



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“SISTEMA DE CONTROL DIFUSO PARA UN
CUADRICÓPTERO BAJO UN AMBIENTE DE
RED”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO ELÉCTRICO Y ELECTRÓNICO

P R E S E N T A :

JOSÉ ALFREDO MACÉS HERNÁNDEZ

ASESOR:

DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ



Ciudad Universitaria, Mayo del 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA

Secretario: ING. MARTÍN BARCENAS ESCOBAR

Vocal: DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ

1^{er} suplente: MTRA. GLORIA CORREA PALACIOS

2^{do} suplente: DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTÍZ

La presente tesis se realizó en el Laboratorio de Sistemas de Cómputo Móvil del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS) de la UNAM.

Asesor de tesis:

DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ

Dedicatoria

Con todo mi cariño y amor:

A la memoria de mi abuelo, el hombre más sabio que jamás he conocido, un gran ser humano, amigo y consejero quien siempre quiso ver llegar este momento y de estar aquí, se sentiría tan orgulloso de mi.

A mi padre, quien me dio el valioso regalo de mi educación, el fue mi primer maestro e instructor en este largo camino que es la vida. Le agradezco todos sus recomendaciones, esfuerzos y sacrificios para guiarme por el camino correcto. Pero más que eso, le agradezco por siempre ser un excelente padre y un ejemplo a seguir.

A mi madre, mi amiga, compañera y confidente, quien tantas cosas ha hecho por mi. Le agradezco por su inmensa paciencia, amor y apoyo incondicional que me ha dado en todo momento, además de inculcarme la honestidad, humildad y pasión por el trabajo.

A mi hermanita, mi pequeña alegría, por ella he dado lo mejor de mi. Agradezco su compañía en las buenas y en las malas, sus risas, su paciencia y sus palabras de aliento en todo momento.

*”La música da alma al universo, alas a la mente,
vuelos a la imaginación, consuelo a la tristeza
y vida y alegría a todas las cosas.”*

Platón

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi Alma Mater, a la cual le estaré eternamente agradecido por todas oportunidades que me brindó.

A la Facultad de Ingeniería, la cual en sus aulas me formó como ingeniero y como persona crítica. A todos mis profesores, que a lo largo de la carrera fueron influyendo en mi forma de pensar.

Al Dr. Héctor Benítez Pérez, por la confianza depositada en mí, por su excelente labor de tutoría durante la realización de este trabajo, sus consejos, observaciones y apoyo han sido muy valiosos.

Al jurado, por tomarse el tiempo de revisar este trabajo, agradezco sus acertados y oportunos comentarios, su profesionalismo, además de su amplia disposición para apoyarme en todo momento.

A mis amigos, mi otra familia, que de mencionarlos a todos aquí, la lista sería interminable. Mis amigos de la secundaria, los del bachillerato, los de Oaxaca, los que vinieron a estudiar al D.F., mis amigos de la carrera, los S.V., los controleros, los del CELE, los que conocí en la facultad y la universidad, los del IIMAS y a todos aquellos que han formado parte de mi vida, muchos de los cuales considero como verdaderos hermanos, quienes siempre se preocupan y se mantienen al tanto de mí. En verdad, se los agradezco mucho.

A mi tios Yolanda y Rogelio, gracias por acogerme como si fuese uno de sus hijos. A mi primos, tantas cosas aprendí y viví con ellos. Todos fueron una parte muy importante en este proceso.

Especial agradecimiento a la DGAPA-UNAM proyecto PAPIIT-IN100813, por apoyo otorgado durante la elaboración de este trabajo.

Índice general

Índice de figuras	VIII
1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Estado del arte	2
1.3. Planteamiento del problema	3
1.4. Objetivo	3
1.5. Metodología	3
1.6. Contribuciones	5
1.7. Estructura de la tesis	6
2. Identificación y modelado	7
2.1. Orientación y posicionamiento	7
2.2. Velocidad angular	10
2.3. Descripción del sistema	12
2.3.1. Dinámica del motor	14
2.4. Método de Newton-Euler	15
2.4.1. Ajuste del modelo matemático al caso de estudio	18
2.5. Resumen	19
3. Control y optimización	21
3.1. Controlabilidad	21
3.2. Control óptimo	22
3.2.1. Funciones de costo	22
3.2.2. Regulador Cuadrático Lineal (LQR)	23
3.3. Control difuso	24
3.3.1. Modelo de Takagi-Sugeno	24
3.3.2. Construcción del modelo difuso	26
3.3.3. Control LQR difuso	32
3.3.4. Análisis de estabilidad del sistema difuso	34
3.3.5. Desigualdades matriciales lineales (LMI's)	35
3.4. Robustez y rechazo de perturbaciones	37
3.4.1. Control integral	37
3.4.2. Control LQR difuso + control integral	39
3.5. Resumen	43

4. Sistema distribuido	45
4.1. Sistemas de control en red	45
4.2. Redes de comunicación	47
4.2.1. Ethernet	48
4.3. Protocolos de comunicación	49
4.4. Retardos de red	49
4.5. Distribución del sistema experimental en la red	50
4.6. Resumen	53
5. Análisis de Resultados	54
5.1. Resultados de simulación	54
5.1.1. LQR difuso: seguimiento de trayectoria	55
5.1.2. LQR difuso + control integral: seguimiento de trayectoria	57
5.2. Resultados experimentales	57
5.2.1. LQR difuso: regulación	59
5.2.2. Comparación: LQR difuso y LQR difuso + control integral	60
5.2.3. LQR difuso + control integral: seguimiento de trayectorias	60
5.2.4. Rechazo a perturbaciones externas e internas	64
5.2.5. Seguimiento de la trayectoria del nodo móvil	65
5.3. Resumen	67
6. Conclusiones y trabajo futuro	68
6.1. Conclusiones	68
6.2. Trabajo futuro	70
A. Estimación de estados	72
B. Descripción de la planta	74
B.1. Motores	75
B.2. Hélices	76
B.3. Encoders	77
B.4. Amplificador	77
B.5. Tarjeta de adquisición de datos	77
C. Códigos y diagramas	80
C.1. Código en Python	80
C.2. Código en MatLab	80
C.3. Modelo en Simulink	87
C.3.1. Simulador	87
C.3.2. Sistema experimental distribuido en red	89
Bibliografía	93

Índice de figuras

1.1. Sistema de control propuesto para la implementación	5
2.1. Sistema coordinado inercial	7
2.2. Sistemas coordinados inercial y móvil	8
2.3. Rotación en x_j, y_j y z_j	9
2.4. Empujes y pares producidos por los motores del cuadricóptero	13
2.5. Dinámica del motor	14
2.6. Pares de torsión en roll, pitch y yaw	15
3.1. Representación de un sistema en espacio de estados	22
3.2. Sistema en lazo cerrado con realimentación de estados completa	23
3.3. Representación de un sistema no lineal por subsistemas lineales	24
3.4. Funciones de membresía M_1^1 y M_1^2	29
3.5. Funciones de membresía M_2^1 y M_2^2	29
3.6. Control por realimentación de estados con integrador	38
4.1. Sistema de control en red directo	46
4.2. Sistema de control en red jerárquico	47
4.3. Formato de la trama para el protocolo CSMA/CD(Ethernet).	48
4.4. Sistema experimental distribuido en red	50
4.5. Sistema experimental en el laboratorio	51
4.6. Arduino Yún	52
4.7. Esquema de conexión del Arduino Yún	53
5.1. LQR difuso: estados del sistema	55
5.2. LQR difuso: entradas del sistema	56
5.3. LQR difuso: pesos de los subsistemas	56
5.4. LQR difuso + control integral: estados del sistema	57
5.5. LQR difuso + control integral: entradas del sistema	58
5.6. LQR difuso + control integral: pesos de los subsistemas	58
5.7. LQR difuso: regulación	59
5.8. LQR difuso y LQR difuso + control integral: comparación	60
5.9. LQR difuso + control integral: seguimiento de señal cuadrada	61
5.10. LQR difuso + control integral: salidas del sistema	62
5.11. LQR difuso + control integral: pesos de los subsistemas	62
5.12. LQR difuso + control integral: seguimiento de señal senoidal	63
5.13. LQR difuso + control integral: salidas	64

5.14. LQR difuso + control integral: pesos de los subsistemas	64
5.15. LQR difuso + control integral: perturbaciones externas	65
5.16. Seguimiento del nodo móvil para un estado	66
5.17. Seguimiento de los tres estados del nodo móvil	66
6.1. Cuadricóptero Elev-8 de Parallax	70
6.2. Nodo móvil	71
6.3. Sistema distribuido en red con nodos móviles	71
A.1. Estructura del estimador de estados	72
A.2. Respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas	73
B.1. Plataforma experimental Quanser 3DOF Hover	74
B.2. Componentes de la base de la planta	75
B.3. Componentes de la planta	76
B.4. Hélice de la planta	76
B.5. Tarjeta de adquisición de datos Q8-USB	79
B.6. Amplificador VoltPaQ-X4	79

Introducción

1.1. Presentación

En la actualidad, las aplicaciones de la ingeniería de control a la industria y la investigación están creciendo a un ritmo acelerado; prueba de ello son los avances logrados en los sectores de la robótica, aeroespacial, automotriz, y de procesos, entre otros.

El desarrollo de la teoría de control automático se ha dado debido a que los sistemas son cada vez más complejos; por lo que resultan dinámicas no lineales y por supuesto un modelo de ecuaciones diferenciales no lineales más complejas. Ante esta necesidad, fue necesario buscar alternativas a las conocidas técnicas de control lineal, las cuales tenían respuestas no adecuadas para este tipo de sistemas. Fue así como se desarrollaron técnicas de control no lineal y aproximaciones no lineales, permitiendo a los profesionales del área obtener un mejor desempeño de los sistemas.

Dentro de las técnicas de control para sistemas no lineales se encuentra el control difuso, el cual tiene sus bases en la teoría de conjuntos difusos desarrollada a finales de los años sesenta por L.A. Zadeh^[14]. Las dos vertientes más importantes dentro de esta rama son el método de Mandami y el método de Takagi-Sugeno. Aunque el método de Mandami es más fácil e intuitivo de desarrollar, el de Takagi-Sugeno tiene la ventaja de utilizar el modelo matemático no lineal de la planta y por medio de un grupo de reglas difusas, representar el comportamiento no lineal de la planta como un conjunto de subsistemas lineales que están suavemente conectados por medio de funciones de membresía. Para el control de cada uno de los subsistemas lineales se puede emplear cualquier técnica de control lineal conocida, pero siempre se debe garantizar la estabilidad global del sistema durante las transiciones de una sistema a otro. El análisis de estabilidad se hace por medio de la teoría de Lyapunov aplicada a sistemas difusos^[43].

Las necesidades actuales de los sistemas de control, están haciendo que sea necesario implementar sistemas distribuidos, es decir; ubicar sensores, actuadores y controladores en lugares alejados dentro de un mismo espacio, e incluso en lugares geográficos distintos, en estos casos la comunicación se hace por medio de una red de comunicación. Los sistemas cuyo lazo de control se cierra por medio de una red de comunicación reciben el nombre de sistemas de control en red (NCS).

El problema con los sistemas de control en red son los retardos de tiempo inducidos por la propia red, los que generalmente se presentan cuando se existen colisiones entre los paquetes enviados cuando la red está sobrecargada. Entre las líneas de investigación del control sobre redes, se encuentra la medición y predicción de estos retardos de tiempo con el fin de evitar su efecto negativo en la planta, que en muchos casos puede llegar a desestabilizarla. Así también, está la planificación de la red para la priorización de la transmisión de los nodos de acuerdo a su importancia para el sistema^[29].

1.2. Estado del arte

Los cuadricópteros, ya sea de tres o de seis grados de libertad han sido ampliamente usados en la investigación en el área del control automático, y esto es debido a la complejidad de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, es decir, las ecuaciones presentan un número considerable de no linealidades. Esto los hace ideales para pruebas de desempeño de algoritmos de control de alto rendimiento. En lo que concierne a la infraestructura utilizada, una gran variedad de dispositivos didácticos de tres^{[6] [38] [45]} y seis grados de libertad^{[20] [42] [1] [22]}, han sido desarrollados en universidades alrededor del mundo.

Por otro lado, existen plataformas ya desarrolladas por diversos fabricantes, tal es el caso del dispositivo usado en este trabajo, diseñado y construido por la empresa canadiense Quanser Inc[®]; que lleva por nombre Quanser 3DOF Hover, y en la cual se han aplicado distintas técnicas de control, las cuales incluyen; PID's^[35], control H_∞ ^{[25] [26]}, modos deslizantes^{[35] [8] [48]}, control adaptable^[15], control LQR^[47] y control difuso sin la optimización de las ganancias de realimentación para minimizar la inyección de energía al sistema^[51].

La ventaja del controlador propuesto en el presente trabajo, es que tiene un excelente desempeño aún cuando el rango de variación de los estados del sistema es grande; todas las respuestas presentadas en los artículos antes mencionados únicamente se limitan a hacer pruebas donde la máxima variación de la señal es ± 2.5 [°], en el mejor de los casos. En la mayoría de pruebas de seguimiento realizadas por estos autores, estos sólo las hacen para uno de los estados del sistema, acción que hasta cierto punto es ventajosa y que como se demostrará después, tiene efectos importantes en la respuesta final del sistema.

En el trabajo desarrollado por Lendek et al.^[24], se presenta una comparación entre tres estimadores de estados para este sistema; un observador lineal, un observador difuso de Takagi-Sugeno y un observador por filtro derivativo, con los resultados obtenidos se ve que la respuesta que presentan los tres observadores es muy similar, por lo tanto; la estimación de estados en este trabajo se hace usando un filtro derivativo de segundo orden.

Liu et al.^[27] presentan un controlador LQR difuso para un cuadricóptero de seis grados de libertad, pero a diferencia del propuesto en este trabajo, el autor usó la técnica de diseño de Mandami, únicamente para el estado correspondiente a la altura;

además que sólo se presentan las simulaciones, dado que no se hicieron las pruebas experimentales para analizar su desempeño en el sistema físico.

En lo referente a la aplicación de la teoría de control sobre redes a los cuadricópteros, destacan los trabajos hechos por Berbra et al.^[5], Soumelidis et al.^[39] y Nikolakopoulos and Kostas^[31], quienes presentan diversos controladores distribuidos en red, únicamente en simulaciones. Durand et al.^[11] hacen una implementación en un sistema real, pero los paquetes no se envían al cuadricóptero a través de una red como Ethernet o WiFi, ya previamente se hace una conversión de los datos a una señal de radio frecuencia.

1.3. Planteamiento del problema

El problema principal consiste en diseñar un sistema de control difuso para un cuadricóptero de tres grados de libertad; conectado a diferentes nodos de un sistema distribuido en una red Ethernet, para estabilizar los estados del sistema en distintos puntos de operación en tiempo finito. También es necesario hacer un seguimiento de trayectorias para señales producidas por la computadora o una generada por un nodo móvil, que consiste en una microcomputadora con un sistema inercial de tres grados de libertad acoplado, transmitiendo datos al sistema de manera inalámbrica por medio de una red WiFi. Lo anterior, garantizando el menor gasto de energía posible y la estabilidad del sistema en todo momento.

1.4. Objetivo

En el desarrollo del presente trabajo se tiene como objetivo probar de manera experimental un sistema de control LQR difuso, para un cuadricóptero de tres grados de libertad, cuyos actuadores, sensores y controlador, se encuentran distribuidos en diferentes nodos de un sistema de control en red, y usando como medio de conexión una red Ethernet. Se debe garantizar que el sistema será regulado en un punto de operación establecido por el usuario, seguirá las señales de referencia generadas por la computadora o la trayectoria generada por el nodo móvil. Lo anterior, garantizando la estabilidad del sistema y la robustez ante perturbaciones en todo momento, además que se debe reducir al mínimo la demanda de potencia a los actuadores.

1.5. Metodología

1. Identificación y modelado de la planta

El correcto conocimiento del funcionamiento de la planta permite evitar errores al momento de desarrollar el controlador, es por ello que esta etapa debe hacerse el proceso de identificación del sistema con sumo cuidado. Es necesario conocer la estructura electromecánica de la planta, los sensores y actuadores que la componen, saber las variables medibles del sistema, la forma en que se interpretarán los datos obtenidos y la manera en que serán enviados a los actuadores. Usando las

bases teóricas correspondientes, se podrá llegar a un modelo matemático que presente fielmente la dinámica de la planta. En esta etapa es de vital importancia una correcta revisión bibliográfica.

2. Selección del algoritmo de control

En este paso se deben analizar las distintas técnicas de control que pueden ser aplicadas a la planta, de modo que se cumplan los objetivos propuestos. En el caso de la planta a controlar, se usarán dos versiones de controlador distintas: el control LQR difuso, y el control LQR difuso con acción integral, con el fin de observar las ventajas de uno frente al otro. Y que de acuerdo a las características de la planta y a la revisión bibliográfica realizada se consideran como las más adecuadas para el logro de los objetivos ya mencionados.

3. Diseño del sistema de control

Una vez que se han propuesto los algoritmos de control, es necesario analizar cuál de ellos será el más adecuado para controlar la planta. Además, en este paso es preciso hacer una sintonización de las variables de los controladores con el fin de obtener la mejor respuesta del sistema. Para estimar los estados no medibles de la planta, es necesario recurrir a un filtro derivativo de Butterworth de segundo orden. Esta etapa, también incluye la puesta en marcha de la transmisión de datos de sensores y actuadores de un nodo a otro por medio de la red Ethernet, y la programación de la microcomputadora para hacer la lectura del sensor inercial de tres grados de libertad.

4. Simulaciones

Antes de validar el controlador propuesto es necesario realizar las simulaciones correspondientes, usando el modelo no lineal obtenido en el paso 1; esto con el fin de poder corregir errores de sintonización o posibles saturaciones de los actuadores, lo que podría dañar la planta.

5. Implementación física

Una vez que se haya realizado todo lo anterior, se procede a probar el controlador que mejor respuesta haya tenido en las simulaciones, y en el caso de que fuera necesario se hará otro ajuste de las ganancias de realimentación, con el fin de mejorar la respuesta de la planta debido a los diversos factores que afectan los experimentos y que no son tomados en cuenta en el sistema simulado. Se verificará que la comunicación entre los nodos del sistema distribuido, funcionen de manera correcta, y sólo entonces; el controlador será probado en tiempo real. Aquí es donde se realizan las pruebas correspondientes a regulación, seguimiento de trayectorias y rechazo a perturbaciones.

Usando la metodología anterior, se diseñará un sistema de control LQR difuso para el cuadricóptero de tres grados de libertad. El controlador propuesto debe resolver los problemas de regulación, seguimiento de trayectorias y rechazo de perturbaciones descritos anteriormente. El diagrama de bloques que representa el sistema de control propuesto se puede observar en la figura 1.1.

El esquema propuesto tiene la forma general de un sistema de control; en su parte izquierda se muestran los bloques correspondientes a las señales de entrada, en la pri-

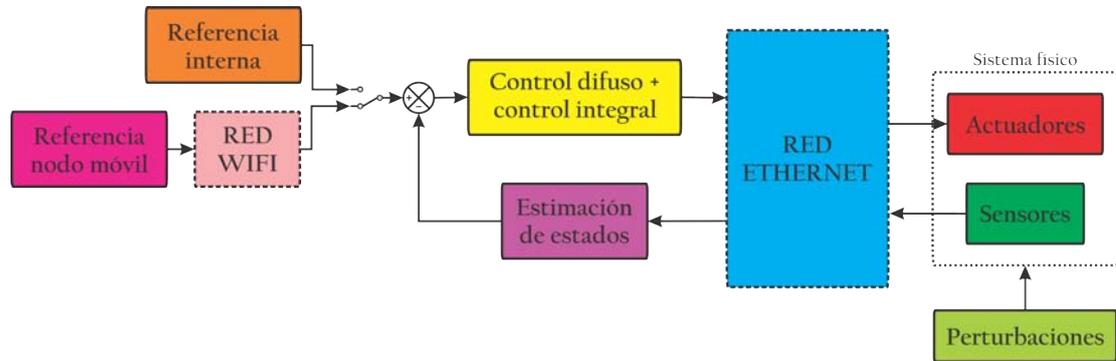


Figura 1.1: Sistema de control propuesto para la implementación

mera opción se puede obtener la señal de referencia directamente de un generador de funciones interno; en este se incluyen señales cuadradas, triangulares y diente de sierra. En la segunda opción se hace uso del nodo móvil, el cual por medio de una red WiFi, transmite el valor de tres ángulos medidos por la unidad inercial.

De acuerdo al orden del esquema, el siguiente paso es medir los datos de los sensores, transmitir la información por medio del canal de comunicación, estimar los estados faltantes y calcular el error en la salida. Cuando se obtiene el valor de error en la salida, este se introduce en cada uno de los subsistemas que conforman el conjunto difuso; con el fin de calcular las ganancias independientes de excitación del sistema, las cuales se suman y finalmente se envían a través del canal de comunicación a los actuadores de la planta. Además, se observa la existencia de un bloque de perturbaciones, las cuales pueden ser internas o externas, estas están presentes en todas la implementaciones de sistemas de control.

1.6. Contribuciones

Las principales contribuciones de este trabajo son:

- La propuesta de dos algoritmos de control LQR difusos, uno con acción integral y otro sin ella; ambos con su correspondiente análisis de estabilidad y pruebas experimentales, de los cuales a la fecha no se han presentado propuestas parecidas por escrito para la planta utilizada en este trabajo.
- La implementación de los algoritmos de control antes mencionados; distribuidos en un ambiente de red Ethernet, probando su desempeño y robustez a cargas de red bajas.
- Un esquema de comunicación para un sistema de control distribuido en red, entre un nodo (computadora) y una microcomputadora (Arduino Yun), para transmitir una corriente de datos generada por la unidad de medición inercial en tiempo real y sin fallos, usando el protocolo UDP.

1.7. Estructura de la tesis

El presente trabajo se divide en seis capítulos.

En el Capítulo 2, se presentan todas las bases teóricas y el proceso para la obtención de un modelo matemático que represente fielmente la dinámica del sistema.

El proceso de fuzzificación del modelo matemático por medio del método de Takagi-Sugeno, la teoría y el desarrollo correspondiente al proceso de la obtención de las ganancias de realimentación por medio del Regulador Cuadrático Lineal para el sistema difuso, se exponen en el Capítulo 3. Además, aquí se muestra el desarrollo de los dos controladores propuestos, el control LQR difuso y el control LQR difuso con acción integral, con sus respectivos análisis de estabilidad.

El Capítulo 4, contiene el proceso de distribución y configuración de sensores, actuadores y controlador en la red Ethernet, así como, el proceso de configuración y comunicación de la microcomputadora Arduino Yun, con los nodos del sistema distribuido, al mismo tiempo que se usa el protocolo UDP sobre una red WiFi.

En el Capítulo 5, se encuentran los resultados de simulación y los resultados de experimentación correspondientes a los dos sistemas de control propuestos; también se presentan las gráficas correspondientes para que sea más fácil apreciar el desempeño logrado por ambos controladores, mismas que servirán para llegar a una conclusión.

Finalmente, en el Capítulo 6, se presentan las conclusiones generales de la tesis y la propuesta de trabajo futuro a realizarse como consecuencia de este proyecto.

Al final de cada capítulo se presenta un resumen, con el fin de que permita entender todo lo expuesto en el desarrollo de todos y cada uno de los capítulos, y sirva para comprender lo planteado en los posteriores.

Además, se anexan tres apéndices a manera de que sirvan para la realización de un análisis más profundo del trabajo, en caso de que así se desee. Estos apéndices se refieren a el filtro derivativo de Butterworth de segundo orden, utilizado para la estimación de los estados; la descripción de los componentes electromecánicos de la planta, los códigos de MatLab y Python, así como los diagramas de Simulink utilizados para la puesta en marcha de los experimentos.

Identificación y modelado

Antes de la implementación de cualquier tipo de controlador, es necesario conocer las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema para un completo conocimiento del mismo. En este capítulo, se exponen todas las ecuaciones propias de la dinámica del cuadricóptero, además de las bases matemáticas y explicaciones de los métodos utilizados y necesarios para la comprensión del funcionamiento del sistema.

2.1. Orientación y posicionamiento

Es necesario que la planta cuente con un sistema de coordenadas que permita saber su ubicación en el espacio cartesiano de tres dimensiones (\mathbb{R}^3). Para tal fin, se definirán dos sistemas coordenados de referencia, uno móvil y uno inercial. El sistema de coordenadas inercial está fijo a la tierra (figura 2.1): la dirección positiva de los ejes x_I y y_I del sistema inercial coinciden con la dirección norte y este de la tierra, respectivamente; mientras que z_I tiene el sentido contrario al de la fuerza de gravedad

$$\mathcal{I} = (x_I, y_I, z_I). \quad (2.1)$$



Figura 2.1: Sistema coordenado inercial

El cuadricóptero tiene su marco de referencia móvil con un origen coincidente en el centro de masa, el cual se muestra en la figura 2.2^[13]

$$\mathcal{B} = (x_B, y_B, z_B). \quad (2.2)$$

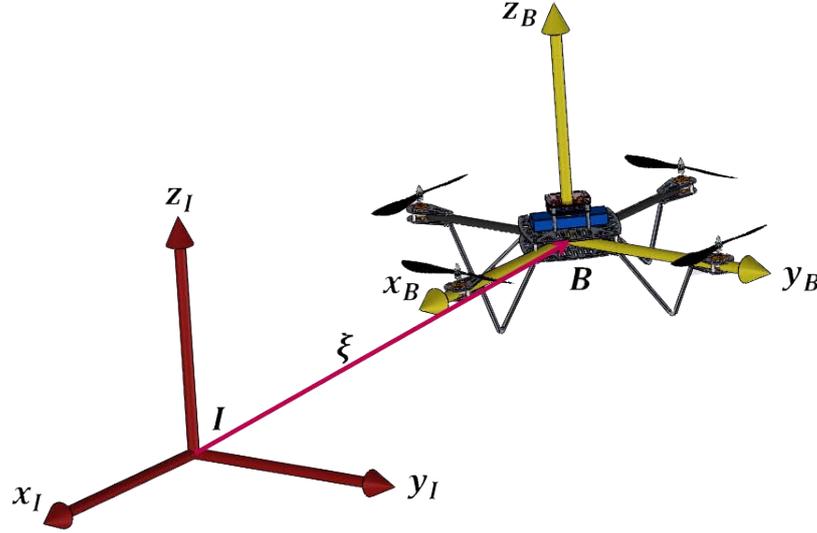


Figura 2.2: Sistemas coordenados inercial y móvil

A partir de lo anterior, se definen el vector

$$\mathcal{I}\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

que representa la posición del origen sistema móvil con respecto al del sistema inercial,

$$\mathcal{I}\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

que representa la velocidad del sistema móvil con respecto al sistema inercial y

$$\mathcal{B}\mathcal{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

con las velocidades lineales del cuadricóptero referenciadas al sistema móvil.

Para conocer la orientación del sistema móvil con respecto al sistema inercial, un proceso ampliamente usado en mecánica de sólidos es el uso de matrices de rotación. En el caso particular del cuadricóptero se propone la matriz de rotación ${}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, que pertenece al grupo de las matrices ortonormales de orden 3^[41]

$${}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I} \in \mathcal{SO}(3, \mathbb{R}). \quad (2.6)$$

En ingeniería aeroespacial una de las convenciones más utilizadas para definir sistemas de referencia son los ángulos de Tait-Bryan, o también, conocidos como ángulos de

Euler XYZ, estos generalmente describen el ángulo de cada uno de los ejes del sistema móvil con respecto a los del sistema inercial^[17].

Las rotaciones se hacen usando la regla de la mano derecha para obtener los sentidos de los giros positivos (figura 2.3); cada giro se asocia a una matriz de rotación y las cuales son:

1. Rotación correspondiente al ángulo de roll o de balanceo (ϕ)

$$\mathcal{R}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}; \quad (2.7)$$

se realiza alrededor del eje x_I .

2. Rotación correspondiente al ángulo de pitch o de cabeceo (θ)

$$\mathcal{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \quad (2.8)$$

se realiza alrededor de eje y_I .

3. Rotación correspondiente al ángulo de yaw o de guiñada (ψ)

$$\mathcal{R}(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.9)$$

se realiza alrededor del eje z_I .

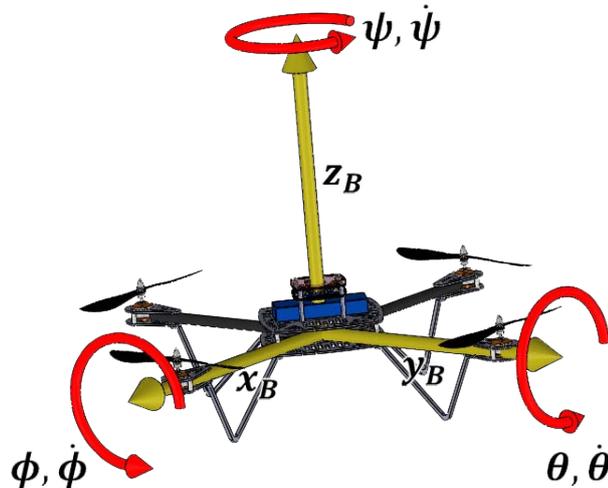


Figura 2.3: Rotación en x_I, y_I y z_I

Usando las matrices de rotación obtenidas con anterioridad, la matriz de rotación que representa al sistema móvil \mathcal{B} , en las coordenadas del sistema inercial \mathcal{I} es

$${}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \mathcal{R}(z, \psi)\mathcal{R}(y, \theta)\mathcal{R}(x, \phi), \quad (2.10)$$

$${}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

$${}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\text{sen}\theta\text{sen}\phi - \text{sen}\psi\cos\phi & \cos\psi\text{sen}\theta\cos\phi + \text{sen}\psi\text{sen}\phi \\ \text{sen}\psi\cos\theta & \text{sen}\psi\text{sen}\theta\text{sen}\phi + \cos\psi\cos\phi & \text{sen}\psi\text{sen}\theta\cos\phi - \cos\psi\text{sen}\phi \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta\text{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Usando la propiedad de las matrices de rotación que permite obtener la inversa de una matriz de rotación por medio de su transpuesta $R^{-1} = R^T$; se obtiene la matriz de transformación de coordenadas del sistema inercial \mathcal{I} , con respecto al sistema móvil \mathcal{B} ^[37]

$${}^{\mathcal{B}}\mathcal{R}_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \text{sen}\psi\cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \cos\psi\text{sen}\theta\text{sen}\phi - \text{sen}\psi\cos\phi & \text{sen}\psi\text{sen}\theta\text{sen}\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\text{sen}\phi \\ \cos\psi\text{sen}\theta\cos\phi + \text{sen}\psi\text{sen}\phi & \text{sen}\psi\text{sen}\theta\cos\phi - \cos\psi\text{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

2.2. Velocidad angular

Dada una matriz de rotación \mathcal{R} variante en el tiempo, cuya propiedad de ortogonalidad permite reescribirla como

$$\mathcal{R}(t)^T \cdot \mathcal{R}(t) = I, \quad (2.13)$$

y cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{\mathcal{R}}(t)^T \cdot \mathcal{R}(t) + \mathcal{R}(t)^T \cdot \dot{\mathcal{R}}(t) = 0. \quad (2.14)$$

Definiendo $S(t) = \mathcal{R}(t)^T \cdot \dot{\mathcal{R}}(t)$, la ecuación resultante es

$$S(t)^T + S(t) = 0, \quad (2.15)$$

y si se premultiplican ambos lados de la ecuación por $\mathcal{R}(t)$ se obtiene

$$\dot{\mathcal{R}}(t) = \mathcal{R}(t)S(t), \quad (2.16)$$

que es una representación de la derivada en el tiempo de una matriz $\mathcal{R}(t)$, en términos de sí misma usando el operador antisimétrico $S(t)$ ^[37].

Se definen, el vector de posiciones angulares de los ejes de sistema móvil con respecto a los del sistema inercial

$${}^{\mathcal{I}}\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

el vector de velocidades angulares del cuadricóptero con respecto al sistema inercial

$${}^{\mathcal{I}}\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

y el vector de velocidades angulares de la planta realizadas directamente en el sistema móvil

$${}^{\mathcal{B}}\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Si se deriva la matriz (2.11) con respecto al tiempo, esta se puede reescribir como

$${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathcal{R}}(t)_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}(t)_{\mathcal{B}} S(\Omega), \quad (2.20)$$

o también

$$S(\Omega) = {}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}(t)_{\mathcal{B}}^T {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathcal{R}}(t)_{\mathcal{B}}, \quad (2.21)$$

y de acuerdo a Siciliano et al.^[37] se sabe que $S(\Omega)$ debe tener la forma

$$S(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Para obtener $S(\Omega)$ y a su vez el vector ${}^{\mathcal{B}}\Omega$, es necesario encontrar ${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathcal{R}}(t)_{\mathcal{B}}$, dado que ${}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}(t)_{\mathcal{B}}$ es conocida. Para lograr esto, se hace uso de la ecuación (2.10) para reescribir la ecuación (2.21)

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= [\mathcal{R}_z(t) \mathcal{R}_y(t) \mathcal{R}_x(t)]^T \frac{d}{dt} [\mathcal{R}_z(t) \mathcal{R}_y(t) \mathcal{R}_x(t)] = \\ &= (\mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_z^T) \left(\dot{\mathcal{R}}_z \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_z (\mathcal{R}_y \dot{\mathcal{R}}_x) \right) = \\ &= (\mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_z^T) \left(\dot{\mathcal{R}}_z \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_z (\dot{\mathcal{R}}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_y \dot{\mathcal{R}}_x) \right) = \\ &= (\mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_z^T) \left(\dot{\mathcal{R}}_z \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_z \dot{\mathcal{R}}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_z \mathcal{R}_y \dot{\mathcal{R}}_x \right), \\ S(\Omega) &= \mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y^T \mathcal{R}_z^T \dot{\mathcal{R}}_z \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y^T \dot{\mathcal{R}}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y \dot{\mathcal{R}}_x. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De acuerdo a la ecuación (2.22) y a Siciliano et al.^[37], los productos de matrices $\mathcal{R}_x^T \dot{\mathcal{R}}_x$, $\mathcal{R}_y^T \dot{\mathcal{R}}_y$ y $\mathcal{R}_z^T \dot{\mathcal{R}}_z$ se pueden expresar como

$$\mathcal{R}_x^T \dot{\mathcal{R}}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_y^T \dot{\mathcal{R}}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_z^T \dot{\mathcal{R}}_z = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

y si se sustituyen en la ecuación (2.23), esta se reescribe como

$$S(\Omega) = \mathcal{R}_x^T \mathcal{R}_y^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x + \mathcal{R}_x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{R}_x + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

realizando los productos necesarios

$$S(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) & \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi) & 0 & -\dot{\phi} + \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \\ -\dot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\psi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) & \dot{\phi} - \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

usando la ecuación (2.22) se obtiene el vector

$${}^B\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \operatorname{sen}(\phi) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

simplificando y agrupando

$${}^B\Omega = W \mathcal{I} \dot{\eta}, \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

o de la misma manera

$$\mathcal{I} \dot{\eta} = W^{-1} {}^B\Omega, \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sec}(\theta) & \cos(\phi) \operatorname{sec}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

2.3. Descripción del sistema

El cuadricóptero está constituido por cuatro motores ubicados en los extremos de una estructura en forma de cruz, que suele estar construida de un material ligero. Cada uno de los motores cuenta con una hélice y cuyo eje de giro es el mismo que el eje de giro del rotor.

El motor delantero M_1 y el trasero M_3 giran en sentido horario, mientras que el motor derecho M_2 y el izquierdo M_4 lo hacen en sentido antihorario (figura 2.4). Esta configuración induce pares de torsión opuestos en el mismo plano, lo que evita la necesidad de usar un motor ubicado de manera perpendicular para modificar el giro en el plano, como es el caso de los helicópteros.

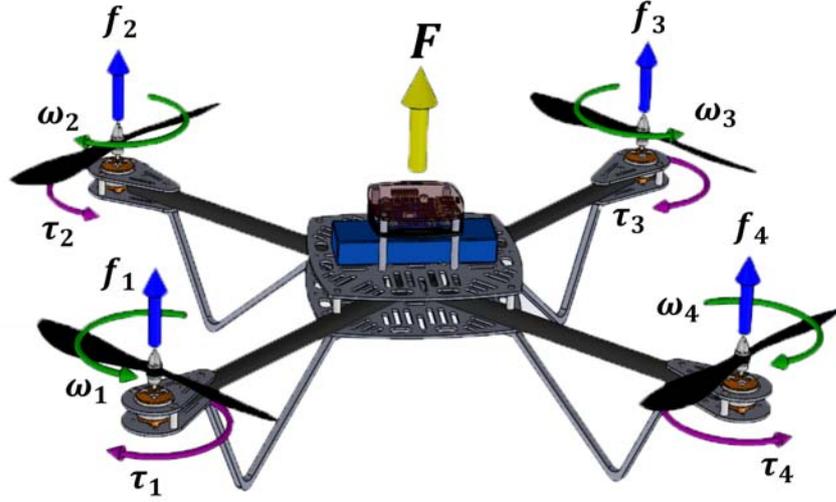


Figura 2.4: Empujes y pares producidos por los motores del cuadricóptero

Las fuerzas que actúan sobre el cuadricóptero (f_i y τ_i) son producidas por la interacción de las hélices con el aire y por la velocidad angular ω_i del motor M_i , como se muestra en la figura 2.6. La suma de los empujes y pares producidos por cada uno de los motores producen un empuje total

$$U = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \quad (2.32)$$

un par de torsión de roll

$$\tau_\phi = l(f_4 - f_2), \quad (2.33)$$

un par de torsión en pitch

$$\tau_\theta = l(f_3 - f_1), \quad (2.34)$$

y un par de torsión en yaw

$$\tau_\psi = \tau_2 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_3, \quad (2.35)$$

donde l es la distancia del centro de masa del cuadricóptero al motor M_i .

Debido a la configuración de las hélices y a que los motores pueden girar en un solo sentido, la fuerza f_i siempre será positiva y de acuerdo a Lozano et al.^[28] esta está definida como

$$f_i = k_f \omega_i^2, \quad (2.36)$$

donde k_f representa una constante que relaciona la velocidad angular del rotor con la fuerza de empuje f_i y esta se llamará constante de empuje.

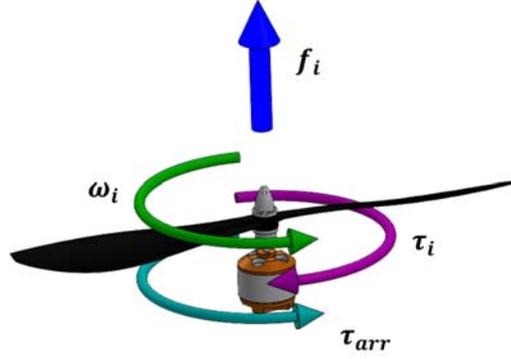


Figura 2.5: Dinámica del motor

El empuje total escrito en forma de vector y representado en el sistema móvil queda como

$${}^B F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_f(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

2.3.1. Dinámica del motor

De la figura 2.5 puede deducirse la ecuación que describe la dinámica del rotor con la hélice acoplada

$$I_{rot} \dot{\omega}_i = \tau_i - \tau_{arr}, \quad (2.38)$$

donde I_{rot} representa la inercia del rotor alrededor de su propio eje, $\dot{\omega}_i$ la aceleración angular del rotor y τ_{arr} es conocido como el par de arrastre aerodinámico, y se define como el par de torsión que se opone al movimiento de la hélice a través del aire.

El par de arrastre aerodinámico es definido por Lozano et al. [28] como

$$\tau_{arr} = \frac{1}{2} \rho A \nu_i^2, \quad (2.39)$$

en donde ρ es la densidad del aire, A el área frontal donde la hélice tiene contacto con el aire, y ν_i es la velocidad lineal de la hélice. En magnitud, la velocidad angular ω_i es

$$\omega_i = \frac{\nu_i}{r}, \quad (2.40)$$

relacionándola con la velocidad lineal tangencial únicamente con el radio de giro r .

Por lo anterior, el par de arrastre puede ser reescrito como

$$\tau_{arr} = k_\tau \omega_i^2, \quad (2.41)$$

en donde $k_\tau = \frac{1}{2} \rho A r^2$, es decir, esta constante depende de la densidad del aire, el radio y la forma de la hélice.

Para maniobras donde la variación de ω_i es pequeña, es decir $\dot{\omega}_i \approx 0$, la parte izquierda de la ecuación (2.42) puede suponerse como nula, y al reescribirla se obtiene

$$\tau_i - \tau_{arr} = 0,$$

o de otra manera

$$\tau_i = \tau_{arr} = k_\tau \omega_i^2. \quad (2.42)$$

El movimiento de roll positivo (ϕ) en el sistema móvil \mathcal{I} se obtiene cuando f_3 es mayor que f_1 , lo que significa que $\omega_3 > \omega_1$. De la misma manera, el movimiento de pitch positivo (θ) se obtiene cuando f_4 es mayor que f_2 ; $\omega_4 > \omega_2$. El movimiento de yaw (ψ) positivo se da cuando la suma de τ_2 y τ_4 es mayor que la suma de τ_1 y τ_3 , lo que quiere decir que $\omega_2 + \omega_4 > \omega_1 + \omega_3$, ver figura 2.6.

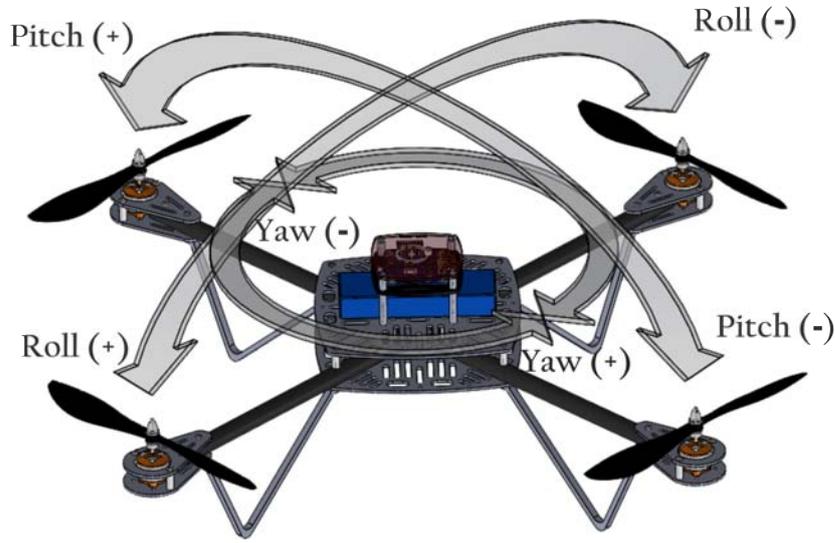


Figura 2.6: Pares de torsión en roll, pitch y yaw

Si se expresan en forma de vector todos los pares que actúan en la planta en el sistema móvil se obtiene

$$\mathcal{B}_\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_4 - f_2)l \\ (f_3 - f_1)l \\ \tau_2 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f l (\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ k_f l (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ k_\tau (\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

2.4. Método de Newton-Euler

Aunque existen distintas formas de modelado matemático para sistemas dinámicos, el método de Newton-Euler referenciado al sistema móvil fue elegido por las siguientes razones^[33]:

- La matriz de inercias es invariante en el tiempo.
- La simetría del cuerpo puede usarse para simplificar las ecuaciones.

- Las medidas realizadas por los sensores pueden ser fácilmente interpretadas en el sistema móvil.
- Las fuerzas y pares de torsión actúan directamente en el sistema móvil.

El cuadricóptero puede considerarse como un cuerpo rígido de seis grados de libertad por sus características físicas, Bouabdallah^[6] propone el uso de las ecuaciones conocidas de la teoría de mecánica de sólidos para describir el comportamiento del sistema, las cuales son

$$\begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}\dot{\mathbf{v}} \\ \mathcal{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}\boldsymbol{\Omega} \times (m \mathcal{B}\mathcal{V}) \\ \mathcal{B}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbb{I} \mathcal{B}\boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}F \\ \mathcal{B}\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

donde m es la masa del sistema, \mathbb{I} es la matriz de inercias, la cual se considera diagonal por la simetría del sistema

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Por lo tanto, es posible reescribir la ecuación (2.44) como

$$\mathcal{B}M \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B}C(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathcal{B}\Lambda + \mathcal{B}G(\mathbf{q}), \quad (2.46)$$

donde $\mathcal{B}\Lambda$ es el vector de fuerzas generalizadas en el sistema móvil

$$\mathcal{B}\Lambda = \begin{bmatrix} \mathcal{B}F \\ \mathcal{B}\tau \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$\mathcal{B}M$ es la matriz de inercias y masa del sistema

$$\mathcal{B}M = \begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$\mathcal{B}C(\mathbf{q})$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis

$$\mathcal{B}C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}\boldsymbol{\Omega} \times (m \mathcal{B}\mathcal{V}) \\ \mathcal{B}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbb{I} \mathcal{B}\boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz}r & -I_{yy}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zz}r & 0 & I_{xx}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy}q & -I_{xx}p & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

\mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas en el sistema móvil

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}\mathcal{V} \\ \mathcal{B}\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

y ${}^{\mathcal{B}}G(\mathbf{q})$ es el efecto de la gravedad en el sistema móvil

$${}^{\mathcal{B}}G(q) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}\mathcal{R}_{\mathcal{I}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg \sin\theta \\ -mg \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -mg \cos(\theta) \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

De la ecuación (2.46) se puede despejar el vector \mathbf{q} , con lo que esta se reescribe como

$$\dot{\mathbf{q}} = {}^{\mathcal{B}}M^{-1} ({}^{\mathcal{B}}C(\mathbf{q}) \mathbf{q} + {}^{\mathcal{B}}\Lambda + {}^{\mathcal{B}}G), \quad (2.52)$$

y si se desarrollan todos los productos, las ecuaciones finales serán

$$\begin{cases} \dot{u} = (v r - w q) + g \sin(\theta) \\ \dot{v} = (w p - u r) - g \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \dot{w} = (u q - v p) - g \cos(\theta) \sin(\phi) + \frac{U}{m} \\ \dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q r + \frac{\tau_{\phi}}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p r + \frac{\tau_{\theta}}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p q + \frac{\tau_{\psi}}{I_{zz}} \end{cases}, \quad (2.53)$$

en donde

$$\begin{cases} U = k_f (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ \tau_{\phi} = k_f l (\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \tau_{\theta} = k_f l (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \tau_{\psi} = k_{\tau} (\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2) \end{cases}. \quad (2.54)$$

Las velocidades lineales del cuadricóptero que se muestran en la ecuación (2.53) están referidas al sistema móvil (u, v y w), pero en un sistema experimental, las mediciones de traslación de la planta se hacen con respecto al sistema inercial. Por lo anterior, se propone hacer un cambio del sistema de referencia móvil al inercial únicamente para la parte traslacional, es decir, la dinámica rotacional seguirá siendo referida al sistema móvil. Para tal efecto, se parte de la ecuación (2.44), tomando en cuenta únicamente las tres primeras ecuaciones y las cuales a propósito fueron representadas en un vector separado a las correspondientes a la dinámica rotacional. Ahora los vectores de referencia no son ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathcal{V}}$ ni ${}^{\mathcal{B}}\Omega$, sino ${}^{\mathcal{I}}\ddot{\xi}$ y ${}^{\mathcal{I}}\dot{\eta}$, por lo que también es necesario cambiar

de sistema de referencia el vector de fuerzas a ${}^{\mathcal{I}}F = {}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}F$ y el de los efectos de la gravedad a ${}^{\mathcal{I}}G$, el resultado es

$$m I_{3 \times 3} {}^{\mathcal{I}}\ddot{\xi} = {}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}F + {}^{\mathcal{I}}G. \quad (2.55)$$

Los efectos ejercidos por las fuerzas centrípetas y de Coriolis no afectan el comportamiento dinámico del sistema cuando se hace un análisis en el sistema inercial, por lo cual se hizo la consideración propuesta por Bouabdallah^[6] ${}^{\mathcal{I}}\dot{\eta} \times (m {}^{\mathcal{I}}\dot{\xi}) \approx 0$.

Agrupando y sustituyendo términos

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{m} {}^{\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\mathcal{B}} {}^{\mathcal{B}}F + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

cuya resultante es

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)] \frac{U}{m} \\ [-\sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)] \frac{U}{m} \\ -g + \cos(\phi)\cos(\theta) \frac{U}{m} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Finalmente, las ecuaciones obtenidas anteriormente, junto con las correspondientes a la parte rotacional obtenidas de la ecuación (2.53), forman las ecuaciones dinámicas que representan el comportamiento del cuadricóptero

$$\begin{cases} \ddot{x} = [\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)] \frac{U}{m} \\ \ddot{y} = [-\sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)] \frac{U}{m} \\ \ddot{z} = -g + \cos(\phi)\cos(\theta) \frac{U}{m} \\ \dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q r + \frac{\tau_{\phi}}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p r + \frac{\tau_{\theta}}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p q + \frac{\tau_{\psi}}{I_{zz}} \end{cases}. \quad (2.58)$$

en donde

$$\begin{cases} U = k_f(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ \tau_{\phi} = k_f l (\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \tau_{\theta} = k_f l (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \tau_{\psi} = k_{\tau} (\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2) \end{cases}. \quad (2.59)$$

2.4.1. Ajuste del modelo matemático al caso de estudio

Las ecuaciones obtenidas anteriormente contemplan un movimiento de 6 grados de libertad del sistema, y únicamente son válidas en caso de que se puedan hacer mediciones o estimaciones de los 6 estados del cuadricóptero. Cuando sólo es posible obtener

mediciones de la dinámica rotacional, una alternativa es hacer un desacople y eliminar la parte traslacional, es decir, controlar únicamente tres grados de libertad del sistema correspondientes a las posiciones angulares, las cuales se pueden obtener a partir de las velocidades angulares (p, q y r). Si el usuario aún desea que el sistema tenga movimiento en 6 grados con mediciones únicamente en los tres correspondientes a los posiciones angulares, esto es posible, pero la realimentación visual tendrá que ser hecha por el usuario, como si se tratara de un control remoto.

Como se ve en el sistema de ecuaciones (2.58), las ecuaciones correspondientes a la dinámica rotacional (\dot{p}, \dot{q} y \dot{r}) no dependen de la dinámica traslacional (\ddot{x}, \ddot{y} y \ddot{z}), por lo tanto, es posible realizar el desacople. Los autores que han trabajado con sistemas de 3 grados de libertad^{[51][47][15][48]} consideran que al eliminar los grados correspondientes a la dinámica traslacional, la velocidad es muy cercana independientemente si se referencia al sistema móvil o al inercial, por lo que

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &\approx p, \\ \dot{\theta} &\approx q, \\ \dot{\psi} &\approx r.\end{aligned}$$

Cabe destacar que la consideración anterior es únicamente un caso muy específico para el sistema descrito inicialmente, las ecuaciones (2.58) son las generales y correctas para el sistema de seis grados de libertad, el hacer un control de los 6 grados completos sería más ilustrativo y completo. Como el sistema analizado en el presente trabajo únicamente tiene tres grados de libertad debido a su estructura física, además de que no hay manera de hacer la realimentación visual mencionada; se hace el desacople y la sustitución de las variables presentadas con anterioridad, con lo que resultan

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_{\phi}}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_{\theta}}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_{\psi}}{I_{zz}} \end{cases}, \quad (2.60)$$

en donde

$$\begin{cases} \tau_{\phi} = k_f l (\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \tau_{\theta} = k_f l (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \tau_{\psi} = k_{\tau} (\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2) \end{cases}. \quad (2.61)$$

2.5. Resumen

A lo largo de este capítulo, se presentó una metodología para obtener las ecuaciones que rigen la dinámica de un cuadricóptero de 6 grados de libertad (6DOF) por medio del método de Newton-Euler. Durante el desarrollo del modelo se enfrentó el problema de una literatura incompleta, en cuanto a la descripción de los conceptos matemáticos utilizados y a conceptos equivocados en la referenciación de los sistemas, por parte de los autores que desarrollaron experimentos similares; por lo anterior, se tuvo el cuidado de no incurrir en los mismos errores, se resumió y explicó cada detalle del proceso para

un mejor entendimiento. Es sabido que al modelo propuesto anteriormente le faltan algunas fuerzas no modeladas, pero estas no fueron tomadas en cuenta debido a que son despreciables, si se desea hacer un análisis más preciso incluyendo estos términos, únicamente se deben plasmar las fuerzas en los vectores F y τ , respectivamente.

Aunque el caso de estudio de la presente tesis se enfoca únicamente en un sistema de 3 grados de libertad (3DOF); que se describe más a detalle en el Apéndice B, se optó por presentar el modelo completo, para que sirva de referencia para desarrollar trabajos a corto y largo plazo, tanto propios (que incluyen un cuadricóptero de 6 grados de libertad), como de otros autores. Se propuso y se hizo un desacople de la dinámica rotacional del sistema de la traslacional, y se modificaron las ecuaciones para ajustarlas al sistema estudiado en este trabajo.

Control y optimización

En este capítulo, se presenta la teoría matemática que describe el proceso para obtener las ganancias de realimentación para un sistema lineal usando control óptimo, la teoría de conjuntos difusos necesaria para la construcción del modelo y control difusos para un sistema no lineal y la teoría correspondiente al control integral para sistemas representados en espacios de estados.

Además, se aplica lo antes mencionado al sistema utilizado como caso de estudio en el presente trabajo, y se realizan los correspondientes análisis de estabilidad para los controladores propuestos.

3.1. Controlabilidad

De acuerdo a Chen^[9], un sistema lineal representado en espacio de estados de la forma

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1)$$

con dimensión n y con m entradas (ver figura 3.1), es controlable si para cada estado inicial $x(0) = x_0$ y para cada estado final X , existe una entrada que excite sistema, de modo que transfiera x de x_0 a X en un tiempo finito, donde $x(t)$ son los estados y $u(t)$ las entradas del sistema. De otra manera, se dice que el sistema es no controlable.

Decir que un sistema es controlable o no, depende totalmente de las características físicas del sistema, es decir, la controlabilidad del sistema depende de cómo están relacionadas internamente las variables del sistema unas con otras.

Existen distintos métodos para verificar la controlabilidad de un sistema, pero Hendricks et al.^[19] definen que un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable si la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (3.2)$$

es de rango completo. Esto significa, que el rango de la matriz \mathcal{C} sea igual a la dimensión n del sistema.

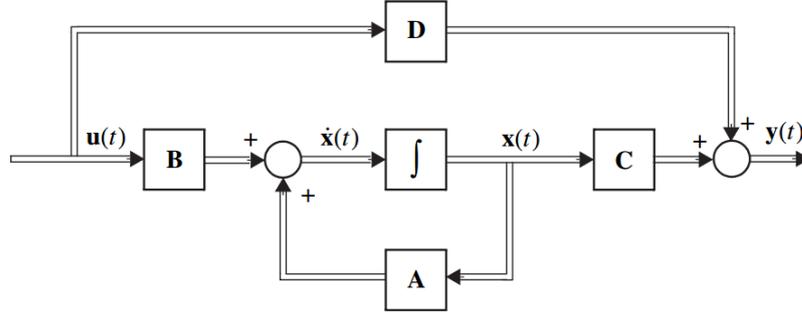


Figura 3.1: Representación de un sistema en espacio de estados

3.2. Control óptimo

El diseño de controladores por optimización busca la implementación de un controlador realimentado de la forma

$$u(t) = -K x(t) + r(t), \quad (3.3)$$

para el sistema lineal (3.1), tal que logre alcanzar el punto de operación (X, U) , minimizando tanto la energía del error de regulación $\bar{x} = x - X$ como el gasto energético del control $\bar{u} = u - U$, ver figura 3.2. Donde a K se le llama ganancia de realimentación y $r(t)$ es la referencia del sistema.

3.2.1. Funciones de costo

Para obtener un controlador que optimice tanto la convergencia de x a X y el gasto energético de u se emplea las funciones de costo cuadrático^[19], que en principio toman la forma

$$J = \frac{1}{2} \overbrace{\mathbf{m}_1 \bar{x}_1^2 + \mathbf{m}_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \mathbf{m}_n \bar{x}_n^2}^{\text{Costo de llegada}} + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \overbrace{[\mathbf{q}_1 \bar{x}_1^2 + \mathbf{q}_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \mathbf{q}_n \bar{x}_n^2]}^{\text{Energía del error}} + \overbrace{[\mathbf{r}_1 \bar{u}_1^2 + \dots + \mathbf{r}_m \bar{u}_m^2]}^{\text{Energía del control}} dt, \quad (3.4)$$

en donde J es la función de costo total, $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ son cada uno de los estados y $[u_1, u_2, \dots, u_n]$ son las entradas del sistema, $[m_1, m_2, \dots, m_n]$, $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ y $[r_1, r_2, \dots, r_n]$ son constantes aleatorias. Si esta ecuación se expresa en forma matricial, ésta toma la forma

$$J = \frac{1}{2} \bar{x}^T(t_1) \mathbf{M} \bar{x}(t_1) + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\bar{x}^T(t) \mathbf{Q} \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) \mathbf{R} \bar{u}(t)] dt, \quad (3.5)$$

en donde

$$\begin{aligned} Q &= Q^T; & Q &\in \mathbb{R}^{n \times n} & Q &\geq 0, \\ R &= R^T; & R &\in \mathbb{R}^{m \times m} & R &\geq 0, \end{aligned}$$

$$M = M^T; \quad M \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad M \geq 0.$$

Las matrices Q , R y M son llamadas matrices de peso, y determinan la influencia de las componentes individuales en la función de costo total J .

Este problema de diseño se resuelve empleando el principio del máximo de Pontryagin y los multiplicadores de Lagrange, lo que resulta en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman^{[2][10]}. La solución de este problema de optimización es la matriz de ganancias

$$K = R^{-1} B^T S(t),$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación de Ricatti continua^[19]

$$-\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t) A - B S(t) R^{-1} B^T S(t) + Q, \quad (3.6)$$

la cual es una ecuación diferencial matricial cuadrática con valor en la frontera $S(t_1) = M$, en la mayoría de los casos se desea que $\dot{S}(t) = 0$. En la ecuación de Ricatti A y B son las matrices del sistema en su representación en espacio de estados (ecuación (3.1)), mientras que P y Q son matrices diagonales con constantes que permiten modificar los estados $x(t)$ y las entradas $u(t)$ del sistema, que deben de ajustarse de acuerdo a la respuesta que se vaya obteniendo durante la realización de las pruebas.

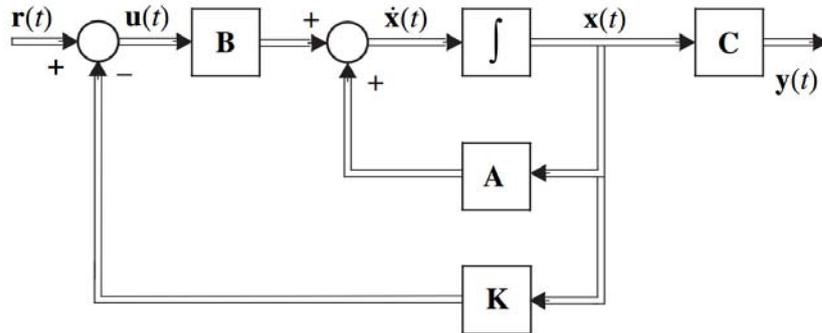


Figura 3.2: Sistema en lazo cerrado con realimentación de estados completa

3.2.2. Regulador Cuadrático Lineal (LQR)

La solución de la ecuación de Ricatti algebraica se encuentra de manera similar a la ecuación de Lyapunov, en el sentido que debe proponerse una matriz simétrica y positiva definida

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

que sea la solución algebraica del sistema de ecuaciones resultante de

$$A^T S + S A + Q - S B R^{-1} B^T S = 0. \quad (3.8)$$

Al ser un caso particular del problema de optimización, el control seguirá teniendo la forma

$$u(t) = -K x(t) + r(t),$$

en donde

$$K = R^{-1} B^T S.$$

Siempre que el par (A, B) sea controlable y las matrices de peso cumplan $Q \geq 0$ y $R \geq 0$, el controlador resultará en un controlador estable, es decir,

$$\Re\{\lambda(A - BK)\} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

3.3. Control difuso

3.3.1. Modelo de Takagi-Sugeno

El procedimiento descrito por Tanaka and Wang^[43], representa el modelo dinámico no lineal de un sistema, por medio del llamado modelo difuso de Takagi-Sugeno. Dicho modelo es descrito por medio de reglas difusas del tipo “**IF - THEN**”, que representan al sistema no lineal por medio de subsistemas lineales, usando la dinámica lineal local descrita por cada regla difusa (figura 3.3).

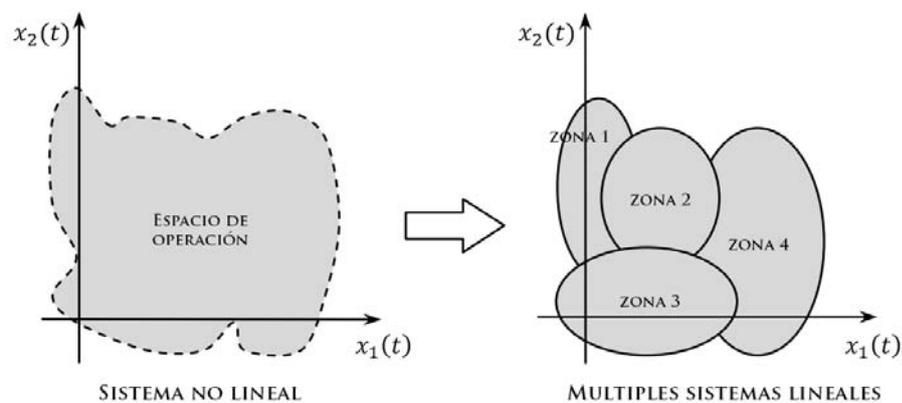


Figura 3.3: Representación de un sistema no lineal por subsistemas lineales

Las r reglas del modelo difuso de Takagi-Sugeno, pueden ser aplicadas para sistemas continuos y/o discretos, pero, debido a que el desarrollo de los controladores para ambos tipos de sistemas es muy parecido, y a que el sistema analizado en este trabajo se considera como un sistema continuo, sólo se explicará la teoría correspondiente a sistemas continuos. La estructura de un sistema de control difuso continuo tiene la forma

Regla i del modelo:

IF $z_1(t)$ es M_i^1 y ... y $z_p(t)$ es M_i^p ,

$$\mathbf{THEN} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} ; \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.9)$$

En donde M_i^j son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos $j = \{1, 2, \dots, p\}$, r es el número de reglas difusas del modelo $i = \{1, 2, \dots, r\}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas del sistema. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son las matrices correspondientes a la representación en espacio de estados de los subsistemas difusos y (z_1, z_2, \dots, z_p) son las variables difusas del sistema.

Durante el desarrollo que mencionan Tanaka and Wang^[43], se asume que las variables difusas no son funciones dependientes de las entradas de sistema $u(t)$, sino únicamente de los estados $x(t)$. Esta aseveración es necesaria para evitar un proceso complicado de defuzzificación durante la implementación de los controladores difusos.

En las ecuaciones (3.10) y (3.11) se muestra la estructura matemática del sistema no lineal representado como una suma de los subconjuntos lineales,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} z(t) &= [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)], \\ w_i(z(t)) &= \prod_{j=1}^p M_i^j(z_j(t)), \\ h_i(z(t)) &= \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}. \end{aligned}$$

El término $w_i(z_j(t))$ es conocido como la función de peso y es dependiente del vector $z(t)$.

Se sabe que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases}, \quad (3.12)$$

por lo tanto

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases}. \quad (3.13)$$

Los pesos $h_i(z(t))$ indican el grado de activación de cada subsistema, es decir, cuanto contribuye cada uno de los subsistemas para formar el sistema global de acuerdo al punto de operación en que se encuentre. Además, la función de pertenencia provee una transición gradual y suave de un subsistema a cualquiera de los subsistemas vecinos. Estas funciones pueden ser triangulares, sigmoidales o Gaussianas, cuidando que siempre se cumpla la restricción mostrada en la ecuación (3.12).

3.3.2. Construcción del modelo difuso

Como es sabido, el sistema analizado en este trabajo únicamente cuenta con tres grados de libertad, por lo tanto, se trabajará con el modelo desacoplado de las ecuaciones (2.58) y (2.59). En los manuales escritos por Apkarian and Lévis^[3] y Pittman^[34]; se presenta una descripción del comportamiento de los motores de la planta. En estos trabajos se anexan gráficas de par de torsión τ [$\frac{N}{m}$] contra velocidad angular ω [$\frac{rad}{s}$] tomando en cuenta el voltaje V_i y la corriente de excitación i_i del motor, y se observa que existe una relación lineal entre estas variables, con lo que los autores llegan a la conclusión que

$$V_i \approx \omega_i^2, \quad (3.14)$$

la cual es únicamente válida para este motor. Tomando en consideración lo anterior, los pares que actúan en la planta pueden reescribirse en función del voltaje de excitación de los motores como

$$\begin{cases} \tau_\phi = k_f l (V_4 - V_2) \\ \tau_\theta = k_f l (V_3 - V_1) \\ \tau_\psi = k_\tau (V_2 + V_4 - V_1 - V_3) \end{cases}, \quad (3.15)$$

y si se sustituyen en las ecuaciones correspondientes a los estados de posición angular

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{k_f l (V_4 - V_2)}{I_{xx}} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{k_f l (V_3 - V_1)}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{k_\tau (V_2 + V_4 - V_1 - V_3)}{I_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

En el objetivo de este trabajo, se planteó implementar un controlador para las posiciones angulares, y si se observa la ecuación (2.58), se ve que únicamente se tienen tres estados de sistema ($\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$). Afortunadamente se pueden agregar los estados correspondientes a posiciones angulares (ϕ , θ y ψ) sin ningún problema ya que sus derivadas ya son estados del sistema, es decir, son las velocidades angulares

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{k_f l (V_4 - V_2)}{I_{xx}} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{k_f l (V_3 - V_1)}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{k_\tau (V_2 + V_4 - V_1 - V_3)}{I_{zz}} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

y si se representa el sistema no lineal usando la representación de espacio de estados de la forma

$$\dot{x}(t) = A(x, t) x(t) + B(t) u(t),$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_f l}{I_{xx}} & 0 & \frac{k_f l}{I_{xx}} \\ -\frac{k_f l}{I_{yy}} & 0 & \frac{k_f l}{I_{yy}} & 0 \\ -\frac{k_\tau}{I_{zz}} & \frac{k_\tau}{I_{zz}} & -\frac{k_\tau}{I_{zz}} & \frac{k_\tau}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

se podrá usar el método de Takagi-Sugeno para construir el sistema difuso continuo (CFS).

Conocida la ecuación (3.18), se puede observar que $A(t)$ depende de dos variables del sistema ($\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$), por lo tanto, estos estados pueden ser elegidas como variables difusas de acuerdo a la definición (3.9)

$$z_1(t) = \dot{\phi}, \quad z_2(t) = \dot{\theta}, \quad (3.19)$$

$$z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t)],$$

cuyos máximos y mínimos propuestos son

$$\min_{z_1(t)} = Z_{1min}, \quad \max_{z_1(t)} = Z_{1max},$$

$$\min_{z_2(t)} = Z_{2_{min}}, \quad \max_{z_2(t)} = Z_{2_{max}},$$

y su valor numérico será definido más adelante.

Con la información anterior y con ayuda de la ecuación (3.10) se puede construir la tabla [3.1].

Grado de pertenencia h_i	$z_1(t)$	$z_2(t)$
h_1	$Z_{1_{max}}$	$Z_{2_{max}}$
h_2	$Z_{1_{max}}$	$Z_{2_{min}}$
h_3	$Z_{1_{min}}$	$Z_{2_{max}}$
h_4	$Z_{1_{min}}$	$Z_{2_{min}}$

Tabla 3.1: Grado de pertenencia de las variables difusas

Aunque existan distintos tipos de funciones de membresía, todas tienen un comportamiento similar. Las funciones triangulares fueron las elegidas, por su facilidad de implementación y por su excelente desempeño en todo tipo de sistemas. Según lo mencionan Benzaouia and El Hajjaji^[4], las funciones de membresía triangulares se pueden construir a partir de un máximo y un mínimo valor preestablecido para las variables difusas, es decir, de cierta manera se acota su rango de variación $Z_{i_{min}} \leq z_i(t) \leq Z_{i_{max}}$, las funciones de membresía triangulares tienen la forma

$$M_i^1(z_i(t)) = \frac{z_i(t) - Z_{i_{min}}}{Z_{i_{max}} - Z_{i_{min}}}, \quad M_i^2(z_i(t)) = \frac{Z_{i_{max}} - z_i(t)}{Z_{i_{max}} - Z_{i_{min}}}. \quad (3.20)$$

Tomando en cuenta lo anteriormente expuesto, las funciones de membresía triangulares propuestas para el sistema analizado son

$$M_1^1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) - Z_{1_{min}}}{Z_{1_{max}} - Z_{1_{min}}}, \quad M_1^2(z_1(t)) = \frac{Z_{1_{max}} - z_1(t)}{Z_{1_{max}} - Z_{1_{min}}},$$

$$M_2^1(z_2(t)) = \frac{z_2(t) - Z_{2_{min}}}{Z_{2_{max}} - Z_{2_{min}}}, \quad M_2^2(z_2(t)) = \frac{Z_{2_{max}} - z_2(t)}{Z_{2_{max}} - Z_{2_{min}}},$$

y gráficamente se observan en las figuras [3.4] y [3.5].

Una vez que se tienen las funciones de membresía se procede a construir el modelo difuso usando el método de Takagi-Sugeno, expuesto en la ecuación (3.9). Para ello, partiendo de que se tienen dos variables difusas para el sistema $p = 2$ y sabiendo que el número de reglas es igual a $r = 2^N$, se concluye que el sistema puede ser descrito usando 4 subsistemas, las cuales son:

Regla 1:

IF $z_1(t)$ es “Positiva” y $z_2(t)$ es “Positiva”,

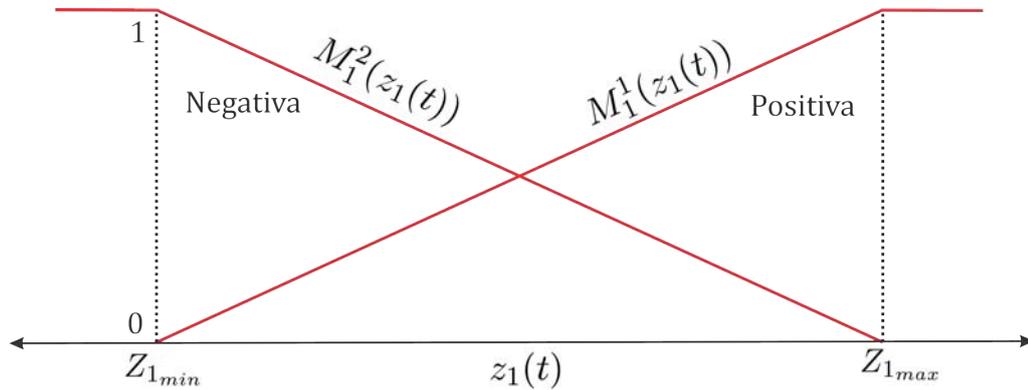


Figura 3.4: Funciones de membresía M_1^1 y M_1^2

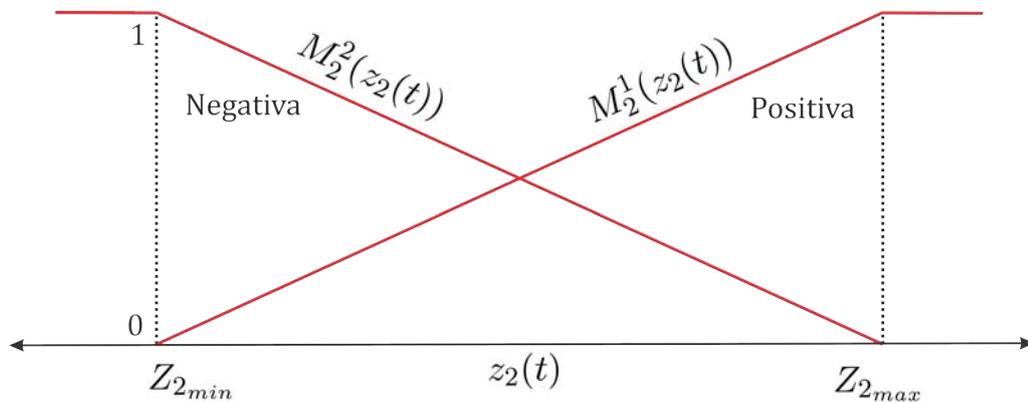


Figura 3.5: Funciones de membresía M_2^1 y M_2^2

THEN $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B u(t),$

Regla 2:

IF $z_1(t)$ es “Positiva” y $z_2(t)$ es “Negativa”,

THEN $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B u(t),$

Regla 3:

IF $z_1(t)$ es “Negativa” y $z_2(t)$ es “Positiva”,

THEN $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B u(t),$

Regla 4:

IF $z_1(t)$ es “Negativa” y $z_2(t)$ es “Negativa”,

THEN $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B u(t),$

cuyas matrices son

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yzx} Z_{2max} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zxy} Z_{1max} \\ 0 & 0 & 0 & I_{xyz} Z_{2max} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yzx} Z_{2min} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zxy} Z_{1max} \\ 0 & 0 & 0 & I_{xyz} Z_{2min} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yzx} Z_{2max} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zxy} Z_{1min} \\ 0 & 0 & 0 & I_{xyz} Z_{2max} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yzx} Z_{2min} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zxy} Z_{1min} \\ 0 & 0 & 0 & I_{xyz} Z_{2min} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_f l}{I_{xx}} & 0 & \frac{k_f l}{I_{xx}} \\ \frac{k_f l}{I_{yy}} & 0 & -\frac{k_f l}{I_{yy}} & 0 \\ -\frac{k_\tau}{I_{zz}} & \frac{k_\tau}{I_{zz}} & -\frac{k_\tau}{I_{zz}} & \frac{k_\tau}{I_{zz}} \end{bmatrix},$$

donde $I_{yzx} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}$, $I_{zxy} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}$ e $I_{xyz} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$. Y los grados de pertenencia de cada una de las funciones de pertenencia se definen como^[43]

$$h_1(z(t)) = M_1^1(z(t)) \times M_2^1(z(t)),$$

$$h_2(z(t)) = M_1^1(z(t)) \times M_2^2(z(t)),$$

$$h_3(z(t)) = M_1^2(z(t)) \times M_2^1(z(t)),$$

$$h_4(z(t)) = M_1^2(z(t)) \times M_2^2(z(t)).$$

Considerando la tabla [3.2]^[21] de parámetros, proporcionada por el fabricante y los valores propuestos para $Z_{1min} = -0.8 \frac{rad}{s}$, $Z_{1max} = 0.8 \frac{rad}{s}$, $Z_{2min} = -0.8 \frac{rad}{s}$ y $Z_{2max} = 0.8 \frac{rad}{s}$, se obtienen las matrices finales correspondientes a los subsistemas difusos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
I_{xx}	Momento de inercia en el eje x	0.0552	$kg\ m^2$
I_{yy}	Momento de inercia en el eje y	0.0552	$kg\ m^2$
I_{zz}	Momento de inercia en el eje z	0.1104	$kg\ m^2$
k_f	Constante de empuje	0.0036	$\frac{N\ m}{V}$
k_τ	Constante de arrastre	0.01188	$\frac{N}{V}$
m	Masa total del sistema	2.85	kg
l	Distancia entre el motor y el centro de masa	0.197	m

Tabla 3.2: Parámetros físicos de la plataforma de Quanser

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4240 & 0 & 0.4240 \\ -0.4240 & 0 & 0.4240 & 0 \\ -0.0326 & 0.0326 & -0.0326 & 0.0326 \end{bmatrix},$$

cuyos grados de pertenencia resultantes son

$$h_1 = \frac{(Z1 - 1)(Z2 - 1)}{4},$$

$$h_2 = \frac{-(Z1 - 1)(Z2 + 1)}{4},$$

$$h_3 = \frac{-(Z1 + 1)(Z2 - 1)}{4},$$

$$h_4 = \frac{(Z1 + 1)(Z2 + 1)}{4}.$$

Una vez que se han obtenido los subsistemas lineales, es necesario verificar si cada uno de los pares A_i, B es controlable, por medio de la matriz de controlabilidad, para

ello, usando la definición descrita en ecuación (3.2) y el código de MatLab del Apéndice (A.3), se obtiene lo siguiente

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A_1, B)) = 6,$$

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A_2, B)) = 6,$$

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A_3, B)) = 6,$$

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A_4, B)) = 6,$$

con lo que se garantiza que cada uno de los subsistemas es controlable. La técnica elegida para controlar los subsistemas lineales fue el regulador cuadrático lineal (LQR), descrito en secciones anteriores y que por su definición resulta ideal usarlo en sistemas en donde se desea tener un equilibrio entre una máxima velocidad de respuesta y un mínimo gasto energético de los actuadores.

3.3.3. Control LQR difuso

De acuerdo a lo expuesto en la Sección 3.2.2, para encontrar el controlador K_i que lleve al sistema de un punto inicial x_0 a un punto de operación X , es necesario resolver la ecuación de Ricatti algebraica (ecuación (3.8)) para cada uno de los subsistemas, por lo cual, es necesario proponer las matrices Q_i y R_i para cada uno de los subsistemas^[10].

Los valores presentes en la diagonal de las matrices de peso Q_i y R_i se calculan de manera aproximada usando la regla de Bryson, la cual está definida como

$$Q_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_1)_{max}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_2)_{max}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(x_n)_{max}^2} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$R_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{(u_1)_{max}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(u_2)_{max}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(u_m)_{max}^2} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

donde $(x_i)_{max}$ es el valor máximo permitido para los estados y $(u_i)_{max}$ el máximo valor permitido para los actuadores. Inicialmente se hizo la propuesta que para los estados de posición angular se tuvieran un máximo valor de $(x_i)_{max} = \pm 50[^\circ] = \pm 0.87[rad]$ con $i = 1, 2$ y 3 , para las velocidades angulares $(x_i)_{max} = \pm 20[\frac{^\circ}{s}] = \pm 0.8[\frac{rad}{s}]$ con $i = 4, 5$ y 6 , y $(u_i)_{max} = 10[V]$ con $i = 1, 2, 3$ y 4 para las entradas de los actuadores. Cabe destacar que los valores que se asignan en la regla de Bryson son únicamente valores aproximados, puesto que las matrices Q_i y R_i que se obtengan tendrán que ser modificadas en la mayoría de los casos para ajustar el desempeño del controlador.

Con la sustitución de estos valores en las ecuaciones (3.21) y (3.22), se obtiene

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = \begin{bmatrix} 1.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.56 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Después de realizar las pruebas que se presentan en el Capítulo 5, se tuvieron que ajustar los valores de la diagonal principal con el fin de mejorar el desempeño del sistema, las matrices finales fueron

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Con las matrices de peso se proceden a calcular las ganancias de realimentación de cada subsistema por medio de la ecuación de Ricatti (3.8)

$$A_1^T S_1 + S_1 A_1 + Q - S_1 B R^{-1} B^T S_1 = 0,$$

$$K_1 = R^{-1} B^T S_1,$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.0694 & -31.6922 & -44.5243 & 0.0380 & -13.2511 & -27.6265 \\ -31.6922 & 0.0694 & 44.5243 & -13.2511 & 0.0380 & 27.6265 \\ 0.0697 & 31.5531 & -44.9176 & 0.0383 & 13.1748 & -26.6343 \\ 31.5531 & 0.0697 & 44.9176 & 13.1748 & 0.0383 & 26.6343 \end{bmatrix},$$

$$A_2^T S_2 + S_2 A_2 + Q - S_2 B R^{-1} B^T S_2 = 0,$$

$$K_2 = R^{-1} B^T S_2,$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.0694 & -31.6922 & -44.5243 & -0.0380 & -13.2511 & -27.6265 \\ -31.5531 & 0.0697 & 44.9176 & -13.1748 & 0.0383 & 26.6343 \\ -0.0697 & 31.5531 & -44.9176 & -0.0383 & 13.1748 & -26.6343 \\ 31.6922 & 0.0694 & 44.5243 & 13.2511 & 0.0380 & 27.6265 \end{bmatrix},$$

$$A_3^T S_3 + S_3 A_3 + Q - S_3 B R^{-1} B^T S_3 = 0,$$

$$K_3 = R^{-1} B^T S_3,$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.0697 & -31.5531 & -44.9176 & 0.0383 & -13.1748 & -26.6343 \\ -31.6922 & -0.0694 & 44.5243 & -13.2511 & -0.0380 & 27.6265 \\ 0.0694 & 31.6922 & -44.5243 & 0.0380 & 13.2511 & -27.6265 \\ 31.5531 & -0.0697 & 44.9176 & 13.1748 & -0.0383 & 26.6343 \end{bmatrix},$$

$$A_4^T S_4 + S_4 A_4 + Q - S_4 B R^{-1} B^T S_4 = 0,$$

$$K_4 = R^{-1} B^T S_4,$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.0697 & -31.5531 & -44.9176 & -0.0383 & -13.1748 & -26.6343 \\ -31.5531 & -0.0697 & 44.9176 & -13.1748 & -0.0383 & 26.6343 \\ -0.0694 & 31.6922 & -44.5243 & -0.0380 & 13.2511 & -27.6265 \\ 31.6922 & -0.0694 & 44.5243 & 13.2511 & -0.0380 & 27.6265 \end{bmatrix}.$$

Cabe destacar que el cálculo de las ganancias de realimentación K_i , se hizo utilizando una matriz S_i diferente para cada subsistema, esto no garantiza la estabilidad del sistema durante el salto de un subsistema a otro en el controlador global. Por lo anterior, se necesita hacer un análisis de estabilidad más profundo, a manera que se garantice la estabilidad global del sistema, es decir, los cambios entre subsistemas se realicen sin pérdida de estabilidad. Afortunadamente ya existe una extensión del Teorema de Lyapunov para sistema difusos.

3.3.4. Análisis de estabilidad del sistema difuso

Teorema 1. Se dice que un sistema de control difuso continuo es asintóticamente estable de manera global si y sólo sí, existe una matriz \mathcal{P} común, positiva definida tal que

$$\{A_i - B_i K_j\}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \{A_i - B_i K_j\} < 0, \quad (3.27)$$

para cada $h_i(z(t)) \cdot h_j(z(t)) \neq 0 \quad \forall t, \quad i, j = 1, 2, \dots, r$.

Al encontrar la matriz \mathcal{P} común a todos los subsistemas lineales se garantiza que las transiciones se harán sin pérdida de estabilidad.

Un caso particular del Teorema 1 es:

Teorema 2. Cuando $B_i = B, i = 1, 2, \dots, r$, el sistema de control difuso es asintóticamente estable de manera global si y sólo sí, existe una matriz P común, positiva definida tal que

$$\{A_i - B K_i\}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \{A_i - B K_i\} < 0, \quad (3.28)$$

para cada $h_i(z(t)) \neq 0 \quad \forall t, \quad i = 1, 2, \dots, r$.

Normalmente, encontrar la matriz \mathcal{P} no es una tarea fácil de hacerla analíticamente, por suerte existen herramientas matemáticas que pueden ser fácilmente implementadas en programas de cómputo, tal es el caso de los LMI's.

3.3.5. Desigualdades matriciales lineales (LMI's)

Un LMI es una desigualdad matricial lineal de la forma^[7]

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^k x_i F_i > 0, \quad (3.29)$$

donde $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ es una variable, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i = 0, 1, \dots, k$, es conocida. El símbolo de desigualdad “>” implica que $F(x)$ es positiva definida.

Un LMI es una restricción convexa en x , lo que quiere decir que el conjunto $\{x | F(x) > 0\}$ es convexo. El LMI de la ecuación (3.29) puede representar una amplia variedad de restricciones convexas en x . Particularmente, desigualdades lineales, desigualdades lineales convexas, desigualdades de normas de matrices y restricciones que surgen en la teoría de control, tales como las desigualdades de Lyapunov y de matrices convexas cuadráticas; todas estas pueden ser representadas en forma de un LMI. Múltiples LMI's $F^{(i)} > 0$ para $i = 0, 1, \dots, k$, pueden ser representados como un solo LMI diagonal, de la forma $diag(F^{(0)}, \dots, F^{(k)}) > 0$.

Frecuentemente las variables de los LMI's son matrices, un ejemplo es la ecuación continua de Lyapunov

$$A_i^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A_i < 0, \quad (3.30)$$

donde A_i es conocida y $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T$ es la variable a encontrar. En este caso el LMI no será escrito explícitamente de la forma $F(x) > 0$. Además de ahorrar notación, esto hace más fácil el cómputo del problema. Pero, por supuesto que la desigualdad (3.30) puede reescribirse en la forma (3.29), siendo $F_0 = 0, F_i = -A_i^T \mathcal{P} - \mathcal{P} A_i$.

Dado un LMI de la forma $F(x) > 0$, el problema a resolver es encontrar una x^{fac} tal que $F(x^{fac}) > 0$, o en su defecto determinar que el LMI no es factible.

Como ejemplo, la condición de estabilidad simultánea de la ecuación de Lyapunov (3.31), que tiene la misma forma que la del Teorema 2, dada A_i para $i = 1, \dots, 4$, y en la cual es necesario encontrar un \mathcal{P} que satisfaga el LMI

$$\mathcal{P} > 0, \quad A_i \mathcal{P} + \mathcal{P} A_i < 0, \quad i = 1, \dots, 4,$$

o en su defecto determinar que tal \mathcal{P} no existe. En forma matricial toma la forma de

$$\begin{bmatrix} A_1^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.31)$$

Los problemas de LMI's son manejables tanto teórica como prácticamente, pueden ser resueltos de manera analítica; lo que es muy complicado, o se puede hacer uso de algún software matemático de los disponibles a la fecha, por ejemplo: MatLab, Maple o Mathematica.

A partir del sistema difuso obtenido con anterioridad, se observa que el Teorema 2 es el que se puede aplicar para hacer el análisis de estabilidad debido a que $B_i = B, i = 1, 2, \dots, 4$. En el código de MatLab del Apéndice C, se muestra el proceso para la construcción y solución del LMI, esto se hace sustituyendo la ecuación (3.28) en la matriz (3.31), lo que resulta en la solución del problema de estabilidad, la matriz \mathcal{P} resultante es

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1.3358 & -0.0000 & -0.0083 & 0.0279 & -0.0000 & 0.0015 \\ -0.0000 & 1.3358 & 0.0065 & -0.0000 & 0.0279 & -0.0011 \\ -0.0083 & 0.0065 & 1.3895 & -0.0009 & 0.0007 & 0.0556 \\ 0.0279 & -0.0000 & -0.0009 & 0.0529 & -0.0000 & -0.0006 \\ -0.0000 & 0.0279 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0529 & 0.0005 \\ 0.0015 & -0.0011 & 0.0556 & -0.0006 & 0.0005 & 0.1187 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

de la cual se sabe que es positiva definida dadas las raíces del polinomio característico

$$\lambda(\mathcal{P} - \mathbb{I}) = \{0.0523, 0.0523, 0.1163, 1.3345, 1.3363, 1.3938\}.$$

Si se aplica el Teorema 2 a cada uno de los subsistemas usando la ecuación (3.28) y la matriz (3.32), resulta una matriz para cada subsistema, de la cual se obtienen los menores y las raíces del polinomio característico. De acuerdo a Chen^[9], la condiciones únicas y suficientes para garantizar que una matriz es negativa definida, es que las raíces estén en el semiplano complejo izquierdo y los menores del sistema se vayan alternando en signo, es decir, los menores correspondientes a las submatrices pares sean negativos y los correspondientes a las impares sean positivos.

$$\{A_1 - B K_1\}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \{A_1 - B K_1\} < 0,$$

Menores: $|M| = \{-1.4978, 2.2433, -3.2521, 3.3333, -3.4163, 3.8344\}$,

Raíces: $\lambda = \{-1.8613, -1.7498, -1.7486, -0.8659, -0.8863, -0.8773\}$.

$$\{A_2 - B K_2\}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \{A_2 - B K_2\} < 0,$$

Menores: $|M| = \{-1.0591, 1.1217, -1.1508, 1.2092, -1.2710, 1.1811\}$,
 Raíces: $\lambda = \{-0.9053, -1.0089, -1.0157, -1.0578, -1.0972, -1.0968\}$.

$$\{A_3 - B K_3\}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \{A_3 - B K_3\} < 0,$$

Menores: $|M| = \{-1.1602, 1.3460, -1.5124, 1.6148, -1.7235, 1.6796\}$,
 Raíces: $\lambda = \{-0.9525, -1.2014, -1.1906, -1.1410, -1.0414, -1.0375\}$.

$$\{A_4 - B K_4\}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \{A_4 - B K_4\} < 0,$$

Menores: $|M| = \{-0.7489, 0.5608, -0.4072, 0.3387, -0.2818, 0.1534\}$,
 Raíces: $\lambda = \{-0.3385, -0.5018, -0.5049, -1.1583, -1.2431, -1.2422\}$.

El haber encontrado una matriz \mathcal{P} válida para la ecuación de Lyapunov evaluada en cada subsistema, garantiza que el sistema de control difuso propuesto es globalmente estable, lo que quiere decir, aparte de garantizarse la estabilidad local en cada subsistema, se puede decir que las transiciones de un subsistema a otro se hacen sin pérdida de estabilidad. Por lo tanto, para cualquier punto de operación X dado por el usuario, el sistema será estable siempre y cuando éste se mantenga dentro del rango propuesto para las variables difusas $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$.

3.4. Robustez y rechazo de perturbaciones

3.4.1. Control integral

Uno de los inconvenientes del control por realimentación de estados es que el error en estado estacionario no está directamente relacionado con el controlador. Esto significa que en el diseño del controlador no es posible asignar relaciones predeterminadas entre las salidas y las entradas. Afortunadamente, la teoría de control en espacio de estados que resuelve este problema está basada en la teoría de PID's desarrollada años atrás. Ésta propone como solución a este problema, el uso de un integrador en su forma de espacio de estados, con lo que se añaden los errores como estados y se aumenta el grado del sistema.

De acuerdo a Hendricks et al.^[19], un integrador puede ser agregado en el control por realimentación de estados de diferentes maneras, pero la mostrada en la figura 3.6 es la más sencilla y ampliamente usada actualmente. Los estados son realimentados como antes, pero la salida es también medida y realimentada en otro lazo diferente al de realimentación principal; en donde se le resta la señal de referencia para obtener el vector de error del sistema $e(t)$. La salida de este vector y el vector de referencia, normalmente tiene la misma dimensión r . El vector de error es integrado y multiplicado por la matriz K_e , esto con el fin de hacerlo tender a cero más rápidamente.

Se dice que las salidas pueden llegar a tener un error en estado estacionario nulo si y sólo si, las salidas x_i de los integradores son constantes, es decir,

$$e = \dot{x}_i. \tag{3.33}$$

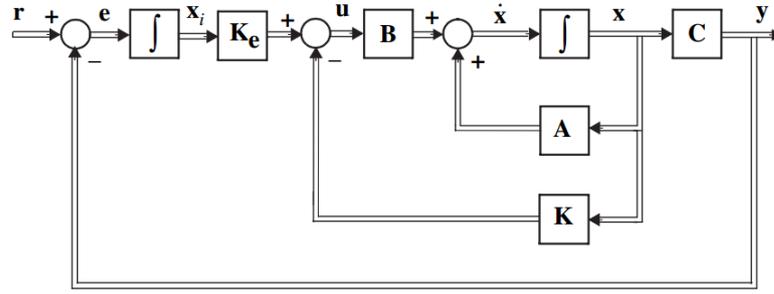


Figura 3.6: Control por realimentación de estados con integrador

Como se mencionó antes, al añadir integradores al sistema se añaden estados, con lo que el orden de este también aumenta de acuerdo al número de integradores usados. Por lo tanto, es necesario definir un nuevo vector de estados aumentado

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

El nuevo vector de estados tendrá dimensión $n_a = n + r$, donde r es la dimensión del vector de referencias. Las ecuaciones que describen el sistema aumentado son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B, \\ u &= -Kx - K_e x_i, \\ \dot{x}_i &= -C x_i + r, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (3.35)$$

y en forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r, \\ y &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

o usando el vector de estados aumentado

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A_a x_a + B_a u + B_r r, \\ y &= C_a x_a, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde I una matriz identidad de orden r , y

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad C_a = [C \ 0].$$

El vector de entradas del sistema puede ser reescrito como

$$u = -[K \ -K_e] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = -K_a x_a, \quad (3.38)$$

y si se sustituye en la ecuación (3.34)

$$\dot{x}_a = (A_a - B_a K_a) x_a + B_r r. \quad (3.39)$$

Una vez añadidos los estados de error al sistema, se puede tener control sobre ellos, esto quiere decir; que se pueden forzar a converger a cero siempre. El uso del integrador permite eliminar posibles errores en estado estacionario -en caso de que existieran- y hacer más robusto el sistema ante perturbaciones, y en el caso de que una de ellas ocurriera, el controlador tratará de regresar a la referencia en el menor tiempo posible. Es fácil observar que la ecuación (3.39) tiene la misma forma que la ecuación (3.3), por lo tanto, la metodología descrita en la Sección 3.2.1, puede ser usada de la misma manera para el cálculo de las ganancias de realimentación K_a , pero ahora, usando el sistema aumentado.

3.4.2. Control LQR difuso + control integral

Usando la metodología expuesta en la sección anterior, las matrices aumentadas correspondientes al sistema difuso descrito en la Sección 3.3.3, son

$$A_{a_1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{a_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{a_3} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{a_4} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4240 & 0 & 0.4240 \\ -0.4240 & 0 & 0.4240 & 0 \\ -0.0326 & 0.0326 & -0.0326 & 0.0326 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y de acuerdo a lo realizado en la Sección 3.3.3, se toman en cuenta los valores utilizados en la diagonal de las matrices Q_i , para construir las nuevas matrices de peso Q_{a_i}

$$Q_a = Q_{a_1} = Q_{a_2} = Q_{a_3} = Q_{a_4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

los valores que afectan los estados de error añadidos fueron obtenidos de manera experimental; proceso que se explica más a detalle en el Capítulo 5. La matriz R permanece igual, ya que ésta únicamente depende del número de entradas del sistema y en este caso no variaron al aumentar los estados de error al sistema. Recalculando las matrices de realimentación por medio de la ecuación de Ricatti, al igual que se hizo en la Sección 3.3.5

$$A_{a_1}^T S_{a_1} + S_{a_1} A_{a_1} + Q_a - S_{a_1} B_a R^{-1} B_a^T S_{a_1} = 0,$$

$$K_{a_1} = R^{-1} B_a^T S_{a_1},$$

$$K_{a_1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0743 & -35.7347 & -45.8827 & 0.0383 & -13.6070 & -28.0151 & 0.0108 & -10.0211 & -2.2266 \\ -33.7484 & 0.0785 & 45.8778 & -13.4332 & 0.0387 & 28.0103 & -5.0108 & 0.0211 & 2.2264 \\ 0.0746 & 35.5774 & -46.2692 & 0.0386 & 13.5294 & -27.0063 & 0.0109 & 9.9788 & -2.2455 \\ 33.5995 & 0.0788 & 46.2741 & 13.3564 & 0.0389 & 27.0111 & 4.9891 & 0.0212 & 2.2457 \end{bmatrix}.$$

$$A_{a_2}^T S_{a_2} + S_{a_2} A_{a_2} + Q_a - S_{a_2} B_a R^{-1} B_a^T S_{a_2} = 0,$$

$$K_{a_2} = R^{-1} B_a^T S_{a_2},$$

$$K_{a_2} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0743 & -35.7347 & -45.8827 & -0.0383 & -13.6070 & -28.0151 & -0.0108 & -10.0211 & -2.2266 \\ -33.5995 & 0.0788 & 46.2741 & -13.3564 & 0.0389 & 27.0111 & -4.9891 & 0.0212 & 2.2457 \\ -0.0746 & 35.5774 & -46.2692 & -0.0386 & 13.5294 & -27.0063 & -0.0109 & 9.9788 & -2.2455 \\ 33.7484 & 0.0785 & 45.8778 & 13.4332 & 0.0387 & 28.0103 & 5.0108 & 0.0211 & 2.2264 \end{bmatrix}.$$

$$A_{a_3}^T S_{a_3} + S_{a_3} A_{a_3} + Q_a - S_{a_3} B_a R^{-1} B_a^T S_{a_3} = 0,$$

$$K_{a_3} = R^{-1} B_a^T S_{a_3},$$

$$K_{a_3} = \begin{bmatrix} 0.0746 & -35.5774 & -46.2692 & 0.0386 & -13.5294 & -27.0063 & 0.0109 & -9.9788 & -2.2455 \\ -33.7484 & -0.0785 & 45.8778 & -13.4332 & -0.0387 & 28.0103 & -5.0108 & -0.0211 & 2.2264 \\ 0.0743 & 35.7347 & -45.8827 & 0.0383 & 13.6070 & -28.0151 & 0.0108 & 10.0211 & -2.2266 \\ 33.5995 & -0.0788 & 46.2741 & 13.3564 & -0.0389 & 27.0111 & 4.9891 & -0.0212 & 2.2457 \end{bmatrix}.$$

$$A_{a_4}^T P_{a_4} + S_{a_4} A_{a_4} + Q_a - S_{a_4} B_a R^{-1} B_a^T S_{a_4} = 0,$$

$$K_{a_4} = R^{-1} B_a^T S_{a_4},$$

$$K_{a_4} = \begin{bmatrix} -0.0746 & -35.5774 & -46.2692 & -0.0386 & -13.5294 & -27.0063 & -0.0109 & -9.9788 & -2.2455 \\ -33.5995 & -0.0788 & 46.2741 & -13.3564 & -0.0389 & 27.0111 & -4.9891 & -0.0212 & 2.2457 \\ -0.0743 & 35.7347 & -45.8827 & -0.0383 & 13.6070 & -28.0151 & -0.0108 & 10.0211 & -2.2266 \\ 33.7484 & -0.0785 & 45.8778 & 13.4332 & -0.0387 & 28.0103 & 5.0108 & -0.0211 & 2.2264 \end{bmatrix}.$$

Nuevamente, con las ganancias de realimentación K_{a_i} obtenidas, es necesario hacer el análisis de la ecuación de Lyapunov para sistemas difusos, con el fin de verificar la estabilidad global del sistema. Por lo anterior, se utiliza el mismo procedimiento planteado en la Sección 3.3.5 para la construcción del LMI, pero ahora usando las matrices extendidas obtenidas en pasos anteriores, con lo que resulta

$$\mathcal{P}_a =$$

$$\begin{bmatrix} 1.8399 & 0.0000 & -0.0045 & 0.0715 & 0.0000 & 0.0007 & 0.8689 & 0.0000 & -0.0031 \\ 0.0000 & 1.8071 & 0.0024 & 0.0000 & 0.0626 & -0.0008 & 0.0000 & 0.8479 & 0.0011 \\ -0.0045 & 0.0024 & 1.7215 & -0.0005 & 0.0003 & 0.3283 & -0.0053 & 0.0021 & 0.4334 \\ 0.0715 & 0.0000 & -0.0005 & 0.0578 & 0.0000 & -0.0002 & 0.0739 & 0.0000 & -0.0003 \\ 0.0000 & 0.0626 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0528 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0538 & 0.0001 \\ 0.0007 & -0.0008 & 0.3283 & -0.0002 & 0.0002 & 0.3623 & -0.0012 & 0.0001 & 0.1760 \\ 0.8689 & 0.0000 & -0.0053 & 0.0739 & 0.0000 & -0.0012 & 1.8117 & 0.0000 & -0.0061 \\ 0.0000 & 0.8479 & 0.0021 & 0.0000 & 0.0538 & 0.0001 & 0.0000 & 1.7471 & 0.0024 \\ -0.0031 & 0.0011 & 0.4334 & -0.0003 & 0.0001 & 0.1760 & -0.0061 & 0.0024 & 0.6234 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

de la cual se sabe que es positiva definida dadas las raíces de su polinomio característico

$$\lambda(\mathcal{P}_a - \mathbb{I}_{9 \times 9}) = \{0.0502, 0.0538, 0.2620, 0.4883, 0.9288, 0.9569, 1.9569, 2.6282, 2.6989\}.$$

Si se aplica la ecuación (3.28) del Teorema 2 a cada uno de los subsistemas aumentados obtenidos anteriormente, y al igual que se hizo a su debido tiempo, se calculan las raíces del polinomio característico y los menores para verificar la validez del teorema, se obtiene lo siguiente

$$\{A_{a_1} - B_a K_{a_1}\}^T \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_a \{A_{a_1} - B_a K_{a_1}\} < 0,$$

Menores: $|M| =$

$$\{-2.3437, 4.8954, -9.4988, 9.8993, -9.8080, 13.1665, -6.1466, 5.0080, -0.2149\},$$

Raíces: $\lambda =$

$$\{-2.7531, -2.4674, -2.4077, -0.0424, -0.4339, -1.0693, -0.9544, -0.9307, -0.7524\}.$$

$$\{A_{a_2} - B_a K_{a_2}\}^T \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_a \{A_{a_2} - B_a K_{a_2}\} < 0,$$

Menores: $|M| =$

$$\{-1.2951, 1.5853, -1.8516, 2.0170, -2.0637, 2.6000, -1.5588, 1.3678, -0.0861\},$$

Raíces: $\lambda =$

$$\{-0.0624, -0.5718, -0.7745, -1.3423, -1.3320, -1.2652, -1.1034, -1.1121, -1.1218\}.$$

$$\{A_{a_3} - B_a K_{a_3}\}^T \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_a \{A_{a_3} - B_a K_{a_3}\} < 0,$$

Menores: $|M| =$

$$\{-1.5324, 2.1715, -2.9202, 3.1818, -3.2639, 4.2483, -2.4753, 2.1523, -0.1302\},$$

Raíces: $\lambda =$

$$\{-0.0600, -0.5533, -1.6563, -1.5788, -1.5194, -0.7721, -1.1188, -1.0617, -1.0771\}.$$

$$\{A_{a_4} - B_a K_{a_4}\}^T \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_a \{A_{a_4} - B_a K_{a_4}\} < 0,$$

Menores: $|M| =$

$$\{-0.5955, 0.3994, -0.2526, 0.2385, -0.2190, 0.1934, -0.0915, 0.0769, -0.0027\},$$

Raíces: $\lambda =$

$$\{-0.0323, -0.2977, -1.2087, -1.2494, -1.2545, -0.7153, -0.4947, -0.5281, -0.7816\}.$$

Con lo anterior, se garantiza la estabilidad local para cada uno de los subsistemas aumentados y también la estabilidad global durante las transiciones de una subsistema a otro.

3.5. Resumen

A lo largo de este capítulo, se presentó la teoría matemática correspondiente al Regulador Cuadrático Lineal (LQR). Además, con el conocido método de modelado de sistemas difusos propuesto por Takagi-Sugeno, se pudo hacer una descripción del sistema no lineal del cuadricóptero de tres grados de libertad, por medio de cuatro subsistemas lineales.

Aunque existe una vertiente dentro del control difuso que usa el método de Compensación Paralela Distribuida (PDC)^[43] para la obtención de las ganancias de realimentación, se optó por el LQR, ya que de acuerdo a su definición, éste permite encontrar un equilibrio entre el gasto energético y la rapidez de respuesta de la planta, por medio de la manipulación de las matrices Q y R ; dicho equilibrio se logró en el controlador propuesto después de la experimentación con la planta.

Para hacer más robusto al sistema, se hizo una modificación al controlador propuesto inicialmente; se le agregó un integrador para corregir errores en estado estacionario y

además, añadir rechazo a perturbaciones, para ello, fue necesario aumentar tres estados al sistema planteado inicialmente. En ambos casos, garantizando la estabilidad entre las transiciones de los subsistemas mediante la teoría de Lyapunov y la optimización por LMI's.

Sistema distribuido

Este capítulo, se centra en la teoría de control sobre redes, presentando desde los aspectos más básicos como las definiciones y los tipos de configuraciones de estos sistemas, así como las características de la red elegida para la implementación del trabajo y los problemas que se pueden presentar al utilizar este tipo de sistemas.

Después, se explica el proceso de distribución del controlador en la red elegida, detallando el papel que cumple cada uno de los nodos dentro del sistema en red, así como el proceso de configuración para su correcto funcionamiento.

4.1. Sistemas de control en red

Actualmente los sistemas de control se están dirigiendo hacia nuevas tendencias, como lo es el control distribuido, el cual consiste en integrar sensores, actuadores y controladores distribuidos en distintos puntos geográficos, conectados por medio redes de comunicación^[18]. Estos sistemas de control reciben el nombre de Sistemas de Control en Red (NCS).

De acuerdo a Rachana-Ashokand and Mo-Yuen^[36], cuando un sistema de control tradicional se cierra vía un canal de comunicación (como una red); el cual puede ser compartido con otros nodos fuera del sistema de control, entonces se dice que el sistema de control es un Sistema de Control en Red.

En un sistema de control en red, los sensores generan una corriente de datos recolectados; lo cuales son transmitidos a través de la red a los controladores. Los controladores procesan los datos obtenidos y generan señales de control de acuerdo a un diseño previamente hecho, mismas que retornan a través de la red a los actuadores. En los actuadores se amplifican y acondicionan las señales de acuerdo al tipo de actuador que se esté utilizando.

Zampieri^[50], menciona que las actividades en el campo de los sistemas de control en red se divide en 3 grandes vertientes:

1. **Control de redes**

El objetivo principal del control de redes es el de proveer un flujo constante de datos en la red, cuidando que la utilización de los recursos de la red sea equitativa y eficiente.

Dentro de las líneas de investigación de esta área, se encuentran los protocolos de enrutamiento, protocolos de tiempo real, reducción de congestiones, codiseño de redes y controladores.

2. Control sobre redes

El control sobre redes busca optimizar el diseño de controladores para sistemas en los cuales se intercambian datos a través de redes de comunicación poco fiables, mediante el diseño de estrategias de control que minimicen los parámetros adversos implícitos en la red, tales como los retardos de tiempo.

3. Sistemas multiagentes

Los sistemas multiagentes se ocupan de estudiar la arquitectura de la red a nivel físico, así como las interacciones entre los componentes que influyen en el desempeño global del controlador. Para entender cómo es que cada agente influye en el comportamiento global del sistema en red, es necesario entender los comportamientos de cada uno de los elementos locales.

De acuerdo a lo que dicen Yodyium and Mo-Yuen^[49], existen dos configuraciones principales para sistemas de control en red:

1. Estructura directa

La estructura directa de sistemas de control en red está integrada por un controlador y un sistema remoto que consiste en la planta, los sensores y actuadores. El controlador y la planta están ubicados en distintos lugares y conectados directamente mediante una red de comunicación, tal como se observa en la figura 4.1.

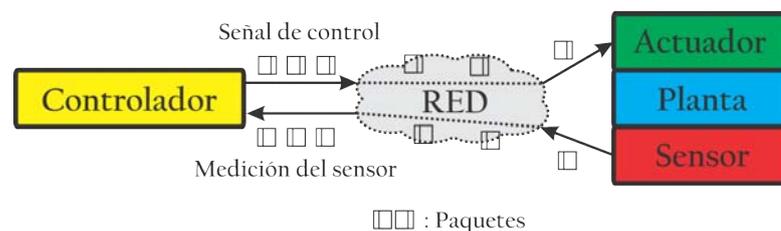


Figura 4.1: Sistema de control en red directo

La señal de control es empaquetada y enviada a la planta por medio de la red, después la planta regresa la lectura del sensor, también empaquetada y transmitida por la red. En una implementación práctica, una sola unidad de procesamiento puede controlar múltiples lazos de control en estructura directa.

2. Estructura jerárquica

La estructura jerárquica, consiste en un controlador principal y un controlador remoto conectados por medio de una red de comunicación; figura 4.2.

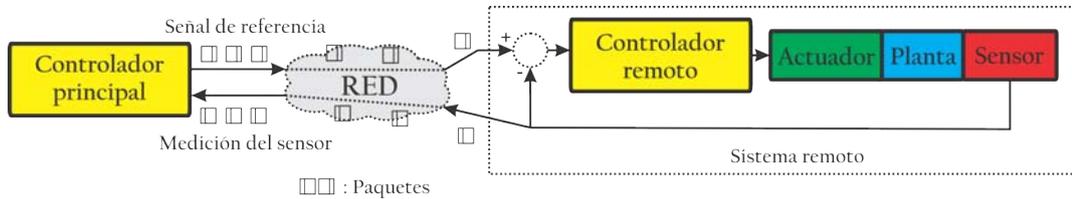


Figura 4.2: Sistema de control en red jerárquico

Periódicamente el controlador principal calcula y envía la señal de referencia empaquetada vía la red de comunicación al sistema remoto. Luego entonces, el sistema remoto procesa la señal de referencia para calcular el control en lazo cerrado y así, regresar las mediciones del sensor empaquetadas utilizando la red. Normalmente el lazo de control principal tiene un período de muestreo más grande que el del lazo de control remoto, debido a que el controlador remoto debe de procesar la señal de referencia antes de que la siguiente señal de referencia sea enviada. De manera similar a la estructura directa, se puede implementar un controlador que maneje varios lazos de control de múltiples sistemas con una sola unidad de procesamiento.

4.2. Redes de comunicación

Para la implementación de sistemas de control en red, es necesaria una correcta integración del sistema de control con la red de comunicación elegida. Por ello, es necesario conocer todas las características inherentes a la red elegida, así como los protocolos de planificación que definen propiedades como la prioridad de los paquetes, los retardos de tiempo, la pérdida de paquetes, etc. Los parámetros de tiempo inevitablemente influyen la aplicación de los controladores, y estos son afectados por la tasa de transmisión de datos, el tamaño de los paquetes y el protocolo de comunicación^[30]. Una red de comunicación con aplicación a sistemas de control debe cumplir con los siguientes requisitos^[23]:

- La comunicación entre los controladores, sensores y actuadores, debe tener un período de muestreo fijo, es decir, los datos deben transmitirse de manera continua; por lo anterior se dice que: la tasa de transmisión de los nodos del sistema es alta.
- El tamaño del mensaje es relativamente pequeño, ya que normalmente sólo se transmiten datos numéricos entre los nodos.
- Debido a que los retardos de tiempo tienen serios efectos en el desempeño del sistema, es necesario implementar un control en tiempo real, es decir: los sistemas deben reaccionar dentro de restricciones de tiempo preestablecidas, con el fin de evitar eventos aleatorios que ocurren en el medio ambiente. Por lo anterior, se dice que para el correcto funcionamiento de estos sistemas no sólo depende de la

precisión lógica de los cálculos, sino que también del tiempo que tarda el resultado estar disponible^[16].

Dentro de las redes de comunicación más conocidas, se encuentran los siguientes protocolos: Ethernet (IEEE 802.3), Token Bus (IEEE 802.4), Token Ring (802.5), CAN (ISO 11898) y Wireless (802.11). Para la realización de este trabajo se eligió protocolo Ethernet, por razones que más adelante se expondrán.^[23]

4.2.1. Ethernet

El protocolo de comunicación Ethernet no soporta priorización de mensajes, ni tampoco es un protocolo determinista. Ethernet, usa un mecanismo de detección colisiones (CSMA/CD), mecanismo que ayuda a resolver el problema de contención datos en caso de transmisión de datos simultánea, es decir, si dos nodos transmiten paquetes de manera simultánea, estos colisionan. Si una colisión se detecta, los dos nodos esperan un tiempo aleatorio para reintentar la transmisión. El tiempo aleatorio es determinado por medio del algoritmo de retroceso exponencial binario estándar (BEB); el tiempo de retransmisión es aleatoriamente elegido entre 0 y $2^i - 1$ ranuras de tiempo, donde i indica el i -ésimo evento de colisión detectado por el nodo, y una ranura de tiempo es el tiempo mínimo necesario para una transmisión de ida y vuelta^{[44][23]}.

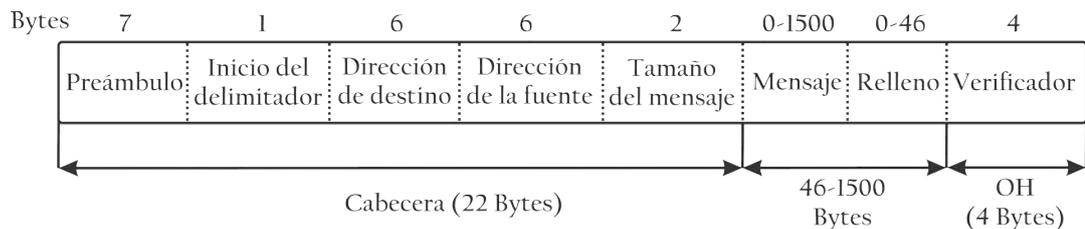


Figura 4.3: Formato de la trama para el protocolo CSMA/CD(Ethernet).

El formato de organización de los datos en protocolo Ethernet, se muestra en la figura 4.3. La cabecera está formada por 22 bytes, el fin de la trama de 4 bytes y el tamaño de los datos a transmitir está entre 46 y 1500 bytes. El tamaño de la trama mínima es de 72 bytes, que incluyen 46 bytes de datos, 12 bytes de las direcciones y fuentes, 4 bytes de verificación de suma, 8 bytes para el preámbulo y el inicio del delimitador. Si el tamaño de los datos transmitidos es una trama menor a los 46 bytes, el campo de relleno es usado para completar el tamaño de datos mínimo. Hay dos razones para la existencia de un tamaño mínimo. Primero: este facilita la distinción entre las tramas válidas y basura. Cuando un transmisor detecta una colisión, trunca la trama actual; lo que significa que pierde bits y partes de la trama. Segundo, previene que un nodo complete la transmisión de una trama corta antes de que el primer bit alcance el final del cable, donde puede colisionar con otra trama. Por lo tanto, el tamaño de paquete mínimo dicta la longitud máxima del cable de red. Para Ethernet de 100 Mbps es de una longitud de 2500 [m] y cuatro repetidores, la ranura de tiempo es de 51.2 [μ s], que es el tiempo requerido para transmitir 64 bytes a 100 Mbps^[44].

Debido a la baja sobrecarga de acceso al medio, Ethernet utiliza un algoritmo simple para la operación de la red y casi no aparecen retardos a cargas bajas en la red.

4.3. Protocolos de comunicación

Los protocolos de comunicación en una red proporcionan una comunicación de extremo a extremo, estos deben ser fiables para asegurar que los datos llegarán al destino sin errores (realizando comprobaciones por medio de sumas de verificación) y en el orden correcto. El protocolo también debe garantizar la ausencia de datos duplicados, así como la sincronización entre los nodos en una conexión, garantizando el envío de datos independientemente de su longitud.

Dos de los protocolos de comunicación más usados son el TCP (Protocolo de Control de Transporte) y UDP (Protocolo de Diagramas de Usuario); cada uno de estos protocolos tienen características predeterminadas que los diferencia del otro.

UDP es un protocolo no orientado a conexión, es decir: cuando un nodo A envía paquetes a un nodo B , el flujo de datos es en una sola dirección. El intercambio de datos es realizado sin una previa confirmación de conexión entre el nodo A y el nodo B , el nodo destino recibirá una ráfaga de datos sin enviar la confirmación al emisor de que el paquete se recibió sin problemas. Por ello, el destinatario no transmitirá datos al emisor, este únicamente sabrá su dirección IP.

Contrariamente a UDP, el protocolo TCP está orientado a conexión, es decir: cuando un nodo A transmite datos a un nodo B , el nodo B es informado de la llegada de un paquete, con lo que se confirma la recepción. En esta parte, intervienen controles de verificación de la integridad de los datos, por medio de algoritmos matemáticos. De esta manera, si los datos recibidos son corruptos, se desechan y el nodo B manda la petición de retransmisión del paquete de datos.

4.4. Retardos de red

Para transmitir una señal continua sobre una red, la señal tiene que ser muestreada, codificada en un formato digital, transmitida sobre la red y finalmente los paquetes tienen que ser decodificados en el lado del receptor. Este proceso es significativamente diferente del proceso de muestreo en un sistema de control digital. El retardo entre el muestreo, el decodificado y recepción suele ser muy variable debido a los retardos de acceso a la red y a los retardos de transmisión; además que estos dependen de las condiciones de la red, tal como la congestión y la calidad del canal.

En muchos sistemas de control en red los datos transmitidos llevan una estampa de tiempo; lo que significa que el receptor puede hacer un estimado de la duración de los retardos y así, hacer una acción correctiva en el sistema. Una de las líneas de investigación en este campo busca caracterizar el máximo límite para el intervalo de muestreo con el cual la estabilidad del sistema puede ser garantizada. Estos resultados, tratan de minimizar la cantidad de paquetes transmitidos para estabilizar el sistema a través de la realimentación y así, reducir la carga en la red.

Los retardos inducidos por la red (NID), ocurre cuando en un sistema de control en red los sensores, actuadores y controladores intercambian datos a través de la red. Dependiendo del protocolo de comunicación estos retardos pueden ser constantes, variables en el tiempo o incluso aleatorios.

4.5. Distribución del sistema experimental en la red

Para la implementación del sistema experimental propuesto en el objetivo, se hizo lo siguiente:

Los nodos del sistema de control distribuido son comunicados por medio de una red Ethernet y una red WiFi de 100 Mbps. La configuración del NCS elegida para la implementación del experimento, fue la estructura directa presentada en la sección 4.1. Para hacer más ilustrativo el desempeño de los controladores, se eligió tener 4 nodos: 3 nodos fijos conectados por medio de Ethernet y uno móvil conectado usando la red WiFi. En la figura 4.4 se muestra la estructura final propuesta para el sistema experimental en red.

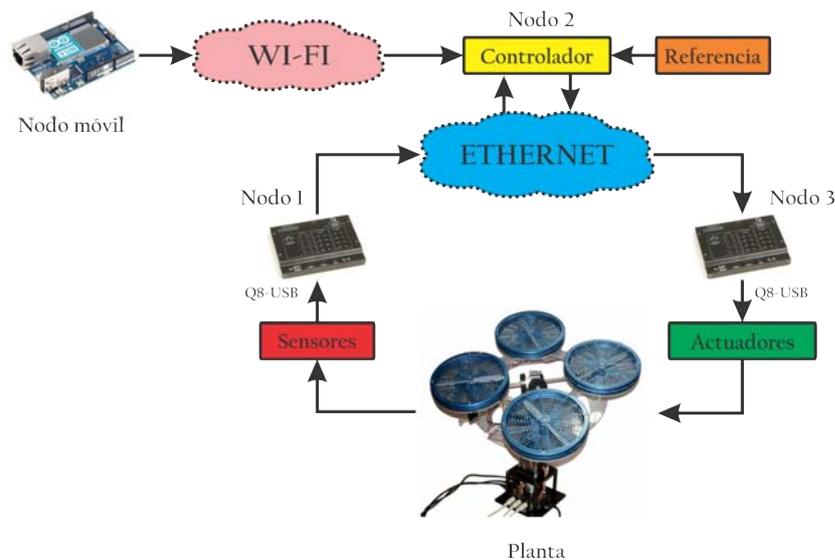


Figura 4.4: Sistema experimental distribuido en red

Los tres nodos fijos conectados a la red Ethernet son computadoras: el Nodo 1 tiene conectados los sensores de la planta por medio de la tarjeta de adquisición de datos Q8-USB, el Nodo 2 contiene el controlador y el Nodo 3 tiene los actuadores de la planta conectados a otra tarjeta Q8-USB, independiente de la primera. Las características de las tarjetas de adquisición de datos se presentan a detalle en el Apéndice B. En la figura 4.5 se muestra el sistema experimental propuesto anteriormente implementado en el laboratorio.

El protocolo de comunicación elegido para comunicar estos nodos en la red Ethernet,



Figura 4.5: Sistema experimental en el laboratorio

fue el protocolo TCP. La distribución de las direcciones IP de los nodos quedó de la siguiente manera:

- **Nodo 1.** IP: 192.168.6.110, Puerto de envío: 17001.
- **Nodo 2.** IP: 192.168.6.190, Puerto de envío: 17002, Puerto de recepción: 17001.
- **Nodo 3.** IP: 192.168.6.192, Puertos de recepción: 17002 y 4545.
- **Nodo móvil.** IP: 192.168.10.123, Puerto de transmisión: 4545.

Para la implementación del nodo móvil se eligió la microcomputadora Arduino Yún debido a su versatilidad, facilidad de programación y a la gran variedad de sensores compatibles con este dispositivo. Como se ve en la figura 4.6, el Arduino Yún cuenta con un microprocesador ATmega 32u4 de ATMEL; que es el encargado de controlar todas las entradas y salidas analógicas, digitales y PWM del dispositivo, y un microprocesador Atheros AR9331, en el cual está cargada una distribución de Linux llamada Linino y la cual es la encargada de controlar el intercambio de datos por Ethernet, WiFi, ranura MicroSD y ranura USB. La única conexión física existente entre el microcontrolador de ATMEL y el microprocesador de Atheros es el puerto serie, es decir, cualquier intercambio de datos que necesite hacerse entre estos dos dispositivos, sólo se

hace por el puerto serie y a nivel byte.

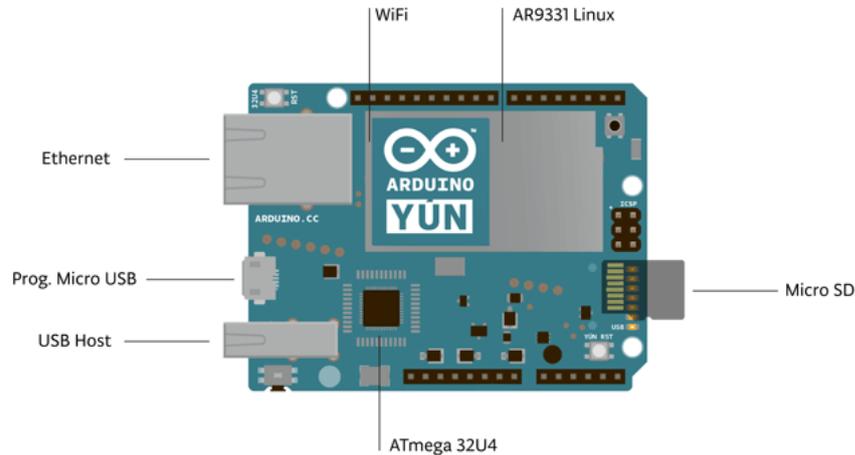


Figura 4.6: Arduino Yún

Para hacer las mediciones de posición se eligió el sensor SEN-10724 de SparkFun de 9 grados de libertad, el cual es una unidad de medición inercial integrada (IMU) por un acelerómetro (ADXL345), un giroscopio (HMC5883L) y una brújula (ITG-3200); conectados por medio del bus I₂C al microcontrolador de ATMEL del Arduino Yún^[40].

El código final realizado para hacer funcionar la unidad de medición inercial, fue resultado de una exhaustiva revisión del código original proporcionado por el fabricante^[40], se calibró el sensor y se hicieron diversas pruebas hasta que el resultado obtenido fue satisfactorio. Aunque la IMU hace 9 mediciones, dentro del código se conjuntan todas estas, con el fin de obtener sólo tres mediciones fiables; que corresponden a los ángulos de roll, pitch y yaw generados por el movimiento del sensor. El código también contiene compensaciones al fenómeno de "drifting", presente en este tipo de sensores y un pre-filtrado de ruido de alta frecuencia.*

Para poder enviar las posiciones angulares medidas con la unidad inercial de SparkFun, al sistema de control en red, primeramente fue necesaria hacer la lectura de los datos en el microprocesador de Atheros para poder enviarlos usando la tarjeta WiFi integrada, para tal efecto, se hizo el envío de datos de la IMU de forma unidireccional. Es decir, transmitiendo en el lado del microcontrolador de ATMEL y recibiendo en el lado del microprocesador de Atheros, por medio del puerto serie. Una vez los datos fueron leídos y tratados para convertirlos a valores enteros, se transmitieron usando la

*Debido a la extensión del código generado en Arduino, este se subió a la web. En caso de se quiera consultarlo, la dirección de acceso es:<https://www.dropbox.com/sh/u1815bh5ijig78h/AAAHT0drzNt7IU9I0zKWUwt6a?dl=0>

tarjeta WiFi por medio del protocolo de comunicación UDP. Esta decisión fue tomada, debido a que lo importante en esta parte del NCS, es un flujo constante de información en el menor tiempo posible, es decir, usando UDP se ahorra el tiempo para las confirmaciones de recepción y la verificación de la integridad de los datos. Todo el proceso anterior está plasmado en el código de Python del Apéndice C.1 y se ejemplifica de una mejor manera en la figura la figura 4.7.

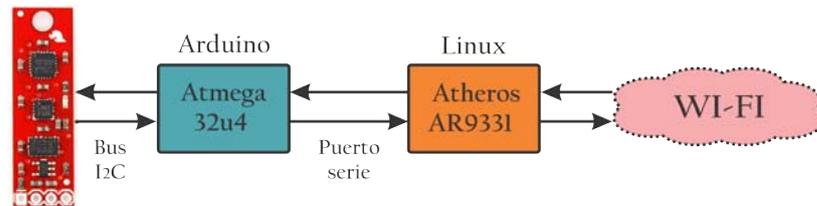


Figura 4.7: Esquema de conexión del Arduino Yún

4.6. Resumen

En este capítulo, se presentó toda la teoría correspondiente a los sistemas distribuido en red. Se comenzó hablando de las definiciones y las líneas de investigación de esta rama del control automático, además de que se presentaron los tipos de configuraciones para los NCS, de las cuales se puede destacar la estructura directa. La cual fue utilizada para la implementación del sistema experimental en este trabajo, es decir, sólo existe un controlador para el sistema, asilado en un nodo.

Se explicó cómo y porqué se eligió hacer la distribución del sistema en 4 nodos, 3 nodos fijos y un nodo móvil. Los nodos fijos consistieron en computadoras conectadas por medio de una red Ethernet y el nodo móvil fue la microcomputadora Arduino Yún conectada por una red WiFi, que a su vez leía datos de una unidad de medición inercial de 9 grados de libertad.

Se explicaron las características de las redes ethernet, los protocolos de comunicación (UDP y TCP), y el efecto de los retardos de tiempo en los sistemas distribuido en red.

Análisis de Resultados

En este capítulo, se presenta una descripción de los resultados, tanto de simulación como de implementación en el sistema experimental. Se hace una comparación entre el controlador LQR difuso, con y sin acción integral, y se propone una explicación del por qué se optó solamente por uno de ellos como controlador final para la planta.

Para demostrar la robustez del controlador, en el sistema experimental se hicieron distintas pruebas: control de regulación con y sin perturbaciones, seguimiento de trayectoria usando una señal cuadrada y una señal senoidal como referencias.

Finalmente, se presenta los resultados de seguimiento de la señal de referencia obtenida de la IMU con el sistema distribuido presentado en la introducción y en capítulo anterior de la presente tesis.

5.1. Resultados de simulación

Para probar los controladores obtenidos antes de llegar a la versión final y definitiva, fue necesaria la construcción de un simulador con el fin de que se hicieran las pruebas necesarias sin riesgo de daño al sistema experimental por una mala sintonización de las ganancias de realimentación, el software elegido fue el paquete de Simulink de MatLab. Para el simulador se utilizó el modelo no lineal de la ecuación (2.58), es necesario destacar que las ecuaciones usadas fueron únicamente las correspondientes a la dinámica rotacional del sistema, y que en su momento; ya se expusieron los motivos por los cuales hizo esta consideración.

En el Apéndice C.4.1, se presenta la estructura final del simulador; el simulador no está distribuido ni cuenta con el nodo de referencia móvil, pero este sirve como un primera aproximación para el análisis de los controladores. En esa misma sección se presenta el bloque que contiene el modelo no lineal del sistema, el cual es necesario para probar que los controladores desarrollados en las Secciones 3.3.4 y 3.4.1, funcionen correctamente en el sistema no lineal.

5.1.1. LQR difuso: seguimiento de trayectoria

Para el primer experimento, se optó por hacer un control de seguimiento; para ello se utilizó una señal cuadrada de $\pm 10^\circ$, con un periodo de $10[s]$. Se optó por la señal cuadrada para esta prueba, debido a los cambios bruscos que se dan en los estados, cuando se pasa del flanco positivo al negativo y viceversa.

En la Figura 5.1, se observa la respuesta de los estados del sistema con la señal antes mencionada. La respuesta del ángulo de roll y de pitch es muy cercana a la referencia; debido a que no existen sobrepasos y el error de seguimiento es casi nulo. A diferencia de los ángulos anteriores, el de yaw presenta sobrepasos en el flanco positivo y negativo; esto se debe a que a partir de cierto valor de K_i , obtenido por la elección de los pesos de Q_i y R para el estado ψ , existe un sobrepaso. Para valores muy grandes de K_i , este estado comienza a presentar oscilaciones sostenidas y esto es debido a la saturación de los actuadores.

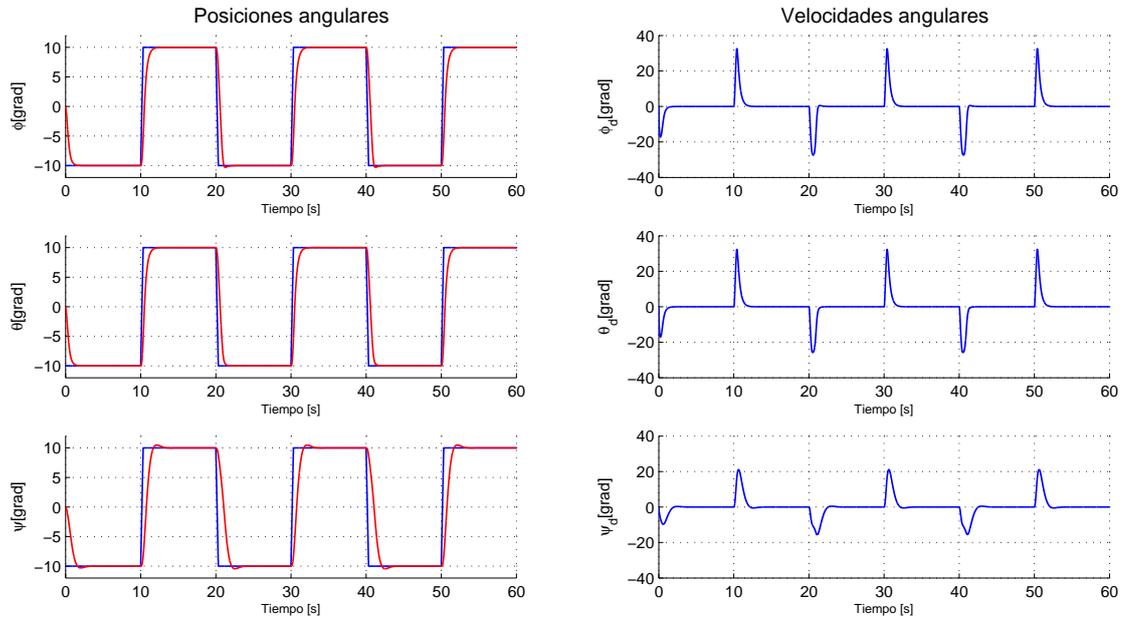


Figura 5.1: LQR difuso: estados del sistema

Como se ve en tiempo de respuesta del estado correspondiente a ψ ; éste es más lento en comparación de los otros dos ángulos. Es por ello que durante la sintonización del controlador que se presenta en la Sección 3.4, se optó por darle un mayor peso al tercer elemento de la diagonal principal de las matrices Q_i , y esto se le atribuye a que en la matriz de inercias presentada en la ecuación (2.45); cuyos valores se presentan en la tabla [3.2], se observa que el valor de la inercia en el eje z (I_{zz}), es mayor que las del los ejes x y y . Lo anterior se traduce en un movimiento más lento alrededor de este eje, ya que la inercia resulta en un una fuerza que se opone al movimiento del sistema.

Si se recuerda lo propuesto en la Sección 3.3.3, los límites de variación para los

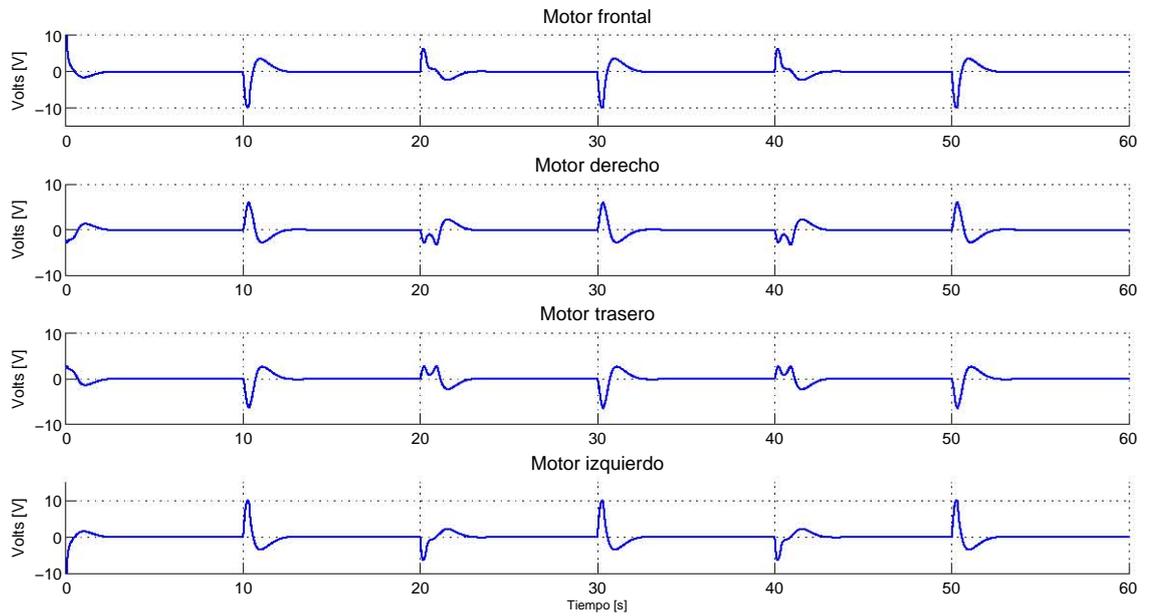


Figura 5.2: LQR difuso: entradas del sistema

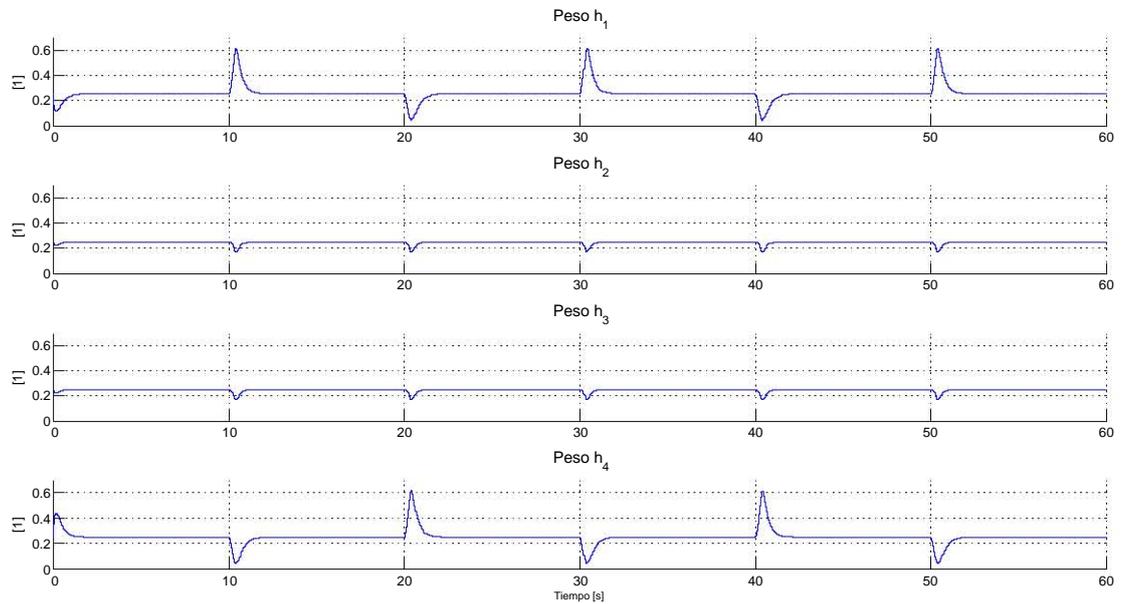


Figura 5.3: LQR difuso: pesos de los subsistemas

estados $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ seleccionados fueron de: $\pm 0.8 \left[\frac{rad}{s} \right] \approx \pm 45 \left[\frac{grad}{s} \right]$. Como se observa en la figura 5.2 estos estados se encuentran dentro del rango variación propuesto, lo que prueba que el controlador fue desarrollado de la manera correcta.

Junto con este análisis, es necesario anexar la figura 5.3; que representa los pesos de los subsistemas que conforman el sistema difuso, aquí claramente se observa cómo cada uno de los subsistemas contribuye de manera individual al controlador final.

5.1.2. LQR difuso + control integral: seguimiento de trayectoria

A pesar de que la simulación realizada en la sección anterior parece ser la solución al problema de control del sistema, en secciones posteriores a esta se explicará el porqué fue necesaria la implementación del control integral para el sistema físico. En la imagen [5.4], se muestra el mismo control simulado en la sección anterior, pero ahora con la acción integral. Aquí se observa que para todos los casos el sobrepaso es más notable, y si se tomara en cuenta únicamente la simulación, el control LQR difuso sin acción integral tiene la mejor respuesta.

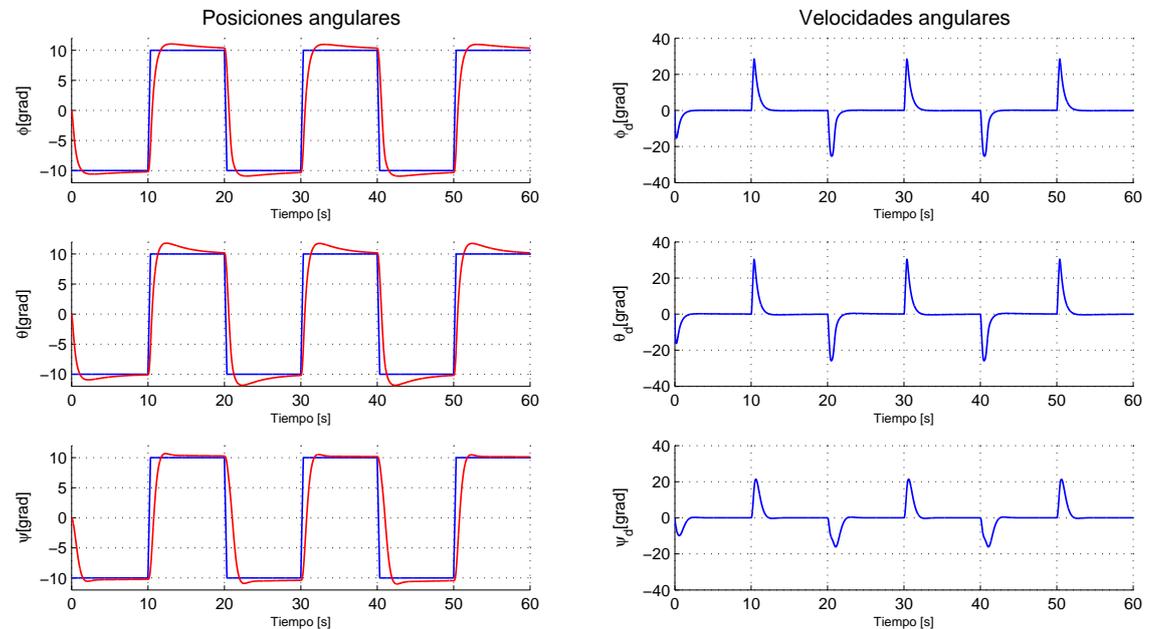


Figura 5.4: LQR difuso + control integral: estados del sistema

Las velocidades angulares (figura 5.4), las ganancias de voltaje de los motores (figura 5.5) y los pesos de los subsistemas (figura 5.6): tienen una respuesta idéntica a la del control anterior; por lo tanto, no tiene caso la mención de las características de las gráficas presentadas, dado que son las mismas que las expuestas en la sección inmediata anterior.

5.2. Resultados experimentales

Una vez que las ganancias del controlador fueron sintonizadas adecuadamente, fue necesario proceder con las pruebas en el sistema experimental, mismo que se describe

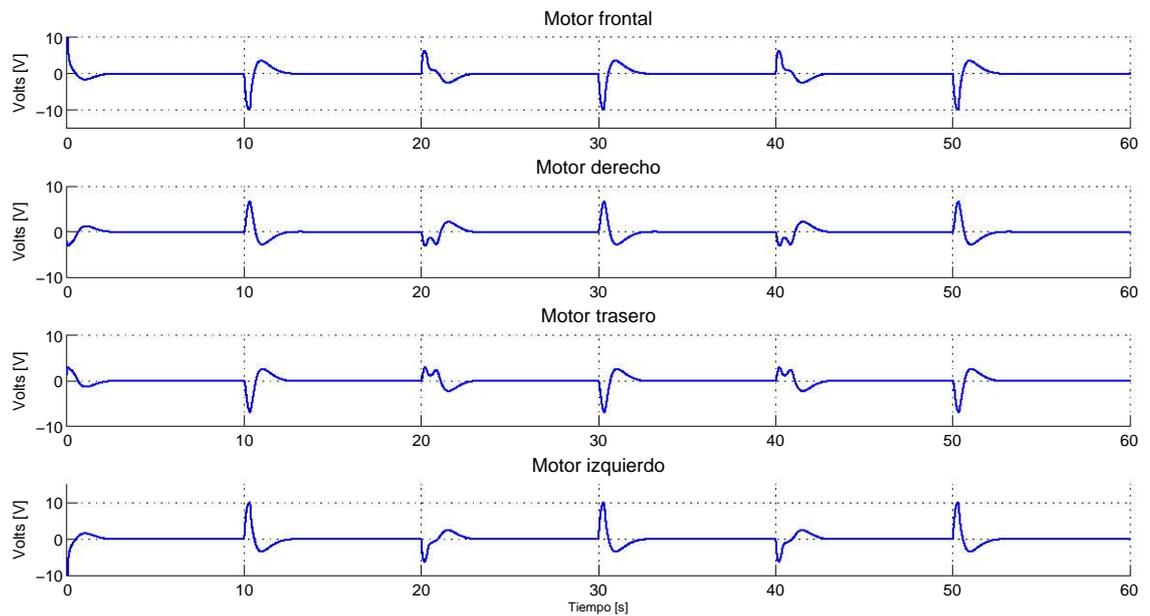


Figura 5.5: LQR difuso + control integral: entradas del sistema

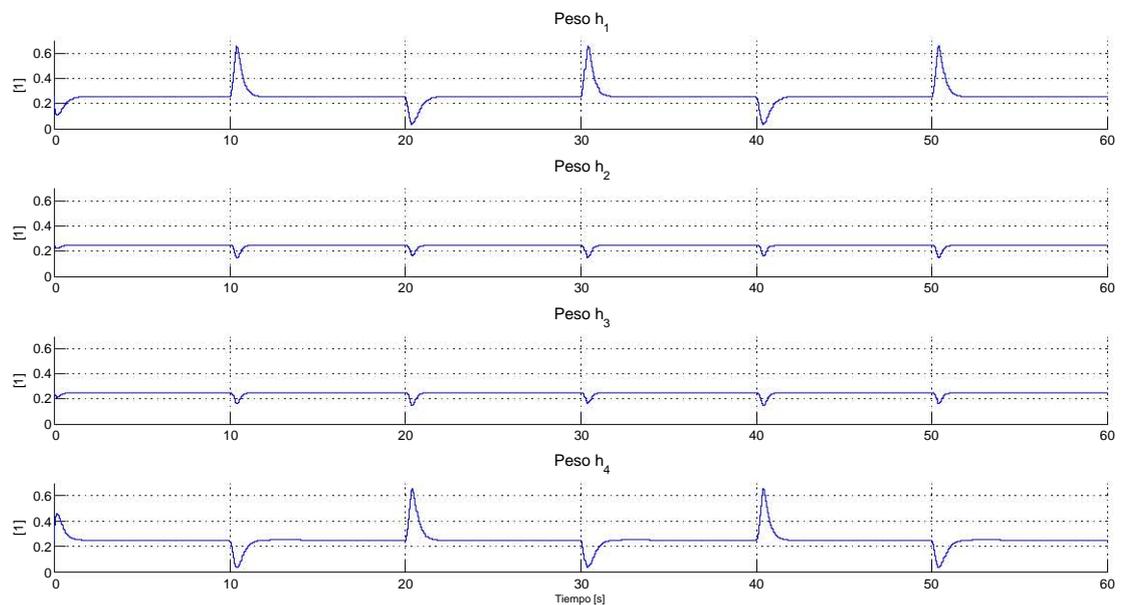


Figura 5.6: LQR difuso + control integral: pesos de los subsistemas

más a detalle en el Apéndice B y en el capítulo inmediato anterior. Al igual que el simulador, la implementación del algoritmo de control se hizo en Simulink. Por lo anterior, usando la configuración del sistema distribuido descrito en la Sección 4.5 se hacen las pruebas a presentarse. Cabe destacar que todos los experimentos aquí realizados

se hicieron con la red sin carga, es decir, esta se usó únicamente para las pruebas del sistema; no había nodos ajenos transmitiendo información durante la experimentación.

5.2.1. LQR difuso: regulación

Primeramente, para probar el desempeño del control LQR, se hizo un control de regulación en $10[^\circ]$ para roll, pitch y yaw. En la figura 5.7 se muestra el resultado obtenido, lo más destacable de la respuesta, es que el error en estado estacionario que presentan los tres estados es constante, siendo el ángulo de pitch el del mayor error. A simple vista esto parece ser un problema de la sintonización de las ganancias de realimentación. En lo que concierne a las velocidades angulares, estas se mantienen muy por debajo del rango propuesto para las variables difusas.

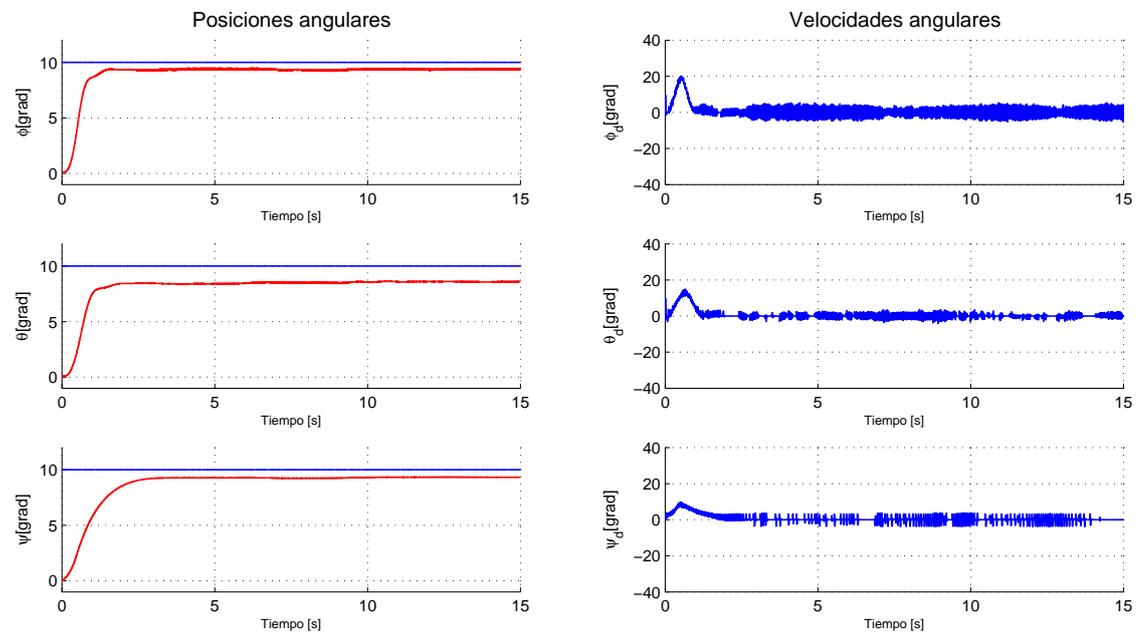


Figura 5.7: LQR difuso: regulación

Para solucionar el problema del error en estado estacionario, correspondiente a las posiciones angulares del sistema, se optó por modificar los valores de Q_i y R_i , esto con el fin de aumentar el valor de las ganancias de realimentación K_i . Esta alternativa no funcionó correctamente, si bien el problema de regulación se resolvió con aumento de K_i , los estados de posición comenzaban a oscilar ya que las ganancias eran muy grandes, además de que los voltajes de excitación de los motores comenzaron a alcanzar picos de $24[V]$. Como lo que se pretende en este trabajo es prolongar el tiempo de vida útil de los motores, es necesario no trabajarlos a su máxima potencia durante tiempos prolongados; por lo anterior, fue necesario buscar una alternativa para la solución de este problema.

Basando en la conocida teoría de PID's, se sabe que una de las bondades de la parte integral de este tipo de controladores; es la minimización del error en estado

estacionario^[32]. Por lo tanto, se hizo uso de la teoría de control integral desarrollada para sistemas en espacio de estados descrita en el Capítulo 3, en donde las ganancias de Q_{a_i} y R_a necesarias para obtener la K_i que minimice los errores en estado estacionario fueron sintonizadas experimentalmente.

5.2.2. Comparación: LQR difuso y LQR difuso + control integral

Habiendo desarrollado el control LQR difuso con acción integral, se procedió a probar su desempeño real; comparándolo con el planteado originalmente. En la figura 5.8 se pueden observar ambas respuestas, donde claramente se ve un mejor desempeño por parte del que si tiene acción integral, frente al que no. En este caso, no fue necesario modificar los pesos de Q_i correspondientes a los estados originales del sistema; por lo que las ganancias excitación de los motores obtenidas no fueron elevadas y la ventaja de esto, es que al no trabajar con los motores a su máxima potencia se está logrando el cometido de prolongar su vida útil.

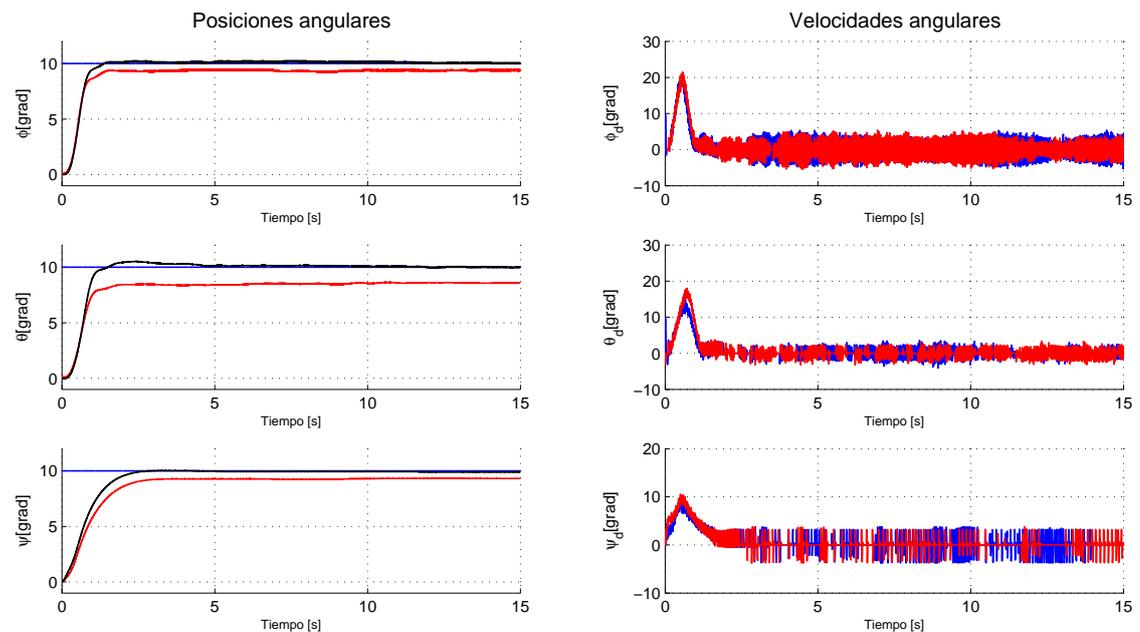


Figura 5.8: LQR difuso y LQR difuso + control integral: comparación

5.2.3. LQR difuso + control integral: seguimiento de trayectorias

Para asegurar un desempeño robusto del controlador, se hicieron 2 pruebas de seguimiento de trayectorias usando señales distintas. La primera consiste en un seguimiento de una señal cuadrada de período $\tau=20[s]$, y cuyos resultados se muestran en la figura 5.9. Como se puede observar, el controlador tiene una respuesta bastante rápida para hacer el cambio de flanco positivo a negativo y viceversa, además de reducir el error

en estado estacionario de una excelente manera. Se pueden observar pequeñas perturbaciones en los estados para tiempos $t = n\frac{\tau}{3}; n = 1, 2, 3, \dots$; causadas por el cambio de los otros estados. Estas perturbaciones son más visibles en la gráfica correspondiente al ángulo de pitch (θ), por ejemplo: si se regresa a la ecuación (2.58), claramente se ve que la posición angular ϕ depende de la integral doble del producto de $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ y una constante, y de manera similar para los otros estados. Entonces, si alguno de los estados θ o ψ , o incluso si los dos cambian muy rápidamente (que es lo que se desea en el caso de la señal cuadrada), inducirán un cambio rápido en ϕ ; lo que se traduce en las perturbaciones internas observadas. Aunque cuando estas ocurren el error en la señal sea muy cercano a cero, el sistema requiere de un pequeño tiempo para rechazar esta perturbación. Para encontrar un equilibrio entre rapidez de respuesta del sistema y una reducción al mínimo valor de las perturbaciones internas, se fueron modificando los valores de la diagonal de Q_{a_i} experimentalmente, hasta llegar a una respuesta satisfactoria, que es la que se muestra en la figura 5.9.

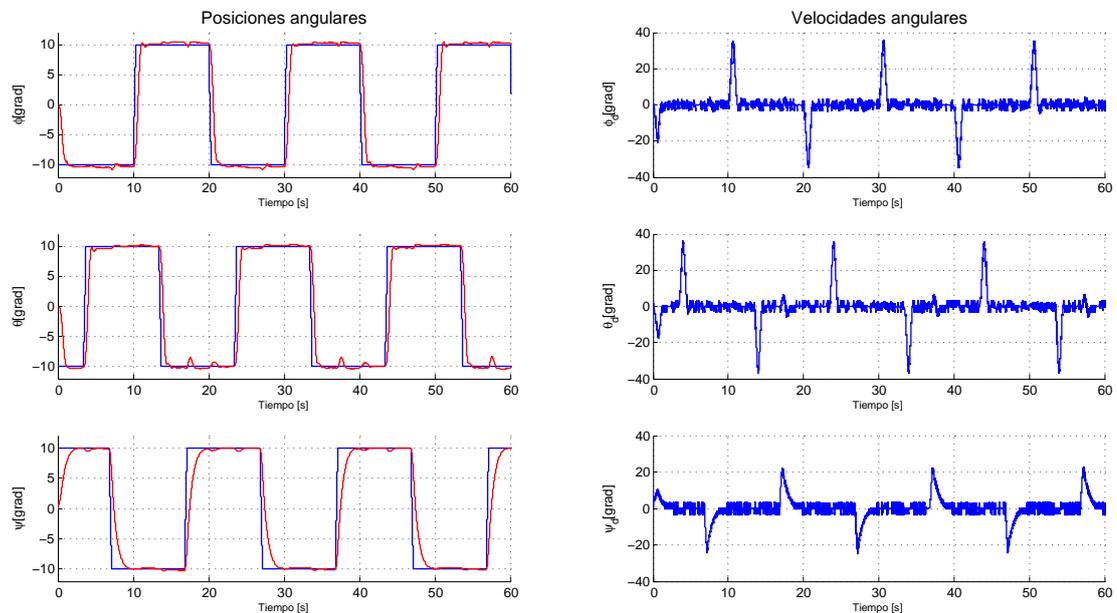


Figura 5.9: LQR difuso + control integral: seguimiento de señal cuadrada

En lo correspondiente a las velocidades angulares, y a las cuales no se les hace ningún tipo de control, se observa que los picos máximos varían muy por debajo del rango propuesto durante la elaboración del controlador difuso. La buena elaboración del controlador y la correcta sintonización de las ganancias de realimentación; le añadieron robustez al sistema.

Con respecto a las ganancias de excitación de los motores en la figura 5.10, se observa que generalmente estas se mantienen por debajo de los $10[V]$, y que además existen pequeños picos que superan este valor por muy poco, con lo que se garantiza un gasto de energía mínimo. También se anexan las gráficas correspondientes a los pesos de los subsistemas, y que como se hizo anteriormente, se muestran con el fin de que se vea cómo es que contribuye cada uno de los subsistemas lineales para la suma del controlador total. En el caso de este experimento, se observa como cada uno de los subsistemas

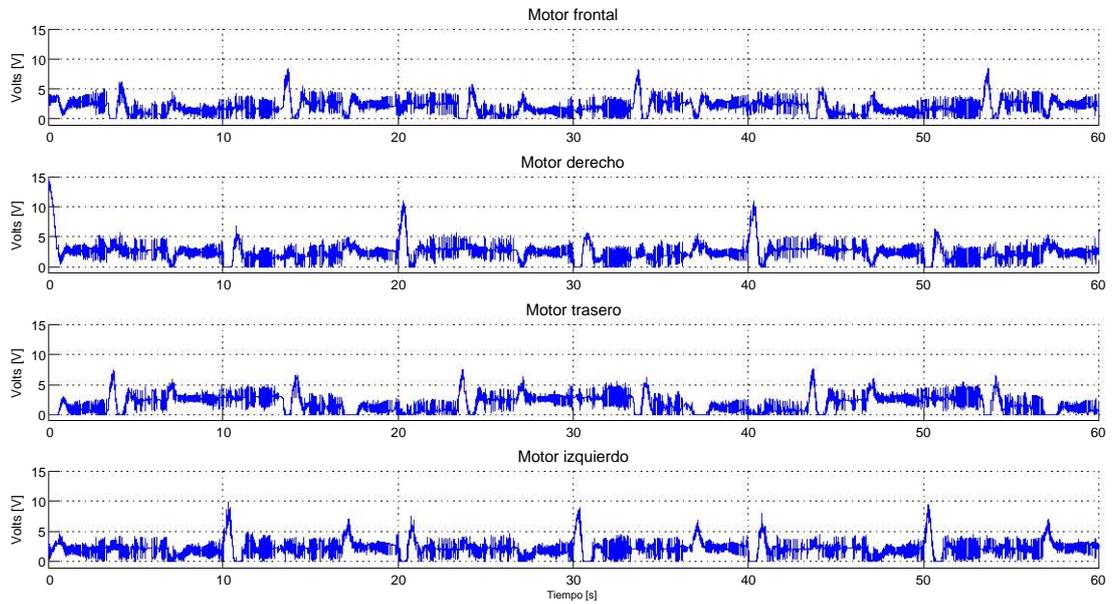


Figura 5.10: LQR difuso + control integral: salidas del sistema

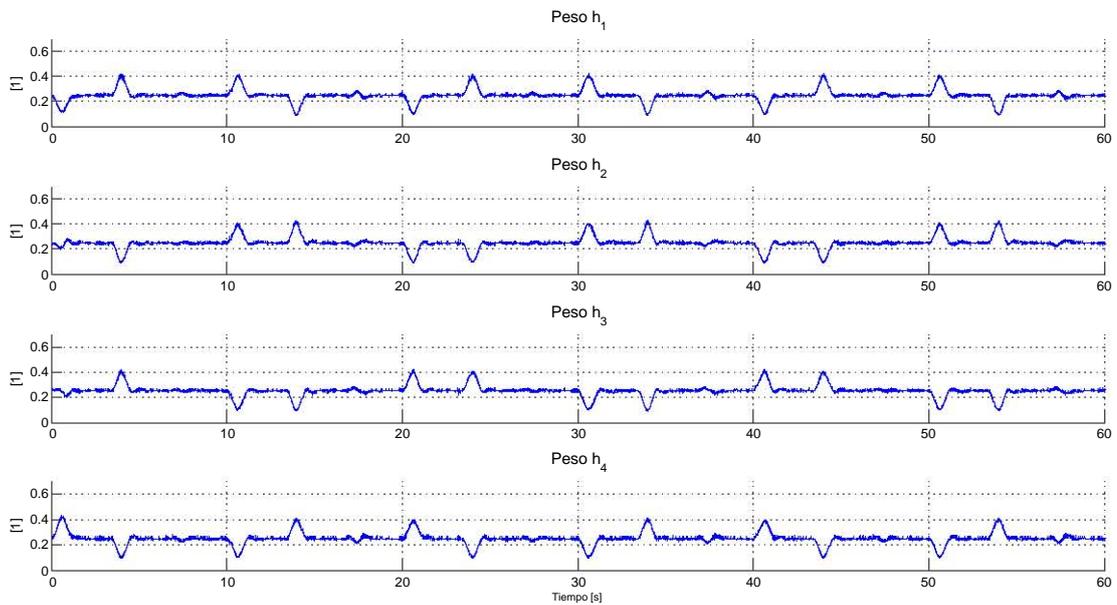


Figura 5.11: LQR difuso + control integral: pesos de los subsistemas

aporta equitativamente una parte para la obtención de la ganancia de realimentación total. Esto es más claro al momento que se dan los cambios de flanco en la señal, como se ve figura 5.11.

El segundo experimento implementado fue hecho con una señal senoidal de periodo $\tau=20[s]$, esto permitió un desempeño más suave del controlador. La respuesta del

sistema que se ve en la figura 5.12 muestra una respuesta sin perturbaciones internas generadas por los estados, caso contrario del experimento anterior; aquí, la señal senoidal es reproducida a la perfección y de no ser por el pequeño desfase de aproximadamente $0.3[s]$ para roll y pitch, y de $1[s]$ para yaw, la señal de la respuesta del sistema se superpondría con la de referencia. Este desfase se le atribuye a la velocidad de respuesta del sistema y como se ha venido mencionando, si se aumentaran las ganancias de K_i se elimina parte del desfase con el desventaja de que aparecen oscilaciones en la estructura del sistema por la potencia de los motores.

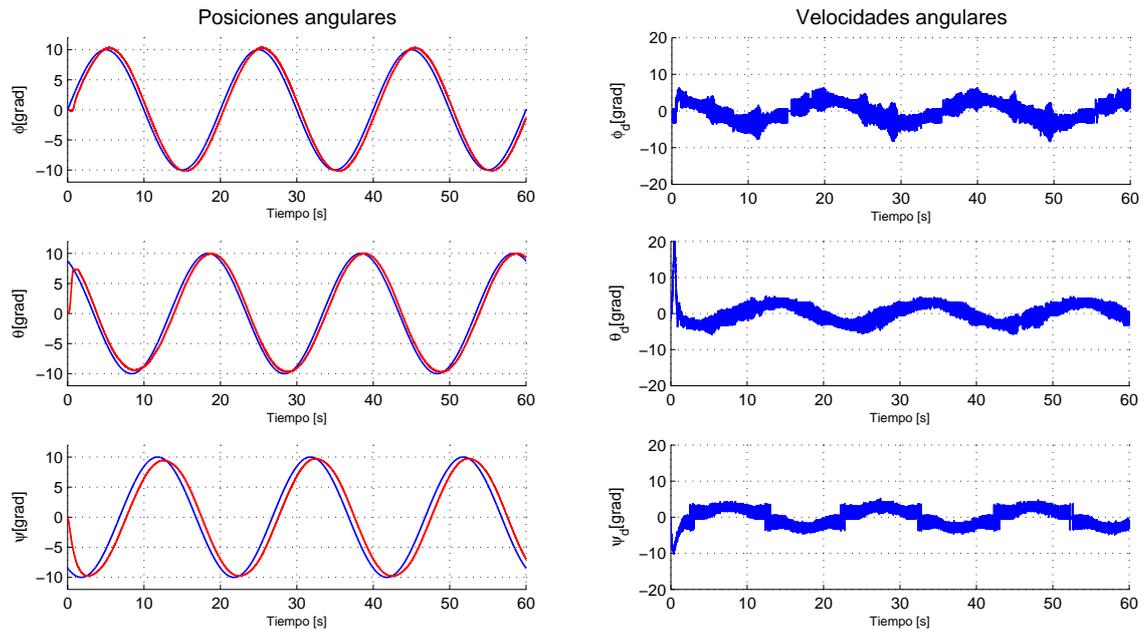


Figura 5.12: LQR difuso + control integral: seguimiento de señal senoidal

Como ya se dijo, uno de los aspectos importantes al evaluar un controlador es el gasto energético necesario para que este cumpla su acción. Debido a que en el seguimiento de la señal senoidal las variaciones de estado son muy lentas; las ganancias de los motores se mantienen abajo de $5[V]$, salvo el pico de voltaje inicial que presenta el tercer motor, ver figura 5.13.

Al igual que los pesos de los experimentos anteriores, en la figura 5.14 se observa una participación de todos los subsistemas durante el tiempo de funcionamiento de experimento. El uso del controlador difuso para la solución del problema de control del sistema, tuvo una respuesta bastante superior a la obtenida con un controlador LQR simple, pruebas experimentales demostraron esto, a pesar de que estas no se anexan aquí, ya que este no es el objetivo de este trabajo.

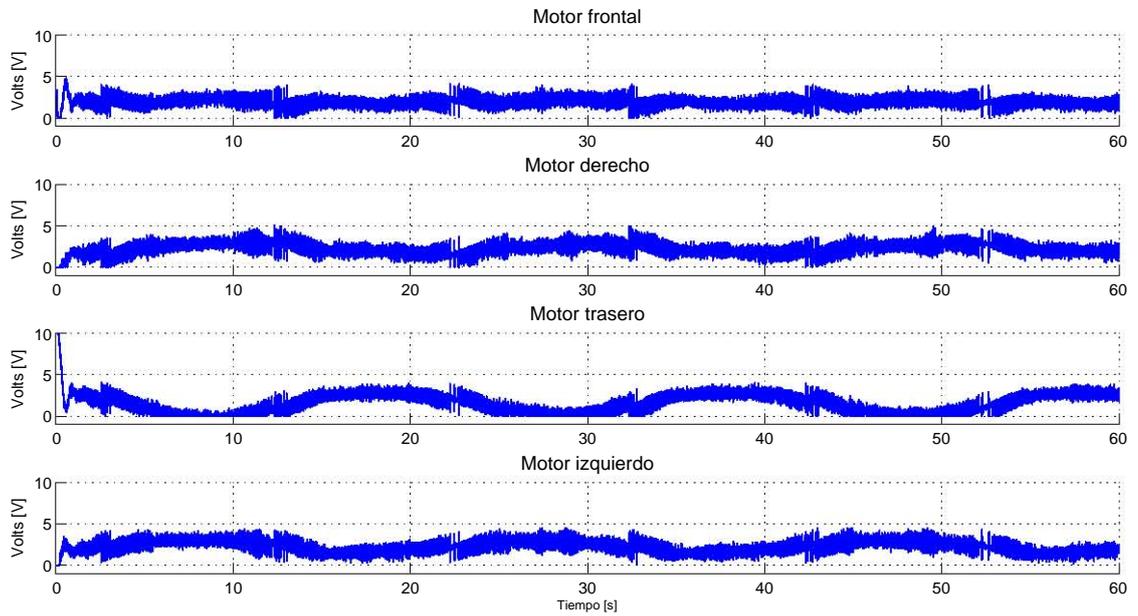


Figura 5.13: LQR difuso + control integral: salidas

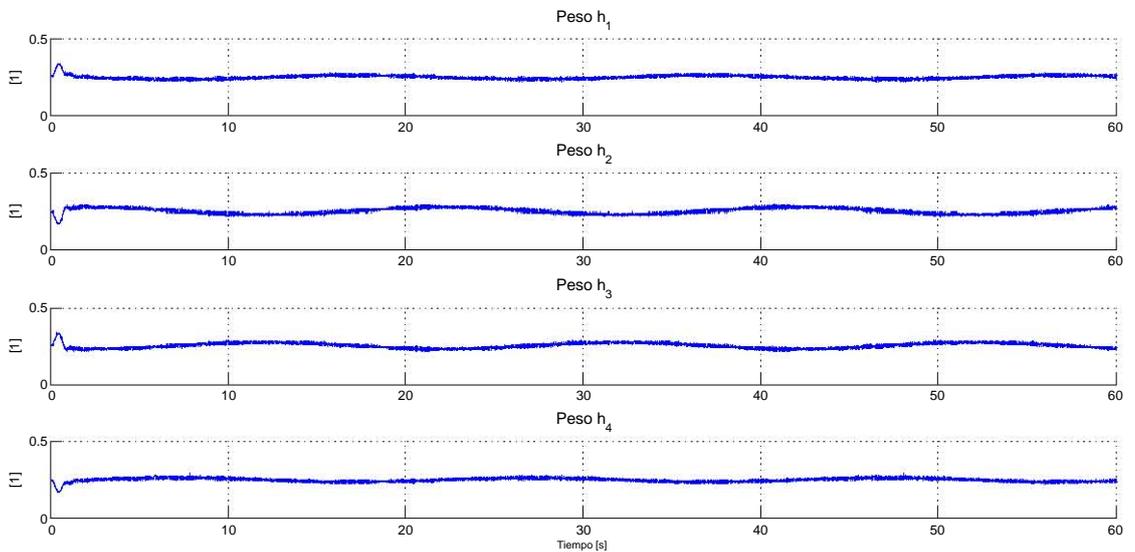


Figura 5.14: LQR difuso + control integral: pesos de los subsistemas

5.2.4. Rechazo a perturbaciones externas e internas

De acuerdo al análisis que se hizo en secciones anteriores, se vio que las perturbaciones internas generadas por los cambios en los estados son inevitables por la propia

dinámica del sistema. Por lo tanto, se optimizó el algoritmo de control correspondiente, para tratar de reducir las perturbaciones internas a un valor mínimo sin comprometer el desempeño del sistema; el resultado obtenido fue bastante favorable.

El otro tipo de perturbaciones a que se debe de enfrentar un sistema de control, son las perturbaciones externas; las cuales ocurren aleatoriamente y en la mayoría de los casos, su magnitud también es aleatoria. En la figura 5.15 se presentan los resultados de un control de regulación en $0[^\circ]$ para los tres estados. Se perturbó físicamente el sistema cada ciento tiempo y con diferentes magnitudes. Aún en este experimento, la velocidad sigue manteniéndose dentro del rango.

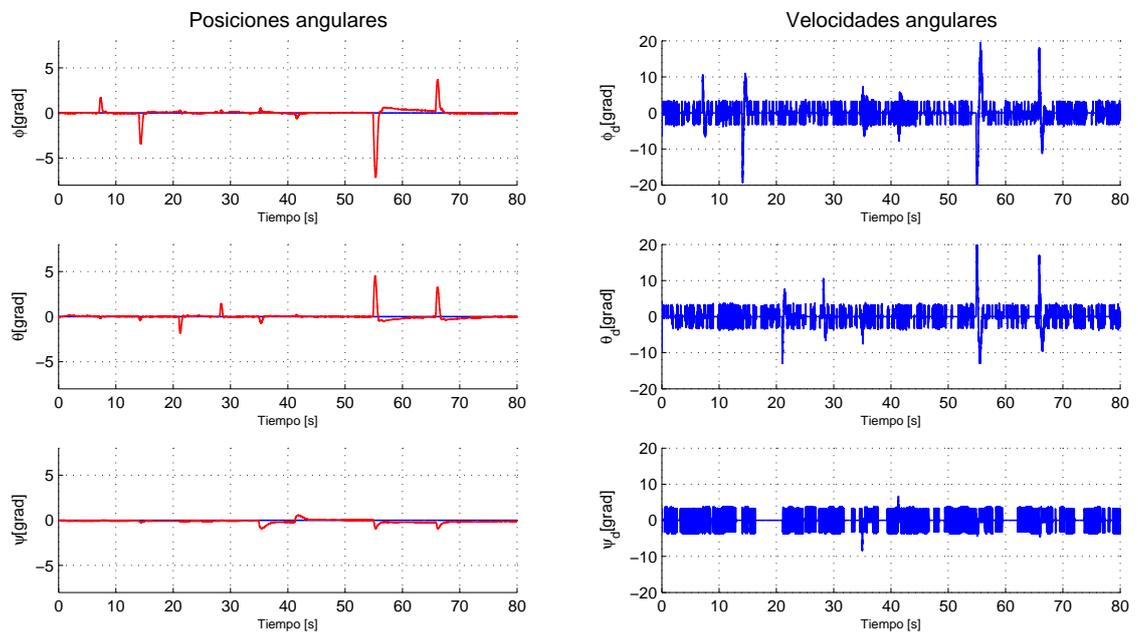


Figura 5.15: LQR difuso + control integral: perturbaciones externas

En la gráficas que presentan la respuesta del sistema, se ve como la respuesta en los estados del sistema cambió rápidamente para rechazar las perturbaciones aplicadas a la planta. En la mayoría de los casos, el tiempo para rechazar la mayor parte de la perturbación está por debajo de los $2[s]$.

5.2.5. Seguimiento de la trayectoria del nodo móvil

En las figuras [5.16] y [5.17], se muestran los resultados obtenidos para dos experimentos realizados usando el nodo móvil como referencia. El primero consistió en hacer un seguimiento para el ángulo de roll proporcionado por la IMU, los ángulos de pitch y de yaw fueron fijados a cero. En la figura 5.16, se observa cómo el controlador logró seguir la señal de referencia sin ningún problema, incluso con un rango de variación entre $\pm 45[^\circ]$. Aquí se permitió este rango de variación grande, debido a que los cambios en la señal de entrada no son tan agresivos, como lo son; los de una señal cuadrada.

Además, al ser el usuario quien controla de manera externa el movimiento de la planta; por medio de realimentación visual, se puede cambiar fácilmente la dirección de movimiento del sistema en caso de cualquier de que surja algún problema. Los ángulos de roll y de pitch permanecieron muy cercanos al valor de referencia establecido, únicamente teniendo variaciones de 1° , como máximo. Lo anterior, permite concluir que el desempeño del controlador diseñado usando nodo móvil, es bastante bueno.

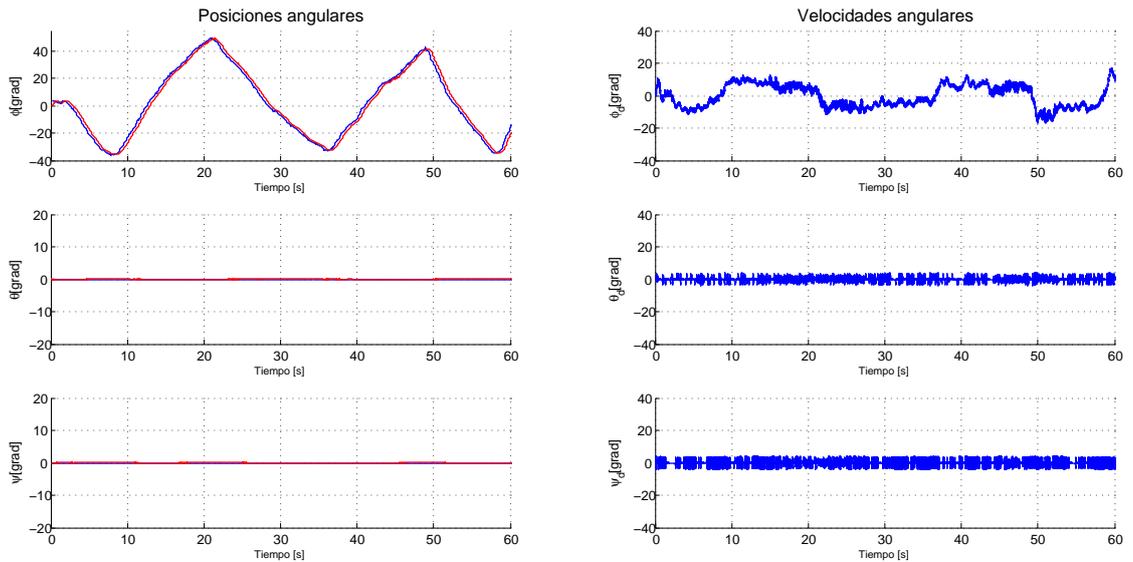


Figura 5.16: Seguimiento del nodo móvil para un estado

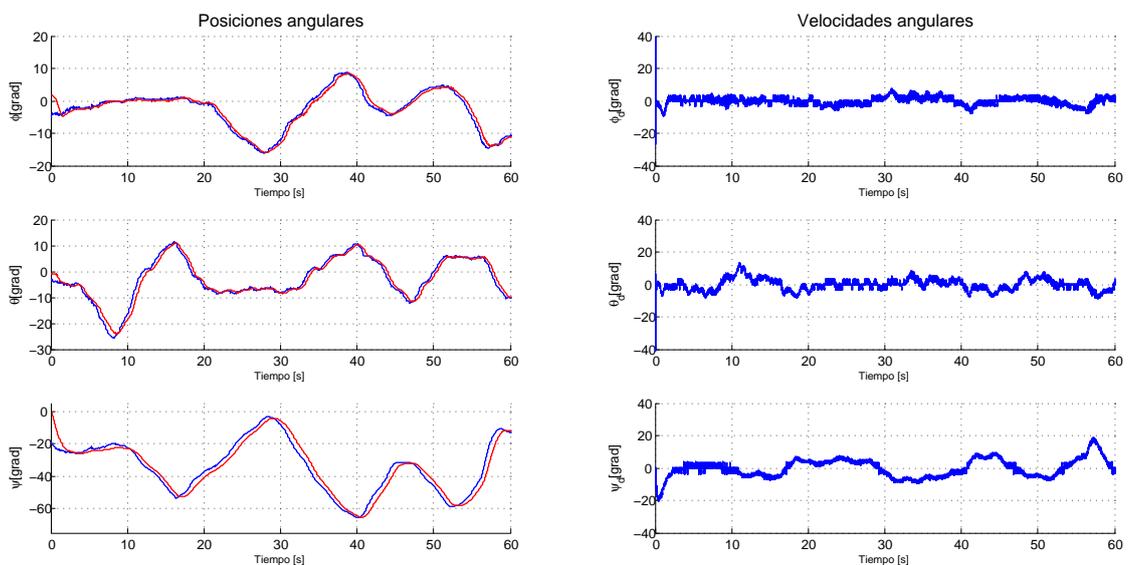


Figura 5.17: Seguimiento de los tres estados del nodo móvil

A diferencia del experimento anterior, en el de la figura 5.17 se hizo un seguimiento

de trayectorias para todos los estados de posición angular del sistema, si bien el rango de variación es menor, el controlar estos estados al mismo tiempo, no compromete el desempeño global del sistema. Como se ha venido explicando, el ángulo de yaw es más lento que los otros dos, es por ello que la respuesta de este ángulo está mínimamente desfasada con respecto a la referencia. En lo que concierne a las velocidades angulares, estas siempre se mantuvieron por debajo del valor máximo propuesto en el Capítulo 3.

Es necesario mencionar, que aunque al transmitir la señal de referencia a través de la red WiFi, se está induciendo un retardo de tiempo, y que a su vez se suma a los ya generados por la transmisión Ethernet; el retardo total no comprometió el desempeño del sistema, puesto que si este hubiera sido el caso, el sistema hubiera perdido estabilidad. Este experimento, es la conjunción de todo lo desarrollado a lo largo de este trabajo, demostrando así, que los objetivos fueron cumplidos de manera satisfactoria.

5.3. Resumen

Inicialmente se había planteado únicamente el control LQR difuso para la solución del problema de control de la planta, debido a su excelente desempeño mostrado en las simulaciones; sin embargo, una vez probado en el sistema experimental los resultados no fueron satisfactorios, debido a que el error en estado estacionario era relativamente grande. La solución a este problema fue la adición de un control integral en su forma de espacio de estados a el control difuso que ya se había diseñado; el desempeño mejoró en gran medida al lograr reducir el error en estado estacionario a cero.

El controlador mostró un excelente desempeño en las pruebas de rendimiento, de no ser por las perturbaciones internas propias del sistema, el seguimiento hubiera sido más cercano al deseado. En los artículos en los que se ha trabajado con este tipo de sistemas de tres grados de libertad únicamente se hacen pruebas de simulación y cuyo comportamiento es totalmente diferente al sistema experimental. Otro tipo de pruebas son hechas únicamente con un estado de la dinámica rotacional, es decir, cuando se fijan los otros estados en una referencia no se está induciendo la perturbación interna que se observó en los experimentos realizados. Por tal motivo, es necesario controlar los tres estados al mismo tiempo, esto demuestra la robustez del controlador propuesto. En otros casos, en los que el rango de pruebas varía entre valores muy pequeños como $\pm 2^\circ$, es necesario que las transiciones sean más grandes, como lo fue en los experimentos realizados para observar posibles problemas de estabilidad del sistema.

La adición del nodo móvil al sistema distribuido no comprometió el desempeño del mismo, puesto que la señal generada por la unidad de medición inercial y transmitida a través de la red WiFi se reprodujo de la misma manera que las señales cuadrada y senoidal generadas internamente.

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

En este trabajo se probaron de manera experimental dos nuevos algoritmos de control LQR difuso distribuidos en un sistema en red; los resultados obtenidos fueron altamente satisfactorios, incluso superando a otras pruebas realizadas en otros trabajos con el mismo sistema, pero con distintas técnicas de control.

Antes de comenzar a desarrollar y evaluar los algoritmos de control, se enfrentó al problema de modelos matemáticos erróneos y con desarrollos ambiguos presentados en la literatura. Por tal motivo, la primera meta de este trabajo fue desarrollar un modelo matemático fiable, que describiera de una buena manera el sistema analizado y que su desarrollo fuera claro para lectores familiarizados con o no el tema. Para el proceso de obtención de las ecuaciones dinámicas, siempre se siguió un estricto orden, además de una buena anexión y referenciación de los recursos matemáticos necesarios para su completo entendimiento.

Como se explicó en su momento, el desacople de la dinámica rotacional del sistema se hizo con el fin de ajustar el modelo dinámico a la planta utilizada en este trabajo; la cual solo tiene tres grados de libertad. La decisión de presentar el modelo completo se hizo con base en el trabajo futuro que se está y se va desarrollar, y que en párrafos posteriores se tratará con más detalle. Esta tesis también servirá como referencia para trabajos de otros autores que trabajen con sistemas similares.

Con el modelo desacoplado obtenido, se realizó de manera satisfactoria la construcción del modelo difuso por medio del llamado método de Takagi-Sugeno, mismo que quedó en función de las velocidades angulares $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$. A partir de la obtención del modelo difuso, se optó por funciones triangulares para la obtención de las funciones de membresía, las cuales tuvieron un excelente desempeño en los cambios entre subsistemas, como se mostró en el capítulo de resultados.

Aunque normalmente en el método de Takagi-Sugeno, la obtención de las ganancias de realimentación para los subsistemas difusos se basa en los LMI's, en este trabajo se optó por usar el LQR. Gracias a esta elección, se logró la obtención de unas ganancias

realimentación que permitieron una respuesta rápida del sistema, además de un consumo de energía relativamente bajo por parte de los actuadores. Los LMI's únicamente se utilizaron para la aplicación del teorema de Lyapunov para sistemas difusos, y así dar un sustento matemático del porqué el controlador propuesto funcionó de manera eficiente.

Inicialmente la estrategia de control basada en control LQR difuso fue planteada para controlar el sistema. Pruebas posteriores demostraron que el desempeño de este controlador no fue el adecuado, puesto que el error en estado estable no tendía a cero en tiempo finito. Por lo anterior, se optó por añadir la acción integral al controlador, con lo que la respuesta del sistema mejoró en gran medida, es decir, se eliminó el problema de error en estado estable y se añadió robustez ante perturbaciones al sistema.

De los dos algoritmos de control propuestos en este trabajo, únicamente el controlador LQR difuso con acción integral cumplió el objetivo de controlar el sistema de manera satisfactoria. Se hicieron gran cantidad de pruebas para demostrar esto; regulación, seguimiento de una señal senoidal y una señal cuadrada, además del seguimiento de la señal proporcionada por el nodo móvil. Todas las respuestas presentadas fueron satisfactorias, ya que las señales de referencia se reproducen fielmente en los estados controlados del sistema. Es importante destacar la existencia de pequeñas perturbaciones internas provocadas por los rápidos cambios de los estados; mismas que se observaron en las pruebas con la señal cuadrada. Se trató que estas fueran mínimas con un ajuste de las ganancias de realimentación, sin comprometer el desempeño del sistema.

En lo que respecta al sistema distribuido, se implementó de manera eficaz un sistema en red usando la estructura directa, distribuyendo sensores, actuadores y controlador en distintos nodos. Las pruebas realizadas en el modelo experimental tuvieron un excelente desempeño, es decir, no se presentaron retardos de tiempo considerables, puesto que las pruebas se hicieron con una carga de red baja, además de que dada la capacidad de flujo de datos de la red (100 Mbps), es muy improbable -pero no imposible- que esto suceda. Una de las posibles mejoras que se le podría hacer al sistema, es la inclusión de los retardos de tiempo en la dinámica del sistema y el controlador LQR difuso, con el fin de hacerlo robusto ante la presencia de los retardos de tiempo a cargas altas en la red.

Otra de las aportaciones de este trabajo, fue la adición del nodo móvil al sistema distribuido. Con esta implementación se consolida un nuevo prototipo de comunicación en tiempo real a través de una red WiFi; el cual también es fácilmente aplicable a Ethernet. Con esta propuesta se pueden leer y escribir datos en sensores y actuadores específicamente construidos para la plataforma Arduino; y estos a su vez pueden ser transmitidos a otros dispositivos para su análisis, modificación u obtención de otros datos. Todo lo anterior usando de la arquitectura de comunicación en red ya desarrollada en Linux.

De manera general, los objetivos planteados al inicio de este trabajo se cumplieron de manera satisfactoria y se espera que los experimentos realizadas sirvan como base para el desarrollo de futuros experimentos y sistemas en el campo de estudio.

6.2. Trabajo futuro

Dentro lo sistemas que se está desarrollando y se desarrollará como consecuencia de esta tesis están:

- Debido a que los resultados obtenidos para el sistema distribuido en red fueron altamente satisfactorios con la red a una sobrecarga baja, para el mismo sistema, el siguiente paso será modificar el controlador propuesto para hacerlo robusto ante los retardos de tiempo presentes a altas sobrecargas de red. Una de las propuestas es desarrollar un control con base en las frecuencias de transmisión de los nodos; el cual consistirá en hacer una análisis de la mínima y la máxima frecuencia de transmisión posibles para cada nodo, junto con una correcta priorización para cada nodo, de acuerdo a su importancia para el sistema. Lo anterior con el fin de que el controlador varíe la frecuencia de transmisión de cada nodo conforme se de la evolución en la sobrecarga en la red.

Otra opción es hacer una análisis de los retardos de tiempo, es decir, tratar de medirlos y/o predecirlos, y habiéndolos acotado, incluirlos dentro de la dinámica del sistema. Lo anterior con el fin de desarrollar un controlador que se ajuste según los retardos vayan apareciendo y evolucionando, siempre buscando el mejor desempeño del sistema. Para la implementación de las propuestas anteriores: se seguirá empleando la técnica de control propuesta y utilizada en este trabajo, ya que los resultados obtenidos fueron ampliamente satisfactorios.

- En el Capítulo 2 se desarrolló el modelo matemático para un cuadricóptero de seis grados de libertad. Aunque al final se desacoplaron únicamente los tres estados correspondientes a posiciones angulares, se pensó en dejar el modelo completo; ya que a corto plazo se estará trabajando con un sistema como el que originalmente se modeló. En la figura 6.1 se muestra el cuadricóptero de seis grados de libertad que se planea controlar; actualmente ya se tienen caracterizados los parámetros físicos del sistema. Además, basado en lo realizado en este trabajo, ya se desarrolló el sistema y el controlador difuso, el cual únicamente se ha probado en simulación.



Figura 6.1: Cuadricóptero Elev-8 de Parallax

La aplicación que se le dio a la microcomputadora Arduino Yún, en este trabajo, también fue pensada para una aplicación inmediata en el cuadricóptero de 6DOF. Como el código correspondiente a la comunicación a través de la red WiFi; es únicamente unidireccional, será necesario modificarlo para hacerlo bidireccional, es

decir; se obtendrán los datos con el mismo sensor empleado en este trabajo y estos se transmitirían a un nodo fijo a través de la red WiFi. Una computadora se usará como nodo fijo, ya que a comparación de la microcomputadora su poder de procesamiento es muchísimo mayor, además que la memoria de almacenamiento del Arduino es limitada. Con las ganancias de realimentación ya calculadas por el controlador, se regresarán a través de la red para así, escribirlas a los motores. Lo anterior permitirá programar algoritmos más complejos y robustos, o diciéndolo de otra manera se usará la microcomputadora únicamente como tarjeta de adquisición de datos. Según explicó en la sección de trabajo relacionado, no existen sistemas de este tipo actualmente desarrollados. El nuevo sistema distribuido propuesto queda como se observa en la figura 6.2.



Figura 6.2: Nodo móvil

- Una vez que se logre implementar el sistema propuesto en el punto anterior; una excelente aplicación será agregar más nodos móviles al sistema distribuido y hacer la realimentación de las posiciones por medio de un sistema de visión por cámaras, como se observa en la figura 6.3. Además, que con esta infraestructura se podrán implementar y probar algoritmos desarrollados para grupos de robots móviles, algunos desarrollados en el laboratorio donde se realizó este trabajo. Así como lo hace el ETH-Zürich^[12], aunque no explican el proceso selección y configuración de la infraestructura que emplean para desarrollar sus experimentos.

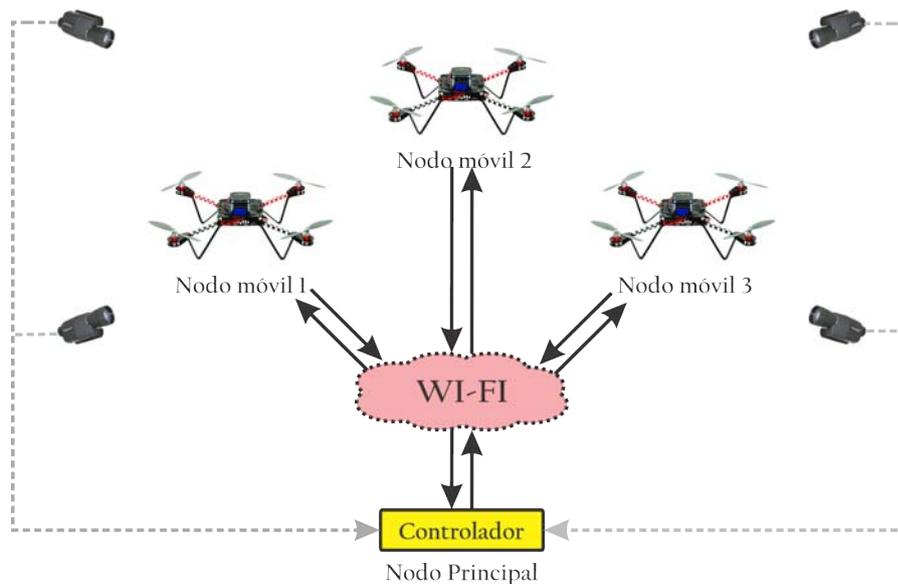


Figura 6.3: Sistema distribuido en red con nodos móviles

Estimación de estados

De las soluciones propuestas por Lendek et al.^[24] para la estimación de estados del sistema experimental usado en este trabajo, se optó por usar derivadores; ya que los estados faltantes del sistema se pueden obtener fácilmente por medio de las derivadas de las posiciones angulares. La función de transferencia de un derivador en el dominio de la frecuencia es

$$G(s) = s, \quad (\text{A.1})$$

en donde $s = j\omega$.

Cuando se deriva una señal con ruido, es común que este se amplifique en gran medida, tal efecto se produce por los rápidos cambios en el valor de la señal que son consecuencia de la alta frecuencia del ruido. Para reducir tal efecto en la señal derivada, se propone el uso de un filtro pasa bajas de segundo orden; esta elección se hace con base en que sabe que las señales obtenidas a la salida de los derivadores, tiene una frecuencia baja comparada con la del ruido, lo que hace ideal esta implementación. El diagrama de bloques que ilustra la configuración final del estimador de estados, se presenta en la figura A.1.

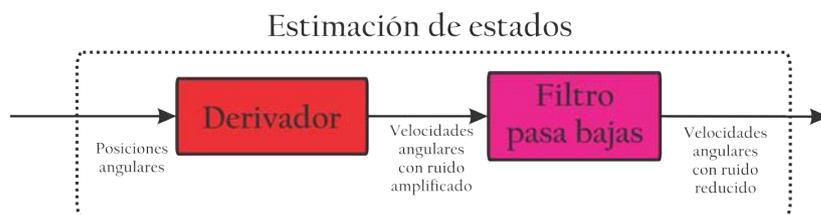


Figura A.1: Estructura del estimador de estados

De las configuraciones para filtros existentes, la propuesta por Butterworth, fue la elegida por su conocida respuesta suave. Su función de transferencia en el dominio la frecuencia es^[46]

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}, \quad (\text{A.2})$$

donde ω_0 es la frecuencia de corte y a Q se llama factor de amortiguamiento y se puede elegir aleatoriamente. En el análisis hecho para este filtro por Van Valkenburg^[46], se utilizaron distintos valores de Q y se observa que para una valor de $Q = 0.7071$, la respuesta es mucho mas suave, por lo tanto, este fue valor utilizado en la implementación del estimador de estados.

Experimentalmente se determinó que el valor de $\omega_0 = 20[\frac{\circ}{seg}] = 125.66[\frac{rad}{seg}]$, es el que mejor desempeño mostró en las simulaciones y pruebas experimentales.

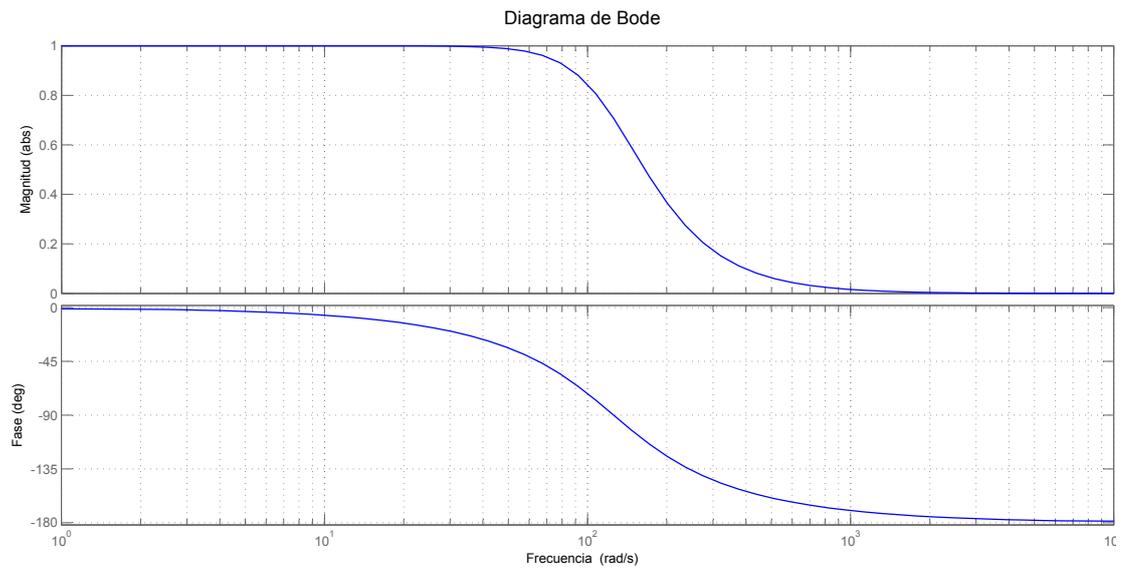


Figura A.2: Respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas

En la figura A.2, se presenta la respuesta en frecuencia del filtro, donde claramente se observa que la frecuencia de corte es aproximadamente $\omega_0 \approx 125.66[\frac{rad}{seg}]$ y poco a poco la magnitud de señales de frecuencia mayor se va reduciendo, hasta ser muy cercana a 0; lo que garantiza el correcto funcionamiento del filtro.

Descripción de la planta

La plataforma experimental Quanser 3DOF Hover, mostrada en figura B.1, consiste en un cuadricóptero montado en una base con movimiento de rotación en todas las posibles direcciones: roll(ϕ), pitch(θ) y yaw(ψ). Como se explicó en capítulos anteriores, la estructura del cuadricóptero consiste en 4 motores, que en este caso son de corriente directa, cada uno con su respectiva hélice. Las mediciones se realizan con ayuda de 3 encoders localizados en cada uno de los ejes de giro de la plante.



Figura B.1: Plataforma experimental Quanser 3DOF Hover

La comunicación con la computadora se hace por medio de la tarjeta Q8-USB de Quanser[®], usando el software del mismo fabricante. Además, la amplificación de corriente y voltaje de la señal se realiza usando el amplificador VoltPAQ-X4 del mismo fabricante.

Los componentes listados en la tabla [B.2], pueden ser vistos físicamente en las figuras B.2, B.3 y [B.4].

Número	Componente	Número	Componente
1	Protector de la hélice	11	Base de la plataforma
2	Motor	12	Conector del motor frontal
3	Pinza	13	Conector del motor derecho
4	Enconder de roll	14	Conector del motor trasero
5	Enconder de pitch	15	Conector del encoder de yaw
6	Horquilla	16	Conector del encoder de roll
7	Circuito de enconders	17	Conector del encoder de pitch
8	Cuerpo del sistema	18	Conecto del encoder de yaw
9	Anillo de rodamiento	19	Conector del motor izquierdo
10	Hélice		

Tabla B.1: Componentes de la planta

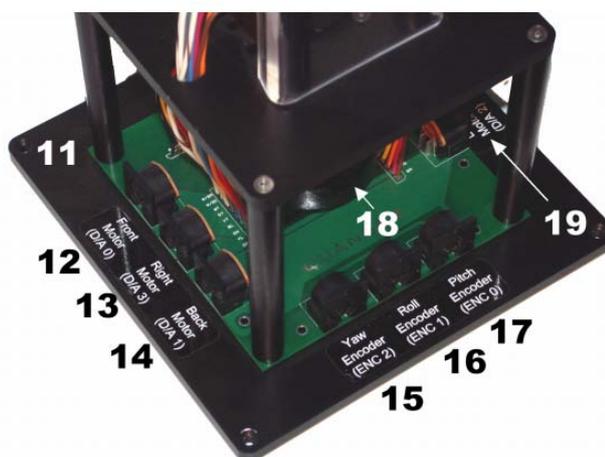


Figura B.2: Componentes de la base de la planta

B.1. Motores

Cada uno de los motores que producen las fuerzas y pares de torsión, que permiten controlar el sistema, son motores de corriente directa modelo 9324, de la marca Pittman[®]. Los cuales tienen una resistencia eléctrica de $0.83[\Omega]$ y una constante de corriente-par de $0.0182[\frac{N \cdot m}{A}]$. El voltaje de operación del motor es $12 [V]$, pero los motores pueden recibir picos de hasta $22 [V]$ sin daño alguno. Para las especificaciones completas del motor, ver Pittman^[34].

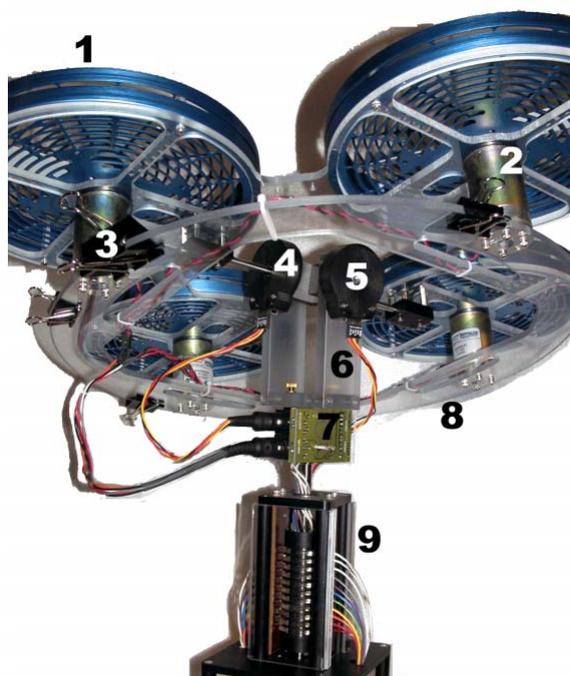


Figura B.3: Componentes de la planta

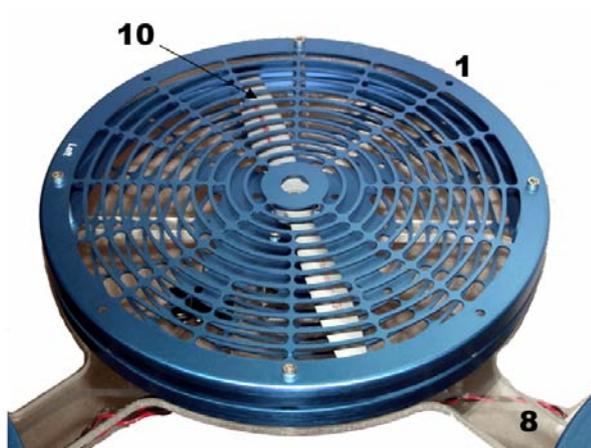


Figura B.4: Hélice de la planta

B.2. Hélices

Las cuatro hélices están montadas directamente en el rotor de los motores mencionados anteriormente. El modelo de las hélices es Graupner[®] de 20/15[4cm] o 8/6".

B.3. Encoders

La plataforma experimental Quanser 3DOF Hover, usa tres encoders en cuadratura para medir los ángulos en roll, pitch y yaw. Los cuales tienen una resolución de 8192 pulsos por revolución. Por consiguiente: a cada pulso del encoder la variación será de $0.0439[^\circ]$ en cada uno de los ejes.

B.4. Amplificador

El amplificador de voltaje y corriente utilizado es el VoltPAQ-X4, el cual es un amplificador de voltaje y corriente lineal, se observa en la figura B.5 y sus características están plasmadas en la tabla [B.2].

Característica	Medida física
Tamaño (Largo \times Ancho \times Alto)	$0.39 \times 0.33 \times 0.1 [m]$
Masa	$5.44 [kg]$
Ganancia de amplificación de voltaje	$3[\frac{V}{V}]$
Número de salidas	4
Máximo voltaje de amplificador	$24[V]$
Máxima corriente de amplificador	$4.16 [A]$ por canal
Suministro de voltaje de AC	$100 - 127$ o $220 - 240 [V]$
Potencia continua de salida	$400 [W]$
Impedancia de salida	$0.5 - 0.16 [\Omega]$ por canal
Número de entradas analógicas	0

Tabla B.2: VoltPAQ-X4: Especificaciones técnicas

B.5. Tarjeta de adquisición de datos

El intercambio de los datos entre la planta y las computadoras se hace por medio de la tarjeta Q8-USB, conectada al puerto USB de la computadora. Esta tarjeta está específicamente diseñada para el desarrollo de controladores de respuesta rápida y para aplicaciones en tiempo real. Dicha plataforma permite aplicaciones en lazo cerrado de hasta $2 [KHz]$ de velocidad. Adicionalmente, incluye los conectores específicos para facilitar el acceso a las señales que proporcionan los sensores y las que van a los actuadores. Las características de dicha tarjeta se pueden observar en la tabla [B.3] y el dispositivo se muestra en la figura B.6.

Característica	
Tamaño (Largo \times Ancho \times Alto)	22.8 \times 16.8 \times 3.4 [cm]
Entradas analógicas	
Número de canales	8
Resolución	16 bits
Rango de entrada	$\pm 5[V]$, $\pm 10[V]$
Salidas analógicas	
Número de canales	8
Resolución	16 bits
Rango de salida	$\pm 5[V]$, $\pm 10[V]$
Entradas digitales	
Numero de líneas I/O	8
Entrada: Bajo/Alto	0.55[V]/4.50[V]
Salidas digitales	
Numero de líneas I/O	8
Salida: Bajo/Alto	1.5[V], 3.5[V]
Entradas de encoder	
Número de entradas de encoder	8
Frecuencia máxima en cuadratura	24.883 [MHz]
Salidas PWM	
Salida: Bajo/Alto	0.55[V]/4.50[V]
Frecuencia máxima	23.7309 [Hz]

Tabla B.3: Q8-USB: Especificaciones técnicas



Figura B.5: Tarjeta de adquisición de datos Q8-USB



Figura B.6: Amplificador VoltPaQ-X4

Códigos y diagramas

C.1. Código en Python

```
1 import serial
2 import sys
3 import socket
4 import time
5
6 puerto='/dev/ttyATH0'
7 UDP_IP = "192.168.6.192"
8 UDP_PORT = 4545
9
10 ser=serial.Serial(puerto,115200,timeout=1)
11 sock = socket.socket(socket.AF_INET, socket.SOCK_DGRAM)
12
13 while True:
14     data=ser.read(1)
15     #print data
16     if data=='&':
17         lect=ser.read(15)
18         sock.sendto(lect, (UDP_IP, UDP_PORT))
19         print lect
20         #time.sleep(0.1)
21 ser.close()
```

C.2. Código en MatLab

```
1 clc;
2 clear all;
3
4 %% Variables del sistema
5 syms phi;           % Angulo en el eje y
6 syms theta;        % Angulo en el eje x
7 syms psi;          % Angulo en el eje z
8
```

```

 9 syms phi_d;      % Derivada de phi
10 syms theta_d;   % Derivada de theta
11 syms psi_d;     % Derivada de psi
12
13 eta = [phi;theta;psi];
14 eta_d = [phi_d;theta_d;psi_d];
15
16 %% Parametros fisicos del sistema
17 syms Ixx;      % Inercia en el eje x
18 syms Iyy;      % Inercia en el eje y
19 syms Izz;      % Inercia en el eje z
20 syms Kt;       % Constante de par
21 syms Kf;       % Constante de empuje
22 syms l;        % Distancia del motor al centro de masa
23 syms m;        % Masa del cuadricoptero
24 syms g;        % Aceleracion de la gravedad
25
26 %% Entradas del sistema
27 syms Tau_phi;  % Par total en x
28 syms Tau_theta; % Par total en y
29 syms Tau_psi;  % Par total en z
30 syms U;        % Empuje total
31
32 syms vf;       % Voltaje del motor frontal
33 syms vd;       % Voltaje del motor derecho
34 syms vt;       % Voltaje del motor trasero
35 syms vi;       % Voltaje del motor izquierdo
36
37 Tau_phi = l*Kf*(vi-vd);
38 Tau_theta = l*Kf*(vt-vf);
39 Tau_psi = Kt*(vd+vi-vf-vt);
40 U = Kf*(vf+vd+vt+vi);
41
42 Tau = [Tau_phi;Tau_theta;Tau_psi];
43
44 %% Ecuaciones de la dinamica del sistema
45 eta_dd = [((Iyy-Izz)/Ixx)*theta_d*psi_d+Tau_phi/Ixx;...
46           ((Izz-Ixx)/Iyy)*phi_d*psi_d+Tau_theta/Iyy;...
47           ((Izz-Ixx)/Iyy)*phi_d*theta_d+Tau_psi/Izz];
48
49 %% Parametros difusos
50 syms Z1;      % Primer variable difusa
51 syms Z2;      % Segunda variable difusa
52 syms Z1max;   % Valor maximo de la primera variable difusa
53 syms Z1min;   % Valor minimo de la primera variable difusa
54 syms Z2max;   % Valor maximo de la segunda variable difusa
55 syms Z2min;   % Valor minimo de la segunda variable difusa
56 syms M1;      % Funcion de membresia M_1_1
57 syms M2;      % Funcion de membresia M_1_2
58 syms N1;      % Funcion de membresia M_2_1

```

```

59 syms N2;      % Funcion de membresia M_2_2
60 syms h1;     % Peso del control 1
61 syms h2;     % Peso del control 2
62 syms h3;     % Peso del control 3
63 syms h4;     % Peso del control 4
64
65 M1=(Z1-Z1max)/(Z1min-Z1max);
66 M2=(Z1min-Z1)/(Z1min-Z1max);
67 N1=(Z2-Z2max)/(Z2min-Z2max);
68 N2=(Z2min-Z2)/(Z2min-Z2max);
69
70 h1=M1*N1;
71 h2=M1*N2;
72 h3=M2*N1;
73 h4=M2*N2;
74
75 %% Matrices del sistema
76 A=[ 0,0,0,1,0,0;
77     0,0,0,0,1,0;
78     0,0,0,0,0,1;
79     0,0,0,0,0,((Iyy-Izz)/Ixx)*Z2;;
80     0,0,0,0,0,((Izz-Ixx)/Iyy)*Z1;;
81     0,0,0,0,0,((Ixx-Iyy)/Izz)*Z2;; ]
82
83 B(1,1)=diff(eta_d(1,1),vf);
84 B(1,2)=diff(eta_d(1,1),vd);
85 B(1,3)=diff(eta_d(1,1),vt);
86 B(1,4)=diff(eta_d(1,1),vi);
87
88 B(2,1)=diff(eta_d(2,1),vf);
89 B(2,2)=diff(eta_d(2,1),vd);
90 B(2,3)=diff(eta_d(2,1),vt);
91 B(2,4)=diff(eta_d(2,1),vi);
92
93 B(3,1)=diff(eta_d(3,1),vf);
94 B(3,2)=diff(eta_d(3,1),vd);
95 B(3,3)=diff(eta_d(3,1),vt);
96 B(3,4)=diff(eta_d(3,1),vi);
97
98 B(4,1)=diff(eta_dd(1,1),vf);
99 B(4,2)=diff(eta_dd(1,1),vd);
100 B(4,3)=diff(eta_dd(1,1),vt);
101 B(4,4)=diff(eta_dd(1,1),vi);
102
103 B(5,1)=diff(eta_dd(2,1),vf);
104 B(5,2)=diff(eta_dd(2,1),vd);
105 B(5,3)=diff(eta_dd(2,1),vt);
106 B(5,4)=diff(eta_dd(2,1),vi);
107
108 B(6,1)=diff(eta_dd(3,1),vf);

```

```
109 B(6,2)=diff(eta_dd(3,1),vd);
110 B(6,3)=diff(eta_dd(3,1),vt);
111 B(6,4)=diff(eta_dd(3,1),vi);
112
113 display('Matriz A')
114 A
115 display('Matriz B')
116 B
117
118 %% Evaluacion de constantes
119 Ixx=0.0552;
120 Iyy=0.0552;
121 Izz=0.1104;
122
123 Kf=0.1188;
124 Kt=0.0036;
125 m=1.433;
126 l=0.197;
127 g=9.81;
128
129 Z1min=-0.8;
130 Z1max=0.8;
131 Z2min=-0.8;
132 Z2max=0.8;
133
134 h1=eval(h1)
135 h2=eval(h2)
136 h3=eval(h3)
137 h4=eval(h4)
138
139 %% Matrices Fuzzy y Matrices fuzzy extendidas
140 C=[1,0,0,0,0,0;...
141     0,1,0,0,0,0;...
142     0,0,1,0,0,0];
143
144 D=zeros(3,4);
145
146 Z1=Z1max;
147 Z2=Z2max;
148 A1=eval(A);
149 A1ext=[A1,zeros(6,3);C,zeros(3,3)];
150
151 Z1=Z1max;
152 Z2=Z2min;
153 A2=eval(A);
154 A2ext=[A2,zeros(6,3);C,zeros(3,3)];
155
156 Z1=Z1min;
157 Z2=Z2max;
158 A3=eval(A);
```

```

159 A3ext=[A3,zeros(6,3);C,zeros(3,3)];
160
161 Z1=Z1min;
162 Z2=Z2min;
163 A4=eval(A);
164 A4ext=[A4,zeros(6,3);C,zeros(3,3)];
165
166 B=eval(B);
167 Bext=[B;zeros(3,4)];
168
169 syms Z1 Z2;
170
171 %% Diseño del controladores
172 R=.1*diag([0.01,0.01,0.01,0.01])
173 Q=.01*diag([200,200,800,20,20,20])
174 Qext=.01*diag([200,200,800,20,20,20,5,20,2]);
175
176 K1 = lqr(A1,B,Q,R)
177 K1ext = lqr(A1ext,Bext,Qext,R)
178
179 K2 = lqr(A2,B,Q,R)
180 K2ext = lqr(A2ext,Bext,Qext,R)
181
182 K3 = lqr(A3,B,Q,R)
183 K3ext = lqr(A3ext,Bext,Qext,R)
184
185 K4 = lqr(A4,B,Q,R)
186 K4ext = lqr(A4ext,Bext,Qext,R)
187
188 %% LMI's
189 % Sistema 6 estados
190 setlmis([ ]);
191 P=lmivar(1,[6 1]);
192 lmiterm([1 1 1 P],[A1-B*K1]',1);
193 lmiterm([1 1 1 P],1,A1-B*K1);
194 lmiterm([2 1 1 P],[A2-B*K2]',1);
195 lmiterm([2 1 1 P],1,A2-B*K2);
196 lmiterm([3 1 1 P],[A3-B*K3]',1);
197 lmiterm([3 1 1 P],1,A3-B*K3);
198 lmiterm([4 1 1 P],[A4-B*K4]',1);
199 lmiterm([4 1 1 P],1,A4-B*K4);
200 lmiterm([-5 1 1 P],1,1);
201 lmis=getlmis;
202 [tmin,xfeas]=feasp(lmis);
203 P=dec2mat(lmis,xfeas,P)
204 display('Raices de P de grado 6')
205 eig(P)
206
207 % Sistema 9 estados
208 setlmis([ ]);

```

```

209 Pext=lmivar(1,[9 1]) ;
210 lmiterm([1 1 1 Pext],[A1ext-Bext*K1ext]',1);
211 lmiterm([1 1 1 Pext],1,A1ext-Bext*K1ext);
212 lmiterm([2 1 1 Pext],[A2ext-Bext*K2ext]',1);
213 lmiterm([2 1 1 Pext],1,A2ext-Bext*K2ext);
214 lmiterm([3 1 1 Pext],[A3ext-Bext*K3ext]',1);
215 lmiterm([3 1 1 Pext],1,A3ext-Bext*K3ext);
216 lmiterm([4 1 1 Pext],[A4ext-Bext*K4ext]',1);
217 lmiterm([4 1 1 Pext],1,A4ext-Bext*K4ext);
218 lmiterm([-5 1 1 Pext],1,1);
219 lmis=getlmis;
220 [tmin,xfeas]=feasp(lmis);
221 Pext=dec2mat(lmis,xfeas,Pext)
222 display('Raices de P de grado 9')
223 eig(Pext)
224
225 %% Determinacion de estabilidad
226 %% Normal
227 display('Menores del subsistema 1')
228 Aux1 = (A1-B*K1).'*P+P*(A1-B*K1);
229 [ det(Aux1(1:1,1:1)),
230   det(Aux1(1:2,1:2)),
231   det(Aux1(1:3,1:3)),
232   det(Aux1(1:4,1:4)),
233   det(Aux1(1:5,1:5)),
234   det(Aux1(1:6,1:6)) ]
235
236 display('Raices del subsistema 1')
237 eig(Aux1)
238
239 display('Menores del subsistema 2')
240 Aux2 = (A2-B*K2).'*P+P*(A2-B*K2);
241 [ det(Aux2(1:1,1:1)),
242   det(Aux2(1:2,1:2)),
243   det(Aux2(1:3,1:3)),
244   det(Aux2(1:4,1:4)),
245   det(Aux2(1:5,1:5)),
246   det(Aux2(1:6,1:6)) ]
247
248 display('Raices del subsistema 2')
249 eig(Aux2)
250
251 display('Menores del subsistema 3')
252 Aux3 = (A3-B*K3).'*P+P*(A3-B*K3);
253 [ det(Aux3(1:1,1:1)),
254   det(Aux3(1:2,1:2)),
255   det(Aux3(1:3,1:3)),
256   det(Aux3(1:4,1:4)),
257   det(Aux3(1:5,1:5)),
258   det(Aux3(1:6,1:6)) ]

```

```

259
260 display('Raices del subsistema 3')
261 eig(Aux3)
262
263 display('Menores del subsistema 1')
264 Aux4 = (A4-B*K4).'*P+P*(A4-B*K4);
265 [ det(Aux4(1:1,1:1)),
266   det(Aux4(1:2,1:2)),
267   det(Aux4(1:3,1:3)),
268   det(Aux4(1:4,1:4)),
269   det(Aux4(1:5,1:5)),
270   det(Aux4(1:6,1:6)) ]
271
272 display('Raices del subsistema 4')
273 eig(Aux4)
274
275 %% Extendido
276 display('Menores del subsistema 1 extendido')
277 Aux1ext =
278   (A1ext-Bext*K1ext).'*Pext+Pext*(A1ext-Bext*K1ext);
279 [ det(Aux1ext(1:1,1:1)),
280   det(Aux1ext(1:2,1:2)),
281   det(Aux1ext(1:3,1:3)),
282   det(Aux1ext(1:4,1:4)),
283   det(Aux1ext(1:5,1:5)),
284   det(Aux1ext(1:6,1:6)),
285   det(Aux1ext(1:7,1:7)),
286   det(Aux1ext(1:8,1:8)),
287   det(Aux1ext(1:9,1:9)) ]
288
289 display('Raices del subsistema 1 extendido')
290 eig(Aux1ext)
291
292 display('Menores del subsistema 2 extendido')
293 Aux2ext =
294   (A2ext-Bext*K2ext).'*Pext+Pext*(A2ext-Bext*K2ext);
295 [ det(Aux2ext(1:1,1:1)),
296   det(Aux2ext(1:2,1:2)),
297   det(Aux2ext(1:3,1:3)),
298   det(Aux2ext(1:4,1:4)),
299   det(Aux2ext(1:5,1:5)),
300   det(Aux2ext(1:6,1:6)),
301   det(Aux2ext(1:7,1:7)),
302   det(Aux2ext(1:8,1:8)),
303   det(Aux2ext(1:9,1:9)) ]
304
305 display('Raices del subsistema 3 extendido')
306 eig(Aux2ext)
307
308 display('Menores del subsistema 3 extendido')

```

```

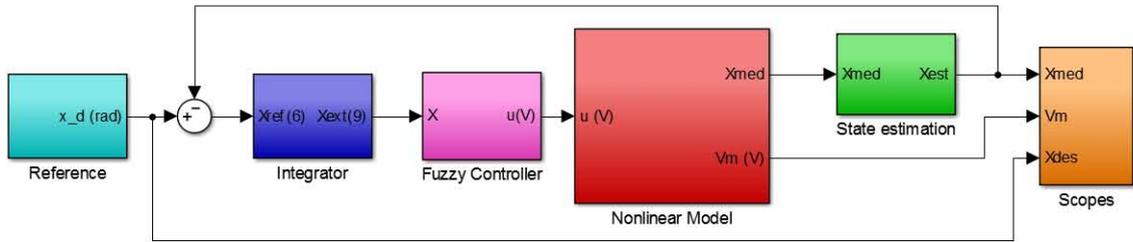
307 Aux3ext =
      (A3ext-Bext*K3ext).'*Pext+Pext*(A3ext-Bext*K3ext);
308 [   det(Aux3ext(1:1,1:1)),
309     det(Aux3ext(1:2,1:2)),
310     det(Aux3ext(1:3,1:3)),
311     det(Aux3ext(1:4,1:4)),
312     det(Aux3ext(1:5,1:5)),
313     det(Aux3ext(1:6,1:6))
314     det(Aux3ext(1:7,1:7)),
315     det(Aux3ext(1:8,1:8)),
316     det(Aux3ext(1:9,1:9)) ]
317 display('Raices del subsistema 3 extendido')
318 eig(Aux3ext)
319
320 display('Menores del subsistema 4 extendido')
321 Aux4ext =
      (A4ext-Bext*K4ext).'*Pext+Pext*(A4ext-Bext*K4ext);
322 [   det(Aux4ext(1:1,1:1)),
323     det(Aux4ext(1:2,1:2)),
324     det(Aux4ext(1:3,1:3)),
325     det(Aux4ext(1:4,1:4)),
326     det(Aux4ext(1:5,1:5)),
327     det(Aux4ext(1:6,1:6))
328     det(Aux4ext(1:7,1:7)),
329     det(Aux4ext(1:8,1:8)),
330     det(Aux4ext(1:9,1:9)) ]
331
332 display('Raices del subsistema 4 extendido')
333 eig(Aux4ext)
334
335 %% Filtro derivativo pasa bajas de segundo orden
336 w0 = 2 * pi * 20; % Frecuencia de corte
337 Q = 0.6; % Coeficiente de amortiguamiento
338
339 %% Parametros de configuracion
340 K_AMP = 1; % Ganancia del amplificador
341 VMAX_AMP = 24; % Maximo voltaje del amplificador
342 VMAX_DAC = 10; % Maximo voltaje de DAQ: 10 para Tarjeta Q8
343 CMD_RATE_LIMIT = 60 * pi/180; % Encoder max rate
344 V_bias = 2.0; % Voltaje de Bias
345 K_EC_R = -2*pi/(8*1024); % Resolucion del enconder de roll
346 K_EC_P = 2*pi/(8*1024); % Resolucion del enconder de pitch
347 K_EC_Y = 2*pi/(8* 1024); % Resolucion del enconder de yaw

```

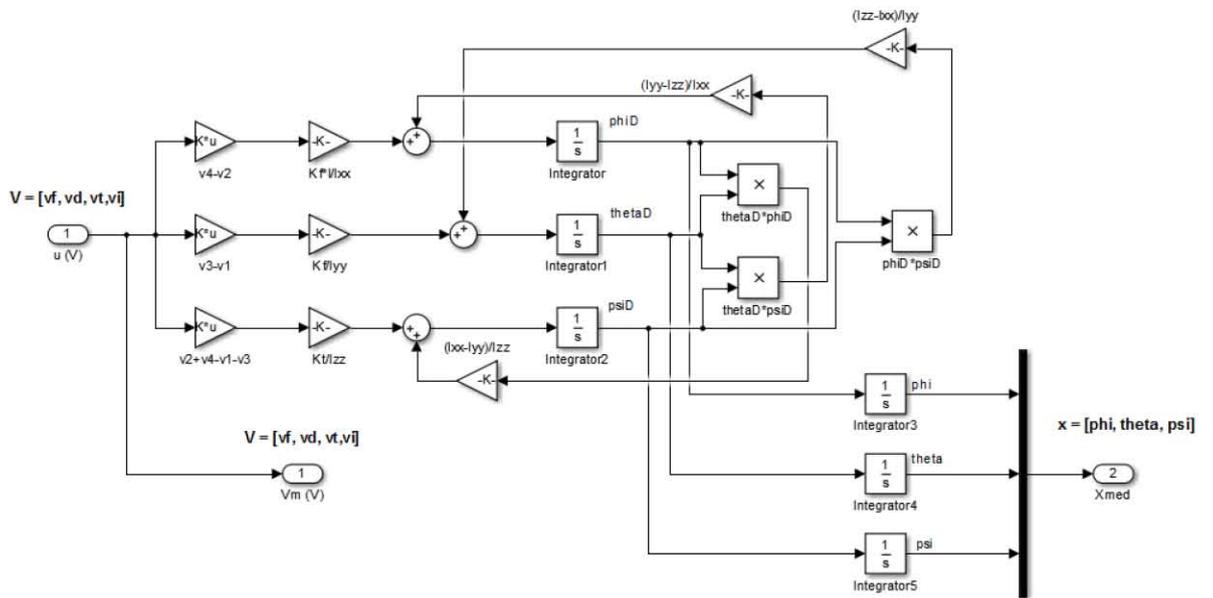
C.3. Modelo en Simulink

C.3.1. Simulador

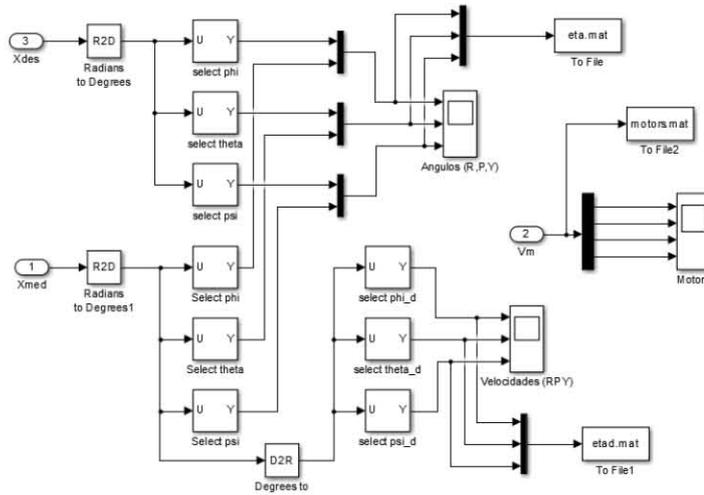
**Quanser 3 DOF Hover:
Fuzzy LQR control + Integral control**



Nonlinear model

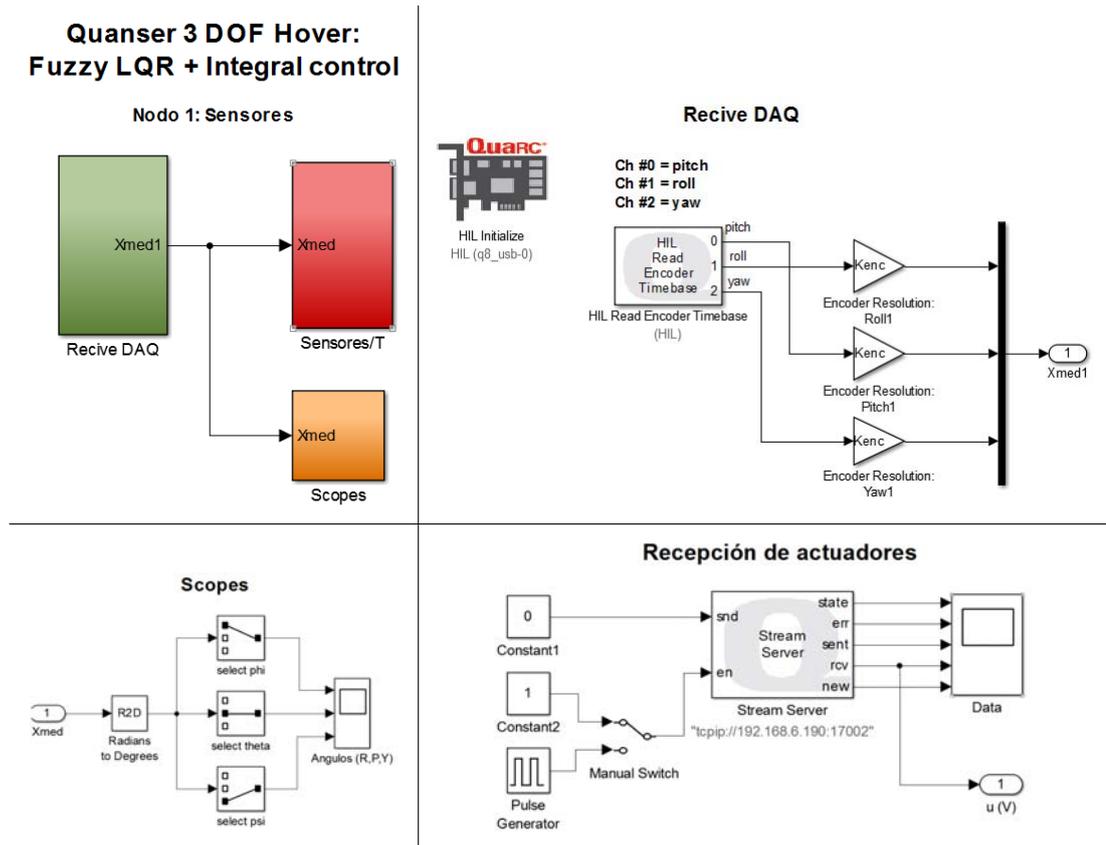


Scopes

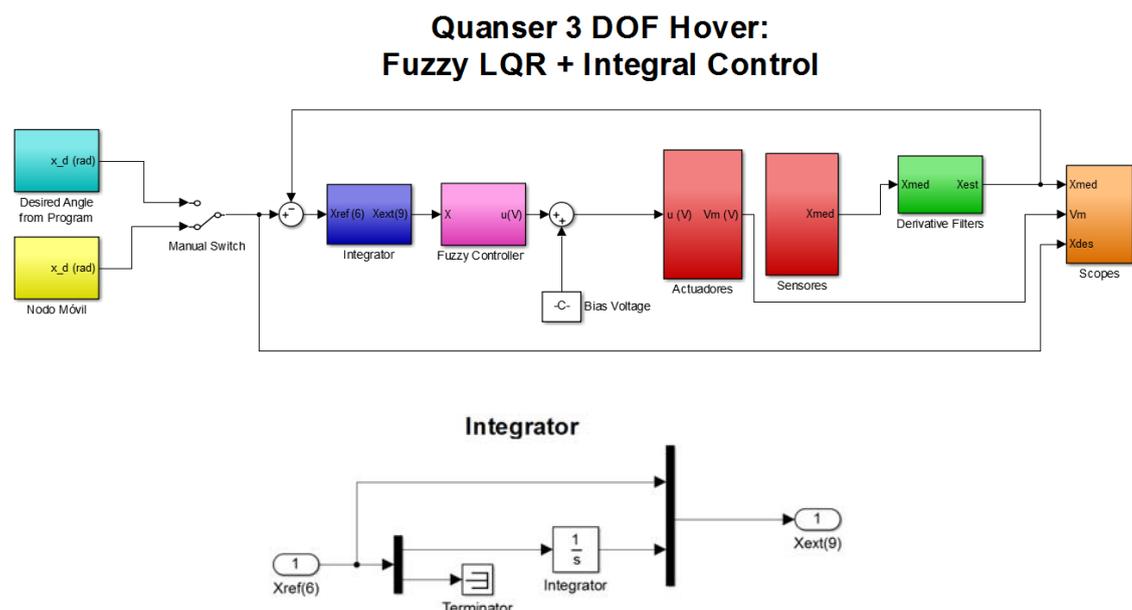


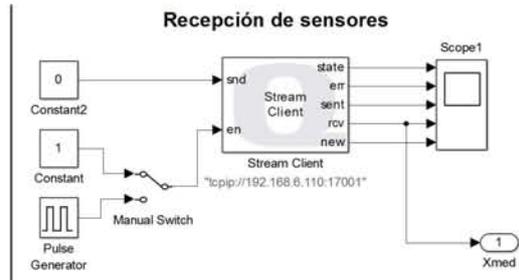
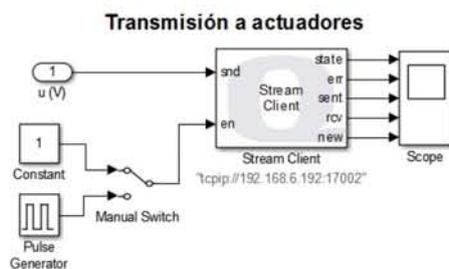
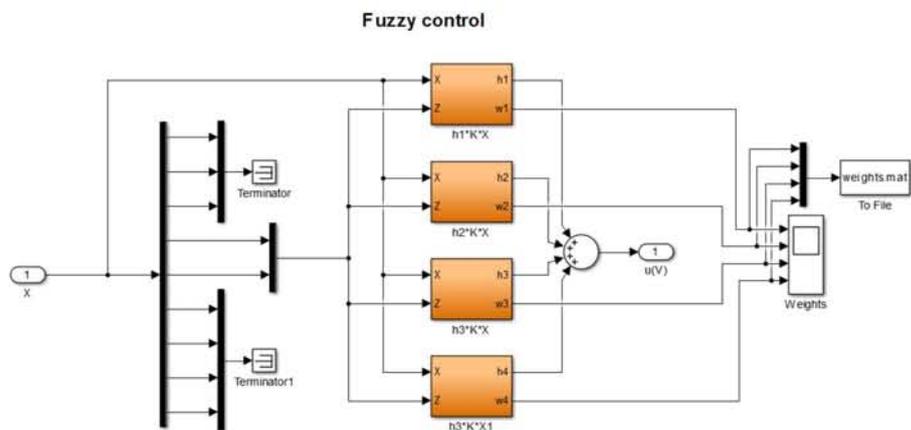
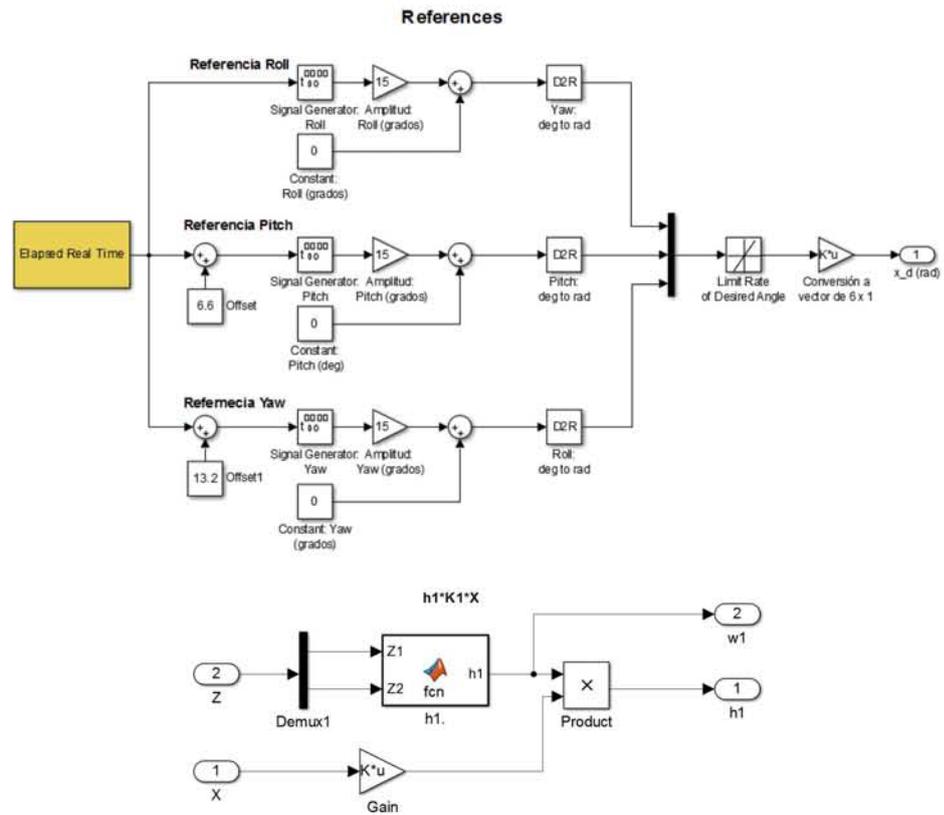
C.3.2. Sistema experimental distribuido en red

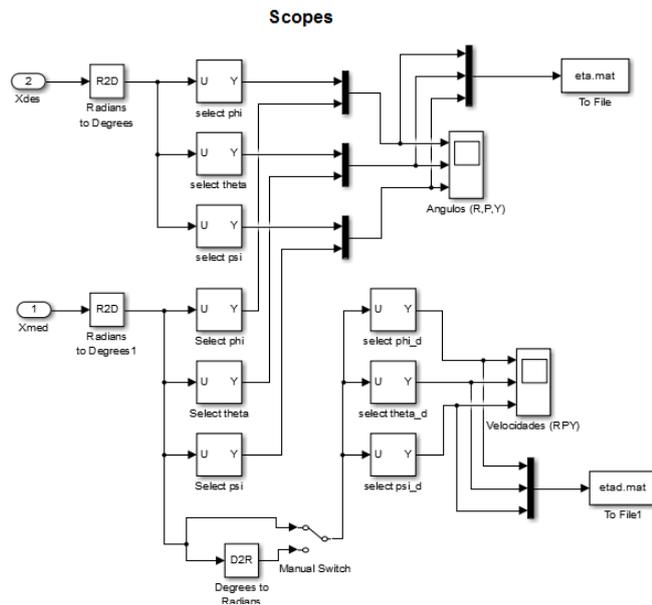
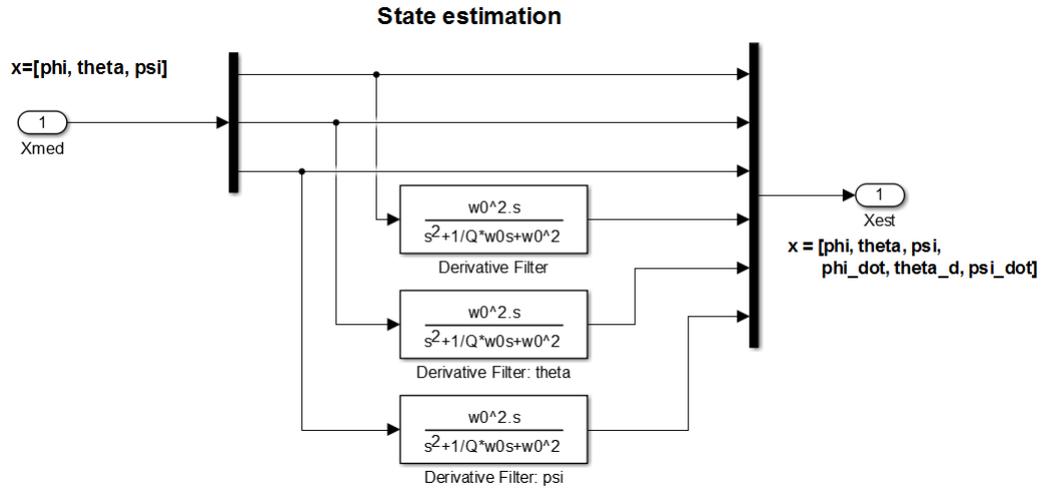
Nodo 1:



Nodo 2:



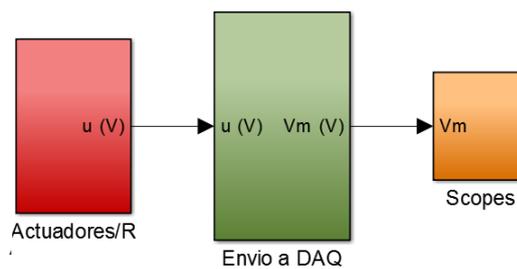




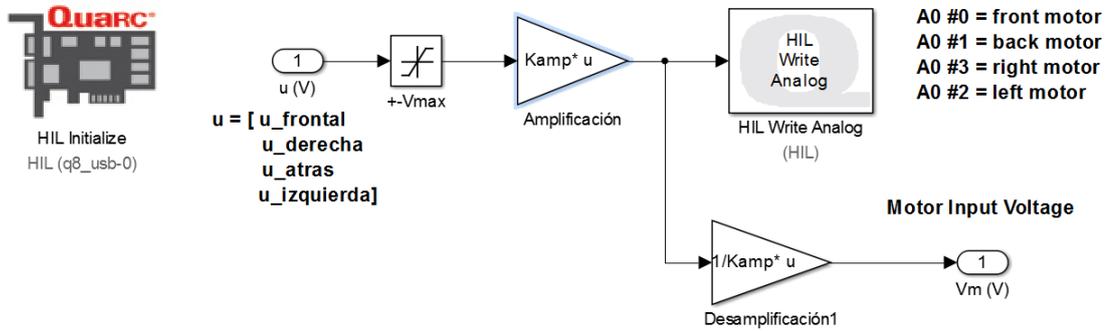
Nodo 3:

Quanser 3 DOF Hover: Fuzzy LQR + Integral control

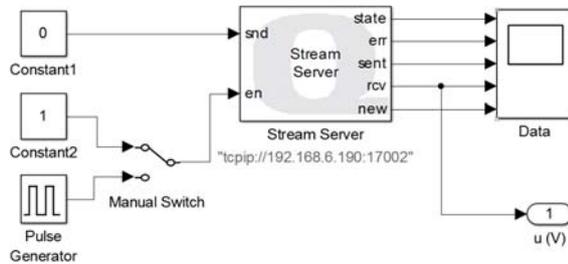
Nodo 3: Actuadores



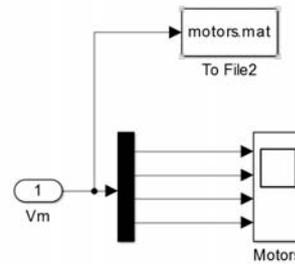
Envío a DAQ



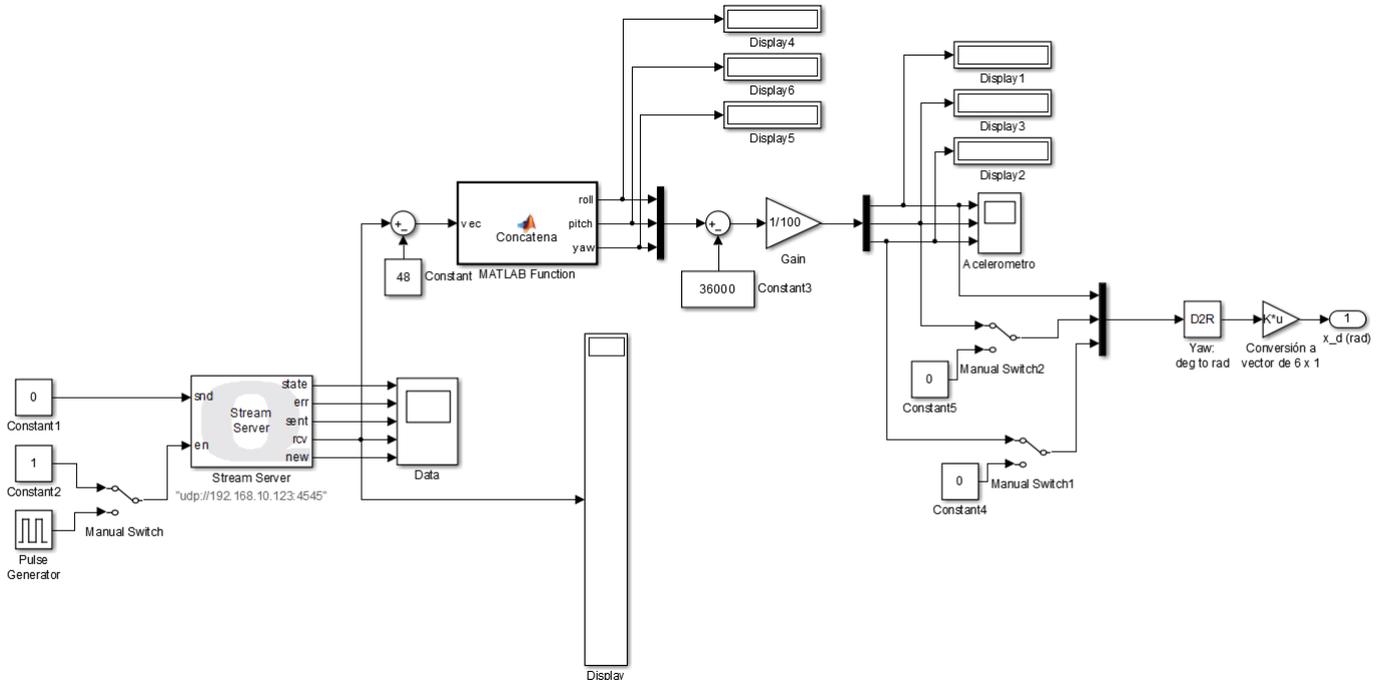
Recepción de actuadores



Scopes



Nodo móvil:



Bibliografía

- [1] Achtelik, M., Zhang, T., Kühnlez, K., and Buss, M. (2009). Visual tracking and control of a quadcopter using a stereo camera system and inertial sensors. *International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 2863–2869. 2
- [2] Anderson, B. D. and Moore, J. B. (1989). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall International, USA. 23
- [3] Apkarian, J. and Lévis, M. (2013). *Quanser 3DOF: Laboratory Guide*. Quanser Inc., Canadá. 26
- [4] Benzaouia, A. and El Hajjaji, A. (2014). *Advanced Takagi-Sugeno Fuzzy Systems*. Springer, Suiza. 28
- [5] Berbra, C., S., G., and Leseq, S. (2009). Hybrid priority scheme for networked control quadrotor. *17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 516–521. 3
- [6] Bouabdallah, S. (2007). *Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Laboratoire de systèmes autonomes. 2, 16, 18
- [7] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Studies in Applied Mathematics, Pennsylvania, USA. 35
- [8] Castillo, P., Albertos, P., Garcia, P., and Lozano, R. (2006). Simple real-time attitude stabilization of a quad-rotor aircraft with bounded signals. In *45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1533–1538. IEEE. 2
- [9] Chen, C.-T. (2008). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, USA. 21, 36
- [10] Concha, J. and Ciprino, A. (1997). A design method for stable fuzzy lqr controllers. In *Proceedings of the 6th IEEE International Conference*, pages 271–276. IEEE. 23, 32
- [11] Durand, S., Dumon, J., and Guerrero-Castellanos, F. (2014). Event-based control for embedded and networked system application to a mini quadrotor helicopter using motion capture. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, pages 1188–1195. 3

-
- [12] ETH-Zürich (2009). Flying machine arena. <http://flyingmachinearena.org>. Visto el 20 de Marzo del 2015. 71
- [13] Etkin, B. and Lloyd, D. R. (1996). *Dynamics of flight: Stability and Control*. John Wiley and Sons, Canadá. 7
- [14] Feng, G. (2014). *Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach*. Prentice Hall, Suiza. 1
- [15] Fuyang, C., Feifei, L., Bin, J., and Gang, T. (2014). Adaptive compensaion control of the quadrotor helicopter using quantum informaton technology and disturbance observer. *Journal of the Franklin Institute*, pages 442–455. 2, 19
- [16] Gambier, A. (2004). Real-time control systems: A tutorial. *5th Asian Control Conference*, 3:9–28. 48
- [17] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2001). *Classical Mechanics*. Addison Wesley, USA. 9
- [18] Halevi, Y. and Asok, R. (1988). Integrated communication and control systems: Part I — Analysis. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110(4):367–373. 45
- [19] Hendricks, E., Jannerup, O., and Haase S., P. (1999). *Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods*. Springer-Verlag, Berlín, Alemania. 21, 22, 23, 37
- [20] Hoffman, G., Gorur Rajnarayan, D., Waslande, S. L., Dostal, D., Soon Jang, J., and Tomlin, C. J. (2004). The stanford testbend of autonomous rotorcraft for multi agent control (starmac). *Digital Avionics Systems Conference*. 2
- [21] Inc., Q. (2013). *Quanser 3DOF: User manual*. Canadá. 30
- [22] JabarI Asi, H. and Bolandi, H. (2013). Robust vision-based control of underactuated flying robot tracking a moving target. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 36:411 – 424. 2
- [23] Ji, K. (2006). *Real-Time Control Over Networks*. PhD thesis, Texas A&M University. 47, 48
- [24] Lendek, Z., Berna, A., Guzmán-Gimenéz, J., and Antonio, S. (2011). Application of takagi-sugeno observers for state estimation in quadrotor. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 7530–7535. 2, 72
- [25] Lima Preira, R. and Heinz Kienitz, K. (2013). Design and application of gain-scheduling control for a hover: Parametric h_∞ loop shaping approach. *9th Asian Control Conference*, pages 1–5. 2
- [26] Liu, J., Liu, S., and Geng, q. (2012). The h_∞ robust control algorithm of the 3-dof four rotors system. *5th International Symposium on Computational Intelligence and Design*, pages 306–309. 2
-

-
- [27] Liu, Z., Yuan, C., Zhang, Y., and Lou, J. (2014). A learning-based fuzzy lqr control scheme for height control of an unmanned quadrotor helicopter. *International conference on Unmanned Aircraft Systems*, pages 936–941. 2
- [28] Lozano, R. et al. (2013). *Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation*. Springer, Londres. 13, 14
- [29] Mahmoud, M. (2011). *Control and Estimation over Communication Networks*. Springer, USA. 2
- [30] Méndez Monroy, P. E. (2012). *Codiseño de Sistemas de Control en Red Compensando Imperfecciones Acotadas de Tiempo Inducidas en la Red*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México. 47
- [31] Nikolakopoulos, G. and Kostas, A. (2013). Switching networked attitude control for an unmaned quadrotor. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 11:389–397. 3
- [32] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson, Madrid, España. 60
- [33] Perez, T. (2005). *Ship Motion Control*. Springer, Londres. 15
- [34] Pittman (2010). *LO-COG DC Servo Motors: Series 800, 9000, 14000*. Pennsylvania, USA. 26, 75
- [35] Qiong, H., Tian, L., Qing, F., and Qingbo, G. (2008). Attitude control research for quad-rotor uav. *Fifth International Conference on Intelligent Control and Information Processing*, pages 41–47. 2
- [36] Rachana-Ashokand, G. and Mo-Yuen, C. (2010). Networked control systems: Overview and research trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(7):2527–2535. 45
- [37] Siciliano, B. et al. (2010). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, Londres. 10, 11, 12
- [38] Soo Kim, T., Stol, K., and Kecman, V. (2007). *Control of 3-DOF Quadrotor Model*. Number 360 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. 2
- [39] Soumelidis, A., Gáspár, P., Regula, G., and Lantos, B. (2008). Control of an experimental mini quad-rotor uav. *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1252–1257. 3
- [40] SparkFun-Electronics (2011). Sparkfun 9 degrees of freedom - sensor stick. <https://www.sparkfun.com/products/10724>. Visto el 10 de Marzo del 2015. 52
- [41] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2004). *Robots Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, USA. 8
- [42] Suter, D., Hamel, T., and Mahony, R. (2002). Visual servo control using homography estimation for the stabilization of an x4-flyer. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2872–2877. IEEE. 2
-

- [43] Tanaka, K. and Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis; A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, Nueva York. 1, 24, 25, 30, 43
- [44] Tanenbaum, A. S. and Wetherall, D. J. (2010). *Computer Networks*. CRC Press, USA. 48
- [45] Tayebi, A. and McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):562–571. 2
- [46] Van Valkenburg, M. (1982). *Analog Filter Design*. Holt, Rinehart and Winston, New York, USA. 72, 73
- [47] Wei, X.-D. and Qing-He, W. (2014). Lqg/ltr controller design for 3-dof hover system. *Mathematical Problems in Engineering*. 2, 19
- [48] Yang, H., Bin, J., and Ke, Z. (2014). Direct self-repairing control for quadrotor helicopter attitude systems. *Mathematical Problems in Engineering*. 2, 19
- [49] Yodyium, T. and Mo-Yuen, C. (2003). Control methodologies in networked control systems. *SCIENCE DIRECT Control Engineering Practice*, 11(10):1099–1111. 46
- [50] Zampieri, S. (2008). Trends in networked control systems. In *Proceedings of the 17th World Congress*, page 2886–2894. IFAC. 45
- [51] Zuñiga, M., Ramírez, L., Romero, G., Lara, D., Rabhi, A., and Pegard, C. (20114). Estabilización de un quadrotor utilizando un control por realimentación de estados basado en el enfoque difuso de takagi-sugeno. *XXIX Congreso de instrumentación*, pages 2863–2869. 2, 19