (4.19)$$

Inicialmente parecería claro ver que en estos resultados es donde yace la *paradoja*, ya que estos resultados nos dicen que está en la caja  $A$  y en la caja  $B$ , y que la probabilidad total de encontrar la partícula en cualquier caja excede 1.

La paradoja desaparece cuando se da cuenta de que los resultados aplican a diferentes mediciones proyectivas, lo que no puede realizarse de forma conjunta, sin que cada medición altere el resultado de la otra (colapso) y por lo tanto creando nuevas condiciones para la siguiente medición. En otras palabras la paradoja sólo aparece si uno permite hechos contradictorios. De hecho nada prohíbe que uno haga tres mediciones débiles de los operadores de número  $A$ ,  $B$  y  $C$  sucesivamente en los estados pre y post-seleccionados: el hecho de que son mediciones débiles asegura que uno puede despreciar las perturbaciones debidas a la medición, i.e., con las mediciones débiles no necesariamente hay hechos contradictorios incluidos.

Para evitar este tipo de errores, haremos uso de las mediciones débiles. Haciendo los cálculos algebraicos clásicos tenemos

$$\langle \hat{A} \rangle_w = 1 \quad \text{y} \quad (4.20)$$

$$\langle \hat{B} \rangle_w = 1. \quad (4.21)$$

O de otra forma

$$\langle \hat{A} \rangle_w + \langle \hat{B} \rangle_w + \langle \hat{C} \rangle_w = \langle (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \rangle_w = 1. \quad (4.22)$$

De estas ecuaciones tenemos,

$$\langle \hat{C} \rangle_w = -1! \quad (4.23)$$

(Por supuesto, esto podría también ser calculado directamente para la expresión explícita de  $\langle \hat{C} \rangle_w$ ).

Cabe resaltar que llegamos al resultado de que la probabilidad es negativa para que la partícula esté en la caja  $C$ .

Los valores usuales del operador de proyección son sus eigenvalores usuales 1 y 0. ¿Cómo podríamos legitimar esto?

Una importante diferencia con respecto a un valor medio es que un valor débil depende no sólo de la pre-selección (estado de pre-seleccionado)  $|in\rangle$ , sino también de un estado post-seleccionado  $|f\rangle$ .

Al considerar diferentes combinaciones de los estados bases  $|A\rangle$ ,  $|B\rangle$  y  $|C\rangle$  para  $|f\rangle$  uno puede obtener esencialmente cualquier resultado para el valor débil de un operador de número.

Uno puede ver el estado de post-selección como un tipo de filtro el cual se cambia como uno quiere, expresado de manera diferente, incluso para un estado pre-seleccionado como el elegido aquí, hay aún libertad de elegir el estado post-seleccionado  $|f\rangle$  en cualquier camino que se quisiera. En particular, el ya mencionado

$$|f\rangle = \frac{(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)}{\sqrt{3}},$$

que no tiene significado físico predominate. Esta es sólo una de las múltiples elecciones que se pueden hacer, ninguna de las cuales parece más natural que alguna otra.

Se han realizado experimentos pensados como los realizados por Aharonov y colaboradores para darle significado físico a que el resultado del valor del operador de número sea  $-1$ .

De forma más conceptual para un estado inicial dado, el valor débil depende de la ecuación de estado final y no puede ser interpretado como una propiedad del estado inicial solamente: un valor débil como  $\langle C \rangle_w$  no puede mostrar cuantas partículas hay en la caja  $C$ .

Como una conclusión el valor débil no es una propiedad del estado inicial solamente, depende también de la elección del estado final.

Una versión óptica de este experimento resultó de sustituir las tres cajas por tres trayectorias de fotones en un interferómetro Mach-Zehnder modificado [11].

### 4.3.1. Realización Experimental del Problema de las Cajas Cuánticas

La realización experimental de la paradoja anterior fue llevada a cabo por Resch y colaboradores en el año 2004 [31]. El procedimiento llevado a cabo por ellos fue a grandes rasgos el siguiente. Una partícula es preparada en una superposición de estados asociados cada uno

a una de tres cajas, posteriormente, dicho estado se encuentra en una superposición diferente (pero no ortogonal). En el experimento se verifica que al realizar las mediciones débiles apropiadas de la posición en un intervalo temporal entre la pre-selección y la post-selección se podría encontrar a la partícula en dos diferentes lugares, cada uno con probabilidad uno. La verificación se realizó en un experimento óptico, a la vez que se redireccionó la solución hacia los problemas de localidad y de probabilidad marginal negativa.

$$A_W = \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}$$

Recuérdese que como se menciono anteriormente, el problema de las *cajas cuánticas* fue desarrollado por Aharonov y Vaidman; en el cual a partir de un experimento pensado aparentemente simple se han esclarecido algunos de los comportamientos extraños relevantes a las mediciones débiles, cuando se estudian sistemas post-seleccionados. En la versión original del problema de las tres cajas, una partícula es preparada en una superposición igualmente pesada en una de las tres cajas cuánticas ortogonales,  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , dado por  $|\psi_i\rangle = \sqrt{1/3} |A\rangle + \sqrt{1/3} |B\rangle + \sqrt{1/3} |C\rangle$  y postseleccionada en el estado final  $|\psi_f\rangle = \sqrt{1/3} |A\rangle + \sqrt{1/3} |B\rangle - \sqrt{1/3} |C\rangle$ . Claramente, la probabilidad  $P_{A_w}$  de encontrar a la partícula en la caja  $A$  se obtiene a partir de evaluar el valor esperado del respectivo operador de proyección. Esta probabilidad debería predecir el efecto medio de la partícula sobre el medidor acoplado con la posición  $A$ , en los casos en los cuales este estado es post-seleccionado. Se obtiene de manera directa que  $P_{A_w} = \langle \psi_f | \hat{A} \rangle \langle \hat{A} | \psi_i \rangle / \langle \psi_f | \psi_i \rangle = 1$ , es decir, la partícula se encuentra en la caja  $A$  con certeza. Esta probabilidad débil difiere de la correspondiente medición directa debido a que en este caso la probabilidad sería  $1/3$ . Análogamente la probabilidad débil de que la partícula se encuentre en la caja  $B$  es  $+1$ . Así como en las probabilidades normales, la suma de todas las probabilidades sobre todos los posibles estados debe ser  $+1$ ; por lo tanto, si se realiza la medición débil de que la partícula se encuentre en la caja  $C$  debe ser  $-1$ . Aunque por extraño que parezca, para un número suficientemente grande de sistemas idénticos pre- y post- seleccionados, los resultados predichos coinciden con los resultados experimentales.

El experimento se llevo a cabo utilizando un interferómetro semejante a un Mach-Zender, excepto que este tenia tres caminos ópticos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Un fónon es preparado en una superposición de estados de acuerdo con la descripción anterior mediante una selección adecuada de las características de los diferentes divisores de haz. Similarmente, cualquier superposición coherente puede ser post-seleccionada controlando las características de los otros divisores, así como las longitudes de camino óptico. En el interferómetro lineal, los fotones

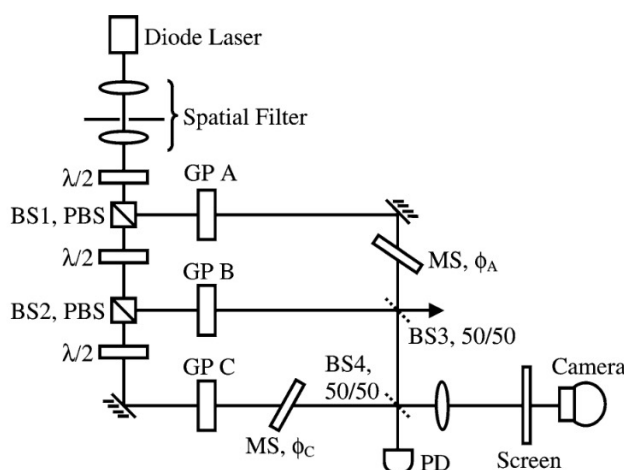


Figura 4.1: Sistema experimental de la paradoja de las tres cajas. Se muestra el interferómetro de tres caminos ópticos y sus componentes. GP A, GP B y GP C son los respectivos controladores de los desplazamientos transversales. Imagen tomada de [31].

son independientes, y las mediciones de la intensidad están directamente relacionadas con la distribución de probabilidad de que los fotones recorran cada uno de los diferentes caminos. El desplazamiento transversal del fónon es utilizado como el medidor y es controlado y medido por el cambio de la posición las diversas placas de cristal GP A, GP B y GP C, como se muestra en la siguiente figura.

La medición de un cambio espacial medio de un ensemble de fotones puede verse como una medición de la probabilidad de que un fotón haya estado en el riel correspondiente. Si el corrimiento transversal es mucho menor que el tamaño del haz entonces se trata de una medición débil. Desplazando sólo un riel a la vez se mide el tamaño de ese corrimiento dejando los otros dos rieles bloqueados y con ello se caracteriza la intensidad del riel correspondiente. Se combinan entonces los tres haces con las fases relativas correctas para su apropiada post-selección. El cociente del corrimiento en el estado post-seleccionado  $\Delta x$  con respecto a aquel del riel sólo  $K_A$  constituye la medición débil asociada a ese riel, es decir  $P_{Aw} = \Delta/K_A$ . Una medición negativa ocurre cuando el apuntador se desplaza hacia la dirección opuesta, esto se logra debido al uso del foto diodo.

En el experimento se elige luz láser monocromática colimada con un perfil gaussiano de ancho menor a  $380 \mu m$ . Se ajustan los corrimientos en las fases para determinar la interacción entre A y C. En el primer divisor de haz se eligen las polarizaciones. Finalmente se obtienen los resultados con la ayuda de una pantalla CMOS. Es decir, el haz inicial

gaussiano se va difuminando hasta que se hace cero.

Se observa de manera inmediata que el estado pre-seleccionado puede ser generalizado a un estado cualquiera arbitrario, y que la correspondiente realización experimental puede ser lograda a partir de la manipulación efectiva de las tres placas, controlando tanto la parte reflejada como la parte transmitida de cada uno de los haces. De la misma manera, se pueden seleccionar las fases apropiadas manipulando los divisores de haz.

En el experimento, los divisores de haz son 50/50 por lo cual el estado post-seleccionado es  $|\psi_f\rangle = (1/2)|A\rangle + (1/2)|B\rangle + (1/2)|C\rangle$  y el estado pre-seleccionado  $|\psi_f\rangle = (\sqrt{2/5})|A\rangle + (\sqrt{2/5})|B\rangle + (\sqrt{1/5})|C\rangle$ , garantizando que se reduce el traslape para el estado original en  $\sqrt{1/10}$ .

los datos fueron tomados en dos partes. En ambas se comienza con un balance en las intensidades colocando la cámara en cada uno de los tres caminos y modificando el traslape hasta obtener un factor de 1/10 en las anchuras cuadráticas medias. Todos los haces se tomaron polarizados verticalmente. En la primer parte se toman las mediciones débiles de manera directa y posteriormente se inclina el vidrio y con ello parte del haz se desvía. Con ello se obtiene que  $A$  y  $B$  interfieren constructivamente y  $B$  y  $C$  lo hacen de forma destructiva. Con ello, cuando se toman los diferentes perfiles de la intensidad se observa un corrimiento en ambos casos con respecto a la intensidad original. En promedio  $\Delta x = -11,1$  rms y  $K_c = -,69$ , de donde  $P_{A_w} = -,64$ , lo cual difiere del valor débil esperado que es uno.

La predicción teórica dice que ambos valores débiles deben ser uno. La diferencia entre ambos puede ser entendida debido a que si se realiza una medición débil en el camino  $A$  entonces las amplitudes de  $B$  y  $C$  deben interferir destructivamente dejando solamente abierto el camino  $A$ . De esta manera las probabilidades débiles son consistentes con las probabilidades iniciales propuestas. Análogamente ocurre para el riel  $B$ . Para el  $C$  los datos tienen diferente comportamiento y por ello no puede aplicarse el argumento.

En la realización experimental las mediciones débiles son +1 para el caso de  $A$  y  $B$ , y -1 para el caso de  $C$  y coinciden con las predicciones teóricas. La explicación óptica de este efecto es que las características de las mediciones débiles se originan de la interferencia, la cual aunque menos intuitiva, es análoga y consistente con el presente caso.

Se ha mostrado con ello que la probabilidad débil de encontrar la partícula en  $A$  coincide con  $B$  y es uno, a diferencia de lo que ocurriría en una medición proyectiva. El conflicto surge en que una sola partícula no puede accionar dos detectores separados a la vez, al menos desde el punto de vista de las mediciones proyectivas. Se ha sugerido que esta es



una limitación de las mediciones fuertes. ¿Si una partícula es preparada en un estado deslocalizado podría ser posible encontrarla en dos lugares diferentes? No es posible, debido a que los estados asociados a  $A$  y  $B$  son ortogonales y por ello aunque las probabilidades individuales sean iguales a uno, la probabilidad conjunta es cero, pareciendo con ello que se violan las reglas estándar de la probabilidad.

Sin embargo, incluso sin la medir la probabilidad débil conjunta directamente, es posible atacar esta aparente no localidad. En la segunda parte del experimento se miden los dos fotones de manera simultánea usando dos diferentes grados de libertad. Además del desplazamiento del haz en  $B$ . Si se cambia el estado post-seleccionado, se puede lograr que ahora en  $C$  la onda sea transmitida en lugar de reflejada. Nuevamente se miden los desplazamientos y la fuerza de la interacción para obtener los valores débiles. Para generar las curvas teóricas se calculan las amplitudes de la polarización y se extrae el promedio del desplazamiento de la distribución de la intensidad con y sin polarización. La probabilidad débil de  $B$  no es uno, incluso en el límite de desplazamiento cero, esto debido a la imperfección de la interferencia de la polarización de rotación no débil.

Los datos bajos fueron debidos más probablemente a la fluctuación de fase, el desacuerdo entre los datos teóricos y los experimentales se deben a la imperfección de la interferencia. Así, se puede decir que una vez realizada una vez una medición directa, la partícula está definitivamente en el riel  $C$ , incluso el valor débil de estar en el riel  $B$  se anula.

Con lo anterior se ha implementado el problema de las tres cajas de forma experimental y se han verificado algunas de las predicciones realizadas por las mediciones débiles. Específicamente, se han observado que para  $B$  y  $C$  las probabilidades débiles asociadas son uno mientras que para  $A$  es  $-1$ . Se ha visto lo que ocurre en límite de la transición entre mediciones débiles y fuertes. Además se realizaron dos mediciones simultáneas en dos de los rieles, encontrando que la polarización fue corrida y rotada, sin embargo cuando solamente la luz con la polarización rotada se estudio su desplazamiento transversal fue cero. Esto muestra de manera clara la diferencia entre cuando se realiza una medición débil y una fuerte. Notando que las mediciones débiles dan una nueva percepción acerca del comportamiento de ciertos sistemas cuánticos.

## 4.4. Los gatos de Cheshire cuánticos

Una de las paradojas cuánticas más interesantes que reflejan la aplicación de las mediciones débiles es la de los gatos de Cheshire cuánticos, donde se hace alusión al gato

que Alicia conoce en el País de las Maravillas, el cual curiosamente puede separarse de su sonrisa [24] en esta sección mostraremos como un gato puede desaparecer mientras deja su sonrisa atrás [11]. Es claro que la sonrisa es una de las *propiedades* del gato. Y no tendría sentido hablar de una sonrisa sin gato, análogamente la polarización es una propiedad de los fotones e igualmente no tiene sentido tener polarización sin un fotón. Aunque, en la mecánica cuántica la polarización fotónica puede existir si no hay ningún fotón, esto vía mediciones sobre un ensemble pre y post-seleccionado.

Para simplificar, aproximaremos el gato de Cheshire como una partícula con dos estados de ánimo y el gato puede estar en dos diferentes y cómodas cajas. Se asumirá que el Hamiltoniano del gato conmuta con los operadores de proyección del estado de sonrisa que son

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_{\uparrow} &= |\uparrow\rangle \langle\uparrow| , \\ \hat{\Pi}_{\downarrow} &= |\downarrow\rangle \langle\downarrow| ,\end{aligned}$$

y de localización del gato

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1 &= |1\rangle \langle 1| , \\ \hat{\Pi}_2 &= |2\rangle \langle 2| .\end{aligned}$$

Al tiempo  $t = 0$ , preseleccionamos al gato en el estado

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{2} \{ [|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle |1\rangle] + [|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle |2\rangle] \} ,$$

y el estado de postselección es dado al tiempo  $t = T$  como

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle] [|1\rangle + |2\rangle] .$$

Ahora, podemos hacernos varias preguntas, por ejemplo, ¿dónde está el gato en tiempos intermedios? Para localizar al gato a tiempos  $0 < t < T$ , calculamos los valores débiles de  $\hat{\Pi}_1$  y  $\hat{\Pi}_2$ . Donde tomamos en cuenta que tanto la parte de los estados de ánimo del gato, como la parte de la localización son ortogonales.

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Pi}_1 \rangle_w &= \frac{\langle \Psi_f | \hat{\Pi}_1 | \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle} = 0 \\ \langle \hat{\Pi}_2 \rangle_w &= \frac{\langle \Psi_f | \hat{\Pi}_2 | \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle} = 1\end{aligned}$$

Es decir, el gato pasa su tiempo en la caja 2. ¿Está sonriendo durante ese tiempo? Para saber si el gato sonreía a tiempos  $0 < t < T$ , calculamos:

$$\langle \hat{\sigma}_{z(A)} \rangle_w = \langle \hat{\Pi}_\uparrow - \hat{\Pi}_\downarrow \rangle_w = \frac{\langle \Psi_f | \hat{\Pi}_\uparrow - \hat{\Pi}_\downarrow | \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle} = 1 \quad (4.24)$$

con lo cual vemos que el gato esta sonriendo entre  $0 < t < T$ . Es decir en el tiempo  $0 < t < T$  el gato esta en la caja 2 sonriendo. esto es obvio, ¡pero es falso!

Si el gato esta sonriendo y en la caja 2 el valor débil de esta combinación debería darme uno, pero al calcular:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Pi}_\uparrow \hat{\Pi}_2 \rangle_w &= \frac{1}{2} \\ \langle \hat{\Pi}_\downarrow \hat{\Pi}_2 \rangle_w &= \frac{1}{2} \\ \langle \hat{\Pi}_\uparrow \hat{\Pi}_1 \rangle_w &= \frac{1}{2} \\ \langle \hat{\Pi}_\downarrow \hat{\Pi}_1 \rangle_w &= -\frac{1}{2}\end{aligned} \quad (4.25)$$

De lo anterior si restamos que el gato esta sonriendo y que el gato esta enojado ambas situaciones en la caja 2 nos va a dar cero. Con lo cual llegamos a la conclusión de que el gato no estaba ni enojado ni sonriendo en la caja 2.

Sabemos que estaba en la caja 2 sabemos que estaba sonriendo pero no podemos garantizar que estaba en la caja 2 sonriendo, i.e. la sonrisa estaba en un lugar (caja 1) y el gato en por otro lugar (caja 2), como consecuencia lógica. El gato de Cheshire está en la caja 2 pero su sonrisa está en la 1.

Aunque el estado preseleccionado  $\Psi_i$  enreda la posición con su estado de animo, vemos

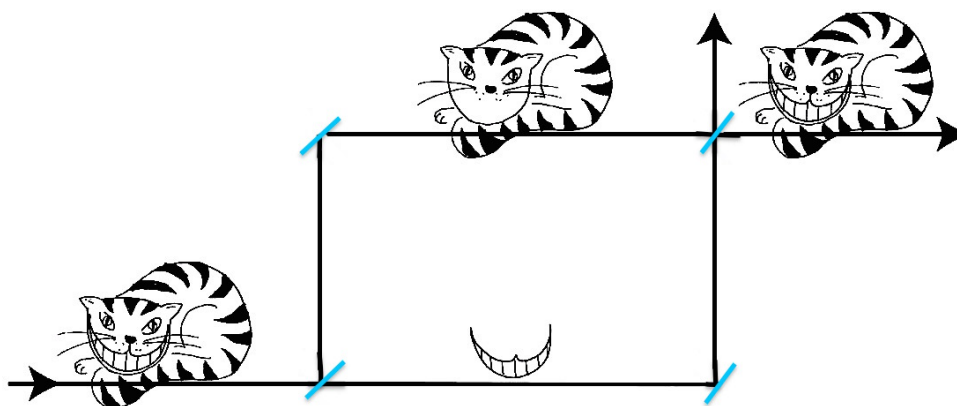


Figura 4.2: El gato de Cheshire en el que se ilustra como la sonrisa del gato se va por uno de los caminos del interferómetro y el gato por el otro. Imagen tomada de [20]

que se desenreda la sonrisa del gato. figura 2. Para analicemos este efecto del calculo de los valores débiles de los productos de los proyectores  $\hat{\Pi}_\uparrow$ ,  $\hat{\Pi}_\downarrow$ ,  $\hat{\Pi}_1$  y  $\hat{\Pi}_2$ . Esos cuatro valores débiles suman 1, como deben ya que  $\hat{\Pi}_\uparrow + \hat{\Pi}_\downarrow = 1 = \hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2$ .

Los gatos son sistemas complicados. No podemos separar un gato se su sonrisa, pero podemos tratar de separar un sistema más simple de sus grados de libertad interna.

Por ejemplo, podemos tratar de separar un neutrón de su momento magnético, las ecuaciones de está sección aplican a un neutrón con su momento magnético justo como aplican al gato de Cheshire con su sonrisa. Las mediciones deberían mostrar que el momento magnético toma un brazo del interferómetro pero el neutrón mismo toma el otro brazo.

#### 4.4.1. Experimento pensado gatos de Cheshire cuánticos

En el siguiente experimento, *el gato de Cheshire* es un fotón en dos lugares posibles  $|L\rangle$  y  $|R\rangle$ . *La sonrisa* corresponde a sus estados de polarización circular. Los dos estados base para la polarización circular son

$$|+\rangle = \frac{|H\rangle + i|V\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|-\rangle = \frac{|H\rangle - i|V\rangle}{\sqrt{2}}$$

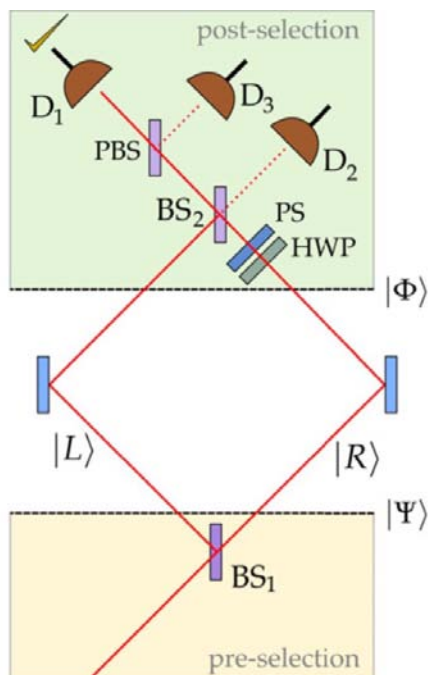


Figura 4.3: Diagrama esquemático. Varios dispositivos de medición serán insertados por la izquierda y derecha del interferómetro, entre la pre y post-selección. Imagen tomada de [8].

Escritos en términos de sus estados de polarización lineal  $|H\rangle$  y  $|V\rangle$ . Supongase que el fotón está inicialmente preparado en el estado  $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|L\rangle + |R\rangle) |H\rangle \quad (4.26)$$

Que es una superposición de los dos lugares  $|L\rangle$  y  $|R\rangle$  y polarizado horizontalmente<sup>1</sup>.

El estado después de haberse dividido el haz es  $|\psi\rangle$ , con  $|L\rangle$  ahora denotando el brazo izquierdo y  $|R\rangle$  el derecho; el haz reflejado adquiere un factor de fase relativa  $i$ .

Por conveniencia se elegirá al estado post-seleccionado  $|\phi\rangle$  como

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle |H\rangle + |R\rangle |V\rangle) \quad (4.27)$$

<sup>1</sup>Una manera simple de preparar tal estado es enviar fotones polarizados horizontalmente a través de un divisor de haz 50:50, como se muestra en la figura (4.3).

Para lo cual requeriremos que PBS tenga características diferentes a  $BS_1$ <sup>2</sup>

Queremos realizar una medición final que de como respuesta *si* con certeza cuando el sistema esta en el estado  $|\phi\rangle$  y la respuesta *no* también con certeza en cualquier estado ortogonal a  $|\phi\rangle$ . Aquí vamos a considerar sólo los casos en que la respuesta si es obtenida.

La propuesta experimental será realizada en un dispositivo óptico como el mostrado en la figura (4.3). El dispositivo (el cual es un interferómetro Mach-Zehnder) de medida comprende una placa de media onda (HWP), un retardador de fase (PS), un divisor de haz ( $BS_2$ ), un polarizador de haz (PBS) y tres detectores ( $D_i$ ). La HWP es elegida tal que  $|H\rangle \leftrightarrow |V\rangle$  (se intercambian las polarizaciones). El PS es elegido tal que adiera un factor de fase  $i$  al haz, ( $BS_2$ ) es elegido tal que si un fotón en el estado  $\frac{(|L\rangle + i|R\rangle)}{\sqrt{2}}$  (que es un estado ortogonal a la Ec. (4.26)) incide en él, entonces emergerá con certeza en el puerto de la izquierda (i.e., el detector  $D_2$  no se accionara). El PBS es tal que la polarización  $|H\rangle$  se transmite y la  $|V\rangle$  se refleja. Dadas estas elecciones, si el estado inmediatamente antes que HWP (ie, el estado del fotón entra en el dispositivo de medida) es  $|\phi\rangle$  entonces  $D_1$  se accionara con certeza (Es en este caso en el que nos concentraremos). Un fotón en cualquier estado ortogonal a  $|\phi\rangle$  terminara en el detector  $D_2$  o  $D_3$ . El sistema esta colocado de tal manera que en la ausencia de HWP y PS, un fotón entrando en  $BS_1$  por la izquierda, emergera con certeza de  $BS_2$  hacia la derecha.

Entre las regiones denotadas por la pre y post-selección en la figura (4.3) el fotón es descrito por el *estado pre-seleccionado*  $|\psi\rangle$  y el *estado post-seleccionado*  $|\phi\rangle$  Son las propiedades del fotón en los estados pre y post-seleccionados en las que nos enfocaremos.

Revisaremos la localización del fotón con los detectores insertados en los brazos del interferómetro. Los detectores son no destructivos<sup>3</sup> En terminos matemáticos, esos detectores miden a los operadores de proyección  $\Pi_L = |L\rangle \langle L|$  y  $\Pi_R = |R\rangle \langle R|$ .

Dada la pre y post selección, *con certeza el fotón pasó a través del brazo izquierdo*<sup>4</sup>.

Por ello las mediciones no destructivas en el brazo derecho no pueden encontrar al fotón ahí, indicando que el fotón debe pasar a través del brazo izquierdo. Se realiza entonces

2

$$BS_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad PBS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup>Ellos no absorben el fotón ni alteran su polarización

<sup>4</sup>Si poniendo un detector encontraramos al foton en el brazo derecho, esto implicaria que el estado  $|\psi'\rangle$  después de la medición sería  $|\psi'\rangle = |R\rangle |H\rangle$ , el cual es ortogonal al estado post-seleccionado  $|\phi\rangle = \frac{(|L\rangle |H\rangle + |R\rangle |V\rangle)}{\sqrt{2}}$ .

una medición no destructiva en el brazo izquierdo, dada la post-selección. Podemos incluso realizar mediciones no destructivas en ambos brazos simultáneamente, y siempre indicaran que el fotón viaja por el brazo izquierdo. *El gato está en el brazo izquierdo.*

¿Que pasa con la sonrisa? Ahora en lugar de realizar las mediciones anteriores, colocamos un detector de polarización en el brazo derecho. Ya que conocemos que el fotón nunca está en el brazo derecho, seguramente no habrá sonrisa ahí, y este detector nunca se axionara. Sin embargo, el detector de polarización se axiona. i.e, *hay momento angular en el brazo derecho.*

Un detector de polarización en el brazo derecho puede ser definido como

$$\sigma_z^{(R)} = \Pi_R \sigma_z \quad (4.28)$$

donde

$$\sigma_z = |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| \quad (4.29)$$

La observable  $\sigma_z^{(R)}$  tiene tres eigenvalores, +1, -1 y 0, correspondientes a los eigenvectores  $|R\rangle |+\rangle$ ,  $|R\rangle |-\rangle$  y el subespacio asociado degenerado por  $|L\rangle |+\rangle$  y  $|L\rangle |-\rangle$  respectivamente.

Si un fotón finaliza en  $D_1$  entonces la medición correspondiente de la posición del fotón  $\Pi_R$  nunca encuentra ese fotón está en el brazo derecho. Sin embargo, una medición de  $\sigma_z^{(R)}$  puede encontrar en algunas ocasiones momento angular allí.

La probabilidad condicional de  $\sigma_z^{(R)}$  de el valor +1 debido a que el fotón finaliza en  $D_1$  es

$$\text{Prob}(\sigma_z^{(R)} = 1) = |(\langle +| \langle R|) |\phi\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

La cual es distinta de cero. Similarmente, existe una probabilidad condicional distinta de cero de que la medición de como resultado momento angular -1 en el brazo derecho,

$$\text{Prob}(\sigma_z^{(R)} = -1) = |(\langle -| \langle R|) |\phi\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

Sabemos con certeza que el fotón atraveso el brazo izquierdo, aunque encontramos momento angular en el derecho. ¿Es correcta esta conclusión? Nosotros nunca medimos simultáneamente el lugar y el momento angular. Es decir, nuestras conclusiones fueron obtenidas midiendo la posición para algunos fotones y el momento angular para otros. La implicación inmediata es que llegamos a una paradoja de razonamiento contrafactual.

Veamos que ocurriría si intentamos medir la posición y el momento angular simultáneamente.

En este caso insertamos simultáneamente detectores para  $\Pi_R$ ,  $\Pi_L$  y  $\sigma_z^{(R)}$ . (como  $\Pi_R$  y  $\sigma_z^{(R)}$  conmutan, no tiene importancia su orden en el brazo derecho). Vemos ahora que donde quiera que  $\sigma_z^{(R)}$  indica que no hay momento angular neto,  $\Pi_R$  registra el valor 1, indicando que el fotón paso a través del brazo derecho y donde quiera que  $\sigma_z^{(R)}$  no indica un momento angular,  $\Pi_R$  registra el valor 0, indicando que el fotón paso por el brazo izquierdo. Así la paradoja se desvanece.

Las conclusiones obtenidas por mediciones separadas no se sostienen cuando las mediciones se realizan simultáneamente. Por lo cual, uno es tentado a concluir que la paradoja no es otra cosa que una ilusión óptica. En la siguiente sección, sin embargo, mostraremos que realmente hay un Gato de Cheshire y no es una ilusión óptica.

#### 4.4.2. Experimento pensado gatos de Cheshire cuánticos usando mediciones débiles

La perturbación debido a las mediciones intermedias es una forma de razonar estándar para deshechar tales paradojas, sin embargo, existe siempre un intercambio entre perturbación y precisión, esto es la perturbación debido a las mediciones puede ser limitada al precio de aceptar un cierto nivel de imprecisión (i.e. errores) en la medición.

Es interesante ver lo que tales mediciones con perturbación limitada, las cuales son realizadas simultáneamente, pueden decirnos acerca de nuestra paradoja.

El esquema que tenemos en mente para realizar una medición es semejante al usado en ciertos experimentos de haces ópticos y pueden ser realizados con la tecnología actual.

La medición de los detectores  $\Pi_L$ ,  $\Pi_R$ ,  $\sigma_z^{(L)}$  y  $\sigma_z^{(R)}$  debe ser realizada reemplazando el detector  $D_1$  por una cámara CCD, con los desplazamientos vertical y horizontal del haz sirviendo como punteros de los medidores. Por ejemplo, un vidrio plano en el brazo izquierdo, el cual tiene una inclinación normal en un pequeño ángulo arriba del eje del haz, se desplaza hacia arriba cuando un fotón pasa a través de él, por una pequeña cantidad que puede ser definida como una unidad  $\delta$  de desplazamiento. Entonces, al observar tal desviación de el haz hacia arriba en la cámara CCD indicará que los fotones pasan a través del brazo izquierdo. De manera similar, una medición del momento angular puede ser un elemento óptico que produce un desplazamiento horizontal del haz de acuerdo a su



polarización fotónica.

El haz tendrá un ancho de sección eficaz  $\Delta$  característico. La precisión de la medición y el grado de perturbación del fotón dependen de la magnitud del desplazamiento  $\delta$  con respecto a la anchura  $\Delta$ . Cuando  $\delta \gg \Delta$ , la medición es precisa, podemos decir para un fotón dado, si está desplazado o no. Al mismo tiempo la perturbación del fotón es grande, porque el lugar del haz se vuelve enredado con su medidor. En contraste,  $\Delta \gg \delta$  caracteriza al llamado *regimen de medición débil*. En este régimen, cualquier fotón dado no muestra si el haz fue desplazado o no, pero al repetir la medición  $N$  veces se reduce la incertidumbre en el desplazamiento del haz a aproximadamente  $\frac{\Delta}{\sqrt{N}}$ . Esto es, el desplazamiento puede ser detectado con cualquier precisión deseada repitiendo la medición un número suficientemente grande de veces.

En el contexto de la pre y post-selección, la estrategia anterior es una implementación específica de la estrategia de medición general conocida como *mediciones débiles* que han dado una nueva herramienta para resolver situaciones paradójicas en mecánica cuántica.

De esta forma, denotando por  $A$  a cualquier operador medido, es bien conocido de los resultados estándar que el cambio promedio del apuntador (o el cambio promedio del haz) será

$$\langle A \rangle_w = \frac{\langle \phi | A | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \quad (4.30)$$

i.e. el valor  $\langle A \rangle_w$  es lo que el apuntador del dispositivo de medición indica cuando  $A$  es medido, con una interacción de la medición que perturba el sistema medido sólo débilmente, sobre un ensemble de sistemas todos ellos pre-seleccionados en el estado  $|\psi\rangle$  y post-seleccionados en el estado  $|\phi\rangle$ . Más aún  $\langle A \rangle_w$  es el valor efectivo de la observable  $A$  para cualquier sistema interactuando con su ensemble, tan grande como la interacción sea débil.

Así los valores débiles son los siguientes

$$\langle \Pi_L \rangle_w = \frac{\langle \phi | \Pi_L | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} = 1, \quad (4.31)$$

$$\langle \Pi_R \rangle_w = \frac{\langle \phi | \Pi_R | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} = 0, \quad (4.32)$$

$$\langle \sigma_z^{(L)} \rangle_w = \frac{\langle \phi | \sigma_z^{(L)} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} = 0, \quad (4.33)$$

$$\langle \sigma_z^{(R)} \rangle_w = \frac{\langle \phi | \sigma_z^{(R)} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} = 1, \quad (4.34)$$

donde hemos definido  $\sigma_z^{(L)}$  para el brazo izquierdo en analogía con  $\sigma_z^{(R)}$  para el derecho. Es decir, la historia dicha por los valores débiles es que el fotón está en el brazo izquierdo (donde  $\langle \Pi_L \rangle_w = 1$  y  $\langle \Pi_R \rangle_w = 0$ ) mientras que el momento está en el brazo derecho (donde  $\langle \sigma_z^{(L)} \rangle_w = 0$  y  $\langle \sigma_z^{(R)} \rangle_w = 1$ ).

Lo importante es que todos estos valores aplican simultáneamente, ya que todas las mediciones débiles pueden ser realizadas al mismo tiempo. En nuestro esquema específico podemos solamente medir cualesquiera dos al mismo tiempo, por ejemplo  $\langle \sigma_z^{(R)} \rangle_w$  y  $\langle \Pi_R \rangle_w$  lo cual indicaría que existe una sonrisa pero no el gato en el brazo derecho. Alternativamente, podemos medir cualquier otro par y todos los resultados serán consistentes con la paradoja. Encontramos finalmente nuestro Gato de Cheshire.

### 4.4.3. Gato de Cheshire de N electrones

Un inconveniente de la realización óptica del experimento del gato de Cheshire, es que revela solamente el Gato de Cheshire como un promedio sobre muchas repeticiones del experimento. En esta sección se describe un arreglo alternativo, uno que está más allá de la tecnología actual, pero el cual revela el Gato de Cheshire en un sentido más directo. En este arreglo el Gato de Cheshire es visto solamente en raras ocasiones, sin embargo cuando se ve, él es visto sin ambigüedad y no como un promedio.

Considere  $N$  electrones distinguibles, preparados en una superposición de lugares  $|L\rangle$  y  $|R\rangle$  en dos cajas. Todos los electrones son polarizados a lo largo del eje  $x$ . El estado pre-seleccionado del sistema es

$$|\psi_N\rangle = 2^{-N/2} ( [|L\rangle + |R\rangle ] |\uparrow\rangle_x )^{\otimes N} \quad (4.35)$$

donde el super índice  $N$  nos dice que multiplica esto  $N$  veces (los  $N$  electrones) y se fija en el orden, ya que el primero es para el primer electrón, el segundo para el segundo electrón y así sucesivamente, por lo cual pedimos antes que los electrones sean distinguibles.

Pensemos que podemos realizar una medición que permita post-seleccionar los electrones en el estado

$$|\phi_N\rangle = 2^{-N/2} ( |L\rangle |\uparrow\rangle_x + |R\rangle |\downarrow\rangle_x )^{\otimes N} \quad (4.36)$$

La probabilidad de obtener el estado post-seleccionado es

$$|\langle \phi_N | \psi_N \rangle|^2 = 4^{-N}$$

el cual es exponencialmente pequeño con el número de electrones.

Pero cuando esta post-selección tiene éxito, da un Gato de Cheshire que puede ser detectado y medido con gran precisión. Además, el gato mismo (su posición), puede ser definido por la masa de los electrones. será posible realizar una medición que es a la vez débil (no perturba apreciablemente los estados pre- y post- seleccionados) y precisa (permite que el número de electrones en cada caja tenga una incertidumbre de  $\sqrt{N}$  la cual es insignificante en relación a  $N$  cuando  $N$  es grande).

Tal medición, por ejemplo, a través de una sonda gravitacional, encontraría los  $N$  electrones (con incertidumbre  $\sqrt{N}$ ) que están en la caja izquierda. Es decir, el valor débil de  $\sum^N \Pi_L$  entre los estados pre y post- seleccionados  $|\psi_N\rangle$  y  $|\phi_N\rangle$  respectivamente es,

$$\left\langle \sum^N \Pi_L \right\rangle_w = \sum^N \langle |L\rangle \langle L| \rangle_w = N \quad (4.37)$$

Vemos que esto es correcto porque, cuando se considera el proyector a la izquierda, sólo para un electrón nos da uno, ya que como para todos los demás el estado no es perturbado y nos da que el producto escalar es uno, eso lo hace para los  $N$  proyectores del lado izquierdo de cada uno de los electrones, así tengo como resultado  $N$

Por otro lado el valor débil de  $\sum^N \Pi_R$  es

$$\left\langle \sum^N \Pi_R \right\rangle_w = \sum^N \langle |R\rangle \langle R| \rangle_w = 0 \quad (4.38)$$

Este resultado viene de que se calculó el valor débil para cada uno de los proyectores, que dio como resultado cero, al tratarse del electrón uno, tengo como resultado cero, que como producto escalar de todos los demás electrones, finalmente tengo cero.

Sin embargo, la sonrisa, la cual aquí puede ser el campo magnético en la dirección  $z$ , será igualmente medible, débil y precisamente, por una sonda magnética apropiada. El campo se encontraría que emana de la caja derecha, con una intensidad de campo proporcional a  $N$ , otra vez con incertidumbre  $\sqrt{N}$ . Esto es  $\left\langle \sum^N \sigma_z \Pi_R \right\rangle_w = N$ . Crucialmente, en principio

todas estas mediciones pueden ser hechas simultáneamente.

Aquí sólo se están reemplazando propiedades del electrón con propiedades del fotón, para el fotón nosotros medimos la polarización ya sea en un plano o circularmente y para el electrón mido su polarización del espín aplicando campos magnéticos.

Como conclusión vemos que las propiedades físicas pueden ser separadas de los objetos a los que pertenecen en un experimento de pre y post- seleccionados.

Aquí hemos presentado sólo un ejemplo con todo detalle, donde un fotón es separado de su polarización, debe ser claro que este efecto debe ser general, podemos separar, por ejemplo, el espín de la carga del electrón, o la energía interna de un átomo del átomo mismo. Más aún, es importante darse cuenta que no son los apuntadores de la bien preparada medición los que indican las propiedades de separación, cualquier sistema externo que interactue débilmente con el sistema pre y post-seleccionado actuara de la misma manera.

#### 4.4.4. Observación de un Gato de Cheshire cuántico en un experimento con un interferómetro de onda materia

En esta sección explicaremos el experimento realizado por Denkmayr y colaboradores en [23], en el cual se envían neutrones a través de un interferómetro perfecto de silicon cristalino y se realizan las mediciones débiles para probar la localización de la partícula y su momento magnético. El experimento sugiere que el sistema se comporta como si los neutrones viajarán a través de un camino, mientras su momento magnético lo hiciera por otro.

En este experimento, debido a la debilidad del acoplamiento entre el sistema y el medidor, la información obtenida por una sola medición es limitada. Para obtener información con mayor utilidad acerca del sistema, la medición debe ser repetida en muchas ocasiones. El valor débil dado por  $\langle A \rangle_w$ , refleja el promedio sobre el ensemble pre y post-seleccionado.

Denkmayr y colaboradores encuentran en un primer experimento, que la determinación de un valor débil puede ser usado como un amplificador.

En este experimento, el neutrón juega el papel del gato y la sonrisa es representada por la componente  $z$  del espín del mismo. El sistema es inicialmente preparado de tal manera

que el estado cuántico del sistema que atraviesa el divisor es,

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; +\rangle |I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle |II\rangle, \quad (4.39)$$

donde  $|I\rangle$  ( $|II\rangle$ ) son las partes espaciales de la función de onda en el camino  $I$  (y el camino  $II$ ), del interferómetro y  $|S_x; \pm\rangle$  denota el estado de espín en la dirección  $\pm x$ . Para observar el Gato de Cheshire, después que pre-seleccionamos el ensemble, se realizan las mediciones débiles de la población de neutrones en uno de los caminos y el valor del espín sobre el otro camino.

El ensemble es postseleccionado en el estado final<sup>5</sup>,

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle [|I\rangle + |II\rangle]. \quad (4.40)$$

Como hemos visto en la paradoja del gato de Cheshire, cuando un gato de Cheshire se crea, una perturbación mínima encontrara al gato en el brazo superior, mientras la sonrisa está en el brazo inferior.

Y como tambien hemos visto, el comportamiento paradójico puede ser cuantificado usando valores débiles. Podemos calcular los valores débiles de los operadores de proyección sobre los eigenestados del camino de los neutrones,

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_I &= |I\rangle \langle I| \quad \text{y} \\ \hat{\Pi}_{II} &= |II\rangle \langle II|. \end{aligned}$$

La medición débil de  $\langle \hat{\Pi}_I \rangle_w$  y  $\langle \hat{\Pi}_{II} \rangle_w$  es realizada por los autores usando absorbedores con una alta transmitividad (es decir, una absorción débil). Fenomenológicamente, una absorción en el camino  $j$  puede ser representado con un potencial óptico imaginario,

$$\hat{V}_j = -i \mu_j(r) \hat{\Pi}_j \quad (4.41)$$

---

<sup>5</sup>Dado el estado inicial el estado final ya esta determinado completamente, no hay nada que pueda hacer para cambiarlo, este estado es obtenido a partir del estado más general posible, esto se puede corroborar observando que su determinante es diferente de cero.

donde el coeficiente de absorción está dado por,

$$M_j = \int \mu_j(r) dr$$

con  $r$  para la anchura de la placa absorbidora. Para absorción débil,  $M_j$  puede ser relacionado con una transmitividad  $T_j$  a través de  $M_j \approx 1 - (T_j)^{\frac{1}{2}}$ . Por simplicidad la evolución libre del operador es omitida en las siguientes expresiones. La eigenfunción después de que el paquete de ondas ha interactuado con el absorbedor a lo largo del camino  $j$  es,

$$|\psi'\rangle = e^{-i \int dr \hat{V}_j} |\psi_i\rangle \approx 1 - \left[ M_j \hat{\Pi}_j + \dots \right] |\psi_i\rangle \quad (4.42)$$

Usando  $M_j$  pequeñas (nos quedaremos hasta primer orden) y reales (ya que  $\mu_j$  es un numero real), así usando la Ec. (4.42) tenemos,

$$I_j^{ABS} = |\langle \psi_f | \psi' \rangle|^2 \approx |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \left[ 1 - M_j (\langle \hat{\pi}_j \rangle_w + \langle \hat{\pi}_j \rangle_w^*) \right] \quad (4.43)$$

Experimentalmente esto puede ser revisado por el contraste con el interferómetro vacío  $C$  ya que cualquier desviación del estado ideal pre y post-seleccionado debería manifestarse en la emergencia de franjas de interferencia. Los autores nos mencionan que los valores débiles pueden ser extraídos de la observación de

$$\frac{I_j^{ABS}}{I^{REF}}$$

Usando la definición de valor débil y las Ec. (4.39) y (4.40), tenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Pi}_I \rangle_w &= 0 \\ \langle \hat{\Pi}_{II} \rangle_w &= 1. \end{aligned}$$

La primera de esas expresiones indica que en promedio es como si no hubiera neutrones viajando sobre el camino  $I$ . Note que esto está en concordancia con el teorema<sup>6</sup> :

Si el valor débil de un operador dicotómico es igual a uno de sus eigenvalores, entonces el resultado de una medición del operador ideal (o directa) es el mismo eigenvalor con probabilidad uno [25].

---

<sup>6</sup>Explicado y demostrado en el capítulo 3.

Así, si la medición débil del proyector  $\langle \hat{\Pi}_I \rangle_w$  nos diera 0, entonces, por el teorema anterior, ya que el operador de proyección es dicotómico y el valor débil es un eigenvalor, podemos también realizar una medición ideal de  $\hat{\Pi}_I$  y nuevamente obtener 0 con probabilidad 1. De manera similar ocurre para  $\hat{\Pi}_{II}$ .

Midiendo el valor débil de la componente de espín a lo largo de cada uno de los caminos  $j$  se puede determinar la localización de la componente, esto aplicando una interacción unitaria sobre el respectivo camino. La observable apropiada para acertar al valor débil de la componente del espín sobre la trayectoria  $j$  es  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_j \rangle_w$ . Así, los valores débiles dan

$$\begin{aligned}\langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_I \rangle_w &= 1 \\ \langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_{II} \rangle_w &= 0\end{aligned}$$

En promedio, el acoplamiento de la interacción débil con un medidor sobre el camino  $II$  no afecta el estado del medidor, como si no hubiera efectivamente espín viajando a través del camino.

Aunque es posible realizar las mediciones débiles conjuntas a lo largo de cada trayectoria. Los autores las realizan de forma separada (es decir, en diferentes corridas). Esto está justificado debido a que las mediciones débiles a lo largo de un camino dado conllevan un acoplamiento local, con lo cual en el caso límite sólo hay perturbaciones mínimas de la subsiguiente evolución del estado a lo largo de la trayectoria. Este es un claro contraste con las mediciones proyectivas estándar, las cuales podrían perturbar fundamentalmente la evolución del sistema proyectando en un estado cuántico a lo largo de las dos trayectorias a un subespacio específico. Entonces, sólo será posible hacer cualquier inferencia apelando a razonamiento contrafactual.

Analizaremos ahora el aparato de experimental. El experimento fue realizado con un interferómetro S18 de haz lineal. El dispositivo es mostrado en la figura (4.4). Un haz monocromático de neutrones con una longitud de onda de  $\lambda = 1,92 \text{ Amstrongs}$  pasa los prismas magnéticos birrefringentes, los cuales polarizan el haz. Para evitar la despolarización, un campo de guía magnética apuntando en la dirección  $+z$  se aplica alrededor del dispositivo experimental. Un rotador de espines rota el espín del neutron en  $\frac{\pi}{2}$  hacia el plano  $xy$ . La función de onda del espín es entonces dada por  $|S_x; +\rangle$ . A continuación los neutrones entran en un interferómetro triple y dentro del interferómetro, un rotador de espín en cada camino del haz permite la generación del estado preseleccionado  $|\psi_i\rangle$ .

Un desfaseador es insertado en el interferómetro para sintonizar la fase relativa  $\chi$  entre

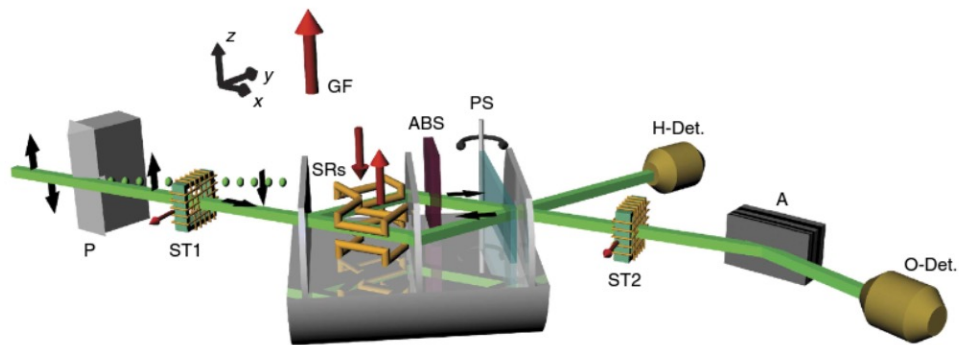


Figura 4.4: Dispositivo experimental. El haz de neutrones es polarizado al pasar a través de prismas birrefringentes magnéticos (P). Para prevenir la despolarización, una guía magnética (GF) es aplicada al rededor del equipo. Un espín giratorio rota el espín por  $\frac{\pi}{2}$ . La preselección de la eigenfunción del sistema  $|\psi_i\rangle$  es completada por dos espines giratorios (SRs) dentro del interferómetro de neutrones. Esos SRs son también utilizados para las mediciones débiles de  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_I \rangle_w$  y  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_{II} \rangle_w$ . Los absorbedores (ABS) son insertados en los caminos del haz cuando  $\langle \hat{\pi}_I \rangle_w$  y  $\langle \hat{\pi}_{II} \rangle_w$  son determinados. El desfasador (PS) hace posible cambiar la fase relativa  $\chi$  entre los haces en los caminos  $I$  y  $II$ . Los dos haces de salida del interferómetro son monitoreados por el detector  $H$  y  $O$  en reflexión de distintas direcciones, respectivamente. Sólomente los neutrones que alcanzan el detector  $O$  son afectados y post-seleccionados usando un rotor de espín (ST2) y un analizador de espín (A). Imagen y traducción literal tomada de [23].



los caminos  $I$  y  $II$ . Por lo cual un estado del camino post-seleccionado es dado por,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-\frac{i\chi}{2}} |I\rangle + e^{\frac{i\chi}{2}} |II\rangle \right)$$

De los haces salientes del interferómetro, sólomente el haz de  $O$  es afectado por el análisis del espín. El haz  $H$  sin análisis de espín es usado como referencia para la fase y la estabilidad del conteo.

El espín post-seleccionado del haz  $O$  es hecho usando un rotador de espín y un super espejo polarizador. Ambos haces emergentes son medidos usando detectores de  $He$  de alta eficiencia (arriba del 99%)<sup>7</sup>.

Para determinar la *población de los neutrones en los caminos del interferómetro*  $\langle \hat{\Pi}_j \rangle_w$  se miden insertando absorbedores en las respectivas trayectorias  $j$  del interferómetro  $\langle \hat{\Pi}_j \rangle_w$ . Se realiza en tres pasos: primero, se mide una intensidad de referencia realizando un escaneo del corredor de fase del interferómetro vacío para determinar  $I^{REF}$ . En el segundo paso, un absorbedor con transmitividad conocida  $T = 0,79(1)$  es insertado en el camino  $I$  y el escaneo de la fase es repetido, el cual da  $I^{ABS}$ . Finalmente, el absorbedor es puesto ahora en el camino  $I$  y  $II$ . El subsecuente registro del cambio de fase permite la obtención de  $I_{II}^{ABS}$ , una medición típica se puede observar en la figura (4.5).

En el camino  $I$  el absorbedor no tiene efecto. En comparación con la intensidad de referencia, no hay cambio significativo durante el conteo. Opuesto a ello la intensidad decrece con el mismo absorbedor cuando es puesto en el camino  $II$ . Esto dice que la población de los neutrones en el interferómetro es más grande en el camino  $II$  que en el  $I$ .

Finalmente para la **determinación de la localización de la componente de espín de los neutrones**. La medición débil de la componente del espín de los neutrones en cada camino se logra aplicando un campo magnético adicional en uno o en otro de los caminos. Esto provoca una pequeña rotación en el espín, lo cual permite probar la presencia de los momentos magnéticos en los respectivos caminos. Si hay un momento magnético presente en uno de los caminos, el campo tiene un efecto sobre las franjas de interferencia medidas. Si ningún cambio en el interferómetro puede ser detectado, no hay momento magnético presente en el camino donde el campo adicional es aplicado. La condición de una medición débil se logra sintonizando el campo magnético lo suficientemente poco. Una rotación de espín de  $\alpha = 20^\circ$  es aplicada. Usando la función de la correlación, uno puede calcular el

<sup>7</sup>Todas las mediciones presentadas fueron realizadas por los autores en una forma semejante.

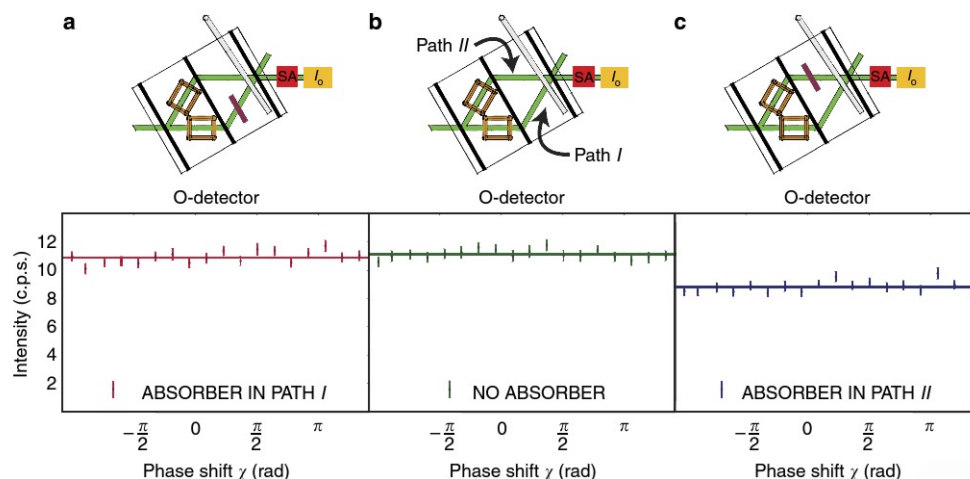


Figura 4.5: Medición del valor débil,  $\langle \hat{\Pi}_I \rangle_w$  y  $\langle \hat{\Pi}_{II} \rangle_w$  usando un absorbedor con transmitividad  $T = 0,79(1)$ . La intensidad es graficada en función de la fase relativa  $\chi$ . Las líneas sólidas representan el ajuste para los datos y las barras de error la desviación estándar. a) Un absorbedor en el camino  $I$  no hay pérdida significativa en la intensidad. b) Una medición de referencia sin absorbedor. c) Un absorbedor en  $II$  la intensidad decrece. Los resultados sugieren que el ensemble sucesivamente post-seleccionado, los neutrones viajan a través de  $II$ . Imagen y traducción literal tomada de [23].

traslape de la función de onda. Es de 98,5%. Los resultados de una de tales mediciones son mostrados en la figura (4.6), donde son comparados con la medición realizada con el interferómetro vacío.

Para esto necesitamos calcular  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_I \rangle_w$  y  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_{II} \rangle_w$  los cuales son determinados usando rotadores de espín acondicionados a la trayectoria. Para medir estos valores débiles se aplica un campo magnético pequeño en el camino  $j$ . La interacción Hamiltoniana para esta medición es

$$\hat{H}_j = -\gamma \frac{\hat{\sigma}_z}{2} \mathbf{B}_z \hat{\Pi}_j \quad (4.44)$$

donde  $\gamma$  es la razón giromagnética y  $\mathbf{B}_z$  es un campo magnético externamente aplicado.  $\hat{\Pi}$  denota el hecho de que el campo magnético es aplicado solamente en la región a lo largo del camino  $j$ . Aplicando un campo magnético a lo largo del eje  $z$  conduce a la componente  $\hat{\sigma}_z$ , matriz de Pauli, la cual es generadora de rotaciones a lo largo del eje  $z$ . Esto es, una pequeña rotación a lo largo del eje  $z$  sobre el camino  $j$  es generado a través del acoplamiento entre el campo magnético y la proyección del espín del neutrón sobre el eje  $z$ . El ángulo de rotación producido por esta precesión de Larmor el cual denotaremos por  $\alpha$ ; su magnitud es proporcional a la intensidad del campo magnético. La evolución del estado inicial causada

por le medición débil es dada a cualquier orden por,

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= e^{\frac{i \hat{\sigma}_z \alpha \hat{\Pi}_j}{2}} |\psi_i\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\Pi}_j |\psi\rangle_i + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j |\psi_i\rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

después de la post-selección para los correspondientes estados finales  $|\psi_f\rangle$ , usando la Ec. (4.45), quedandonos hasta segundo orden en  $\alpha$ , recordando que  $\hat{\Pi}_j^2 = \hat{\Pi}_j$  y recordando  $\hat{\sigma}_z^2 = \mathbb{I}$ , usando que los operadores conmutan (porque uno actua sobre la trayectoria y otro sobre la parte de espín), la intensidad en el detector  $O$  es

$$\begin{aligned} I_j^{MAG} &= |\langle \psi_f | \psi' \rangle|^2 \\ &\approx |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \left[ 1 + \frac{i\alpha}{2} (\langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_j \rangle_w - \langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_j \rangle_w^*) + \frac{\alpha^2}{2} (-\langle \hat{\pi}_j \rangle_w^* - \langle \hat{\pi}_j \rangle_w + |\langle \hat{\sigma}_z \hat{\pi}_j \rangle_w|^2) \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

dado que  $\langle \hat{\Pi}_j \rangle_w$  es conocido de las mediciones para los absorbedores y  $I^{REF} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2$  de los valores débiles puede extraer los valores de las intensidades del campo magnético a lo largo de cualquiera de las trayectorias.

Cuando los estados pre y post-seleccionados,  $|\psi_i\rangle$  y  $|\psi_f\rangle$  son dados por,

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; +\rangle |I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle |II\rangle \quad (4.47)$$

y

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\chi/2} |I\rangle + e^{i\chi/2} |II\rangle) |S_x; -\rangle. \quad (4.48)$$

Así usando que los estados con polarizacion son ortogonales, ie,  $\langle S_x; - | S_x; + \rangle = 0$ , tenemos

$$I_I^{ABS} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \quad (4.49)$$

y

$$I_{II}^{ABS} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 (1 - 2M_2) \quad (4.50)$$

Hemos usado estados que estan polarizados para arriba o para abajo en  $\hat{\sigma}_x$  no en  $\hat{\sigma}_z$ , para saber cual es esa acción tenemos que encontrar cuales son estos vectores en la base de

estados propios de  $\hat{\sigma}_z$  encontrando

$$|S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así el operador que mide el campo magnético en las trayectorias  $I$  o  $II$  están dados por,

$$\langle \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_I \rangle_w = e^{i\chi} \quad (4.51)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_{II} \rangle_w = 0 \quad (4.52)$$

Es decir, por el brazo  $II$  se va la partícula y por el brazo  $I$  la polarización.

Usando estos resultados en la Ec. (4.46) tenemos, que en presencia del campo magnético la intensidad en cada brazo está dada por

$$I_I^{MAG} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \quad (4.53)$$

$$I_{II}^{MAG} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (4.54)$$

Los resultados experimentales están en concordancia con los cálculos teóricos. Las mediciones de referencia muestran un contraste del promedio de  $C \leq 0,024(5)$ , mientras el máximo contraste se obtiene con el interferómetro de neutrones usados para el experimento en  $C \approx 0,85$  por lo tanto, la intensidad de referencia  $I^{REF}$  es ajustada con una línea.

Podemos ver en esta figura (4.6), que con respecto a la intensidad, donde antes tenía un máximo ahora tiene un mínimo y viceversa, en cambio cuando meto el campo en la trayectoria  $II$  existe un cambio pero es menor. Así puedo concluir que fue por la trayectoria  $I$  por donde se fue la polarización.

Cuando una rotación debido al espín se aplica a lo largo de la trayectoria  $I$ , una oscilación de la intensidad dependiente de la fase relativa  $I$  se espera que aparezca para ambos detectores  $O$  y  $H$ . Entonces, los datos son ajustados con una curva sinusoidal de la forma,

$$f(\chi) = y_0 + A \sin(p\chi + \phi) \quad (4.55)$$

donde  $y_0$  es el valor que teníamos al inicio,  $A$  es la amplitud,  $p$  es el periodo y  $\phi$  es la función de fase que se ajusta.

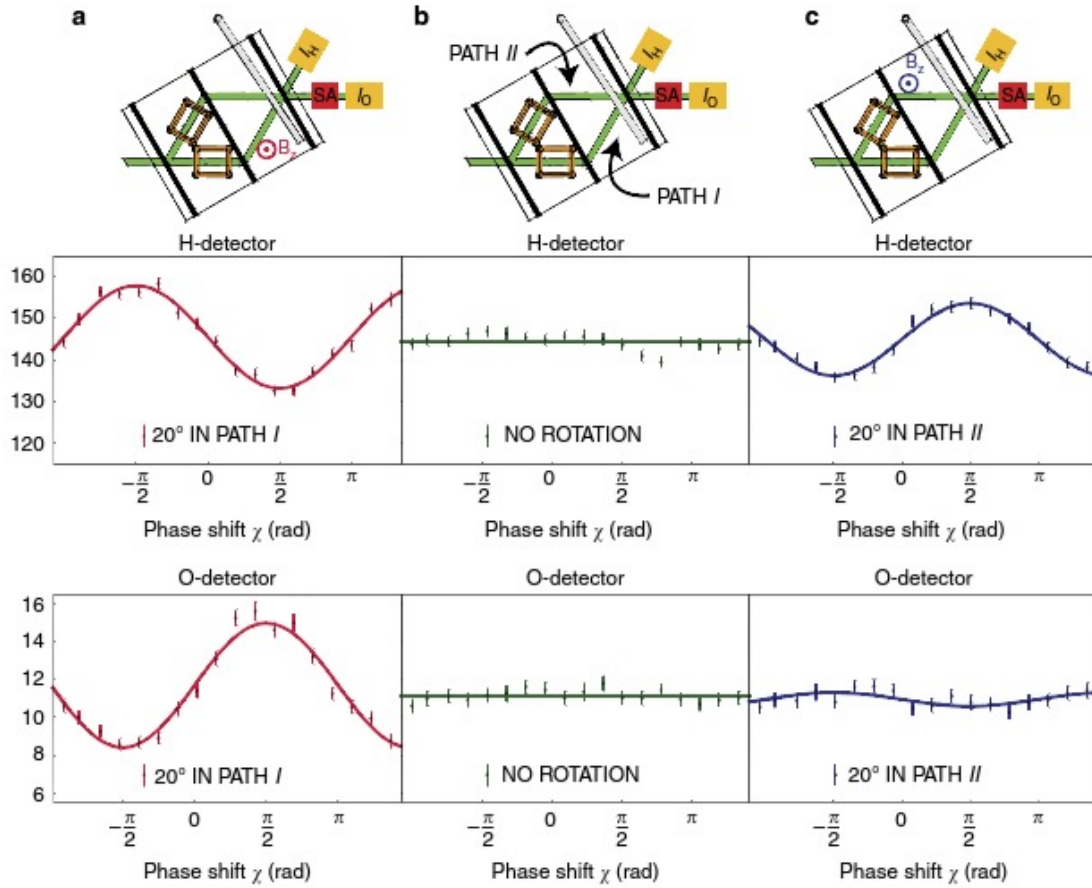


Figura 4.6: Figura. Medición de  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_I \rangle$  y  $\langle \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_{II} \rangle$  aplicando campos magnéticos pequeños. La intensidad del haz  $O$  (con su análisis de espín) y el haz  $H$  (sin análisis) es graficado como función de la fase relativa  $\chi$ . Las líneas sólidas representan el ajuste de los datos y las barras de error de la desviación estándar. a) Un campo magnético en el camino  $I$ ; las franjas de interferencia aparecen en los detectores post-seleccionados  $O$  y  $H$ . b) Una medición de referencia sin campo magnético adicional. Como los estados de espín que inciden en el interferómetro son ortogonales, las franjas de interferencia no aparecen ni en  $O$  ni en  $H$ . c) Un campo magnético en el camino  $II$ ; las franjas de interferencia con contraste mínimo pueden ser vistas en el detector de espín post-seleccionado  $O$ , mientras una clara intensidad sinusoidal se observa en  $H$ . Las mediciones sugieren que para ensembles post-seleccionados sucesivos (sobre el detector  $O$ ) la componente de espín viaja a lo largo del camino  $I$ . Imagen y traducción literal tomada de [23].

Las figuras (4.5) y (4.6) demuestran claramente el efecto predicho: un absorbedor con alta transmitividad no tiene efecto significativo sobre las mediciones si es colocado en el camino  $I$ . Es solamente efectivo si se coloca en el camino  $II$ . En contraste, un pequeño campo magnético tiene un efecto significativo solamente en el camino  $I$ , mientras no lo tiene en el camino  $II$ . Así, cualquier detector que interactúa con el Gato de Cheshire lo suficientemente débil se afecta como si el neutrón y el espín están espacialmente separados.

En conclusión, mediciones débiles combinadas con interferometría de neutrones, permiten demostrar un fenómeno fundamental de mecánica cuántica llamado el gato cuántico de Cheshire. Esto tiene sentido a nivel de un ensemble pre y post-seleccionado que una propiedad del sistema cuántico puede comportarse como siendo espacialmente separada del lugar donde uno está cierto de la presencia de la partícula.

#### 4.4.5. Valores débiles no representativos en mecánica cuántica

En esta sección, se discute cuáles son las condiciones en las cuales los valores débiles pueden representar un sistema cuántico. Para ello recuerdese que, como ya se ha mencionado, la definición operacional de un valor débil involucra el límite en el cual la intensidad de la medición débil tendiendo a cero. Bajo ciertas condiciones, este límite es discontinuo en el sentido en el que no se recupera de forma suave la descripción del espacio de Hilbert del sistema sin perturbar y por lo tanto, el valor débil *no puede* representar este último sistema. Como resultado, las conclusiones extraídas para tales valores débiles con respecto a las propiedades del sistema estudiado no pueden sostenerse [31].

A pesar de que el concepto de medición débil se encuentra en las cuestiones más básicas de la mecánica cuántica. Algunos trabajos recientes han encontrado algunas críticas hacia ellos, poniendo énfasis en cuestiones como: que propiedades del sistema bajo investigación representan valores débiles, cual es el significado que podría asignarseles, o bien como un valor débil debe ser interpretado en términos físicos.

Existen varios aspectos particulares de este problema de interpretación ya que existen ciertas condiciones que tienen que satisfacerse para que el valor débil represente el sistema bajo estudio. En todos los casos la medición débil está involucrada en extraer un valor débil, a pesar de que en algunos casos específicos, la influencia en el sistema sea tal que el estado relevante del sistema después de realizada la medición se estará en el espacio de Hilbert ortogonal con respecto a el estado del sistema no perturbado. Ninguno de estos estados del sistema después de la medición, ni el valor débil construido a partir de él, pueden por lo

tanto representar el sistema *per se*.

Las condiciones para las mediciones débiles que resultan en un valor débil representen el sistema bajo investigación, incide en el límite del ajuste al caso de la no medición cuando la intensidad de la medición débil tiende a cero.

Para el posterior desarrollo, nuevamente recuerdese que un valor débil  $\langle A \rangle_w$  asociado a un operador  $\hat{A}$  se define como  $\langle A \rangle_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi_f | \psi \rangle}$ , donde  $\psi$  son los estados inicial (pre-selección) y final  $\psi_f$  (post-selección) respectivamente. A partir de la definición, se observa que  $\langle A \rangle_w$  es el cociente de dos amplitudes  $\langle \psi_f | \hat{A} | \psi \rangle$  y  $\langle \psi_f | \psi \rangle$ , por lo cual no es inmediatamente claro que esta identidad representa físicamente al sistema. Por lo cual, se debe interpretar  $\langle A \rangle_w$  de forma adecuada e inspeccionar lo que este valor numérico debería significar. Las reglas básicas de la mecánica cuántica no ofrecen una respuesta a esta cuestión. Por otra parte, se han hecho varios intentos para relacionar  $\langle A \rangle_w$  con una probabilidad compleja, pero esto requeriría una extensión de los conceptos usuales de una probabilidad.

Otra manera de aproximarse al significado del valor débil es a través de su definición operacional, es decir, relacionarlo con la manera en que es medido. En el tratamiento usual se considera la interacción entre el sistema bajo estudio y el medidor, asumiendo una interacción de medición del tipo de von Neumann expresado por el operador unitario usual, tal y como se describió previamente en la sección dedicada a mediciones débiles.

En el esquema de interacción, el procedimiento para obtener la parte real de un valor débil (de manera análoga ocurre para la parte imaginaria al medir el momento del medido) se puede resumir de la siguiente manera.

Se prepara el sistema bajo estudio y el medidor en el estado inicial pre-seleccionado, se dejan interactuar el sistema en acuerdo con una interacción de von Neumann y se implementa una sonda de prueba para realizar la medición débil. Después, se permite al sistema aislado una evolución de forma unitaria, sin involucrar al medidor. A continuación se post-selecciona el estado final del sistema realizando una medición proyectiva, considerando sólo aquellos estados que coincidan con un valor propio particular. Posteriormente se somete al medidor a una medición proyectiva de su indicador variable y se repite el procedimiento para obtener una estadística suficiente. Finalmente, se obtiene un valor medio de la distribución de la posición del medidor y se hace tender a cero la intensidad de la interacción.

Notese que este esquema es una definición meramente operacional que no ofrece una interpretación directa del valor débil, más aún en ocasiones el desvanecimiento o no del

valor débil es la cuestión importante, para poder dar una interpretación. Por ejemplo, en el criterio propuesto por Vaidman del *rastros débiles* se busca encontrar un significado para *el pasado de una partícula*, y con ello poder identificar la trayectoria que se le debe asignar a una partícula en una configuración con varios canales posibles.

Vaidman propone formular un criterio en términos del valor débil del operador de la proyección sobre la parte de la configuración donde se busca verificar la presencia de la partícula; el que se anule o no el valor débil podría entonces ser una señal de que la partícula ha estado presente en ese lugar.

El criterio de Vaidman claro: un valor débil de un operador de proyección puede ser o no cero sólo si hay una contribución al estado total del sistema cuando se estudia el canal particular elegido por la premedición del correspondiente del operador de proyección. Una objeción a esta definición tiene que ver con el hecho de que un criterio formulado en términos del valor débil crucialmente depende también del estado post-seleccionado y en ocasiones, esta dependencia crucial podría, de hecho, distorsionar el valor débil y distorsionar el canal particular que se quiere focalizar.

La definición operacional así expuesta del valor débil envuelve el límite cuando la intensidad de la interacción tiende a cero, es decir  $g \rightarrow 0$ . Necesariamente se exige que la convergencia sea continua en el sentido en el cual  $g = 0$  represente al sistema sin perturbar. De lo contrario, el valor débil *no* sería una característica del sistema no perturbado y mucho menos del sistema perturbado.

Las condiciones para que se logre la continuidad se pueden encontrar al llevar a cabo una medición de tipo von Neumann y realizar la aproximación ya varias veces recurrente a lo largo del presente trabajo de tomar los términos del operador de evolución hasta primer orden en  $g$ . Es directo verificar que en este caso, cuando el sistema aislado permanece constante  $\hat{U}_{sis} = 1$ , el cambio en la función de onda del medidor debe ser  $gA_w$ , es decir, se debe retomar el caso sin perturbación cuando  $g = 0$ .

Bajo estas hipótesis pueden ocurrir dos casos. El primero es cuando  $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = 0$ , en este caso se recupera la situación sin perturbar cuando  $g \rightarrow 0$  como ya se había mencionado. El segundo caso ocurre cuando  $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = 0$ . Esta hipótesis presenta una seria dificultad, ya que en este caso el estado  $\hat{A} | \psi \rangle$  es ortogonal a  $|\psi \rangle$ , es decir, el sistema perturbado es ortogonal al sistema inicial. La medición débil cambia abruptamente al sistema y lo envía a un estado ortogonal, es decir, el cambio es tan drástico que es imposible recuperar el caso sin perturbar aún cuando  $g \rightarrow 0$ .



Se concluye que en este caso el valor débil está construido a partir de un estado que no describe ninguna propiedad física del sistema sin perturbar y por lo tanto tampoco describe ninguna propiedad física, sólomente es un artefacto matemático para realizar la interacción de premedición del sistema. Se observa que desde el inicio se viola la suposición de debilidad y por ello no se pueden realizar mediciones consecutivas sin perturbar al sistema.

Existen algunos ejemplos importantes en donde se ilustra este hecho, el más ilustrativo es el de los gatos de Cheshire mencionados previamente. Para esta situación, se consideran fotones polarizados en un interferómetro Zehnder. La polarización del haz (la sonrisa) y la posición de los fotones (el gato) se preseleccionan en una forma adecuada, que previamente se ha descrito. Posteriormente, se llevan a cabo un conjunto de mediciones y se llega a la conclusión de que a lo largo de una trayectoria del interferómetro es posible detectar polarización aún en el caso en que no hayan fotones presentes. La explicación a ese fenómeno se da a partir de los valores débiles.

Existe sin embargo, una objeción. Es fácil observar que los operadores involucrados bajo estudio, no son bien comportados en el sentido introducido anteriormente: los valores esperados de las proyecciones de la polarización  $\sigma_z l$  y  $\sigma_z r$  no se desvanecen cuando la interacción es nula, significado que uno o ambos operadores sabotean el sistema de su estado no perturbado. Consecuentemente, cualquier conclusión obtenida con respecto a la posible localización de la sonrisa no puede ser confirmada: el valor débil no puede ser usado para físicamente caracterizar el sistema no perturbado. En otras palabras la acción del operador que se está midiendo sobre el sistema inicial está realizando una operación que no es débil desde el principio, porque manda el estado inicial a un estado ortogonal. Esto no corresponde a una medición débil ya que está última lo envía a un estado que se encuentra en el mismo subespacio de tal forma que cuando  $g \rightarrow 0$  se visualiza una transición suave del estado perturbado al estado sin perturbar.

Por ello el ejemplo de los gatos de Cheshire no representa en este sentido a una medición débil.

## 4.5. Paradoja de Hardy

Hardy señaló un experimento en mecánica cuántica que implica una paradoja si se interpreta en términos clásicos. Aharonov y colaboradores dieron un análisis del experimento en términos de valores débiles y dos grupos experimentales han verificado experimentalmente los resultados de Aharonov y colaboradores

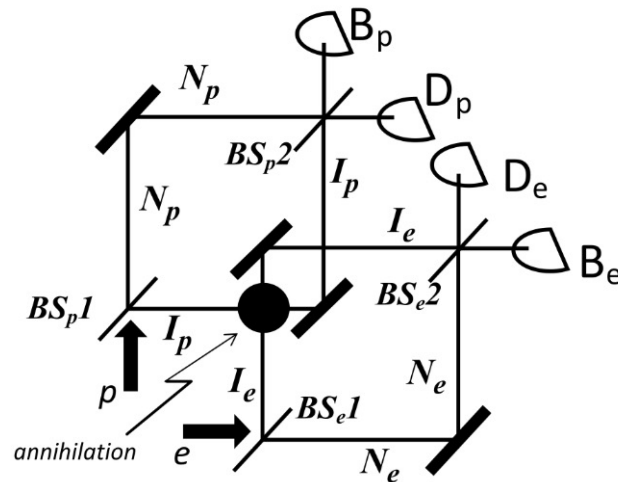


Figura 4.7: Ilustración esquemática del experimento de la paradoja de Hardy. Un electrón  $e$  y un positrón  $p$  entran en cada uno de los interferómetros Mach-Zehnder con sus divisores de haz (BS) y son detectados en las zonas B (brillante) y en D (oscuro). Ambos son libres de moverse en brazos no interactivos N pero se aniquilan entre ellos en la intersección de los brazos I. La paradoja es que un par aparece en la puerta D, indicando que las partículas atravesaron los brazos I, incluso si ellos deberían haber sido aniquilados. Imagen y traducción literal tomada de [13].

La configuración representativa del experimento se esquematiza en la siguiente figura (4.7). En él se asume que el haz se divide en dos partes idealmente 50 : 50 y que los brazos de los interferómetros Mach-Zehnder para el electrón y el positrón son de igual longitud y que ninguno de los dos presenta una obstrucción y que no hay otra región de aniquilación en los brazos de interacción  $I_p$  e  $I_e$ , es importante resaltar que aquí se asume que la aniquilación ocurre con probabilidad igual a 1.

El análisis se realiza por consideraciones sucesivas en un momento relevante. En este momento, cuando ambas partículas atraviesan el divisor de haz, antes de pasar por  $BS_{p1}$ , el estado  $BS_{p1}$  está descrito por,

$$|p\rangle \xrightarrow{BS_{p1}} = \frac{\{|N_p\rangle + i|I_p\rangle\}}{\sqrt{2}} = |p'\rangle \quad (4.56)$$

Con transiciones similares a otros divisores de haz. El estado del par electrón-positrón justo antes de entrar al segundo par de divisores se describirá sin el término  $I_e$  e  $I_p$  es decir

$|I_p\rangle |I_e\rangle^8$  y se lee

$$\text{nolaescribi} \tag{4.57}$$

notese que ahora, si se despeja de la Ec. (4.56), los termino  $|N\rangle$  y  $|I\rangle$  se reescriben en función de  $|B\rangle$  y  $|D\rangle$  llegando a la ecuación,

$$|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |N\rangle \\ |I\rangle \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} |B\rangle \\ |D\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |N\rangle + i|I\rangle \\ i|N\rangle + |I\rangle \end{pmatrix}$$

de donde se sigue de manera directa que ,

$$\begin{pmatrix} |N\rangle \\ |I\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |B\rangle - i|D\rangle \\ -i|B\rangle + |D\rangle \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

$$|in\rangle : [|N\rangle_p |N\rangle_e + i |I\rangle_p |N\rangle_e + |N\rangle_p |I\rangle_e] / \sqrt{3} \tag{4.59}$$

asi, al sustituir en nuestro estado inicial Ec. (4.59).

Por lo cual, en el segundo par de divisores de haz se convierte

$$|in\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \{ |D_p, D_e\rangle - i |D_p, B_e\rangle - i |B_p, D_e\rangle + 3 |B_p, B_e\rangle \} \tag{4.60}$$

La paradoja es ahora la siguiente, note que la Ec. (4.60) puede ser escrita como

$$|in\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \{ \sqrt{2} |I_p, D_e\rangle + i |D_p, B_e\rangle + 3 |B_p, B_e\rangle \} \tag{4.61}$$

lo cual quiere decir que  $|D_e\rangle$  pasó a través de  $|I_p\rangle$ .

Es posible observar que al tener un click en el brazo del detector  $D_e$  significa que el

---

<sup>8</sup>Usaremos esta notacion para denotar

$$|I_p\rangle \otimes |I_e\rangle$$

positron viajó a través del brazo  $I_p$ , y similarmente para  $D_p$  con respecto a  $I_e$ . Es decir que un click simultaneo en  $D_e$  y  $D_p$  significa que ambas partículas deben haber ido a través de sus respectivos brazos de interacción  $I_p$   $I_e$ , en este caso ellos deberían haberse aniquilado y no se haber alcanzado sus respectivos detectores. Esta paradoja es conocida como la *paradoja de Hardy*.

Aharonov y colaboradores muestran una revisión de lo que significa que las partículas hayan pasado por los brazos. Por supuesto esto *no* puede ser hecho por una medición fuerte ya que colapsaría la función de onda y destruiría la coherencia. En otras palabras, si paso por  $I_e$  significaría que no paso por  $N_e$ , entonces desde antes se anularía todo lo que paso por la zona de aniquilacion, llevando la situación a una paradoja.

En lugar de ello, se hace una reinterpretación dentro del formalismo de las mediciones débiles; particularmente utilizando los operadores de numero, es decir, la ocupación de partícula simple como el operador  $\hat{N}_p = |N_p\rangle\langle N_p|$  y operadores de ocupación por pares:  $\hat{N}_p \otimes \hat{I}_e$ . Ellos expresan sus resultados en terminos de los valores debiles de esos operadores. Los estados pre-seleccionados, se seleccionaron en el edo  $|in\rangle$  y es post-seleccionado de acuerdo con

$$|f\rangle = |D_p, D_e\rangle \quad (4.62)$$

es decir, en clicks simultaneos en el detector  $D_p$  y  $D_e$  y con ello se llevo a cabo la aniquilacion. Al imponer el hecho de que se lleve a cabo una medición, se recuperan nuevamente las relaciones,

$$\begin{aligned} |B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|N\rangle + i|I\rangle) \\ |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|N\rangle + |I\rangle) \end{aligned}$$

con lo cual, es posible obtener el estado final en terminos de los vectores de estado  $|N\rangle$  y  $|I\rangle$ ,

$$|f\rangle = \frac{1}{2}\{-|N_p, N_e\rangle + i|N_p, I_e\rangle + i|I_p, N_e\rangle + |I_p, I_e\rangle\}$$

usando esta última expresiones posible encontrar

$$\langle \hat{I}_p \otimes \hat{I}_e \rangle_w = 0 \quad (4.63)$$

es decir, los valores débiles se desvanecen por la aparente simultaneidad de las partículas

de interacción en los brazos, lo cual resulta razonable, sin embargo

$$\langle \hat{N}_p \otimes \hat{I}_e \rangle_w = 1 \quad (4.64)$$

y

$$\langle \hat{I}_p \otimes \hat{N}_e \rangle_w = 1 \quad (4.65)$$

en la cual Aharonov y colaboradores interpretan que hay dos pares de partículas en el aparato simultaneamente, un par en el brazo  $N_p$  y  $I_e$ , el otro en el brazo  $N_e$  e  $I_p$ . sin embargo, la mecánica cuántica resuelve la paradoja en un camino muy particular proponiendo

$$\langle \hat{N}_p \otimes \hat{N}_e \rangle_w = -1 \quad (4.66)$$

es decir, que también menos un par, electrón-positrón en el brazo que no se sobrepone el cual nos da un par singular.

Como es evidente los argumentos dados por Aharonov realmente pesan sobre una interpretación de los valores débiles. Los valores débiles de operadores de ocupación par se siguen directamente identificando el número de pares en los respectivos brazos del interferómetro.

La cuestión aquí es legítima y va en contra del hecho de que cualquier otra elección de estado final dada por la ecuación anterior puede haber dado otros valores distintos a los valores débiles. Aunque en este caso la restricción sobre la elección del estado final es el mismo y es más bien motivado en la paradoja de las tres cajas; por lo cual es muy natural elegir  $|f\rangle = |D_p\rangle \otimes |D_e\rangle$ . Pero nada fundamental podría permitir la elección de otro estado fundamental en este caso, incluso si estos estados podrían parecer cualquiera que contribuya. En los trabajos de Lundeen y colaboradores [32] y Yokota y colaboradores [33] se expone en detalle la descripción anterior.

## 4.6. Medición directa de la función de onda cuántica

Dentro de la teoría cuántica, se introduce como parte central a la *función de onda* como un elemento abstracto de la teoría sin definición explícita. El entendimiento más amplio de este elemento se da a través de su uso en el cálculo de probabilidades de los resultados de las mediciones fuertes mediante la regla de Born [7].

En la actualidad, la función de onda puede ser medida utilizando mediciones fuertes

sólamente a través de metodos tomograficos. Estos métodos son indirectos y se centran principalmente en el aspecto de *definir* lo que es la funcion de onda. Sin embargo, usando el formalismo de las mediciones débiles es posible medir directamente la función de onda, ya que en este caso, como se mostrará acontinuación, tanto las componentes imaginarias como las reales de la funcion de onda aparecen directamente registradas en los aparatos de medicion. En esta sección se discute con todo detalle el desarrollo experimental llevado a cabo por Lundeen y colaboradores [7] en donde se mide de manera directa la funcion de onda espacial transversal de un foton individual.

La funcion de onda, también conocida como el estado cuántico, es difícil de medir de forma precisa debido a que una medicion de la posición de la partícula perturba a la funcion de onda obligando a que una medicion subsecuente del momento tenga resultados aleatorios. En efecto, es imposible determinar una funcion de onda de un sistema individual. Sin embargo es posible decir algo cuando se habla de un ensemble de particulas.

Considere por ejemplo que se realiza una medida de la posición sobre un ensemble de particulas, todas con la misma función de onda  $\psi(x)$ . La probabilidad de obtener como resultado de  $x$  es  $|\psi(x)|^2$ . Lo mismo ocurre para el momento, la probabilidad de obtener como resultado de  $p$  es  $|\phi(p)|^2$ . Aquí  $\phi(p)$  es la transformada de Fourier de la función de onda  $\psi(x)$ . Incluso el conocimiento de estas dos distribuciones de probabilidad no son suficientes para determinar  $\psi(x)$  sin ambigüedad. De cuaolquier forma  $\psi(x)$  puede sólamene ser reconstruida realizando un gran conjunto de mediciones distintas y con ello estimar una  $\psi(x)$  que es mas compatible con los resultados de la medición. Este método es conocido como la *tomografía del estado cuántico*.

En contraste, es posible introducir un método para medir directamente la función de onda  $\psi(x)$  de un ensemble, en el cual es posible determinar sus componentes real e imaginaria en un punto. El método se basa en la medicion débil secuencial de dos variables complementarias del sistema.

El desarrollo para llevar a cabo la medición es el siguiente. Considere la medición de un operador arbitrario  $\hat{A}$ . La medicion puede ser vista como el acoplamiento entre un medidor y el sistema que tiene como resultado el movimiento del medidor. La posicion del medidor indica el resultado de una medida. Cuando se realiza una medición débil el acoplamiento es despreciable y con ello se reduce la perturbacion creada por la medicion. Se puede verificar que el promedio de una medición débil  $\langle A \rangle_w$  sobre los estados inicial  $\psi$  y final  $\psi_f$  es el promedio de la medición de  $\hat{A}$  usando la función de onda  $\psi$ . En efecto, como

$\langle A \rangle_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi_f | \psi \rangle}$ , entonces

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_f |\langle \psi_f | \psi \rangle|^2 \langle A \rangle_w = \sum_f |\langle \psi_f | \psi \rangle|^2 \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi_f | \psi \rangle} \quad (4.67)$$

desarrollando y usando linealidad, se llega a,

$$\langle \hat{A} \rangle = \left\langle \psi \left| \sum_f |\psi_f\rangle \right. \right\rangle \langle \psi_f | \hat{A} | \psi \rangle, \quad (4.68)$$

y finalmente,

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (4.69)$$

Notese que el resultado anterior sirve para justificar tanto el método de Hardy, así como el problema de las tres cajas.

A la selección de un subconjunto particular del ensemble basado en un resultado de una medición subsecutense se le conoce como post-selección. A diferencia del valor esperado estándar el valor débil puede ser un número complejo. Esta naturaleza compleja sugiere que el valor débil podría ser usado para indicar ambas partes, la real y la imaginaria, de la función de onda.

Retomando el ejemplo de una partícula individual, considere la medición débil de la posición  $\pi_x = |x\rangle \langle x|$  seguida de una medición fuerte del momento.

$$\langle \hat{\pi}_x \rangle_w = \frac{\langle x | p \rangle \langle x | \psi \rangle}{\langle p | \psi \rangle} = \frac{e^{ipx/\hbar} \psi(x)}{\phi(p)} \quad (4.70)$$

En el caso para el cual  $p = 0$ , la expresión anterior se simplifica a

$$\langle \hat{\pi}_x \rangle_w = k\psi(x), \quad (4.71)$$

Donde  $k$  es una constante de normalización (la cual puede ser eliminada después mediante la normalización de la función de onda). Es decir el valor débil de la posición es proporcional a la función de onda de la partícula en el punto  $x$ . En resumen, reduciendo la perturbación inducida por la medición de la posición y luego midiendo el momento de forma directa, es posible medir la función de onda de la partícula individual.

El experimento para llevar a cabo la medición directa de la función de onda espacial transversal de un fotón, se realizó de la siguiente manera. antes de proseguir, cabe resaltar que existen técnicas para medir el modo espacial de un haz clásico de luz. Estos incluyen interferometría de esfuerzos espaciales, sensores Shack- Hartman, interferometría espiral, el algoritmo de Gerchberg-Saxton, y conoscopía holográfica. Sin embargo, ninguna de estas técnicas son directas ya que miden sólo gradientes de fase, o estiman la fase real de la función de onda o requieren de técnicas computacionales, pero en todos los casos sirven para recrear a la función de onda, y no para medirla.

En concreto, lo que se hizo fue lo siguiente. Se crea un haz de fotones de dos maneras, ya sea atenuando un haz laser o usando la generación de fotones individuales a través de una conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC). Los fotones tienen una longitud de onda central de  $783nm$  y  $800nm$  respectivamente. El experimento se divide en cuatro pasos secuenciales: preparación de la función de onda transversal, mediciones débiles de la posición de el fotón transversal, post-selección de aquellos fotones con momento transversal cero y finalmente la lectura de la medición débil.

Un ensemble de fotones con función de onda  $\psi(x)$  es emitido a través de una fibra de un sólo modo y colimado. Se realiza la medición débil de la posición transversal acoplándolo a un grado interno de libertad del fotón: la polarización. El ángulo de polarización lineal del fotón se utiliza como puntero. En la posición  $x$  se rota la polarización lineal de la luz por un ángulo  $\alpha$ . Considere  $\alpha \approx 90^\circ$ . En este caso es posible determinar perfectamente si un fotón está en la posición  $x$ , por lo que es posible determinar donde ocurre una polarización ortogonal (medición fuerte). Al reducir la intensidad de la medición, reducir el cambio de  $\alpha$ , se hace posible determinar con precisión la posición del fotón.

Se utilizan una lentes como transformada de Fourier y una abertura para post-seleccionar sólo los fotones con  $p = 0$ . Esto constituye la medición fuerte de  $\hat{p}$ .

En este subconjunto del ensemble del fotón, se encuentra el valor promedio de la medición débil de  $\pi_x$ . La rotación promedio del medidor de la polarización lineal, es proporcional a la parte real del valor débil. La variable complementaria del medidor, es decir, la rotación en la base de la polarización circular, es proporcional la parte imaginaria del valor débil. Formalmete si se realiza el tratamiento de la polarización inicial como si se tuviera una partícula de espín  $1/2$ , entonces el valor débil estaría dado por,

$$\langle \hat{\pi}_x \rangle_w = \frac{1}{\sin\alpha} (\langle s | \hat{\sigma}_x | s \rangle - i \langle s | \hat{\sigma}_y | s \rangle) \quad (4.72)$$



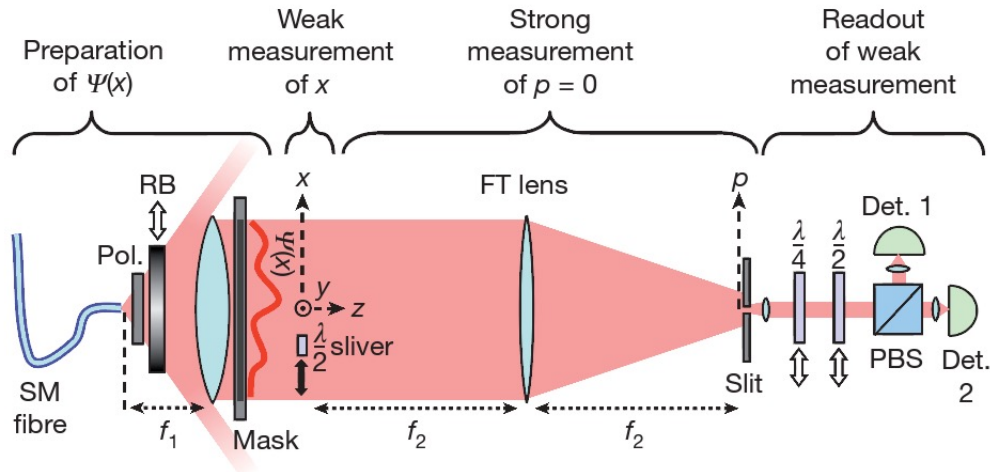


Figura 4.8: Imagen y traducción casi literal tomados de [7]. Medición directa de la función de onda transversal del fotón. Se prepara a los fotones con una función de onda idéntica al ser transmitidos por una fibra óptica que permite el paso de un modo (SM) aproximadamente Gaussiano. Los fotones emergen de la fibra y pasan a través de un polarizador de microalambre para ser colimados con unos lentes acromáticos con una distancia focal  $f_1$  más allá de la fibra. Los lentes fueron truncados con una apertura rectangular, transformando la función inicial en una eigenfunción nominal de forma Gaussiana con un diámetro de  $56,4\text{mm}$  y una fase plana. Se modifica la fase y la magnitud de la función nominal para crear una serie de funciones de prueba que pasan a través de los lentes. A  $45\text{mm}$  se coloca una rendija rectangular de plata de media longitud de onda en la posición  $x$  y es usada para realizar las mediciones débiles. Entonces, los fotones son sometidos a una transformada de Fourier inducida por unos lentes acromáticos  $f_2$ , colocados a una distancia focal  $f_2$  de la rendija. En el plano de la transformada de Fourier a una distancia focal  $f_2$  se post-seleccionan los fotones con momento cero, y se coliman los fotones emergentes con una rendija a una distancia  $f_3$ . Los fotones pasan a través de cada uno de las placas de media longitud de onda o de un cuarto y entonces atraviesan un divisor de haz polarizado (PBS). En cada salida, los fotones son enfocados sobre un detector: para fotones individuales, se utiliza un contador con fotodiodos y para el laser, un fotodiodo de silicón. El desbalance en la señal de conteo entre los dos detectores es proporcional a la parte real e imaginaria de la función de onda.

donde  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_y$  son las matrices de Pauli asociadas a  $x$  y  $y$ , respectivamente; y  $|s\rangle$  sería el estado de polarización final del medidor. Se miden los valores esperados de  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_y$ , enviando fotones a través de la placa de media longitud de onda o la placa de un cuarto de longitud de onda, entonces al atravesar un divisor de haz de polarización (PBS) se pueden medir estos valores. Así se tiene  $\text{Re}\psi(x)$  para la placa de media longitud de onda e  $\text{Im}\psi(x)$  para la placa de un cuarto de longitud de onda, para la señal desbalanceada entre los dos detectores.

Se realizan los escaneos de  $\pi_x$  en pasos de  $1\text{mm}$  cuando  $\alpha = 20^\circ$  y se registra el valor débil  $\langle \pi_x \rangle_w$  en cada paso. De esta forma, se mide directamente la función de onda transversal del fotón  $\psi(x) = |\psi(x)|\exp(i\phi(x))$ . Se normalizan las mediciones de  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_y$  con el mismo factor, de tal forma que  $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ , con la cual se descarta la constante proporcional  $\sin(\alpha/\phi(0))$ .

Para confirmar el método de medición directa, se realiza un escaneo para una serie de diferentes funciones de onda. Usando la fuente de fotones simples SPDC, se comienza por medir la función de onda inicial truncada.

Se observa entonces como la técnica de mediciones débiles puede ser usada para medir directamente el estado cuántico de un sistema cuántico arbitrario, cuando se tiene la elección libre de la base  $\{|a\rangle\}$  de un estado cuántico en alguna elección asociada al operador  $\hat{A}$  del sistema. El método conlleva a medir débilmente un proyector en esta base,  $\hat{\pi}_a = |a\rangle\langle a|$  y post-seleccionar en un valor particular  $b_0$  de la observable complementaria  $\hat{B}$ . En este caso el valor débil es [29] y [30],

$$\langle \hat{\pi}_a \rangle_w = \frac{\langle b_0 | a \rangle \langle a | \psi \rangle}{\langle b_0 | \psi \rangle} = \frac{\langle a | \psi \rangle}{\nu} \quad (4.73)$$

donde  $\nu$  es una constante independiente de  $a$ , el valor débil es proporcional a la amplitud del estado  $|a\rangle$ . En la representación de los estados de la base de  $\hat{A}$ , el estado cuántico es representado por,

$$|\psi\rangle = \nu \sum_a \langle \hat{\pi}_a \rangle_w |a\rangle \quad (4.74)$$

La última ecuación muestra que en algún sistema físico se puede medir directamente el estado cuántico al realizar una medición débil a través de una base y post-seleccionar apropiadamente en la base complementaria.

Aunque las mediciones débiles necesariamente cambian la eficiencia por la exactitud o precisión, no se requiere de una reconstrucción tomográfica para la medición de la función

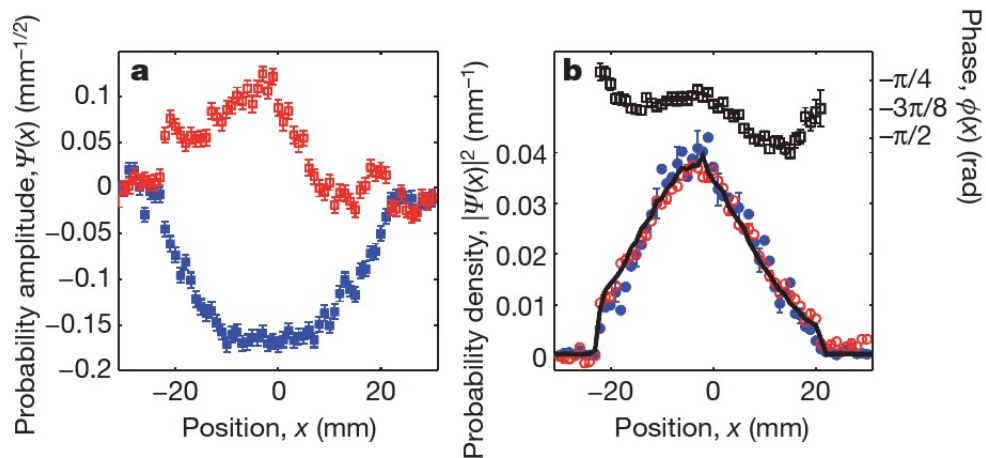


Figura 4.9: Imagen y traducción literal tomada de [7]. Figura 2: Medición de la función de onda de un solo fotón, su módulo cuadrado y su fase. *a*)  $\text{Re}\psi(x)$  (cuadros azules sólidos) e  $\text{Im}\psi(x)$  (cuadros abiertos rojos) medidos para la función de onda Gaussiana truncada. *b*) Fase de la función de onda (cuadros abiertos; eje derecho) y el módulo cuadrado (círculos sólidos azules; eje izquierdo). Existe una buena correspondencia entre la última medición y la medición directa de  $x$  y su distribución de probabilidad (línea sólida; eje izquierdo) llevada a cabo escaneando con un detector a lo largo de  $x$  en el plano de la rendija. La fase es relativamente plana, como se espera de la forma de la fibra. En este caso no hay post-selección y el valor débil coincide con el valor estándar esperado. La gráfica de la parte imaginaria del momento medida (círculos abiertos rojos; eje izquierdo) concuerda con su distribución de probabilidad. Se encuentra que la parte real de la medición del momento es diez veces menor, como era de esperarse.

de onda. En el presente esquema, la función de onda manifiesta a sí mismo un corrimiento en el medidor, proveyendo a su vez una definición simple y no ambigua operacional del estado cuántico.

---

## Parte V

# Conclusiones

*Uno debe estar preparado a seguir las consecuencias de la teoría, y aceptarlas sin importar a donde conducen.*

Dirac

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

La mecánica cuántica nos vuelve locos porque aún pensamos clásicamente, y ella es no clásica. Debemos cambiar nuestra forma de pensar. No debemos cambiar la lógica. La lógica es independiente de, y previa a, el experimento. No podemos cambiar las leyes de la probabilidad tampoco, lógica y probabilidad son cercanas y están relacionadas. Pero las mediciones débiles pueden ayudarnos a dejar de pensar clásicamente acerca de la Mecánica cuántica y a fortalecer no sólo nuestro entendimiento, sino también el entendimiento de las leyes de la naturaleza.

En este trabajo se discutió cómo, a diferencia de las mediciones realizadas en el formalismo estándar, bajo la realización de mediciones débiles aplicadas a ciertos operadores es posible reinterpretar y proponer una interpretación física coherente a ciertas paradojas del formalismo cuántico.

Hemos hecho una revisión a los más relevantes experimentos de la amplia variedad que han sido realizados utilizando el formalismo de las mediciones débiles, los cuales se pueden dividir en dos distintas categorías.

En la primera categoría se encuentran aquéllos en los cuales se examinan las premisas básicas del esquema que se ha sugerido, en ellos se incluyen, por ejemplo, las pruebas de la paradoja de Hardy y la paradoja de las tres cajas. Mientras que en el segundo tipo se encuentran los experimentos en los cuales se muestra la ventaja del esquema de medición débil, en ellos se incluyen por ejemplo los gatos de Cheshire cuánticos, donde si un sistema cuántico es sujeto a una pre- y post-selección, puede comportarse como si la partícula y sus propiedades estuvieran espacialmente separadas. La medición de la función de onda, donde se logró medir la componente transversal de la función de onda asociada a un fotón, y la

amplificación de los resultados de las mediciones [5].

Se mostró también cómo las mediciones débiles nos dan información acerca de un sistema cuántico que puede ser obtenida con una mínima perturbación, con ello, es posible observar tanto la posición y el momento en un experimento de doble rendija [34].

Analizamos también cómo las mediciones débiles suministran una descripción completa de un sistema cuántico, para una observable dicotómica, entre otras aplicaciones.

Analizamos que para la realización de las mediciones débiles se deben tener en cuenta tres cantidades: el estado pre-seleccionado, la observable en cuestión y el estado post-seleccionado. Y que la medición débil ocurre en, y es medido por, el esquema de medición indirecto.

Se discutió el concepto de valor débil de una observable, que es en general una cantidad compleja, que no necesita ser un eigenvalor, de hecho no necesita ser uno de los valores clásicamente permitidos. El valor débil es un concepto formalmente bien definido, aunque han existido algunas críticas enfocadas a deficiencias lógicas, aunque todas pueden ser rigurosamente refutadas, por lo cual las posibles imperfecciones matemáticas no pueden ser usadas como objeciones al esquema de las mediciones débiles.

Se discutió en qué casos los valores débiles pueden ser interpretados realmente como cantidades físicas representativas de los operadores bajo estudio y en qué situaciones sólo son artefactos matemáticos sin interpretación física asociada. Además, aplicando el formalismo de las mediciones débiles se mostró cómo en ciertas ocasiones es posible medir cantidades físicas que no se pueden medir de forma directa en el formalismo de medición estándar; cantidades tales como la trayectoria de una partícula y la función de onda de un fotón.

Los valores débiles han demostrado ser un concepto provechoso tanto para estudios fundamentales como para el desarrollo de nuevas técnicas experimentales. Los experimentales han encontrado varios caminos ingeniosos usando mediciones débiles, para extraer información novedosa de mediciones en mecánica cuántica. La idea de interpretar un valor débil particular como la función de onda para el sistema y el uso de post-selecciones delicadamente elegidas para amplificar un efecto son ejemplos importantes. En este sentido, la introducción al concepto de medición débil ha significado una novedad real.



---

# Bibliografía

- [1] von Neumann J., *Matematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer Verlag, 1932, (Traducción al inglés: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955).
- [2] Wheeler J.A., y Zurek W.H., *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press, 1983.
- [3] David McMahon *Quantum Computing Explained*, John Wiley e Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.
- [4] Wiseman H.M., y Milburn G.J., *Quantum Measurement and Control*, Cambridge University Press, 2009.
- [5] Aharonov Y., Albert D.Z., y Vaidman L, *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100*, Physical Review Letters 1988 60 1351-1354.
- [6] Kofman A.G., Ashhab S., y Nori F., *Nonperturbative theory of weak pre- and post-selected measurements*, Physics Reports 2012 520 43-133.
- [7] Lundeen J.S., Sutherland B., Patel A., Stewart C., y Bamber C., *Direct measurement of the quantum wavefunction*, Nature 2011 474 188-191.
- [8] Aharonov Y., Popescu S., Rohrlich D., y Skrzypczyk P., *Quantum Cheshire Cats*, New Journal of Physics 15 (2013) 113015 (8pp).
- [9] Bengt E. Y. Svensson, *Pedagogical Review of Quantum Measurement theory with an emphasis on weak measurements*, Departament of Astronomy and Theoretical Physics, Lund University, Sweden, Quanta 2(1), 18 2013.
- [10] Nielsen Michael A., Chuang Isaac L. *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, 2010.

- 
- [11] Yakir Aharonov, Daniel Rohrlich *Quantum Paradoxes. Quantum Theory for the Perplexed*, Wiley-VCH, 2011.
- [12] Armando Figueroa *Sistemas Discretos*, Tesis de licenciatura, UNAM, 2014.
- [13] Bengt E. Y. Svensson, *What is a quantum-Mechanical "Weak value"the value of?*, theoretical high energy physics, Department of Astronomy and Theoretical Physics, Lund University, Sweden 2013.
- [14] Sakurai, J. J., *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley Publishing Company, Late, University of California, Los Angeles, 1994.
- [15] Cohen Tannoudji Claude, Diu Bernard, Laloë Franck, *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, Paris, Francia, 1977.
- [16] Lüders, Gerhart, *Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß*, 1951. English translation by K.A. Kirkpatrick: Concerning the state-change due to the measurement process, 2006.
- [17] Benenti Giuliano, Casati Giulio and Strini Giuliano *Principles of Quantum Computation and Information. Volume II: Basic Tools and Special Topics*, World Scientific, Italy 2007
- [18] Janzing, Dominik *Entropy of Entanglement*, Daniel; Hentschel, Klaus; Weinert, Friedel, Compendium of Quantum Physics. Springer. pp. 205–209, 2009.
- [19] Berry, Brunner, Popescu and Shukla *Can apparent superluminal neutrino speeds be explained as a quantum weak measurement?*, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 492001
- [20] Denkmayr T, Geppert H and et. al. *Observation of a quantum Cheshire cat in a matter-waveinterferometer experiment*, nature communications, 5:4492 DOI: 10.1038, 2014.
- [21] Wootters William K. *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. 80, 2245, 1998.
- [22] Aharonov Y., Bergmann P.G. and Lebowitz J.L. *Time symmetry in the quantum process of measurement*, Phys. Rev. 134 (1964) B1410–B1416.
- [23] Denkmayr T., Geppert H., et al, *Observation of a quantum cheshire cat in a matter wave interferometer experiment*, DOI: 10.1038, 2014
- [24] Carroll Lewis *Alice's Adventures in Wonderland*, Sam'l Gabriel Sons and Co, 1916.

- 
- [25] Yakir Aharonov and Lev Vaidman, *Complete description of a quantum system at a given time*, J. Phys. A: Math. Gen. 24 (1991) 2315-2328.
- [26] Jozsa Richard, *Complex weak values in quantum measurement*, Phys. rev. A, 76, 044103 (2007)
- [27] J. S. Lundeen, K. J. Resh, *Practical measurement of joint weak values and their connection to the annihilation operator*, Phys. Lett. A 334 (2005) 337-344.
- [28] Yakir Aharonov and Lev Vaidman, *Properties of a quantum system during the time interval between two measurements*, Phys. rev. A, 41-1, (1990), 11-19.
- [29] Durt T., Englert, Bengtsson B., and Zyczkowsky K., *On mutually unbiased bases*. ArXiv e prints (2010), 1004.3348.
- [30] Weigert, S., & Wilkinson, M., *Mutually unbiased bases for continuous variables*, Phys. Rev. A, 78, 020303 (2008).
- [31] Resch, K.J, Lundeen, J. S, and Steinberg, A. M *Experimental realization of the quantum box problem*, Phys. Rev. A, 324 (2004) 125-131.
- [32] Lundeen, J. S, and Steinberg, A. M *Experimental Joint Weak Measurement on a Photon Pair as a Probe of Hardy's Paradox*, Phys. Rev. Letters 102, 020404 (2009).
- [33] Yokota K. et al *Direct observation of Hardy's paradox by joint weak measurement with an entangled photon pair*, New Journal of Physics 11 (2009) 033011.
- [34] Kocsis S., Braverman B., Ravets S., Stevens M. J., Mirin R. P., Shalm L. K., Steimberg A. M., *Observing the average trajectories of single photons in a two-slit-interferometer*, Science (2011); 332 6034, 1170-1173.
- [35] Edgar Omar Rodriguez Rojas, *El experimento de elección retardada de Weeler revisitado*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2015.