



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVERSIÓN EN EL ESPACIO Y ESFERAS
COAXIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Fernando García Rodríguez

TUTORA

M. en C. Patricia Cortés Flores

Ciudad Universitaria, D. F.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Inversión en el Espacio y Esferas Coaxiales

Fernando García Rodríguez

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias y a todos mis profesores por mostrarme la esencia de las matemáticas y el amor hacia la ciencia, en especial a Patricia Cortés, María del Carmen Arrillaga, Oscar Palmas y Ana Irene Ramírez.

A mis padres por su apoyo y comprensión incondicionales. A mi tía Rosa por ser como una segunda madre para mí. A mi abuela por esperarme siempre con los brazos abiertos.

A mi hermana Giovana, y mis hermanos de vida Arturo, Yaneli y Joyce, por ser fuente de inspiración y consejos inagotables.

Al profesor Armando por iniciarme en el mundo de las matemáticas.

A todos mis amigos y compañeros que me acompañaron a lo largo de mi carrera.

Gracias a todos ustedes por ayudarme a convertirme en la persona que hoy soy, ya que sin todos ustedes, nada de esto hubiera sido posible.

Dedicatoria

Dedicado a mi familia, mis amigos de la UNAM, el CELE, a Joyce, mis alumnos, y a mis maestros a lo largo de estos años por transmitirme su inconmesurable pasión por el conocimiento.

Índice general

I	Introducción	1
II	Desarrollo	4
1.	Preliminares	5
1.1.	Potencia de un punto	5
1.2.	Ángulos en el espacio	10
1.3.	Un poco de geometría diferencial	15
1.4.	Esferas Ortogonales	20
1.5.	El ángulo de intersección entre dos esferas	24
1.6.	Ejercicios	26
2.	Homotecia	27
2.1.	Poliedros semejantes	27
2.2.	División armónica	31
2.3.	Esferas homotéticas	33
2.4.	La esfera de similitud	35
2.5.	Ejercicios	41
3.	Inversión	42
3.1.	La inversión es una transformación isogonal	47
3.2.	Curvas y superficies autoinversas	51
3.3.	Inversión de planos, esferas, rectas y circunferencias	56
3.4.	La esfera de antisimilitud	64

3.5. Ejercicios	73
4. Esferas Coaxiales	74
4.1. Planos, ejes, y centros radicales	74
4.2. Los puntos límite	86
4.3. Sistemas de esferas ortogonales	91
4.4. Congruencia lineal y complejo lineal	93
4.5. Esferas en movimiento	100
4.6. Ejercicios	106
5. Inversión y Esferas Coaxiales	107
5.1. Inversión de sistemas coaxiales, CGL's y CJL's	107
5.2. Esferas de similitud y antisimilitud en sistemas coaxiales	119
5.3. Ejercicios	137
III Conclusiones y Referencias	138
Conclusiones	139
Código usado en Blender	140
Referencias y bibliografía	145

Índice de figuras

1.1.	7
1.2.	La potencia de un punto P respecto a una esfera es igual a su potencia con respecto a C_1 , y ésta a su vez es la misma que la de P respecto a una circunferencia de diámetro máximo de la esfera, por lo que es la misma para cualquier circunferencia coplanar con P	9
1.3.	Ángulo diedro d	11
1.4.	Ángulo triedro V o $V-ABC$	12
1.5.	Ángulo poliedros simétricos. Se puede apreciar aquí que el plano Π es el plano de simetría para los ángulos poliedros V y V' , los cuales tienen sus partes respectivamente iguales, aunque el orden de éstas no se respeta. Por ejemplo, el ángulo diedro VD es el mismo en magnitud que el ángulo diedro $V'D'$, pero no en sentido.	13
1.6.	Ángulo triedros simétricos.	14
1.7.	El plano tangente a una superficie en un punto.	16
1.8.	El ángulo de intersección de dos esferas se puede calcular a partir del ángulo formado por las líneas normales en un punto o el que forman los planos tangentes en un punto. En la figura se muestran dos planos tangentes y sus líneas normales (respectivamente del mismo color).	18
1.9.	Un cono de revolución tangente a la esfera.	22
1.10.	El ángulo de intersección entre un plano y una esfera.	25

2.1. El homotético de una circunferencia es una circunferencia.	29
2.2. Esferas homotéticas con centros de similitud H y K	33
2.3. Los 6 centros de similitud de tres esferas son colineales por tercias en cuatro líneas. En la figura, los centros de similitud internos de las esferas S_2 con S_3 y S_1 con S_3 , es decir $H_{2,3}$ y $H_{1,3}$, son colineales con el centro de similitud exterior $K_{1,2}$ de S_1 y S_2	38
3.1. Puntos inversos y las intersecciones de la línea que los contiene con la esfera de inversión.	46
3.2. Dos curvas que se intersectan y sus inversas.	48
3.3. Los inversos a dos superficies conservan el ángulo en que se intersectan las superficies originales. En la figura $T_P(S_1)$ (en verde) es el plano tangente a S_1 en P y $T_P(S_2)$ (en rojo) es el plano tangente a S_2 en P . Éstos y los correspondientes planos tangentes a las figuras inversas en P' , se intersectan en el mismo ángulo.	50
3.4. Circunferencias ortogonales C_i y C_1 obtenidas de intersectar la esfera de inversión y una esfera arbitraria, que pasa por un par de puntos mutuamente inversos, con un plano que también pasa por éstos.	54
3.5. El inverso de un plano que no pasa por el centro de inversión es una esfera que pasa por el centro de inversión.	57
3.6. El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia del mismo tipo.	59
3.7. F_1 y F_2 (en rosa) son figuras mutuamente inversas con respecto a S_1 , y al invertir éstas con respecto a S_2 , los inversos F'_1 y F'_2 (en verde) serán mutuamente inversos respecto a S'_1	60
3.8. Demostración del teorema 3.14 i	61
3.9. Caso especial de la demostración del teorema 3.14 i	62
3.10. Distintos casos de esferas mutuamente inversas donde el centro de inversión es un centro de similitud: a) No se intersectan y son mutuamente excluyentes b) Se intersectan c) No se intersectan y una contiene a la otra.	66

3.11. El inverso de O_1 es el inverso de O_i respecto a S'	71
4.1. El plano radical Π de dos esferas no concéntricas.	75
4.2.	80
4.3. Cualquier esfera ortogonal a otras dos que no se intersectan, corta a la línea de los centros en dos puntos L y L'	87
4.4. El sistema coaxial Σ , que es tangente al plano Π en P , es ortogonal a la colección de esferas Σ' , donde ésta última es tangente a la normal l del plano Π en P	92
4.5. Diferentes tipos de congruencia lineal.	95
4.6. Diferentes tipos de complejo lineal.	96
4.7. La triada de esferas S_1, S_2, S_3 determinan una única congruencia lineal. En este caso se muestra cuando la triada se intersecta en dos puntos que son los puntos límites (se muestra uno de ellos en negro) del sistema coaxial, del cual son ortogonales con respecto a cualquier esfera de ese sistema.	98
5.1. El caso donde un sistema coaxial de esferas (arriba) no se intersecta y su inverso (abajo). La esfera de inversión aparece en forma de red (en blanco) en ambos casos.	111
5.2. Dadas tres esferas no concéntricas y de radios desiguales (en color verde claro), y al obtener sus esferas de similitud (azul claro en el dibujo), se consigue un cuadrilátero completo, cuyos lados son las líneas (en color rojo) que contienen una tercia de centros de similitud (en amarillo) de parejas de esferas distintas cada vez. Los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero (en negro tanto los puntos medios como las diagonales) son los centros de las esferas de similitud de las tres esferas dadas y son colineales en la línea de Newton-Gauss (en azul).	123
5.3. Dos esferas que conservan el ángulo de intersección con dos planos son homotéticas entre sí.	128

- 5.4. Una esfera (en naranja) que intersecta a otras dos (en verde) en ángulos iguales intersecta a éstas en puntos antihomólogos, los cuales son mutuamente inversos respecto a la esfera de antisimilitud externa (en forma de red color negro). 130
- 5.5. Una esfera (en naranja) que intersecta a otras dos (en verde) en ángulos complementarios intersecta a éstas en puntos antihomólogos, los cuales son mutuamente inversos respecto a la esfera de antisimilitud interna (en forma de red color negro). 132

Parte I

Introducción

Tal y como lo dice el nombre de este trabajo, a lo largo de esta tesis se abordarán principalmente dos temas que son de importancia e interés en el estudio de la geometría sintética: *Inversión en el Espacio y Esferas Coaxiales*. Estos temas suelen ser estudiados en los cursos de geometría moderna, pero solo se trabajan sus casos en el plano, es decir, inversión en el plano y circunferencias coaxiales.

Al tratar el tema de la transformación de inversión, se verá una serie de teoremas que muestran el comportamiento de ésta, así como el estudio de sus propiedades más significativas, como el de ser una transformación conforme. Ésta transformación se estudiará en el espacio euclidiano tridimensional, haciendo uso en algunos casos de las analogías que se presentan al estudiar el caso plano, además de aprovechar para explorar las posibilidades geométricas de esta transformación que son propias del espacio tridimensional.

En el tema de Esferas Coaxiales, se dará un tratamiento similar al usado en el de Inversión en el Espacio. Se verá el caso tridimensional de las circunferencias coaxiales. Se estudiarán también una serie de teoremas afines con el argumento análogo del plano pero usado para el espacio euclidiano de tres dimensiones. De igual manera se analizarán nuevas posibilidades que ofrece la definición de potencia de un punto con respecto a una esfera y se mostrará a un nuevo conjunto de esferas ortogonales a las esferas de un sistema coaxial distinto al del caso que se presenta en el espacio bidimensional, así como otras propiedades interesantes relacionadas con los conceptos que se irán definiendo eventualmente.

Esta tesis se divide en cinco capítulos, de los cuales los dos primeros servirán de plataforma teórica. El primero sirve como introducción a los conceptos necesarios para el resto del trabajo, mientras que en el segundo se revisa el tema de Homotecia con un enfoque tridimensional. Los dos siguientes cubren los temas de Inversión y Esferas Coaxiales respectivamente, y el capítulo restante servirá no solo de conclusión, sino como el lugar donde se analizarán en conjunto a todos los conceptos previos, obteniendo así interesantes resultados geométricos que visualmente resultan maravillosos. Al final de cada capítulo se puede hallar una serie de ejercicios que pueden ser de utilidad para el lector.

Se incluyen de igual manera, junto con los teoremas, ilustraciones que facili-

tarán la visualización del contexto geométrico en el que se desarrollan tanto las demostraciones como los ejemplos particulares, mostrando así el espíritu de la geometría sintética con la que se trabajará a lo largo de esta tesis. Estas ilustraciones son hechas con el software gratuito y de código abierto conocido como *Blender*. Como un apéndice a este trabajo, se añadirá un script hecho con *Python* y aplicable a *Blender*, el cual demuestra el comportamiento de la inversión en tres dimensiones dada una figura cualquiera.

Parte II

Desarrollo

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar algunos conceptos y teoremas fundamentales para el espacio tridimensional Euclidiano. Estos conceptos son fundamentales en el sentido de que constituyen la base para la demostración de teoremas que se presentarán posteriormente.

1.1. Potencia de un punto

Fijemos nuestra atención por un momento en el plano Euclidiano. Si P es un punto cualquiera en el plano y se fija una circunferencia C , entonces para cualquier línea que pase por P y que corte a la circunferencia en dos puntos A y B , se cumplirá que el producto de los segmentos PA y PB es constante, independientemente de la posición de la línea. El valor de dicha constante se denomina la potencia de P respecto a la circunferencia C .

El término potencia para referirse a este concepto geométrico fue introducida por Jakob Steiner en el artículo de 1826 titulado *Einige geometrische Betrachtungen* (Unas cuantas observaciones geométricas), aunque el teorema al que hace referencia se encuentra ya en *Los Elementos de Euclides*([1]).

La proposición que dio lugar a la definición de potencia dice que si dos rectas que pasan por un punto P , cortan a una circunferencia fija en los puntos A , B y

C , D respectivamente, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. La demostración se omite aquí, pero se puede hallar en [7, p. 190]. Dada esta proposición, podemos definir la potencia de un punto como sigue.

Definición 1.1. La *potencia de un punto* con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

Lo anterior permite darle valor a la potencia de un punto P arbitrario con respecto a una circunferencia dada. Si el radio de dicha circunferencia es r y O su centro, entonces su potencia es igual a $\overline{PO}^2 - r^2$. Dicho valor puede ser negativo, cero o positivo de acuerdo a si el punto está dentro, en, o fuera de la circunferencia. De igual forma, la demostración de este hecho puede ser encontrada en [7, p. 191].

En el caso en el que tenemos un punto P fuera de la circunferencia de centro O y radio r , si se traza la tangente a la circunferencia desde P y T es el punto de tangencia, entonces el valor de la potencia de P respecto de la circunferencia es $\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PT}^2$. Esto último resulta como consecuencia directa de que el triángulo PTO es rectángulo.

Es conveniente dar una notación específica para referirnos a la potencia de un punto, ya que en ocasiones es necesario calcularla con respecto a más de una circunferencia, o como sucede en capítulos posteriores, con más de una esfera. Por esta razón, dado un punto P y una circunferencia C , de ahora en adelante escribiremos a la potencia de P respecto a C como $Pot(P, C)$.

El teorema que abordaremos en seguida da muestra de la practicidad de esta notación al utilizarla en la demostración del mismo.

Teorema 1.1. *El lugar geométrico de un punto, cuya diferencia de potencias respecto a dos circunferencias no concéntricas es constante, es una recta perpendicular a la línea de los centros.*

Demostración. Consideremos dos circunferencias no concéntricas C_1 y C_2 , cuyos centros son O_1 y O_2 y cuyos radios son r_1 y r_2 respectivamente. Sea P un punto que cumple que $Pot(P, C_1) - Pot(P, C_2) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$, es una constante.

Por P dibujemos una recta perpendicular a la línea de los centros O_1O_2 (Fig. 1.1) y llamemos N a la intersección de éstas. Entonces

$$\begin{aligned} Pot(P, C_1) - Pot(P, C_2) = k &\Rightarrow \overline{O_1P}^2 - r_1^2 - (\overline{O_2P}^2 - r_2^2) = k \Rightarrow \\ &\overline{O_1P}^2 - \overline{O_2P}^2 = k + r_1^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

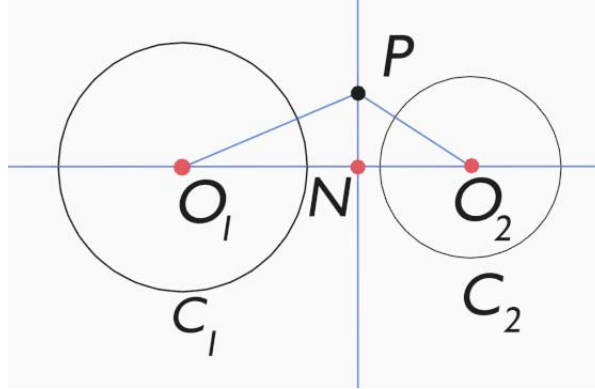


Figura 1.1

Al trazar los segmentos PO_1 y PO_2 formamos los triángulos rectángulos ΔPO_1N y ΔPO_2N . Entonces, usando el teorema de Pitágoras en la parte izquierda de la última igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \overline{PN}^2 + \overline{O_1N}^2 - (\overline{PN}^2 + \overline{NO_2}^2) &= k + r_1^2 - r_2^2 \Rightarrow \overline{O_1N}^2 - \overline{NO_2}^2 = k + r_1^2 - r_2^2 \\ \Rightarrow (O_1N - NO_2) \cdot (O_1N + NO_2) &= k + r_1^2 - r_2^2 \Rightarrow O_1N - NO_2 = \frac{k + r_1^2 - r_2^2}{O_1O_2}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que hay un punto M en O_1O_2 , tal que satisface las mismas condiciones que N . Entonces, en particular, N cumple con la igualdad de arriba, es decir:

$$O_1N - NO_2 = O_1M - MO_2;$$

a ésta última igualdad la podemos ver de la siguiente forma:

$$O_1M + MN - NO_2 = O_1M - (MN + NO_2) \Rightarrow$$

$$O_1M + MN - NO_2 = O_1M - MN - NO_2 \Rightarrow MN = -MN,$$

y entonces $MN = 0$; es decir, M coincide con N .

Por tanto todo punto cuya diferencia de potencias con respecto a C_1 y C_2 es igual a k , está en la perpendicular a la línea de los centros que pasa por P . ■

Es tiempo ahora de llevar este concepto al espacio, donde desarrollaremos el resto de nuestro estudio, y para ello tenemos que definir la potencia de un punto, ya no con respecto a una circunferencia, sino con respecto a una esfera. Para ello demostraremos el teorema siguiente que muestra con claridad que el concepto de potencia se puede extender de manera natural a una dimensión superior.

Teorema 1.2. *Si dos planos que pasan por un punto P , cortan a una esfera fija en dos circunferencias C_1 y C_2 respectivamente, entonces $Pot(P, C_1) = Pot(P, C_2)$.*

Demostración. Sea P un punto y S una esfera de centro O . Por P pasemos un plano Π_1 que intersecte a la esfera en una circunferencia C_1 . Luego, hacemos pasar otro plano Π' por P y por O , de tal forma que éste intersecte a C_1 . Sea $l = \Pi_1 \cap \Pi'$, y sea $\{A, B\} = C_1 \cap l$ (Fig. 1.2). La línea l contiene así a los puntos A , B y P .

La potencia de P respecto a C_1 , según vimos anteriormente, es igual a $PA \cdot PB$. Si $C' = \Pi' \cap S$, entonces $\{A, B\} \in C'$, por lo que $PA \cdot PB$ también es el valor de la potencia de P respecto a C' , la cual es una circunferencia de diámetro mayor de la esfera. Entonces ésta circunferencia tiene el mismo radio que el de la esfera, lo que nos lleva a $Pot(P, C_1) = Pot(P, C') = PA \cdot PB = \overline{PO}^2 - r^2$. De manera análoga y siguiendo un procedimiento similar al descrito, si $C_2 = \Pi_2 \cap S$, usando

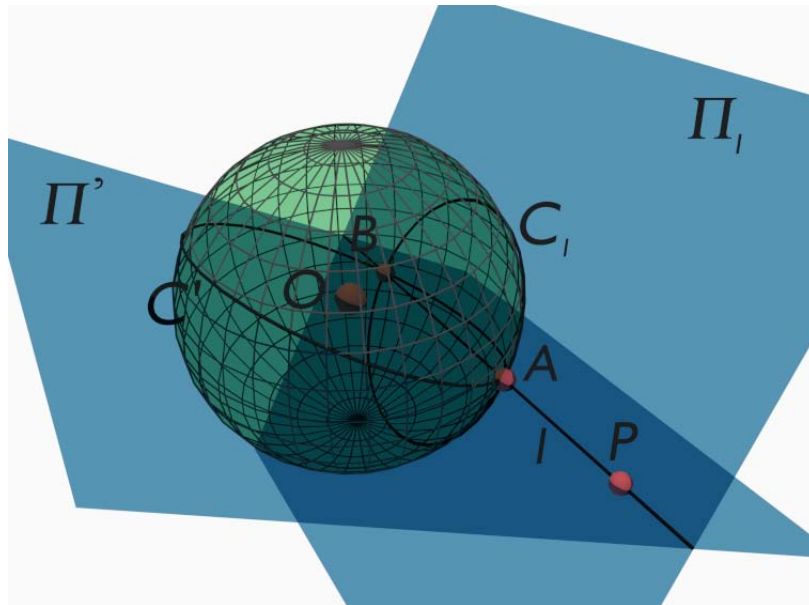


Figura 1.2: La potencia de un punto P respecto a una esfera es igual a su potencia con respecto a C_1 , y ésta a su vez es la misma que la de P respecto a una circunferencia de diámetro máximo de la esfera, por lo que es la misma para cualquier circunferencia coplanar con P .

un plano auxiliar que intersekte a C_2 y que pase por O , llegaremos a que la potencia de P respecto a C_2 será igual a $\overline{PO}^2 - r^2$. Por tanto $Pot(P, C_1) = Pot(P, C_2)$ ■

Llegamos de esta manera a una definición consistente de potencia de un punto con respecto a una esfera.

Definición 1.2. La *potencia de un punto* con respecto a una esfera, es su potencia con respecto a cualquier circunferencia de la esfera coplanar con él.

Obsérvese que, gracias a la definición anterior, podemos hacer uso de $\overline{PO}^2 - r^2$ como valor predeterminado de la potencia de un punto P , dados el radio r y el centro O de una esfera.

En los teoremas de los capítulos siguientes, cada vez que hablemos de la potencia de un punto P respecto a una esfera S , lo denotaremos por $Pot(P, S)$, de

manera análoga a como lo hicimos en el caso plano con circunferencias.

1.2. Ángulos en el espacio

Hemos ya comenzado a trabajar en tres dimensiones, y siguiendo esta línea de pensamiento lo que nos ocupa ahora es poder determinar lo que la palabra “ángulo” significa en un contexto como este, ya que podemos hallar intersecciones entre figuras como planos y/o esferas, lo que nuestro conocimiento en geometría plana fallaría en explicar con precisión, aunque servirá para dar definiciones apropiadas al respecto.

Definición 1.3. Si dos semiplanos no coplanares están delimitados por la misma línea, la región del espacio que incluye a todos los segmentos cuyos extremos están uno en cada uno de estos semiplanos se le llama *diedro*, o *ángulo diedro*.

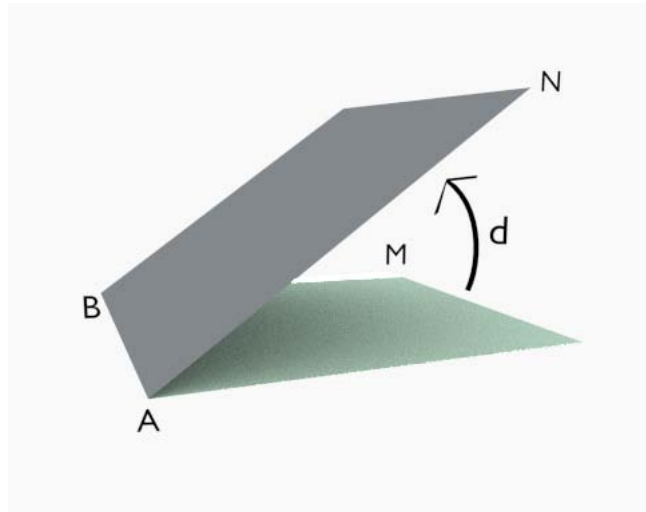
Se puede también interpretar esta definición como la abertura o inclinación de dos planos que se cortan.

En la figura 1.3, los planos AM y BN son las *caras* del diedro que lo forman. Su intersección AB se llama *arista* del diedro.

Un diedro se nombra por letras puestas sobre la arista, o sobre la arista y las caras, o por medio de una letra escrita dentro del diedro. Así el ángulo aquí mostrado puede leerse como AB , $M-AB-N$, o d .

La magnitud de un diedro depende de la rotación necesaria para llevar una de las caras, haciéndola girar sobre la arista, a la posición de la otra. Sin embargo para determinar su valor necesitamos de una definición más.

Definición 1.4. El ángulo formado por dos rectas trazadas por un mismo punto de la arista de un diedro, una en cada cara del diedro, y ambas perpendiculares a la arista, se llama *ángulo plano del diedro*.

Figura 1.3: Ángulo diedro d .

Para obtener entonces el valor de la magnitud de un ángulo diedro se hace uso del ángulo plano del diedro. Basta con tomar la magnitud del menor ángulo que forman las dos semirectas del ángulo plano del diedro.

Pensemos ahora en la generalización natural de un ángulo diedro, es decir en un ángulo poliedro.

Definición 1.5. Llámese *ángulo poliedro* la abertura o región del espacio limitado por tres o más planos que concurren en un punto.

Al punto común V se le llama vértice del ángulo; las intersecciones de cada par de planos se llaman *aristas*. Los ángulos formados por pares de planos consecutivos se llaman *diedros* del ángulo, y los formados por las aristas se llaman *caras* del ángulo. Se observará que el término *caras* se aplica también a los planos de un diedro.

Las caras y los diedros de un ángulo poliedro son las *partes* del ángulo.

Definición 1.6. Llámese *ángulo triedro*, o *triedro* simplemente, al ángulo po-

liedro formado por tres planos.

Un ángulo poliedro se nombra por medio de una letra escrita en el vértice, o por medio de ésta y otras escritas sobre las aristas, aunque esto solo sirve para etiquetar al ángulo poliedro, dado que los planos que lo componen son infinitos. El triedro de la figura 1.4 puede llamarse ángulo V o ángulo $V-ABC$.

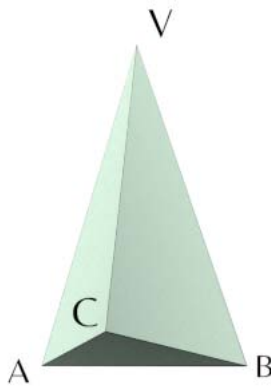


Figura 1.4: Ángulo triedro V o $V-ABC$.

Existen muchos más conceptos relacionados con los ángulos poliedros en general, pero hay uno en particular que nos será de gran ayuda para demostrar que la transformación de inversión preserva los ángulos en que las figuras en el espacio se intersectan. Para ello necesitamos determinar cuando son iguales dos ángulos.

Definición 1.7. Se dice que dos ángulos poliedros son *iguales* cuando sus caras y diedros correspondientes son iguales, además de que éstos están semejantemente dispuestos.

Definición 1.8. Se dice que dos ángulos poliedros son *simétricos* si tienen todas sus partes respectivamente iguales (caras y diedros) pero dispuestas las unas en el orden inverso de las otras, o bien, que existe un plano tal que las partes respectivamente iguales de ambos ángulos son simétricas con respecto de éste.

Es fácil entender, dadas estas definiciones, que dos ángulos poliedros son iguales cuando podemos hacer coincidir cada una de las partes que lo componen y ver que son exactamente iguales, desde sus ángulos diedros hasta sus caras. Algo similar ocurre cuando son simétricos, salvo el hecho de que la disposición de las partes que los componen no corresponden el uno al otro directamente; una forma de entender esto es por medio de un par de guantes, ya que a los dos los componen las mismas partes, salvo que éstas están dispuestas en orden inverso las unas con respecto de las otras.

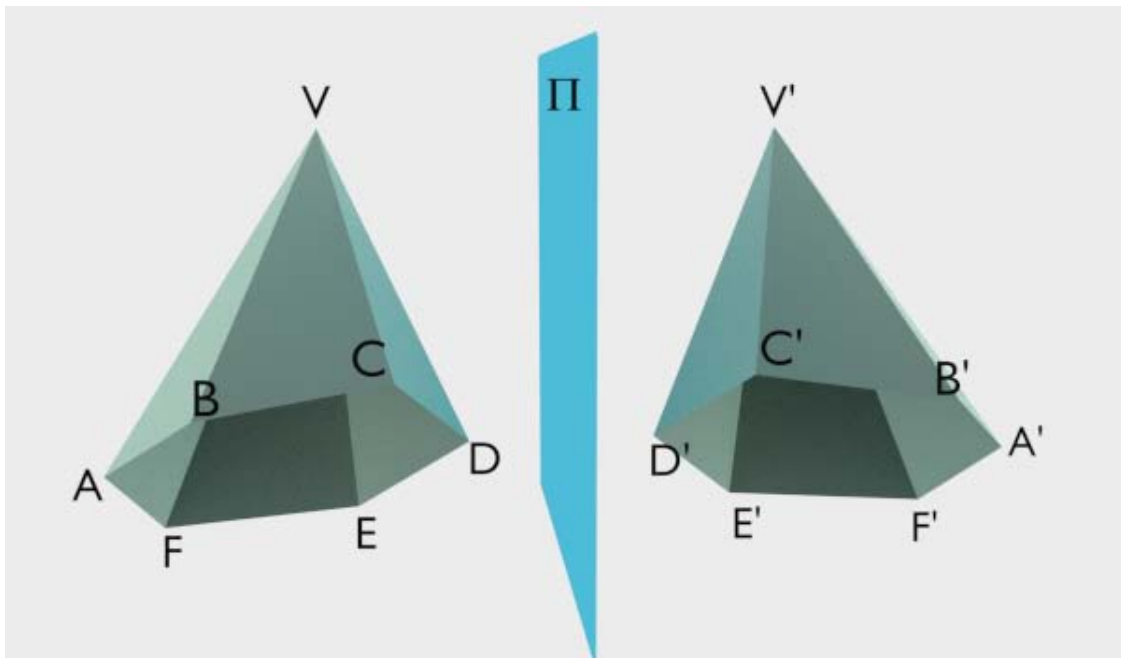


Figura 1.5: Ángulo poliedros simétricos. Se puede apreciar aquí que el plano Π es el plano de simetría para los ángulos poliedros V y V' , los cuales tienen sus partes respectivamente iguales, aunque el orden de éstas no se respeta. Por ejemplo, el ángulo diedro VD es el mismo en magnitud que el ángulo diedro $V'D'$, pero no en sentido.

A partir de estas definiciones es fácil comprender que, en particular, dos triedros son iguales o simétricos si tienen las caras respectivamente iguales. La demostración de este hecho puede ser consultada en [2, pp. 312-313].

Haciendo uso de este hecho, podemos demostrar el teorema siguiente que nos

será de gran utilidad en el capítulo 3.

Teorema 1.3. *Dos triedros son simétricos si dos caras y el diedro incluido en éstas son iguales a sus correspondientes partes en el otro, pero colocadas en sentidos opuestos.*

Demostración. Sean V y V' dos triedros en que las caras AVB y CVA son respectivamente iguales a las caras $B'V'A'$ y $A'V'C'$, además de que la magnitud del diedro que éstas encierran son iguales en valor absoluto, es decir si la magnitud de VA es α y la de $V'A'$ es α' , entonces $|\alpha| = |\alpha'|$.

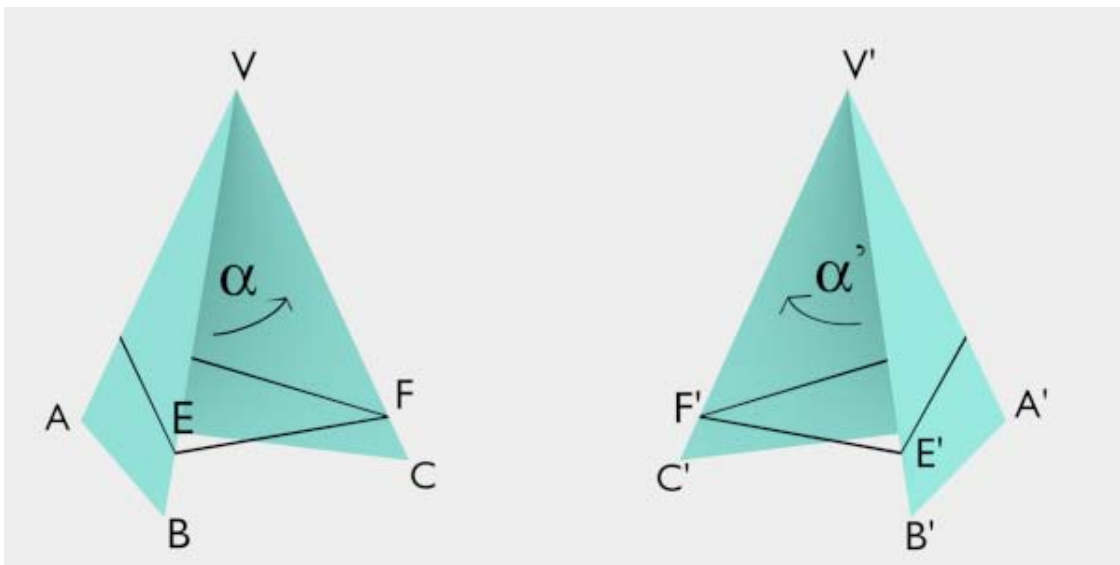


Figura 1.6: Ángulo triedros simétricos.

Se demostrará que V y V' son simétricos y para ello se demostrará primero que la cara BVC es igual a la cara $C'V'B'$.

Tracemos desde A dos perpendiculares a la arista VA sobre las caras AVB y CVA y llamemoslas AE y AF respectivamente, entonces $\angle EAF$ es el ángulo plano del diedro α . Análogamente el ángulo $\angle F'A'E'$ es el ángulo plano del diedro α' .

Como $|\alpha| = |\alpha'| \Rightarrow |\angle EAF| = |\angle F'A'E'|$ por ser el valor de la magnitud

del ángulo diedro, y ya que las dos caras del triedro V son iguales a las otras dos caras del triedro V' entonces

$$AE = A'E' \quad \text{y} \quad AF = A'F'.$$

Por tanto por el criterio de semejanza de triángulos *lado-ángulo-lado* los triángulos $\triangle AEF \cong \triangle A'E'F'$. Esto último implica que $\triangle FVE \cong \triangle F'V'E'$ pues $EF = E'F'$. Con esto se tiene que las caras de los dos triedros son respectivamente iguales pero están dispuestos en sentido contrario, lo cual indica entonces que V y V' son simétricos. ■

1.3. Un poco de geometría diferencial

A continuación se darán un par de definiciones referentes al campo de la geometría diferencial de superficies. Solo se hará uso de estas definiciones de manera práctica para nuestros fines, ya que ahondar en un tema como este nos alejaría de nuestro enfoque original.

Para iniciar, convendremos en el hecho de que toda superficie de la que hablemos será una superficie regular ([3, p. 52]) para así poder asegurar la existencia de su *plano tangente* en un punto de ésta, elemento que a continuación se define.

Definición 1.9. Dada una superficie S , para cada punto P de S , el conjunto de vectores tangentes a las curvas cuyos puntos pertenecen a S y que pasan por P , constituyen un plano llamado el *plano tangente a la superficie en P* y se denota por $T_P(S)$.

En realidad, se demuestra que $T_P(S)$ coincide con ser un subespacio vectorial de dimensión dos en \mathbb{R}^3 anclado en el punto P ([3, pp. 83-84]), por lo que podemos decir que se trata realmente de un plano. Gracias a esta doble interpretación del plano tangente a S en P , podemos hacer uso de las herramientas que nos ofrece el álgebra lineal. De esta manera, si en particular consideramos dos curvas

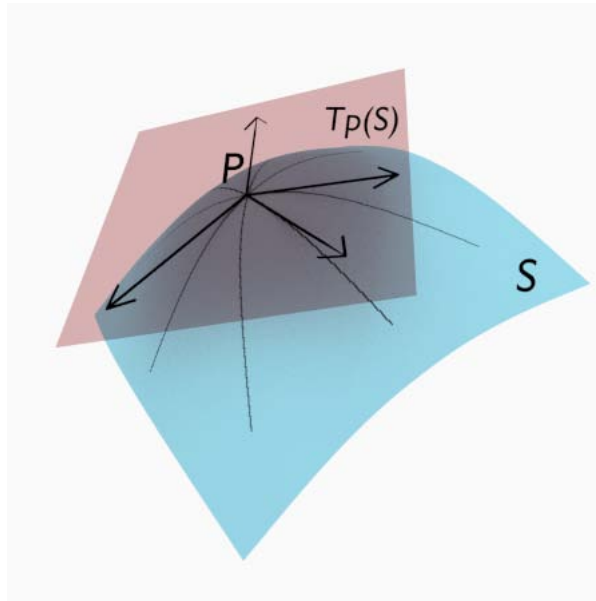


Figura 1.7: El plano tangente a una superficie en un punto.

en S que pasan por P como en la definición, y cuyos vectores tangentes en P son linealmente independientes, entonces estos dos vectores pueden generar a $T_P(S)$.

Definición 1.10. Dado un punto P en una superficie S , hay dos vectores unitarios de \mathbb{R}^3 que son normales al plano tangente $T_P(S)$; cada uno de ellos es llamado *vector normal unitario* en P .

Dado que el tratamiento que usaremos más adelante es estrictamente sintético, haremos uso de rectas en vez de vectores, por lo que la definición siguiente será con la que trabajaremos.

Definición 1.11. La línea recta que pasa por P y que contiene un vector normal unitario en P es llamada la *línea normal* en P .

Nos queda por definir un último concepto que será crucial al hablar de ángulos de intersección entre esferas, ya que hasta el momento no hemos dado ni siquiera con una noción intuitiva de este aspecto. Pensemos entonces, en primer

lugar, en dos superficies regulares cualesquiera que se intersectan en el espacio. Puesto que la intersección entre superficies tiene un comportamiento similar al de la intersección entre curvas regulares en el plano, salvo por el hecho de que las superficies se pueden intersectar en un conjunto de puntos en vez de solo en uno, tendremos entonces que definir el ángulo de intersección entre superficies de manera puntual y análogamente a como se hace para curvas.

Definición 1.12. El ángulo en que dos superficies se intersectan en un punto P de su intersección, es el ángulo formado por los planos tangentes en P o equivalentemente, el formado por sus líneas normales en P .

Lo anterior se refiere a tomar el diedro más pequeño de los ángulos diedros que se forman al intersectar los planos, o en su defecto, tomar el ángulo agudo de los cuatro ángulos que forman las dos líneas normales al intersectarse.

Dejemos de lado a las superficies regulares y fijemos nuestra atención a partir de ahora en las esferas y en el ángulo de intersección de éstas.

Pensemos en la intersección en el espacio de dos esferas de radio finito y busquemos el ángulo en que se intersectan. Su intersección nos dará un conjunto de puntos que es, para ser precisos, una circunferencia común a las dos. Tomamos un punto de esa circunferencia y obtenemos los planos tangentes a cada esfera en ese punto, así como sus líneas normales (Fig. 1.8).

Cabe hacer una observación aquí antes de obtener el ángulo de intersección en este punto. Al igual que el caso bidimensional, en donde ocurre que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene uno de sus extremos en el punto de tangencia, podemos esperar un comportamiento similar en el caso tridimensional.

Teorema 1.4. *Un plano tangente a una esfera en un punto es perpendicular al radio que tiene uno de sus extremos en el punto de tangencia.*

Demostración. Tomemos un punto P en la esfera S , y un plano Π tal que sea

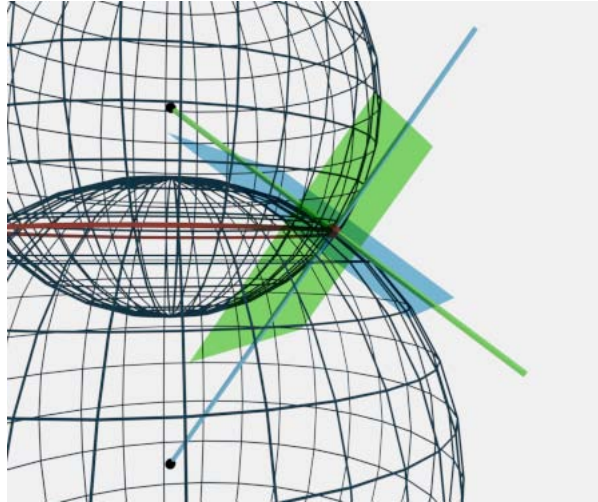


Figura 1.8: El ángulo de intersección de dos esferas se puede calcular a partir del ángulo formado por las líneas normales en un punto o el que forman los planos tangentes en un punto. En la figura se muestran dos planos tangentes y sus líneas normales (respectivamente del mismo color).

plano tangente a S por P .

Pasemos un plano Π' cualquiera por P y por O , donde O es el centro de S , y sean $C = S \cap \Pi'$ y $l = \Pi \cap \Pi'$.

Como en Π' tenemos una circunferencia y l es una recta tangente a C (ya que Π es tangente a S), entonces el radio OP es perpendicular a l . Luego, al hacer girar a Π' con OP como eje de rotación, tenemos que l genera a Π y C genera a S , de donde el radio OP de la esfera S es perpendicular a Π como se quería demostrar. ■

El teorema anterior indica que la línea normal a un plano tangente por un punto en la esfera, pasará por el centro de la misma.

De acuerdo a nuestra definición de ángulo entre dos superficies en un punto, basta con obtener el ángulo formado por las líneas normales en ese punto para obtener el ángulo entre las superficies. En nuestro caso de intersección entre esferas tenemos la siguiente definición.

Definición 1.13. Si dos esferas se intersectan (en una circunferencia), éstas forman un ángulo en cada punto de intersección, que será el ángulo que forman los planos tangentes a las esferas en el punto en consideración.

Teorema 1.5. *El ángulo entre dos esferas es el mismo en cada punto de intersección de ellas.*

Demostración. Sean dos esferas S_1 y S_2 , de centros O_1 y O_2 , que se intersectan en una circunferencia C , y sea $P \in C$. Sean Π_1 y Π_2 los planos tangentes en P a S_1 y S_2 respectivamente, y sean l_1 y l_2 las líneas normales en P a Π_1 y Π_2 .

Por el teorema 1.4 sabemos que l_1 y l_2 pasan por los centros de su esfera correspondiente, por lo que al tomar un plano Π' que pase por éstas líneas normales, obtendremos que $\{O_1, O_2\} \in \Pi'$.

Llamemos Π al plano que contiene a C , y l a la recta que resulta de la intersección de Π con Π' . Como Π' forma circunferencias al intersectar a las esferas, tenemos que $l \perp O_1O_2$. Debido a la simetría de la esfera, sabemos que si giramos el plano Π' con eje de rotación la línea de los centros O_1O_2 , entonces l seguirá siendo perpendicular a esa línea; más aún, al girar el plano Π' , l genera a Π , dando como resultado $\Pi \perp \Pi'$.

Lo anterior indica que, dado que los centros y los radios de las esferas son constantes, entonces las líneas normales se intersectan en el mismo ángulo a largo de toda la circunferencia C al hacer girar el plano Π' en torno de la línea de los centros. ■

Así, al hablar del ángulo de intersección entre dos esferas, en realidad estamos hablando de un solo ángulo: el ángulo que hallamos en cada punto de la intersección de las dos esferas.

1.4. Esferas Ortogonales

Hablaremos aquí del caso particular y de enorme importancia, de la intersección entre dos esferas cuando éstas lo hacen de manera ortogonal.

Definición 1.14. Dos esferas son *ortogonales* si se intersectan en un ángulo recto. Denotaremos como $S_1 \perp S_2$ si S_1 es ortogonal a S_2 .

Teorema 1.6. *Dos esferas son ortogonales si y solo si los radios trazados a un punto de su intersección son perpendiculares.*

Demostración. Sean dos esferas S_1 y S_2 y A un punto de $S_1 \cap S_2$. Sean Π_1 y Π_2 los planos tangentes a S_1 y S_2 en el punto A respectivamente.

Si los centros de las esferas son O_1 y O_2 , entonces O_1A y O_2A son radios de S_1 y S_2 respectivamente. Por el teorema 1.4 sabemos que $O_1A \perp \Pi_1$ y $O_2A \perp \Pi_2$, por lo que las líneas O_1A y O_2A son líneas normales a sus planos correspondientes por A . Por otra parte, como $S_1 \perp S_2$ entonces $\Pi_1 \perp \Pi_2$. Esto quiere decir que las líneas normales a Π_1 y a Π_2 por A son perpendiculares entre sí, de manera que $O_1A \perp O_2A$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $O_1A \perp O_2A$. Sea Π_1 el plano tangente a S_1 en A y Π_2 el plano tangente a S_2 en A , entonces $O_1A \perp \Pi_1$ es línea normal a Π_1 . Análogamente O_2A es línea normal a Π_2 . Entonces el ángulo entre los planos Π_1 y Π_2 es recto, ya que el ángulo entre las líneas normales es recto, por lo que $S_1 \perp S_2$. ■

Haciendo uso de la notación anterior, podemos observar un hecho que resulta inmediato a la vista como consecuencia directa de la ortogonalidad entre esferas. Fijemos una vez más nuestra atención en el punto A de la intersección de dos esferas ortogonales S_1 y S_2 . Como $S_1 \perp S_2$, entonces sus planos tangentes en A son perpendiculares, o mejor dicho $\Pi_1 \perp \Pi_2$, por lo que toda línea perpendicular

a Π_2 será paralela a Π_1 , en particular O_2A ; como $A \in \Pi_1$, entonces O_2A no sólo es paralelo a Π_1 , sino que está en Π_1 . Análogamente AO_1 está en Π_2 .

Pensemos ahora en la situación contraria, es decir, que uno de los radios de dos esferas que se intersectan pertenece al plano tangente de la otra. Por ejemplo, supongamos sin pérdida de generalidad que O_1A está en Π_2 . Sabemos que $O_2A \perp \Pi_2$ y como $O_1A \in \Pi_2$, entonces $O_2A \perp O_1A$, lo que indica por el teorema 1.6 que $S_1 \perp S_2$.

Acabamos de demostrar el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Dos esferas son ortogonales si y solo si en uno de los puntos de su intersección, el plano tangente a una contiene al radio de la otra, uno de cuyos extremos es ese punto.*

Los resultados anteriores nos muestran que a lo largo del círculo que resulta de la intersección de dos esferas, se obtiene el mismo ángulo de intersección para éstas (teorema 1.5), sin embargo, esta no es la única propiedad de importancia que podemos obtener de dicha circunferencia.

Supongamos que dos esferas S_1 y S_2 de radio finito y no concéntricas se intersectan ortogonalmente, y llamemos C a la circunferencia que resulta de esa intersección. Si los centros de las esferas son O_1 y O_2 respectivamente, cualquier línea l que pasa por O_2 y algún punto de C es tangente a S_1 . Esto sucede ya que el plano tangente a S_1 en ese punto contiene un radio de S_2 por ser éstas ortogonales (corolario 1.1), por lo que la línea l que contiene a ese radio también es tangente a S_1 en ese punto. Por tanto, el haz de rectas con centro en O_2 y que pasan por los puntos de C forman un *cono tangente* a la esfera S_1 . El siguiente teorema hace referencia a este cono.

Teorema 1.7. *Las tangentes a una esfera trazadas desde un punto exterior a ella están en un cono de revolución y cumplen:*

i) Los segmentos de las tangentes que van del punto exterior a su punto de tangencia con la esfera tienen la misma longitud.

ii) Los puntos de tangencia están en una circunferencia de la esfera.

iii) Los planos tangentes al cono son también tangentes a la esfera.

Demostración. Sea S una esfera de centro O y P un punto exterior a ella. Trazamos una tangente a S desde P y sea T su punto de tangencia con la esfera.

Consideremos la línea OP y la semicircunferencia que queda por arriba de esta línea que es coplanar con los puntos O, P y T , y a continuación giramos en torno de OP como eje. De esta manera, la semicircunferencia genera a la esfera S , mientras que el segmento PT genera al cono tangente a esta esfera, cuyos puntos de tangencia se encuentran a lo largo de la circunferencia generada por el punto T . Por último un plano tangente al cono también será tangente a la esfera, ya que por construcción PT pertenece al plano tangente a S por T y es perpendicular al radio OT . ■

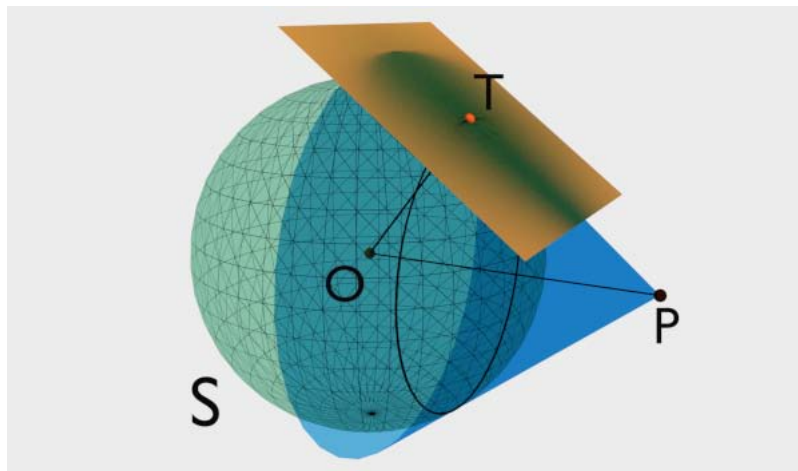


Figura 1.9: Un cono de revolución tangente a la esfera.

Definición 1.15. El cono de revolución que se forma al trazar tangentes a una esfera desde un punto externo a ella, se le conoce como *cono circunscrito* a la esfera.

Teorema 1.8. Dada una esfera, se puede obtener un cono circunscrito a ella

como cono de revolución a lo largo de una circunferencia que no tenga diámetro máximo.

Demostración. Basta con tomar una esfera S de centro O y una circunferencia $C \in S$ que no sea de diámetro máximo. Tomamos un punto $P \in C$ y obtenemos Π , el plano tangente a S en P . Sea Q la intersección de Π con el diámetro extendido de S que es perpendicular al plano que contiene a C . Entonces al hacer girar QP con QO como eje de rotación, Q es por construcción el vértice de un cono de revolución que está circunscrito a la esfera a lo largo de C . ■

Como una observación final respecto al cono circunscrito a una esfera, si consideramos que éste sea tangente a la esfera a lo largo de una circunferencia de diámetro máximo, entonces el cono se degenera en un cilindro que sigue cumpliendo las propiedades del teorema 1.7, salvo que ahora todas las tangentes a la esfera serán paralelas a una dirección, la cual es la perpendicular al plano que contiene a la circunferencia en cuestión.

Para terminar esta sección, mencionaremos un caso especial de intersección. Recordando el caso plano, sabemos que existen situaciones donde había que lidiar con intersecciones entre rectas, entre una circunferencia y una recta, o entre circunferencias. Estos casos y otros más se presentan en el espacio gracias a que contamos con una dimensión extra. Una pregunta natural surge en virtud del contexto de objetos geométricos que se intersectan de manera ortogonal, la cual es: ¿Que significa que una circunferencia y una esfera sean ortogonales?

Definición 1.16. Una circunferencia y una esfera se dice que son *ortogonales*, si el plano que contiene a la circunferencia pasa por el centro de la esfera, y la circunferencia es ortogonal a la circunferencia de la esfera coplanar con ella.

1.5. El ángulo de intersección entre dos esferas

Antes de terminar este capítulo, y dada la relevancia del asunto, mencionaremos a continuación la manera en que puede ser calculado de manera analítica el ángulo de la intersección entre dos esferas.

Esto se logra fácilmente haciendo uso de la ley de los cosenos. Tomemos dos esferas S_1 y S_2 que se intersectan y de radios r_1 y r_2 , cuyos centros son O_1 y O_2 respectivamente. Basta con tomar el triángulo cuyos vértices son los centros de las esferas y alguno de los puntos en la circunferencia que resulta de la intersección entre ellas. Entonces aplicando la ley de los cosenos, tenemos que el ángulo θ que forman los radios de las esferas, que fungen como líneas normales, es el ángulo de la intersección de S_1 con S_2 , y cumple que:

$$\cos \theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \overline{O_1O_2}^2}{2(r_1 \cdot r_2)} \quad (1.1)$$

Teorema 1.9. *Si r_1 y r_2 son los radios de dos esferas y O_1O_2 la longitud del segmento que une sus centros, el ángulo θ de intersección entre las dos esferas satisface la ecuación (1.1).*

Otro caso de intersección importante que conviene resaltar es el de una esfera con otra de radio infinito o plano (dependiendo de como se quiera interpretar). El resultado siguiente nos lo dice con precisión.

Teorema 1.10. *Si p es la distancia que existe al plano desde el centro de una esfera cuyo radio es r (siendo $p < r$), el ángulo de intersección θ entre el plano y la esfera satisface la relación*

$$p = r \cos(\theta) \quad (1.2)$$

Demostración. Sean S y Π la esfera y el plano que se intersectan en el espacio. Tomemos un punto P en la intersección de éstas figuras y tracemos un radio desde

el centro O de la esfera a éste punto. Sea Π_P el plano tangente a la esfera en el punto P . Por la definición 1.12 el ángulo θ entre el plano Π y Π_P es el ángulo de intersección entre la esfera y el plano.

Para obtener θ tracemos la altura desde O al plano Π y llamemos H a este punto. Entonces formamos el triángulo rectángulo OHP y extendemos el radio OP , que sirve como recta normal del plano Π_P (Fig. 1.10).

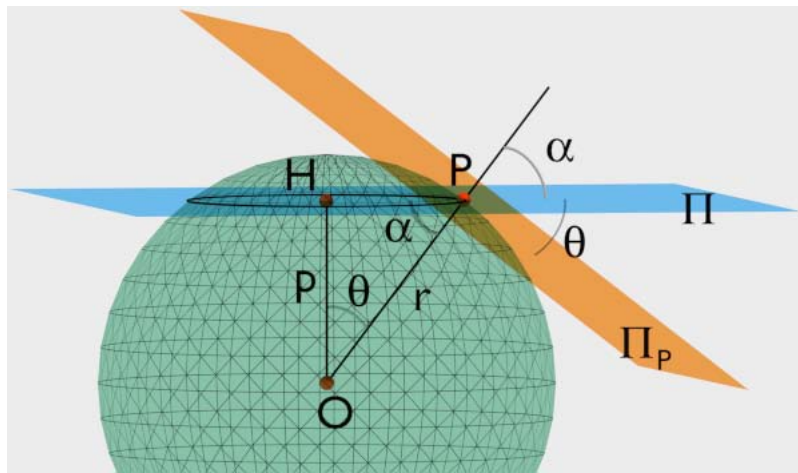


Figura 1.10: El ángulo de intersección entre un plano y una esfera.

Si consideramos el plano que contiene al triángulo OHP , entonces podemos hallar el ángulo plano que hay entre OP y el plano Π al que llamaremos α . Puesto que $OP \perp \Pi_P$, entonces α y θ son complementarios. Luego, $\angle HPO = \alpha$ por opuesto por el vértice, haciendo $\angle POH = \theta$. De aquí podemos obtener entonces que $\cos(\theta) = p/r$, con lo que obtenemos la igualdad deseada. ■

Una vez definidos todos éstos conceptos, estamos preparados para dar comienzo al desarrollo de los temas principales que conciernen a este trabajo.

1.6. Ejercicios

1. Demuestre que el lugar geométrico de un punto que tiene la misma potencia con respecto a dos circunferencias no concéntricas, es una recta perpendicular a la línea de los centros. A esta recta se le llama *eje radical* de las dos circunferencias.
2. Determine el lugar geométrico de un punto cuya potencia con respecto a una circunferencia es constante.
3. Demuestre que dos triedros son iguales si dos diedros y la cara comprendida del uno son iguales respectivamente a las partes correspondientes del otro y están semejantemente dispuestos.
4. Demuestre que dos triedros son iguales si dos caras y el diedro comprendido entre ellas, de uno, son respectivamente iguales a las partes correspondientes del otro y están semejantemente dispuestos.
5. Determine el lugar geométrico de un punto cuya suma de potencias con respecto a dos circunferencias es constante. Considere que las circunferencias pueden o no ser concéntricas.

Capítulo 2

Homotecia

Este concepto juega un papel muy importante en geometría. Además de ser una de las transformaciones mejor conocidas por su enorme presencia al estudiar geometría, ésta en particular está estrechamente relacionado con la semejanza de polígonos, poliedros, y figuras de dimensiones superiores inclusive. Comencemos primero por definir entonces lo que son los poliedros semejantes.

2.1. Poliedros semejantes

Cuando dos figuras planas o para ser precisos, dos polígonos, tienen el mismo número de lados y si sus lados correspondientes son proporcionales, y si sus ángulos correspondientes son iguales, se dice entonces que son *semejantes*. Esta correspondencia es biunívoca, de tal forma que a cada par de lados consecutivos, en un polígono, y el ángulo entre ellos, corresponde un par de lados consecutivos y el ángulo incluido entre ellos en el otro.

Cuando hablamos de figuras en el espacio, pensamos en el equivalente de la definición anterior para poliedros.

Definición 2.1. Se dice que dos poliedros son *poliedros semejantes* si estos tienen el mismo número de aristas y sus aristas correspondientes son propor-

cionales, sus ángulos poliedros y diedros correspondientes iguales, y el mismo número de caras y sus caras correspondientes son semejantes.

La homotecia es una transformación que sirve para conseguir, dado un poliedro, otro semejante a éste.

Definición 2.2. Una homotecia es una transformación del espacio en sí mismo tal que dados O , un punto ordinario del espacio, y una constante $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fijos, a un punto $P \in \mathbb{R}^3$ se le asocia otro punto $P' \in \mathbb{R}^3$ de forma tal que O, P y P' son colineales y se cumple la razón:

$$\frac{OP'}{OP} = k.$$

Al punto O se le llama centro de homotecia y la constante k razón de homotecia. P' es el homotético de P o el transformado bajo homotecia.

En general decimos que una figura F' es el homotético de F cuando la primera es la imagen de F bajo una homotecia dada.

Veamos a continuación un par de teoremas que muestran la naturaleza geométrica de la homotecia en tres dimensiones, que nos presentan además sutiles pero importantes diferencias con sus análogos en el plano.

Teorema 2.1. *El homotético de una línea recta es una línea recta.*

Demostración. La demostración es idéntica a la de su caso en el plano, por lo que la omitiremos aquí, sin embargo puede ser hallada en [7, pp. 40-41]. ■

Teorema 2.2. *El homotético de un plano es un plano, y los dos planos son paralelos.*

Demostración. Sea Π un plano en el espacio, y sea A cualquier punto del

plano Π . Sea además l cualquier línea de Π que pasa por A .

El homotético de l es una línea l' paralela a l y que pasa por el homotético A' de A , entonces l' es paralela al plano Π . Al hacer girar l con centro en A en el plano Π , su homotético l' también girará con centro en A' y describirá un plano Π' , paralelo a Π . ■

Teorema 2.3. *El homotético de una circunferencia, tal que el centro de homotecia no pertenece al plano que la contiene, es una circunferencia.*

Demostración. Sea A el centro de homotecia, Π' , O' y P' los homotéticos del plano Π que contiene a la circunferencia C , de su centro O , y de cualquier punto P de esta circunferencia, respectivamente. Se forman así los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle AO'P'$, que son semejantes. Tenemos entonces:

$$\frac{O'P'}{OP} = \frac{AO'}{AO} = \frac{AP'}{AP} = k,$$

siendo k la razón de homotecia. De esta manera, en el plano Π' , el punto P' está a una distancia fija $O'P'$ del punto fijo O' , por lo que P' describe una circunferencia C' en el plano Π' (Fig. 2.1). ■

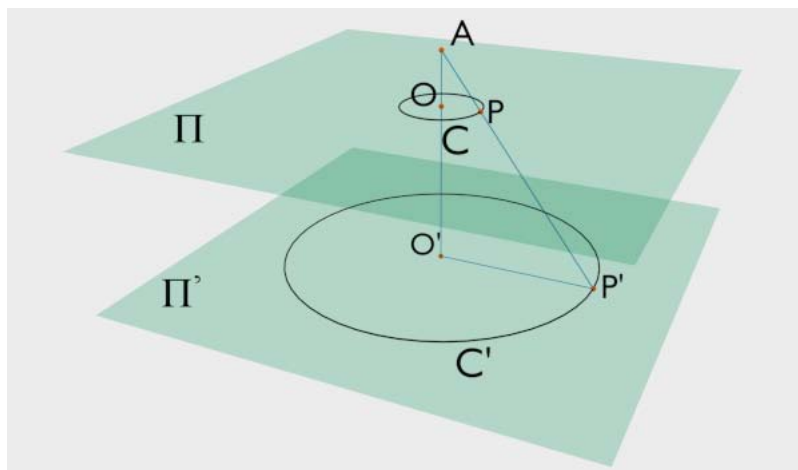


Figura 2.1: El homotético de una circunferencia es una circunferencia.

Hay que resaltar el hecho de que el teorema de arriba es más general que el correspondiente teorema del caso plano, ya que en éste último el centro de similitud pertenece al plano de la circunferencia dada.

Teorema 2.4. *El homotético de una esfera es una esfera.*

Demostración. Sea A el centro de homotecia, O' el punto homotético del centro O de la esfera dada S , y P' el homotético de un punto $P \in S$ arbitrario. Se forman nuevamente dos triángulos semejantes $\triangle AOP$ y $\triangle AO'P'$, por lo que tenemos que si k es la razón de homotecia:

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AP'}{AP} = \frac{O'P'}{OP} = k.$$

Entonces el punto P' está a una distancia fija del punto O' y por tanto el lugar geométrico que describe es una esfera S' que tiene a O' como centro. ■

Podemos continuar obteniendo los homotéticos de ciertas figuras dada una homotecia, pero también podemos pensar en el proceso inverso, es decir, dadas dos figuras suficientemente parecidas, hallar la homotecia que transforma a una figura en la otra.

Pensemos en dos figuras semejantes cuyas partes correspondientes que las componen son paralelas, y sean los pares de puntos correspondientes A, B, C, \dots y A', B', C', \dots respectivamente. Al obtener las líneas AA', BB', CC', \dots , es de esperar que éstas concurren en un punto O , además de que los segmentos que se forman con O cumplan:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \dots$$

El procedimiento de arriba muestra que cuando tenemos dos figuras semejantes y de partes correspondientes paralelas, podemos hallar el centro de homotecia O y la razón de homotecia k , o en otras palabras, hallamos la homotecia que hace que una figura sea la homotética de la otra.

Lo anterior puede ser justificado con toda precisión pero escapa de nuestro enfoque principal, por lo que solo mencionaremos a continuación algunos conceptos que se derivan de esto para su uso posterior: Dos figuras semejantes colocadas de forma tal que las partes correspondientes que las componen son paralelas, se llaman *figuras homotéticas*. El punto O es su centro de homotecia y la constante k es su *razón de homotecia*. La razón de homotecia de dos figuras homotéticas es también llamada *razón de similitud*, y su centro de homotecia es llamado *centro de similitud*.

La razón de similitud k puede ser positiva o negativa. Cuando k es positiva, los pares de puntos homotéticos están de un mismo lado del centro de similitud con respecto a la recta que los une, mientras que cuando k es negativa, los pares de puntos homotéticos están uno en cada lado del centro de similitud con respecto a la recta que los une. Estos dos casos llevan por nombre *homotecia directa o positiva* y *homotecia inversa o negativa*, respectivamente. Un caso importante y especial de esto último, es aquel en el cual k tiene el valor -1 .

Definición 2.3. Dos figuras se dice que son *simétricas* con respecto al punto O como *centro de simetría* si la razón de similitud es igual a -1 .

Así, si una esfera la vemos como la unión de dos semiesferas, tenemos que los puntos antípodas son puntos simétricos respecto al centro de la esfera. De aquí que la esfera sea una figura simétrica respecto a su propio centro.

2.2. División armónica

Dentro de la geometría moderna, la división armónica es una de las propiedades más hermosas que tiene que ver con cuatro puntos colineales y una relación de proporcionalidad entre éstos. Dada la importancia de ésta, en esta sección resaltaremos algunas de sus características fundamentales.

Definición 2.4. Dados cuatro puntos A, B, C y D en una línea, se dice que el segmento AB está *dividido armónicamente* por C y D si se cumple la razón de proporcionalidad:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Esta definición de división armónica es equivalente a decir que dos puntos dividen un segmento de línea armónicamente si lo dividen interna y externamente en la misma razón.

Definición 2.5. Cuando AB está dividido armónicamente por los puntos C y D , a éstos últimos se les conoce como *conjugados armónicos* con respecto a A y B .

Un hecho evidente respecto a la división armónica es su naturaleza recíproca, es decir, a partir de la proporción

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

se sigue que

$$\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD}.$$

Esto quiere decir que, si C y D dividen el segmento AB armónicamente, entonces también A y B dividen el segmento CD armónicamente, lo que también se puede enunciar de la siguiente forma.

Teorema 2.5. *Si C y D son conjugados armónicos con respecto a A y B , entonces A y B son conjugados armónicos con respecto a C y D .*

Definición 2.6. Cuando cuatro puntos A, B, C, D en una línea, están en tal forma que cada uno de los pares $A, B; C, D$ son conjugados armónicos con respecto al otro par, se dice que constituyen una *hilera armónica*; también se puede decir que son cuatro puntos armónicos o que A y B son conjugados armónicos respecto a C y D .

2.3. Esferas homotéticas

Según vimos en la sección 2.1, para poder demostrar que dos figuras son homotéticas, debemos hallar el centro de homotecia y la razón de homotecia que definen a la homotecia que transforma a una figura en la otra. En particular, un par de esferas cualesquiera cumplen con ser figuras homotéticas, como a continuación se demuestra.

Teorema 2.6. *Cualesquiera dos esferas son homotéticas.*

Demostración. Si dos esferas son concéntricas, evidentemente son homotéticas, siendo el centro de las esferas el centro de homotecia y la razón de sus radios la razón de homotecia.

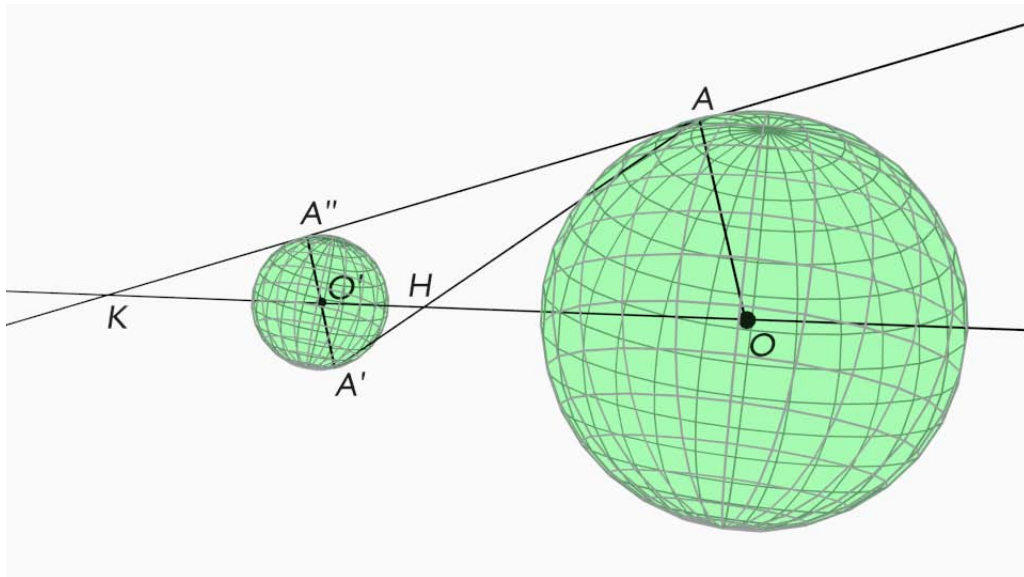


Figura 2.2: Esferas homotéticas con centros de similitud H y K .

Consideremos dos esferas no concéntricas. Unamos el centro O de una de ellas a cualquier punto A de la esfera, no colineal con los centros. Dibujemos el diámetro de la otra esfera paralelo a OA cortando a ésta en A' y A'' . Hagamos que AA' y AA'' corten a la línea de los centros en H y K respectivamente. Entonces

el triángulo OAH es similar al triángulo coplanar $O'A'H$ por tener los mismo ángulos (un par opuesto por el vértice en H y los otros pares se dan pues $O'A'$ y OA son paralelos), y el triángulo OAK es similar al triángulo coplanar $O'A''K$ por construcción. De esto se sigue que las dos esferas son homotéticas de dos maneras distintas, siendo los puntos H y K los centros de homotecia. ■

Definición 2.7. Al centro de similitud K se le conoce como centro de similitud exterior y a H como el centro de similitud interior. Su nombre es consecuencia directa de la forma en que son divididos los segmentos que unen puntos homotéticos en la razón de los radios de las dos esferas, es decir, en razón positiva o negativa, según el caso.

El caso anterior tiene subcasos, de entre los cuales podemos distinguir a aquel en el que las esferas no se intersectan y son mutuamente excluyentes, en el que las esferas se intersectan, y por último en el que las esferas no se intersectan pero una está contenida dentro de la otra.

En estas configuraciones donde existen dos centros de homotecia, es decir donde las esferas no son concéntricas, encontramos distintos tipos de puntos interesantes que surgen de manera natural al estudiar esferas homotéticas. Un primer ejemplo es una cuarteta armónica de puntos que se encuentra en la línea de los centros de las esferas en cuestión.

Teorema 2.7. *Los centros de dos esferas y los dos centros de similitud de las dos esferas forman una hilera armónica de puntos.*

Demostración. Retomando la figura 2.2 y la similitud de las parejas de triángulos OAH , $O'A'H$ y OAK , $O'A''K$, tenemos la siguiente pareja de proporciones de manera respectiva:

$$\frac{HO'}{HO} = \frac{A'O'}{AO} \quad \text{y} \quad \frac{KO'}{KO} = \frac{A''O'}{AO}.$$

Puesto que OAH y $O'A'H$ son inversamente proporcionales, entonces $A''O' = -A'O'$, por lo que al sustituir esta igualdad en las proporciones anteriores obtenemos:

$$\frac{A'O'}{AO} = -\frac{A''O'}{AO} \Rightarrow \frac{HO'}{HO} = -\frac{KO'}{KO} \Rightarrow \frac{HO'}{O'K} = -\frac{HO}{OK}.$$

De aquí que los puntos K, O', H y O forman una cuarteta armónica. ■

Otro tipo de puntos surgen al plantear una situación que involucra otras líneas. Supongamos que una línea pasa por un centro de similitud de dos esferas, entonces ésta intersectará a una de ellas en dos puntos distintos, e intersectará a la otra también en dos puntos distintos, formando así cuatro puntos que son homotéticos por pares.

Definición 2.8. Se les llama *puntos homólogos* a los dos puntos de cada par homotético de puntos.

Definición 2.9. Se les llama *puntos antihomólogos* a los puntos que están apareados de forma tal que cada par contenga un punto en cada esfera, y no sean homotéticos. Son puntos antihomólogos con respecto al centro de similitud que está en la línea que pasa por estos puntos.

2.4. La esfera de similitud

La definición de este concepto surge de manera natural al demostrar el teorema siguiente.

Teorema 2.8. *El lugar geométrico de puntos cuyas potencias con respecto a dos esferas, no concéntricas y de radios distintos, son proporcionales a la razón de los cuadrados de los radios, es la esfera que tiene como diámetro el segmento*

acotado por los centros de similitud de las esferas.

Demostración. Sean S_1 y S_2 las esferas de radios r_1 y r_2 , y centros O_1 y O_2 respectivamente. Supongamos que $r_1 \neq r_2$, y que S_1 y S_2 no son concéntricas; supongamos además que una no contiene a la otra.

Sea P un punto tal que cumple el enunciado de arriba, es decir

$$\frac{Pot(P, S_1)}{Pot(P, S_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{\overline{PO_1}^2 - r_1^2}{\overline{PO_2}^2 - r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Desde P tracemos una tangente a cada esfera, de manera tal que éstas sean coplanares con la línea de los centros de las esferas dadas. Sean $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ los segmentos tangenciales, siendo T_1 y T_2 los puntos de tangencia con S_1 y S_2 . Tenemos entonces, por el teorema de pitágoras, que las razones anteriores las podemos ver como

$$\frac{Pot(P, S_1)}{Pot(P, S_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{\overline{PT_1}^2}{\overline{PT_2}^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{PT_1}{PT_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Si consideramos el radio r_i que tiene uno de sus extremos en T_i , entonces entre PT_i y r_i , $i = 1, 2$, hay un ángulo recto. Este hecho junto con el último par de razones nos indica que los triángulos PT_1O_1 y PT_2O_2 son semejantes, por lo que podemos sustituir la última igualdad de razones por la igualdad $PO_1/PO_2 = r_1/r_2$.

De esta forma tenemos que el lugar geométrico de puntos P cuyas razones de distancias a dos puntos fijos (los centros de las esferas) es una constante (la razón de los radios), es una circunferencia coplanar con las tangentes y la línea de los centros, que por construcción resultó ser la circunferencia de Apolonio, cuyo centro está también en la línea de los centros, y puesto que los centros de similitud de las esferas también cumplen con estar en esta circunferencia, entonces su diámetro es el del segmento que une a éstos puntos.

Esto sucederá cada vez que elegimos un punto P que no es coplanar con el plano en el que ya se obtuvo la circunferencia de Apolonio correspondiente, y puesto que en cada plano su diámetro siempre es el mismo, entonces obtenemos

una esfera de diámetro la longitud del segmento que une los centros de similitud de las esferas. ■

Definición 2.10. La esfera que tiene como diámetro la longitud del segmento que une los centros de similitud de dos esferas no concéntricas, es llamada la *esfera de similitud* de las dos esferas.

Tanto la esfera de similitud de dos esferas dadas, como los centros de similitud de éstas, juegan un papel importante, no solo por las propiedades intrínsecas a ellos, sino también cuando se vea el tema de inversión, donde podemos hallar distintos resultados interesantes que involucran a estos conceptos. Veamos entonces, antes de pasar al tema de inversión, otros resultados que surgen al estudiar a los centros de similitud de dos o más esferas.

Teorema 2.9. *Los seis centros de similitud de tres esferas de radios distintos y no concéntricas tomadas por pares, son colineales por tercias en cuatro líneas distintas.*

Demostración. Tomemos tres esferas no colineales S_1 , S_2 y S_3 con centros en los puntos O_1 , O_2 y O_3 respectivamente, y sean r_1 , r_2 y r_3 sus radios.

Si las esferas tienen centros colineales el teorema se cumple trivialmente, pero si no es así, entonces los centros forman un triángulo en cuyos lados encontramos los centros de similitud interior y exterior de cada pareja de esferas.

Consideremos el plano que contiene los centros de las esferas, y tracemos radios perpendiculares a éste en cada esfera. Sean A , B y C los extremos de éstos radios en S_1 , S_2 y S_3 respectivamente.

El plano que contiene a los puntos A , B y C , corta al plano de los centros en una línea ordinaria, ya que los radios de las esferas son distintos, y además ésta línea contiene tres centros de similitud distintos, ya que las combinaciones de parejas de puntos A , B y C resultan puntos homólogos, por construcción (Fig. 2.3).

Repitiendo el procedimiento antes descrito conseguimos 4 líneas distintas, donde cada una contiene 3 centros de similitud distintos. Tres de ellas contienen dos centros de similitud interior y uno exterior, y la otra a los tres centros de similitud externos; ésto depende del lado del plano en que tomamos a los puntos A, B y C , por ejemplo, obtendremos la línea que contiene a los tres centros de similitud externos si los puntos están del mismo lado del plano. ■

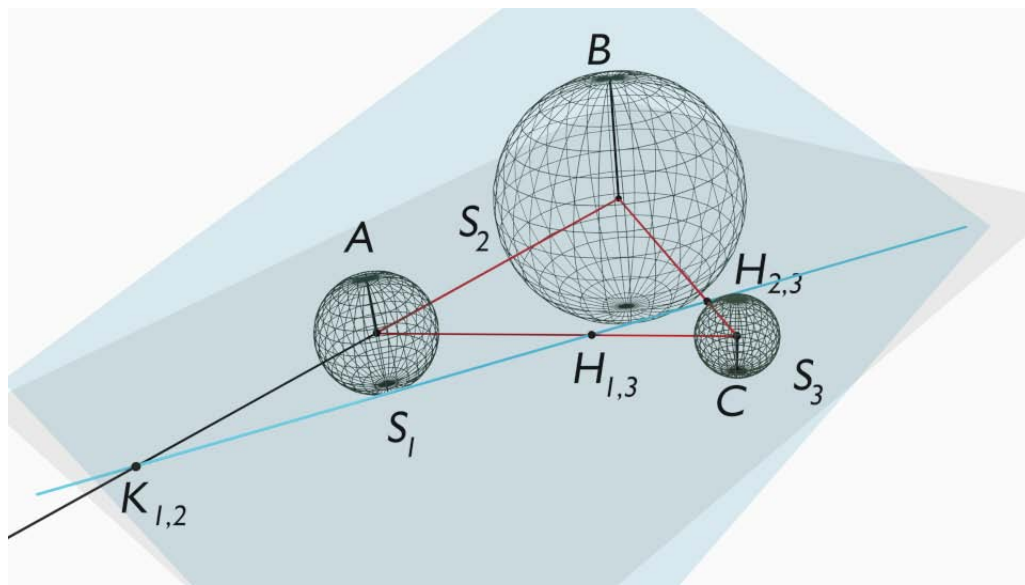


Figura 2.3: Los 6 centros de similitud de tres esferas son colineales por tercias en cuatro líneas. En la figura, los centros de similitud internos de las esferas S_2 con S_3 y S_1 con S_3 , es decir $H_{2,3}$ y $H_{1,3}$, son colineales con el centro de similitud exterior $K_{1,2}$ de S_1 y S_2 .

Corolario 2.1. *Si una esfera toca a otras dos, entonces la línea que conecta los dos puntos de contacto pasa por un centro de similitud o es paralela a la línea de los centros.*

Demostración. Supongamos primero que las tres esferas tienen radios distintos y supongamos, sin pérdida de generalidad, que S_2 toca a S_1 en P y a S_3 en Q . Como éstos son los únicos puntos de contacto entre estas esferas, entonces esos puntos coinciden, respectivamente, con uno de los centros de similitud de ese par

de esferas por como se construye el mismo. Por tanto al pasar una línea por P y por Q , ésta pasará por alguno de los centros de similitud de S_1 y S_3 .

Cuando suponemos que S_1 y S_3 tienen el mismo radio, independientemente del radio que tenga S_2 , los centros de similitud P y Q , que son los puntos donde S_2 toca a las esferas S_1 y S_3 , son puntos simétricos respecto al plano de simetría que tienen S_1 y S_3 por tener el mismo radio (es decir que podemos ver a este par de esferas como figuras reflejadas por un plano). Entonces al pasar una línea por P y Q , ésta será perpendicular al plano de simetría. De igual forma la línea de los centro de las esferas S_1 y S_3 es perpendicular al plano de simetría, y por tanto, la línea por P y Q es paralela a la línea de los centros.

El teorema que a continuación se muestra es una generalización del teorema 2.9, de forma que ahora no trabajaremos solo con tres esferas sino con cuatro. Esto es posible gracias a que en el espacio contamos con un grado de libertad más que los que tiene el plano.

Teorema 2.10. *Dadas cuatro esferas, no concéntricas por pares o iguales, ni con sus cuatro centros coplanares, determinarán por pares doce centros de similitud. Éstos están por sextetas en planos determinados por tres centros de las esferas dadas, y por tercias, en dieciséis líneas. Cuatro de éstas últimas pasan por cada centro de similitud, cuatro están en cada plano determinado por los centros de tres esferas, y cuatro en cada uno de los otro ocho planos, de los cuales dos pasan por cada una de las dieciséis líneas. Los centros de similitud están por sextetas en estos doce planos.*

Demostración. Para probar este teorema, sean las esferas S_1, S_2, S_3, S_4 . El centro de similitud externo de S_i y S_j será llamado $K_{i,j}$, mientras que su centro de similitud interior será $H_{i,j}$.

En primer lugar, dado que hay cuatro esferas, hay entonces 6 combinaciones distintas de parejas de éstas, lo cual resulta en doce centros de similitud. Como

cada tres esferas tienen centros coplanares, y los centros de similitud de esas tres pertenecen a ese plano, entonces hay seis centros de similitud coplanares. Luego, por el teorema 2.9 tenemos cuatro líneas que son coplanares con el plano determinado por los centros de las tres esferas, y que contienen una tercia de centros de similitud; dado que hay cuatro combinaciones distintas de tercias de esferas, obtenemos así dieciséis líneas que contienen una tercia de centros de similitud.

Hasta aquí hay 4 sextetas de centros de similitud coplanares. Y ahora, nuevamente por el teorema 2.9, las siguientes triadas son colineales:

$$K_{i,j}, K_{j,k}, K_{k,i} \quad , \quad K_{i,j}, H_{j,l}, H_{l,i} \quad \text{y} \quad K_{k,j}, H_{j,l}, H_{k,l}$$

Entonces $K_{i,j}, K_{j,k}, K_{k,i}, H_{i,l}, H_{j,l}, H_{k,l}$ son coplanares y como éstas tenemos otras tres sextetas más. De manera similar $K_{i,j}, K_{k,l}, H_{i,k}, H_{i,l}, H_{j,k}, H_{j,l}$ son coplanares, y con éste mismo patrón hay otras dos sextetas más. Por último $K_{i,j}, K_{i,k}, K_{i,l}, K_{j,k}, K_{j,l}, K_{k,l}$ son coplanares. Llegamos así a doce planos distintos que contienen seis centros de similitud cada uno. ■

2.5. Ejercicios

1. Demuestre que el ángulo de intersección de dos líneas rectas es el mismo al ángulo de intersección de sus líneas homotéticas, o en otras palabras, dos ángulos planos homotéticos son iguales.
2. Demuestre que el ángulo de intersección de dos planos es el mismo al ángulo de intersección de sus planos homotéticos, o en otras palabras, dos ángulos diedros homotéticos son iguales.
3. Si dos poliedros son homotéticos a un tercero, son homotéticos entre sí.
4. Colocar dos tetraedros convenientes en posición homotética, de tal forma que su razón homotética sea negativa.
5. Construya la figura que sea simétrica a un tetraedro dado cuando el centro de simetría esté dentro del tetraedro; en una cara; en una arista; en un vértice, y fuera del tetraedro.
6. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos y O y O' son los puntos medios de AB y CD respectivamente, entonces $\overline{OB}^2 + \overline{O'C}^2 = \overline{OO'}^2$
7. Demuestre que si una esfera es tangente a otras dos esferas no concéntricas, los puntos de tangencia son puntos antihomólogos.
8. La esfera de similitud de dos esferas que se intersectan pasa por los puntos de su intersección.
9. Si una línea variable que intersecta a dos esferas, pasa por un centro de similitud, las esferas determinan cuerdas cuya longitud tiene una razón constante.
10. Demuestre el teorema 2.9 haciendo uso del teorema de Ceva y Menelao.

Capítulo 3

Inversión

La transformación de inversión es la transformación principal que estudiaremos a lo largo de este capítulo, en el cual veremos como la geometría Euclideana, en la que las líneas y los planos juegan un papel fundamental, puede ser extendida a la *geometría inversiva*, en la que éste papel es tomado en su lugar por círculos y esferas, cuando la transformación de inversión es aplicada.

Hasta el momento solo hemos hablado de la transformación de homotecia, que tiene la particularidad de preservar tanto las líneas rectas como los ángulos. La transformación de inversión, la cual fue inventada por L. J. Magnus en 1831 ([4, p. 77]), solo cumple con una de las características antes mencionadas, ya que mientras transforma líneas rectas en circunferencias, también cumple con transformar ángulos en ángulos iguales. Para ver esto, definamos en primer lugar esta transformación.

Definición 3.1. Sea S una esfera dada con centro en O y radio r . Sean P y P' dos puntos colineales con O tales que

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Se dice entonces que cada uno de los puntos P y P' es *inverso* el uno del otro con respecto a la esfera. El punto O es el *centro de inversión*, la esfera S es llamada *esfera de inversión*, y su radio es el *radio de inversión*.

Por definición, la relación es simétrica, es decir, si P' es el inverso de P , entonces P es el inverso de P' . De acuerdo con esta simetría, se dice que los puntos P y P' , son *puntos inversos* uno del otro con respecto a la esfera.

Originalmente, la transformación de inversión es definida en el plano, pero con la definición recién hecha, podemos extender fácilmente toda la teoría de inversión desde las circunferencias en el plano a las esferas en el espacio, tal y cómo podemos apreciar en los siguientes teoremas.

Teorema 3.1. *Cada punto, excepto el centro de inversión, tiene un único inverso respecto a una esfera dada.*

Demostración. Sean S, r y O , la esfera, el radio de inversión y el centro de inversión respectivamente. Sea $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $P \neq O$. Supongamos que P'_1 y $P'_2 \in \mathbb{R}^3$ son puntos tales que $OP \cdot OP'_1 = OP \cdot OP'_2 = r^2$. Entonces

$$OP'_1 = \frac{r^2}{OP} = OP'_2 \quad \Rightarrow \quad OP'_1 = OP'_2.$$

Más aún, como r y P son fijos, entonces P' , el inverso de P respecto a S , es único y está bien definido, es decir, es fijo.

Si P fuera un punto ideal entonces

$$OP' = \frac{r^2}{OP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad OP' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad O = P',$$

lo que indica que el inverso de todo punto ideal es entonces el centro de inversión de la esfera en cuestión. ■

Surge entonces la pregunta natural: ¿Quién es el inverso de O ? Es decir, si $P = O$, entonces

$$OO \cdot OO' = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad OO' = \frac{r^2}{OO} = \infty$$

lo que implica que O' es cualquier punto al infinito, puesto que O y O' son colineales (lo cual siempre sucede) y están contenidos en la recta por $O' = O_\infty$

y el centro de inversión. Por tanto, como O' es colineal con O y está en cualquier recta por O , entonces el inverso del centro de inversión es el plano al infinito.

Teorema 3.2. *La esfera de inversión es el lugar geométrico de aquellos puntos que son sus propios inversos. Puntos fuera de la esfera se invertirán en puntos dentro de ella, y puntos por dentro de la esfera, distintos del centro de ésta, se invertirán en puntos fuera de la esfera.*

Demostración. Sea $P \in S$ y sea $r \in \mathbb{R}$ el radio de inversión. Como P' , el inverso de P , es único y es fijo una vez dado P , entonces $OP \cdot OP' = r^2 = OP \cdot OP = r^2$ pues $OP = r$, es decir, $P = P'$.

Luego, si P es un punto que cumple que $OP > r$, y como $OP \cdot OP' = r^2$, se tiene que

$$OP \cdot r > r^2 = OP \cdot OP' \quad \Rightarrow \quad OP \cdot r > OP \cdot OP' \quad \Rightarrow \quad r > OP'.$$

De manera análoga se demuestra para puntos fuera de la esfera. ■

Teorema 3.3. *Puntos mutuamente inversos están armónicamente separados por las intersecciones de la línea que los contiene con la esfera de inversión, y recíprocamente, un par de puntos separados armónicamente por otro par son mutuamente inversos respecto de la esfera con diámetro el primer par de puntos.*

Demostración. Sean P y P' puntos mutuamente inversos con respecto a una esfera de radio finito r y de centro O . Sean A y B los puntos de intersección de la esfera con línea que contiene a P y P' . Tenemos que $r^2 = AO^2 = OB^2 = OP \cdot OP'$ que es equivalente a $OB/OP = OP'/OB$, y ésto a su vez es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{-OP}{OB} = \frac{-OB}{OP'} &\Leftrightarrow \frac{OB - OB - OP}{OB} = \frac{OP' - OP' - OB}{OP'} \\ \Leftrightarrow \frac{OB - OP}{OB} = \frac{OP' - OB}{OP'} &\Leftrightarrow \frac{2(OB) + 0}{OB - OP} = \frac{2(OP') + 0}{OP' - OB} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OB + OP + OB - OP}{OB - OP} = \frac{OP' + OB + OP' - OB}{OP' - OB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OB + OP}{OB - OP} = \frac{OP' + OB}{OP' - OB}.$$

Partiendo de ésta última igualdad, y sustituyendo OB por el segmento AO , vemos que:

$$\frac{OB + OP}{OB - OP} = \frac{OP' + OB}{OP' - OB} \Leftrightarrow \frac{AO + OP}{PO + OB} = -\frac{AO + OP'}{P'O + OB},$$

es equivalente a la proporción

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AP'}{P'B}$$

lo que indica que la cuarteta de puntos A, B, P, P' , son una cuarteta armónica de puntos.

De manera recíproca, Supongamos que P y P' son puntos separados armónicamente respecto de otro par de puntos A y B . Creamos una esfera con diámetro AB , y ahora nos fijamos en la cadena de igualdades de arriba pero orden inverso, llegando de esta manera a que P y P' son puntos mutuamente inversos respecto de la esfera de diámetro AB . ■

Teorema 3.4. *Si A, B, C, D son cuatro puntos, y A', B', C', D' sus inversos, entonces*

$$\frac{(AB)(CD)}{(AD)(CB)} = \frac{(A'B')(C'D')}{(A'D')(C'B')}$$

Demostración. Supongamos que los puntos A, B, C, D son no colineales. Tomando la pareja de puntos A, B y sus respectivos inversos, tenemos que:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \Rightarrow \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$$

y como el ángulo $\angle AOB$ es común para los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OB'A'$, entonces por el criterio Lado-Ángulo-Lado de semejanza de triángulos, éstos últimos

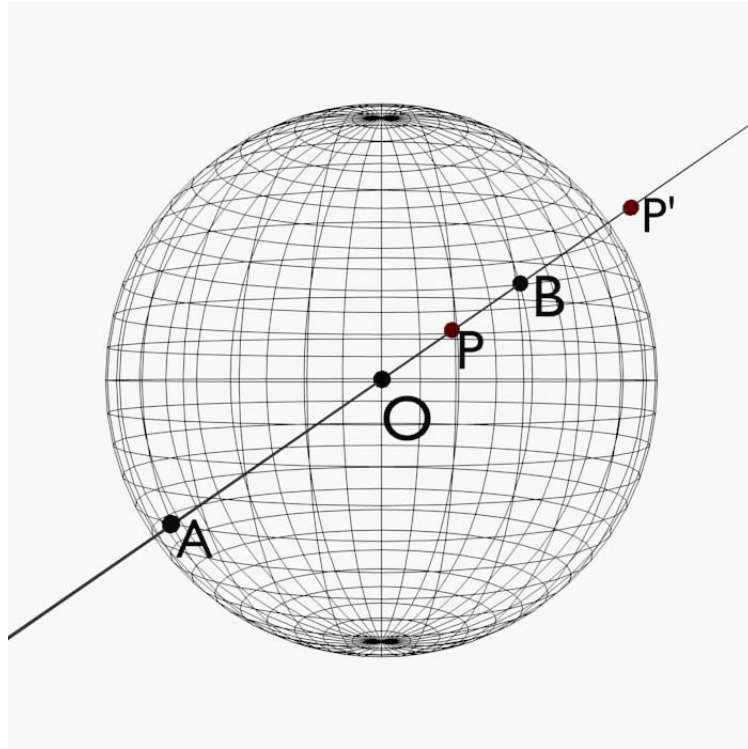


Figura 3.1: Puntos inversos y las intersecciones de la línea que los contiene con la esfera de inversión.

son semejantes, lo cual implica la proporción entre sus lados $A'B' : BA = B'O : AO$, lo que es equivalente a:

$$A'B' = BA \cdot \frac{B'O}{AO} = BA \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$

Obtenemos una expresión similar con las parejas de inversos $C'D'$, $A'D'$, $C'B'$ y las sustituimos en la siguiente expresión, obteniendo

$$\frac{(A'B')(C'D')}{(A'D')(C'B')} = \frac{\left(BA \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}\right) \cdot \left(DC \cdot \frac{r^2}{OC \cdot OD}\right)}{\left(DA \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OD}\right) \cdot \left(BC \cdot \frac{r^2}{OC \cdot OB}\right)} = \frac{(AB)(CD)}{(AD)(CB)}.$$

Si los puntos fueran colineales, la igualdad se mantiene ya que los triángulos antes mencionados aún existen pero se trata de triángulos degenerados. ■

3.1. La inversión es una transformación isogonal

Esta propiedad es lo que hace a la inversión una transformación tan especial como única, ya que como se ha visto hasta ahora, las distancias entre las figuras originales y las que guardan sus inversas no se preservan, es decir, que la inversión no es una isometría. Pero hay algo que la inversión sí preserva entre las figuras que son invertidas y sus inversos respectivos, y eso es justamente el ángulo en el cual se intersectan, o en otras palabras, que la inversión es una transformación conforme, o como algunos autores la llaman, inversamente conforme, ya que como veremos a continuación, el ángulo de intersección que hay entre un par de figuras invertidas es el mismo que hay entre las figuras originales, salvo que éste ha sido revertido con respecto al original.

Ésta peculiar propiedad es clave para el desarrollo y comprensión de esta transformación. Es tal su importancia que se recurre a ella en la mayoría de las demostraciones de los teoremas que se relacionan con la inversión.

Para demostrar esta propiedad tan importante, es decir, que la inversión es una transformación que “preserva” los ángulos (o mejor dicho, que se trata de una transformación conforme), se probará un teorema que se refiere al ángulo de intersección entre dos curvas en el espacio, para más tarde hacer lo mismo con un teorema acerca del ángulo de intersección entre dos superficies. Cabe mencionar que para ello, se recurrirán a las definiciones y teoremas de la sección 1.2 y 1.3 (véase capítulo 1), por lo cual es conveniente referirse a ésta sección para cualquier aclaración.

Teorema 3.5. *Si dos curvas se intersectan en un punto cualquiera distinto del centro de inversión, su ángulo de intersección en ese punto es igual en magnitud pero opuesto en signo al ángulo de intersección de las curvas inversas en el punto inverso.*

Demostración. Sea S la esfera de inversión y O su centro. Sean β y γ dos

curvas en el espacio que se intersectan en un punto $P \neq O$. Recordemos que para medir el ángulo de intersección de curvas en \mathbb{R}^3 en un punto se mide la magnitud del ángulo que se forma entre las tangentes a las curvas en ese punto.

Sean entonces β' y γ' las curvas inversas con respecto a S y tomemos dos puntos, uno en cada curva de γ y β , A y B respectivamente y también tomemos los inversos de estos puntos, A' y B' , en las curvas inversas respectivas. Se forman de esta manera las caras de dos triedros con vértice en O y cuyas caras son AOP , POB y BOA para el triedro $O-APB$ y $P'OA'$, $B'OP'$ y $A'OB'$ para el triedro $O-B'P'A'$. Sean α el diedro formado por las caras AOP y POB en $O-APB$ y α' el formado por las caras $P'OA'$ y $B'OP'$ en $O-B'P'A'$ (Fig. 3.2).

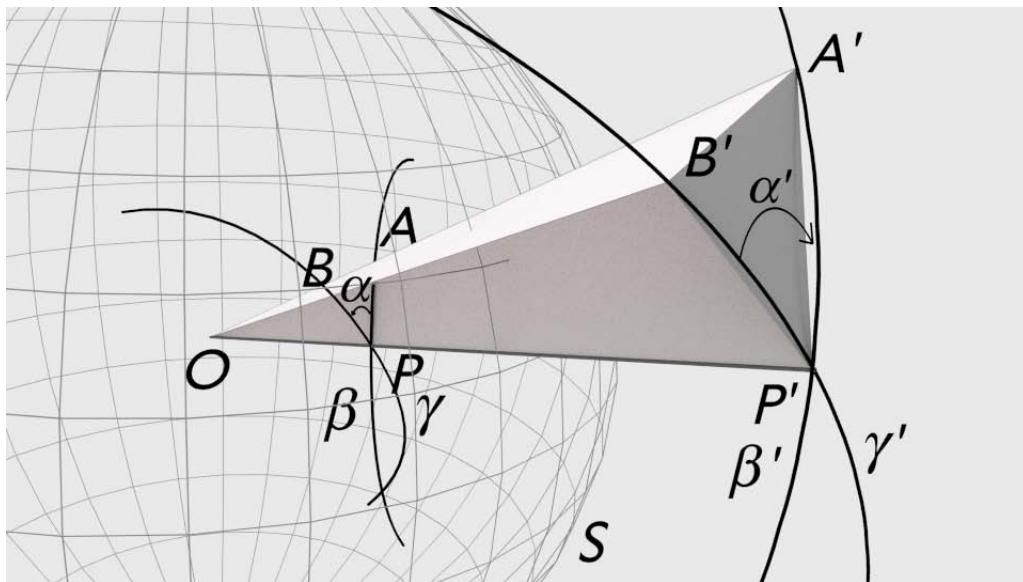


Figura 3.2: Dos curvas que se intersectan y sus inversas.

Por ser B , P , y B' , P' pares de puntos mutuamente inversos respectivamente, se tiene que estos 4 puntos son coplanares. Entonces, por un resultado de inversión para el plano, se tiene que los triángulos $\triangle PBO \simeq \triangle B'P'O$, por lo cual el ángulo formado por las caras POB y $B'OP'$ son el mismo, mostrando que estas dos caras son iguales. Un procedimiento análogo se sigue para demostrar que las caras AOP y $P'OA'$ son iguales.

Dado que las caras o planos de estos dos triedros coinciden, entonces, el diedro

$|\alpha| = |\alpha'|$, y por el teorema 1.3 tenemos que los triedros $O-APB$ y $O-B'P'A'$ son simétricos.

Conforme los puntos A y B tienden a P , la recta determinada por los puntos OA y OB tienden a la recta OP y de esta manera, el ángulo α tiende al ángulo entre las tangentes a las curvas en P . Lo mismo sucede para α' en P' . Por lo tanto el ángulo de intersección entre las curvas que se intersectan y el de sus inversas es el mismo pero en sentido contrario uno del otro. ■

El teorema que se acaba de demostrar, a pesar de mostrar que la inversión es conforme entre curvas en el espacio y sus transformadas, no agota todas las posibilidades que nos brinda el espacio. Por ello, el siguiente teorema hace referencia al ángulo de intersección que hay entre superficies y el que existe entre los inversos de éstas.

Teorema 3.6. *El ángulo en el cual dos superficies se intersectan es igual al formado por sus inversas.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 dos superficies que se intersectan y sea $\alpha = S_1 \cap S_2$, la curva que forman al intersectarse.

Tomemos un punto $P \in \alpha$ y sean $T_P(S_1)$ y $T_P(S_2)$ los planos tangentes en P a S_1 y S_2 respectivamente. Sean también A y B puntos en \mathbb{R}^3 tales que $\hat{n}_1 = \overrightarrow{PA}$ y $\hat{n}_2 = \overrightarrow{PB}$ son los vectores normales unitarios a los planos tangentes $T_P(S_1)$ y $T_P(S_2)$ respectivamente (Fig. 3.3).

Tomemos dos vectores linealmente independientes en $T_P(S_1)$ y sean α_1 y α_2 dos curvas en S_1 cuyos vectores tangentes son los que acabamos de elegir.

Sean S'_1 , α'_1 , α'_2 y P' los inversos de S_1 , α_1 , α_2 y P con respecto a una esfera S de radio finito y distinto de cero que tiene centro en O .

Como las curvas α'_1 y α'_2 están en S'_1 , puesto que $\alpha_1, \alpha_2 \in S_1$, y por como se eligieron a los vectores tangentes a éstas tenemos que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces por el teorema 3.5 el ángulo de intersección entre α_1 y α_2 es el mismo que el ángulo

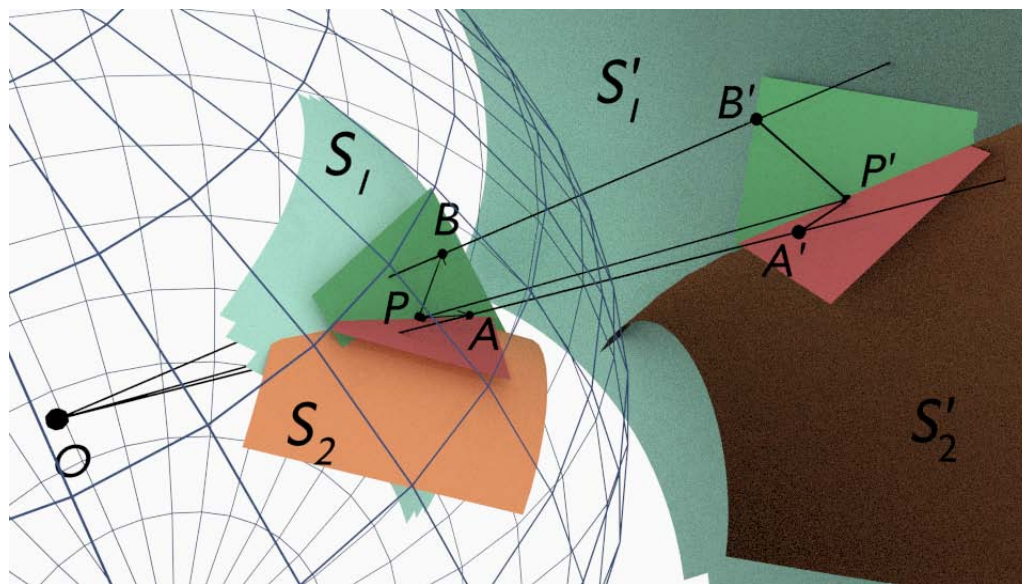


Figura 3.3: Los inversos a dos superficies conservan el ángulo en que se intersectan las superficies originales. En la figura $T_P(S_1)$ (en verde) es el plano tangente a S_1 en P y $T_P(S_2)$ (en rojo) es el plano tangente a S_2 en P . Éstos y los correspondientes planos tangentes a las figuras inversas en P' , se intersectan en el mismo ángulo.

de intersección de sus inversas α'_1 y α'_2 salvo por el hecho de que son uno el negativo del otro, o bien, que son simétricos el uno del otro. Luego como $T_P(S'_1)$ está generado por los vectores tangentes a α'_1 y α'_2 , entonces los planos $T_P(S_1)$ y $T_P(S'_1)$ son simétricos. Así, al considerar un vector normal unitario a $T_P(S_1)$ y luego su línea normal en P , tendremos que A' , el inverso de A respecto de S , pertenece entonces a la línea normal en P' que contiene un vector normal unitario a $T_P(S'_1)$. De manera análoga obtenemos que B' , el inverso de B respecto de S , está en la línea normal en P' y que contiene un vector normal unitario a $T_P(S'_2)$.

De esta manera, formamos dos triedros $O - APB$ y $O - B'P'A'$ que son simétricos (de manera similar a como sucedió en la demostración del teorema 3.5) y por lo tanto, el ángulo comprendido entre los segmentos PA y PB es el mismo que el comprendido entre $P'A'$ y $P'B'$, y por tanto el ángulo que hay entre las líneas normales en P tanto a $T_P(S_1)$ como a $T_P(S_2)$ es el mismo que hay entre las líneas normales en P tanto a $T_P(S'_1)$ como a $T_P(S'_2)$. Así, el ángulo

de intersección entre las superficies S_1 y S_2 , es el mismo que el de sus inversas S'_1 y S'_2 , ya que todo lo anterior se cumple no importando la elección de $P \in \alpha$. ■

3.2. Curvas y superficies autoinversas

Cuando se estudia la inversión en el plano, se observaba que ciertos lugares geométricos cumplían con ser sus propios inversos. Se puede esperar un comportamiento similar cuando tratamos a la inversión en tres dimensiones y es que de hecho, sí existen subconjuntos del espacio que ellos mismos son sus propios inversos.

Definición 3.2. A cualquier lugar geométrico que cumple con ser su propio inverso se dice que es *autoinverso o analagmático*.

Esta sección tratará una serie de teoremas relacionados con la variedad de posibilidades que las superficies y curvas analagmáticas ofrecen, así como también servirá para poder clasificar y destacar las características que identifican de manera general a estos lugares geométricos.

Teorema 3.7 *Una curva o superficie autoinversa corta a la esfera de inversión de manera ortogonal en cada una de las intersecciones entre estas. Dichas intersecciones son puntos de la curva o de la superficie y la esfera de inversión.*

Demostración. Sea S_i la esfera de inversión y sea S una superficie autoinversa con respecto a S_i . Al invertir éstas con respecto a S_i tenemos entonces que se invierten respectivamente en S_i por el teorema 3.2, y en S puesto que es autoinversa respecto a S_i .

Consideremos un punto P en la intersección de S_i y S . Sea α el ángulo de intersección de S_i y S en P . Observemos que, como $P \in S_i \cap S$, entonces por el teorema 3.2 el inverso de P respecto a S_i es P .

Por definición tenemos que el ángulo de intersección de las superficies S_i y S en P , es el ángulo entre las líneas normales en P de éstas superficies. Llamemos l_i y l a las líneas normales de S_i y S en P respectivamente. Así $\alpha = \text{ángulo}(l_i, l)$.

Notemos que como las superficies inversas a S_i y a S respecto a S_i coinciden con las superficies originales, entonces las líneas normales en P permanecen invariantes, es decir, son las mismas tanto para las superficies originales como para sus inversas.

Por el teorema 3.6, el ángulo α es el ángulo en el que se intersectan las superficies inversas a S_i y S en P , pero en sentido inverso, es decir que el ángulo entre las líneas normales en P debe ser α tanto en un sentido, como en el inverso, y la única manera de que suceda esto es que $\alpha = 90^\circ$, ya que de no ser así, entonces las líneas normales en P serían distintas para las superficies originales y para las superficies inversas, contradiciendo así el hecho de que, o bien S_i no es la esfera con respecto a la cual estamos invirtiendo, o S no es una superficie autoinversa con respecto a S_i .

Se concluye entonces que si una superficie es analagmática, debe cortar a la esfera de inversión ortogonalmente. De manera análoga se demuestra el caso para las curvas autoinversas que cortan a S_i , pero usando la línea normal en P para S_i y la línea que contenga el vector tangente a la curva en P . ■

Teorema 3.8. *Un plano que pasa por el centro de inversión es autoinverso.*

Demostración. Sea $P \in \Pi$, un punto en el plano Π que pasa por el centro de inversión O y sea Π' el inverso del plano.

Como $P \in \Pi \Rightarrow P' \in \Pi$ pues éste último es colineal con O y con P ya que estamos suponiendo que la extensión de Π es infinita y es por ello que podemos asegurar esto para cualquier punto P .

Luego por reciprocidad de la inversión, si un punto $Q' \in \Pi' \Rightarrow (Q')' = Q \in (\Pi')' = \Pi$, y por el argumento antes mencionado se tiene además que $Q' \in \Pi$, así entonces $\forall Q \in \Pi, Q \in \Pi'$, con lo que se obtiene la doble contención entre los

conjuntos de puntos de los planos y así $\Pi = \Pi'$. ■

La demostración recién realizada también puede aplicarse a las rectas que pasan por el centro de inversión, es decir, intercambiando la palabra plano por recta, y el símbolo Π por el de una recta l , consiguiendo así el corolario siguiente.

Corolario 3.1. *Una recta que pasa por el centro de inversión es autoinverso.*

Teorema 3.9. *Una esfera que pasa por cualquier par de puntos inversos es autoinversa; cada esfera que intersecta la esfera de inversión de manera ortogonal es de este tipo.*

Demostración. Sean P y P' puntos inversos con respecto a la esfera S_i de centro O y radio $r > 0$. Sean también A y A' los puntos de intersección de PP' con S_i y llamemos S_1 a una esfera que pasa por los puntos mutuamente inversos.

Por el teorema 3.3, los puntos A', P', A, P forman una cuarteta armónica de puntos.

Consideremos ahora un plano Π que gira en torno a PP' como eje. Cada una de las intersecciones del plano con la esfera de inversión y con la esfera S_1 nos dan dos circunferencia coplanares respectivamente, a las cuales llamaremos C_i y C_1 .

Observemos que el radio de C_i es el mismo que el de S_i ya que Π gira en torno a un diámetro de la esfera de inversión, mientras que el radio de C_1 dependerá de la posición relativa de S_1 con respecto a S_i .

Por un teorema de puntos armónicos en el plano, ya que O es punto medio de A y A' , se tiene que $OP \cdot OP' = (OA)^2$. Ésto último indica que las circunferencias C_i y C_1 son ortogonales, por una propiedad que relaciona puntos armónicos con circunferencias ortogonales ([5, pp. 46-47]) y por un teorema de inversión para el plano, C_1 es una circunferencia autoinversa ([5, pp 94]).

Luego, al hacer girar a Π , podemos cubrir en su totalidad a las dos esferas al

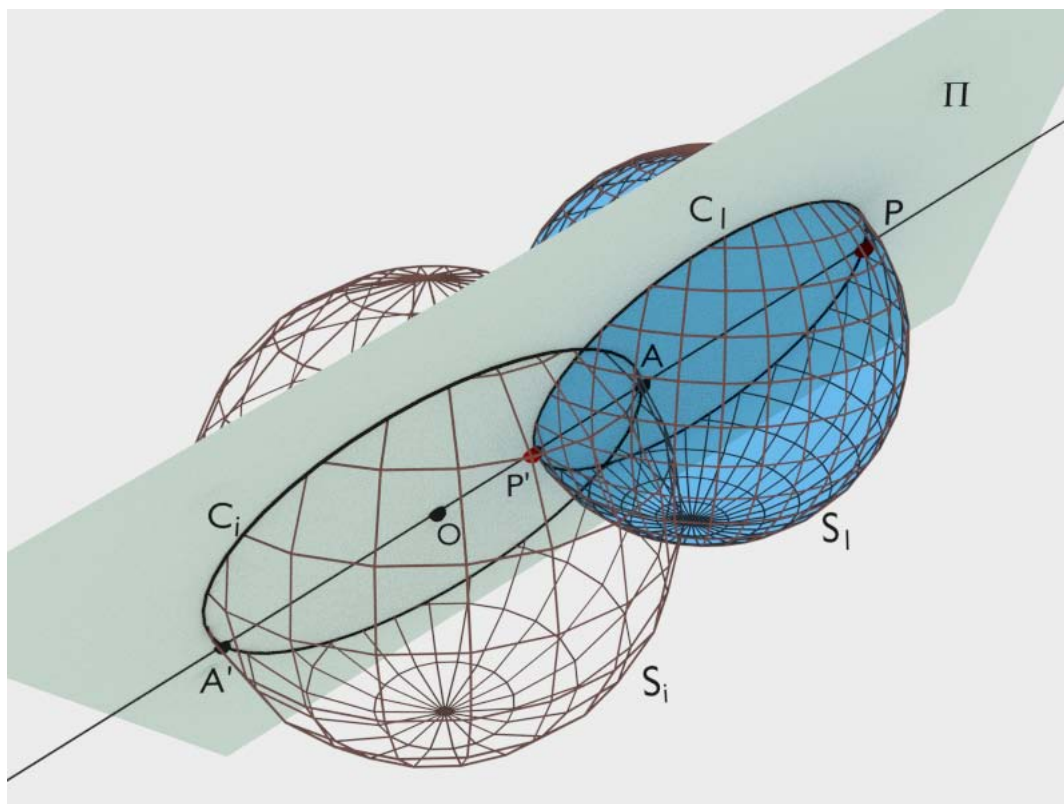


Figura 3.4: Circunferencias ortogonales C_i y C_1 obtenidas de intersectar la esfera de inversión y una esfera arbitraria, que pasa por un par de puntos mutuamente inversos, con un plano que también pasa por éstos.

girarlo una vuelta completa en torno a PP' , y como en cada intersección de Π con las dos esferas siempre se obtiene a C_i del mismo radio y otra circunferencia C_1 que es autoinversa con respecto a C_i , entonces S_1 es autoinversa con respecto a S_i .

Inversamente, sea ahora una esfera S que intersecta a la esfera de inversión S_i ortogonalmente y sea l una recta que pasa por O . Sean $A, B = l \cap S_i$ y $P, Q = l \cap S$.

Como se trata de esferas ortogonales entre sí, si consideramos un plano Π que pase por los puntos A, P, B, Q y que corte a las esferas de inversión y la ortogonal a ésta, entonces se obtendrán circunferencias ortogonales entre sí. Sean $C_i \in S_i \cap \Pi$ y $C \in S \cap \Pi$. Entonces por construcción $A, B \in C_i$ y $P, Q \in C$, y como éstas son

circunferencias ortogonales, entonces $(A, B; P, Q)$ es hilera armónica $\Rightarrow (OB)^2 = OP \cdot OQ \Leftrightarrow r^2 = OP \cdot OQ \Rightarrow Q = P'$.

Entonces si $D, E = C_i \cap C$, el arco DE interior a C_i se transforma en el arco DE exterior y recíprocamente quedando D y E fijos.

Hacemos girar a Π para cubrir ambas esferas como en el caso anterior y cada intersección del plano con las esferas nos dan un par de circunferencias ortogonales, donde la ortogonal a la que tomamos como C_i siempre es autoinversa. Por tanto S , esfera ortogonal a S_i , es autoinversa. ■

Teorema 3.10. *Una circunferencia que pasa por un par de puntos mutuamente inversos, o una circunferencia o recta ortogonales a la esfera de inversión, es analagmática.*

Demostración. En la demostración del teorema 3.9 ya se mostró que una circunferencia por un par de puntos inversos es analagmática y que es ortogonal a la esfera de inversión. También por la demostración incluida en este mismo teorema se tiene que una circunferencia ortogonal a la esfera de inversión es analagmática.

Una recta ortogonal a la esfera de inversión es un diámetro extendido de la misma y podemos verla como la intersección de dos planos que pasan por el centro de inversión, que por el teorema 3.8 sabemos que son autoinversos, así la intersección de estos queda fija y se invierte en sí misma, con lo cual la recta ortogonal a la esfera de inversión es analagmática. ■

Con estos resultados se tiene que las distintas figuras que son autoinversas son: la esfera de inversión, un plano por el centro de inversión, una esfera que pasa por un par de puntos mutuamente inversos, una circunferencia que pasa por un par de puntos mutuamente inversos, una recta por el centro de inversión; por otro lado, toda figura que es autoinversa intersecta a la esfera de inversión ortogonalmente, y las esferas, planos, rectas y circunferencias que intersectan or-

togonálmente a la esfera de inversión son autoinversas.

3.3. Inversión de planos, esferas, rectas y circunferencias

Hasta ahora solo hemos obtenido los inversos de éstas figuras cuando intersectan ortogonálmente a la esfera de inversión. La determinación de los inversos restantes las veremos a continuación.

Teorema 3.11. *El inverso de un plano que no pasa por el centro de inversión es una esfera que si pasa por ese punto, y viceversa.*

Demostración. Sea Π un plano tal que $O \notin \Pi$. Sea p recta perpendicular a Π (es decir una recta normal al plano) por O . Sea A el pie de la normal y sea A' el inverso de A .

Tomemos un punto $P \in \Pi$ ordinario, no ideal y distinto de A . Sea P' el inverso de P .

Unamos A' y P' . Luego como $OA \cdot OA' = r^2 = OP \cdot OP' \Leftrightarrow OA/OP = OP'/OA'$ y el ángulo entre ellos común, entonces $\triangle OAP \simeq \triangle OA'P'$ por criterio Lado-Ángulo-Lado.

Por lo anterior sabemos que $\angle O$ es común, que $\angle P = \angle A'$ y que $\angle A = \angle P' \Leftrightarrow \angle OP'A = 90^\circ$, es decir, el lugar geométrico de los puntos P' inversos de $P \in \Pi$ es el conjunto de puntos tales que $\angle OP'A = 90^\circ$, y ese conjunto es la circunferencia que pasa por estos tres puntos y que tiene como diámetro al segmento OA' . Luego al girar esta circunferencia en torno de la recta que pasa por los punto O y A , estaremos describiendo a la esfera de diámetro OA' y por tanto a $\Pi' = S$.

Inversamente si P' es un punto de la esfera S , se infiere, recorriendo al revés los pasos anteriores, que P está en el plano perpendicular a la línea de del diámetro $p = OA'$ que pasa por el inverso de A' . ■

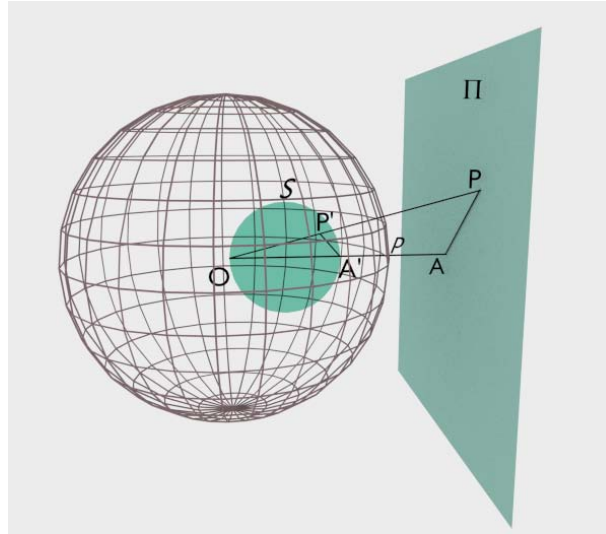


Figura 3.5: El inverso de un plano que no pasa por el centro de inversión es una esfera que pasa por el centro de inversión.

Teorema 3.12. *El inverso de una esfera que no pasa por el centro de inversión es una esfera del mismo tipo.*

Demostración. Sean S_i y S la esfera de inversión y la esfera que no pasa por el centro de inversión O respectivamente. Tómesese un punto $P \in S$ arbitrario, únase éste con O y prolonguemos para obtener una recta l . Sea Q el otro punto de intersección entre l y S .

Sea P' el inverso de P , sabemos entonces que $OP \cdot OP' = r^2$ y que $P' \in l$. Tomemos ahora el producto $OP \cdot OQ = k$, que es la potencia de O respecto a S .

Consideremos la siguiente proporción:

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP' \cdot OP}{OQ \cdot OP} = \frac{r^2}{k}$$

Como se observa ésta última es una constante. Sea entonces $K = r^2/k$ ésta constante. Esto implica entonces que

$$\frac{OP'}{OQ} = K$$

y esto a su vez implica que P' y Q son pares de puntos homotéticos. Podemos concluir entonces que el lugar geométrico de los puntos P' homotéticos a los puntos Q de S , es una figura semejante y por tanto una esfera. ■

Teorema 3.13. *El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia del mismo tipo, mientras que el inverso de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una línea que no pasa por ese punto, y viceversa.*

Demostración. Sea C una circunferencia que no pasa por O , centro de inversión, y sea S_i la esfera de inversión.

Sabemos que la intersección de un plano y una esfera siempre nos da como resultado una circunferencia, por lo que podemos considerar a C como el resultado de intersectar un plano y una esfera adecuados. Con esto en mente, sea S la esfera de diámetro el diámetro de C y que tiene centro en el centro de C . Sea también Π el plano que contiene a C . De esta forma $C = S \cap \Pi$.

Obtengamos ahora los inversos del plano y la esfera creadas: Como Π es plano que no pasa por O , entonces por el teorema 3.11, Π' es una esfera que pasa por O ; como S es una esfera que no pasa por O , entonces por el teorema 3.12, S' es también una esfera que no pasa por O .

Como por construcción $C = \Pi \cap S \Rightarrow C' = \Pi' \cap S'$ por reciprocidad de la inversión, pero ya que tanto Π' como S' son esferas, entonces la intersección de estas es una circunferencia que no pasa por O puesto que ninguna de estas dos esferas pasa por ese punto.

Para demostrar la segunda parte del teorema basta con repetir la prueba mencionada en el teorema 3.11 pero sustituyendo la palabra plano por recta y esfera por circunferencia. ■

Con todo lo demostrado hasta ahora, conocemos ya todas las opciones que obtenemos al invertir una esfera y una circunferencia que tienen un radio nulo,

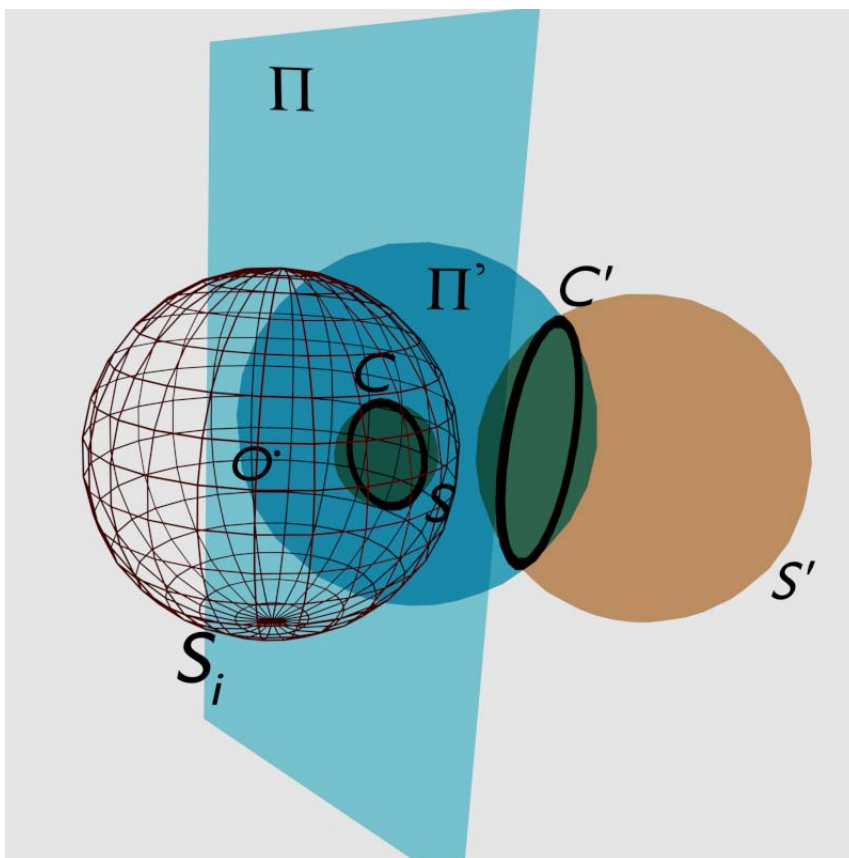


Figura 3.6: El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia del mismo tipo.

finito o infinito. Con esto nos basta para comenzar a ver el verdadero potencial de la inversión, como se demostrará con el siguiente resultado.

Teorema 3.14. *Si dos figuras son mutuamente inversas con respecto a una esfera, las figuras inversas de éstas con respecto a una segunda esfera tal que:*

- i) Su centro no está en la primera esfera, son mutuamente inversas respecto a la esfera inversa de la primera con respecto a la segunda.*
- ii) Su centro, que es el centro de inversión, está en la primera esfera y los inversos de las figuras son figuras simétricas una de la otra con respecto del plano en el cual la primera esfera es transformada.*

Demostración. i) Sea S_1 la esfera respecto a la cual las figuras F_1 y F_2 son inversas una de la otra, es decir que $(F_1)' = F_2$ respecto a S_1 , o bien que para cada punto $P_1 \in F_1$ existe un punto $P_2 \in F_2$ tal que $(P_1)' = P_2$ respecto a S_1 . Tomemos entonces un par de puntos P_1 y P_2 mutuamente inversos con respecto a S_1 de manera arbitraria en F_1 y F_2 respectivamente, y a continuación procedemos a obtener los inversos de éstos respecto a una segunda esfera S_2 cuyo centro no está en S_1 . Sean así S'_1, P'_1, P'_2, F'_1 y F'_2 los inversos de S_1, P_1, P_2, F_1 y F_2 respectivamente respecto a S_2 . Observemos que $P'_1 \in F'_1$ y que $P'_2 \in F'_2$. Se desea demostrar entonces que P'_1 y P'_2 son mutuamente inversos respecto a S'_1 .

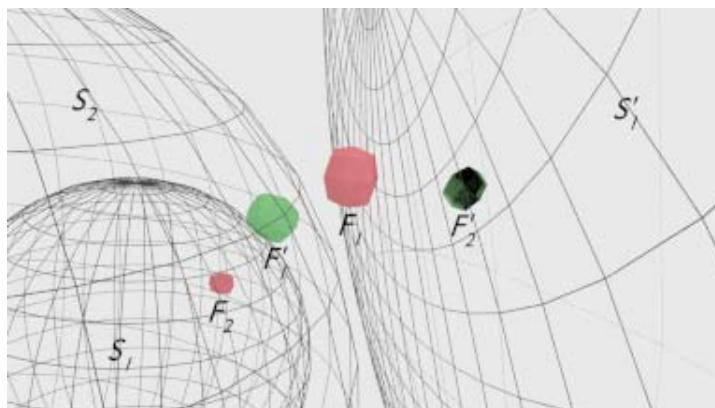


Figura 3.7: F_1 y F_2 (en rosa) son figuras mutuamente inversas con respecto a S_1 , y al invertir éstas con respecto a S_2 , los inversos F'_1 y F'_2 (en verde) serán mutuamente inversos respecto a S'_1 .

Sea l una recta que pasa por P'_1 y P'_2 , y sea l' su inverso respecto a S_2 , que por el teorema 3.13 sabemos que se trata de una circunferencia que pasa por O_2 , centro de la esfera S_2 , y es tal que $P_1, P_2 \in l'$.

Como l' pasa por puntos mutuamente inversos respecto a S_1 entonces por el teorema 3.10, l' es una circunferencia autoinversa respecto a S_1 , y por el teorema 3.7, l' y S_1 se cortan de manera ortogonal; luego, dado que la inversión conserva los ángulos, l y S'_1 también se intersectan de manera ortogonal, pero como l es una recta, entonces l debe pasar por el centro de S'_1 (Fig. 3.8).

Sean ahora m una recta por P_1 y P_2 , y m' su inversa respecto a S_2 , que por el teorema 3.13 se trata de una circunferencia que pasa por O_2 . También m' pasa

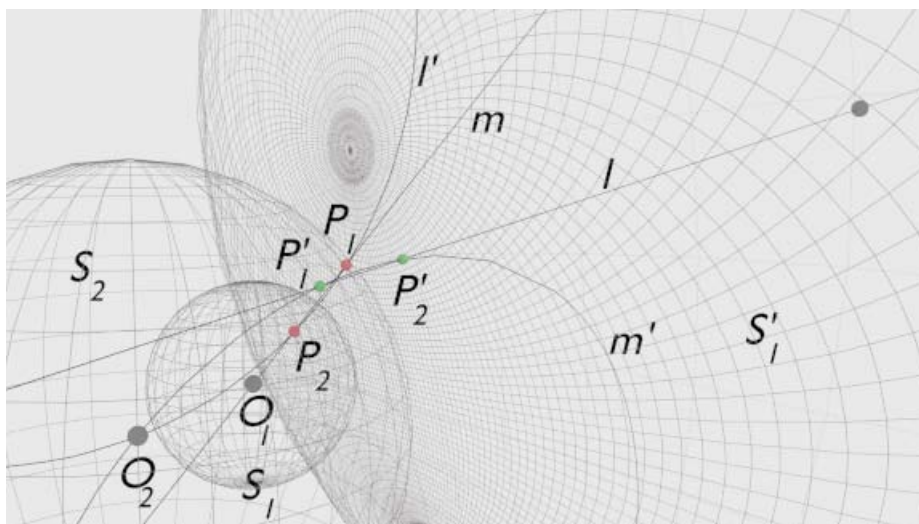


Figura 3.8: Demostración del teorema 3.14 i

por P'_1 y por P'_2 pues $P_1, P_2 \in m$.

Como por construcción m pasa por O_1 , centro de S_1 , entonces m y S_1 se intersectan de manera ortogonal, por lo que m' y S'_1 se intersectan ortogonalmente. Entonces m' es autoinversa con respecto a S'_1 por teorema 3.10, y como $\{P'_1, P'_2\} = m' \cap l$ esto implica que P'_1 y P'_2 son un par de puntos mutuamente inversos respecto de S'_1 . Así, los pares de puntos arbitrarios P'_1 y P'_2 , pertenecientes a las figuras F'_1 y F'_2 , son pares de puntos mutuamente inversos con respecto de S'_1 y por tanto F'_1 y F'_2 son figuras mutuamente inversas respecto de S'_1 , que es lo que se quería demostrar.

Un caso especial a considerar se da cuando la recta m que une a P_1 con P_2 pasa por el centro de O_2 de la esfera S_2 (Fig 3.9).

En este caso m se invierte con respecto de S_2 es sí misma por el teorema 3.10, por lo cual los puntos P'_1 y P'_2 , los inversos de P_1 y P_2 con respecto a S_2 , están también en m .

Sea C una circunferencia que tiene diámetro P_1P_2 . Entonces C , al pasar por un par de puntos mutuamente inversos respecto a S_1 , es autoinversa respecto de S_1 , y por el teorema 3.7 S_1 y C se cortan ortogonalmente.

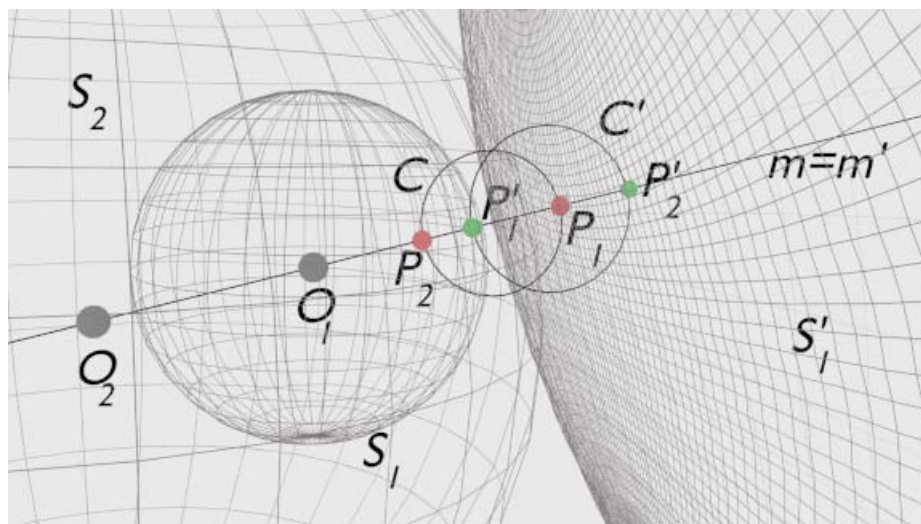


Figura 3.9: Caso especial de la demostración del teorema 3.14 i

Consideremos los inversos C' y S'_1 respecto a S_2 . Sabemos que C' es una circunferencia que no pasa por O_2 y S'_1 es una esfera que no pasa por O_2 como en el caso anterior. Luego, S'_1 y C' se intersectan en el mismo ángulo que lo hacían S_1 y C , es decir que se cortan ortogonalmente, y por el hecho de que $\{P_1, P_2\} = C \cap m$, entonces $\{P'_1, P'_2\} = C' \cap m'$.

Ya que C' es autoinversa respecto a S'_1 por el teorema 3.10, se tiene que P'_1 y P'_2 son puntos mutuamente inversos respecto a S'_1 , que es lo que se quería demostrar.

ii) Para demostrar este inciso basta con repetir lo visto en la demostración de arriba cambiando el hecho de que ahora $O_2 \in S_1$, es decir que el centro de inversión pertenece a la primera esfera, y que el inverso S'_1 de S_1 con respecto de S_2 ahora se trata de un plano que no pasa por O_2 puesto que S_1 pasa por el centro de inversión (teorema 3.11).

Otro aspecto importante a considerar al ir siguiendo la demostración anterior es que se puede considerar al plano S'_1 como una esfera de radio infinito para que el resto de las aseveraciones tengan sentido.

De esta manera concluimos que, no solo los puntos P'_1 y P'_2 son mutuamente inversos con respecto de S'_1 tal y como se concluyó en la demostración anterior,

sino que también son simétricos con respecto al plano S'_1 ya que:

1.- l es ortogonal a S'_1 , entonces se trata de una línea normal a S'_1 en el punto donde se intersectan éstos.

2.- m' también es ortogonal a S'_1 , y ya que m' es una circunferencia, entonces el centro de m' está en S'_1 , y así, S'_1 es plano de simetría de m' .

3.- Por último como $m' \cap l = \{P'_1, P'_2\}$, entonces éstos puntos equidistan del plano y pertenecen a una línea ortogonal al plano S'_1 .

De manera análoga se demuestra el caso especial en que la recta m pasa por O_2 , salvo que en la discusión antes mencionada se substituye el papel de C' por el de m' y el de m por l . ■

Teorema 3.15. *Si dos figuras son mutuamente inversas con respecto a dos esferas, entonces éstas figuras son mutuamente inversas respecto al inverso de una esfera con respecto a la otra; en otro caso, son la reflexión la una de la otra con respecto al plano que es el inverso de una esfera con respecto a la otra.*

Demotración. Sean F_1 y F_2 dos figuras mutuamente inversas con respecto a S_1 y S_2 , dos esferas en \mathbb{R}^3 .

Sean O_1 y O_2 los centros de S_1 y S_2 respectivamente. Sin pérdida de generalidad supongamos que invertimos S_1 con respecto de S_2 y supongamos también que S_1 no pasa por O_2 , el centro de inversión. Sea entonces S'_1 el inverso de S_1 respecto de S_2 .

Sí invertimos F_1 y F_2 respecto de S_2 , los inversos de éstas serán figuras mutuamente inversas con respecto de S'_1 (teorema 3.14), pero como F_1 y F_2 son mutuamente inversas respecto a S_2 , entonces se invierten respectivamente en F_2 y F_1 , es decir $(F_1)' = F_2$ y $(F_2)' = F_1$ son mutuamente inversas con respecto de S'_1 , donde ésta última es una esfera que no pasa por el centro de inversión pues S_1 tampoco pasa por el centro de inversión (teorema 3.12).

En el caso en el que S_1 pasa por O_2 , entonces por el teorema 3.11 al invertir

ésta esfera respecto de S_2 , obtenemos un plano que no pasa por O_2 y luego, al aplicar el teorema 3.14, las figuras F_1 y F_2 son inversas respecto de S'_1 , y más aún, son figuras simétricas una de la otra con respecto del plano S'_1 . ■

3.4. La esfera de antisimilitud

En esta sección se verán un par de teoremas relacionados con esta esfera, que en el caso del plano lleva el nombre de circunferencia de antisimilitud.

El descubrimiento de la esfera de antisimilitud y sus propiedades son consecuencia del teorema 3.12, donde se encuentra una propiedad entre esferas mutuamente inversas, misma que se describirá a profundidad en la siguiente serie de teoremas.

Teorema 3.16. *Si dos esferas son mutuamente inversas, el centro de inversión es un centro de similitud para éstas. La razón de similitud en valor absoluto es la razón de sus radios.*

Demostración. Sean dos esferas S y S' mutuamente inversas respecto a una esfera de inversión S_i .

Tomemos la recta que pasa por P y P' , un par de puntos mutuamente inversos que están en S y en S' respectivamente, y consideremos las otras dos intersecciones de ésta recta con las esferas mutuamente inversas. Llamemos Q y Q' a estos puntos en S y S' de manera respectiva. En el caso en el que las esferas no se intersectan y son mutuamente excluyentes suponemos además que la recta por P y P' no es tangente a S para poder asegurar la existencia de Q y Q' .

Es claro que Q y Q' son puntos mutuamente inversos respecto a S_i pues están en la intersección de una recta por el origen y un par de esferas mutuamente inversas.

Como $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2$, donde O es el centro de inversión, y como $OP \cdot OQ = k$ es una constante por tratarse de la potencia de O respecto a S ,

tenemos que:

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP' \cdot OP}{OQ \cdot OP} = \frac{r^2}{k}$$

y ésto a su vez implica que, como r^2/k es una constante, digamos κ , entonces

$$\frac{OP'}{OQ} = \kappa$$

La última igualdad indica entonces que el par de puntos P' y Q son homotéticos con razón de homotecia igual a κ .

De igual forma, para el par de puntos Q' y P , podemos demostrar que son un par de puntos homotéticos considerando la siguiente cadena de igualdades:

$$\frac{OQ'}{OP} = \frac{OQ' \cdot OQ}{OP \cdot OQ} = \frac{r^2}{k} = \kappa$$

Así, el par de esferas S y S' son homotéticas y el centro de similitud es O , el centro de inversión.

Observemos que los pares de puntos mutuamente inversos son a su vez pares de puntos antihomólogos.

Para demostrar la segunda parte del teorema, sean O_1 y O_2 los centros de las esferas S y S' de manera respectiva y tomemos un par de puntos homólogos R_1 y R_2 en S y S' de forma tal que éstos son puntos antípodas de P y Q' respectivamente. Como PR_1 y $Q'R_2$ son diámetros paralelos de S y S' , entonces, al considerar la línea de los centro de las esferas se tiene que $\angle OO_1P = \angle OO_2Q'$. También $\angle OPO_1 = \angle OQ'O_2$ ya que P y Q' son colineales y están en los diámetros paralelos de las esferas. Por último, como el ángulo en O es común o es un par de ángulos opuestos por el vértice en O , para los triángulos $\triangle OPO_1$ y $\triangle OQ'O_2$ se tiene que son semejantes por el criterio ángulo-ángulo-ángulo.

Lo anterior implica que la proporción entre los lados de los triángulos semejantes se preserva y así

$$|\kappa| = \frac{OQ'}{OP} = \frac{OO_2}{OO_1} = \frac{Q'O_2}{PO_1}$$

donde la última proporción es la de los radios de S y S' , que es igual al valor absoluto de la razón de similitud.

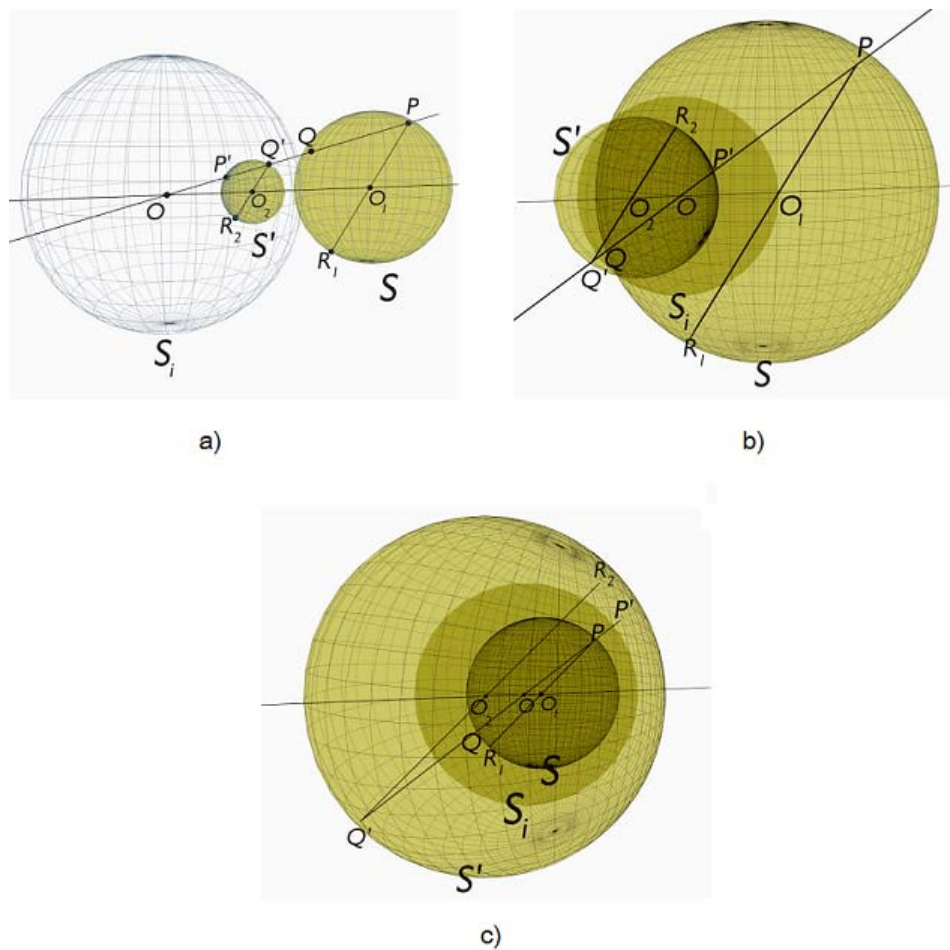


Figura 3.10: Distintos casos de esferas mutuamente inversas donde el centro de inversión es un centro de similitud: a) No se intersectan y son mutuamente excluyentes b) Se intersectan c) No se intersectan y una contiene a la otra.

Se considera el valor absoluto ya que se puede tratar de una constante de homotecia negativa como en el caso en el que las esferas mutuamente inversas se intersectan. ■

Pasemos ahora a la definición que ocupa esta sección en particular y de la cual estudiaremos sus posibilidades a detalle a continuación en los próximos teoremas.

Definición 3.3. Una esfera respecto a la cual dos esferas son mutuamente inversas es llamada *esfera de antisimilitud* para ellas.

Corolario 3.2. *Dadas dos esferas de radios distintos, puntos que son antihomólogos son mutuamente inversos con respecto de la esfera de antisimilitud, cuando ésta existe. Recíprocamente, puntos mutuamente inversos respecto de la esfera de antisimilitud son antihomólogos.*

Demostración. Consideremos dos esferas S y S' de radios distintos y supongamos que existe su esfera de antisimilitud, por lo que éstas son mutuamente inversas. Por teorema 3.16 sabemos entonces que el centro de la esfera de antisimilitud O es un centro de similitud de ellas.

Si trazamos una recta l por O y cortamos a S en dos puntos P y Q , cortaremos entonces a S' en los homotéticos de P y Q , digamos P' y Q' . Entonces tenemos que

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'} = k,$$

por lo que las parejas de puntos P, Q' , y P', Q , son puntos antihomólogos. Como estos puntos pertenecen a l , que es autoinversa respecto a la esfera de antisimilitud, y como S y S' son mutuamente inversas respecto de ella, entonces debe haber parejas de estos puntos tales que sean puntos mutuamente inversos. De la ecuación de arriba podemos ver que $OP \cdot OQ' = OQ \cdot OP'$, mientras que $OP \cdot OP' = k(OP')^2 \neq k(OQ')^2 = OQ \cdot OQ'$, por lo que los puntos que son antihomólogos son los únicos que cumplen que el producto de sus distancias a O son constantes, de aquí que son mutuamente inversos respecto a la esfera de antisimilitud.

La otra parte de la demostración es idéntica a la que se ve en la primera parte del teorema 3.16. ■

El siguiente teorema nos dice cuando es posible determinar la existencia de la esfera de antisimilitud.

Teorema 3.17. *Cualesquiera dos esferas de radios desiguales tienen una esfera de antisimilitud. Cuando éstas se intersectan en una circunferencia entonces tienen una segunda esfera de antisimilitud. Cuando no se intersectan o tocan y son no concéntricas hay otra esfera tal que las dos esferas son intercambiadas por una inversión en ésta seguida de una reflexión en su centro.*

Demostración. Sean S y S' dos esferas que tienen radios distintos. Consideremos a alguno de los centros de similitud O y tomemos un par de puntos antihomólogos P y P' . Luego con centro en O y radio $r = \sqrt{OP \cdot OP'}$, tracemos una esfera S_a . Luego como $r^2 = OP \cdot OP'$, entonces los puntos antihomólogos son puntos inversos respecto de S_a , por lo que S_a es la esfera de antisimilitud de las esferas S y S' .

Como puede observarse, la existencia de S_a depende de que $OP \cdot OP' > 0$, lo que a su vez depende de la posición de las esferas S y S' , además de cual sea el centro de similitud que se tome en consideración, ya que este producto no siempre es positivo para ambos. Veamos a continuación los distintos casos en los cuales se cumple dicha condición.

Si las esferas no se intersectan entonces los segmentos que unen O a un par de puntos antihomólogos P y P' tienen el mismo signo para uno solo de los dos centros de similitud. Si las esferas son mutuamente excluyentes, entonces el centro de similitud es externo, es decir que $O = K$, mientras que si una está contenida dentro de la otra, entonces el centro de similitud es interno. De esta forma $OP \cdot OP' > 0$ (véase figura 3.10). De aquí que en estos casos haya una sola esfera de antisimilitud. También podemos observar que si las esferas S y S' son concéntricas entonces $O = H = K$, por lo que solo tienen una esfera de antisimilitud. Si las esferas S y S' son tangentes una a la otra entonces solo existe una esfera de antisimilitud con centro en K pues H coincide con ser el punto común de tangencia, por lo que si invirtieramos respecto a este punto entonces S y S' se invertirían en planos.

Supongamos ahora que las esferas son tales que se intersectan en una circunferencia. En este caso cada uno de los centros de similitud H y K cumplen que

los segmentos que unen a éstos con un par de sus puntos antihomólogos tienen el mismo signo, con lo que se cumple la condición para que existan dos esferas de similitud en vez de una sola. Nótese que cada una de éstas pasa por los puntos comunes a las esferas dadas.

Po último, si consideramos que el par de esferas son no concentricas y mutuamente excluyentes, sabemos que éstas, por lo ya mencionado, solo tienen una esfera de antisimilitud con centro en K . Consideremos el centro de homotecia H con respecto del cual la razón de homotecia de sus puntos homotéticos es negativa. Tomemos un par de puntos antihomólogos P y P' en S y S' y con centro en H y radio $r = \sqrt{HP \cdot HP'}$ formemos una esfera S_1 . Ésta esfera no puede ser de antisimilitud ya que los pares de puntos antihomólogos, que fungen como pares de puntos mutuamente inversos, no quedan de un mismo lado de la recta que los contiene respecto a H . De esta manera, al invertir a S y a S' respecto de S_1 se invierten respectivamente en S' y en S , salvo la colocación de éstas pues son simétricas con las esferas originales con respecto a H (esto sucede ya que la razón de homotecia es negativa), con lo cual al considerar una reflexión de las esferas invertidas con centro de reflexión H , obtenemos las esferas originales. Lo anterior ocurre de manera análoga cuando consideramos que una esfera contiene a la otra, pero en esta situación H es el centro de la esfera de similitud. ■

Definición 3.4. Si una esfera de antisimilitud tiene centro en K entonces la esfera será llamada *esfera de antisimilitud exterior*, y será denotada por S_E . En el otro caso, cuando su centro es H , la esfera será llamada *esfera de antisimilitud interior*, y será denotada por S_I .

Teorema 3.18. *El radio del inverso de una esfera, que no pasa por el centro de inversión, es igual al radio de la esfera dada multiplicado por el cuadrado del radio de inversión, dividido por el valor absoluto de la potencia del centro de inversión con respecto a la esfera dada.*

Demostración. Sean S y S' la esfera dada y su inversa con respecto a la esfera de inversión S_i , cuyo centro es O_i .

Sabemos por el teorema 3.16 que como se trata de esferas mutuamente inversas, entonces son homotéticas con razón de homotecia κ para algún $\kappa \in \mathbb{R}$ y O_i es un centro de similitud para éstas. También sabemos que si r_1 y r_2 son los radios de la esfera dada y su inversa respectivamente, entonces

$$|\kappa| = \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad r_2 = |\kappa| \cdot r_1.$$

A la constante κ la podemos obtener fácilmente recordando la demostración vista en el teorema 3.16. Dados dos puntos homotéticos P y Q' , tomados respectivamente de S y S' , tenemos por un lado que $O_i P \cdot O_i P' = r^2$, siendo P' el inverso de P y Q el inverso de Q' . Luego $O_i P' \cdot O_i Q' = Pot(O_i, S')$. Entonces

$$|\kappa| = \frac{O_i P}{O_i Q'} = \frac{O_i P \cdot O_i P'}{O_i Q' \cdot O_i P'} = \frac{r^2}{Pot(O_i, S')} \quad \Rightarrow \quad |\kappa| = \frac{r^2}{|Pot(O_i, S')|}$$

y así, sustituyendo el valor de $|\kappa|$ en la igualdad de arriba obtenemos

$$r_2 = \frac{r^2}{|Pot(O_i, S')|} \cdot r_1$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Teorema 3.19. *El inverso del centro de una esfera, que no pasa por el centro de inversión, es el inverso del centro de inversión con respecto al inverso de la esfera dada.*

Demostración. Sea S_i la esfera de inversión y sea O_i el centro de ésta. Tomemos una esfera S de centro O_1 tal que $O_i \notin S$ y sea S' la esfera que es el inverso de S respecto a S_i y que tiene centro O_2 .

Sea m la línea de los centros de éstas esferas y sea l una recta que pase por O_1 tal que no pase por O_i . De esta forma l es una recta ortogonal a S y entonces al considerar el inverso de l , tendremos una circunferencia l' que pasa por el

centro de inversión O_i y que es ortogonal a S' puesto que la inversión conserva los ángulos en que se intersectan las figuras. Luego, como l pasa por O_1 , entonces l' pasa por O'_1 , y por otro lado, como m es una recta por O_i entonces es su propia inversa y también $O_1 \in m$, por lo cual $O'_1 \in m$, es decir, $O'_1 \in l' \cap m$ (Fig. 3.11).

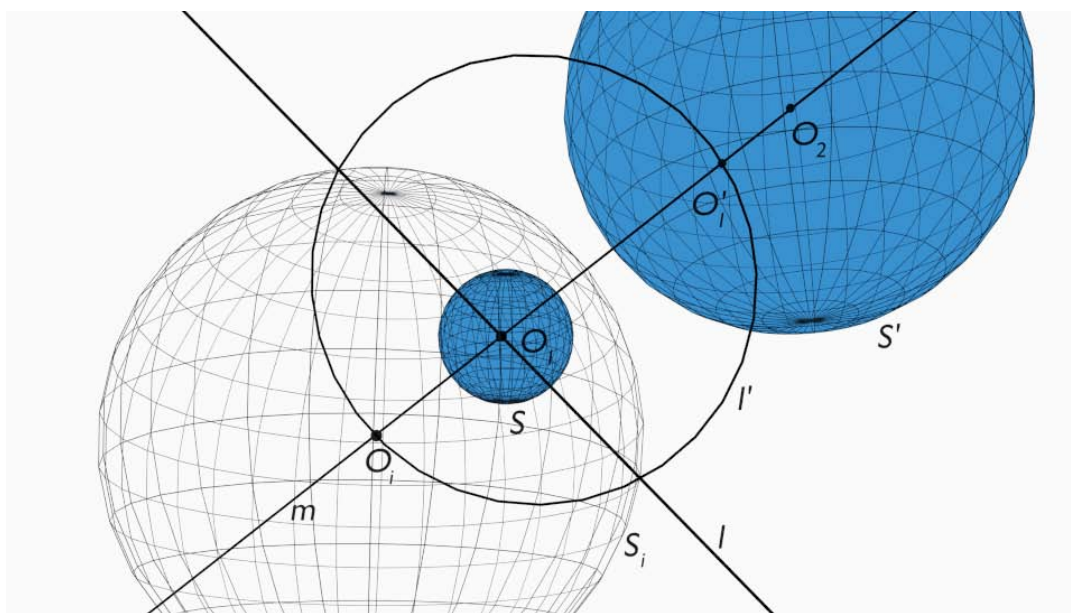


Figura 3.11: El inverso de O_1 es el inverso de O_i respecto a S' .

Como l' y S' son figuras que se cortan ortogonalmente, entonces l' es una circunferencia analagmática respecto de S' , y de igual forma lo es m ya que pasa por O_2 . Por tanto, el inverso de O'_1 respecto de S' es el otro punto que resulta de la intersección de las curvas analagmáticas l' y m que no es O'_1 , es decir, el punto O_i , que es el centro de S_i , la primera esfera con respecto a la cual invertimos. ■

Teorema 3.20. *El inverso del centro de una esfera, que pasa por el centro de inversión, es el punto simétrico del centro de inversión con respecto al plano que es el inverso de la esfera dada.*

Demostración. Tomemos la notación de las figuras de la demostración del

teorema anterior para nombrar las figuras usadas en esta demostración.

Como en el teorema anterior, sea S la esfera dada pero en este caso $O_i \in S$, y su inverso S' , es un plano que no pasa por O_i .

La recta l que pasa por O_1 , que es por tanto ortogonal a S , y que no pasa por O_i se invierte en l' , una circunferencia por O_i que es ortogonal a S' , es decir, el plano S' es un plano de simetría para la circunferencia l' .

Como m es la línea de los centros de las esferas S_i y S , m es autoinversa con respecto a S_i y es además ortogonal a S , entonces es ortogonal a S' . De esta forma m es una recta normal al plano S' .

Por último, como $l' \cap m = \{O_i, O'_1\}$, entonces éstos puntos son diametralmente opuestos y por ser S' es el plano de simetría de l' , entonces el centro de inversión (O_i) y el inverso del centro de la esfera dada (O'_1) son puntos simétricos con respecto al plano S' , que es el inverso de la esfera dada. ■

3.5. Ejercicios

1. Demuestre que si cuatro puntos armónicos son invertidos con respecto a cualquier punto distinto a los cuatro y en su línea, como centro de inversión, se obtienen cuatro puntos armónicos.
2. Una figura consiste de las caras completas (es decir planos) de un hexaedro y sus cuatro diagonales. Estudiar la figura obtenida por inversión con uno de los vértices del cuadrado como centro de inversión.
3. Si una figura se invierte con respecto a dos esferas concéntricas distintas de inversión, las figuras inversas son homotéticas con el centro de inversión como centro de similitud.
4. Tres pares de puntos inversos con respecto a una esfera dada, no tres de estos colineales, son coesféricos, o en otras palabras pertenecen a la misma esfera.
5. Construir una esfera que pase por un punto dado y que corte a dos esferas dadas bajo ángulos dados.
6. Investigue en que casos es posible construir una esfera que pase por un punto dado y que corte a tres esferas dadas bajo ángulos dados.

Capítulo 4

Esferas Coaxiales

Ninguna parte de la geometría de la esfera sigue tan de cerca la analogía de la geometría del círculo como lo son los sistemas coaxiales de esferas y sus sistemas aliados.

4.1. Planos, ejes, y centros radicales

En el caso bidimensional, gran parte del estudio de circunferencias coaxiales hacía uso del eje radical, que es el lugar geométrico de puntos cuyas potencias con respecto a dos circunferencias no concéntricas son iguales. De igual manera gran parte del mismo se basa en el centro radical, es decir el punto cuyas potencias respecto a tres circunferencias es igual. Pero ahora no solo encontraremos ejes radicales y centros radicales, puesto que las posibilidades aumentan cuando pensamos en tres dimensiones, además de que eventualmente habremos de redefinir, en algunos casos, ciertos conceptos para hacerlos concordar con nuestro tratamiento.

Teorema 4.1. *El lugar geométrico de puntos cuyas potencias con respecto a dos esferas no concéntricas son iguales, es un plano perpendicular a la línea de los centros, y contiene todos los puntos comunes a las dos.*

Demostración. Consideremos en primer lugar dos esferas no concéntricas S_1 y S_2 , cuyos centros son O_1 y O_2 y cuyos radios son r_1 y r_2 . Sea P un punto tal que tiene la misma potencia con respecto a estas esferas. Sea Π un plano por P perpendicular a la línea de los centros O_1O_2 (Fig. 4.1). Entonces

$$Pot(P, O_1) = Pot(P, O_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PO_1}^2 - r_1^2 = \overline{PO_2}^2 - r_2^2.$$

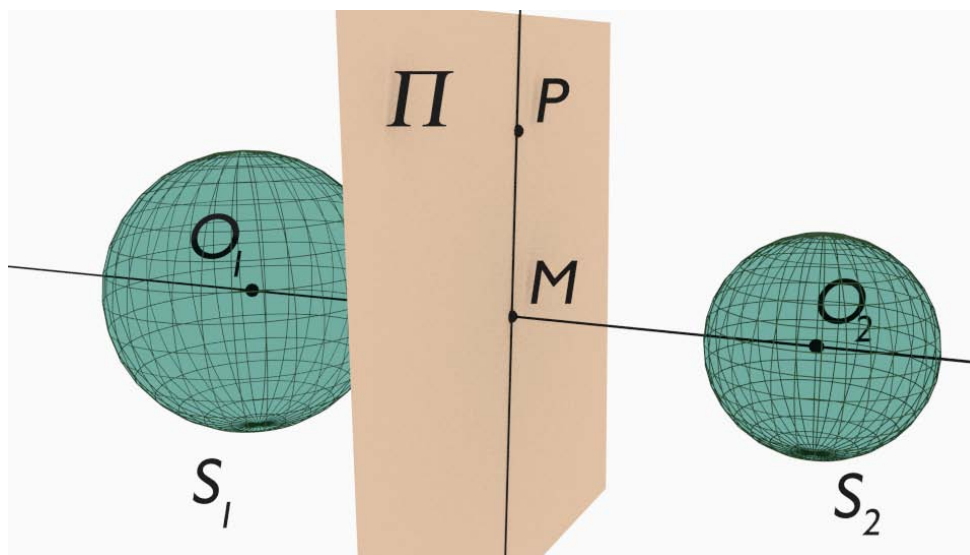


Figura 4.1: El plano radical Π de dos esferas no concéntricas.

Tracemos una línea por P que esté contenida en Π y que corte a la línea de los centros. Llamemos a este punto de intersección M . De esta forma obtenemos dos triángulos rectángulos PO_1M y PO_2M , y por el teorema de Pitágoras, al restar \overline{MP}^2 de cada lado de la última igualdad nos da

$$\overline{O_1M}^2 - r_1^2 = \overline{MO_2}^2 - r_2^2,$$

y puesto que $O_1M + MO_2 = O_1O_2$, tenemos

$$\overline{O_1M}^2 - r_1^2 = \overline{MO_2}^2 - r_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{O_1M}^2 - \overline{MO_2}^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(O_1M - MO_2) \cdot (O_1M + MO_2) = r_1^2 - r_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad O_1M - MO_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{O_1O_2}.$$

Veamos ahora que hay sólo un punto M en O_1O_2 que satisface esta igualdad. Si N es un punto cualquiera semejante, tenemos

$$O_1M - MO_2 = O_1N - NO_2;$$

esto es

$$(O_1N + NM) - MO_2 = O_1N - (NM + MO_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$O_1N - MN - MO_2 = O_1N + MN - MO_2,$$

y entonces $MN = 0$; es decir, N coincide con M .

Por lo tanto, si un punto tiene potencias iguales con respecto a las dos esferas S_1 y S_2 , está en el plano perpendicular a la línea de los centros. Inversamente, se demuestra, invirtiendo los pasos antes dados, que, si P está en el plano perpendicular a O_1O_2 que pasa por M , sus potencias con respecto a estas esferas son iguales. ■

Si dos esferas se intersectan, el plano Π pasará por la circunferencia que se obtiene de la intersección de éstas, ya que en particular, esos puntos tienen potencia cero por estar en ambas esferas a la vez. Si son tangentes una a la otra, el plano pasará por el punto de contacto y será tangente a las esferas.

El plano Π obtenido en el teorema anterior lleva por nombre *plano radical*.

Definición 4.1. El *plano radical de dos esferas* es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a dos esferas, son iguales.

Cabe destacar que la notación para dotar de nombre a un plano radical específico no es única, pero una buena convención para ello es darle el nombre de Π y copiar los subíndices, separados por una coma, de las esferas de las cuales es plano radical, por ejemplo, si tenemos a las esferas S_1 y S_2 , entonces al plano radical de éstas será $\Pi_{1,2}$.

Definición 4.2. Una colección de esferas tal que el mismo plano es plano radical de todo par de ellas, será llamado un *sistema coaxial de esferas* y se denotará por la letra griega Σ . Además, las esferas del sistema coaxial se dice que son *coaxiales* y el plano radical de los pares de esferas coaxiales se llama *plano radical del sistema coaxial de esferas*.

Al referirnos al plano radical de un sistema coaxial de esferas, por cuestiones prácticas, solo diremos que es un plano radical, aunque dependiendo del contexto podemos reconocer fácilmente cuando estamos hablamos del plano de un sistema o del plano de un par de esferas en específico.

Teorema 4.2. *Dadas tres esferas, las cuales no son concéntricas por pares, los planos radicales que ellas determinan tomadas por pares pasan por una línea, son paralelos, o coinciden.*

Demostración. Consideremos primero tres esferas, cuyos centros no son colineales, y sea l la recta que resulta de la intersección del plano radical de la primera y segunda con el de la segunda y tercera. Entonces l tendrá potencias iguales con respecto a las tres esferas, y entonces el plano radical de la primera y tercera también pasará por l .

Si los centros de las tres esferas son colineales, los planos radicales de éstas son paralelos ya que, como se vio en el teorema 4.1, cada plano radical es perpendicular a la línea de los centros del par de esferas que lo determinan, la cual en este caso es la misma para las tres esferas.

También puede ocurrir que dos planos coincidan, en cuyo caso el tercero también coincidirá con estos, por lo que las 3 esferas pertenecen a un solo sistema coaxial. Esto sucede pues las tres esferas tienen potencias iguales con respecto del mismo plano. ■

La línea conocida como eje radical era, en el caso de sistemas coaxiales de

circunferencias, la versión bidimensional del plano radical para sistemas coaxiales de esferas. Redefinimos a continuación este concepto como la recta que acabamos de hallar en la demostración del teorema pasado.

Definición 4.3. Dadas 3 esferas no concéntricas por pares, cuyos centros no son colineales, su *eje radical* es el lugar geométrico de puntos cuyas potencias con respecto a las tres esferas, son iguales. También podemos interpretarla como la recta que resulta de la intersección de los 3 planos radicales de éstas esferas tomadas por pares.

Teorema 4.3. Dadas cuatro esferas, las cuales no son concéntricas por pares, los planos radicales que ellas determinan tomadas por pares son:

- i) Paralelos cuando los centros son colineales.
- ii) Paralelos a una línea cuando los centros son coplanares.
- iii) Concurrentes en un punto cuando los centros no son coplanares.

Demostración. El caso cuando los centros de las esferas son colineales es completamente análogo al que sucede cuando se tienen 3 esferas (véase teorema 4.2).

Si los centros de las esferas son coplanares, entonces las líneas de los centros de las esferas tomadas por pares también son coplanares y están en el mismo plano en el que están los centros de las esferas. Sea l una recta perpendicular a éste plano. Luego, como cada plano radical es perpendicular a la línea de los centros de las esferas que lo determinan, entonces son perpendiculares al plano que contiene los centros de las esferas, y por tanto, son paralelos a l .

Consideremos ahora que los centros de las esferas no son coplanares, y sea m la recta que resulta de la intersección del plano radical de la primera y segunda con el de la segunda y tercera esferas, es decir m es el eje radical de éstas tres esferas (por lo que el plano radical de la primera y tercera esferas pasará también por m). Observemos que m existe ya que tres esferas siempre tienen centros coplanares. Luego, como la cuarta esfera tiene centro no coplanar con la tres

primeras, entonces el plano radical de la primera y la cuarta debe intersectar a m en un punto P , que tendrá potencias iguales con respecto a las cuatro esferas, por lo que los planos radicales restantes también deberán pasar por P . Dado que la intersección de cuatro planos no paralelos es un punto, entonces P es el punto de concurrencia de los seis planos radicales que determinan por pares las cuatro esferas no coplanares. ■

En el caso plano, al punto de concurrencia de tres ejes radicales de tres circunferencias tomadas en pares, es llamado su *centro radical*. Aquí haremos uso del mismo nombre pero redefiniremos su significado para efectos de nuestro estudio.

Definición 4.4. El punto de concurrencia de los seis planos radicales de cuatro esferas no coplanares tomadas por pares, es llamado su *centro radical*.

Teorema 4.4. *El valor numérico de la diferencia de potencias de un punto con respecto a dos esferas no concéntricas, es dos veces el producto de su distancia desde el plano radical de éstas y la distancia que hay entre los centros de las esferas.*

Demostración. Sea P un punto en \mathbb{R}^3 y sean S_1 y S_2 las esferas no concéntricas con centros en O_1 y O_2 .

Tracemos la línea de los centros O_1O_2 y luego, desde P , una perpendicular a ésta última y llamemos H al pie de esta perpendicular. Nótese que la línea de los centros y P determinan un plano. Entonces, si recordamos el teorema 1.1 (véase la sección 1.1), la recta PH es el lugar geométrico de un punto, cuya diferencia de potencias con respecto a las circunferencias coplanares con la línea de los centros y P es constante, y por la definición de potencia en el espacio, también lo es con respecto a las esferas S_1 y S_2 . Lo anterior implica que

$$Pot(P, S_1) - Pot(P, S_2) = Pot(H, S_1) - Pot(H, S_2) = \overline{HO_1}^2 - \overline{HO_2}^2 - r_1^2 + r_2^2.$$

Sea M la intersección de O_1O_2 con el plano radical de las esferas y conside-

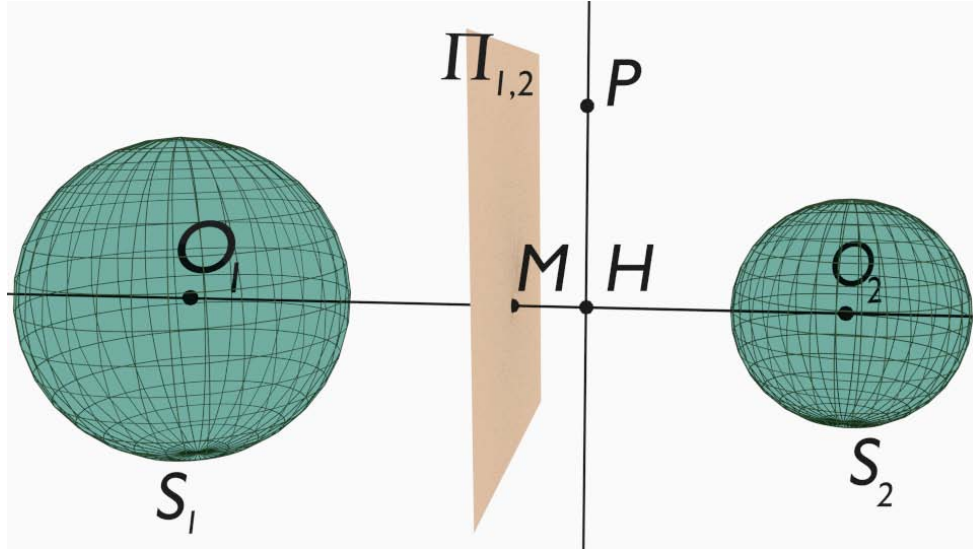


Figura 4.2

remos ahora a este punto dentro de la última igualdad que obtuvimos, es decir:

$$\begin{aligned} \overline{HO_1}^2 - \overline{HO_2}^2 - r_1^2 + r_2^2 &= (HM + MO_1)^2 - (HM + MO_2)^2 - r_1^2 + r_2^2 = \\ &= \overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 + 2HM(MO_1 - MO_2) - r_1^2 + r_2^2 = \\ &= \overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 - r_1^2 + r_2^2 + 2HM \cdot O_2O_1, \end{aligned}$$

y puesto que M pertenece al plano radical de las dos esferas se tiene que $\overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0$, ya que ésta cantidad es la diferencia potencias de M respecto a S_1 y respecto a S_2 . De esta manera, después de esta cadena de igualdades, llegamos a que $Pot(P, S_1) - Pot(P, S_2) = 2HM \cdot O_2O_1$. ■

Un hecho que resulta inmediato a partir del teorema anterior, es que si hacemos que la diferencia de potencias de un punto con respecto a dos esferas sea constante, entonces el punto describe un plano paralelo al plano radical de las dos esferas. Para ver esto analicemos la ecuación $Pot(P, S_1) - Pot(P, S_2) = 2HM \cdot O_2O_1$.

Lo que nos dice el lado derecho de esta ecuación, es que el valor de la diferencia de potencias de P respecto a las dos esferas, solo depende de la distancia de

los centros de las esferas y la distancia entre M y H , es decir, de cuatro puntos sobre la línea de los centros. Esto indica que una vez fijado el punto H , el lugar geométrico de puntos descrito por el haz de rectas perpendiculares a la línea de los centros y que tiene centro en H , cumple con la ecuación de arriba, lo que demuestra nuestra afirmación.

Corolario 4.1. *El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de potencias respecto a dos esferas es constante, es un plano paralelo al plano radical.*

El par de teoremas que a continuación se presentan serán de gran utilidad para comprender como, bajo circunstancias especiales, la forma en que se intersectan las esferas nos da mucha información con respecto del comportamiento un sistema coaxial de esferas.

Teorema 4.5. *Si una esfera es intersectada por otras dos, ya sea ortogonalmente o en circunferencias de diámetro máximo, su centro yace en el plano radical de éstas dos últimas.*

Demostración. Sea P el centro de la esfera S que es intersecta a las esferas S_1 y S_2 , cuyos centros son respectivamente O_1 y O_2 .

Pensemos en primer lugar que S las intersecta de manera ortogonal y llamemos A_1 a un punto en la intersección de S_1 con S , y A_2 a un punto en la intersección de S_2 con S . Entonces PA_1 , que es radio de S , es tangente a S_1 por pertenecer al plano tangente de ésta última, en el punto A_1 (véase sección 1.4, corolario 1.1). De igual forma PA_2 es tangente a S_2 . De esta forma, los triángulos $\triangle PA_1O_1$ y $\triangle PO_2A_2$ son rectángulos, por lo que al usar el teorema de Pitágoras en ambos tenemos:

$$\overline{PA_1}^2 = \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1A_1}^2 \quad ; \quad \overline{PA_2}^2 = \overline{PO_2}^2 - \overline{O_2A_2}^2.$$

Observemos que $Pot(P, S_1) = \overline{PA_1}^2$ y que $Pot(P, S_2) = \overline{PA_2}^2$, y dado que $PA_1 = PA_2$, entonces P tiene la misma potencia respecto a S_1 y a S_2 . Esto implica que $P \in \Pi_{1,2}$.

Supongamos ahora que S es intersectada por S_1 y S_2 en circunferencias de diámetro máximo. Sean entonces $C_1 = S \cap S_1$ y $C_2 = S \cap S_2$ tales circunferencias. Por tratarse de circunferencias de diámetro máximo, los centros de C_1 y C_2 coinciden con el centro de S , es decir, con P . Luego, como S y S_1 se intersectan, el plano radical Π de este par de esferas contiene a C_1 , entonces Π también pasa por P . Lo mismo sucede con Π' , el plano radical de S y S_2 , puesto que pasa por C_2 , entonces $P \in \Pi'$. Lo anterior implica que P está en la intersección de Π y Π' , de aquí que $Pot(P, S_1) = Pot(P, S_2)$, y así P está en el plano radical de S_1 y S_2 . ■

Teorema 4.6. *Una esfera que es intersectada por otras dos esferas dadas de manera ortogonal o en circunferencias de diámetro máximo, será intersectada, ya sea de manera ortogonal o en circunferencias de diámetro máximo, por cada esfera coaxial con las dos esferas dadas.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 dos esferas fijas que intersectan a otra esfera S de centro O , y sea S_3 a una esfera arbitraria del sistema coaxial de esferas al cual pertenecen S_1 y S_2 .

Supongamos primero que S es intersectada de manera ortogonal por S_1 y S_2 y sea B un punto en la intersección de S_3 con S . Por el teorema 4.5 sabemos que $O \in \Pi_{1,2}$, y dado que S_3 es coaxial con S_1 y S_2 entonces $Pot(O, S_1) = Pot(O, S_2) = Pot(O, S_3) = r^2$, siendo r el radio de S . Dado que OB es un radio de S tenemos que $Pot(O, S_3) = \overline{OB}^2$, lo que implica que OB es tangente a S_3 y entonces pertenece al plano tangente a S_3 en el punto B (corolario 1.1), haciendo que las esferas S y S_3 sean ortogonales.

En el segundo caso cuando el par de esferas S_1 y S_2 intersectan a S en circunferencias de diámetro máximo, entonces éstas se intersectan a su vez en una circunferencia, por la cual pasará toda esfera coaxial con las dos primeras. En particular una esfera S_3 coaxial con S_1 y S_2 pasará por esa circunferencia, intersectando a S en otra circunferencia a la que llamaremos C' . Por estar O en

$\Pi_{1,2}$, entonces O tiene la misma potencia con respecto a S_1 , a S_2 y a cualquier otra esfera coaxial con éstas, como S_3 . Luego, como por definición de potencia en el espacio se tiene que $Pot(O, S_1) = Pot(O, C_1) = \overline{OO'_1}^2 - r^2$, donde O'_1 es el centro de C_1 y $C_1 = S_1 \cap S$. Dado que $O'_1 = O$, entonces $Pot(O, C_1) = -r^2$. De manera análoga, al calcular la potencia de O respecto a S_3 tenemos que $Pot(O, S_3) = Pot(O, C') = -r^2$, lo cual indica que el radio de la circunferencia C' es el mismo que el de la esfera S , haciendola una circunferencia de diámetro máximo. ■

Corolario 4.2. *Dadas dos esferas, si una de éstas intersecta ortogonalmente o en una circunferencia de diámetro máximo a una tercera esfera cuyo centro está en el plano radical de las dos primeras, entonces ésta última es intersectada de manera ortogonal o en una circunferencia de diámetro máximo por la otra esfera del par inicial.*

Demostración. Haciendo uso de la notación de los dos teoremas pasados, sean S_1 y S_2 las dos esferas fijas y sea S la esfera que es intersectada, ya sea de manera ortogonal o en una circunferencia de diámetro máximo, por alguna de las dos esferas, digamos S_1 .

El argumento para demostrar este corolario es el mismo que el usado en la demostración del teorema 4.6. Basta con sustituir el papel de la esfera S_3 por el de la esfera S_2 , de la cual se quiere demostrar que intersecta a S de manera ortogonal o en una circunferencia de diámetro máximo. ■

Hasta el momento solo se ha hablado de la existencia de sistemas coaxiales de esferas y se han obtenido un par de características referentes a éstos, pero aún falta obtener una caracterización de los mismos a partir de la cual podamos crearlos o identificarlos. Por fortuna la pareja de teoremas con los que a continuación tratamos nos dan la respuesta a este cuestionamiento.

Teorema 4.7. *Dos esferas definen, de manera única, un conjunto coaxial de esferas.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 dos esferas en el espacio y supongamos que éstas no son concéntricas. Sea también Π su plano radical.

Desde un punto $P \in \Pi$ trazamos una tangente a alguna de las esferas, digamos a S_1 , y llamemos A al punto de tangencia. Luego con centro en P y radio PA trazamos una esfera S_\perp que es ortogonal a S_1 por construcción, y a S_2 por el corolario 4.2.

Ahora, tomemos un punto $B \in S_\perp$ que no pertenezca a la intersección de S_\perp con S_1 ni al plano radical Π . Unimos PB y trazamos la perpendicular a ésta que pasa por B y por la línea de los centros de S_1 y S_2 . Llamemos O a la intersección de éstas líneas y a continuación tracemos S_3 , la esfera con centro en O y radio OB .

Sabemos por construcción que S_\perp y S_3 son ortogonales, lo cual hace que $Pot(P, S_3) = \overline{PB}^2$, y puesto que $PB = PA$ por ser radios de S_\perp esto implica que $Pot(P, S_3) = Pot(P, S_1) = Pot(P, S_2)$ (la última igualdad se da ya que $P \in \Pi$) y como O está en la línea de los centros de S_1 y S_2 , entonces Π es plano radical de éstas tres esferas, ya que es el único plano perpendicular a la línea de sus centros y que pasa por P , un punto que tiene la misma potencia respecto a las 3 esferas.

De ésta manera construimos esferas coaxiales con las dos primeras, y el sistema queda únicamente determinado, ya que dado un punto en el espacio existe una única esfera que tiene como centro un punto en la línea de los centros y cuyo radio es la longitud que existe entre éste último punto y el punto dado. ■

Una observación que resulta inmediata a partir de este teorema, es que las esferas que conforman a un sistema coaxial son colineales. También hay que hacer notar que los distintos tipos de sistemas coaxiales que podemos hallar son cuatro.

1.- Las esferas que conforman al sistema coaxial no se intersectan: Cuando dos esferas del sistema no se intersectan, entonces ninguna lo hace, ya que si algún par se intersectara, entonces el plano radical del sistema pasaría por la intersección común de ese par de esferas, ya que el plano radical de dos esferas que se intersectan pasa por la intersección de éstas, lo cual nos llevaría a una contradicción puesto que el plano radical del sistema es único.

2.- Las esferas del sistema coaxial se intersectan: La intersección que resulta de dos esferas coaxiales es una circunferencia, entonces todas las esferas del sistema pasan por esa intersección común puesto que son puntos que tienen potencia cero respecto a ellas.

3.- Las esferas del sistema coaxial son tangentes en un punto: En realidad este es un subcaso del anterior cuando la intersección común es una circunferencia de radio nulo, lo cual hace que todas las esferas coaxiales pasen por ese punto.

4.- Las esferas coaxiales son concéntricas. Este caso particular todas las esferas del sistema coaxial son concéntricas y el plano radical del sistema es el plano al infinito, ya que no hay puntos ordinarios que tengan la misma potencia respecto a dos esferas que tienen el mismo centro.

Teorema 4.8 *Dos esferas pertenecen a un conjunto coaxial de esferas y solo a uno.*

Demostración. Sean Σ y Σ' dos sistemas coaxiales a los que pertenecen S_1 y S_2 , dos esferas dadas.

Sean Π eje radical de Σ y Π' eje radical de Σ' . Entonces tenemos que tanto Π como Π' son ortogonales a la línea de los centros de las esferas S_1 y S_2 , por lo que Π y Π' son paralelos.

Como $S_1, S_2 \in \Sigma$ entonces Π es eje radical de esas esferas, y también como $S_1, S_2 \in \Sigma'$ entonces Π' es a su vez eje radical de ese par. Tal y como se demostró en el teorema 4.1, el punto que resulta de la intersección del plano radical de un par de esferas con la línea de los centros es único, lo cual indica que Π y Π'

intersectan a la línea de los centros en el mismo punto, y entonces así $\Pi = \Pi'$, pues son paralelos y pasan por un mismo punto.

En el caso del sistema coaxial del tipo concéntrico, basta notar que si una esfera no fuera concéntrica con el resto, entonces el plano radical de ésta con cualquier otra del sistema concéntrico estaría formado de puntos ordinarios, lo cual contradice la unicidad del plano radical de un sistema coaxial de esferas. ■

4.2. Los puntos límite

Todos los sistemas coaxiales son en esencia el mismo por la forma en que están definidos, pero hay un sistema de entre los cuatro que presenta una característica peculiar y que no se presenta en los demás. Veamos a continuación la razón de ello.

Teorema 4.9. *Cualquier esfera ortogonal a dos esferas que no se intersectan corta a la línea de los centros en los mismos dos puntos.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 dos esferas de centros O_1 y O_2 . Sea S una esfera ortogonal común a éstas esferas, de radio r y cuyo centro es P .

Tomemos un punto A en la intersección de S_1 con S . Como éstas esferas son ortogonales, entonces PA es tangente a S_1 y es un radio de S . Sea también $M = \Pi_{1,2} \cap O_1O_2$.

Por el teorema 4.5 tenemos que $P \in \Pi_{1,2}$, y dado que el plano radical es perpendicular a la línea de los centros, entonces $\triangle PO_1M$ es rectángulo. Ahora bien, puesto que S_1 y S_2 están separadas (Fig. 4.3), entonces O_1M es mayor que el radio O_1A , entonces

$$\overline{O_1M}^2 > \overline{O_1A}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1M}^2 < \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1A}^2,$$

y por el teorema de Pitágoras tenemos, por un lado, que $\overline{PO_1}^2 - \overline{O_1M}^2 = \overline{PM}^2$, y por el otro $\overline{PO_1}^2 - \overline{O_1A}^2 = \overline{PA}^2$, lo cual implica que $PM < PA = r$. Por lo anterior tenemos que S intersecta a la línea de los centros en dos puntos.

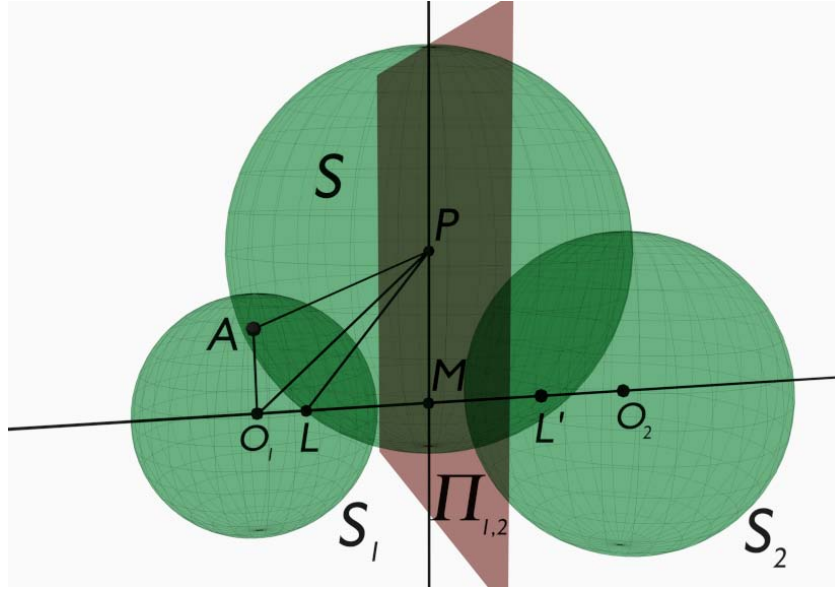


Figura 4.3: Cualquier esfera ortogonal a otras dos que no se intersectan, corta a la línea de los centros en dos puntos L y L' .

Sean L y L' los dos puntos donde S intersecta a la línea de los centros. Entonces $\triangle PLM$ es rectángulo, de lo cual se sigue que $\overline{PL}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{LM}^2$.

Puesto que $PL = PA$ por ser radios de S tenemos que:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PL}^2 \Rightarrow \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1A}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{LM}^2,$$

y como también $\overline{PO_1}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{O_1M}^2$, al sustituir el valor de $\overline{PO_1}^2$ en la igualdad de arriba llegamos a que

$$\overline{PM}^2 + \overline{O_1M}^2 - \overline{O_1A}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{LM}^2 \Rightarrow \overline{LM}^2 = \overline{O_1M}^2 - \overline{O_1A}^2.$$

Esta ecuación nos muestra que la posición de L es independiente de la de P . Por lo tanto cualquier esfera ortogonal a S_1 y S_2 pasa por L . Asimismo cualquiera de estas esferas pasa por L' , y LL' es bisecada por M , ya que $LM = \sqrt{\overline{O_1M}^2 - \overline{O_1A}^2}$ y $L'M = -\sqrt{\overline{O_1M}^2 - \overline{O_1A}^2}$. ■

Teorema 4.10. *Si las esferas de un sistema coaxial no se intersectan, entonces tendrán como posiciones límite dos esferas puntuales. Estas esferas puntuales*

cumplen lo siguiente:

- i) Son mutuamente inversos con respecto a cada esfera del sistema.
- ii) Cada esfera que pasa por ellos es ortogonal a todas las esferas del sistema.
- iii) Una esfera ortogonal a cualesquiera dos esferas del sistema coaxial, pasará por las posiciones límite y será ortogonal a todas las esferas del sistema.

Demostración. Primero, tomemos un sistema coaxial de esferas que no se intersectan, y llamemos S_1 y S_2 a dos esferas de éste sistema. Sean O_1 y O_2 los centros de éstas esferas, con rádios r_1 y r_2 , respectivamente. Sean también $\Pi_{1,2}$ el plano radical del sistema y M el punto de intersección de la línea de los centros con el plano radical del sistema.

Como $M \in \Pi_{1,2}$, entonces $Pot(M, S_1) = Pot(M, S_2)$, o mejor dicho

$$O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2.$$

De ésta última igualdad, tenemos que $O_1M^2 - O_2M^2 = r_1^2 - r_2^2$. Del lado izquierdo de la igualdad observemos que $O_1M^2 - O_2M^2 = (O_1M - O_2M) \cdot (O_1M + O_2M) = O_1O_2 \cdot (O_1M + O_2M)$. Entonces la igualdad de arriba se puede escribir como:

$$O_1O_2 \cdot (O_1M + O_2M) = r_1^2 - r_2^2 \quad \Rightarrow \quad O_1M = \frac{r_1^2 - r_2^2}{O_1O_2} - O_2M,$$

y al sumar de cada lado de la igualdad anterior O_1M , se tiene:

$$2 \cdot O_1M = \frac{r_1^2 - r_2^2}{O_1O_2} + O_1M + MO_2 \quad \Rightarrow \quad O_1M = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

Ésta última igualdad indica que la distancia entre el centro de la esfera S_1 y el punto M , depende del radio de S_1 , el radio de una segunda esfera coaxial con ésta (S_2), y la distancia entre los centros de éstas. Tomando esto en consideración, sea x la distancia entre O_1 y el centro de una tercera esfera coaxial con las otras dos y cuyo radio sea ρ . Entonces tenemos que:

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot O_1O_2} = \frac{r_1^2 - \rho^2 + x^2}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{O_1O_2}x + r_1^2 = \rho^2.$$

Al resolver la ecuación de segundo grado de arriba, podemos encontrar de manera analítica la distancia x que existe entre el centro O_1 de la esfera S_1 y el centro de una nueva esfera del sistema coaxial de esferas, una vez que fijamos el radio ρ de la misma.

Si $\rho = 0$, dado que las esferas del sistema no se intersectan, entonces:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 < O_1O_2 &\Rightarrow -(r_1 - O_1O_2) > r_2 \Rightarrow (r_1 - O_1O_2)^2 - r_2^2 > 0 \\ \Rightarrow r_1^2 - 2r_1 \cdot O_1O_2 + \overline{O_1O_2}^2 - r_2^2 > 0 &\Rightarrow \frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{O_1O_2} > 2r_1 \\ &\Rightarrow \frac{(r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2)^2}{\overline{O_1O_2}^2} - 4r_1^2 > 0. \end{aligned}$$

En la desigualdad, el lado izquierdo es el discriminante de la ecuación cuadrática resultante al hacer $\rho = 0$, lo que implica que existen dos soluciones reales para x , es decir, dos esferas puntuales que son las posiciones límite del sistema coaxial de esferas.

Notemos ahora que, si consideramos una esfera S_\perp ortogonal común a S_1 y S_2 , entonces ésta es ortogonal a cada esfera del sistema coaxial determinado por S_1 y S_2 gracias al teorema 4.6, y en particular, lo será a las esferas puntuales que acabamos de encontrar. Puesto que éstas tienen radios nulos, la única manera en que S_\perp intersekte a éstas esferas puntuales, es que S_\perp pase por ellas. Recordando el teorema 4.9, llegamos a la conclusión de que los dos puntos en la línea de los centros de un sistema coaxial de esferas que no se intersectan, por los cuales pasa cualquier esfera ortogonal al sistema, son las posiciones límite del sistema, es decir, son los puntos L y L' mencionados en el teorema anterior.

i) Tomemos una esfera S cualquiera del sistema coaxial de esferas que no se intersecta. Por teoremas ya demostrados sabemos que, la línea de los centros del sistema y cualquier esfera ortogonal al sistema coaxial de esferas son figuras autoinversas con respecto de S , entonces los puntos de intersección de estas dos figuras, que resultan ser los puntos L y L' , serán puntos mutuamente inversos con respecto de S , y por tanto, puntos mutuamente inversos con respecto de

cualquier esfera del sistema coaxial.

ii) Por el teorema 4.9 sabemos que el plano radical $\Pi_{1,2}$ biseca al segmento LL' . Entonces, si hacemos pasar una esfera S' por los puntos L y L' , su centro O' estará en $\Pi_{1,2}$. Luego, pasemos una tangente a S_1 por O' y llamemos T al punto de tangencia. Con radio $O'T$ y centro en O' construyamos una esfera S'' . Ésta será ortogonal a S_1 por construcción, y también será ortogonal a S_2 por tener centro en el plano radical. De esta manera S'' pasa por L y L' (teorema 4.9), por lo que su radio $O'T$ mide lo mismo que $O'L$ o que $O'L'$, donde ésta última longitud es la del radio de la esfera S' . Lo anterior implica que $S' = S''$ pues el centro y radio de éstas coinciden. Esto quiere decir que cualquier esfera por los puntos L y L' es ortogonal a todas las esferas del sistema coaxial.

iii) Por último, si una esfera es ortogonal a cualesquiera dos esferas del sistema coaxial de esferas que no se intersectan, entonces será ortogonal a todas las esferas del sistema (teorema 4.6). Como esta esfera es ortogonal al sistema coaxial, y en particular a dos esferas que pertenecen a él, entonces pasará por los mismos dos puntos sobre la línea de los centros del sistema (teorema 4.9), es decir, pasará por las posiciones límite L y L' . ■

Gracias a éstos teoremas que acabamos de demostrar, podemos ahora definir con toda precisión lo que son los puntos límite de un sistema coaxial de esferas.

Definición 4.5. Al par de esferas puntuales que son las posiciones límite de un sistema coaxial de esferas que no se intersectan, se les llama *puntos límite*. Éstos son dos puntos en la línea de los centros del sistema que equidistan de su plano radical, y cada esfera ortogonal al sistema coaxial pasa por éstos puntos. De igual manera, cualquier esfera que pasa por este par de puntos, es ortogonal al sistema.

4.3. Sistemas de esferas ortogonales

Un aspecto de gran relevancia al estudiar sistemas coaxiales de circunferencias, era el determinar cual era el conjunto de circunferencias ortogonales a un sistema coaxial en particular. En ese caso el conjunto en cuestión resultaba ser otro sistema coaxial de circunferencias.

Al tratar con sistemas de esferas coaxiales, nos damos cuenta que el conjunto de esferas ortogonales al sistema, es algo mucho más general que simplemente otro sistema coaxial de esferas.

Si buscamos el conjunto de esferas ortogonales a un sistema coaxial de esferas que no se intersectan, sabremos rápidamente, por la sección anterior, que se trata de todas aquellas que pasan por los puntos límite del sistema. Nos resta entonces pensar en dos casos más, estos son, cuando el sistema es del tipo que las esferas se intersectan y cuando son del tipo que las esferas son tangentes entre sí.

Teorema 4.11. *El sistema coaxial de esferas que pasan por una circunferencia será ortogonal a la colección de todas las esferas ortogonales a esa circunferencia.*

Demostración. Antes de proceder con la demostración, es recomendable recordar la definición 1.16 de ortogonalidad entre una esfera y una circunferencia, la cual se encuentra en la sección 1.4.

Sea entonces C una circunferencia fija. Tomemos una esfera S de la colección de todas las esferas ortogonales a la circunferencia C y sea l una línea por el centro de S y C . Sean además A y B los puntos de intersección de C con la recta l . Notemos que A y B existen puesto que l y C son coplanares por definición de ortogonalidad de una esfera con una circunferencia.

Dado que C es ortogonal a S , ésta es analagmática respecto a S , al igual que l ya que pasa por el centro de S , entonces A y B son puntos mutuamente inversos respecto a S . Cada elemento del sistema coaxial de esferas que pasa por C pasa a su vez por A y B , lo que implica que el sistema coaxial es ortogonal a

S . Por último como S es cualquier esfera del conjunto de esferas ortogonales a la circunferencia, entonces toda ésta colección de esferas es ortogonal al sistema coaxial de esferas que pasan por esa circunferencia. ■

Teorema 4.12. *El sistema coaxial de esferas tangentes a un plano dado en un punto dado, será ortogonal a la colección de todas las esferas tangentes a la normal a ese plano en el punto.*

Demostración. Sea Π un plano en el espacio y sea Σ el sistema coaxial de esferas tangentes a éste en un punto de él, digamos P . Llamemos Σ' a la colección de todas las esferas tangentes a la normal del plano Π en P , y llamemos l a la normal del plano por P . Nótese que l pasa por el centro de cada esfera de Σ puesto que éstas son tangentes a Π en P , lo que implica que l coincide con ser la línea de los centros de Σ .

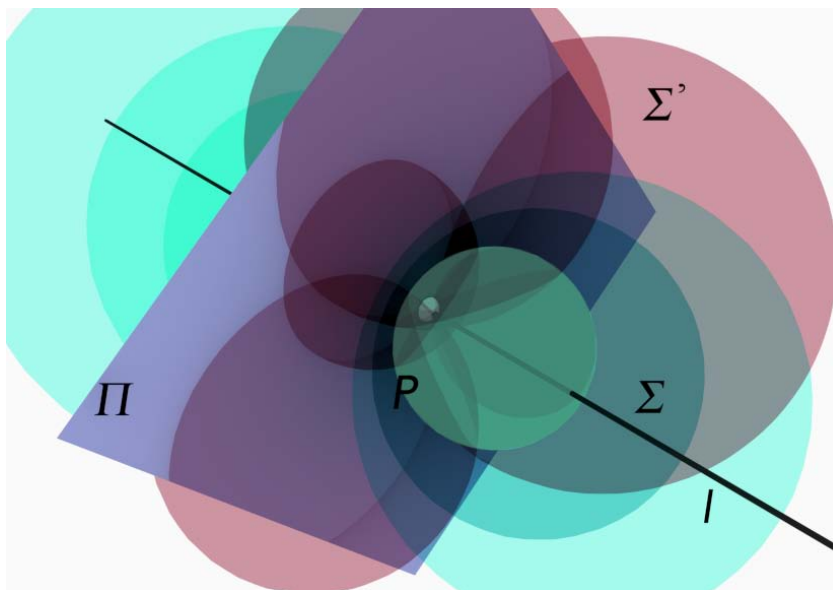


Figura 4.4: El sistema coaxial Σ , que es tangente al plano Π en P , es ortogonal a la colección de esferas Σ' , donde ésta última es tangente a la normal l del plano Π en P .

Tomemos una esfera $S \in \Sigma$ arbitraria, y de igual manera tomemos una $S' \in$

Σ' . A continuación, invirtamos a S' y a l respecto a S . Es claro que l es autoinversa ya que pasa por el centro de inversión. Por otro lado el inverso de la esfera S' deberá pasar por P y por la circunferencia que resulta de $S \cap S'$, ya que los puntos de ésta pertenecen a S , convirtiéndolos en puntos autoinversos. También como S' no pasa por el centro de S sabemos que su inverso es una esfera, que debe ser tangente a l en P para conservar el ángulo de intersección entre estas figuras. Esto nos indica que la única esfera que cumple con las restricciones recién mencionadas es S' misma, por lo que S' es autoinversa respecto a S .

De la discusión anterior podemos aseverar que S' y S se intersectan de manera ortogonal, ya que S' es una figura autoinversa con respecto a S . Dado que éstas son esferas arbitrarias tomadas de Σ y Σ' respectivamente, todas las esferas del sistema tangente a Π en P , son ortogonales a todas las esferas tangentes a l en P . ■

Como se observa, lo que se obtiene como conjunto de esferas ortogonales a un sistema de esferas coaxiales dista mucho de ser un sistema coaxial, es de hecho un conjunto tan peculiar y distinto que tiene su propio nombre, tal y como se ve en la siguiente sección.

4.4. Congruencia lineal y complejo lineal

Comencemos esta sección por definir estos dos conceptos clave en el estudio de los sistemas de esferas coaxiales.

Definición 4.6. Dadas dos esferas de radios r_1 y r_2 , tales que $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, la colección de todas las esferas ortogonales a éstas dos lleva por nombre *congruencia lineal*.

Según la definición, ambas esferas fijas pueden tener radio finito, o ambas tienen radio infinito, o una tiene radio finito y la otra infinito, lo que indica que una

congruencia lineal consiste entonces del conjunto de todas las esferas ortogonales a dos esferas fijas, o a dos planos, o a una esfera y un plano.

Definición 4.7 Dada una esfera de radio r , donde $r \geq 0$ o inclusive infinito, al conjunto de todas las esferas que cortan ortogonalmente o en circunferencias de diámetro máximo a la esfera dada, será llamado un *complejo lineal*.

La definición permite que el radio de la esfera fija sea positivo, infinito, o inclusive nulo, es decir, puede tratarse de una esfera, un plano, o un punto. Un complejo lineal es entonces, el conjunto de todas aquellas esferas que cortan a una esfera fija (o plano) de manera ortogonal o en una circunferencia de diámetro máximo, o aquellas que pasan por un punto dado.

A partir de estas definiciones, podemos identificar claramente varios tipos de congruencias lineales según el radio de las dos esferas dadas, así como distintas clases de complejos lineales de acuerdo al radio que tomemos para la esfera dada.

Comencemos con las congruencias lineales. En un primer caso, cuando se tienen dos esferas dadas de radios finitos, la congruencia lineal es el conjunto de todas las esferas que son ortogonales a éstas dos primeras (Fig 4.5 a). Si una esfera tiene radio finito mientras que la otra tiene radio infinito (es decir que se trata de un plano), entonces la congruencia lineal se compone de todas las esferas ortogonales a la esfera dada y al plano dado, o mejor dicho, son todas las esferas que tienen sus centros en el plano y que son ortogonales a la esfera dada (Fig. 4.5 b). Por último, si ambas esferas tienen radios infinitos, es decir si tenemos dos planos dados, entonces la congruencia lineal resulta ser la colección de todas las esferas cuyos centros están en la línea que resulta de la intersección de éstos dos planos (Fig. 4.5 c). En este último podemos identificar dos subcasos límite: cuando ambos planos coinciden, la congruencia lineal se compone de todas las esferas que tienen sus centros en estos planos; si los planos son paralelos y no coinciden, entonces la congruencia se compondrá de todas las esferas ortogonales a ambos planos, y para que ello ocurra las esferas deben tener radios infinitos, es decir son planos perpendiculares a los dos dados (Fig 4.5 d).

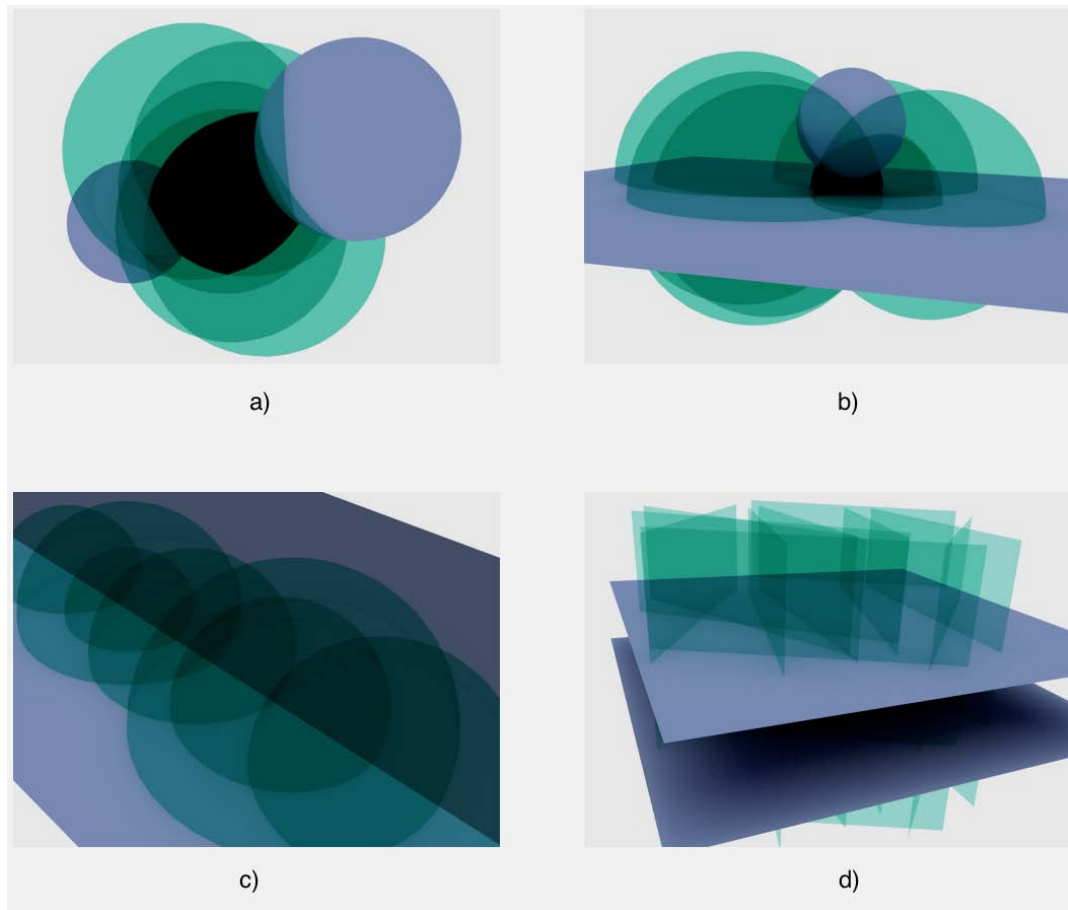


Figura 4.5: Diferentes tipos de congruencia lineal.

Pensemos ahora en los distintos complejos lineales que podemos hallar. Dada una esfera de radio finito, el complejo lineal es la colección de todas las esferas que cortan ortogonalmente o en circunferencias de diámetro máximo a la esfera dada (Fig. 4.6 a). Si la esfera tiene radio infinito, o mejor dicho si tenemos un plano dado, entonces el conjunto de todas las esferas que tienen su centro en este plano conforman al complejo lineal (Fig 4.6 b). En el último caso, como ya se mencionó, el complejo lineal está conformado por todas las esferas que pasan por un punto fijo (Fig 4.6 c).

Para facilitar las futuras referencias a las congruencias lineales y a los complejos lineales, denotaremos por CGL a una congruencia lineal cualquiera. Cuando

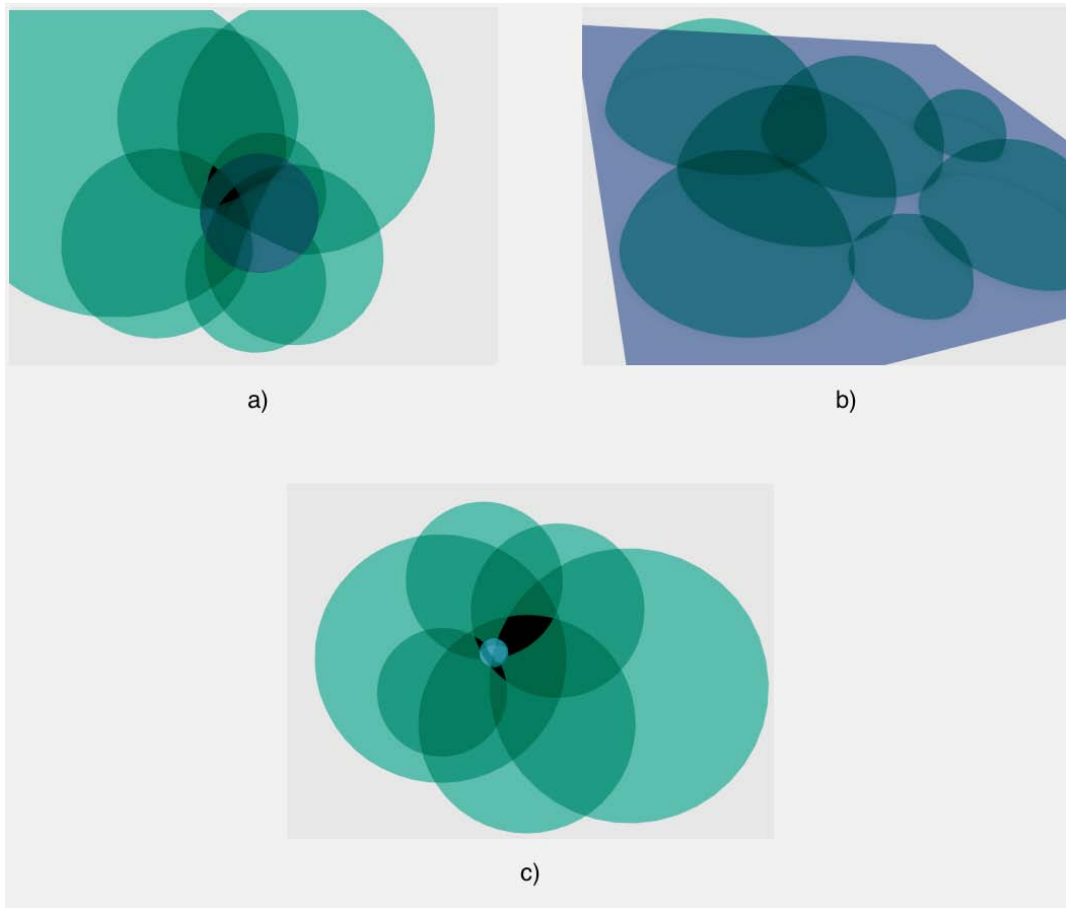


Figura 4.6: Diferentes tipos de complejo lineal.

es del tipo que es ortogonal a dos esferas lo denotaremos por CGL_1 , cuando es del tipo que es ortogonal a un plano y a una esfera será CGL_2 , y cuando es del tipo que es ortogonal a dos planos se denotará por CGL_3 . De manera similar, denotaremos a un complejo lineal cualquiera por CJL . Si es del tipo que sus elementos son cortados por una esfera lo denotaremos por CJL_1 , si es del tipo que sus elementos son cortados por un plano lo denotaremos por CJL_2 , y si sus elementos pasan por un punto dado entonces será CJL_3 .

Nuestra atención se centrará ahora en dar parámetros necesarios para identificar y determinar de manera única tanto a las congruencias lineales como a los complejos lineales.

Teorema 4.13. *Tres esferas no coaxiales pertenecen y determinan una única congruencia lineal.*

Demostración. Sean S_1 , S_2 y S_3 tres esferas no coaxiales.

Consideremos el caso más general donde las tres esferas no son concéntricas, ni de centros coplanares, ni de centros colineales. Entonces podemos obtener el eje radical l de S_1 , S_2 y S_3 . Tomemos a continuación un punto en l como centro de una esfera S que sea ortogonal a S_1 , por lo que también es ortogonal a S_2 y a S_3 , pues su centro está en los planos radicales de cada pareja de esferas (corolario 4.2). De manera análoga sea S' una esfera cuyo centro está en l y es distinto del centro de S , y que sea ortogonal a S_1 , por tanto ortogonal a S_2 y S_3 . Observemos que, como $S_i \perp S$ y $S_i \perp S'$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ por construcción, entonces el plano de los centros de S_1 , S_2 y S_3 es el plano radical Π de S y S' (teorema 4.5). De esta manera obtenemos dos esferas S y S' , a partir de las cuales podemos obtener el conjunto de todas las esferas ortogonales a ellas, consiguiendo así una congruencia lineal CGL determinada por S y S' como esferas fijas, donde $S_i \in CGL$ con $i \in \{1, 2, 3\}$.

Si las esferas S_1 , S_2 y S_3 tienen centros colineales, entonces cualquier plano por la línea de los centros de éstas es ortogonal a las tres esferas. Tomemos Π_1 y Π_2 , dos planos que pasan por la línea de los centros de las esferas. Entonces todas las esferas que tienen centro en esta línea serán ortogonales a Π_1 y Π_2 , con lo que obtenemos una congruencia lineal determinada por los planos Π_1 y Π_2 , a la cual S_1 , S_2 y S_3 pertenecen.

El caso recién mencionado se repite si consideramos que dos de las tres esferas son concéntricas y una no lo es.

Falta verificar que tres esferas pertenecen a una única congruencia lineal. Para ver esto notemos que en el primer caso, dadas las tres esferas en posición general S_1 , S_2 , S_3 , éstas resultaban ser ortogonales a otras dos esferas S y S' , y más aún a todo un sistema de esferas coaxiales definido por las dos últimas (teorema 4.6). Supongamos ahora que $S_i \in CGL$ y $S_i \in CGL'$ con $i \in \{1, 2, 3\}$, siendo CGL y

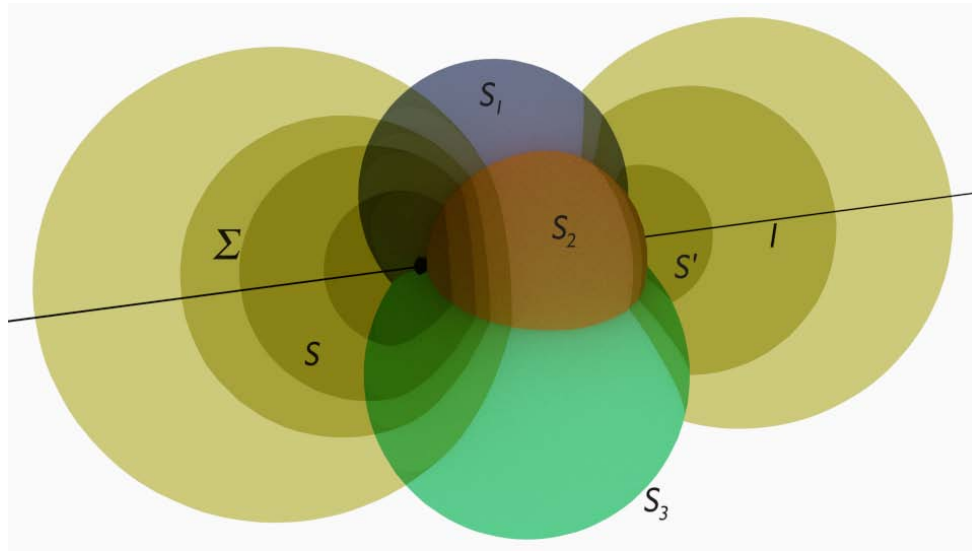


Figura 4.7: La triada de esferas S_1, S_2, S_3 determinan una única congruencia lineal. En este caso se muestra cuando la triada se intersecta en dos puntos que son los puntos límites (se muestra uno de ellos en negro) del sistema coaxial, del cual son ortogonales con respecto a cualquier esfera de ese sistema.

CGL' dos congruencias lineales distintas. Sean S'' y S''' las dos esferas fijas que determinan CGL' . Puesto que cada esfera, de la terna de esferas que pertenecen a ambas congruencias lineales, son perpendiculares a S, S' , y a S'', S''' , entonces los centros de la terna de esferas pertenecen tanto al plano radical de S y S' como al plano radical de S'' y S''' , lo cual implica que los planos radicales de ambas parejas de esferas coinciden (ya que los centros de la terna de esferas no son ni colineales, ni coplanares, ni son el mismo), haciendo que S, S', S'' y S''' pertenezcan al mismo sistema coaxial de esferas. Por tanto $CGL = CGL'$, pues todas las esferas ortogonales a dos esferas del sistema coaxial que determinan S y S' o S'' y S''' , son ortogonales a todas las esferas del sistema coaxial.

Ahora bien, para probar la unicidad de la congruencia lineal cuando las esferas tienen centros colineales, observemos que éstas son ortogonales no solo a dos planos, sino a todo plano que pasa por línea de los centros de las tres esferas. Supongamos que las tres esferas pertenecen a dos congruencias lineales CGL y CGL' , entonces existen dos planos que definen a CGL y otros dos planos distin-

tos que definen CGL' . Dado que dos planos cualesquiera se cortan en una única recta, entonces la intersección de los planos que definen a CGL es la misma que la de los planos que definen a CGL' . Lo anterior sucede ya que la terna de esferas tiene centros colineales y deben de ser ortogonales a cada pareja de planos, haciendo que la línea de los centros sea la intersección común de las dos parejas de planos. Esto implica que $CGL = CGL'$ puesto que ambas se conforman de todas las esferas que tienen su centro en la línea de los centros de la terna de esferas inicial. ■

Teorema 4.14. *Cuatro esferas de centros no coplanares pertenecen y determinan a un único complejo lineal.*

Demostración. Como las cuatro esferas dadas S_1, S_2, S_3 y S_4 tienen centros no coplanares, entonces podemos hallar el centro radical R de éstas (teorema 4.3). Supongamos en primer lugar que la potencia de este punto con respecto a las cuatro esferas es positiva, es decir que es un punto fuera de ellas. Si tomamos una esfera S con centro en R que sea ortogonal a alguna de las cuatro esferas, entonces será ortogonal a las otras tres (corolario 4.2), hallando de esta manera una esfera que es cortada ortogonalmente por las cuatro esferas dadas de centros no coplanares. El complejo lineal que S define es tal que las cuatro esferas S_1, S_2, S_3 y S_4 pertenecen a él por construcción.

Supongamos ahora que R tiene potencia nula con respecto a las cuatro esferas. De manera análoga, construyamos a S con centro en R y, esta vez, con radio nulo. S_1, S_2, S_3 y S_4 pasan entonces por un punto que es el centro radical, lo cual hace que las cuatro esferas sean parte del complejo lineal determinado por el punto R , es decir, todas aquellas esferas que pasan por ese punto.

En este último caso supongamos que R tiene potencia negativa con respecto a las cuatro esferas, es decir, que es un punto interior a cada una de ellas. Tomemos entonces una esfera S con centro en R y tal que sea cortada por una de las cuatro esferas dadas en una circunferencia de diámetro máximo, entonces por el corolario

4.2 tenemos que S es cortada en circunferencias de diámetro máximo por las tres esferas restantes (ya que el centro radical es donde se intersectan todas las parejas de planos radicales de las 4 esferas dadas, como se vio en el teorema 4.3). Por construcción, S_1, S_2, S_3 y S_4 pertenecen al complejo lineal de las esferas tales que intersectan a S en circunferencias de diámetro máximo.

En cualquiera de éstos casos, la esfera S que corta ortogonalmente a otras cuatro, o que es intersectada en circunferencias de diámetro máximo, o que pasan por ella cuando su radio es nulo, es única, ya que el centro radical es único, además de que el radio de dicha esfera queda únicamente determinado por el tipo de intersección que hay entre S y alguna de las esferas S_1, S_2, S_3, S_4 . ■

4.5. Esferas en movimiento

Hay una manera distinta de poder determinar o crear sistemas de esferas coaxiales y congruencias lineales. Esta nueva forma requiere de una esfera que está en constante movimiento y genera de esta forma los conjuntos de esferas que ya conocemos.

Teorema 4.15. *Si una esfera se mueve de tal forma que dados dos puntos fijos tiene cada uno potencia constante con respecto a ella, entonces ésta genera una congruencia lineal.*

Demostración. Sean A y B los dos puntos fijos y llamemos a tres posiciones distintas y arbitrarias de la esfera móvil S_1, S_2 y S_3 .

Por hipótesis $Pot(A, S_1) = Pot(A, S_2) = Pot(A, S_3) = k_1$ y $Pot(B, S_1) = Pot(B, S_2) = Pot(B, S_3) = k_2$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ constantes, por lo que los puntos A y B pertenecen a $\Pi_{1,2}$, a $\Pi_{1,3}$ y a $\Pi_{2,3}$, haciendo de la recta AB el eje radical de las tres esferas.

Tomemos dos puntos O y O' distintos en AB como centros de dos esferas S y S' , de tal manera que éstas intersecten a alguna de las esferas S_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$,

de manera ortogonal. Con ello, S y S' cortarían ortogonalmente a cada una de las tres esferas S_i , ya que S y S' tienen centros en los planos radicales de esta terna de esferas tomadas por pares (corolario 4.2). De esta manera, el conjunto de todas las esferas ortogonales a las esferas fijas S y S' forman una única congruencia lineal CGL , determinada por S_1 , S_2 y S_3 (teorema 4.13).

Verifiquemos a continuación que CGL es igual al conjunto de todas las esferas o posiciones de la esfera móvil de nuestra hipótesis.

Si tomamos otra posición arbitraria S_4 de la esfera móvil, entonces se cumple que $Pot(A, S_4) = k_1$ y $Pot(B, S_4) = k_2$, lo cual implica que A y B también pertenecen a los planos radicales $\Pi_{1,4}, \Pi_{2,4}, \Pi_{3,4}$, es decir, la recta AB es el eje radical de S_1, S_2, S_3 y S_4 . Entonces S y S' son ortogonales a S_4 puesto que éstas últimas tienen su centro en los ejes radicales $\Pi_{1,4}, \Pi_{2,4}, \Pi_{3,4}$, y además son ortogonales a S_1, S_2 y S_4 . Concluimos así que $S_4 \in CGL$.

Lo anterior demuestra que cualquier esfera que tomemos como posición de la esfera móvil y que cumple con que los puntos A y B tienen cada uno potencia constante con respecto a ella, está en CGL . Veamos ahora el caso recíproco.

Sea $S_0 \in CGL$. Entonces $S_0 \perp S$ y $S_0 \perp S'$, por lo que su centro yace en el plano radical de S y S' , al igual que los centros de cada esfera en CGL . Luego, sin pérdida de generalidad, consideremos a las esferas S_0, S_1 y S_2 . Sus planos radicales $\Pi_{0,1}, \Pi_{0,2}$ y $\Pi_{1,2}$ pasan por O y O' , puesto que las esferas son ortogonales a S y S' . Así, los planos radicales en cuestión se intersectan en AB , haciendo de esta recta el eje radical de la terna de esferas seleccionadas, con lo cual tenemos que A y B son puntos que tienen la misma potencia respecto a S_0, S_1 y S_2 , es decir, S_0 cumple con ser una posición de la esfera móvil como en la hipótesis.

Queda demostrada así que la colección de esferas determinadas por la esfera móvil de nuestra hipótesis y CGL son el mismo conjunto. ■

De una manera muy similar podemos generar un sistema coaxial de esferas, salvo que en esta ocasión se requiere de tres puntos fijos en vez de dos.

Teorema 4.16. *Si una esfera se mueve de tal forma que, dados tres puntos fijos no colineales, tiene cada uno potencia constante con respecto a ella, entonces ésta genera un sistema coaxial de esferas.*

Demostración. Sean A, B y C tres puntos fijos y llamemos a dos posiciones distintas y arbitrarias de la esfera móvil S_1 y S_2 .

Por hipótesis $Pot(A, S_1) = Pot(A, S_2) = k_1$, $Pot(B, S_1) = Pot(B, S_2) = k_2$, y $Pot(C, S_1) = Pot(C, S_2) = k_3$, siendo $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ constantes, por lo que por definición, los puntos A, B y C pertenecen a $\Pi_{1,2}$, es decir al plano radical de las dos esferas.

Tomemos otra posición más de la esfera móvil y llamemosla S_3 . Entonces por hipótesis, el punto A tiene potencias iguales respecto a S_1 y S_3 , esto es, que $A \in \Pi_{1,3}$. Análogamente, $B \in \Pi_{1,3}$ y $C \in \Pi_{1,3}$. También sucede que $\{A, B, C\} \in \Pi_{2,3}$, puesto que por hipótesis, cada uno de estos puntos tienen potencia constante con respecto de la esfera móvil, y en particular con respecto de S_2 y S_3 .

Lo anterior implica que $\{A, B, C\} \in \Pi_{1,2} \cap \Pi_{1,3} \cap \Pi_{2,3}$, pero como los tres puntos dados son no colineales, entonces los tres planos radicales coinciden, haciendo que el plano que determinan los puntos A, B, C sea el plano radical de las tres esferas, y en general, de cualquier otra esfera o posición de la esfera móvil.

Como dos esferas definen de manera única un sistema coaxial de esferas (teorema 4.7), S_1 y S_2 definen un único sistema coaxial, del cual $\Pi_{1,2}$ es plano radical, por lo que cualquier esfera coaxial con éstas cumple con ser una esfera tal que los tres puntos fijos A, B y C tienen potencia constante respecto a ella, haciéndola así una posición de la esfera móvil, como en la hipótesis. De aquí podemos concluir entonces que ésta esfera móvil genera un sistema coaxial de esferas. ■

La manera en que generamos tanto a las congruencias lineales como a los sistemas de esferas coaxiales dependían no solo de una esfera móvil, sino de un conjunto de puntos que, o bien definían un eje radical, o un plano radical.

Siguiendo esta mecánica, pensemos ahora en usar esferas en lugar de puntos. Para esto tendremos también que intercambiar el concepto de potencia por el de intersección entre esferas de la siguiente manera.

Teorema 4.17. Si una esfera se mueve de tal forma que interseca a dos esferas dadas en circunferencias de diámetro máximo, o interseca a una de ellas en una circunferencia de diámetro máximo y a la otra ortogonalmente, entonces ésta genera una congruencia lineal.

Demostración. Fijemos tres posiciones distintas pero arbitrarias de la esfera móvil y llamemoslas S_1, S_2 y S_3 ; por otra parte sean S y S' , las dos esferas fijas que son intersectadas como dice la hipótesis.

Supongamos primero que la esfera móvil interseca a S y S' en circunferencias de diámetro máximo. En particular se cumple entonces que S_1, S_2 y S_3 las intersectan en circunferencias de diámetro máximo.

Por el teorema 4.5 sabemos que el centro de S está en $\Pi_{1,2}$, y de igual forma en $\Pi_{1,3}$ y en $\Pi_{2,3}$, por el mismo teorema. Esto implica que S tiene su centro en el eje radical l de S_1, S_2 y S_3 . Análogamente, S' tiene su centro en el eje radical l , ya que al ser intersectada en circunferencias de diámetro máximo por S_1, S_2 y S_3 , su centro yace en el plano radical de éstas tomadas por parejas.

Lo anterior indica que el eje radical l de las esferas S_1, S_2 y S_3 , coincide con la línea de los centros de S y S' .

Repitiendo el procedimiento anterior, podemos notar que para cualesquiera tres posiciones de la esfera móvil, obtendremos que l es el eje radical de ellas, dado que S y S' tienen posiciones fijas. Esto quiere decir que las esferas que describe la esfera móvil tienen como eje radical a l .

Tomemos dos puntos O y O' en l , distintos entre sí, como centros de dos esferas S_\perp y S'_\perp , tales que intersecten ortogonalmente a S_1 . Como $O, O' \in l$, entonces $O, O' \in \Pi_{1,2}$, por lo que S_\perp y S'_\perp son ortogonales a S_2 (corolario 4.2). Por un argumento similar S_\perp y S'_\perp son ortogonales a S_3 , y en general, a cualquier esfera que describe la esfera móvil, dado que l es el eje radical común para ésta

última.

Concluimos de esta manera, que la esfera móvil describe esferas que son siempre ortogonales a S_{\perp} y S'_{\perp} (las cuales son dos esferas fijas), por lo que describe una congruencia lineal.

Supongamos ahora que la esfera móvil intersecta a una de las dos esferas fijas ortogonalmente y a la otra en una circunferencia de diámetro máximo. Sin pérdida de generalidad, sea S la esfera que es intersectada ortogonalmente.

Por el teorema 4.5, sabemos que S tiene su centro en $\Pi_{1,2}$, y de igual forma en $\Pi_{1,3}$ y $\Pi_{2,3}$, por el mismo teorema. Es decir S tiene su centro en el eje radical l . Mientras que, por un argumento similar, S' también tiene su centro en l , lo que implica que l coincide con la línea de los centros de S y S' .

De manera análoga al caso anterior, tomamos un punto $O'' \in l$ distinto del centro de S , como centro de una esfera S''_{\perp} , tal que es perpendicular a S_1 .

Repitiendo los argumentos del caso anterior, concluimos entonces que la esfera móvil genera una congruencia lineal, puesto que las esferas que ésta genera son ortogonales a S y S''_{\perp} . ■

Así como conseguimos generar una congruencia lineal cambiando un par de conceptos, a continuación veremos como generar un sistema coaxial de esferas.

Teorema 4.18. *Si una esfera se mueve de tal forma que intersecta a tres esferas dadas de centros no colineales en circunferencias de diámetro máximo, o intersecta a dos de ellas en circunferencias de diámetro máximo y a la otra ortogonalmente, o intersecta a una de ellas en una circunferencia de diámetro máximo y a las otras ortogonalmente, entonces ésta genera un sistema coaxial de esferas.*

Demostración. Sean S, S' y S'' tres esferas fijas de centros no colineales, Π al plano de sus centros, y l el eje radical de ellas. Sean también S_1 y S_2 , dos posiciones de la esfera móvil.

Si S_1 y S_2 intersectan en circunferencias de diámetro máximo a S, S' y S'' , entonces para cada una de éstas, sus centros yacen en $\Pi_{1,2}$ (teorema 4.5), por lo que $\Pi_{1,2}$ coincide con Π , es decir, $\Pi_{1,2} = \Pi$.

Tomemos ahora otra posición S_3 de la esfera móvil. Entonces, si S_3 también intersecta en circunferencias de diámetro máximo a S, S' y S'' , entonces los centros de éstas están en $\Pi_{1,3}$ y $\Pi_{2,3}$, pero dado que los centros también están en Π , entonces $\Pi_{1,2} = \Pi_{1,3} = \Pi_{2,3} = \Pi$. De aquí que las esferas S_1, S_2 y S_3 sean coaxiales.

Al tomar cualquier otra posición de la esfera móvil, el argumento anterior se repite, por lo que podemos aseverar que esta nueva esfera será coaxial con las anteriores, siendo Π el plano radical de ellas, por lo que la esfera móvil genera un sistema coaxial de esferas.

Los casos que faltan son completamente análogos al descrito arriba, ya que el teorema 4.5 nos implica que Π coincide con ser el plano radical para cada par de posiciones de la esfera móvil, ya sea que intersecte a dos de manera ortogonal y a la restante en una circunferencia de diámetro máximo, o a una de manera ortogonal y a las dos restantes en circunferencias de diámetro máximo. ■

4.6. Ejercicios

1. El plano radical de dos esferas biseca toda tangente común a las dos esferas.
2. Si por una línea en el plano radical de dos esferas se dibuja un plano tangente a cada una de las dos esferas, los puntos de contacto son puntos antihomólogos de las dos esferas.
3. El lugar geométrico de los puntos la suma de cuyas potencias con respecto a dos esferas dadas es constante, es una esfera que tiene por centro el punto medio de la línea de los centros de las dos esferas dadas.
4. Si tres esferas tienen sus centros colineales y son ortogonales a la misma esfera, entonces éstas son coaxiales.
5. La esfera de similitud de dos esferas dadas es la única esfera que es coaxial con estas esferas y que divide a su línea de los centros de forma armónica.
6. Construya una esfera que pertenezca a un sistema coaxial de esferas dado y que sea tangente a una esfera dada que no pertenece al sistema coaxial.
7. Construya una esfera que pertenezca a un sistema coaxial de esferas dado y que sea ortogonal a una esfera dada que no pertenece al sistema coaxial.

Capítulo 5

Inversión y Esferas Coaxiales

Hasta ahora hemos analizado cada uno de los conceptos principales por separado, viendo sus comportamientos intrínsecos y estudiando los diversos casos que éstos ofrecen. Pero de nada vale la pena todo este trabajo, sino hasta que hayamos comenzado a combinar el poder de ambos conceptos para poder así apreciar la verdadera naturaleza de todo este estudio sobre la esfera.

5.1. Inversión de sistemas coaxiales, CGL's y CJL's

Un ejemplo muy claro de como se pueden combinar la inversión y los sistemas coaxiales, junto con sus conceptos hermanos que son las congruencias lineales y los complejos lineales, es investigando el efecto que tienen éstos bajo inversión.

Teorema 5.1. *El inverso de un sistema coaxial es:*

- i) Un sistema coaxial.*
- ii) Un sistema concéntrico.*
- iii) Un haz de planos que pasan por una línea.*
- iV) Un haz de planos paralelos.*

Demostración. Antes de comenzar y para evitar los casos particulares, convendremos en excluir al sistema coaxial concéntrico cuando se hable de un sistema coaxial en general. Este caso particular se deja como un ejercicio propuesto al final del capítulo.

i) Sea Σ un sistema coaxial de esferas de cualquier tipo. Invertir a Σ en otro sistema coaxial se puede conseguir de varias formas:

a) *Invirtiéndolo con respecto a una esfera ortogonal.* Sea S_{\perp} una esfera ortogonal a dos elementos de Σ . Entonces S_{\perp} es ortogonal a cada esfera de Σ . Consideremos a S_{\perp} como esfera de inversión e invirtamos a Σ respecto a ella. Como cada esfera $S \in \Sigma$ es ortogonal a S_{\perp} , entonces éstas esferas son autoinversas, haciendo que el sistema coaxial quede invariante bajo esta inversión, es decir, el sistema Σ es su propio inverso.

b) *Invirtiéndolo respecto a una esfera con centro en el plano radical.* Sea O_i un punto en el plano radical Π de un sistema coaxial cualquiera, y sea S_i la esfera de inversión con centro en ese punto. Supongamos que S_i no es ortogonal a ningún elemento de Σ (ya que de caso contrario, tendríamos el caso anterior), y llamemos S a una esfera que pasa por O_i y es ortogonal a dos elementos de Σ , por tanto ortogonal a todo elemento de Σ . Consideremos también a l , la línea de los centros de Σ . Invertamos ahora a Σ , Π , l y S respecto a S_i .

En primer lugar, dado que ninguna esfera de Σ pasa por O_i , entonces el inverso de cada una de ellas es una esfera, haciendo de Σ' un conjunto de esferas. Luego, l' es una circunferencia que pasa por O_i y es ortogonal a cada esfera en Σ' , puesto que l era ortogonal a cada esfera de Σ . Observemos que por definición, el plano que contiene a la circunferencia l' contiene también a los centros de los elementos de Σ . Por su parte, S' es un plano que no pasa por O_i y que es ortogonal a cada esfera de Σ' , es decir, S' es el plano de los centros del conjunto de esferas Σ' .

De lo anterior tenemos que los planos S' y el que contiene a l' son tales que contienen a los centros de Σ' , pero como éstos no coinciden (pues el plano que

contiene a l' pasa por O_i y S' no pasa por O_i), entonces se intersectan en una recta. Esta recta por tanto, contiene a los centros de las esferas de Σ' , por lo que éste último consiste de esferas de centros colineales.

Finalmente, dado que Π es un plano por O_i que es perpendicular a S (esto gracias a que al ser S ortogonal al sistema coaxial, S tiene su centro en Π) y perpendicular a la línea de los centros l (puesto que Π es el plano radical de Σ), entonces Π es autoinverso y es tal que es perpendicular tanto al plano que contiene a l' , como al plano S' . En otras palabras, $\Pi = \Pi'$ y es perpendicular a la línea de los centros de las esferas de Σ' .

Retomemos momentáneamente nuestras figuras originales y consideremos una esfera S_{\perp} con centro en O_i y perpendicular a los elementos de Σ . Al invertir con respecto a S_i , tenemos que S'_{\perp} es una esfera con centro en O_i y perpendicular a las esferas de Σ' . Esto quiere decir que O_i es un punto con potencia constante respecto a cualquier esfera de Σ' . Además, $O_i \in \Pi$, y como el plano radical de un sistema coaxial de esferas es el único plano tal que pasa por un punto con potencia constante respecto a ellas y es perpendicular a la línea de sus centros, entonces $\Pi' = \Pi$ es el plano radical de Σ' , por tanto Σ' es un sistema coaxial de esferas.

Obsérvese además que Σ' es un sistema coaxial del mismo tipo que Σ , puesto que si existe alguna intersección común entre los elementos de Σ , entonces la inversa de esa intersección común es la intersección de los elementos inversos. Por ejemplo, si Σ es del tipo que las esferas no se intersecan, entonces no existe puntos en común para sus elementos, por lo que las esferas inversas tampoco se intersecan entre sí. Si Σ es del tipo que las esferas se intersecan en una circunferencia C y O_i no está en C , entonces la inversa de esa circunferencia es una circunferencia C' , y como toda esfera de Σ pasa por C , entonces toda esfera de Σ' pasa por C' . En el caso donde Σ es un sistema coaxial donde sus esferas son tangentes, y O_i no es ese punto de tangencia, entonces el inverso de ese punto de tangencia es un punto común para las inversas de las esferas, por lo que las esferas de Σ' también son tangentes en un punto. Cuando O_i pertenece a C en un caso y cuando O_i es el punto de tangencia en el otro, son casos par-

ticulares que nos dan como resultado el inciso *iii* y *iv*, como se verá más adelante.

c) *Invirtiendo respecto a una esfera con centro un punto fuera del plano radical.* Consideremos un sistema coaxial cualquiera Σ , y sean como en el caso anterior, la línea de los centros l , el plano radical Π del sistema, un punto O_i en el espacio tal que no pertenece a Π y que tomamos como el centro de inversión de una esfera S_i de radio positivo, una esfera S que pasa por O_i y que es ortogonal a dos esferas del sistema coaxial y por tanto ortogonal a cada esfera de Σ , y una esfera S_{\perp} que no pasa por O_i y que es ortogonal a cada esfera del sistema coaxial. Consideremos además a la esfera $S_0 \in \Sigma$ que pasa por el centro de inversión. A continuación, analicemos al conjunto de éstas figuras bajo inversión.

Cada esfera del sistema Σ , excepto por S_0 , se invierte en una esfera, por lo que Σ' es un conjunto de esferas. La recta l se invierte en una circunferencia l' ortogonal a cada elemento de Σ' . El plano Π se invierte en una esfera Π' que pasa por O_i y es ortogonal a l' . La esfera S se invierte en un plano S' que es perpendicular a cada esfera de Σ' , así como a Π' (puesto que al ser S ortogonal al sistema coaxial su centro yace en el plano radical). Podemos observar que las esferas de Σ' y Π' tienen centros colineales, ya que ocurre lo mismo que el caso anterior para el plano que contienen a l' y el plano S' .

Por otro lado S_{\perp} se invierte en una esfera S'_{\perp} que es ortogonal a cada esfera de Σ' y a Π' , mientras que S_0 se invierte en un plano S'_0 que es ortogonal a S'_{\perp} , lo que quiere decir que el centro de S'_{\perp} está en S'_0 . También sucede que S'_0 es un plano perpendicular al plano que contiene a l' (dado que el centro de S_0 está en l) y perpendicular al plano S' (pues por construcción $S \perp S_0$), lo que implica que S_0 es un plano perpendicular a la línea de los centros de Σ' y Π' .

Como S'_{\perp} es perpendicular a toda esfera de Σ' y a Π' , entonces su centro tiene la misma potencia respecto a cada una de esas esferas. Además, al estar su centro en S'_0 , que es un plano perpendicular a la línea de los centros de éstas esferas, podemos concluir que S'_0 es el plano radical del sistema coaxial de esferas conformado por las esferas de Σ' y por Π' . Al igual que como se discutió en el caso anterior, Σ' junto con Π' será un sistema coaxial del mismo tipo del que es Σ .

ii) Sea ahora Σ_1 un sistema del tipo en el que las esferas no se intersectan. Sean L_1 y L_2 los puntos límite del sistema y sean además $S_{1,\perp}$ y $S_{2,\perp}$ dos esferas ortogonales al sistema, que son distintas entre sí, y son tales que ninguno de sus diámetros coincide con la línea de los centros del sistema coaxial. Con radio mayor que cero y centro en alguno de los puntos límite, creamos una esfera S_i . Sin pérdida de generalidad tomemos como centro de S_i a L_1 y a continuación procedemos a invertir con respecto a S_i .

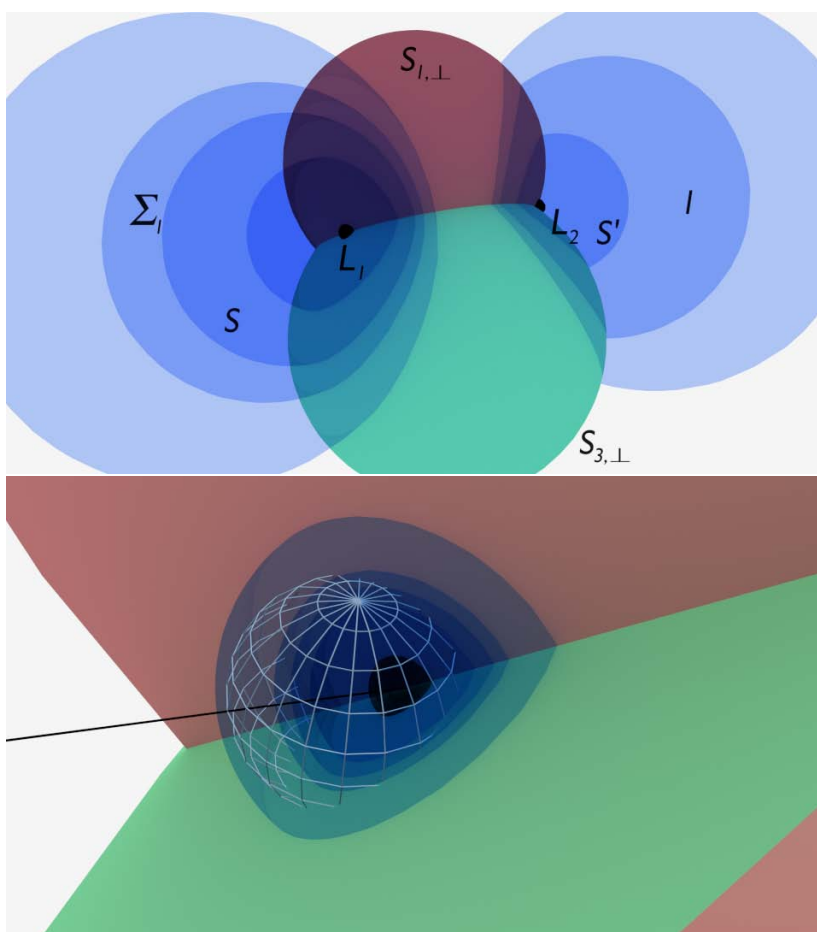


Figura 5.1: El caso donde un sistema coaxial de esferas (arriba) no se intersecta y su inverso (abajo). La esfera de inversión aparece en forma de red (en blanco) en ambos casos.

Observamos inmediatamente que $S'_{1,\perp}$ y $S'_{2,\perp}$ son planos que pasan por L'_2 , ya que las figuras originales (esfeas ortogonales al sistema) pasan por el centro de inversión y el punto L_2 . Como cada esfera de Σ_1 es orthogonal a $S_{1,\perp}$ y a $S_{2,\perp}$, y dado que ninguna esfera del sistema pasa el centro de inversión, entonces los inversos de los elementos del sistema coaxial serán esferas ortogonales a los planos $S'_{1,\perp}$ y $S'_{2,\perp}$. Por otra parte la línea de los centros del sistema coaxial es autoinversa puesto que pasa por L_1 , haciendo que la única intersección entre ésta y los planos $S'_{1,\perp}$ y $S'_{2,\perp}$ sea L'_2 . Dado que Σ_1 es también orthogonal a la línea de los centros, Σ'_1 es el conjunto de todas las esferas ortogonales a dos planos distintos (cuya intersección es distinta de la línea de los centros por construcción) y a la línea de los centros, es decir, obtenemos un sistema coaxial de esferas concéntricas, cuyo centro es L'_2 .

iii) Para obtener el tercer caso, tomemos un sistema coaxial Σ_2 del tipo en que las esferas se intersectan, y llamemos C a la circunferencia que es la intersección de los elementos del sistema. Con centro en un punto de C , llamemosle O_i , y radio mayor que cero, creamos una esfera S_i y a continuación invertimos con respecto a S_i . Toda esfera del sistema Σ_2 pasa por O_i , entonces sus inversos serán planos que pasan por C' , puesto que todas las esferas del sistema coaxial pasan por la circunferencia. C a su vez, se invierte en una recta C' que no pasa por el centro de inversión. De esta manera Σ'_2 es un haz de planos que pasa por la recta C' , que es el inverso de la intersección del sistema original.

iv) Por último, sea Σ_3 un sistema coaxial del tipo que las esferas son tangentes a un punto P . Con centro en P , creamos una esfera S_i que tomamos como esfera de inversión. Al invertir el sistema con respecto a S_i , dado que todas sus esferas pasan por el centro de inversión, los inversos de éstas son planos que no pasan por el centro de inversión. Éstos planos además son paralelos entre sí puesto que son perpendiculares a la línea de los centros del sistema Σ_3 . Lo anterior sucede ya que cada esfera de Σ_3 es perpendicular a la línea de los centros. Concluimos así que al invertir con respecto a la esfera S_i con centro en el punto de tangencia del sistema coaxial, se obtiene un haz de planos paralelos entre sí. ■

Para el siguiente teorema hagamos una pequeña pero útil observación. Consideremos el caso general en el que a una congruencia lineal la determinan dos esferas S_1 y S_2 , es decir, una CGL_1 . Sean O_1 y O_2 los centros de dicha esferas y llamemos $O = \Pi_{1,2} \cap O_1O_2$. Consideremos ahora una línea l cualquiera por O y que pertenezca a $\Pi_{1,2}$, como la línea de los centros de las esferas de CGL_1 cuyos centros están en l . Entonces el conjunto de esferas recién hallado conforma un sistema coaxial de esferas, puesto que O_1 y O_2 tienen potencia constante con respecto a ellas y todas son colineales. De hecho de esta observación, podemos ver que por cada línea del haz con centro en O y que pertenece a $\Pi_{1,2}$, podemos obtener un sistema coaxial diferente, es decir, que podemos interpretar a CGL_1 como unión de sistemas coaxiales, siendo todas las esferas de dicha unión coplanares y ortogonales a las esferas fijas S_1 y S_2 .

Lema 5.1. *Una congruencia lineal CGL_1 es la unión de todos los sistemas coaxiales de esferas cuyas esferas son ortogonales a las dos esferas fijas que determinan la congruencia lineal.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 las dos esferas fijas de centros O_1 y O_2 que determinan a CGL_1 . Llamemos $\Pi_{1,2}$ al plano radical de éstas, y O al punto de la intersección de $\Pi_{1,2}$ con la recta O_1O_2 . Por otro lado, sea $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$, siendo I un conjunto de índices, la unión de los sistemas coaxiales de esferas cuyas esferas son todas ortogonales a S_1 y S_2 .

Sea S una esfera en CGL_1 . Entonces S es ortogonal a S_1 y S_2 , lo que indica que el centro de S está en $\Pi_{1,2}$. Consideremos la recta l que pasa por O y el centro de S , y a todas las esferas de CGL_1 cuyo centro está en l . Por la observación de arriba, sabemos que éste conjunto de esferas es un sistema coaxial Σ_i para alguna $i \in I$. Esto indica que $S \in \Sigma_i$, y por tanto $S \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$.

Sea ahora S' una esfera en $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. Por hipótesis sabemos que S' es ortogonal a S_1 y S_2 , lo que quiere decir que $S' \in CGL_1$. Así $CGL_1 = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. ■

Teorema 5.2. *El inverso de una congruencia lineal es: i) una congruencia lineal, ii) una colección de planos concurrentes o iii) una colección de planos paralelos a una línea.*

Demostración. Para la demostración de este teorema haremos uso de los argumentos usados en el teorema 5.1, así como del lema 5.1. Dicho esto, consideremos una congruencia lineal CGL_1 ; sean también S_1 y S_2 las esferas que determinan la congruencia lineal, cuyos centros son O_1 y O_2 . Por el lema 5.1 sabemos que $CGL_1 = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$, donde las esferas de los sistemas coaxiales son ortogonales a S_1 y S_2 .

i) Inversión de una congruencia lineal en una congruencia lineal.

a) *Invirtiendo con respecto a S_1 , S_2 o alguna esfera ortogonal a CGL_1 .* Como S_1 , S_2 o alguna otra esfera que es ortogonal a CGL_1 , son ortogonales a cada esfera de CGL_1 , entonces las esferas de la congruencia lineal son autoinversas con respecto a alguna de estas esferas, por tanto al invertir respecto a S_1 , S_2 o alguna otra ortogonal a CGL_1 , obtenemos la misma congruencia lineal.

b) *Invirtiendo respecto a un punto en el espacio.* De acuerdo con la demostración vista en el teorema 5.1, si tomamos un punto O_i en el plano radical de un sistema coaxial, o fuera de él, como el centro de una esfera de inversión S_i entonces un sistema coaxial se invierte en otro sistema coaxial que es inclusive del mismo tipo que el original. Tomando esto en consideración y que a una congruencia lineal la podemos ver como unión de sistemas coaxiales, entonces al invertir a cada sistema coaxial de $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$ tenemos que $\bigcup_{i \in I} (\Sigma_i)' = \bigcup_{j \in J} \Sigma_j$, es decir que obtenemos la unión de sistemas coaxiales. Luego, como cada esfera de $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$ es ortogonal a S_1 y a S_2 , entonces cada esfera de $\bigcup_{j \in J} \Sigma_j$ es ortogonal a S_1' y a S_2' , lo que implica que éste último conjunto es una congruencia lineal CGL_1' distinta de la original.

Ocurre un caso particular cuando el centro de inversión está en S_1 o S_2 . En este caso alguna de éstas se invierte en un plano, y el conjunto de esferas $\bigcup_{j \in J} \Sigma_j$ es ortogonal a un plano y a una esfera, obteniendo de esta manera una congruencia lineal CGL_2 en vez de una CGL_1 , es decir que $(CGL_1)' = CGL_2$.

ii) Inversión de una congruencia lineal en una colección de planos concurrentes.

Supongamos ahora que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Entonces existen los puntos límite L_1 y L_2 del sistema coaxial que éstas esferas determinan. De esta manera todos los elementos pertenecientes a CGL_1 pasan por L_1 y L_2 . A continuación con centro en L_1 o en L_2 y radio positivo, creamos una esfera S_i , a la cual tomamos como esfera de inversión. Dado que todas las esferas de CGL_1 pasan por el centro de inversión, entonces éstas se invertirán en planos que son concurrentes en el punto L'_2 , si es que se toma a L_1 como centro de inversión, o bien concurrentes en L'_1 si es que se toma a L_2 como centro de inversión.

iii) Inversión de una congruencia lineal en una colección de planos paralelos a una línea.

Tomemos ahora una CGL_1 de manera tal que sus elementos sean tangentes en un punto O . Con centro en O y radio positivo construimos una esfera S_i que tomamos como esfera de inversión. Entonces los elementos de CGL_1 , al pasar todos por el punto O , se invierten en planos perpendiculares a los planos S'_1 y S'_2 , ya que los elementos de la congruencia era ortogonales a S_1 y S_2 , las cuales a su vez pasan por O . Como S_1 y S_2 son ortogonales a su línea de los centros (la cual es autoinversa con respecto a S_i), entonces los planos S'_1 y S'_2 tienen a la línea de los centros como una recta normal, lo que indica que los planos de CGL'_1 son paralelos a la línea de los centros de S_1 y S_2 . ■

Lema 5.2. *Un complejo lineal CJL_1 es la unión de los sistemas coaxiales de esferas tales que las esferas de éstos son ortogonales o cortan en una circunferencia de diámetro máximo a la esfera que genera el complejo lineal.*

Demostración. Sea S_1 la esfera fija de centro O_1 que determina a CJL_1 . Sea $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$, siendo I un conjunto de índices, la unión de los sistemas coaxiales de esferas cuyas esferas o bien cortan ortogonalmente a S_1 o cortan a S_1 en circunferencias de diámetro máximo.

Sea S una esfera en CJL_1 y supongamos que S es ortogonal a S_1 . Tomemos una esfera arbitraria S' que sea ortogonal a S_1 y consideremos a Σ_i , para alguna $i \in I$, como el sistema coaxial determinado por S y S' . Esto indica que $S \in \Sigma_i$, y por tanto $S \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. Ahora bien que si S corta a S_1 en una circunferencia de diámetro máximo, consideramos entonces a una esfera arbitraria S' que corte a S_1 en una circunferencia de diámetro máximo. Entonces S y S' definen un sistema coaxial Σ_j , para alguna $j \in I$, por lo que $S \in \Sigma_j$, y por tanto $S \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. Cabe mencionar que la elección de la esfera S' al ser arbitraria, nos dice que la esfera S elegida al principio no pertenece a un único sistema coaxial de esferas.

Sea ahora S' una esfera en $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. Por hipótesis sabemos que S' es ortogonal a S_1 o la corta en una circunferencia de diámetro máximo, lo que quiere decir que $S' \in CJL_1$. Así $CJL_1 = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$. ■

Teorema 5.3. *El inverso de un complejo lineal es un complejo lineal, o la colección de todos los planos.*

Demostración. Tomemos un complejo lineal y sea S_1 de centro O_1 , la esfera que lo determina. A continuación tomemos un punto arbitrario P en el espacio como centro de inversión, siendo S_i la esfera de inversión con centro en ese punto. Consideremos que, de acuerdo al lema 5.2, si tenemos un complejo lineal CJL_1 , entonces $CJL_1 = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$, por lo que al invertir a CJL_1 respecto a S_1 estaremos

invirtiendo la unión de los sistemas coaxiales cuyas esferas son ortogonales a S_1 , o que cortan a S_1 en una circunferencia de diámetro máximo. Luego, al invertir un sistema coaxial Σ_i obtendremos los siguientes resultados dependiendo de la posición de P y el radio de S_1 :

i) CJL_1 se invierte en una CJL_1 .

Si tomamos $P = O_1$ y $S_i = S_1$, entonces toda esfera ortogonal a S_1 es autoinversas respecto a ella, por lo que las esferas de CJL_1 que son ortogonales a S_1 quedan fijas bajo esta inversión. Por otro lado, si tomamos una esfera de CJL_1 que intersecta a S_1 en una circunferencia de diámetro máximo, al no pasar por O_1 , se invierte en una esfera que pasa por la misma circunferencia de diámetro máximo de S_1 que resultó de la intersección de la esfera original con S_1 . Lo anterior sucede pues la circunferencia, al ser parte ésta de S_1 , queda fija. De este hecho se tiene que las esferas que intersectan a S_1 en circunferencias de diámetro máximo se invierten en otras esferas que intersectan a S_1 en circunferencias de diámetro máximo. Observemos por último que S_1 se invierte en ella misma pues se trata de la esfera de inversión. Por lo tanto, el inverso de un complejo lineal CGL_1 cuando se invierte respecto a la esfera que la determina, se invierte en ella misma.

Pensemos ahora que P es un punto cualquiera del espacio y que $P \notin S_1$. Cada sistema coaxial de $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$, de acuerdo al teorema 5.1, se invierte en otro sistema coaxial. Luego, como S_1 no pasa por el centro de inversión, entonces ésta se invierte en una esfera. Lo anterior indica que el inverso de cada esfera de cada sistema coaxial se intersecta ahora con S'_1 en el mismo ángulo en que lo hacían las esferas originales con S_1 . De aquí concluimos que el inverso de un complejo lineal CJL_1 es un complejo lineal CGL_1 distinto.

ii) CJL_2 se invierte en una CJL_2 .

Consideremos que S_1 tiene radio infinito, es decir que es un plano, y sea

$P \in S_1$. Como las esferas de CGL_2 son aquellas ortogonales a S_1 , entonces al invertir con respecto de S_i tenemos que el plano S_1 es autoinverso, y que cada esfera que no pasa por P se invierte en una esfera que es orthogonal a S_1 . Aquí conviene considerar esferas de radio infinito como parte del complejo lineal, ya que así tendríamos el conjunto de todos los planos ortogonales a S_1 ; esto con el fin de obtener las esferas del complejo lineal que hacen falta, es decir, aquellas esferas que pasan por P se invierten en todos los planos ortogonales (o esferas de radio infinito) que no pasan por P , y a su vez los planos (esferas de radio infinito) que no pasan por P se invierten en las esferas ortogonales que pasan por P . De esta forma el inverso de un complejo lineal CGL_2 es otro complejo lineal CGL_2 .

iii) CJL_3 se invierte en una CJL_3 .

En este caso la esfera S_1 que determina al complejo tiene radio nulo. Consideremos que $P \neq O_1$. Entonces todas las esferas que no pasan por P se invierten en esferas que pasan por O'_1 . Como en el caso anterior, al considerar esferas de radio infinito como parte del complejo lineal CGL_3 , obtendremos nuevamente que al invertir un complejo lineal de este tipo obtenemos otro distinto del mismo tipo.

i) CJL_3 se invierte en la colección de todos los planos.

Por último, si tomamos un CJL_3 , de manera tal que P es el punto por el cual pasan todos los elementos del complejo, es decir que $P = O_1$, basta con tomar a P como centro de inversión e invertir con respecto de una esfera de radio positivo para obtener la colección de todos los posibles planos en el espacio, ya que por cada plano existe la esfera, que es su inverso, y que pasa por P . ■

5.2. Esferas de similitud y antisimilitud en sistemas coaxiales

En esta sección se verá que las esferas de similitud y antisimilitud guardan una estrecha relación con los sistemas coaxiales de esferas, a tal grado que ellas forman parte de éstos últimos. También veremos resultados interesantes al realizar inversiones específicas respecto de éstas esferas.

Previo a la demostración de los teoremas que a continuación se presentan, es recomendable revisar la sección 3.4, que se encuentra en el capítulo 3, para recordar notación y teoremas que son relevantes para el desarrollo de la sección actual.

Teorema 5.4. *Dos esferas mutuamente inversas son coaxiales con su esfera de antisimilitud.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 dos esferas en el espacio. Dado que existen múltiples posiciones relativas entre este par de esferas, la demostración se hará por casos.

Pensemos en primer lugar cuando el par de esferas son concéntricas. En este caso existe una esfera de antisimilitud, digamos S_I , con centro en el centro común de las esferas. Esto indica que pertenecen al mismo sistema coaxial concéntrico.

Si las esferas S_1 y S_2 se intersectan en una circunferencia entonces existen las dos esferas de antisimilitud S_E y S_I que, como se vió en el teorema 3.17, pasan por la circunferencia que resulta de la intersección de las esferas fijas. De aquí que podemos decir entonces que las dos esferas de antisimilitud y dos esferas que se intersectan son coaxiales.

En el tercer caso tenemos que S_1 y S_2 son tangentes en un punto P , por lo que por el teorema 3.17 sabemos que S_E es la única esfera de antisimilitud para este par. Entonces S_E debe pasar por el punto común de S_1 y S_2 , haciendo que S_E sea tangente a ambas en P . De esta manera las tres forman parte de un sistema coaxial tangente en un punto .

Por último, si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ sabemos entonces que tienen solo una esfera de

antisimilitud, la exterior o la interior, dependiendo de si son mutuamente excluyentes o contiene la una a la otra. Supongamos que las esferas fijas tienen esfera de antisimilitud externa y tracemos S_{\perp} , una esfera ortogonal a S_E y a S_1 . Puesto que el ángulo de intersección entre figuras en el espacio se conserva bajo la inversión, tenemos que los inversos de S_{\perp} y S_1 respecto a S_E se intersectarán de manera ortogonal. Pero $(S_{\perp})' = S_{\perp}$ por ser ortogonal a S_E , y $(S_1)' = S_2$. Es decir, S_{\perp} es ortogonal a S_1 , S_2 y a S_E , y dado que éstas últimas tres esferas son colineales, podemos concluir que las tres pertenecen a un sistema coaxial de esferas que no se intersecta. De manera análoga S_1 , S_2 y S_I son coaxiales si de las esferas dadas una contiene a la otra. ■

Teorema 5.5. *El lugar geométrico de puntos cuya razón de potencias con respecto a dos esferas dadas es igual a una constante distinta de la unidad, es una esfera coaxial o concéntrica con ellas.*

Demostración. Sean S_1 y S_2 dos esferas con centros O_1 y O_2 respectivamente. Sea también $\Pi_{1,2}$ el plano radical del sistema coaxial que éstas determinan.

Sea P un punto en el espacio, y tomemos a la esfera que pasa por P y que es parte del sistema coaxial que determinan S_1 y S_2 . Llamemos a ésta última S , y O a su centro. Observemos que S, S_1 y S_2 son colineales. Podemos entonces obtener una forma alternativa de calcular la potencia de P respecto a cada una de las esferas S_1 y S_2 , basta con tomar la potencia de P con respecto a S_1 y luego a ésta cantidad restarle la potencia de P con respecto a S (que es igual a cero puesto que $P \in S$), que por el teorema 4.4 nos queda así:

$$Pot(P, S_1) = Pot(P, S_1) - Pot(P, S) = 2PF \cdot OO_1,$$

donde PF es la longitud que hay desde P al pie de la perpendicular a $\Pi_{1,2}$ que pasa por P y al cual llamaremos F , o mejor dicho PF es la longitud de P al plano radical.

De manera análoga, haciendo uso del teorema 4.4, podemos obtener la po-

tencia de P con respecto a S_2 como:

$$Pot(P, S_2) = Pot(P, S_2) - Pot(P, S) = 2PF \cdot OO_2.$$

De esta forma, procedemos a obtener la razón de las potencias:

$$\frac{Pot(P, S_1)}{Pot(P, S_2)} = \frac{2PF \cdot OO_1}{2PF \cdot OO_2} = \frac{OO_1}{OO_2},$$

y puesto que S es única, las longitudes entre los centros de las esferas son constantes, haciendo que

$$\frac{Pot(P, S_1)}{Pot(P, S_2)} = \frac{OO_1}{OO_2} = k,$$

siendo k una constante.

Si tomamos ahora un punto cualquiera $Q \in S$, veremos que al tomar la constante k y revertir los pasos antes realizados obtenemos que:

$$k = \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{OO_1}{OO_2} \cdot \frac{2QF}{2QF} = \frac{2QF \cdot OO_1}{2QF \cdot OO_2} = \frac{Pot(Q, S_1) - Pot(Q, S)}{Pot(Q, S_2) - Pot(Q, S)},$$

y puesto que Q pertenece a la esfera S , tenemos entonces que $Pot(Q, S) = 0$, con lo cual llegamos a que:

$$k = \frac{Pot(Q, S_1)}{Pot(Q, S_2)}.$$

Concluimos así que el conjunto de los puntos que cumplen que la razón de sus potencias con respecto a dos esferas dadas es igual a una constante distinta de 1, está contenido en el conjunto de puntos que conforman a una esfera coaxial con las dos primeras, y viceversa, haciendo de ésta esfera el lugar geométrico de puntos que estábamos buscando. ■

El teorema que se acaba de demostrar da pie a un resultado casi inmediato.

Pensemos un momento en tres esferas no concéntricas de radios distintos y los seis centros de similitud que éstas determinan dos a dos. Por el teorema 2.9 (véase capítulo 2 sección 2.4) sabemos que al tomar 3 centros de similitud, cada uno de los cuales es centro de similitud de una pareja distinta de esferas, éstos

son colineales, formando así cuatro rectas que a su vez forman un cuadrilátero completo (véase [5 pp. 49-50]), donde los seis centros de similitud son su conjunto de vértices (Fig 5.2).

Visto así, las tres esferas de similitud tienen cada una como diámetro a las diagonales del cuadrilátero completo, y sus centros son el punto medio de éstas últimas. Dado que los centros de las tres esferas son coplanares en el plano que ellos definen, hallamos en éste que el comportamiento recién mencionado se repite pero con circunferencias en vez de esferas.

Esta situación en el caso plano es bien conocida, e inclusive se conoce un teorema relacionado con estos conceptos que menciona que los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo son colineales (véase [5, pp. 152] y [6, pp. 149] para mas detalles al respecto). A ésta línea se le conoce comúnmente como línea de Newton-Gauss y al teorema se le conoce como teorema de Gauss.

Lo anterior quiere decir que los centros de las esferas de similitud de tres esferas no concéntricas y de radios distintos, son colineales. Con este hecho y lo demostrado en el teorema 5.5 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.6. *Dos esferas son coaxiales con su esfera de similitud. Además, dadas tres esferas de radios distintos, no concéntricas por pares, sus esferas de similitud son coaxiales.*

Demostración. Dadas dos esferas en el espacio, sabemos por el teorema 2.8 que su esfera de similitud cumple con ser el lugar geométrico de los puntos cuya razón de potencias a las dos esferas es igual a la razón de los cuadrados de los radios. Si los radios son distintos entonces la razón de los cuadrados de los radios es distinta de la unidad, lo cual indica por el teorema 5.5 que la esfera de similitud es coaxial con el par de esferas.

Consideremos ahora tres esferas no concéntricas por pares y de radios distintos entre ellas. Si las esferas no tienen sus centros colineales, entonces existe el eje radical de éstas. Con centro en ésta recta trazamos una esfera ortogonal a alguna de las tres esferas, que es por consecuencia ortogonal a las tres. Las

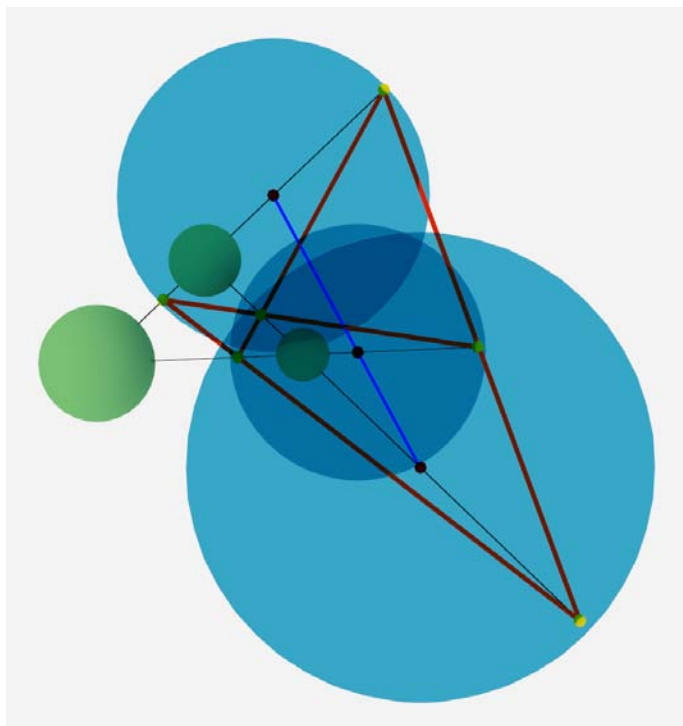


Figura 5.2: Dadas tres esferas no concéntricas y de radios desiguales (en color verde claro), y al obtener sus esferas de similitud (azul claro en el dibujo), se consigue un cuadrilátero completo, cuyos lados son las líneas (en color rojo) que contienen una tercia de centros de similitud (en amarillo) de parejas de esferas distintas cada vez. Los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero (en negro tanto los puntos medios como las diagonales) son los centros de las esferas de similitud de las tres esferas dadas y son colineales en la línea de Newton-Gauss (en azul).

esferas de similitud, por ser coaxiales con las distintas parejas de esferas dadas, también son ortogonales con la esfera ortogonal común a las tres, y dado que sus centros son colineales en la línea de Newton-Gauss por el teorema de Gauss, entonces las tres esferas de similitud son coaxiales. ■

Teorema 5.7. *Las seis esferas de similitud, que son determinadas por cuatro esferas de radios distintos y centros no coplanares al ser tomadas por parejas, pertenecen a una congruencia lineal.*

Demostración. Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 cuatro esferas como en la hipótesis, y O_1, O_2, O_3 y O_4 sus centros respectivamente. La esfera de similitud $S_{1,2}$ de las esferas S_1 y S_2 es coaxial con ellas (teorema 5.6), por lo que $S_{1,2}$ es ortogonal a la esfera ortogonal S_\perp de las esferas S_1, S_2, S_3 y S_4 .

Como los centros de las esferas S_1 y S_2 dividen armónicamente al diámetro de $S_{1,2}$ (teorema 2.7), entonces O_1 y O_2 son puntos mutuamente inversos con respecto a $S_{1,2}$ (teorema 3.3), y la esfera S_O que pasa por los centros O_1, O_2, O_3 y O_4 de las esferas dadas es ortogonal a $S_{1,2}$ (teorema 3.9). Análogamente para las cinco esferas de similitud $S_{1,3}, S_{1,4}, S_{2,3}, S_{2,4}$ y $S_{3,4}$ de las parejas restantes de esferas dadas según sus subíndices.

Entonces las seis esferas de similitud son ortogonales a las dos esferas S_\perp y S_O , lo cual hace que éstas seis esferas pertenezcan a una congruencia lineal.

Observemos que la aseveración anterior sigue siendo válida inclusive si la esfera S_\perp no existe, ya que el razonamiento anterior muestra que el centro radical de las cuatro esferas dadas, es decir el centro de S_\perp , tiene la misma potencia con respecto a las seis esferas de similitud; lo mismo sucede con el centro de S_O . Entonces la línea que une el centro de S_O con el centro radical de las cuatro esferas dadas, es el eje radical de las seis esferas de similitud, lo que implica que las seis esferas de similitud son coplanares, siendo así ortogonales a S_O y a una esfera de radio infinito, o en otras palabras, son parte de una congruencia lineal.

■

Teorema 5.8. *Si una esfera variable corta a dos esferas dadas en ángulos fijos, entonces cortará también en un ángulo fijo cada esfera concéntrica o coaxial con ellas.*

Demostración. En primer lugar sabemos por el teorema 5.1, que un par de esferas pueden invertirse en un par de planos o un par de circunferencias concéntricas, dependiendo de si éstas se intersectan o no.

Para fines de la demostración de este teorema, a continuación recordaremos las ecuaciones 1.1 y 1.2 del capítulo 1, que sirven para medir el ángulo de intersección entre dos esferas y entre un plano y una esfera, respectivamente:

$$\cos \theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \overline{O_1O_2}^2}{2(r_1 \cdot r_2)} \quad (1,1), \quad p = r \cos(\theta) \quad (1,2).$$

Pensemos en primer lugar en la situación en la que se tiene dos esferas concéntricas S_1 y S_2 de radios r_1, r_2 , y cuyos centros son O_1, O_2 . Sea S_x la esfera variable de centro O_x y radio r_x . Como esta esfera variable corta en ángulos fijos a S_1 y S_2 , digamos en θ_1 y θ_2 , entonces al sustituir los valores correspondientes en la ecuación 1.1 tenemos:

$$\cos \theta_1 = \frac{r_1^2 + r_x^2 - \overline{O_1O_x}^2}{2(r_1 \cdot r_x)}, \quad \cos \theta_2 = \frac{r_2^2 + r_x^2 - \overline{O_2O_x}^2}{2(r_2 \cdot r_x)}.$$

En las ecuaciones de arriba se desconocen los valores de $\overline{O_1O_x}, r_x, \overline{O_2O_x}$. Si despejamos dichos valores de las ecuaciones de arriba obtendremos que

$$\overline{O_1O_x}^2 = r_x^2 - 2r_1 \cdot r_x \cdot \cos \theta_1 + r_1^2, \quad \overline{O_2O_x}^2 = r_x^2 - 2r_2 \cdot r_x \cdot \cos \theta_2 + r_2^2.$$

Al ser S_1 y S_2 esferas concéntricas, tenemos que $\overline{O_1O_x} = \overline{O_2O_x}$, por lo que podemos igualar las ecuaciones anteriores, lo cual resulta en una ecuación como la siguiente en donde el único término desconocido es el término lineal r_x :

$$r_1^2 - 2r_1 \cdot r_x \cos \theta_1 = r_2^2 - 2r_2 \cdot r_x \cos \theta_2 \quad \Rightarrow \quad r_x = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1)}$$

Como se puede observar, r_x es un valor real determinado por los radios de las esferas dadas y los ángulos en los cuales las interseca, es decir que el radio r_x no es una variable sino una constante, por lo que el valor de $\overline{O_1O_x}$ también queda determinado de manera única al sustituir el valor de r_x en alguna de las dos ecuaciones mostradas anteriormente. Esto nos indica entonces que la esfera variable es variable en el sentido de la posición de su centro, el cual puede hallarse

en cualquier punto de la esfera con centro en O_1 y radio O_1O_x por lo recién discutido.

Por el argumento de arriba, dadas dos esferas concéntricas que son cortadas por otra variable en ángulos fijos, éstas determinan de manera única la distancia entre el centro de ellas y el de la esfera variable, además del radio de la última. De esta manera, cualquier otra esfera que sea concéntrica con las dos dadas será cortada en un ángulo fijo por la esfera variable. Esta última aseveración se consigue al sustituir en la ecuación 1.1 los valores del radio de la nueva esfera, O_x , y r_x , donde los últimos dos están determinados por S_1 y S_2 . Observemos también que por el teorema 5.1 sabemos que un conjunto de esferas concéntricas se puede invertir en un sistema coaxial de esferas, y dado que la inversión es una transformación isogonal tenemos que si una esfera variable corta a dos esferas que no se intersectan en ángulos fijos, entonces la esfera variable intersecta en un ángulo fijo a cada esfera coaxial con las dos dadas.

Hasta el momento solo hemos demostrado el teorema para el caso en que se tiene esferas concéntricas o un sistema coaxial de esferas que no se intersectan. Para demostrar los dos casos restantes cuando el sistema coaxial está conformado de esferas tangentes y cuando está conformado de esferas que se intersectan, usaremos el resultado del teorema 5.1 que nos dice que podemos invertir estos sistemas en un conjunto de planos paralelos y en un haz de planos que pasan por una recta, respectivamente.

Supongamos ahora que S_1 y S_2 son esferas tangentes una a la otra y consideremos al sistema coaxial Σ que determinan éstas. Al invertir el sistema respecto al punto de tangencia común obtenemos planos paralelos perpendiculares al inverso de la línea de los centros que se invierte en sí misma. Si la esfera variable S_x intersecta en ángulos fijos a S_1 y a S_2 , entonces S'_x intersecta en ángulos fijos a S'_1 y a S'_2 . Usamos la ecuación 1.2 para medir el ángulo entre estos planos y S'_x . Como el ángulo θ_1 y θ_2 son los mismos que los de la intersección de las figuras antes de invertir, entonces dado un radio r_x de la esfera variable obtenemos los valores de p_1 y p_2 que son las longitudes de los segmentos que van del centro O_x de la esfera variable a los planos S'_1 y S'_2 , por lo que al sustituir estos valores en

la ecuación 1.2 obtenemos:

$$p_1 = r_x \cos(\theta_1) \quad , \quad p_2 = r_x \cos(\theta_2).$$

Al analizar las ecuaciones de arriba podemos notar que los valores p_1, p_2 , son determinados por r_x . De hecho al despejar r_x de ambas ecuaciones e igualarlas tenemos

$$r_x = \frac{p_1}{\cos(\theta_1)} = \frac{p_2}{\cos(\theta_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}.$$

La igualdad anterior nos dice que la razón de las longitudes del centro de la esfera variable a los planos es una constante. Por otro lado si llamamos H_1 y H_2 a los pies de las alturas trazadas desde O_x a los planos S'_1 y S'_2 , dado que éstos son paralelos, entonces H_1H_2 es constante y es la distancia entre dichos planos, más aún $H_1O_x + O_xH_2 = H_1H_2$, lo cual nos indica que las longitudes de p_1 y p_2 están determinadas de manera única cuando los ángulos θ_1 y θ_2 están dados, haciendo que la esfera variable sea variable en el sentido de que su centro O_x cambia su posición pero su radio r_x y los ángulos de intersección con los planos son constantes, o en otras palabras el centro de la esfera variable se encuentra en un plano paralelo a S'_1 y S'_2 . Dicho esto, si tomamos un plano paralelo Π_0 a S'_1 y S'_2 , sabemos entonces que r_x y p_0 son constantes, siendo p_0 la distancia de O_x al plano Π_0 , y por la ecuación 1.2 tenemos que $\cos(\theta_0) = p_0/r_x$, o bien que el ángulo θ_0 de intersección entre S_x y Π_0 es constante. Luego al volver a invertir para obtener el sistema coaxial determinado por S_1 y S_2 , el ángulo de intersección de Π'_0 y S'_x es el constante θ_0 . Como Π_0 es un plano arbitrario, la esfera Π'_0 es también una esfera arbitraria del sistema coaxial, con lo que se demuestra la proposición.

Por último consideremos el caso donde las esferas S_1 y S_2 se intersectan. Por teorema 5.1 el sistema coaxial que ellas determinan se invierte en un haz de planos que pasan por una recta l cuando éste se invierte respecto de una esfera con centro en uno de los puntos comunes de la intersección del sistema. Si la esfera S_x es variable pero conserva el ángulo de intersección con S'_1 y S'_2 , entonces por la ecuación 1.2 tenemos que

$$\cos(\theta_1) = \frac{p_1}{r_x} \quad y \quad \cos(\theta_2) = \frac{p_2}{r_x},$$

es decir que la razón de la distancia de O_x a los planos y el radio r_x es constante. Entonces si consideramos otro radio r'_x cualquiera de la esfera, y p'_1, p'_2 son las distancias de la nueva posición O_x a los planos S'_1 y S'_2 , entonces se debe cumplir

$$\cos(\theta_1) = \frac{p_1}{r_x} = \frac{p'_1}{r'_x} \quad y \quad \cos(\theta_2) = \frac{p_2}{r_x} = \frac{p'_2}{r'_x}.$$

Esto indica que los triángulos rectángulos coplanares cuyos dos de sus lados son p_1, r_x y p'_1, r'_x , respectivamente son semejantes. Observemos que se trata de triángulos rectángulos ya que p_1 y p'_1 son perpendiculares a S'_1 . De igual manera ocurre que los otros dos triángulos rectángulos cuya razón de sus lados es $\cos(\theta_2)$ son semejantes entre sí. Veamos que como dos de los lados de éstos triángulos rectángulos homotéticos correspondientes están contenidos en S'_1 y S'_2 respectivamente, entonces el centro de homotecia es el punto de intersección del plano que contiene estos triángulos con la recta l , al que llamaremos P (Fig. 5.3).

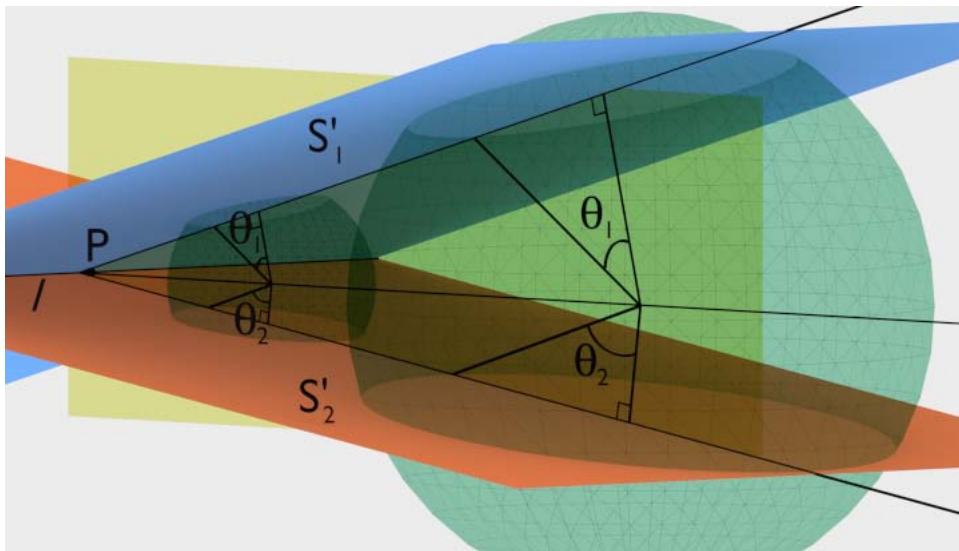


Figura 5.3: Dos esferas que conservan el ángulo de intersección con dos planos son homotéticas entre sí.

Dado que r'_x pertenece al radio de la esfera variable, y cualesquiera dos esferas son homotéticas, entonces las esferas de radio r_x y r'_x tienen razón de homotecia

r_x/r'_x . Por las ecuaciones de arriba tenemos que esta razón de homotecia cumple

$$\frac{r'_x}{r_x} = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{p'_2}{p_2}.$$

Esto quiere decir que los triángulos y las esferas tienen el mismo centro de homotecia, además de que tienen la misma razón de homotecia. Por esta misma razón, cualquier esfera homotética a la de radio r_x con centro de homotecia $P \in l$ será una posición de la esfera variable que corta en ángulos iguales a S'_1 y S'_2 .

Ahora bien, si se toma un plano Π_0 arbitrario por l , para hallar el ángulo de intersección θ_0 con la esfera S_x de radio r_x , se halla la distancia p_0 que va de O_x al plano en cuestión. Luego tomando como centro de homotecia un punto $P \in l$ arbitrario se encuentra un homotético arbitrario de la esfera S_x , digamos S'_x . Si consideramos el plano por P y p_0 , obtenemos triángulo del cual dos de sus lados son p_0 y r_x , y que al ser transformado bajo la homotecia anterior conserva la relación de sus lados p_0 y r_x , tal y como se ve al revertir los pasos del argumento de arriba. Concluimos así que la esfera variable corta en un ángulo fijo al plano Π_0 , por lo que al volver a invertir para obtener el sistema coaxial determinado por S_1 y S_2 , tenemos que S'_x y Π'_0 se intersectan en un ángulo fijo, es decir que cualquier esfera coaxial con S_1 y S_2 (cuando éstas se intersectan) es cortada en un ángulo fijo por la esfera variable.

De esta manera queda demostrado el teorema para cada caso de sistema coaxial de esferas. ■

Teorema 5.9. *Todas las esferas que intersectan a dos esferas de radios distintos en ángulos iguales, son ortogonales a la esfera de antisimilitud externa de las últimas dos; todas aquellas que las intersectan en ángulos suplementarios son ortogonales a la esfera de antisimilitud interna.*

Demostración. La demostración se seguirá del supuesto que exista alguna de las esferas de antisimilitud, por lo cual veremos diferentes casos. Para esto, sean S_1 y S_2 dos esferas fijas de radios distintos y de centros O_1 y O_2 , S una

esfera arbitraria de centro O que las corta en ángulos iguales cuando éstas no se contienen la una a la otra, y que las corta en ángulos suplementarios cuando sí contiene una a la otra. Recordemos también que el ángulo de intersección entre esferas se puede medir por medio del ángulo que hay entre las normales a los planos tangentes de éstas en un punto de su intersección.

Primeramente supongamos que las esferas fijas son mutuamente excluyentes, por lo cual existe S_E , su esfera de antisimilitud externa. Fijemos nuestra atención en el plano de los centros de S_1, S_2 y S . Llamemos P y Q a los puntos de la intersección de S_1 con S y S_2 con S respectivamente, tales que pertenecen al plano de los centros de las tres esferas, como en la figura 5.4. Podemos apreciar que $\angle O_1PO = \angle O_2QO$ porque S corta a las esferas fijas en ángulos iguales, y que al trazar la línea PQ obtenemos el triángulo isósceles POQ , por lo que $\angle OPQ = \angle OQP$. Por tanto al trazar el plano tangente en P a S_1 y el plano tangente a S_2 en Q , tendremos rectas perpendiculares a O_1P y O_2Q (por P y Q respectivamente) en el plano de los centros, formando ángulos rectos con los radios de sus respectivas esferas.

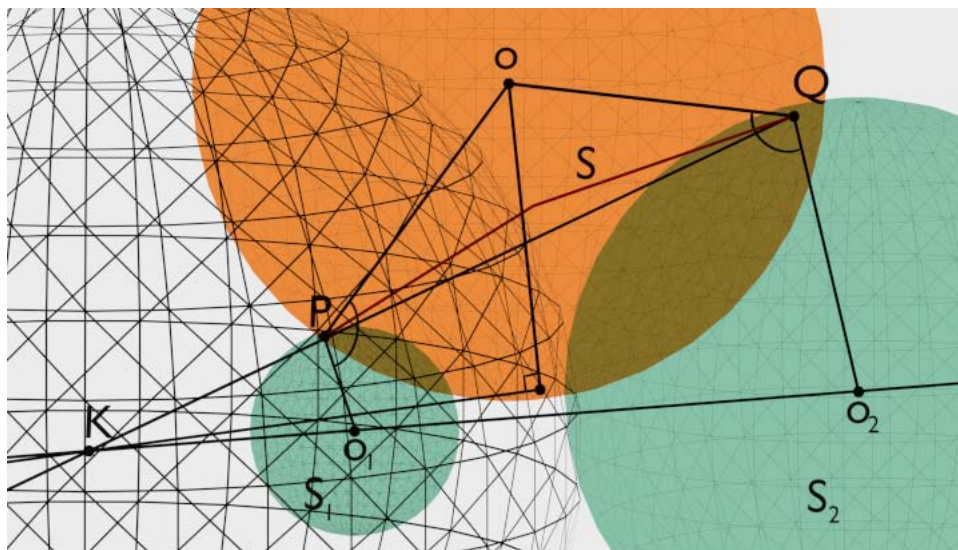


Figura 5.4: Una esfera (en naranja) que intersecciona a otras dos (en verde) en ángulos iguales intersecciona a éstas en puntos antihomólogos, los cuales son mutuamente inversos respecto a la esfera de antisimilitud externa (en forma de red color negro).

Esto último nos indica que al restar esos ángulos rectos de los ángulos iguales $\angle O_1PO, \angle O_2QO$, obtendremos que las rectas tangentes forman ángulos iguales con la recta PQ . Por un resultado de geometría sintética en el plano ([5, pp. 28-29]) sabemos que al cumplirse lo anteriormente descrito, se tiene que P y Q son punto antihomólogos con centro de similitud K . Por el corolario 3.2 sabemos que P y Q son puntos mutuamente inversos respecto de S_E , y como S pasa por ese par de puntos inversos entonces por el teorema 3.9 S es mutuamente inversa respecto de la esfera de inversión respecto de la cual P y Q son inversos, es decir que S es autoinversa respecto a S_E y por tanto es ortogonal a esta esfera de antisimilitud.

El caso donde una esfera contiene una a la otra es completamente análogo al anterior, solo que la esfera de antisimilitud es la interna, por lo que el centro de homotecia en este caso es H en vez de K , además de que los ángulos $\angle O_1PO, \angle O_2QO$, son suplementarios en vez de iguales, por lo que al seguir los pasos anteriores se debe de considerar al ángulo suplementario del ángulo $\angle O_2QO$ que es igual al ángulo $\angle O_1PO$ (Fig. 5.5), para así mantener la igualdad de los ángulos correspondientes.

Los casos restantes, cuando S_1 y S_2 se intersectan y cuando éstas son concéntricas, pueden obtenerse con facilidad ya que en el primero de ellos se repiten los dos casos anteriores pero al mismo tiempo dado que existen las dos esferas de antisimilitud, mientras que en el segundo caso basta con invertir las esferas concéntricas con respecto de un punto que no está en ninguna de ellas para obtener dos esferas que no se intersectan y son mutuamente excluyentes (como se ve en el teorema 5.1), reduciendo así el problema al caso que se menciona al principio de la demostración de este teorema. ■

Corolario 5.1. *Cada esfera de un sistema de esferas coaxiales intersectará en ángulos iguales o suplementarios a dos esferas, las cuales intersectan a dos esferas del sistema en ángulos iguales o suplementarios.*

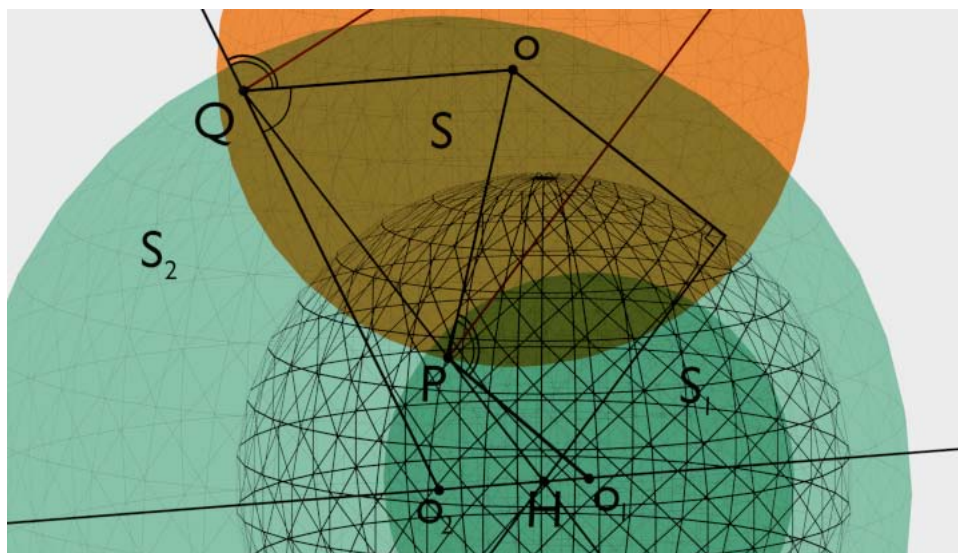


Figura 5.5: Una esfera (en naranja) que intersecta a otras dos (en verde) en ángulos complementarios intersecta a éstas en puntos antihomólogos, los cuales son mutuamente inversos respecto a la esfera de antisimilitud interna (en forma de red color negro).

Demostración. Sea Σ el sistema de esferas coaxiales y S_1 y S_2 dos esferas. Tomemos dos esferas $S, S' \in \Sigma$. Por hipótesis sabemos que si S y S' intersectan a S_1 y S_2 en ángulos iguales, entonces por lo visto en el teorema anterior sabemos que S y S' son ortogonales a la esfera de antisimilitud exterior de S_1 y S_2 , luego todas las esferas de Σ intersectarán de manera ortogonal a la esfera de antisimilitud exterior, por lo que al invertir a Σ con respecto a ésta última el sistema permanece invariante, y dado que S_1 y S_2 son mutuamente inversos respecto a ésta esfera, todas las esferas de Σ que intersectan a S_1 y a S_2 lo harán entonces en ángulos iguales dado que la inversión conserva los ángulos de intersección.

Ahora bien, si sucede el segundo caso, es decir que S y S' intersectan a S_1 y S_2 en ángulos suplementarios, entonces S y S' son ortogonales a la esfera de antisimilitud interior, por lo que todas las esferas de Σ serán ortogonales a la esfera de antisimilitud interior haciendolas invariantes bajo inversión con respecto a ésta, y dado que S_1 y S_2 son cortadas en ángulos suplementarios, entonces

todas las esferas de Σ intersectarán en ángulos suplementarios a S_1 y S_2 , en vez de en ángulos iguales como en el caso anterior. ■

Corolario 5.2. *Si cada una de dos esferas no concéntricas y de radios distintos intersectan a cada una de otras dos esferas del mismo tipo y en ángulos iguales, el centro de similitud externo de cada par yace en el plano radical del otro par. Si cada esfera de un par intersecta a cada una del otro par en ángulos suplementarios, el centro de similitud interno de cada par yace en el plano radical del otro.*

Demostración. Sean S_1, S_2 un par de esferas y sean S'_1, S'_2 el otro par que es intersectado por cada una de la esferas del primer par en ángulos iguales. Supongamos sin pérdida de generalidad que existe la esfera de antisimilitud externa S_E de al menos un par de éstas esferas, digamos de las esferas S_1 y S_2 . Como cada una de S'_1 y S'_2 intersectan a S_1 y S_2 en ángulos iguales, entonces las primeras intersectan a S_E de manera ortogonal, por lo que el centro de S_E está en el plano radical de S'_1 y S'_2 .

Teorema 5.10. *Dadas tres esferas de radios distintos que pasan por dos puntos en común, las tres esferas de antisimilitud externa que éstas determinan dos a dos son coaxiales, así como lo son cada esfera de antisimilitud externa y las restantes dos esferas de antisimilitud interna.*

Demostración. Dado que las tres esferas pasan por dos puntos en común, entonces éstas se intersectan dos a dos en una circunferencia, lo que hace que cada una de las tres parejas de esferas tengan esferas de antisimilitud externa e interna.

Como las esferas de antisimilitud son coaxiales con las esferas que las determinan, entonces pasan por la circunferencia de intersección de ellas, haciendo

que las esferas de antisimilitud pasen también por los dos puntos comunes de intersección de las primeras tres esferas.

Por el teorema 2.9, sabemos que de los 6 centros de similitud que se obtienen de tres esferas de radios distintos son colineales por tercias en cuatro líneas: existen tres líneas cada una conteniendo dos centros de similitud interno y el externo restante, mientras que la cuarta línea contiene los tres centros de similitud externo. De aquí que los centros de las tres esferas de antisimilitud externa sean colineales y por tanto coaxiales. De igual manera obtenemos otros tres sistemas de esferas coaxiales, donde las esferas que son coaxiales son dos esferas de antisimilitud interna y la restante externa. ■

Teorema 5.11. *Dadas cuatro esferas de radios distintos y de centros no coplanares, tales que se intersectan cualesquiera dos, las esferas que cortan a éstas cuatro en ángulos iguales forman un sistema coaxial, así como lo hacen aquellas que cortan a una en el ángulo suplementario al de los ángulos de intersección con las otras tres, y aquellas que cortan dos en ángulos suplementarios a los ángulos de intersección con las otras dos.*

Demostración. Sean S_1, S_2, S_3, S_4 las cuatro esferas como en la hipótesis. Dado que las cuatro esferas se intersectan dos a dos, existen entonces las esferas de antisimilitud externa e interna de cada pareja; llamemos a éstas $S_{E,i,j}$ y $S_{I,i,j}$ respectivamente, siendo S_i y S_j las parejas de esferas respectivas.

Pensemos primero el caso en el que una esfera S intersecta a las cuatro esferas en ángulos iguales. Cuando eso sucede, sabemos por teorema 5.9 que S intersecta de manera ortogonal a cada esfera de antisimilitud externa de cada pareja de la cuarteta de esferas.

Como se vió en el teorema pasado, dadas tres esferas, la tercia de esferas de antisimilitud externa que se forman nos dan un sistema de esferas coaxiales. En este caso que tenemos seis de este estilo, sabemos por el teorema 2.10 que los centros de éstas esferas son coplanares. Tenemos así seis esferas ortogonales

a la esfera S , donde al menos tres de ellas son no coaxiales, por lo que usando el teorema 4.13, sabemos que las seis esferas de antisimilitud externa forman una congruencia lineal. Así, todas las esferas que intersectan en ángulos iguales a cada una de las esferas S_1, S_2, S_3 y S_4 , intersectarán de forma ortogonal a la congruencia lineal formada por las seis esferas de antisimilitud externa que ésta cuarteta de esferas tienen, formando así un sistema de esferas coaxiales.

Haciendo uso de un argumento similar, supongamos sin pérdida de generalidad que ahora S intersecta a S_1 en un ángulo suplementario al ángulo de intersección que forma con cada una de S_2, S_3 y S_4 . Esto también nos indica que intersecta a S_2, S_3 y S_4 en ángulos iguales. De esta forma S intersecta a $S_{I,1,2}, S_{I,1,3}, S_{I,1,4}, S_{E,2,3}, S_{E,3,4}$ y $S_{E,2,4}$ de manera ortogonal. Por el teorema 2.10 sabemos que los centros de éstas seis esferas son coplanares, y por 4.13, éstas forman una congruencia lineal, por lo que todas las esferas ortogonales a éstas seis forman un sistema de esferas coaxiales. Las mismas esferas que son ortogonales a las seis de antisimilitud, son las que se intersectan con S_1, S_2, S_3 y S_4 de la manera antes mencionada. Observemos que si en vez de tener el ángulo suplementario en S_1 lo tuvieramos en otra esfera, el teorema 2.10 nos asegura que las otras combinaciones de centros de similitud son coplanares también.

De manera análoga al caso anterior, supongamos sin pérdida de generalidad que S intersecta a S_1 y S_2 en ángulos iguales, y a S_3 y S_4 también en ángulos iguales, pero siendo este último ángulo el suplementario del ángulo de intersección que se forma con S_1 o con S_2 . Entonces S es ortogonal a $S_{I,1,3}, S_{I,1,4}, S_{I,2,3}, S_{I,2,4}, S_{E,1,2}$ y $S_{E,3,4}$, cuyos centros son coplanares por el teorema 2.10, formando así una congruencia lineal por el teorema 4.13. Entonces todas las esferas que intersectan a S_1, S_2, S_3 y S_4 de la forma en que lo hace S , intersectan de manera ortogonal a las seis esferas de antisimilitud anteriores, formando así un sistema de esferas coaxiales. De igual forma que el caso anterior, el teorema 2.10 nos asegura que al tomar otras intersecciones similares pero seleccionando otra combinación de esferas, las esferas de antisimilitud respectivas tendrán centros coplanares también. ■

Pensemos un momento en el problema de invertir dos esferas de radios distintos en esferas iguales. Este cuestionamiento tiene una solución muy sencilla si recordamos el inciso *ii* del teorema 3.14, ya que basta con tomar como centro de inversión un punto en alguna de las esferas de antisimilitud del par de esferas, pero no en los puntos que tienen en común el par de esferas y la esfera de antisimilitud si es que las primeras se intersectan, ya que de acuerdo a este teorema sabemos que las figuras autoinversas con respecto a la primera esfera se invierten con respecto a la segunda esfera en figuras simétricas, mientras que la primera esfera se invierte en el plano de simetría de éstas últimas. En otras palabras, al invertir con respecto a una esfera cuyo centro está en alguna de las esferas de antisimilitud, el par de esferas de radios distintos se invierten en un par de esferas de radios iguales, las cuales tienen como plano de simetría al inverso de la esfera de antisimilitud.

De forma recíproca, tomemos dos esferas de radios iguales y no concéntricas, junto con su plano de simetría, e invertamos con respecto a una esfera cuyo centro no esté en ninguna de las figuras anteriores. Obtenemos entonces tres esferas, de las cuales una de ellas pasa por el centro de inversión, mientras que las otras dos son mutuamente inversas respecto a la última. Esto sucede ya que al volver a invertir con respecto a la esfera del inicio, obtenemos nuevamente la configuración de dos esferas simétricas con su plano de simetría, lo cual sólo ocurre cuando la esfera que se invierte en un plano es la esfera de inversión para el inverso de las dos esferas simétricas, es decir, es su esfera de antisimilitud.

El resultado recién obtenido podemos resumirlo en forma de teorema de la manera siguiente.

Teorema 5.12. *Si dos esferas son invertidas con respecto a cualquier punto de su esfera de antisimilitud, excepto por los puntos comunes a las dos primeras, entonces sus inversos serán iguales, y viceversa.*

5.3. Ejercicios

1. Analice el caso especial de invertir un sistema coaxial concéntrico respecto a una esfera que:
 - i)* Es concéntrica con el sistema coaxial.
 - ii)* No es concéntrica con el sistema coaxial.

2. Analice los casos especiales de inversión de complejos lineales siguientes:
 - i)* Cuando se invierte un complejo lineal CGL_1 con respecto a un punto en la esfera que determina al complejo.
 - ii)* Cuando se invierte un complejo lineal CGL_2 con respecto a un punto fuera del plano que determina al complejo.

Parte III

Conclusiones y Referencias

Conclusiones

La geometría moderna es una rama de las matemáticas ampliamente estudiada desde hace mucho tiempo ya, sin embargo no deja de estar presente en este ámbito dada la importancia de sus resultados y la manera en que ésta es desarrollada.

A pesar de haberse analizado teoremas que guardan una gran similitud con sus respectivos homólogos en el plano como lo son los inversos de figuras básicas como rectas y circunferencias, se pudo notar que ciertas ideas se pueden generalizar en una dimensión superior de manera muy natural, como sucedió con los planos y las esferas que son figuras mutuamente inversas en ciertas ocasiones; mientras que en el caso de las esferas coaxiales y sus conjuntos ortogonales de esferas se pudo apreciar algunas libertades que nos ofrece el espacio, que en el caso plano serían imposible de desarrollar, tal y como sucede con los complejos lineales y congruencias lineales, conjuntos de esferas los cuales representaron un especial interés a lo largo de este trabajo.

La redacción de algunos de estos teoremas significaron un verdadero reto al contar con pocas referencias que trataran estos temas con el mismo tratamiento que se dio en este trabajo, es decir cuando se analizaba el aspecto geométrico en el espacio, no por ello se desestimaba la pizca de ingenio necesaria para la resolución de los mismos

Con la esperanza de ofrecer un recurso extra a alumnos de los primeros semestres de la carrera de matemáticas y como un objetivo secundario, esta tesis se planeó para su uso como referencia en cursos de geometría moderna para poder profundizar en algunos temas que se tratan en los mismos, e inclusive contar con una recurso interactivo gracias al pequeño programa incluido en ésta.

Código usado en Blender

La transcripción del código fuente del script o programa que a continuación se presenta fue diseñado y creado en el lenguaje de programación *Python*, haciendo uso del API exclusivo del software *Blender*, y fue usado para crear varias de las ilustraciones de esta tesis.

El programa puede ser instalado directamente en *Blender* como un complemento o **add-on** para su fácil acceso y manejo, para lo cual se requiere de la instalación previa del software antes mencionado, el cual puede ser descargado de manera gratuita directamente de la página oficial www.blender.org.

```

__author__ = 'Fernando'

bl_info = {
    "name": "Invert_Figure",
    "author": "Fernando_García_Rodríguez_(Fegrodz)",
    "version": (1, 0),
    "blender": (2, 7, 2),
    "location": "View3D->Object->Invert_Figure",
    "description": "Obtains the geometric inverse of a figure",
    "warning": "",
    "wiki_url": "",
    "tracker_url": "",
    "category": "Object"}

import bpy
from math import sqrt

#-----CREACION DEL SCRIPT PRINCIPAL-----
#-----

```

```

class InvertFig(bpy.types.Operator):
    # blender will use this as a tooltip for menu items and buttons.
    """ Obtains the inverse of the figure selected """
    # unique identifier for buttons and menu items to reference.
    bl_idname = "object.inverse"
    # display name in the interface.
    bl_label = "Invertir"
    # enable undo for the operator.
    bl_options = {'REGISTER', 'UNDO'}
    # execute() is called by blender when running the operator.
    def execute(self, context):

```

```

#———— The original script
# Obtenemos el diametro d y el radio r de la esfera.
d = bpy.data.objects["Sphere_of_inversion"].dimensions.x
r = d/2
# Obtenemos las coordenadas del
# centro de inversion O=(O_x, O_y, O_z).
O_x = bpy.data.objects["Sphere_of_inversion"].location.x
O_y = bpy.data.objects["Sphere_of_inversion"].location.y
O_z = bpy.data.objects["Sphere_of_inversion"].location.z
# Colocamos el centro de cada objeto
# seleccionado en el centro global.
bpy.ops.object.transform_apply(location=True)
# Limpiamos la rotacion de los objetos para no afectar
# las coordenadas globales con respecto a las locales.
bpy.ops.object.transform_apply(rotation=True)
# Limpiamos la escala de los objetos para no afectar las
# coordenadas globales respecto de las locales.
bpy.ops.object.transform_apply(scale=True)
# Obtenemos un duplicado de las superficies seleccionadas.

```



```

bpy.ops.object.duplicate()
# Hacemos una lista de las superficies duplicadas.
Surfaces = bpy.context.selected_objects
for object in Surfaces:
    j=object.name
    nv = bpy.data.objects[j].data.name
    vertices = bpy.data.meshes[nv].vertices.values()
    v = len(vertices)
    for i in range(0, v):
# Obtenemos las coordenadas de cada punto  $P=(P_x, P_y, P_z)$ 
# en la superficie duplicada.
        P_x = bpy.data.objects[j].data.vertices[i].co[0]
        P_y = bpy.data.objects[j].data.vertices[i].co[1]
        P_z = bpy.data.objects[j].data.vertices[i].co[2]
# Encontramos  $k$ , constante que servira para obtener  $P'$ .
        k = (r*r)/((P_x-O_x)*(P_x-O_x)+(P_y-O_y)*(P_y-O_y)+\
(P_z-O_z)*(P_z-O_z))
# Calculamos las coordenadas de  $P'$  y obtenemos el inverso
# de  $P$  substituyendo las coordenadas de la superficie
# duplicada con las de  $P'$ .
        p_x = O_x+k*(P_x-O_x)
        p_y = O_y+k*(P_y-O_y)
        p_z = O_z+k*(P_z-O_z)
# Obtenemos el inverso de  $P$  substituyendo las coordenadas
# de la superficie duplicada con las coordenadas de  $P'$ .
        bpy.data.objects[j].data.vertices[i].co[0] = p_x
        bpy.data.objects[j].data.vertices[i].co[1] = p_y
        bpy.data.objects[j].data.vertices[i].co[2] = p_z

    object.name = j + "_inverso"
# this lets blender know the operator finished successfully.

```

```

        return { 'FINISHED' }

#-----CREACION DEL PANEL-----
#-----

class RenameFig(bpy.types.Operator):
    """Renombra el objeto seleccionado como esfera de inversion"""
    # Identificador unico para botones y menus de referencia.
    bl_idname = "object.rename"
    bl_label = "Renombra" # Nombre mostrado en la interfaz.
    bl_options = {'REGISTER', 'UNDO'} # enable undo for the operator.

# Clase para crear el boton para renombrar la esfera de inversion
def execute(self, context):
    for object in bpy.data.scenes['Scene'].objects:
        if object.name == "Sphere_of_inversion":
            bpy.context.object.name = "Object"
        else:
            bpy.context.object.name = "Sphere_of_inversion"
    return { 'FINISHED' }

class InvertPanel(bpy.types.Panel):
    """Crea un panel en el barra de herramientas del visor grafico
    para manipular el addon de Inversion"""
    bl_label = "Inversion"
    bl_space_type = 'VIEW_3D'
    bl_region_type = 'TOOLS'

def draw(self, context):
    layout = self.layout
    row = layout.row()

```

```

row.label(text=" Definir_como_esfera_de_inversion:")
row = layout.row()
row.operator("object.rename")
row = layout.row()
row.label(text=" Invertir_figuras_seleccionadas:")
row = layout.row()
row.operator("object.inverse")

#-----REGISTRO DE CLASES-----
#-----
def register():
    bpy.utils.register_class(InvertFig)
    bpy.utils.register_class(RenameFig)
    bpy.utils.register_class(InvertPanel)

def unregister():
    bpy.utils.unregister_class(InvertFig)
    bpy.utils.unregister_class(RenameFig)
    bpy.utils.unregister_class(InvertPanel)

# This allows you to run the script directly
# from blenders text editor to test the addon
#without having to install it.
if __name__ == "__main__":
    register()

```

Bibliografía

- [1] *Steiner Biography*. Abril de 2009. Recuperado el 11 de Julio de 2013, de <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steiner.html>
- [2] J. WENTWORTH Y D.E. SMITH. *Geometría plana y del espacio*. 18a Edición. Editorial Porrúa S.A., (1993).
- [3] M. P. DO CARMO. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 10a Impresión. Prentice-Hall, Inc. (1976).
- [4] H. S. M. COXETER. *Introduction to Geometry*. 2a Edición. John Wiley and Sons, Inc., (1969).
- [5] L. S. SHIVELY. *Introducción a la geometría moderna*. 12a Impresión. CIA. Editorial Continental, S.A. de C.V., (1982).
- [6] D. A. LISTA. *Elementos de matemáticas puras y mixtas*. 2da Edición. Imprenta de D. Leon Amarita, (1823).
- [7] N. ALTSHILLER-COURT. *College geometry: an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*. 2da Edición. Dover Publications, Inc., (2007).
- [8] J. L. COOLIDGE. *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford University Press, (1916).