



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

METAFLUIDO ACÚSTICO: HOMOGENEIZACIÓN  
PERIÓDICA POR CONVERGENCIA A DOS ESCALAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
HÉCTOR ANDRADE LOARCA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ANTONIO CAPELLA KORT



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F

MAYO, 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Metafluido Acústico: Homogeneización periódica por convergencia a dos escalas

por

Héctor Andrade Loarca

Tesis presentada para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

en la

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria, México D.F. Mayo, 2015

# Datos del jurado

1. Datos del alumno

Andrade  
Loarca  
Héctor  
55 45 31 07 01  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultado de Ciencias  
Física  
410004571

2. Datos del tutor

Dr.  
Antonio  
Capella  
Kort

3. Datos del sinodal 1

Dra.  
María de la Luz  
de Teresa  
de Oteyza

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Carlos  
Málaga  
Iguíñez

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Ramón Gabriel  
Plaza  
Villegas

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Miguel Arturo  
Ballesteros  
Montero

7. Datos del trabajo escrito

Metafluido Acústico: Homogeneización Periódica por convergencia a dos escalas  
134 p.  
2015

*A mis padres,  
sin los cuales nada de esto hubiera sido posible*

*If the doors of perception were cleansed  
every thing would appear to man as it is,  
Infinite.*

WILLIAM BLAKE

# Agradecimientos

El desarrollo de esta tesis fue un trabajo arduo y de mucho aprendizaje. La misma representa una etapa importante de mi desarrollo como científico. Muchas personas representaron un apoyo tanto moral como académico en su realización, para lo cual me permito este pequeño espacio en su recordatorio.

Principalmente agradezco mi tutor, el Dr. Antonio Capella Kort, por el apoyo y dedicación que me ha brindado en estos últimos años, tanto para el desarrollo de esta tesis como para mi desarrollo como matemático y persona.

También agradezco enormemente a mis padres Ma. Guadalupe Julieta Loarca Piña y Héctor Mario Andrade Montemayor, que representan un apoyo incondicional y amoroso así como una imagen completa de admiración para mí, sin los cuales nada de esto hubiera pasado. No puedo dejar de mencionar Cristina, Patricia y Sara por estar siempre ahí y ser la mejor familia que alguien pueda pedir.

No puedo olvidar a todos los profesores que han marcado mi carrera de Físico y Matemático, destacando a, Carlos Málaga, David P. Sanders, Ma. del Carmen Jorge y Jorge, Mónica Clapp, Guillermo Grabinsky, Carlos Prieto López, Mirna Villavicencio, Omar Morales y Francisco Struck.

A lo largo de la carrera conocí amigos de mucho valor, incondicionales, gente brillante y de enorme sensibilidad así como humildad. No podría mencionar a todos sin acabarme las hojas de este trabajo, pero las hojas sobran para poder expresar el agradecimiento y admiración que siento por cada persona especial con la que me topé en el camino.

La mención más grande va dirigida a la gran institución que me abrió sus puertas con toda su sabiduría y grandeza, la UNAM; sin duda uno de los lugares dónde me siento más cómodo en el mundo, y la cual no puede existir sin el gran pueblo que la mantiene a flote.

Finalmente, agradezco el apoyo del proyecto PAPIIT IN106213, "Análisis, modelado y simulación en ciencia de materiales" en la realización de esta tesis.

Héctor Andrade Loarca, Ciudad México.



# Estructura de la Tesis

En este trabajo estudiamos el problema de homogeneización para un fluido acústico compuesto por capas de dos fluidos distintos acomodados de forma periódica en una dirección. Como resultado de la homogeneización obtenemos un material cuyas propiedades no se presentan de forma natural. A estos materiales se les conoce como metafluidos. Para estudiar este problema dividiremos el presente trabajo en las siguientes partes:

- En la introducción presentaremos brevemente el contexto histórico y científico del desarrollo de los metamateriales y en particular de los metafluidos acústicos; también revisaremos una aplicación directa de un metafluido acústico, dada por el espejo acústico. Veremos además los dos tipos principales de metafluidos que se clasifican por la anisotropía en dos de sus propiedades física, la inercia y la deformación por esfuerzos. Finalmente presentaremos algunas simulaciones numéricas para el espejo.
- En la segunda parte definimos las distintas nociones de convergencia relevantes en los problemas de homogeneización. En particular revisaremos la idea de convergencia débil e introduciremos la convergencia a dos escalas de Allaire [1].
- En la tercera parte presentaremos el concepto de homogeneización e ilustraremos dos procedimientos de la misma: el método asintótico, que no es riguroso, y el método por convergencia a dos escalas que es riguroso y será el método que se usara para el modelo que nos interesa.
- En la cuarta parte, que es la sección principal de la tesis, se propondrá el diseño de un modelo físico para un metafluido acústico. Este diseño consiste en un arreglo de capas periódicas de dos fluidos normales. Usando el método de homogeneización cuando la periodicidad de las capas tiende a infinito se demostrará que el sistema resultante satisface las propiedades del metafluido que se usa en el diseño del espejo acústico. Se presentará la homogeneización de este por el método asintótico, propuesta por John D. Smith [18] y se realizará la homogeneización rigurosa por

convergencia a dos escalas, demostrando la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación macroscópica homogeneizada así como la forma y regularidad de las funciones límite.

- En los anexos se abordarán conceptos matemáticos clásicos también usados en la tesis, esto incluye, el concepto de espacios de Banach y Hilbert, así como de Sobolev, incluyendo desigualdades que dan propiedades de compacidad a estos y una descripción del método de elemento finito.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.	<b>Metamateriales: Contexto histórico y científico</b>	<b>2</b>
1.1.	Definición de metamateriales . . . . .	3
1.2.	Metafluidos acústicos . . . . .	4
2.	<b>Aplicaciones de los metafluidos acústicos</b>	<b>6</b>
2.1.	Espejo acústico en una dimensión . . . . .	7
2.2.	Espejo en dos dimensiones . . . . .	8
3.	<b>Tipos de metafluidos acústicos</b>	<b>11</b>
3.1.	Inercia anisotrópica . . . . .	12
3.2.	Materiales pentamodos . . . . .	15
3.3.	Simulación computacional (Espejo en 2D) . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Preliminares Matemáticos</b>	<b>22</b>
4.	<b>Nociones de convergencia</b>	<b>23</b>
4.1.	Convergencia débil . . . . .	24
4.2.	Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov . . . . .	28
4.3.	Convergencia a dos escalas . . . . .	33

<b>III</b>	<b>Homogeneización</b>	<b>44</b>
<b>5.</b>	<b>Homogeneización</b>	<b>45</b>
5.1.	Homogeneización asintótica . . . . .	46
5.2.	Homogeneización a dos escalas . . . . .	49
<b>IV</b>	<b>Homogeneización de un metafluido</b>	<b>54</b>
<b>6.</b>	<b>Modelo de un metafluido acústico</b>	<b>55</b>
6.1.	Homogenización por expansión asintótica . . . . .	56
6.2.	Convergencia a dos escalas . . . . .	64
6.2.1.	Existencia de soluciones del problema de dispersión . . . . .	68
6.2.2.	Existencia del límite a dos escalas . . . . .	79
<b>A.</b>		<b>96</b>
A.1.	Espacios de Banach y de Hilbert . . . . .	96
A.2.	Espacios de Sobolev . . . . .	102
A.2.1.	Conceptos principales . . . . .	102
A.3.	Desigualdades de Sobolev . . . . .	118
A.4.	Método de elemento finito . . . . .	124
<b>B.</b>	<b>Código de la simulación</b>	<b>130</b>

# Parte I

## Introducción

# Capítulo 1

## Metamateriales: Contexto histórico y científico

La ciencia de materiales ha representado una parte importante del desarrollo tecnológico moderno, los científicos han explorado a lo largo de la historia las propiedades de distintos materiales así como la posibilidad de la generación artificial de algunos de ellos, con objetivos tanto puramente científicos como de utilidad tecnológica. En este capítulo se presentará brevemente el contexto histórico y científico en el que un tipo específico de materiales (los metamateriales), que en los últimos años ha ganado importancia, se han desarrollado.

## 1.1. Definición de metamateriales

Todo material creado por el hombre o por la naturaleza tiene una composición interna, incluso en el caso de moléculas o átomos. En general para describir la interacción de un material con ondas externas de distintos tipos (por ejemplo las electromagnéticas o las mecánicas), solo necesitamos conocer ciertos parámetros característicos del material. En el caso electromagnético la permitividad eléctrica  $\epsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ , en el caso mecánico la densidad  $\rho$  y el módulo de compresibilidad  $\kappa$ . Estos coeficientes describen al material macroscópicamente como un material homogéneo, y se obtienen de promediar las contribuciones de la interacción de las ondas con la microestructura, dicha interacción depende de la relación del tamaño característico de la microestructura y la longitud de onda de la radiación con la que interactúa. En particular una onda es “ciega” a estructuras mucho más pequeñas que su longitud de onda.

La palabra metamaterial tiene como raíz griega la palabra “meta” ( $\mu\epsilon\tau\alpha$ ) que significa “más allá”. Estos materiales presentan estructuras diseñadas por el hombre a nanoescala (microestructuras) y propiedades no convencionales cuando interactúan con ondas de cierta longitud de onda que sea mayor a la longitud característica de la microestructura. Este tipo de materiales no son recientes, en la historia han existido varios materiales hechos por el hombre con inclusiones más pequeñas que la longitud de onda de la luz visible, en particular utilizados por algunos artistas están algunos vidrios.

La primera vez que la palabra “metamaterial” apareció en la literatura científica fue en el año 2000, Smith et al. [17] publicaron un artículo sobre materiales microestructurados con permeabilidad negativa a frecuencias de microondas, aunque varios autores atribuyen que dicha palabra fue acuñada un poco antes por el profesor de la Universidad de Texas Rodger M. Walser en 1999.

Una definición más completa de los metamateriales es la que sigue (consultar [7]): Un metamaterial es un material **artificialmente estructurado** cuya respuesta a un estímulo se debe a la respuesta conjunta o promedio de los elementos de su microestructura.

## 1.2. Metafluidos acústicos

Una clase interesante de metamateriales (propuestos teóricamente) son aquellos compuestos por fluidos, cuyas respuestas a ondas mecánicas (como las de sonido) son distintas a las que presentan la mayoría de los materiales acústicos.

El estudio de estos materiales es más reciente que el de los metamateriales ópticos, la primera vez que apareció el término “metafluid dynamics” en la literatura científica fue en una conferencia impartida en el “International Symposium on Theoretical and Computational Fluid Dynamics” en la Universidad Estatal de Florida el 7 de Noviembre de 1996. La teoría fue publicada en la revista “Physics of Fluids” bajo el título “Analogy between the Navier-Stokes and Maxwell’s equations: Application to Turbulence” [13], pero fue presentada con mayor detalle un año después en la tesis del mismo autor titulada “Analogy between the Electromagnetic and Hydrodynamic Equations: Application to Turbulence”, el título de estos trabajos tienen mucho sentido histórico ya que la idea de generar teorías sobre metafluidos nació en el sentido de generalizar la teoría ya estudiada de metamateriales ópticos.

Andrew N. Norris de la Universidad Rutgers en Piscataway, Nueva Jersey fue de los impulsores del estudio de estos materiales. Un metafluido acústico tiene como principal característica la “imitación” de dominios (con dominio me refiero a espacio ocupado por el fluido) de otros fluidos o metafluidos (esto es, puede responder ante ondas mecánicas de manera idéntica que como lo haría otro fluido pero con un dominio distinto). Una de las aplicaciones de esta característica es el llamado “cloaking” acústico o “sigilo” acústico ideal, esto es, el ocultamiento de algún dominio ante cierto tipo de ondas.

En general, la región imitada (esto es la región ocupada por el fluido acústico cuya respuesta es imitada) es más pequeña que la original y puede verse como una región compactada de la misma. La dinámica de un fluido está definida de manera general por su tensor de esfuerzos y su densidad (ambos incluidos en las ecuaciones constitutivas y de Navier-Stokes). En términos de estas cantidades existen principalmente dos tipos de metafluidos acústicos:



- Materiales con inercia anisotrópica (la densidad de masa de la cual depende la inercia del material tiene forma de matriz, esto es, tiene más de una dirección preferencial) y relación constitutiva con el tensor de esfuerzos usual. Este tipo de materiales se hacen normalmente usando capas de materiales isotrópicos distintos, cuya respuesta efectiva (macroscópica) resulta en la anisotropía inercial [14].
- Materiales con tensor de esfuerzos generalizado, que incluyen a los llamados elásticos pentamodos (este nombre viene del número de modos de vibraciones fundamentales) [14].

La propiedad principal de un metafluido acústico, como ya se mencionó, es la habilidad de imitar otro fluido acústico que ocupe un dominio distinto. A este fenómeno se le conoce como “acoustic mirage” cuando, por ejemplo, un observador escucha la reflexión de una pared de la onda de sonido distante cuando en verdad el eco se origina en una pared más cercana.

## Capítulo 2

# Aplicaciones de los metafluidos acústicos

Los metamateriales acústicos tienen varias aplicaciones interesantes muy parecidas a las aplicaciones de los metamateriales ópticos en el caso de las ondas electromagnéticas, ya que permiten manipular el recorrido del frente de onda dentro del material de la manera más conveniente. En este capítulo presentaremos una aplicación clásica de los metafluidos acústicos: el espejo, esto es, simular la respuesta de reflexión de un fluido normal con un metafluido de dimensiones arbitrariamente menores [14].

## 2.1. Espejo acústico en una dimensión

Vamos a suponer que tenemos un medio semi-infinito en  $x \geq 0$  con una densidad de masa uniforme  $\rho_0$  y un módulo de compresibilidad volumétrico  $\kappa_0$ . Y tenemos ondas mecánicas de presión  $p(x, t)$  y velocidad  $\vec{v}(x, t)$  (ambas definidas en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ) que en el límite acústico siguen las ecuaciones definidas en la región donde se encuentra el fluido (revisar [14]):

$$\begin{aligned}\rho \dot{\vec{v}} &= -\nabla p \\ \dot{p} &= -\kappa \nabla \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Dónde  $\dot{p}$  y  $\dot{\vec{v}}$  son las derivadas temporales de la presión y la velocidad respectivamente, suponiendo que la parte temporal ambas ondas es de la forma  $e^{-i\omega t}$ , obtenemos de estas dos ecuaciones la onda estacionaria para la presión dentro de la región  $0 \leq x \leq b$  (donde en cero tenemos una parte reflejante perfecta) dada por

$$\ddot{p} - c\Delta p = 0$$

La velocidad de la onda es  $c_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\rho_0}}$  y tiene condiciones de frontera continuas. Se reemplaza la región  $0 \leq x \leq b$  con una sección más corta  $0 \leq b - a \leq x \leq b$  (esto es, se recorre la pared reflejante a  $b - a$ ) lleno con un metafluido.

Queremos que un observador en  $x = b$  escuche una respuesta a la onda como si todo el medio fuera del fluido original. Hay dos condiciones que se tienen que cumplir para que esto pase

- No debe haber reflexión en  $x = b$ , es decir, la impedancia acústica es la misma en la región modificada que en la de antes.
- El tiempo de viaje de la onda que incide de 0 a  $b$  y de  $b - a$  a  $b$  no debe cambiar (para que ambas ondas lleguen al mismo tiempo al otro extremo del dominio).

Estas dos condiciones aseguran que la amplitud y fase de cualquier señal es la misma que antes. Sabemos que la velocidad en el metafluido es  $\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ . Para satisfacer las

condiciones anteriores se puede encontrar en [14] que se debe de cumplir

$$\begin{aligned} \rho c &= \rho_0 c_0 \text{ (misma impedancia)} \\ \frac{a}{c} &= \frac{b}{c_0} \text{ (mismo tiempo de viaje)} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{b}{a} \rho_0 \\ \kappa &= \frac{a}{b} \kappa_0 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

En este caso el metafluido es otro fluido normal. La masa total del fluido nuevo no cambia ( $\rho_0 b = \rho a$ ).

## 2.2. Espejo en dos dimensiones

Nos planteamos el problema anterior, pero en dos dimensiones. Esto es, tenemos una onda incidente oblicua de la forma

$$p = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \tag{2.2.1}$$

(con  $(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ) dónde  $\vec{k}$  es el vector de onda dado por  $\vec{k} = (\cos(\theta), \text{seno}(\theta))$  con  $\theta$  el ángulo de incidencia medido desde la normal a las interfaz, que en este caso es  $\hat{n} = (1, 0)$ , dicha onda recorre una distancia horizontal  $b$  en un tiempo de viaje originalmente de  $\frac{b}{\cos(\theta_0)c_0}$ .

Si hacemos una inclusión en  $0 \leq b - a \leq x_1 \leq b$  que se extiende en  $x_2$  sobre todo el dominio. Ahora el tiempo de viaje será  $\frac{a}{\cos(\theta)c}$ , donde  $\theta$  está definida por la ley de Snell.

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{c} = \frac{\text{sen}(\theta_0)}{c_0} \tag{2.2.2}$$

Al mismo tiempo exigimos que la reflectividad ( $R$ ) sea cero, esto es la impedancia

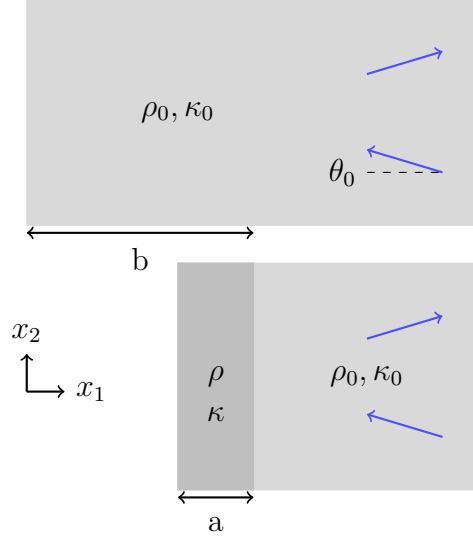


Figura 2-1: Espejo en dos dimensiones

( $Z$ ) de la capa modificada y el fluido original sean iguales (algo análogo a la condición de no reflexión en una dimensión), dadas por

$$R = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

$$Z = \frac{\rho c}{\cos(\theta)}$$
(2.2.3)

(para mayor referencia consultar [6])

La condición sobre la impedancia y el tiempo de viaje es en este caso

$$\frac{\rho c}{\cos(\theta)} = \frac{\rho_0 c_0}{\cos(\theta_0)},$$

$$\frac{a}{\cos(\theta)c} = \frac{b}{\cos(\theta_0)c_0}.$$
(2.2.4)

Despejando  $\rho$  de la primera ecuación y sustituyendo  $c_0$  obtenido en la segunda tenemos que

$$\kappa = \frac{a}{b} \kappa_0$$

$$\rho = \frac{a}{b} \frac{\rho_0}{2 \cos^2(\theta_0)} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2(2\theta_0)} \right]$$
(2.2.5)

La primera condición ya se había obtenido en el espejo en una dimensión, y la segunda condición nos dice que solo habrá reflexión en la dirección del ángulo de incidencia  $\theta_0$ . Para poder solucionar esta limitante necesitamos introducir más grados de libertad.

Hay dos maneras típicas de obtener estos grados de libertad extras: podemos introducir a un material inercia anisotrópica (la densidad de masa ahora adquiere un carácter tensorial), o podemos debilitar la relación clásica entre el tensor de esfuerzos ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) y el tensor de deformaciones ( $\boldsymbol{\epsilon}$ ) a una relación anisotrópica lineal, a este tipo de materiales (con relación anisotrópica de esfuerzo y deformación) se les llama materiales pentamodales ya que presentan cinco modos fundamentales de vibración. En el siguiente capítulo se precisa mejor esta idea.

## Capítulo 3

# Tipos de metafluidos acústicos

Hay dos formas comunes de generalizar las propiedades acústicas de un material, ya sea cambiando la isotropía de su inercia, y así cambiando las direcciones principales de movimiento, o cambiando la relación constitutiva entre la deformación del material y la fuerza ejercida sobre este que se resume en cambiar la isotropía de la relación entre el tensor de esfuerzos y el tensor de inercia [14]. En este capítulo presentaremos de manera detallada estos dos métodos.

### 3.1. Inercia anisotrópica

Para introducir el concepto de densidad de masa anisotrópica primero vamos a encontrar las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas de sonido en los fluidos. Dichas ecuaciones se encuentran imponiendo un balance entre la compresibilidad (cambio de volumen de los elementos del fluido) y la inercia del fluido. La aceleración de un elemento de fluido está dado por

$$\vec{a} = D\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

dónde  $\vec{v}$ , es la velocidad del fluido. Tomando el límite lineal (esto es, suponiendo que las perturbaciones de  $\vec{v}$  son muy pequeñas) despreciamos los términos cuadráticos, por lo tanto el término advectivo en la derivada total ( $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ ) no aparecerá en la ecuación anterior <sup>1</sup>. Se despreciarán los efectos de viscosidad, conducción de calor y fuerzas externas (incluyendo la gravedad). La naturaleza inercial de la densidad  $\rho$  del fluido se expresa aplicando a un elemento pequeño de fluido, la segunda ley de Newton, la cual dice que el producto de la masa por la aceleración por unidad de volumen es igual a la fuerza total aplicada por unidad de volumen. Las fuerzas aplicadas en este caso solo se deben a esfuerzos internos, por lo tanto la fuerza aplicada por unidad de volumen será  $-\nabla p$ , con  $p$  la presión acústica del fluido, con la cual obtenemos la ecuación

$$\rho \dot{\vec{v}} = -\nabla p$$

La compresibilidad implica que la densidad del fluido puede cambiar, para lo cual se debe de cumplir una ley de continuidad (conservación de masa) dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

---

<sup>1</sup>Cuán pequeñas necesitan ser las perturbaciones para que tengamos el límite lineal se puede leer más a detalle en el Capítulo 2 de *Lighthill, J., "Waves in Fluids", Cambridge University Press, Cambridge (2001)*



Linealizamos dicha ecuación suponiendo que el fluido tiene una densidad uniforme  $\rho_0$  que no cambia con el tiempo. De esta suposición y usando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos las ecuaciones para la presión y la velocidad de un fluido en el límite acústico

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}\dot{\vec{v}} &= -\nabla p \\ \dot{p} &= -\kappa\nabla \cdot \vec{v}\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Donde  $\vec{v}$  es el campo de velocidades y  $p$  la presión acústica y sus respectivas derivadas temporales  $\dot{\vec{v}}$  y  $\dot{p}$ . Ahora supongamos que la densidad de masa (que en este caso representa el comportamiento inercial del material, esto es, su resistencia hacia el movimiento cuando una fuerza se le aplica) es una matriz diagonal, esto significa que el material con dicha densidad presenta dos direcciones distintas de interacción inercial en lugar de una como es el caso de los materiales clásicos

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

**-Problema:** Encontrar  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\kappa$  tales las soluciones de la ecuación 3.1.1 se comporten igual en la región  $b < x_1 < \infty$  que las soluciones de la misma ecuación con los coeficientes  $\rho_0$  y  $\kappa_0$  correspondientes al fluido original.

Sustituyendo  $\boldsymbol{\rho}$  en la primera ecuación de 3.1.1 obtenemos

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = -\nabla p = - \begin{bmatrix} p_{,1} \\ p_{,2} \end{bmatrix}\tag{3.1.2}$$

donde  $p_{,j}$  es la derivada de  $p$  respecto a la coordenada  $x_j$ . Sea  $c_j = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_j}}$  (la velocidad de la onda de presión  $p$  en la dirección  $j$ ). Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,1} &= -\frac{p_{,11}}{\rho_1} \\ \dot{v}_{2,2} &= -\frac{p_{,22}}{\rho_2}\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

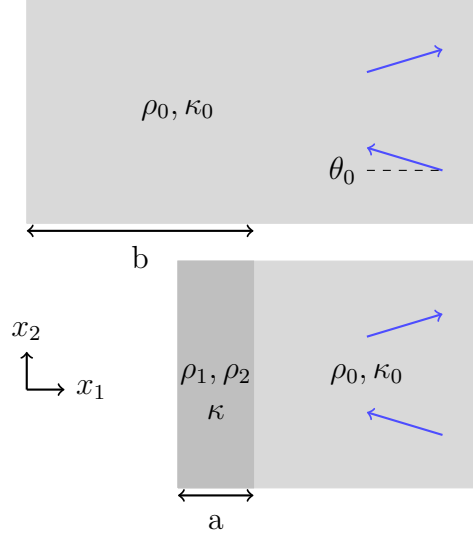


Figura 3-1: Espejo en dos dimensiones

También sabemos que

$$\dot{p} = -\kappa \nabla \cdot \vec{v} \text{ y derivando con respecto al tiempo } \ddot{p} = -\kappa \nabla \cdot \dot{\vec{v}} \quad (3.1.4)$$

Usando las ecuaciones (3.1.3) y (3.1.4) obtenemos una ecuación de onda anisotrópica para la presión.

$$\begin{aligned} \ddot{p} = -\kappa(v_{1,1} + v_{2,2}) &= \frac{\kappa}{\rho_1} p_{,11} + \frac{\kappa}{\rho_2} p_{,22} \\ \ddot{p} - c_1^2 p_{,11} - c_2^2 p_{,22} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

De ahora en adelante, nos referiremos a la onda de presión como la solución de la ecuación anterior. Sea  $v_f$  la velocidad de fase (la tasa de cambio de la fase, parte del periodo transcurrido desde el momento en que la onda empezó a propagarse, de cualquier componente de frecuencia) de la onda en dirección  $\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2$  (dónde ese define de manera general las entradas de  $v_f$  están dadas por  $(v_f)_i = \frac{\omega}{k_i}$ ) y  $\vec{v}_g$  la velocidad de grupo (velocidad de la envolvente de la onda con entradas  $(v_g)_i = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$ ), y están dadas por ([6] pag. 1).

$$\begin{aligned} v_f^2 &= c_1^2 n_1^2 + c_2^2 n_2^2 \\ \vec{v}_g &= v^{-1} (c_1^2 n_1 \hat{e}_1 + c_2^2 n_2 \hat{e}_2) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Con  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  los vectores unitarios en dirección  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. Podemos entonces encontrar la solución al problema en dos dimensiones. El tiempo de viaje una distancia  $a$  en dirección de  $e_i$  es:  $t = \frac{a}{\vec{v}_g \cdot \hat{e}_1}$ , la impedancia en dirección  $e_i$  es  $Z = \frac{\rho_1 v}{\cos(\theta)}$  y la dirección de propagación de la onda es  $(n_1, n_2) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Bajo el supuesto de condición de cero reflectividad y mismo tiempo de viaje obtenemos las condiciones de la sección 2.2.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 v}{\cos(\theta)} &= \frac{\rho_0 c_0}{\cos(\theta_0)} \\ \frac{av}{c_1^2 \cos(\theta)} &= \frac{b}{c_0 \cos(\theta_0)} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Con esto finalmente podemos obtener  $\rho$  y  $\kappa$ . Dividiendo estas ecuaciones obtenemos,  $\kappa = \frac{a}{b} \kappa_0$ , y usando la ley de Snell ( $v^{-1} \sin(\theta) = c_0^{-1} \sin(\theta_0)$ ) se obtienen.

$$\begin{aligned} \frac{c_0^2}{v^2} &= \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2}\right) \sin^2(\theta) \\ \frac{c_0^2}{v^2} &= \frac{c_0^2 \rho_1}{\kappa} + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \sin^2(\theta_0) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Finalmente resolviendo (3.1.7) y (3.1.8) obtenemos los parámetros buscados

$$\kappa = \frac{a}{b} \kappa_0, \rho_1 = \frac{b}{a} \rho_0, \rho_2 = \frac{a}{b} \rho_0 \quad (3.1.9)$$

Que claramente ya no dependen del ángulo de incidencia.

## 3.2. Materiales pentamodos

Ahora veremos que sucede si en lugar de tener inercia anisotrópica, tenemos rigidez anisotrópica, dejando la densidad isotrópica (respuesta ante las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el material con una sola dirección preferencial) y debilitamos ahora la relación constitutiva entre el tensor de esfuerzos  $\sigma$  y el tensor de deformaciones  $\epsilon = \frac{D\vec{v} + (D\vec{v})^t}{2}$  con  $\vec{v}$  la velocidad del fluido (que describen la relación que tiene las deformaciones del material y la fuerza que se le aplica a este en algún punto) que clásicamente tiene la

forma isotr3pica (con coeficientes escalares).

La relaci3n estandar es  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$  con  $p = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\kappa$  siendo  $p$  la presi3n e  $\mathbf{I}$  es la identidad para un fluido ideal [14]. Ahora, reemplazamos esta relaci3n por la siguiente relaci3n anisotr3pica en dos dimensiones

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \kappa(\mathbf{Q} : \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{Q} \\ \nabla \cdot \mathbf{Q} &= 0\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

(donde  $\mathbf{Q}$  es una funci3n a valores matriciales sim3tricos y dos dimensionales, cuya divergencia es cero por conservaci3n de la energa [14]). La notaci3n  $\mathbf{Q} : \boldsymbol{\epsilon}$  representa la doble contracci3n de dichas matrices, esto es  $\sum_i \sum_j Q_{i,j} \epsilon_{i,j}$  y  $\nabla \cdot \mathbf{Q} = \sum_i \frac{\partial Q_{i,j}}{\partial x_i}$ . Los materiales ac3sticos estandar corresponden a  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , donde recuperamos la relaci3n constitutiva cl3sica  $\boldsymbol{\sigma} = \kappa\boldsymbol{\epsilon}$ .

Podemos reescribir la primera ecuaci3n de (3.2.1) como  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{Q}$ , donde  $p = -\kappa(\mathbf{Q} : \boldsymbol{\epsilon})$ . Usando que la divergencia de  $\mathbf{Q}$  es cero, la ecuaci3n de movimiento y la ecuaci3n de continuidad del metafluido resultan respectivamente

$$\begin{aligned}\rho \dot{\vec{v}} &= -\mathbf{Q} \nabla p \\ \dot{p} &= -\kappa \mathbf{Q} : D\vec{v}\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

la combinaci3n de estas ecuaciones resulta en una ecuaci3n de onda escalar anisotr3pica para  $p$

$$\ddot{p} - \kappa \mathbf{Q} : \nabla(\rho^{-1} \mathbf{Q} \nabla p) = 0\tag{3.2.3}$$

Supongamos que  $\mathbf{Q}$  es constante y diagonal con entradas  $Q_1$  y  $Q_2$ , usando esto y la ecuaci3n de onda podemos obtener que las velocidades de fase ( $\vec{v}_f$ ) y de grupo ( $\vec{v}_g$ ) de la onda de presi3n  $p$  son

$$\begin{aligned}\vec{v}_f &= (\sqrt{c_1^2 n_1^2 + c_2^2 n_2^2}) \hat{n} \\ \vec{v}_g &= v^{-1}(c_1^2 n_1 \hat{e}_1 + c_2^2 n_2 \hat{e}_2)\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

(revisar donde [6])  $c_j = Q_j \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ , son las velocidades de la onda en cada dirección de propagación.

Si ahora usamos la ley de Snell y la condición de tiempo de viaje igual y de impedancia cero, obtenemos las siguientes relaciones

$$Q_1^2 = \frac{a\kappa_0}{b\kappa}, \quad Q_2^2 = \frac{b\rho}{a\rho_0}, \quad Q_1 Q_2 = \frac{b}{a}$$

De esto podemos darnos cuenta que la cantidad física que es importante aquí, es el producto de  $\kappa$  con  $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}$  (dónde se encuentran los términos  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_1 Q_2$ ), cada uno de los parámetros  $k, Q_1, Q_2$  pueden ser seleccionados independientemente de forma natural imponiendo  $\nabla \cdot \mathbf{Q}$  continua en la interfase, lo que hace que  $\mathbf{Q}\hat{n}$ , llamado vector de tracción, es continuo (en general pedir divergencia cero hace que la componente normal del campo sea continua en la interfase, un ejemplo análogo a esto es el clásico campo magnético  $\vec{H}$ ).

Ahora, en el caso  $\hat{n} = \hat{e}_1$ , tenemos  $Q_1 = 1$  y lo cual determina el resto de las relaciones

$$\rho = \frac{b}{a}\rho_0, \quad \kappa = \frac{a}{b}\kappa_0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Comparando con las ecuaciones obtenidas para el material con inercia anisotrópica, en cada caso, la densidad y la rigidez asociadas con la normal  $\hat{e}_1$  son iguales a las del caso en una dimensión,  $\frac{b}{a}\rho_0$  y  $\frac{a}{b}\kappa_0$ , respectivamente.

El material con inercia anisotrópica tiene una inercia menor en la dirección transversal  $\hat{e}_2$ ,  $\rho_2 = \frac{a}{b}\rho_0$  (ya que  $a < b$ , entonces  $\rho_1 < \rho_2$ ). El segundo metafluido ha incrementado su rigidez en esa dirección transversal ( $Q_2 > Q_1$ ). El efecto en cada caso es incrementar la velocidad de fase en la dirección transversal (tiene menos rigidez que impida su movimiento en esa dirección) comparado con la dirección normal.

### 3.3. Simulación computacional (Espejo en 2D)

Para simular las ecuaciones efectivas obtenidas en el material se utilizó una librería de Elemento Finito de C++ llamada FreeFem++- (se puede consultar la amplia documentación en [11]). Se simuló un metafluido acústico con inercia anisotrópica que presenta las propiedades de espejo presentadas en sección 3.2, esto es, se resolvió la ecuación de onda estacionaria anisotrópica (3.1.5) para la presión, suponiendo como parte temporal la onda armónica  $e^{-i\omega t}$  con  $\omega = 1$ . El fluido imitado tiene una densidad adimensional  $\rho_o = 1$  y coeficiente de módulo de compresibilidad  $\kappa_0 = 1$ , usando las ecuaciones (3.1.9) la densidad anisotrópica del metafluido que imitará al fluido original es  $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}$  con  $\rho_1 = \frac{b}{a}$ ,  $\rho_2 = \frac{a}{b}$  y su módulo de compresibilidad será  $\kappa = \frac{a}{b}$  (en nuestro caso el tamaño de fluido imitado es  $b = 10$  y del metafluido que imita es  $a = 5$ ). Usando que  $k_x = \omega/c_x$  y  $c_x = \sqrt{\kappa/\rho_1}$  (respectivamente para  $k_y$  y  $c_y$ ) se presentan a continuación las imágenes obtenidas de la solución estacionaria del espejo acústico en este fluido para una onda de presión incidente  $p(x, y) = (e^{ik_x x} + e^{-ik_x x})e^{ik_y y}$  (que se utilizó como Benchmark, ya que es una solución explícita al problema) para cuatro distintos ángulos de incidencia:  $\theta=0, 0.2, \frac{\pi}{4}$  y  $2$  (con  $\arctan(\theta) = k_y/k_x$ ), y con condiciones de frontera pseudo periódicas en las fronteras horizontales (para tener ondas incidentes a distintos ángulos), y de reflexión perfecta en la pared izquierda; se puede observar que en todos los ángulos es clara la imitación del espejo del fluido original (en todos los casos el solver utilizado para invertir la matriz de elemento finito fue Gradiente Conjugado y el error relativo de la onda reflejada por el metafluido en comparación con la onda reflejada por el fluido original fue de  $2 \times 10^{-8} \%$ , que se puede considerar como un cero computacional).

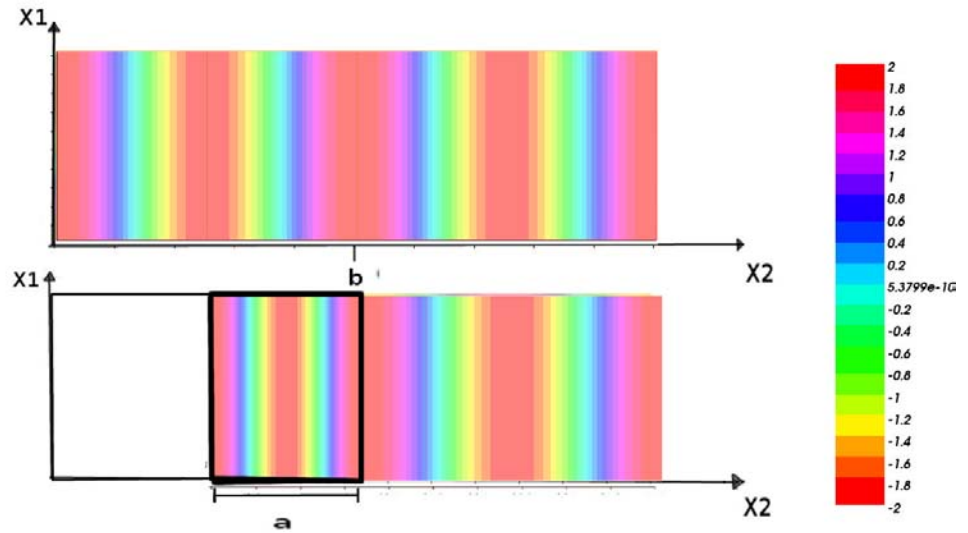


Figura 3-2: Curvas de nivel de onda estacionaria de presión en fluido clásico (arriba) y el metaflido (abajo), con ángulo de incidencia  $\theta = 0$

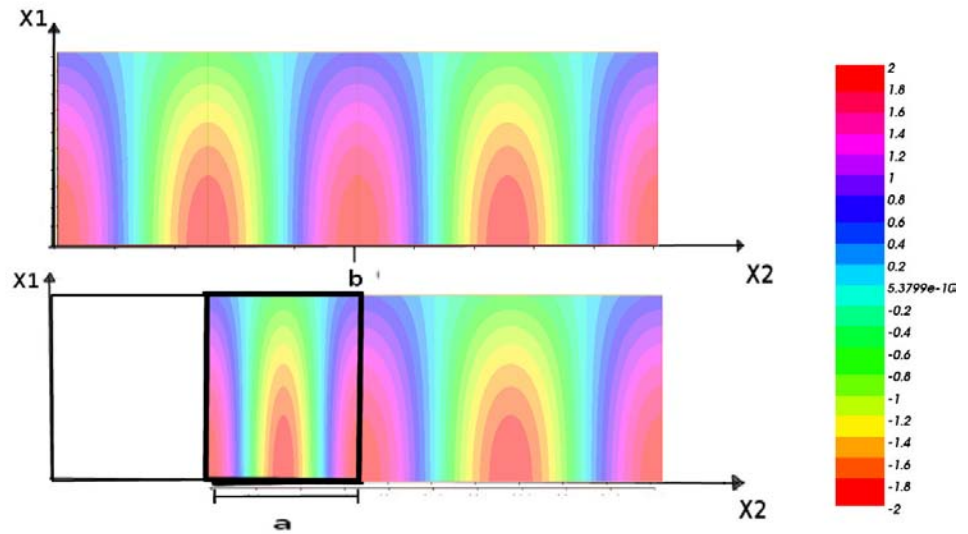


Figura 3-3: Curvas de nivel de onda estacionaria de presión en fluido clásico (arriba) y el metaflido (abajo), con una onda con ángulo de incidencia  $\theta = 0.2$

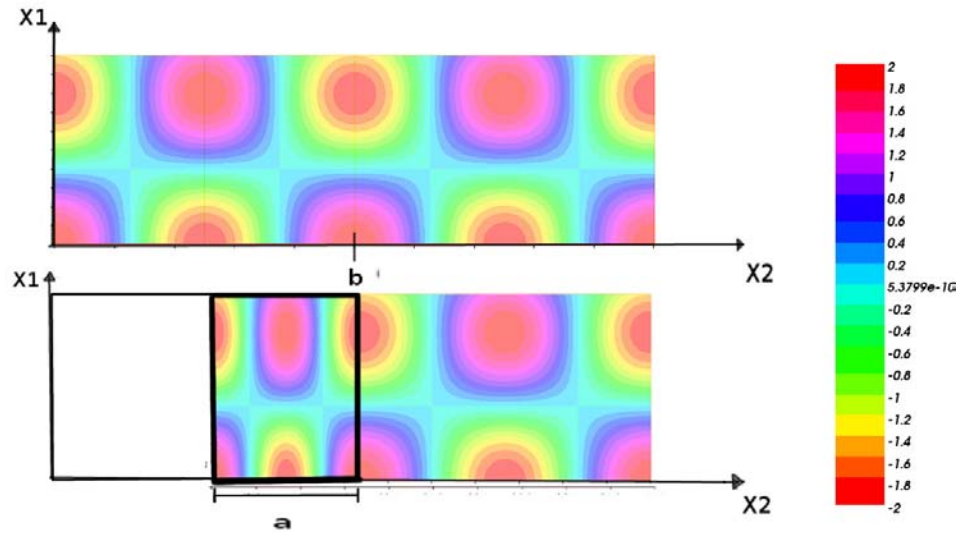


Figura 3-4: Curvas de nivel de onda estacionaria de presión en fluido clásico (arriba) y el metafluido (abajo), con una onda con ángulo de incidencia  $\theta = \pi/4$

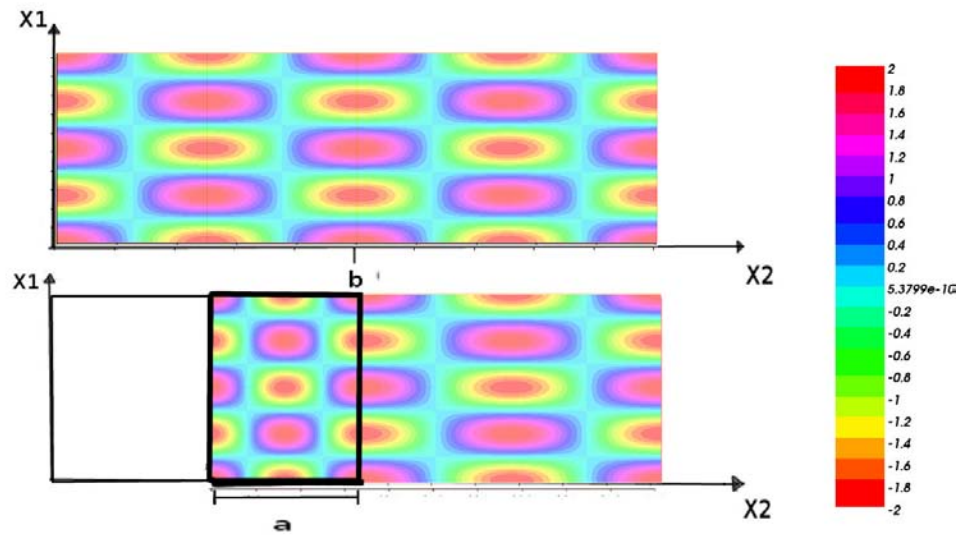


Figura 3-5: Curvas de nivel de onda estacionaria de presión en fluido clásico (arriba) y el metafluido (abajo), con una onda con ángulo de incidencia  $\theta = 2$



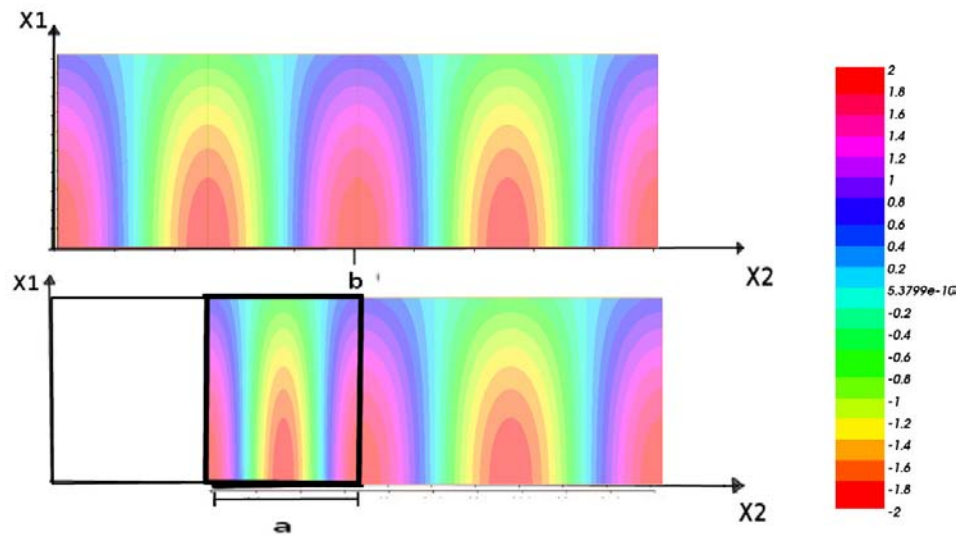


Figura 3-6: Curvas de nivel de onda estacionaria de presión en fluido clásico (arriba) y el metafluido (abajo), con una onda con ángulo de incidencia  $\theta = \pi/4$

## Parte II

# Preliminares Matemáticos

# Capítulo 4

## Nociones de convergencia

En muchos casos cuando queremos resolver una ecuación diferencial parcial en un espacio específico podemos usar espacios alternativos densos en el original (por ejemplo el espacio de las funciones suaves, que es denso en el espacio de las funciones  $p$ -integrables), y así obtener sucesiones de ecuaciones que son más fáciles de resolver cuyas soluciones convergen a la solución de la ecuación original, este método es muy utilizado en ecuaciones con coeficientes que varían rápidamente donde podemos definir dos escalas de variación. Al mismo tiempo si estamos resolviendo algún problema de ecuaciones parciales en el espacio de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$  (definición A.2.6) para encontrar algunos estimadores sobre nuestras funciones solución nos va a ser útil saber en qué otros espacios está contenido este, i.e. cuándo se cumple que  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  para alguna  $q$ , y qué propiedades debe de cumplir la  $q$  para que esto suceda. Es importante saber el criterio de convergencia de nuestras soluciones; y para ello existen distintos tipos de convergencia, la más conocida es la convergencia fuerte, que es la convergencia respecto a la métrica del espacio. En este capítulo se introducirán otras dos nociones de convergencia, la débil que es más general que la fuerte y la convergencia a dos escalas que se puede posicionar en medio de la débil y la fuerte, también se demostrará el teorema de compacidad de Rellich Kondrachov (Teorema 4.2.7), que caracteriza la compacidad de los encajes entre espacio de Sobolev y Lebesgue. Dichos conceptos nos ayudarán a resolver el problema principal de esta tesis.

## 4.1. Convergencia débil

Se sabe que en  $\mathbb{R}^n$  cualquier sucesión acotada tiene una subsucesión fuertemente convergente (converge en la manera usual con la norma del espacio), a este resultado se le llama Teorema de Bolzano-Weierstrass. En general, en un espacio de Banach arbitrario (particularmente, de dimensión infinita) esto no se cumple. En consecuencia a esto la bola cerrada unitaria en un espacio normado es compacta si y solo si el espacio es de dimensión finita. La compacidad nos sirve para encontrar subsucesiones convergentes de una sucesión acotada en esa bola. A continuación se presentará un concepto más débil de convergencia, para el cual se cumple que para toda sucesión acotada existe una subsucesión que converge en este sentido (revisar [9] y [15]).

**Definición 4.1.1** Una sucesión  $(u_k)$  en un espacio de Hilbert real  $H$  con producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  **converge débilmente a  $u$**  si, para cada  $v \in H$ , se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

En este caso se dice que  $u$  es el límite débil de  $u_k$  y se denota como  $u_k \rightharpoonup u$ .

Por continuidad del producto interior (o producto escalar) si una sucesión  $u_k$  converge fuertemente a  $u$ , entonces converge débilmente, ya que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, v \rangle = \langle \lim_{k \rightarrow \infty} u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle$ .

Aunque en este caso estamos hablando de convergencia débil en un espacio de Hilbert y por ello usamos el concepto de producto interior, la noción de convergencia débil se puede extender a cualquier espacio de Banach de la siguiente manera.

Sea  $u_k$  una sucesión en el espacio de Banach  $V$ , y sea  $V^*$  el espacio dual topológico de  $V$  (Definición A.1.9); se dice que  $u_k$  converge débilmente a  $u$  en  $V$  si  $f(u_k)$  converge a  $f(u)$  para todo  $f$  funcional en  $V^*$ ; por esto se demuestra que la convergencia débil es la dada por la topología inducida en  $V$  por su dual topológico, llamada topología débil.

**Proposición 4.1.2** (a) Si  $u_k \rightharpoonup u$  en un espacio de Hilbert real  $H$ , entonces

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\| \quad (4.1.1)$$

(b) Si  $u_k \rightharpoonup u$  en  $H$ , entonces  $u_k \rightarrow u$  en  $H$  si y sólo si

$$\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\| \quad (4.1.2)$$

**Demostración.** (a) Supongamos que  $u_k \rightharpoonup u$  en  $H$ . Si  $u = 0$  la desigualdad 4.1.1 se satisface trivialmente. Entonces supongamos que  $u \neq 0$ , usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\frac{\langle u_k, u \rangle}{\|u\|} \leq \|u_k\| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como  $\langle u_k, u \rangle \rightarrow \|u\|^2$ , tomando los límites inferiores tenemos que

$$\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle u_k, u \rangle}{\|u\|} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle u_k, u \rangle}{\|u\|} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|$$

(b) Si  $u_k \rightharpoonup u$  en  $H$ , entonces  $\langle u_k, u \rangle \rightarrow \|u\|^2$ . Usando la identidad

$$\|u_k - u\|^2 = \|u_k\|^2 - 2\langle u_k, u \rangle + \|u\|^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

obtenemos finalmente que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|^2 = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\| = \|u\|,$$

■

**Teorema 4.1.3** (Revisar pag. 356-359 de [9]) Toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert real  $H$  contiene una subsucesión débilmente convergente en  $H$ .

**Demostración.** Sea  $u_k$  una sucesión acotada en  $H$  y sea  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\|u_k\| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$|\langle u_k, u_1 \rangle| \leq \|u_k\| \|u_1\| \leq c \|u_1\|$$

Con esto tenemos que la sucesión de número reales  $\langle u_k, u_1 \rangle$  está acotada y por tanto existe una subsucesión  $u_k^1$  de  $u_k$  tal que  $\langle u_k^1, u_1 \rangle$  converge en  $\mathbb{R}$ . La sucesión  $\langle u_k^1, u_2 \rangle$  también está acotada, por lo tanto existe una subsucesión  $u_k^2$  de  $u_k^1$  tal que  $\langle u_k^2, u_2 \rangle$  que converge en  $\mathbb{R}$ . Haciendo lo mismo obtenemos, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , una subsucesión  $(u_k^m)$  de  $(u_k^{m-1})$  tal que  $\langle u_k^m, u_m \rangle$  converge en  $\mathbb{R}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Definamos  $w_k := u_k^k$ . La sucesión  $w_k$  es una subsucesión de  $u_k$ . Para probar que  $w_k$  converge débilmente en  $H$ , primero vamos a probar que la sucesión de reales  $\langle w_k, v \rangle$  converge en  $\mathbb{R} \ \forall v \in H$ . Hagámoslo por casos.

**Caso 1:**  $v = u_m$ . Observemos que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , la subsucesión  $(w_m, w_{m+1}, \dots)$  de  $w_k$  es una subsucesión de  $u_j^m$ . Por lo tanto,  $\langle w_k, u_m \rangle$  converge en  $\mathbb{R}$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

**Caso 2:**  $v \in V := \text{lin}(\{u_m : m \in \mathbb{N}\})$  (El espacio generado por  $u_m$ ). Usando el **Caso 1** y la bilinealidad del producto escalar obtenemos que  $\langle w_k, v \rangle$  converge.

**Caso 3:**  $v \in \bar{V}$  (denotando la cerradura de  $V$  en  $H$ ) En este caso, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $w \in V$  tal que  $\|v - w\| < \frac{\epsilon}{4c}$ . Usando el **Caso 2** tenemos que la sucesión  $\langle w_k, w \rangle$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|\langle w_k - w_j, w \rangle| < \frac{\epsilon}{2}$  si  $k, j \geq k_0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\langle w_k - w_j, v \rangle| &\leq |\langle w_k - w_j, v - w \rangle| + |\langle w_k - w_j, w \rangle| \\ &\leq \|w_k - w_j\| \|v - w\| + |\langle w_k - w_j, w \rangle| \\ &\leq (\|w_k\| + \|w_j\|) \|v - w\| + |\langle w_k - w_j, w \rangle| \\ &< 2c \frac{\epsilon}{4c} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ si } k, j \geq k_0. \end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión  $\langle w_k, v \rangle$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$  y, por lo tanto, converge.

**Caso 4:**  $v \in H$ . Como  $\bar{V}$  es un conjunto cerrado en  $H$ , se tiene que  $v = w + z$  con  $w \in \bar{V}$  y  $z \in \bar{V}^\perp$ . Por lo tanto,

$$\langle w_k, v \rangle = \langle w_k, w \rangle + \langle w_k, z \rangle = \langle w_k, w \rangle.$$

Aplicando finalmente el **Caso 3** podemos concluir que  $\langle w_k, w \rangle$  converge en  $\mathbb{R}$ . Basta construir al límite débil  $u$ , tomemos como funciones prueba  $v = \hat{e}_n$  (con  $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $H$ ), por lo tanto para toda  $n \in \mathbb{N}$

$$\langle u_k, v_n \rangle \rightarrow c_n$$

Afirmamos que  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n$  es el límite débil, primero veamos que está en el espacio, esto implicaría ver que  $\|\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n\| \leq \infty$ , usando que la base es ortonormal tenemos que demostrar que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \leq \infty$ , si tomamos la suma finita  $\sum_n = 1^m c_n e_n$  y la usamos como función prueba, tenemos que existe una constante  $C$  tal que  $\langle u_k, \sum_n = 1^m c_n e_n \rangle \leq C \|\sum_{n=1}^m c_n e_n\|$  (al ser acotada la sucesión de productos punto, pero tenemos que  $\langle u_k, v_n \rangle \rightarrow c_n$  por lo tanto obtenemos la desigualdad

$$\sum_{n=1}^m |c_n|^2 \leq C \left( \sum_{n=1}^m |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

esto es, para toda  $m \in \mathbb{N}$

$$\left( \sum_{n=1}^m |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C$$

por lo tanto la suma es finita, esto implica que  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n \in H$ , claramente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k, e_n \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n, e_n \right\rangle$$

por lo tanto  $u$  es el límite débil de la subsucesión  $u_k$  en  $H$ . ■

## 4.2. Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado,  $p \in [1, n)$  y  $q \in [1, p^*]$  (dónde  $p^* = \frac{np}{n-p}$ ), entonces  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  y dicha inclusión es continua; pero si  $q \in [1, p^*)$  esta inclusión tiene otra propiedad, también es un operador compacto, dicho concepto se define a continuación.

**Definición 4.2.1** *Se dice que una función  $F : X \rightarrow Y$  entre espacios métricos es **compacta** si para cualquier subconjunto acotado  $A$  de  $X$  se cumple que  $F(A) := \{F(a) : a \in A\}$  es relativamente compacto en  $Y$ .*

Equivalentemente,  $F : X \rightarrow Y$  es compacto si para toda sucesión acotada  $\{x_n\}$  en  $X$ , la sucesión  $\{F(x_n)\}$  tiene una subsucesión convergente en  $Y$ .

**Lema 4.2.2** *Si  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  con  $p \geq 1$ , y  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , entonces*

$$\|T_\xi u - u\|_p \leq \|\nabla u\|_p |\xi|$$

donde  $T_\xi u = u(x - \xi)$ .

**Demostración.** Sean  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ . Por el teorema fundamental del cálculo, si  $t \in \mathbb{R}^n$  y definimos la función  $f(t) := \varphi(x - t\xi)$ , tenemos que

$$\varphi(x - \xi) - \varphi(x) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = - \int_0^1 (\nabla \varphi(x - t\xi) \cdot \xi) dt$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|\varphi(x - \xi) - \varphi(x)| \leq \int_0^1 |\nabla \varphi(x - t\xi)| |\xi| dt \leq \left( \int_0^1 |\nabla \varphi(x - t\xi)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} |\xi|$$

Por lo tanto, integrando sobre todo  $\mathbb{R}^n$  obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x - \xi) - \varphi(x)|^p dx \leq \left( \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(x - t\xi)|^p dx dt \right) |\xi|^p = \|\nabla \varphi\|_p^p |\xi|^p$$



esto es,

$$\|T_\xi \varphi - \varphi\|_p \leq \|\nabla \varphi\|_p |\xi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ y } \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Ahora, sea  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  y tomemos una sucesión  $\{\varphi_k\} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\varphi \rightarrow u$  en  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $\|\varphi_k - u\|_p \rightarrow 0$ ,  $\|T_\xi \varphi_k - T_\xi u\|_p \rightarrow 0$  y  $\|\nabla \varphi_k - \nabla u\|_p \rightarrow 0$ , de la desigualdad anterior tenemos finalmente que

$$\|T_\xi u - u\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_\xi \varphi_k - \varphi_k\|_p \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \varphi_k\|_p |\xi| = \|\nabla u\|_p |\xi|$$

■

Antes de demostrar el Teorema de Rellich-Kondrachov vamos a enunciar algunos Teoremas y Corolarios que nos servirán para ello. Para demostrar la compacidad de algún conjunto en un espacio métrico nos es útil una caracterización general de la compacidad de un espacio de funciones de un espacio métrico a otro dada por el Teorema de Arzelà-Ascoli, y una caracterización particular para los espacios  $L^p$  dada por el Teorema de Kolmogorov-Riesz-Frèchet, a continuación se enuncian ambos resultados.

**Teorema 4.2.3 (Arzelà-Ascoli)** *Sea  $K$  un espacio métrico compacto y  $H$  un subespacio acotado de  $C(K)$  (el espacio de las funciones continuas sobre  $K$  con valores en  $\mathbb{R}$ ). Supongamos que  $H$  es uniformemente equicontinuo, esto es:*

*Para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x_1, x_2) < \delta$ , entonces  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$  para toda  $f \in H$ . Entonces la cerradura de  $H$  en  $C(K)$  es compacta.*

La demostración de este famoso teorema se puede encontrar en [15], pag. 369.

**Teorema 4.2.4 (Kolmogorov-Riesz-Frèchet)** *Sean  $\Omega$  y  $\omega$  abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , con  $\omega \subset \subset \Omega$  (esto es, existe un compacto  $B$  tal que  $\omega \subset B \subset \Omega$ , que denotaremos aquí como compactamente incluido) y  $K \subset L^p(\Omega)$  acotado,  $p \geq 1$ , con la siguiente propiedad: para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\delta \in \{0, \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$  tal que*

$$\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } |\xi| < \delta \text{ y } \forall f \in K$$

Entonces  $K_\omega := \{f\chi_\omega : f \in K\}$  es relativamente compacto en  $L^p(\omega)$

La demostración se puede encontrar en [5], pag. 111. A continuación se enunciarán y demostrarán un Corolario y un Teorema que serán útiles para finalmente demostrar el Teorema de Rellich-Kondrachov.

**Corolario 4.2.5** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $K \subset L^p(\Omega)$  acotado con  $p \geq 1$ , con las siguientes características

(i) Para toda  $\epsilon > 0$  y  $\omega \subset\subset \Omega$  abierto existe  $\delta \in \{0, \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$  tal que

$$\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } |\xi| < \delta \text{ y } \forall f \in K$$

(ii) Para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\omega \subset\subset \Omega$  abierto tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \epsilon \quad \forall f \in K$$

Entonces  $K$  es relativamente compacto en  $L^p(\Omega)$ .

**Demostración.** Sea  $\epsilon > 0$  dada, escogamos un abierto  $\omega \subset\subset \Omega$  tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \epsilon \quad \forall f \in K$$

Por el Teorema 4.2.4  $K_\omega$  es relativamente compacto en  $L^p(\omega)$  y, por lo tanto, existen  $g_1, \dots, g_m \in K_\omega$  tales que

$$K_\omega \subset B_{L^p(\omega)}(g_1, \epsilon) \cup \dots \cup B_{L^p(\omega)}(g_m, \epsilon)$$

(donde  $B_{L^p(\omega)}(g_i, \epsilon)$  es la bola con centro en  $g_i$  con radio  $\epsilon$  en  $L^p(\omega)$ ). Es decir, para cada  $f \in K$  existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} < \epsilon$ . Por lo tanto

$$\int_\Omega |f - g_i|^p = \int_\omega |f - g_i|^p + \int_{\Omega \setminus \omega} |f|^p < 2\epsilon^p$$

Esto demuestra que

$$K \subset B_{L^p(\Omega)}(g_1, 2^{\frac{1}{p}}\epsilon) \cup \dots \cup B_{L^p(\Omega)}(g_m, 2^{\frac{1}{p}}\epsilon)$$

Por lo tanto,  $K$  es totalmente acotado, entonces  $\bar{K}$  es totalmente acotado y cerrado, esto  $K$  es relativamente compacto en  $L^p(\Omega)$  (más sobre esta noción de compacidad relativa se puede encontrar en [9]). ■

El último teorema que se va a demostrar antes de proceder con el Teorema de Rellich-Kondrachov es la desigualdad de interpolación, muy útil para encontrar algunas inclusiones de espacios  $L^p$ .

**Teorema 4.2.6 (Desigualdad de interpolación)** *Sea  $1 \leq s < r \leq t \leq \infty$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , tal que  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$  y sea  $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ . Entonces  $u \in L^r(\Omega)$  y*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^s(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta}$$

**Demostración.** Escribamos primero

$$\int_{\Omega} |u|^r dx = \int_{\Omega} |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta)r} dx$$

Sea  $p = \frac{s}{\theta r}$  y  $q = \frac{t}{(1-\theta)r}$ , como por hipótesis  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , podemos aplicar la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^r dx &\leq \left( \int_{\Omega} (|u|^{\theta r})^{\frac{s}{\theta r}} dx \right)^{\frac{\theta r}{s}} \left( \int_{\Omega} (|u|^{(1-\theta)r})^{\frac{t}{(1-\theta)r}} dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} \\ &= \left( \int_{\Omega} |u|^s dx \right)^{\frac{\theta r}{s}} \left( \int_{\Omega} |u|^t dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} \\ &= \left( \|u\|_{L^s(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta} \right)^r \end{aligned}$$

■

Finalmente, se demostrará el Teorema principal

**Teorema 4.2.7 (Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov)** *Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado,  $p \in [1, n)$  y  $q \in [1, p^*)$  (con  $p^* = \frac{np}{n-p}$  el coeficiente crítico de Sobolev), entonces la inclusión  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  es compacta, esto es, toda sucesión acotada en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  contiene una subsucesión convergente en  $L^q(\Omega)$ .*

**Demostración.** Sea  $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  acotado. Usando la desigualdad de Poincaré (Teorema A.3.4) tenemos que  $A$  es un subconjunto acotado de  $L^q(\Omega)$  para toda  $q \in [1, p^*]$ . Ahora, para probar que  $A$  es relativamente compacto en  $L^q(\Omega)$ , se demostrará que cumple las hipótesis (i) y (ii) del Corolario 4.2.5 cuando  $q \in [1, p^*)$ .

Sean  $\epsilon > 0$  y  $\omega$  un abierto tal que  $\omega \subset\subset \Omega$ . Sea  $C > 0$  tal que  $\|u\|_{p^*} \leq C \forall u \in A$ . Entonces  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|\xi| \in \{0, \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$  se cumple que

$$\|T_\xi u\|_{L^{p^*}(\omega)}^{p^*} = \int_\omega |u(x - \xi)|^{p^*} dx \leq \int_\Omega |u(x)|^{p^*} dx = \|u\|_{p^*}^{p^*} \leq C^{p^*}$$

y esto para toda  $u \in A$ .

Usando la desigualdad de interpolación (Teorema 4.2.6), el Lema 4.2.2 y la afirmación usada en el Teorema A.3.4, podemos concluir que existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|T_\xi u - u\|_{L^q(\omega)} &\leq \|T_\xi u - u\|_{L^1(\omega)}^\alpha \|T_\xi u - u\|_{L^{p^*}(\omega)}^{1-\alpha} \\ &\leq (2C)^{1-\alpha} \|T_\xi u - u\|_{L^1(\omega)}^\alpha \\ &\leq (2C)^{1-\alpha} \|\nabla u\|_1^\alpha |\xi|^\alpha \leq C_1 |\xi|^\alpha \quad \text{para toda } u \in A \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  cumple que

$$\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

Notemos que  $\alpha > 0$  si  $q \in [1, p^*)$ . Por lo tanto, tomando  $\delta \in \{0, \text{dist}(\omega, \Omega \setminus \omega)\}$  con  $\delta < \left(\frac{1}{C_1}\right)^\frac{1}{\alpha}$  se tiene que

$$\|T_\xi u - u\|_{L^q(\omega)} < \epsilon \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } |\xi| < \delta \text{ y } \forall u \in A$$

Esto es,  $A$  cumple con la hipótesis (i) del Corolario 4.2.5 cuando  $q \in [1, p^*)$ .

Por otro lado, como  $\Omega$  es acotado, la afirmación usada en el Teorema A.3.4 asegura que para toda  $\omega \subset \Omega$  abierto se cumple que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)} &\leq |\Omega \setminus \omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \omega)} \\ &\leq C |\Omega \setminus \omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \quad \text{para toda } u \in A \end{aligned}$$

Como  $q < p^*$ , si elegimos un abierto  $\omega \subset \subset \Omega$  tal que  $|\Omega \setminus \omega| \leq \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{p^*q}{p^*-1}}$ , obtenemos finalmente que

$$\|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)} < \epsilon \quad \forall u \in A$$

Por lo tanto,  $A$  cumple con la hipótesis (ii) del Corolario 4.2.5 cuando  $q \in [1, p^*)$ , y en consecuencia,  $A$  es relativamente compacto en  $L^q(\Omega)$ . ■

### 4.3. Convergencia a dos escalas

Existe otra noción de convergencia cuando una función presenta oscilaciones a distintas escalas, la llamada convergencia a dos escalas. Para estudiar esta idea definimos los siguientes conceptos:

$\Omega$ -Conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  (no necesariamente acotado).

$Y = [0, 1]^n$ -Cubo cerrado unitario.

$C_{\#}(Y)$ - El espacio de Banach de las funciones continuas y  $Y$ -periódicas

$C_{\#}^{\infty}(Y)$ -Espacio de las funciones en  $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  y  $Y$ -periódicas, don del signo  $\#$  representará periodicidad de ahora en adelante.

$D[\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)]$ -Espacio de las funciones  $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto en  $\Omega$  y con valores en el espacio  $C_{\#}^{\infty}(Y)$ .

(En todos los casos anteriores se está tomando a  $C^{\infty}$  con la topología compactoabierta).

**Definición 4.3.1** Una sucesión (en este caso y en lo que sigue del texto me referiré como sucesión a una red de funciones indexadas con reales  $\epsilon$ )  $(u_\epsilon) \in L^2(\Omega)$  se dice que converge a dos escalas al límite  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  si, para toda función  $\psi(x, y) \in D[\Omega; C_\#^\infty(Y)]$  tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

Y se denotará como  $u_\epsilon \rightarrow u_0$ .

Así como existen teoremas de compacidad para el caso de convergencia fuerte en espacios de dimensión finita (Teorema de Bolzano-Wierestrass) o para convergencia débil en espacio de dimensión infinita (Teorema 4.1.3), existe un teorema de compacidad para el caso de las sucesiones acotadas con la convergencia **a dos escalas**, para poder demostrar dicho teorema necesitamos algunos resultados previos.

**Lema 4.3.2** Sea  $B(\Omega, Y)$  el espacio de Banach  $L^2[\Omega; C_\#(Y)]$  (funciones en  $L^2(\Omega)$  con valores en  $C_\#(Y)$ ), si  $\Omega$  no es acotado, o cualquiera de los espacios de Banach  $L^2[\Omega; C_\#(Y)]$ ,  $L^2_\#[Y; C(\bar{\Omega})]$ ,  $C[\bar{\Omega}; C_\#(Y)]$  si  $\Omega$  es acotado. Entonces  $B(\Omega, Y)$  tiene las siguientes propiedades

(i)  $B(\Omega, Y)$  es un espacio de Banach Separable (es decir, contiene una familia contable densa).

(ii)  $B(\Omega, Y)$  es denso en  $L^2(\Omega \times Y)$ .

(iii) Para cualquier  $\psi(x, y) \in B(\Omega, Y)$ , la función  $\psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)$  es medible y satisface

$$\left\| \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi(x, y)\|_{B(\Omega, Y)}$$

(iv) Para cualquier  $\psi(x, y) \in B(\Omega, Y)$ , se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \psi(x, y)^2 dx dy$$

La demostración de este teorema va más allá del alcance de la Tesis y se puede encontrar en [1].

A continuación se presenta la demostración del Teorema de compacidad correspondiente a la convergencia a dos escalas usando el Lema 4.3.2.

**Teorema 4.3.3** *Para toda sucesión acotada  $(u_\epsilon(x)) \in L^2(\Omega)$  existe  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  tal que se puede extraer una subsucesión que converge a dos escalas a  $u_0$ .*

**Demostración.** Sea  $(u_\epsilon)$  una sucesión acotada en  $L^2(\Omega)$ , entonces existe  $C$  constante tal que para toda  $\epsilon$   $\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ . Sea  $\psi(x, y) \in B(\Omega, Y)$ , por el inciso (iii) del Lema 4.3.2 tenemos que

$$\left| \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx \right| \leq C \left\| \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\psi(x, y)\|_{B(\Omega, Y)} \quad (4.3.1)$$

Entonces, para  $\epsilon$  fija, la parte izquierda de (4.3.1) es una función lineal en  $B(\Omega, Y)$  acotada. Sea  $B^*(\Omega, Y)$  el espacio dual topológico de  $B(\Omega, Y)$ . Definimos a la función  $\mu_\epsilon \in B^*(\Omega, Y)$  por

$$\langle \mu_\epsilon, \psi \rangle = \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx \quad (4.3.2)$$

(donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto dual en el espacio  $B(\Omega, Y)$ , i.e. la aplicación del funcional  $\mu_\epsilon$  a la función  $\psi$ ). La sucesión  $\mu_\epsilon$  es acotada en  $B^*(\Omega, Y)$ . Como  $B(\Omega, Y)$  es separable (por (i) del Lema 4.3.2), entonces por el Teorema de Banach-Alaoglu [15] para cualquier sucesión acotada de su dual uno puede extraer una subsucesión que converge en la topología débil\* (i.e. la sucesión de imágenes de la sucesión bajo cualquier funcional lineal acotado converge). Por lo tanto existe  $\mu_0 \in B^*(\Omega, Y)$  tal que

$$\langle \mu_{\epsilon'}, \psi \rangle \rightarrow \langle \mu_0, \psi \rangle \quad \text{para toda } \psi(x, y) \in B(\Omega, Y) \quad (4.3.3)$$

donde  $\mu_{\epsilon'}$  es una subsucesión de  $\mu_\epsilon$  que por comodidad denotaremos solo por  $\mu_\epsilon$ . Usando (4.3.2) y (4.3.3) tenemos que dada esa subsucesión y para toda  $\psi \in B(\Omega, Y)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \langle \mu_0, \psi \rangle. \quad (4.3.4)$$

Usando (iv) del Lema 4.3.2 tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} = \|\psi(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (4.3.5)$$

Regresando a (4.3.1) y usando (4.3.4) y (4.3.5) tenemos que

$$|\langle \mu_0, \psi \rangle| \leq C \|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Pero  $B(\Omega, Y)$  es densa en  $L^2(\Omega \times Y)$  (inciso (ii) del Lema 4.3.2), y a  $\mu_0$  por teorema de representación de Riesz lo podemos identificar con una función  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ , esto es

$$\langle \mu_0, \psi \rangle = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy \quad (4.3.6)$$

Finalmente los resultados (4.3.4) y (4.3.6) demuestran el teorema. ■

A continuación veremos como la convergencia a dos escalas contiene más información (es más fuerte) que la convergencia  $L^2$ -débil; algunas de las oscilaciones de una sucesión son capturadas en su límite a dos escalas, mientras que no sucede esto en la convergencia débil. Cuando todas las oscilaciones son capturadas, uno puede obtener la convergencia fuerte.

**Teorema 4.3.4** *Sea  $u_{\epsilon} \in L^2(\Omega)$  una sucesión que converge a dos escalas al límite  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ , entonces*

(i)  *$u_{\epsilon}$  converge también a  $u(x) = \int_Y u_0(x, y) dy$  débilmente en  $L^2(\Omega)$ , y tenemos que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.3.7)$$

(ii) *Asumamos que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (4.3.8)$$



Entonces tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| u_\epsilon(x) - u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (4.3.9)$$

a esta última condición le llamaremos convergencia fuerte a dos escalas.

**Demostración.** La convergencia débil se obtiene de inmediato por definición de convergencia a dos escalas. Ahora, si desarrollamos

$$\int_{\Omega} \left[ u_\epsilon(x) - \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right]^2 dx = \int_{\Omega} \left[ (u_\epsilon^2(x) - u_\epsilon(x)\psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \psi^2\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)) \right] dx$$

Usando el Lema 4.3.2 y la definición 4.3.1 calculamos el límite del término expandido y haciendo que  $\psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)$  converja a dos escalas a  $u_0(x, y)$  en  $L^2(\Omega \times Y)$ , obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[ u_\epsilon(x) - \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right]^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon^2(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y [-2u_0^2(x, y) + u_0^2(x, y)] dx dy \geq 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon^2(x) \geq \int_{\Omega} \int_Y u_0^2(x, y) dx dy$$

Para la otra desigualdad usamos Cauchy-Schwarz en  $Y$ , para tener que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left( \int_Y u_0(x, y) dy \right)^2 dx \leq \int_{\Omega} \int_Y u_0^2(x, y) dx dy$$

Con esto hemos demostrado la desigualdad (4.3.7). Ahora para obtener (4.3.9) usamos la suposición (4.3.8) y el lema 4.3.2 y obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[ u_\epsilon(x) - \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right]^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y [u_0(x, y) - \psi(x, y)]^2 dx dy \quad (4.3.10)$$

Si aseguramos que  $u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)$  es medible y esta en  $L^2(\Omega)$  entonces podemos reemplazar  $\psi$  en (4.3.10) para obtener (4.3.9). ■

Podemos hablar de convergencia a dos escalas en espacios de Sobolev, donde controlamos tanto la convergencia de la función como la de su gradiente débil. La siguiente

proposición describe la convergencia a dos escalas del gradiente de una función.

**Proposición 4.3.5** *Sea  $u_\epsilon$  una sucesión acotada en  $H^1(\Omega)$ . Entonces existe  $u(x)$  en  $H^1(\Omega)$  y  $u_1(x, y)$  en  $L^2[\Omega; H^1_\#(Y)/\mathbb{R}]$  (donde  $H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$ , es el espacio  $H^1_\#(Y)$  sin constantes), hay una subsucesión ( $u_\epsilon$ ) que converge a dos escalas a  $u(x)$ , y  $\nabla u_\epsilon$  converge a dos escalas a  $\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$ .*

**Demostración.** Como  $u_\epsilon$  (resp.  $\nabla u_\epsilon$ ) es acotada en  $L^2(\Omega \times Y)$  (resp.  $[L^2(\Omega)]^N$ ), entonces por el Teorema 4.3.3 podemos extraer una subsucesión convergente a dos escalas al límite  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  (resp.  $\chi_0 \in [L^2(\Omega \times Y)]^N$ ). Entonces para cualquier función  $\psi(x, y) \in D[\Omega; C^\infty_\#(Y)]^N$ , tenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon(x) \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \chi_0(x, y) \cdot \psi(x, y) dx dy \quad (4.3.11)$$

Integrando por partes obtenemos

$$\epsilon \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \left[ \nabla_y \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon \nabla_x \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right] dx$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtenemos

$$0 = - \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \nabla_y \cdot \psi(x, y) dx dy$$

Por lo tanto  $u_0$  no depende de  $y$ , esto es, existe  $u \in L^2(\Omega)$  tal que  $u_0 = u$  es el límite a dos escalas  $u_\epsilon$ . En la ecuación (4.3.11) elegimos una función  $\psi$  tal que  $\nabla_y \cdot \psi(x, y) = 0$ .

Integrando por partes obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \nabla_x \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} \int_Y \chi_0(x, y) \cdot \psi(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \int_Y u(x) \nabla_x \cdot \psi(x, y) dx dy$$

Si  $\psi$  no depende de  $y$  la ecuación anterior prueba que  $u(x) \in H^1(\Omega)$  y que

$$\int_{\Omega} \int_Y [\chi_0(x, y) - \nabla u(x)] \cdot \psi(x, y) dx dy = 0 \quad \forall \psi(x, y) \in D[\Omega; C^\infty_\#(Y)]^N$$

Con  $\nabla_y \cdot \psi(x, y) = 0$  e integrand por partes la ecuación anterior tenemos que entonces existe  $u_1(x, y) \in L^2[\Omega; H^1(Y)/\mathbb{R}]$  tal que

$$\chi_0(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$$

■

**Teorema 4.3.6** *Sea  $(u_\epsilon)$  una sucesión de funciones en  $L^2(\Omega)$  que converge a dos escalas a  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ . Suponga que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (4.3.12)$$

*Entonces para toda sucesión  $(v_\epsilon) \in L^2(\Omega)$  que converge a dos escalas al límite  $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ , tenemos que*

$$u_\epsilon(x)v_\epsilon(x) \rightharpoonup \int_Y u_0(x, y)v_0(x, y)dy \text{ en } L^2(\Omega). \quad (4.3.13)$$

*Mas aún, si  $u_0(x, y) \in L^2[\Omega; C_\#(Y)]$ , tenemos que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon(x) - u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (4.3.14)$$

**Demostración.** Sea  $\psi_n(x, y)$  una sucesión de funciones suaves en  $L^2[\Omega; C_\#(Y)]$  que converge fuertemente a  $u_0(x, y)$  en  $L^2(\Omega \times Y)$ . Por definición de convergencia a dos escalas para  $u_\epsilon$  y la convergencia débil de las funciones periódicas obtenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \left(u_\epsilon(x) - \psi_n\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 dx = \int_\Omega \int_Y (u_0(x, y) - \psi_n(x, y))^2 dx dy \quad (4.3.15)$$

pasando al límite cuando  $n$  tiende a infinito obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \left(u_\epsilon(x) - \psi_n\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 dx = 0 \quad (4.3.16)$$

Sea  $v_\epsilon$  una sucesión que converge a dos escalas al límite  $v_0(x, y)$ . Para toda  $\phi(x) \in D(\Omega)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi(x) u_\epsilon(x) v_\epsilon(x) dx &= \int_{\Omega} \phi(x) \psi_n \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) v_\epsilon(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \phi(x) \left( u_\epsilon(x) - \psi_n \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right) v_\epsilon(x) dx \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

pasando al límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero y usando que  $v_\epsilon$  es una sucesión acotado en  $L^2(\Omega)$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi(x) u_\epsilon(x) v_\epsilon(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y \phi(x) \psi_n(x, y) v_0(x, y) dx dy \right| \\ \leq C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon(x) - \psi_n \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Ahora, pasando al límite cuando  $n$  tiende a infinito y usando (4.3.16) tenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi(x) u_\epsilon(x) v_\epsilon(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y \phi(x) u_0(x, y) v_0(x, y) dx dy \quad (4.3.19)$$

Más aún si  $u_0(x, y) \in L^2[\Omega; C_\#(Y)]$  entonces podemos usar directamente el límite de (4.3.15) en la sucesión  $u_\epsilon$ , obteniendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon(x) - u_0 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (4.3.20)$$

■

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto acotado en  $\mathbb{R}^N$ ,  $Y$  la celda periódica unitaria  $[0, 1]^N$  identificada con el toro  $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ . Sea  $T$  un subconjunto abierto de  $Y$  con frontera suave  $\Gamma$ , y  $Y^* = Y \setminus T$ , sean también

$$\Omega_\epsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \frac{x}{\epsilon} \in Y^* \right\} \in Y^* \cap \Omega \quad (4.3.21)$$

$$\Gamma_\epsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \frac{x}{\epsilon} \in \Gamma \right\} \in \Gamma \cap \Omega \quad (4.3.22)$$

A continuación se presenta otro sentido de convergencia a dos escalas que nos será útil.

**Lema 4.3.7** *Sea  $B = C[\bar{\Omega}; C_{\#}(Y)]$  el espacio de funciones continuas  $\phi(x, y)$  en  $\bar{\Omega} \times Y$  que son  $Y$ -periódicas en  $y$ . Entonces,  $B$  es un espacio de Banach separable (esto es, contiene una familia densa numerable) denso en  $L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$ , y tal que cualquier función  $\phi(x, y) \in B$  satisface*

$$\epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} \left| \phi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right|^2 dA_{\epsilon}(x) \leq C \|\phi\|_B^2 \quad (4.3.23)$$

(con  $dA_{\epsilon}$  la diferencial de area en  $\Gamma_{\epsilon}$ ) y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} \left| \phi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right|^2 dA_{\epsilon}(x) = \int_{\Omega} \int_{\Gamma} |\phi(x, y)|^2 dx dA(y) \quad (4.3.24)$$

La demostración del Lema anterior se puede encontrar en [4].

**Teorema 4.3.8** *Sea  $u_{\epsilon}$  una sucesión en  $L^2(\Gamma_{\epsilon})$  tal que*

$$\epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x)|^2 dA_{\epsilon}(x) \leq C \quad (4.3.25)$$

donde  $C$  es una constante positiva independiente de  $\epsilon$ . Entonces existe una subsucesión (que seguiremos llamando  $u_{\epsilon}$ ) y un límite a dos escalas  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$  tal que  $u_{\epsilon}(x)$  converge a dos escalas a  $u_0(x, y)$  en el siguiente sentido

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_{\epsilon}(x) \phi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dA_{\epsilon}(x) = \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_0(x, y) \phi(x, y) dx dA(y) \quad (4.3.26)$$

para toda función continua  $\phi(x, y) \in C[\bar{\Omega}; C_{\#}(Y)]$ .

**Demostración.** Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\left| \epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_{\epsilon}(x) \phi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dA_{\epsilon} \right| \leq C \left| \epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} \phi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dA_{\epsilon} \right|^{\frac{1}{2}} \leq C \|\phi\|_B \quad (4.3.27)$$

Esto implica que el lado izquierdo de (4.3.27) es una forma linear continua en  $B$  que puede indentificarse con el producto dual  $\langle \mu_{\epsilon}, \phi \rangle_{B^*, B}$  (donde  $B^*$  es el dual topológico de

B) para alguna sucesión acotada de funciones  $\mu_\epsilon$ . Como  $B$  es separable podemos extraer una subsucesión y existe un límite  $\mu_0$  tal que  $\mu_\epsilon$  converge a  $\mu_0$  en la topología débil-\* de  $B^*$ . Por otro lado, el Lema 4.3.7 nos permite pasar al límite en el término de enmedio de (4.3.27). Combinando estos dos resultados tenemos

$$|\langle \mu_0, \phi \rangle_{B^*, B}| \leq C \left| \int_{\Omega} \int_{\Gamma} |\phi(x, y)|^2 dx dA(y) \right|^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.28)$$

Por densidad de  $B$  en  $L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$  la ecuación (4.3.28) nos muestra que  $\mu_0$  es una forma continua en dicho espacio. Por lo tanto, el teorema de representación de Riesz existe  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$  tal que

$$\langle \mu_0, \phi \rangle_{B^*, B} = \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_0(x, y) \phi(x, y) dx dA(y) \quad (4.3.29)$$

■

**Teorema 4.3.9** *Sea  $u_\epsilon$  una sucesión de funciones en  $H^1(\Omega)$  tal que*

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \epsilon \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

donde  $C$  es una constante positiva independiente de  $\epsilon$ . Entonces la traza (ver teorema A.2.17) de  $u_\epsilon$  en  $\Gamma_\epsilon$  satisface

$$\epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon(x)|^2 dA_\epsilon \leq C \quad (4.3.30)$$

y, existe una subsucesión, que converge a dos escalas al límite  $u_0(x, y)$  que es la traza en  $\Gamma$  del límite usual a dos escalas, una función en  $L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ . Más precisamente

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon(x) \phi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dA_\epsilon &= \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_0(x, y) \phi(x, y) dx dA(y) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \phi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx &= \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dx dy \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon(x) \phi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx &= \int_{\Omega} \int_Y \nabla_y u_0(x, y) \phi(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

para toda función continua  $\phi(x, y) \in C[\bar{\Omega}; C_{\#}(Y)]$ .

**Demostración.** Reescalando las funciones con  $\epsilon$  y sumando sobre todas las celdas periódicas de  $\Omega$ , la desigualdad de traza en la celda unitaria nos dice

$$\epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x)|^2 dA_{\epsilon}(x) \leq C \|u_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon^2 \|\nabla u_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.3.32)$$

Por lo tanto existe una subsucesión  $u_{\epsilon}$  (manetenemos la misma notación que con la sucesión por simplicidad) que converge a dos escalas en el sentido del Teorema 4.3.8 al límite  $v_0(x, y) \in L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$ . Por otro lado, por el Teorema 4.3.5 existe otra subsucesión  $u_{\epsilon}$  que converge a dos escalas en el sentido de la Definición 4.3.1 al límite  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ . Para demostrar que  $v_0$  es la traza de  $u_0$  en  $\Gamma$ , la sucesión  $u_{\epsilon}$  se restringe primero al dominio perforado  $\Omega_{\epsilon}$  definido anteriormente en (6.2.1). Para cualquier función prueba suave  $\psi(x, y)$ , integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\Omega_{\epsilon}} \nabla u_{\epsilon} \cdot \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx &= -\epsilon \int_{\Omega_{\epsilon}} u_{\epsilon} \nabla_x \cdot \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx - \int_{\Omega_{\epsilon}} u_{\epsilon} \nabla_y \cdot \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx \\ &\quad + \epsilon \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_{\epsilon} \psi \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nu dA_{\epsilon}(x) \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Pasando al límite a dos escalas en cada término, obtenemos

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} \nabla_y u_0 \cdot \psi dx dy = - \int_{\Omega} \int_{Y^*} u_0 \nabla_y \cdot \psi dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} v_0 \psi \cdot \nu dA(y) \quad (4.3.34)$$

Integrando por partes la ecuación anterior obtenemos finalmente

$$\int_{\Omega} \int_{\Gamma} (v_0 - u_0) \psi \cdot \nu dx dA(y) = 0 \quad (4.3.35)$$

No es difícil comprobar que las funciones suaves son densas en  $L^2(\Omega; L_{\#}^2(Y; \Gamma))$  (revisar [4]). Esto implica que  $v_0$  coincide con la traza de  $u_0$  en  $\Gamma$ . ■

## Parte III

# Homogeneización



# Capítulo 5

## Homogeneización

En este capítulo se introduce el concepto de homogeneización. Se tratarán dos métodos de homogeneización, el método asintótico y uno que no se aborda comúnmente en los libros de textos clásicos y a diferencia del asintótico, es de carácter riguroso, el método de homogeneización a dos escalas, todo esto para ilustrar el procedimiento que se usará para resolver el problema principal de esta tesis.

## 5.1. Homogeneización asintótica

Si tenemos un problema modelado por ecuaciones diferenciales, donde existen dos o más escalas de tiempo o de espacio, podemos tratar a estas escalas como variables independientes, y derivar un problema homogeneizado, esto es, que dependa sólo de la escala macroscópica (lenta) y siga teniendo la estructura microscópica relevante (por ejemplo, la periodicidad interna de algún material).

Por ejemplo, considerese un problema en un dominio acotado y suave  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(\frac{x}{\epsilon}) \nabla u_\epsilon) = f & \text{en } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Con  $A(y)$  es una matriz  $L^\infty(Y)$ ,  $Y$ -periódica que satisface la condición de continuidad y coercividad, esto es, existen dos constantes  $0 < \alpha \leq \beta$  tales que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N A_{ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \beta |\xi|^2, \quad (5.1.2)$$

donde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y es independiente de  $\epsilon$ .

En este caso el problema de la homogeneización consiste tomar el límite cuando  $\epsilon$  tiende cero y estudiar la convergencia de las soluciones  $u_\epsilon$  a un límite  $u_0$  y el problema de ecuaciones diferenciales que posiblemente caracteriza a la función límite.

Un procedimiento formal, más **no riguroso**, para homogeneizar un problema del tipo (5.1.1) es el método de expansión asintótica. En este método suponemos que  $u^\epsilon$  puede escribirse como

$$u^\epsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon u^i \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right), \quad (5.1.3)$$

dónde para toda  $i \in \mathbb{N}$   $u^i : \Omega \times (0, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $u^i(x, y)$  1-periódica en  $y$  para toda  $x \in \Omega$ . A la dependencia en  $y = \frac{x}{\epsilon}$  le llamamos escala microscópica y suponemos que  $x, y$  son variables independientes.

Para las funciones  $u^i$  tenemos la regla de derivación

$$\nabla \left( u^i \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right) = (\epsilon^{-1} \nabla_y u^i + \nabla_x u^i) \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \quad (5.1.4)$$

y por lo tanto de 5.1.4 tenemos

$$\nabla u^\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \nabla_y u^0 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u^{i+1} + \nabla_x u^i) \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right). \quad (5.1.5)$$

Sustituyendo (5.1.3) en el problema (5.1.1) obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{-2} (\nabla_y \cdot (A \nabla_y u^0)) \\ & -\epsilon^{-1} (\nabla_y \cdot A (\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1) + \nabla_x \cdot A (\nabla_y u^0)) \\ & -\epsilon^0 (\nabla_x \cdot A (\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1) + \nabla_y \cdot A (\nabla_x u^1 + \nabla_y u^2)) \\ & - \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_x \cdot A (\nabla_x u^i + \nabla_y u^{i+1}) + \nabla_y \cdot A (\nabla_x u^{i+1} + \nabla_y u^{i+2})) = f(x), \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

la cual suponiendo que  $\epsilon$  es pequeño podemos separar en ecuaciones para distintos ordenes, antes de esto introducimos un teorema que nos permite resolver la ecuación del orden  $\epsilon^{-2}$ .

**Teorema 5.1.1** *Sea  $f(y) \in L^2_{\#}(Y)$  una función periódica en  $Y$ . Entonces existe una solución en  $H^1_{\#}(Y)$  (única salvo una constante) de*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot A(y) \nabla w(y) = f & \text{en } Y, \\ w(y) \text{ periódica} \end{cases} \quad (5.1.7)$$

si y sólo si  $\int_Y f(y) dy = 0$  (esto último es la condición de solubilidad de la alternativa de Fredholm).

(una demostración de este Teorema se puede encontrar en [3]). A continuación se presentan las ecuaciones obtenidas a distintos ordenes.

- La ecuación de orden  $\epsilon^{-2}$  es

$$-\nabla_y \cdot (A(y)\nabla_y u^0(x, y)) = 0 \text{ en } Y.$$

que es una ecuación en la celda unitaria  $Y$  con condiciones de frontera periódicas. En esta ecuación,  $y$  es la variable y  $x$  es un parámetro. Por el Teorema 5.1.1 dicha ecuación tiene una única solución salvo una constante (esto es, una función de  $x$  independiente de  $y$  ya que  $x$  es sólo un parámetro). Esto implica que  $u^0$  es una función que no depende de  $y$  (es constante en  $y$ ), por lo tanto  $u^0(x, y) = u^0(x)$ .

- La ecuación de orden  $\epsilon^{-1}$  es

$$-\nabla_y \cdot (A(y)\nabla_y u^1(x, y)) = \nabla_y \cdot (A(y)\nabla_x u(x)) \text{ en } Y.$$

De la ecuación a orden  $\epsilon^{-2}$  tenemos que  $u^0$  no depende de  $y$ . Entonces, por linealidad podemos asumir que

$$u^1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} w^i(y) \quad (5.1.8)$$

donde  $w^i(y)$  es solución al llamado problema de la celda

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot A(y)(e^i + \nabla_y w^i(y)) = 0 \text{ en } Y \\ w^i(y) \text{ Y-periódica.} \end{cases} \quad (5.1.9)$$

A la función (5.1.8) se le conoce como la función correctora, la cual claramente es solución de la ecuación a orden  $\epsilon^{-1}$ .

- Finalmente la ecuación a orden  $\epsilon^0$ , tenemos

$$-\nabla_y \cdot (A(y)\nabla_y u^2(x, y)) = \nabla_y \cdot (A(y)\nabla_x u^1) + \nabla_x \cdot (A(y)(\nabla_y u^1 + \nabla_x u)) + f(x).$$

Esta ecuación para  $u^2$  tiene solución siempre y cuando se satisfaga la condición de

compatibilidad dada por la alternativa de Fredholm ([10], pags. 641-643). En este caso esta condición es,

$$\int_Y (\nabla_y \cdot (A(y)\nabla_x u^1) + \nabla_x \cdot (A(y)(\nabla_y u^1 + \nabla_x u)) + f(x)) dy = 0.$$

Si ahora reemplazamos  $u^1$  por su valor, obtenido en la ecuación de orden  $\epsilon^{-1}$ , obtenemos la **ecuación homogeneizada** del problema,

$$\begin{cases} -\nabla_x \cdot A^* \nabla_x u(x) = f(x) \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde la la matriz homogeneizada es constante y está dada por

$$A_{ij}^* = \int_Y ((A(y)\nabla_y w^i) \cdot e_j + A_{ij}(y)) dy = \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y w^j) \cdot (e_j + \nabla w^j) dy$$

Este método formal permite encontrar expresiones asintóticas de la solución, sin embargo no es una demostración rigurosa. La convergencia rigurosa de las funciones obtenidas a partir de la homogeneización por expansión asintótica se hacen vía la convergencia a dos escalas.

## 5.2. Homogeneización a dos escalas

En esta sección expondremos el método de homogeneización a dos escalas, aplicado al problema elíptico (5.1.1) tratado en la sección anterior. Para esto supondremos además que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{ij} \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y A_{ij}(x, y)^2 dx dy. \quad (5.2.1)$$

con  $A \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) = A \left( \frac{x}{\epsilon} \right)$ .

Nótese que bajo la suposiciones (5.1.2), el problema (5.1.1) admite una única solución

$u_\epsilon$  en  $H_0^1(\Omega)$  la cual usando (5.2.1) satisface la desigualdad a priori,

$$\|u^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.2.2)$$

donde  $C$  es una constante positiva que solo depende de  $\Omega$  y  $\alpha$  (no de  $\epsilon$ , revisar [1]). Por lo tanto existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que, hay una subsucesión de  $u^\epsilon$  (que llamaremos por comodidad igual) que converge débilmente a  $u$  en  $H_0^1(\Omega)$  usando que convergencia débil y convergencia débil \* son equivalentes en  $H_0^1(\Omega)$  al ser un espacio de Hilbert reflexivo (revisar el Teorema 4.3.3). La homogeneización del problema (5.1.1) nos permite encontrar una ecuación efectiva o límite que tiene a  $u$  como su única solución.

**Definición 5.2.1** *El problema homogeneizado está definido como*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot [\mathbf{A}^*(x)\nabla u(x)] = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Donde las entradas de la matriz  $\mathbf{A}^*$  están dadas por,

$$\mathbf{A}_{ij}^*(x) = \int_Y \mathbf{A}(x, y) [\nabla_y w^i(x, y) + e_i] \cdot [\nabla_y w^j(x, y) + e_j] dy \quad (5.2.4)$$

para  $1 \leq i \leq N$  y  $w_i$  es la solución del llamado problema de la celda,

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot A(y)(e^i + \nabla_y w^i(x, y)) = 0 \text{ en } Y, \\ w^i(x, y) \text{ Y-periódica.} \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Claramente (5.2.3) y (5.2.4) se corresponde con la ecuación homogeneizada de la sección anterior. Queremos demostrar el siguiente teorema

**Teorema 5.2.2** *La sucesión  $u^\epsilon$  de soluciones de (5.1.1) convergen débilmente en  $H_0^1(\Omega)$  a la solución  $u$  de (5.2.3) (que es única al ser un problema elíptico), cuando  $\epsilon$  tiende a cero.*

**Demostración.** A continuación se describirá paso a paso la homogenización del proble-

ma (5.1.1) por medio de convergencia a dos escalas. En particular, este procedimiento demuestra el teorema.

- **Primer paso:** Deducimos de (5.2.2) la forma precisa del límite a dos escalas de la sucesión  $u^\epsilon$ . Aplicando la **Proposición 4.3.5**, sabemos que existen dos funciones  $u(x) \in H_0^1(\Omega)$  y  $u^1(x, y) \in L^2[\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}]$ , tales que se puede extraer una subsucesión de  $u^\epsilon$  que converge a dos escalas a  $u(x)$ , y tal que el gradiente  $\nabla u^\epsilon$  converge a dos escalas a  $\nabla_x u(x) + \nabla_y u^1(x, y)$ . Entonces, para  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño  $u^\epsilon(x)$  se comportará como la función  $u(x) + \epsilon u^1(x, \frac{x}{\epsilon})$ .
- **Segundo paso:** Multiplicamos (5.1.1) por una función prueba similar al límite de  $u^\epsilon$ , es decir de la forma  $\varphi(x) + \epsilon \varphi^1(x, \frac{x}{\epsilon})$ , donde  $\varphi(x) \in D(\Omega)$  y  $\varphi^1(x, y) \in D[\Omega; C_{\#}^\infty(Y)]$ . Entonces, usando la regla de derivación (5.1.4) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^\epsilon \right) \cdot \left[ \nabla \varphi(x) + \nabla_y \varphi^1 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \epsilon \nabla_x \varphi^1 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right] dx \\ = \int_{\Omega} f(x) \left[ \varphi(x) + \epsilon \varphi^1 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

A continuación usamos a la matriz transpuesta  $A^t(x, \frac{x}{\epsilon}) [\nabla \varphi(x) + \nabla_y \varphi^1(x, \frac{x}{\epsilon})]$  como función prueba en (5.2.6) pasamos al límite a dos escalas para la sucesión  $A(y) \nabla u^\epsilon$ . Con esto obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)] \cdot [\nabla \varphi(x) + \nabla_y \varphi^1(x, y)] dx dy \\ = \int_{\Omega} f \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

- **Tercer paso:** En la ecuación (5.2.7) obtuvimos una formulación variacional para  $(u, u^1)$ . Por densidad dicha formulación se mantiene para toda  $(\varphi, \varphi^1)$  en el espacio de Hilbert  $H_0^1(\Omega) \times L^2[\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}]$ . Dotando el espacio con la norma  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_y u^1(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)}$ , podemos verificar que se tienen las condiciones para el teorema de Lax-Milgram ([10], pags. 297-299). En efecto, primero con-

centrémonos en la coercividad de la forma bilinear definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.2.7), esto es, veamos si existe  $\alpha > 0$  tal que,  $a(v, v) = v^t A v \geq \alpha \|v\|_H^2$  (que es la misma constante de elipticidad en (5.1.2)) donde  $H$  es el espacio de Hilbert antes definido y  $a(u, v) = v^t A u$  es la forma bilinear analizada. Usando la coercividad de la matriz  $A(y)$  obtenemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \int_Y A(x, y) [\nabla \varphi(x) + \nabla_y \varphi^1(x, y)] \cdot [\nabla \varphi + \nabla_y \varphi^1(x, y)] dx dy \\
\geq \alpha \int_{\Omega} \int_Y |\nabla \varphi(x) + \nabla_y \varphi^1(x, y)|^2 dx dy \\
= \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y \varphi^1(x, y)|^2 dx dy.
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Segundo, es claro que la forma bilinear es continua, y también es claro que el lado derecho de la ecuación (5.2.7) define un funcional lineal acotado (esto se puede ver usando el teorema de representación de Riesz), por lo tanto podemos aplicar Lax-Milgram y obtener una solución única  $(u, u^1)$  del problema variacional (5.2.7). Entonces  $u^\epsilon \rightarrow u$  y  $\nabla u^\epsilon \rightarrow \nabla u(x) + \nabla_y u(x, y)$  a dos escalas y el problema (5.2.7) es la forma variacional del problema a dos escalas homegenizado

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot (A(y)(\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y))) = 0 & \text{en } \Omega \times Y \\ -\nabla_x \cdot (\int_Y A(y)(\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)) dy) = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.9}$$

A través de la relación  $u^1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w^i(y)$ . Hasta aquí se puede considerar terminada la homogenización ya que la sucesión entera de soluciones converge a la solución de un problema límite bien planteado (5.2.9), llamado el problema homogenizado a dos escalas. Esto demuestra rigurosamente la convergencia de las funciones obtenidas en el método asintótico. Aunque ciertas veces es preferible en la física para hacer cálculos numéricos eliminar la variable microscópica  $y$ , usando la alternativa de Fredholm ([10], pags. 641-643). Esto último se hará con más



detalle más adelante.

- **Cuarto paso:** Para obtener las fórmulas (5.2.3) y (5.2.4) usamos la función correctora (5.1.8),

$$u^1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} w^i(y)$$

la primera ecuación en (5.2.9) corresponde al problema a orden  $\epsilon^{-1}$  de la sección anterior y su solución será la función correctora siempre que  $w^i(u)$  sea solución del problema de la celda (5.2.5). Finalmente, la ecuación (5.2.3) se obtiene de sustituir (5.1.8) en la segunda ecuación de (5.2.9) y la definición de  $A^*$  en (5.2.4).

■

## Parte IV

# Homogeneización de un metafluido

# Capítulo 6

## Modelo de un metafluido acústico

En este, el capítulo central de la tesis, presentaremos un modelo de metafluido basado en capas laminares de fluidos distintos que se repiten preiodicamente en una dirección. El objetivo es estudiar el problema de homogeneización del sistema de ecuaciones del fluido, primero por el método de expansión asintótica, y después se demostrará rigurosamente la convergencia de las soluciones por el método de homogeneización a dos escalas.

## 6.1. Homogenización por expansión asintótica

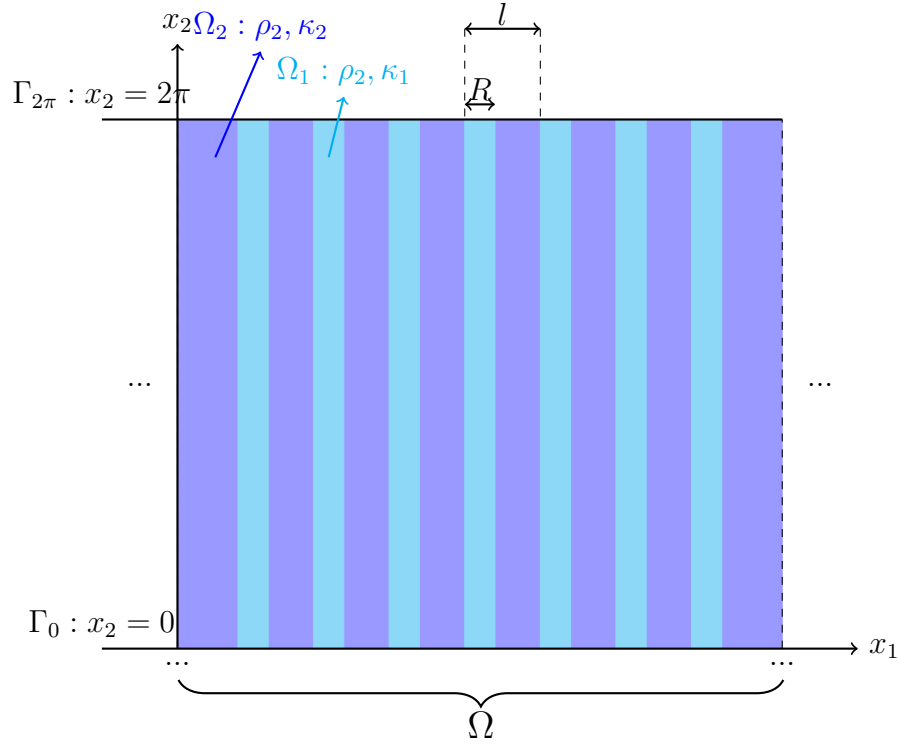


Figura 6-1: Dominio periódico

Suponga que tenemos un sistema compuesto de dos capas de diferentes fluidos periódicamente distribuidos (basado en el modelo dado por John D. Smith en [18]). Las interfaces son normales al eje  $x_1$ . El fluido 1 tiene espesor  $R$  con periodo  $l$ , densidad  $\rho_1$  y modulo de compresibilidad  $\kappa_1$ . Para el fluido 2, el espesor será  $l - R$ , la densidad  $\rho_2$ , y el módulo de compresibilidad  $\kappa_2$ , como se puede observar en la figura (6-1). Entonces los dominios macroscópicos dónde se definirá las ecuaciones del fluido serán:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega | ml \leq x \leq ml + (l - R) \text{ para toda } m \in \mathbb{Z}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$$

(denotaremos a  $\Gamma_i$  como las fronteras internas de  $\Omega$  entre los fluidos).

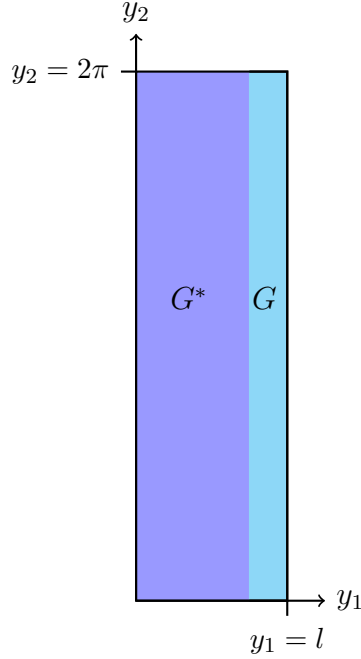


Figura 6-2: Celda unitaria de la microestructura

La microestructura periódica está definida por un celda periódica  $Y$  que se observa en la figura 6-2, cuyos subdominios están definidos por

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^2 | m(l) \leq x_1 \leq (m+1)l \text{ para alguna } m \in \mathbb{Z}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$G^* = \{x \in \Omega | ml \leq x \leq ml + (l - R) \text{ para alguna } m \in \mathbb{Z}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$G = Y \setminus G^*$$

Si suponemos que tenemos ondas incidentes de presión acústica  $p$  y velocidad  $\vec{v}$  en el fluido que tiene como parte temporal una excitación armónica  $\propto e^{-i\omega t}$ , esto significa que  $\dot{p}(x, t) = i\omega p(x)$  y de manera análoga para la velocidad, entonces las ecuaciones que estas dos funciones seguirán en cada fluido están dadas por

$$\begin{aligned} p &= \frac{\kappa_i}{i\omega} \nabla \cdot v, \\ \vec{v} &= \frac{1}{i\omega \rho_i} \nabla p, \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

En la interface  $\Gamma_i$  entre los distintos fluidos se asume continuidad de la presión  $p$  y continuidad de la componente normal de la velocidad  $\vec{v} \cdot \hat{n}$ , con  $n = (1, 0)$ . Sustituyendo la segunda ecuación (6.1.1) tenemos que  $p$  sigue la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones,

$$\begin{cases} \Delta p + k_i^2 p = 0 \text{ en } \Omega \\ p \text{ continua en } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_{2\pi} \end{cases} \quad (6.1.2)$$

donde  $k_i = \frac{\omega}{c_i}$  es el número de onda de  $p$  en el fluido  $i \in \{1, 2\}$ , y la velocidad de la onda de presión es  $c_i = \sqrt{\frac{\kappa_i}{\rho_i}}$  que depende del medio donde nos encontramos. También imponemos condiciones pseudoperiódicas en las fronteras  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_{2\pi}$ , esto es

$$\begin{aligned} p \Big|_{x_2=0} &= e^{ikx_2} p \Big|_{x_2=2\pi} \\ \partial_{x_2} p \Big|_{x_2=0} &= e^{ikx_2} \partial_{x_2} p \Big|_{x_2=2\pi} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

con la  $k$  correspondiente para cada fluido.

Supongamos además que la longitud de onda en cada fluido es mucho más grande que el periodo de la microescala  $l$ . En este caso podemos definir como parámetro pequeño a  $\epsilon = l$  y nombraremos a las coordenadas microscópicas  $(y_1, y_2) = (x_1/\epsilon, x_2/\epsilon)$ . Expandiendo asintóticamente (como se vió en el Capítulo 5.1) a la presión y la velocidad (que ahora denotaremos como  $p^\epsilon$  y  $\vec{v}^\epsilon$ ), tenemos

$$\begin{aligned} p^\epsilon &= p^0(x, x/\epsilon) + \epsilon p^1(x, x/\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \vec{v}^\epsilon(x) &= \vec{v}^0(x, x/\epsilon) + \epsilon \vec{v}^1(x, x/\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Usando la primera ecuación de (6.1.1), tenemos que,

$$\nabla \cdot \vec{v}^\epsilon - i\omega \sigma^\epsilon p^\epsilon = 0$$

(donde  $\sigma^\epsilon = 1/\kappa^\epsilon$ , con  $\kappa^\epsilon(y) = \kappa_1$  en  $\Omega_1$  y  $\kappa^\epsilon(y) = \kappa_2$  en  $\Omega_2$ ). Usando (6.1.4) en la última

ecuación obtenemos,

$$\epsilon^{-1}\nabla \cdot \vec{v}^0(x, y) + (\nabla_x \cdot \vec{v}^0(x, y) + \nabla_y \cdot \vec{v}^0(x, y) - i\omega\sigma(x, y)p^0(x, y) = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.1.5)$$

Igualando términos del mismo orden a cada lado de (6.1.5) obtenemos,

$$\begin{aligned} \nabla_y \cdot \vec{v}^0(x, y) &= 0 \\ \nabla_x \cdot \vec{v}^0(x, y) + \nabla_y \cdot \vec{v}^1(x, y) - i\omega\sigma(x, y)p^0(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Ahora, usando la segunda ecuación de (6.1.1) para  $p^\epsilon$  y  $\vec{v}^\epsilon$ ,  $\nabla p^\epsilon - i\omega\rho^\epsilon\vec{v}^\epsilon = 0$  obtenemos la ecuación a orden cero,

$$\epsilon^{-1}\nabla_y p^0(x, y) + (\nabla_x p^0(x, y) + \nabla_y p^1(x, y)) - i\omega\rho(x, y)v^0(x, y) = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.1.7)$$

que igualando los términos del mismo orden a cada lado da como resultado,

$$\begin{aligned} \nabla_y p^0(x, y) &= 0 \\ \nabla_x p^0(x, y) + \nabla_y p^1(x, y) - i\omega\rho(x, y)v^0(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

De la primera ecuación de (6.1.8) es claro que

$$p^0(x, y) = p^0(x) \quad (6.1.9)$$

Para encontrar las ecuaciones a segundo orden conviene utilizar la ecuación de onda (6.1.2) reescribiendo el operador Laplaciano en término de los operadores en cada escala ( $\Delta = (\nabla_x + \nabla_y) \cdot (\nabla_x + \nabla_y) = \Delta_x + 2\nabla_x \cdot \nabla_y + \Delta_y$ ). Entonces la ecuación de onda se reescribe como,

$$\begin{aligned} (\Delta_x p^0 + \epsilon\Delta_x p^1 + \epsilon^2\Delta_x p^2) + \frac{2}{\epsilon}(\nabla_x \cdot \nabla_y p^0 + \epsilon\nabla_x \cdot \nabla_y p^1 + \epsilon^2\nabla_x \cdot \nabla_y p^2) \\ \frac{1}{\epsilon^2}(\Delta_y p^0 + \epsilon\Delta_y p^1 + \epsilon^2\Delta_y p^2) + k_i^2(p^0 + \epsilon p^1 + \epsilon^2 p^2) = \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Las ecuaciones para cada orden son

- Orden  $\epsilon^{-2}$ :

$$\Delta_y p^0 = 0$$

- Orden  $\epsilon^{-1}$ :

$$2\nabla_x \cdot \nabla_y p^0 + \Delta_y p^1 = 0$$

- Orden  $\epsilon^0$ :

$$\Delta_x p^0 + 2\nabla_x \cdot \nabla_y p^1 + \Delta_y p^2 + k^2 p^0 = 0$$

- Orden  $\epsilon$ :

$$\Delta_x p^1 + 2\nabla_x \cdot \nabla_y p^2 + k^2 p^1 = 0$$

- Orden  $\epsilon^2$ :

$$\Delta_x p^2 + k^2 p^2 = 0$$

La ecuación de orden  $\epsilon^0$  representa una ecuación en la celda con  $x$  como parámetro, usando el mismo argumento usado en la primera ecuación de ordenes para la homogeneización del problema (5.1.1) tenemos que  $p^0$  sólo depende de  $x$ ; de la ecuación de orden  $\epsilon^{-1}$  usando que  $\nabla_y p^0 = 0$  tenemos que  $\Delta_y p^1 = 0$  y por lo tanto  $\nabla_y p^1 = -2\nabla_x p^0$ , por las condiciones de frontera periódicas en  $y$  esto implica que  $p^1$  depende linealmente de  $y$ , la segunda ecuación de (6.1.8) implica que  $p^1$  depende también linealmente de  $\nabla_x p^0$ . Considerando además la simetría del dominio y las condiciones de frontera en las interfaces, tenemos que las presiones deben de ser constantes en la dirección  $y_2$ , por lo tanto podemos escribir de manera general a  $p^1$  en cada dominio como,

$$\begin{aligned} p^1 &= W(y_1)^{(1)} \cdot \nabla_x p^0 + B_1(x), \quad y_1 \in \Omega_1 \\ p^1 &= W(y_1)^{(2)} \cdot \nabla_x p^0 + B_2(x), \quad y_1 \in \Omega_2 \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

para algunas funciones  $B_1$  y  $B_2$  arbitraria. Vamos a definir a  $r = 1 - R/l$  el tamaño



de  $G^*$  reescalado en la celda unitaria, imponiendo la continuidad de  $p^1$  en la interface entre los dos fluidos y la periodicidad de la misma tenemos que  $B_1(x) = B_2(x) = B(x)$ ,  $W^{(1)}(r) = W^{(2)}(r)$  y  $W^{(1)}(0) = W^{(2)}(1)$ . Como por la forma del dominio y las condiciones de frontera,  $v_{x_1}$  es continua en las interfaces obtenemos

$$\left( \frac{\partial p^1}{\partial y_1} + \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) \Big|_{\partial\Omega_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{\partial p^1}{\partial y_1} + \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) \Big|_{\partial\Omega_2} \quad (6.1.12)$$

Nótese ahora que estas condiciones de frontera se satisfacen si  $W_{x_2}^{(1)}(y_1) = W_{x_2}^{(2)}(y_1) = a$  y  $W_{x_1}^{(1)}(y_1) = b_0 + b_1 y_1$ ,  $W_{x_1}^{(2)}(y_1) = d_0 + d_1 y_1$ , donde

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - r)}{[(1 - r)\rho_2 + r\rho_1]} \\ d_1 &= \frac{(\rho_2 - \rho_1)r}{[(1 - r)\rho_2 + r\rho_1]} \\ b_0 &= d_0 + d_1 \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Donde  $a, d_0, d_1$  y  $B(x)$  son arbitrarias. Por simplicidad tomaremos estos parámetros como cero. Renombrando las constantes,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha &= \frac{k_1}{k_2} = \frac{c_2}{c_1}, \alpha_2 = 1 \\ m_1 = m &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, m_2 = 1 \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} p^1 &= \left( \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - r)}{(1 - r)\rho_2 + r\rho_1} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - r)}{(1 - r)\rho_2 + r\rho_1} y_1 \right) \frac{\partial p^0}{\partial x_1}, y_1 \in \Omega_1 \\ p^1 &= \left( \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - r)}{(1 - r)\rho_2 + r\rho_1} y_1 \right) \frac{\partial p^0}{\partial x_1}, y_2 \in \Omega_2 \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Ahora, usando que la función  $p^1$  solo dependen de  $y_1$  obtenemos de (6.1.15), que

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p^1}{\partial y_1 \partial x_1} = - \frac{\partial^2 p^1}{\partial y_1 \partial x_1} - \Delta_x p^0 - k^2 p^0 \quad (6.1.16)$$

Pero como  $p^0 = p^0(x)$ , tenemos que  $\frac{\partial^2 p^0}{\partial y_1 \partial x_1} = 0$  y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p^1}{\partial y_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 p^0}{\partial y_1 \partial x_1} = -\frac{\partial^2 p^1}{\partial y_1 \partial x_1} - \frac{\partial^2 p^0}{\partial y_1 \partial x_1} - \Delta_x p^0 - k^2 p^0. \quad (6.1.17)$$

Usando que  $p^2$  es continua a través de las interfases tenemos que,

$$\left( \frac{\partial p^2}{\partial y_1} + \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) \Big|_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_{2\pi}} = \left( \frac{\partial p^2}{\partial y_1} + \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) \Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_{2\pi}} \quad (6.1.18)$$

Integrando la ecuación (6.1.18) sobre  $y_1$  de 0 a  $r$ , y sumándole  $m$  por la integral de  $r$  a 1 resulta

$$\left( \frac{\partial p^2}{\partial y_1} + \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) \Big|_0^r + m \left( \frac{\partial p^2}{\partial y_1} + \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) \Big|_r^1 = 0, \quad (6.1.19)$$

y por lo tanto

$$\int_0^r \left( \frac{\partial^2 p^1}{\partial y_1 \partial x_1} + \Delta_x p^0 + k^2 p^0 \right) dy_1 + m \int_r^1 \left( \frac{\partial^2 p^1}{\partial y_1 \partial x_1} + \Delta_x p^0 + k^2 p^0 \right) dy_1 = 0 \quad (6.1.20)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.1.20) la forma de la solución para  $p^1$  de (6.1.11) obtenemos la ecuación homogeneizada para  $p^0$

$$(r + m(1-r))\Delta_x p^0 + (rb_1 + m(1-r)d_1) \frac{\partial^2 p^0}{\partial x_1^2} + (\alpha^2 r + (1-r)m)p^0 = 0 \quad (6.1.21)$$

La cual podemos reescribir de manera matricial como,

$$\nabla_x \cdot (\mathbf{P} \nabla_x p^0) = p^0 \quad (6.1.22)$$

Donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{r+m(1-r)+rb_1+m(1-r)d_1}{(r-1)m-\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{r+m(1-r)}{(r-1)m-\alpha^2 r} \end{bmatrix}$$

De esta manera con el método asintótico se obtiene la ecuación de onda homogenei-

zada para  $p^0(x)$  que resulta ser anisotrópica (lo cual no pasaba a nivel macroscópico). También encontramos con dicho método una relación entre  $\nabla_x p^0(x)$  y  $\nabla_y p^1(x, y)$  que se encuentra en la ecuación (6.1.11) y puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \nabla_y p^1 &= \begin{bmatrix} \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1-r)}{(1-r)\rho_2 + r\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla_x p^0 \text{ si } y \in \Omega_1 \\ \nabla_y p^1 &= \begin{bmatrix} \frac{(\rho_2 - \rho_1)r}{(1-r)\rho_2 + r\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla_x p^0 \text{ si } y \in \Omega_2 \end{aligned} \tag{6.1.23}$$

El objetivo de la siguiente sección es demostrar formalmente que efectivamente las expresiones obtenidas por la expansion asintótica corresponden a las obtenidas mediante el cálculo riguroso de homogeneización a dos escalas.

## 6.2. Convergencia a dos escalas

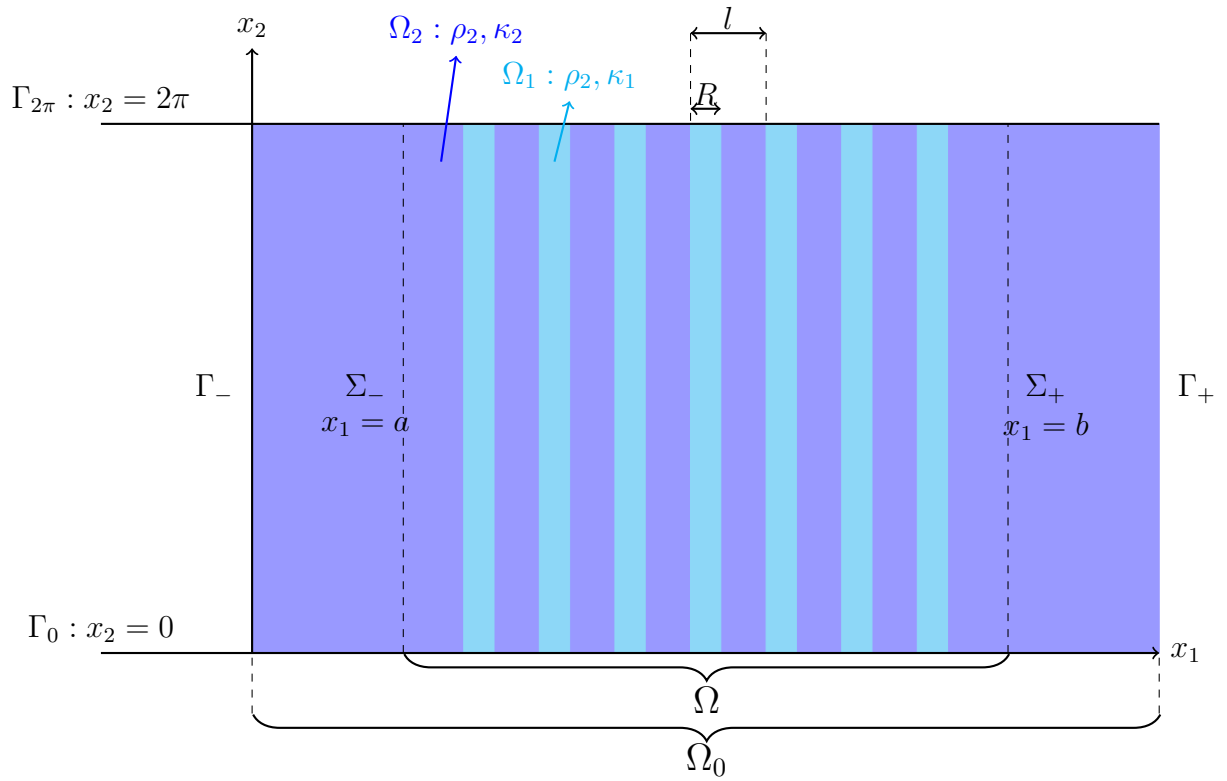


Figura 6-3: Dominio computacional

Los dominios de este problema se definen igual que en la sección anterior, a diferencia de que  $\Omega$  ahora es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\Omega = \{x \in [a, b] | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega | ml \leq x \leq ml + (l - R) \forall m \in \mathbb{Z} \text{ con } [ml, ml + (l - R)] \subset [a, b], x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$$

$$\Gamma_i = \{x \in [a, b] | x_1 = i * l\}$$

$$\Sigma_- = \{x \in [a, b] | x_1 = a\}$$

$$\Sigma_+ = \{x \in [a, b] | x_1 = b\}$$

(denotaremos como  $\Omega_0$  a un dominio computacional con fronteras  $\Gamma_-$  y  $\Gamma_+$  en  $x_1$ , el

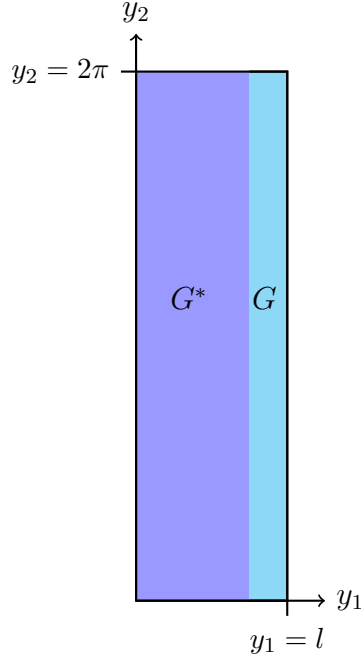


Figura 6-4: Celda unitaria de la microestructura

cual se hará tender finalmente a infinito para tener condiciones de frontera de ondas desvanecientes).

La microestructura periódica está definida por un celda periódica  $Y$  que se observa en la figura 6-4, cuyos subdominios están definidos por

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid m(l) \leq x_1 \leq (m+1)l \text{ para alguna } m \in \mathbb{Z}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$G^* = \{x \in \Omega \mid ml \leq x \leq ml + (l - R) \text{ para alguna } m \in \mathbb{Z}, x_2 \in [0, 2\pi]\}$$

$$G = Y \setminus G^*$$

Sea  $\epsilon = l$  el periodo de la microestructura, vamos a denotar a nuestros dominios reescalados periódicamente como:

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid \frac{x}{\epsilon} \in Y^*\} \in Y^* \cap \Omega \quad (6.2.1)$$

$$\Gamma_\epsilon = \{x \in \Omega \mid \frac{x}{\epsilon} \in \Gamma\} \in \Gamma \cap \Omega \quad (6.2.2)$$

con  $Y^* = Y \setminus T$  ( $T$  el toro identificado con la celda unitaria).

De la sección anterior, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para cada  $\epsilon > 0$  con condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot v^\epsilon &= i\omega\sigma^\epsilon p^\epsilon \text{ en } \Omega_\epsilon \\
\nabla p^\epsilon &= i\omega\rho^\epsilon v^\epsilon \text{ en } \Omega_\epsilon \\
v_{x_1}^\epsilon \Big|_{\partial\Omega_1} &= v_{x_1}^\epsilon \Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_{2\pi}} \\
\rho_1 v_{x_2} \Big|_{\partial\Omega_1} &= \rho_2 v_{x_2} \Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_{2\pi}}
\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Con el cual obtenemos la ecuación de Helmholtz en  $\Omega_\epsilon$

$$\Delta p^\epsilon + (k^\epsilon)^2 p^\epsilon = 0 \tag{6.2.4}$$

Donde  $k^\epsilon = \omega/c^\epsilon$  es el número de onda en el fluido, y  $c^\epsilon = \sqrt{\kappa^\epsilon/\rho^\epsilon}$  es la velocidad de la onda, donde  $\kappa^\epsilon = \kappa_1$  si estamos en  $\Omega_1$  y  $\kappa^\epsilon = \kappa_2$  si estamos en  $\Omega_2$ . En esta caso, para permitir ondas que no sean perpendiculares a los ejes del dominio, imponemos condiciones de pseudoperiodicidad en la dirección  $x_2$ , es decir

$$\begin{aligned}
p^\epsilon \Big|_{x_2=0} &= e^{ikx_2} p^\epsilon \Big|_{x_2=2\pi} \\
\partial_{x_2} p^\epsilon \Big|_{x_2=0} &= e^{ikx_2} \partial_{x_2} p^\epsilon \Big|_{x_2=2\pi}
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

En este caso el espacio de soluciones está dado por,

$$V^\epsilon = H_k^1(\Omega_1^\epsilon) \oplus H_k^1(\Omega_2^\epsilon)$$

donde  $\Omega_1^\epsilon = \Omega_\epsilon \cap \Omega_1$  y  $\Omega_2^\epsilon = \Omega_\epsilon \cap \Omega_2$  son los subdominios con parámetros  $(\rho_2^\epsilon, \kappa_2^\epsilon)$  y  $(\rho_1^\epsilon, \kappa_1^\epsilon)$

respectivamente como se muestra en la figura 6-3 y

$$H_\kappa^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega) \mid p \text{ es pseudoperiódica en } \Omega\}.$$

Ahora, para estudiar el problema de convergencia a dos escalas seguiremos la estructura dada por Robert V. Kohn y Stephen P. Shipman en el problema de homogeneización de un metamaterial óptico basado en microresonadores periódicos [12].

En este contexto vamos a estudiar el problema de una onda incidente de Bloch<sup>1</sup> dada por

$$p_{inc} = e^{i(\bar{m}+\kappa)x_2} e^{i\nu_{\bar{m}}x_1} \quad (6.2.6)$$

(para algunos  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  y  $\bar{m} \in \mathbb{Z}$ ).

En este caso la forma general de la presión será

$$p^\epsilon = p_{inc} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i[(m+\kappa)x_2 + \nu_m x_1]} \quad (6.2.7)$$

Bajo estas hipótesis la forma débil del problema (6.2.3) es

$$\int_{\Omega} ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \overline{\nabla \varphi} - \omega^2 \sigma^\epsilon p^\epsilon \overline{\varphi}) dx dy - \int_{\partial\Omega} (\rho^\epsilon)^{-1} \frac{\partial p}{\partial \nu} \overline{\varphi} d\sigma = 0. \quad (6.2.8)$$

(donde  $\overline{\varphi}$  representa el complejo conjugado de  $\varphi$ ).

Como  $\partial\Omega = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_{2\pi} \cup_{i=1}^n \Gamma_i$  con  $n$  el número de celdas en  $\Omega$ , como se ve en la figura 6.2 y  $\Gamma_i$  son las interfaces de los subdominios internos, si usamos (6.2.6) para expandir el término de frontera, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \overline{\nabla \varphi} - \omega^2 \sigma^\epsilon p^\epsilon \overline{\varphi}) dx dy - \int_{\Gamma_+} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \overline{\varphi} \\ + \int_{\Gamma_-} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \overline{\varphi} + i\nu_{\bar{m}} \int_{\Gamma_-} e^{i[(\bar{m}+\kappa)x_2 + \nu_{\bar{m}}x_1]} \overline{\varphi} dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

---

<sup>1</sup>Una onda de Bloch es una función de onda que describe una partícula en un medio periódico que tiene la forma  $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\kappa \cdot \mathbf{t}} p(\mathbf{r})$  donde  $\mathbf{r}$  es la posición y  $p$  una función periódica con la misma periodicidad que el medio.

donde  $p_2^\epsilon = \chi_{\Omega_2} p^\epsilon$ , es decir, la presión en el fluido 2. Cabe señalar que los términos de frontera en las  $\Gamma_i$  se eliminan al ser continuos y en  $\Gamma_0, \Gamma_{2\pi}$  se eliminan de igual manera al ser pseudoperiódicos. Sólo se toma la  $p_{inc}$  en en la frontera  $\Gamma_-$  ya que los demás términos son ondas que se hacen cero en infinito (lo cual quedará más claro cuando se demuestre la existencia y unicidad de las soluciones de este problema en la siguiente sección). A continuación presentamos el problema de dispersión a resolver.

**Problema 6.2.1 (Problema de dispersión)** *Encontrar una función  $p_\omega^\epsilon = p^\epsilon = p_2^\epsilon \oplus p_1^\epsilon \in V^\epsilon$  tal que.*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \bar{\varphi} - \omega^2 \sigma^\epsilon p^\epsilon \bar{\varphi}) dx dy - \int_{\Gamma_+} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \bar{\varphi} \\ + \int_{\Gamma_-} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \bar{\varphi} = -i\nu_{\bar{m}} \int_{\Gamma_-} e^{i[(\bar{m}+\kappa)x_2 + \nu_{\bar{m}}x_1]} \bar{\varphi} dx_2 \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

para toda  $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \in V^\epsilon$ , y sea  $v^\epsilon \in L^2(\Omega)$  dada por

$$v^\epsilon = \frac{1}{i\omega} (\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \in \Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon \quad (6.2.11)$$

### 6.2.1. Existencia de soluciones del problema de dispersión

Para poder resolver el problema (6.2.10) primero hay que saber qué valores de  $\epsilon$  son permitidos para que sea posible hablar de una solución con todas las características que pedimos en (6.2.7). Para esto, vamos a suponer que la anchura de la banda es un múltiplo entero de celdas periódicas, esto es  $\epsilon = \frac{b-a}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$  y  $a, b$  las fronteras de  $\Omega$  en  $x_1$  como se muestra en la figura 6-3. También suponemos que la estructura es  $2\pi$ -periódica en  $x_2$ . Entonces  $\epsilon = \frac{2\pi}{m}$ , por lo tanto el conjunto de valores permitidos para  $\epsilon$  esta dada por el conjunto

$$\Upsilon = \{\epsilon \in \mathbb{R} | \epsilon = (a-b)/n \text{ y } \epsilon = 2\pi/m \text{ con } m, n \in \mathbb{N}\} \quad (6.2.12)$$



Vamos a renombrar cada parte de la ecuación (6.2.10), como sigue

$$\begin{aligned}
a_\omega^\epsilon(p, \varphi) &= b_\omega^\epsilon(p, \varphi) - \omega^2 c^\epsilon(p, \varphi), \\
b_\omega^\epsilon(p, \varphi) &:= \int_\Omega ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \bar{\varphi}) - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \bar{\varphi} \\
c_\omega^\epsilon(p, \varphi) &:= \int_\Omega \sigma^\epsilon p^\epsilon \bar{\varphi}
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

y  $f \in (V^\epsilon)^*$  (el dual topológico de  $V^\epsilon$ ) el término de forzamiento está dado por

$$f(\varphi) = -i\nu_{\bar{m}} \int_{\Gamma_-} e^{i[(\bar{m}+\kappa)x_2 + \nu_{\bar{m}}x_1]} \bar{\varphi} dx_2 \tag{6.2.14}$$

La demostración de existencia de soluciones al problema 6.2.1 se basa en los siguientes lemas:

Primero vamos a definir antes el operador de traza Dirichlet a Neumann.

El operador Dirichlet a Neumann nos permite definir los términos de frontera en la formulación débil (6.2.9), dicho operador mapea los valores de un condición de frontera de la solución de una ecuación diferencial parcial elíptica a los valores de otra condición de frontera, y está dado por<sup>2</sup>, (denotaremos a  $\Gamma_\pm$  como los dos  $\Gamma_+$  o  $\Gamma_-$ )

$$\begin{aligned}
T_{\Gamma_\pm} : H^{\frac{1}{2}}(\Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\pm) \\
T_{\Gamma_\pm}(p) &= -\frac{\partial p}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_\pm}
\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

Ahora si hacemos expansión de Fourier de manera adecuada (usando como  $k_1 = (m + \kappa)$  y  $k_2 = \nu_m$ ) a una función prueba  $g$  tenemos que

$$g = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^\kappa e^{i((m+\kappa)x_2 + \nu_m x_1)} \tag{6.2.16}$$

---

<sup>2</sup>Los espacios de Sobolev se puede generalizar para ordenes fraccionarios definiendo el espacio a partir de la transformada de los coeficientes de fourier donde la norma está dada por  $\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}} = \sum_{m \in 2\pi\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{|m|} + 1\right) |\hat{g}|^2$  y  $\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \sum_{m \in 2\pi\mathbb{Z}} (|m| + 1) |\hat{g}|^2$

por lo tanto

$$(\widehat{T_{\Gamma_{\pm}}(g)})(\kappa) = -\frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_{\pm}}(\kappa) = -i\nu_m \widehat{g}_m^{\kappa} \quad (6.2.17)$$

**Lema 6.2.2** *El operador Dirichlet a Neumann  $T$  está acotado, más aún, existen  $C_1$  y  $C_2$  constantes positivas tal que*

$$\|T_{\Gamma_{\pm}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)} = C_1 + C_2|\omega| \quad (6.2.18)$$

**Demostración.** Usando la segunda ecuación de (6.1.1) en la onda incidente tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega\rho_{\epsilon}} \nabla p_{inc} &= \frac{1}{i\omega\rho_{\epsilon}} \nabla(i((\kappa+m)x_2 + \nu_m x_1)) e^{i((\kappa+m)x_2 + \nu_m x_1)} \\ &= \left( \frac{\nu_m}{\omega}, \frac{\kappa+m}{\omega} \right) e^{i((\kappa+m)x_2 + \nu_m x_1)} = v_{inc} \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Entonces,

$$\nabla \cdot v_{inc} = i\omega e^{i((\kappa+m)x_2 + \nu_m x_1)} = i \left( \frac{(\kappa+m)^2}{\omega} + \frac{\nu_m^2}{\omega} \right) e^{i((\kappa+m)x_2 + \nu_m x_1)} \quad (6.2.20)$$

Lo cual en vista de la primera ecuación de (6.1.1) implica que

$$(\kappa+m)^2 + \nu_m^2 - \omega^2 = 0 \quad (6.2.21)$$

por lo tanto

$$\nu_m^2 = \omega^2 - (\kappa+m)^2 \leq C\omega^2 \quad (6.2.22)$$

Ahora, la norma de  $T$  en el sentido de operadores, está definido como

$$\|T_{\Gamma_{\pm}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)} = \sup_{p \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \frac{\|T_{\Gamma_{\pm}} p\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)}}{\|p\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}} \quad (6.2.23)$$

Usando ahora la forma del operador Dirichlet a Neumann para la transformada de Fourier

tenemos que,

$$\begin{aligned}
\|T_{\Gamma_{\pm}} p\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 &= \sum_{m \in 2\pi\mathbb{Z}} \left( \frac{1}{|m|} |\widehat{T_{\Gamma_{\pm}} p_m}^{\kappa}|^2 + |\widehat{T_{\Gamma_{\pm}} p_m}^{\kappa}|^2 \right) \\
&= \sum_{m \in 2\pi\mathbb{Z}} \left( \frac{1}{|m|} \nu_m^2 |\widehat{p}_m^{\kappa}|^2 + \nu_m^2 |\widehat{p}_m^{\kappa}|^2 \right) \\
&= \sum_{m \neq 0} \frac{|\nu_m|^2}{|m|} (1 + |m|) |\widehat{g}_m^{\kappa}|^2
\end{aligned}$$

Tenemos dos casos para  $\nu_m$ :

**-Caso 1:**  $\nu_m \in \mathbb{R}$  para toda  $m$ , entonces

$$\frac{|\nu_m|^2}{|m|} \leq \frac{(m + \kappa)^2}{|m|} + C \frac{\omega^2}{|m|} \leq C_1 + C_2 \omega^2$$

y por lo tanto

$$\|T_{\Gamma_{\pm}} p\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 \leq (C_1 + C_2 \omega^2) \sum_{m \neq 0} (1 + |m|) |\widehat{p}_m^{\kappa}|^2 = (C_1 + C_2 \omega^2) \|p\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2$$

**-Caso 2:**  $\nu_m \in \mathbb{C}$  para toda  $m$ ,

Fijándonos solo en la seminorma obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{m \neq 0} \frac{|\nu_m|^2}{|m|} |\widehat{p}_m^{\kappa}|^2 &= \sum_{m \neq 0} \frac{|\nu_m|^2}{|m|^2} |m| |\widehat{p}_m^{\kappa}|^2 \leq (C_1 + C_2 \omega^2) \sum_{m \neq 0} |m| |\widehat{g}_m^{\kappa}|^2 \\
&\leq (C_1 + C_2 \omega^2) \sum_{m \neq 0} |m| |\widehat{p}_m^{\kappa}|^2 \\
&= (C_1 + C_2 \omega^2) \|p\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

y por lo tanto  $\|T_{\Gamma_{\pm}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq (C_1 + C_2 \omega^2)$ . ■

El siguiente lema nos permitirá encontrar una cota superior en  $|a^\epsilon(p, \varphi)|$ .

**Lema 6.2.3** *Existe una constante  $C$  tal que para cada  $\epsilon \in \Upsilon$  y para cada  $p^\epsilon = p_2^\epsilon \oplus p_1^\epsilon \in V^\epsilon$ , existen funciones  $\tilde{p}_2^\epsilon, \tilde{p}_1^\epsilon \in H_\kappa^1(\Omega)$  tales que*

$$\tilde{p}_1^\epsilon|_{\Omega_1} = p_1^\epsilon|_{\Omega_1}, \tilde{p}_2^\epsilon|_{\Omega_2} = p_2^\epsilon|_{\Omega_2} \quad (6.2.24)$$

$$\|\tilde{p}_1^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \|p_1^\epsilon\|_{H^1(\Omega_1)} \text{ y } \|\tilde{p}_2^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \|p_2^\epsilon\|_{H^1(\Omega_2)} \quad (6.2.25)$$

**Demostración.** Para extender las funciones a todo  $\Omega$ , primero vamos a extenderlo en una sola celda (figura 6-4). Las función extensión  $\tilde{p}_2^\epsilon$  en  $\Omega_1^\epsilon$  se definen como la función armónica en  $\Omega_1^\epsilon$  cuya traza en  $\partial\Omega_1$  coincide con la de  $p_2^\epsilon$ . Sea  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  y  $\hat{x}_n = (n, 0)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , la extensión es  $\kappa$ -pseudoperiódica ya que  $p_1$  lo es y  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$ . Ahora vamos a usar las siguientes desigualdades en el cubo unitario, usando que como ya se definió anteriormente  $r = R/l$

$$\int_{(0,1) \times (0,2\pi)} |\nabla_x \tilde{p}_1^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + r\epsilon \vec{x})|^2 dx_1 dx_2 \leq C \int_{(0,r) \times (0,2\pi)} |\nabla_x p_1^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + \epsilon \vec{x})|^2 dx_1 dx_2 \quad (6.2.26)$$

que son consecuencia del teorema de extensión de funciones en espacios de Sobolev. Por lo tanto, usando la desigualdad de Poincaré,

$$\int_{(0,1) \times (0,2\pi)} |\tilde{p}_1^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + r\epsilon \vec{x})|^2 dx_1 dx_2 \leq C \int_{(0,r) \times (0,2\pi)} (|p_1^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + \epsilon \vec{x})|^2 + |\nabla p_1^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + \epsilon \vec{x})|^2) dx_2 dx_1. \quad (6.2.27)$$

Ahora reescalamos con  $\epsilon$ , para guiarnos lo hacemos primero en una dimensión usando una función auxiliar  $w$ .

$$\begin{aligned} |w(0)|^2 &\leq |w(1)|^2 + \int_0^1 |w'(x_1)|^2 dx_1 \leq \int_0^1 |w(x_1)|^2 dx_1 + \int_0^1 |w'(x_1)|^2 dx_1 \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left( \int_0^\epsilon |w(y_1/\epsilon)|^2 dx + \epsilon^2 \int_0^\epsilon |w'(y_1/\epsilon)|^2 dy \right) \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} |w(\epsilon x_1, x_2)|^2 dx_2 \leq C \left( \int_0^{2\pi} \int_0^r |w(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 + \int_0^{2\pi} \int_r^1 (|\partial_1 w|^2 + |\partial_2 w|^2) dx_1 dx_2 \right). \quad (6.2.29)$$

Reescalando la última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |w(\epsilon x_1, x_2)|^2 dx_2 &\leq \frac{C}{\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon r} |w(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 + \frac{C}{\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon r}^{\epsilon} (\epsilon^2 |\partial_1 w|^2 + |\partial_2 w|^2) dx_1 dx_2 \\ &\leq \frac{C}{\epsilon} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon r} \epsilon r |w|^2 dx_1 dx_2 + \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon r}^{\epsilon} (\epsilon^2 |\partial_1 w|^2 + |\partial_2 w|^2) dx_1 dx_2 \right) \\ &= \frac{C}{\epsilon} \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

Esto se puede hacer para  $w = \tilde{p}_1^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + r\epsilon \vec{x})$  y  $w = \tilde{p}_2^\epsilon(\epsilon \hat{x}_n + r\epsilon \vec{x})$ , por lo tanto obtenemos las estimaciones en la celda unitaria reescalada  $\hat{x}_n + \epsilon \Omega_1$  ( $\hat{x}_n + \epsilon \Omega_2$ ), donde denotamos a  $\epsilon \Omega_1$  ( $\epsilon \Omega_2$ ) como el reescalamiento de  $\Omega_1$  ( $\Omega_2$ ) en la coordenada  $x_1$ , en el caso de  $p_1^\epsilon$  se obtiene

$$\int_{\epsilon Y} |\nabla_x \tilde{p}_1^\epsilon(\hat{x} + x)|^2 dx_1 dx_2 \leq C \int_{\epsilon \Omega_1} |\nabla_x p_1^\epsilon(\hat{x} + x)|^2 dx_1 dx_2 \quad (6.2.31)$$

donde  $Y$  es la celda unitaria y,

$$\int_{\epsilon Q} |\tilde{p}_1^\epsilon(\hat{x} + x)|^2 dx_1 dx_2 \leq C \int_{\epsilon \Omega_1} (|p_1^\epsilon(\hat{x} + x)|^2 + \epsilon^2 |\nabla_x p_1^\epsilon(\hat{x} + x)|^2) dx_2 dx_1 \quad (6.2.32)$$

Sumando sobre todas las celdas unitarias en  $\Omega_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |\nabla_x \tilde{p}_1^\epsilon|^2 dx_1 dx_2 &\leq C \int_{\Omega_{01}} |\nabla_x p_1^\epsilon|^2 dx_1 dx_2 \\ \int_{\Omega_0} |\tilde{p}_1^\epsilon|^2 dx_1 dx_2 &\leq C \int_{\Omega_{01}} (|p_1^\epsilon|^2 + \epsilon^2 |\nabla_x p_1^\epsilon|^2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

Las funciones se pueden extender trivialmente a toda  $\Omega$  ya que las orillas no intersectan a las celdas. Finalmente obtenemos

$$\|\tilde{p}_1^\epsilon\|_{H_\kappa^1(\Omega)} \leq C \|p_1^\epsilon\|_{H_\kappa^1(\Omega_1)} \quad (6.2.34)$$

que es lo que se quiere demostrar. Análogamente se puede demostrar (6.2.34) para  $p_2^\epsilon$ , lo que concluye la demostración. ■

**Lema 6.2.4** *Sea  $f \in (V^\epsilon)^*$  definida como en 6.2.14, entonces existe una constante  $C$  tal que  $\|f\|_{(V^\epsilon)^*} < C$  para toda  $\epsilon \in \Upsilon$ .*

**Demostración.** Sea  $p^\epsilon = p_1^\epsilon \oplus p_2^\epsilon \in V^\epsilon$  dada, y sea  $\tilde{p}_2^\epsilon$  la extensión de  $p_2^\epsilon$ , entonces si denotamos a  $\tilde{f}$  como la extensión de  $f$  obtenemos

$$\begin{aligned}
|f(p^\epsilon)| &= \left| -i\nu_m \int_{\Gamma_-} e^{i((m+\kappa)x_2 + \nu_m x_1)} p^\epsilon dx_2 \right| = |f(p_2^\epsilon)| = |\tilde{f}(\tilde{p}_2^\epsilon)| \\
&\leq \|\tilde{f}\|_{(H_\kappa^1(\Omega))^*} \|\tilde{p}_2^\epsilon\|_{H_\kappa^1(\Omega)} \\
&\leq C \|\tilde{f}\|_{(H_\kappa^1(\Omega))^*} \|p_2^\epsilon\|_{H_\kappa^1(\Omega_2)} \\
&\leq C \|\tilde{f}\|_{(H_\kappa^1(\Omega))^*} \|p^\epsilon\|_{V^\epsilon}
\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

de donde concluimos que  $f$  es uniformemente acotada, es decir

$$\|f\|_{(V^\epsilon)^*} \leq C \|\tilde{f}\|_{(H_\kappa^1(\Omega))^*}$$

(esto es  $f$  es uniformemente acotada). ■

**Lema 6.2.5** La forma bilineales  $b_\omega^\epsilon$  es coerciva, con constante independiente de  $\epsilon$  y  $f$  es uniformemente acotada (continua), es decir:

(a)  $|b_\omega^\epsilon(p, \varphi)| \leq (C_1 + C_2|\omega|)\|p\|_{V^\epsilon}^2\|\varphi\|_{V^\epsilon}^2$

(b)  $Re(b_\omega^\epsilon(p, p)) \geq C'\|p\|_{V^\epsilon}^2$

(c)  $\|f\|_{(V^\epsilon)^*} \leq (C_1 + C_2|\omega|)$ , para alguna  $C > 0$

**Demostraci3n.** Sea  $\rho^\epsilon = \rho_1$  en  $\Omega_1^\epsilon$  y  $\rho^\epsilon = \rho_2$  en  $\Omega_2^\epsilon$ , supongamos de manera conveniente que  $C' < (\rho^\epsilon)^{-1} < C''$  para algunas  $C', C''$ , en particular podemos elegir  $C_1, C_2$  tal que  $|(\rho^\epsilon)^{-1}| < (C_1 + C_2|\omega|)$  tal que  $\|f\|_{(V^\epsilon)^*} \leq (C_1 + C_2|\omega|)$  Con esto podemos ahora demostrar:

1. La forma bilineal es acotada

$$\begin{aligned} |b_\omega^\epsilon(p, \varphi)| &= \left| \int_{\Omega} ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \varphi) + \int_{\Gamma_\pm} T_{\Gamma_\pm} p_2^\epsilon \varphi \right| = \left| \int_{\Omega} ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \varphi) - \int_{\Gamma_\pm} \partial_1 p_2^\epsilon \varphi \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |(\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \varphi| + \int_{\Gamma_\pm} |\partial_1 p_2^\epsilon \varphi| \\ &\leq (C_1 + C_2|\omega|)\|p^\epsilon\|_{V^\epsilon}\|\varphi\|_{V^\epsilon} \end{aligned}$$

2. La forma bilineal es coerciva

$$Re(b_\omega^\epsilon(p^\epsilon, p^\epsilon)) = Re \left( \int_{\Omega} ((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon)^2 - \int_{\Gamma_\pm} \partial_1 p^\epsilon p^\epsilon \right) \geq C'' \int_{\Omega} (\nabla p^\epsilon)^2 \geq C''\|p^\epsilon\|_{V^\epsilon}^2$$

La 3ltima desigualdad se demuestra usando la cota de  $(\rho^\epsilon)^{-1}$  y la desigualdad de Poincar3 (Teorema A.3.4).

3. Usando el 3ltimo Lema 6.2.3 finalmente tenemos que el funcional  $f$  cumple que

$$\|f\|_{(V^\epsilon)^*} \leq (C_1 + C_2|\omega|)$$

Lo cual demuestra el Lema 6.2.5. ■

Por la continuidad de las formas bilineales, podemos definir a partir de estas a los operadores acotados  $B_\omega^\epsilon$  y  $C^\epsilon$  de  $V^\epsilon$  (revisar []) dados por

$$\begin{aligned} b_\omega^\epsilon(p, \varphi) &= (B_\omega^\epsilon p, \varphi)_{V^\epsilon} \\ c^\epsilon(p, \varphi) &= (C^\epsilon p, \varphi)_{V^\epsilon} \end{aligned} \tag{6.2.36}$$

donde  $(\cdot, \cdot)_{V^\epsilon}$  es el producto interior usual  $V^\epsilon$ . Sea  $\tilde{f}$  el elemento de  $V^\epsilon$  tal que  $(\tilde{f}, \cdot) = f$  (dado por el teorema de representación de Riesz ya que el funcional es continuo). Por lo tanto el problema de dispersión toma la forma

$$a_\omega^\epsilon(p, \varphi) = f(p) \text{ para toda } \varphi \in V^\epsilon$$

o bien

$$B_\omega^\epsilon p - \omega^2 C^\epsilon p = \tilde{f} \tag{6.2.37}$$

**Teorema 6.2.6** *El problema de dispersión (6.1.1) ( o (6.2.37)) tiene al menos una solución.*

**Demostración.** Como  $b_\omega^\epsilon$  es coerciva,  $B_\omega^\epsilon$  es una biyección con inversa acotada, supongamos que  $\sigma^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$  (con  $\sigma^\epsilon = 1/\kappa^\epsilon$ , y  $\kappa^\epsilon$  definida de manera análoga a  $\rho^\epsilon$ ), entonces  $C^\epsilon$  es compacta y podemos usar la alternativa de Fredholm ([10], pag. 641). Por lo tanto el problema (6.1.1) tiene solución si y sólo si

$$(\tilde{f}, p^\epsilon)_{V^\epsilon} = 0 \text{ para toda } p^\epsilon \in \text{Ker}(B_\omega^\epsilon - \omega^2 C^\epsilon)^\dagger \tag{6.2.38}$$

o equivalentemente si se satisface la condición de solubilidad

$$f(\varphi) = 0 \text{ para toda } \varphi \in V^\epsilon \text{ tal que } a_\omega^\epsilon(p, \varphi) = 0 \text{ para toda } p \in V^\epsilon \tag{6.2.39}$$

Ahora, cualquier función  $p$  que satisface la condición de eigenvalor adjunto  $a_\omega^\epsilon(p, \varphi) = 0$



para toda  $p \in V^\epsilon$  satisface, en particular  $a_\omega^\epsilon(p, p) = 0$ , y como la parte imaginaria e  $a_\omega^\epsilon$  (esto es la parte que del operador que aplicarlo a un par ordenado resulta en imaginario) es no positiva (vease ecuación 6.2.13), tenemos que

$$T_{\Gamma_-} p = 0, \quad (6.2.40)$$

por lo tanto la traza de  $p$  en  $\Gamma_-$  solo tiene armónicos de Fourier que decaen en infinito, en este caso estamos tomando el límite cuando las fronteras exteriores  $\Gamma_-$  y  $\Gamma_+$  están en infinito (que es la única manera de que la ecuación anterior se cumpla)

$$p(x) = \sum_{m|\nu_m < 0} \gamma_m^\pm e^{i((m+\kappa)x_2 + \nu_m|x_1|)} \text{ en el exterior a la banda} \quad (6.2.41)$$

(el exterior de la banda se refiere, el exterior del dominio  $\Omega_0$ ) mientras  $f$  se define a través de la integración contra la traza del campo incidente, obteniendo

$$f(\varphi) = -2i\nu_m \int_{\Gamma_-} e^{i((\bar{m}+\kappa)x_2 + \nu_{\bar{m}}x_1)} \left( \sum_{m|\nu_m < 0} \bar{\gamma}_m e^{i(-(m+\kappa)x_2 + \nu_m x_1)} \right) dx_2 \quad (6.2.42)$$

por lo tanto la condición de solubilidad es válida, por lo tanto existe  $p^\epsilon \in V^\epsilon$  solución del problema de dispersión. ■

Finalmente necesitamos encontrar cotas uniformes para las soluciones  $p^\epsilon$ , el siguiente lema nos permite reescalar las soluciones para obtener cotas a priori.

**Lema 6.2.7** *Las siguientes funciones reescaladas*

$$\begin{aligned} m^\epsilon &= \min\{1, \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^{-1}\} \\ q^\epsilon(x) &= m^\epsilon p^\epsilon(x) \\ W^\epsilon(x) &= m^\epsilon v^\epsilon(x) \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

son tales que las  $q^\epsilon(x)$  son soluciones del problema de dispersión con una onda incidente

reescalada y es acotada en  $L^2(\Omega)$  uniformemente en  $\epsilon$ , esto es

$$\begin{aligned} a_\omega^\epsilon(q^\epsilon, \phi) &= m^\epsilon f(\phi) \text{ para toda } w \in V^\epsilon \\ W^\epsilon &= \frac{1}{i\omega}(\rho^\epsilon)^{-1}\nabla q^\epsilon \\ \|q^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq 1 \end{aligned} \tag{6.2.44}$$

**Demostraci3n.** Sabemos que

$$\begin{aligned} a_\omega^\epsilon(p, \varphi) &= b_\omega^\epsilon(p, \varphi) - \omega^2 c^\epsilon(p, \varphi), \\ b_\omega^\epsilon(p, \varphi) &:= \int_\Omega ((\rho^\epsilon)^{-1}\nabla p^\epsilon \cdot \nabla \bar{\varphi}) - \int_{\Gamma_\pm} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \bar{\varphi} \\ c_\omega^\epsilon(p, \varphi) &:= \int_\Omega \sigma^\epsilon p^\epsilon \bar{\varphi} \end{aligned}$$

y  $f \in (V^\epsilon)^*$  el t3rmino de forzamiento est3 dado por

$$f(\varphi) = -i\nu_{\bar{m}} \int_{\Gamma_-} e^{i[(\bar{m}+\kappa)y + \nu_{\bar{m}}x]} \bar{\varphi} dx_2$$

Sustituyendo  $q^\epsilon = m^\epsilon p^\epsilon$  y usando que  $m^\epsilon$  es constante, tenemos que

$$\begin{aligned} a_\omega^\epsilon(q^\epsilon, \varphi) &= m^\epsilon \left( \int_\Omega ((\rho^\epsilon)^{-1}\nabla p^\epsilon \cdot \nabla \bar{\varphi}) - \int_{\Gamma_\pm} \partial_{x_1} p_2^\epsilon \bar{\varphi} - \omega^2 \int_\Omega \sigma^\epsilon p^\epsilon \bar{\varphi} \right) \\ &= m^\epsilon (a_\omega^\epsilon(p^\epsilon, \varphi)) = m^\epsilon f(\varphi) \end{aligned} \tag{6.2.45}$$

Ahora, como

$$v^\epsilon = \frac{1}{i\omega}(\rho^\epsilon)^{-1}\nabla p^\epsilon \tag{6.2.46}$$

Sustituyendo  $v^\epsilon = \frac{1}{m^\epsilon}W^\epsilon$  y  $p^\epsilon = \frac{1}{m^\epsilon}q^\epsilon$  tenemos

$$\frac{1}{m^\epsilon}W^\epsilon = \frac{1}{i\omega m^\epsilon}(\rho^\epsilon)^{-1}\nabla q^\epsilon$$

por lo tanto

$$W^\epsilon = \frac{1}{i\omega}(\rho^\epsilon)^{-1}\nabla q^\epsilon$$

Finalmente, calculando la norma de  $q^\epsilon$  tenemos que

$$\|q^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|m^\epsilon p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = |m^\epsilon| \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

pero  $|m^\epsilon| = |\min\{1, \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^{-1}\}| \leq \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^{-1}$ , por lo tanto

$$\|q^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}}{\|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}} = 1$$

Lo cual termina la demostración. ■

## 6.2.2. Existencia del límite a dos escalas

En esta sección demostraremos la existencia del límite a dos escalas de subsucesiones de  $q^\epsilon$  y  $\nabla q^\epsilon$  cuya dependencia en  $y$  refleja las discontinuidades sobre las fronteras de las celdas de los dos fluidos. Recordemos el significado de convergencia a dos escalas que vamos a representar aquí con el signo "→": Una sucesión  $q^\epsilon$  converge a dos escalas a  $q^0(x, y)$  ( $q^\epsilon \rightarrow q^0$ ) en  $\Omega$  si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} q^\epsilon(x) \phi(x, x/\epsilon) dx = \int_{\Omega} \int_Q q^0(x, y) \phi(x, y) dx dy \text{ para toda } \phi \in C_{\#}^{\infty}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$$

De ahora en adelante denotaremos a la función característica de  $\Omega_1$  extendida periódicamente a  $\mathbb{R}^2$  por  $\chi_1(y)$ , sea  $\chi_2(y) = 1 - \chi_1(y)$  la función característica de  $\Omega_2$ .

**Teorema 6.2.8** *Para toda función  $\theta(x) \in [L^2(\Omega)]^N$  existe  $\Psi(x, y) \in L^2[\Omega; H_{\#}^1]^N$  tal que*

1.  $\nabla_y \cdot \Psi(x, y) = 0$  en  $Y^*$ ,
2.  $\Psi(x, y) = 0$  en  $\partial Y^* - \partial Y$  (con  $Y$  la celda unitaria y  $Y^* = Y \setminus T$ ,  $T$  el toro identificado con la celda unitaria),

$$3. \int_{Y^*} \Psi(x, y) dy = \theta(x),$$

$$4. \|\Psi(x, y)\|_{L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y^*))^N} \leq C \|\theta(x)\|_{L^2(\Omega)^N}$$

**Demostración.** Para  $1 \leq i \leq N$ , consideremos el problema de Stokes

$$\begin{aligned} \nabla p_i - \Delta v_i &= e_i \text{ en } Y^* \\ \nabla \cdot v_i &= 0 \text{ en } Y^* \\ v_i &= 0 \text{ en } \partial Y^* - \partial Y \\ p_i, v_i &\text{ son } Y - \text{periódicas} \end{aligned} \tag{6.2.47}$$

(con  $e_i$  el vector unitario en dirección  $i$ ) el cual admite una única solución no cero  $(p_i, v_i) \in [L_{\#}^2(Y^*)/\mathbb{R}] \times [H_{\#}^1(Y^*)]^N$  (revisar [2]) ya que supusimos que  $E^*$  (el conjunto  $Y$ -periódico obtenido de  $Y^*$ ) es suave y conexo. Denotemos por  $\mathbf{A}$  la matriz constante, simétrica, positiva definida  $(\int_{Y^*} \nabla v_i \cdot \nabla v_j)_{1 \leq i, j \leq N}$ . Entonces, para toda  $\theta(x) \in [L^2(\Omega)]^N$ , la función  $\Psi$  definida por

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{A}^{-1} \theta(x), e_i \rangle v_i(y) \tag{6.2.48}$$

dicha  $\Psi$  satisface las propiedades requeridas ya que  $\int_{Y^*} \nabla v_i \cdot \nabla v_j = \int_{Y^*} v_i \cdot e_j$ . Se puede encontrar una demostración más detallada en el Teorema 2.10 de [1]. ■

El siguiente lema caracteriza la convergencia a dos escalas de nuestra sucesión  $q^\epsilon$ .

**Lema 6.2.9** *Toda sucesión en  $\Upsilon$  admite una subsucesión  $\Upsilon'$  y funciones  $q_2^0(x) \in H_{\kappa}^1(\Omega)$ ,  $q_1^0(x) \in H_{\kappa}^1(\Omega_0)$ ,  $q_2^1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Q \setminus D)/\mathbb{R})$  y  $q_1^1(x, y) \in L^2(\Omega_0; H_{\#}^1(Q)/\mathbb{R})$  en  $\Omega$*

$$q^\epsilon(x) \rightharpoonup \chi_2(y) q_2^0(x) + \chi_1(y) q_1^0(x) \tag{6.2.49}$$

y

$$\nabla q^\epsilon(x) \rightharpoonup \chi_2(y) [\nabla q_2^0(x) + \nabla_y q_2^1(x, y)] + \chi_1(y) [\nabla q_1^0(x) + \nabla q_1^1(x, y)] \tag{6.2.50}$$

**Demostración.** Sean  $\phi = q^\epsilon$  en  $a_\omega^\epsilon(q^\epsilon, \phi) = m^\epsilon f(\phi)$  entonces,

$$b(q^\epsilon, q^\epsilon) = m^\epsilon f(q^\epsilon) + \omega^2 c(q^\epsilon, q^\epsilon) \quad (6.2.51)$$

Usando ahora la coercividad de  $b_\omega^\epsilon$ , la cota de  $\sigma^\epsilon$  (ya que  $\sigma^\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ ) y las cotas demostradas en el Lema 6.2.5 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta \|q^\epsilon\|_{V^\epsilon}^2 &\leq \operatorname{Re}(b_\omega^\epsilon(q^\epsilon, q^\epsilon)) \leq |f(q^\epsilon)| + \omega^2 \int_\Omega \operatorname{Re}(\sigma^\epsilon |q^\epsilon|^2) \\ &\leq C \|q^\epsilon\|_{V^\epsilon} + \omega^2 \sigma^+ \|q^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (C + \omega^2 \sigma^+) \|q^\epsilon\|_{V^\epsilon} \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

donde  $\sigma^+$  es la cota de  $\sigma$ , de esa desigualdad se sigue que,

$$\|q^\epsilon\|_{V^\epsilon} \leq (C + \omega^2 \sigma^+) / \delta \quad (6.2.53)$$

Por lo tanto (haciendo lo mismo con  $\nabla q^\epsilon$ ) tenemos que  $q^\epsilon$  y  $\nabla q^\epsilon$  son sucesiones acotadas en  $L^2(\Omega)$ , usando el Teorema 4.3.5 existen funciones  $q^0 \in L^2(\Omega \times Q)$  y  $\xi^0 \in L^2(\Omega \times Q)^2$  y una subsucesión  $\Upsilon' \subset \Upsilon$  tal que

$$q^\epsilon(x) \rightharpoonup q^0(x, y) \quad (6.2.54)$$

y

$$\nabla q^\epsilon(x) \rightharpoonup \xi^0(x, y). \quad (6.2.55)$$

Notese que el comportamiento es trivial afuera de la banda  $(\Omega \setminus \Omega_0)$ .

Sea  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_0; C_\#^\infty(\mathbb{R}^2))^2$  con  $\Psi(x, y) \cdot \hat{n} = 0$  para  $y \in \partial\Omega_1$  dada. Usando  $\Psi$  como función test en (4.3.11) e integrando por partes, las integrales sobre  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  se cancelan

(por el soporte) de  $\psi$  y obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla q^\epsilon(x) \cdot \Psi(x, x/\epsilon) dx + \int_{\Omega} q^\epsilon(x) (\nabla_x \cdot \Psi(x, x/\epsilon)) \\ & + \int_{\Omega} q^\epsilon(x) \left( \frac{1}{\epsilon} (\partial_{y_1} \Psi_1(x, x/\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \partial_{y_2} \Psi_2(x, x/\epsilon)) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.56)$$

Podemos multiplicar esta desigualdad por  $\epsilon$  y tenemos que

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\Omega} \nabla q^\epsilon(x) \cdot \Psi(x, x/\epsilon) dx + \int_{\Omega} q^\epsilon(x) (\epsilon \nabla_x \cdot \Psi(x, x/\epsilon)) \\ & + \int_{\Omega} q^\epsilon(x) ((\partial_{y_1} \Psi_1(x, x/\epsilon) + \partial_{y_2} \Psi_2(x, x/\epsilon))) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.57)$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluimos que

$$\int_{\Omega} \int_Q q^0(x, y) \nabla_y \cdot \Psi(x, y) = 0 \quad (6.2.58)$$

Notese que por simetría de bandas paralelas, las funciones no dependen de  $y_2$ , por lo tanto

$$\nabla_y \cdot \psi(x, y) = \partial_{y_1} \Psi_1(x, y)$$

con lo que (6.2.58) puede simplificarse, aunque para mantener la generalidad de la demostración usaremos a la ecuación (6.2.58). Ahora sea  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_0; C_\#^\infty(\mathbb{R}^2))$  dada (que será en este caso la primera entrada de la función test  $\Psi$  dada anteriormente) y podemos elegir a  $\psi(x, y) = \phi(x)\Phi(y)$  (esto es, que sea separable, notese que en verdad  $\Phi$  solo depende de  $y_1$ ), con  $\Phi(y)n_1 = 0$  en  $\partial\Omega_1$ , (esto es  $\Psi(x, y) \cdot \hat{n} = 0$  con  $\hat{n}$  el vector normal a la interfase), con esta función test en (6.2.58) obtenemos

$$\int_{\Omega} \phi(x) \int_Q q^0(x, y) \partial_{y_1} \Phi(y) dy dx = 0 \quad (6.2.59)$$

de donde,

$$\int_Q q(x, y) \partial_{y_1} \Phi(y) dy = 0 \text{ para toda } \Phi(x) \in C_\#^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \quad (6.2.60)$$

esto último pasa ya que  $\phi(x)$  es arbitraria. De esto y de la conexidad de cada subdominio  $\Omega_{i1}^\epsilon, \Omega_{i2}^\epsilon$  se sigue que  $q^0(x, y)$  es independiente de  $y$  en  $\Omega$  y por lo tanto, para cada  $x \in \Omega_0$ ,

$$\begin{aligned} q^0(x, y) &= \chi_2(y)q_2^0(x) + \chi_1(y)q_1^0(x), \\ q_2^\epsilon &\rightarrow \chi_2(y)q_2^0(x), \\ q_1^\epsilon &\rightarrow \chi_1(y)q_1^0(x). \end{aligned} \tag{6.2.61}$$

Para probar que  $q_2^0(x) \in H^1(\Omega_0)$ , debemos probar que existe una constante tal que para cada función  $\Theta(x) \in C_c^\infty(\Omega_0)$ ,

$$\left| \int_{\Omega_0} q_2^0(x) \nabla \cdot \Theta(x) dx \right| \leq \text{cte.} \|\Theta\|_{L^2(\Omega_0)^2} \tag{6.2.62}$$

Por el Teorema 6.2.8 tenemos las siguientes propiedades para  $\Psi(x, y)$ .

1.  $\nabla_y \cdot \Psi(x, y) = 0$  en  $Y^*$
2.  $\int_{Y^*} \Psi(x, y) dy = \Theta(x)$
3.  $\|\Psi\|_{L^2(\Omega_0; H_{\#}^1(Y^*))^2} \leq C \|\Theta\|_{L^2(\Omega_0)^2}$

Tomando ahora el límite en la subsucesión  $\Upsilon'$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \nabla q_2^\epsilon(x) \cdot \Psi(x, x/\epsilon) dx &= \int_{\Omega_0} q_2^\epsilon(x) \nabla_x \cdot \Psi(x, x/\epsilon) dx \text{ de donde} \\ \int_{\Omega_0} \int_{Y^*} q_2^0(x) \nabla_x \cdot \Psi(x, y) dy dx &= \int_{\Omega_0} q_2^0(x) \nabla \cdot \int_{Y^*} \Psi(x, y) dy dx = \int_{\Omega_0} q_2^0(x) \nabla \cdot \Theta(x) dx \end{aligned} \tag{6.2.63}$$

Por otro lado de (6.2.55) tenemos que

$$\int_{\Omega_0} \nabla q_2^\epsilon(x) \cdot \Psi(x, x/\epsilon) dx \longrightarrow \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_2} \xi^0(x, y) \cdot \Psi(x, y) dy dx \tag{6.2.64}$$

de tal forma que

$$\int_{\Omega_0} q_2^0(x) \nabla \cdot \Theta(x) dx = \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_2} \xi^0(x, y) \cdot \Psi(x, y) dy dx \quad (6.2.65)$$

Tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_2} \xi^0(x, y) \cdot \Psi(x, y) dy dx \right| &\leq \|\xi^0\|_{L^2(\Omega_0 \times \Omega_2)^2} \|\Psi\|_{L^2(\Omega_0 \times \Omega_2)^2} \\ &\leq C \|\xi^0\|_{L^2(\Omega_0 \times \Omega_2)^2} \|\Theta\|_{L^2(\Omega_0)^2} \end{aligned} \quad (6.2.66)$$

Esto demuestra que la integral (6.2.65) actua como un funcional lineal acotado en  $L^2(\Omega_0)^2$  para  $q_2^0 \in H^1(\Omega_0)$ . Por un argumento análogo se demuestra también que  $q_1^0 \in H^1(\Omega_0)$ . Se puede ver entonces que  $q_2^0$  y  $q_1^0$  están en  $H_\kappa^1(\Omega_0)$  aplicando los argumentos anteriores a una extensión de  $\Omega_0$  dentro de una vecindad de  $x_2 = 2\pi$  con  $q^\epsilon$  extendido pseudoperiódicamente en esta región.

Para obtener las funciones  $q_2^1(x, y)$  y  $q_1^1(x, y)$  en  $\Omega_0$ , usamos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} \nabla q_2^\epsilon(x) \cdot \Psi(x, x/\epsilon) dx = \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_2} \nabla q_2^0(x) \cdot \Psi(x, y) dy dx \quad (6.2.67)$$

para obtener

$$\int_{\Omega_0} \int_{\Omega_2} (\xi^0(x, y) - \nabla q_2^0(x)) \Psi(x, y) dy dx = 0 \quad (6.2.68)$$

lo cual implica, como antes que

$$\int_{\Omega_2} (\xi^0(x, y) - \nabla q_2^0(x)) \cdot \Phi(y) dy = 0 \quad (6.2.69)$$

esto pasa para toda  $\Phi(y) \in H_{\neq}^1(Q)^2$ , con  $\nabla \cdot \Phi = 0$  (que implica  $\partial_{y_1} \Phi_1 = 0$  y  $\Phi \cdot \hat{n} = 0$  en  $\partial\Omega_1$ , de donde inferimos la existencia de una función  $q_2^1(x, y) \in L^2(\Omega_0; H^1(\Omega_2))$  tal que

$$\xi^0(x, y) = \nabla q_2^0(x) + \nabla_y q_2^1(x, y), \quad y \in \Omega_2 \quad (6.2.70)$$



De manera análoga, se establece la existencia de  $q_1^1(x, y) \in L^2(\Omega_0; H_{\#}^1(\Omega_1))$  tal que

$$\xi^0(x, y) = \nabla q_1^0(x) + \nabla_y q_1^1(x, y) , y \in \Omega_1 \quad (6.2.71)$$

Ahora, por el Lema 6.2.3, las funciones  $q_2^\epsilon$  pueden ser extendidas a funciones  $\tilde{q}^\epsilon \in H^1(\Omega)$  de tal manera que  $\|\tilde{q}^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ . Podremos entonces extraer una subsucesión que converge debilmente en  $H^1(\Omega)$ , y por la Proposición 4.3.5 esta subsucesión converge a dos escalas a su límite débil, que deberá ser igual a  $q_2^0$ . Esto demuestra que  $q_2^0 \in H^1(\Omega)$ . ■

La clave para obtener la convergencia a dos escalas de  $q^\epsilon$  a una solución del problema de dispersión para una banda homogenea es la unicidad de esta solución. La forma débil de este problema se dará a continuación . Si  $Im(\sigma^*(x)) > 0$ , la unicidad se asegura. Nuestra tarea ahora es saber si las funciones límite obtenidas son solución del problema variacional límite.

**Teorema 6.2.10** *Las funciones límite a dos escalas  $p_2^0(x)$ ,  $p_1^0(x)$ ,  $p_2^1(x, y)$  y  $p_1^1(x, y)$ , satisfacen el siguiente problema variacional*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\Omega_2} (\rho^{-1}(x, y)(\nabla_x p_2^0(x) + \nabla_y p_2^1(x, y)) \cdot (\nabla_x \bar{\varphi}_2^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_2^1(x, y))) dA(x) dA(y) \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} (\rho^{-1}(x, y)(\nabla_x p_1^0(x) + \nabla_y p_1^1(x, y)) \cdot (\nabla_x \bar{\varphi}_1^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_1^1(x, y))) dA(x) dA(y) \\
& - \omega^2 \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega_2} \sigma(x, y) dA(y) \right) p_2^0(x) \bar{\varphi}_2^0(x) dA(x) \\
& - \omega^2 \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega_1} \sigma(x, y) dA(y) \right) p_1^0(x) \bar{\varphi}_1^0(x) dA(x) \\
& - \int_{\Gamma_+} (\partial_{x_1} p_2^0(x) + \partial_{y_1} p_2^1(x, y)) (\partial_{x_1} \bar{\varphi}_2^0(x) + \partial_{y_1} \bar{\varphi}_2^1(x, y)) ds(x) ds(y) \\
& + \int_{\Gamma_-} (\partial_{x_1} p_2^0(x) + \partial_{y_1} p_2^1(x, y)) (\partial_{x_1} \bar{\varphi}_2^0(x) + \partial_{y_1} \bar{\varphi}_2^1(x, y)) ds(x) ds(y) \\
& = -i\nu_m \rho_0^{-1} \int_{\Gamma_-} e^{i((m+\kappa)x_1 + \bar{\nu}_m x_1)} \bar{\varphi}_2^0(x) dx_2 \\
& \text{para toda } \varphi_2^0(x), \varphi_1^0(x) \in H_{\kappa}^1(\Omega) \text{ , } \varphi_2^1(x, y) \in L^2(\Omega_0; H_{\#}^1(Y)) \oplus L^2(\Omega \setminus \Omega_0) \\
& \text{y } \varphi_1^1(x, y) \in L^2(\Omega_0; H_{\#}^1(\Omega_1)).
\end{aligned} \tag{6.2.72}$$

(dónde  $dA(x) = dx_1 dx_2$ ,  $dA(x) = dy_1 dy_2$  y  $ds(x), ds(y)$  son la integral línea en las coordenadas macroscópicas y microscópicas respectivamente)

Sea  $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ , entonces el problema (6.2.72) es equivalente al sistema:

$$1. \nabla_y p^1(x, y) = \chi_2(y) \mathbf{P}_2(x, y) \nabla_x p^0(x) + \chi_1(y) \mathbf{P}_1(x, y) \nabla_x p^0(x)$$

$$2. v^0(x, y) = \frac{1}{i\omega} \rho^{-1} (\nabla_x p^0(x) + \nabla_y p^1(x, y))$$

3.

$$\int_{\Omega} (i\omega \nu_{prom}(x) \cdot \nabla \bar{\varphi} - \omega^2 \sigma^*(x) p_2^0(x) \bar{\varphi}_2^0(x)) = -i\nu_m \rho_0^{-1} \int_{\Gamma_-} e^{i((m+\kappa)x_2 + \nu_m x_1)} \bar{\varphi} \tag{6.2.73}$$

para toda  $\varphi \in H^1(\Omega)$

en donde el promedio de  $v$  ( $v_{prom}$ ) es definida como

$$v_{prom}(x) = \int_Y v^0(x, y) dA(y) \quad (6.2.74)$$

la cual cumple la ecuación diferencial homogeneizada

$$v_{prom}(x) = \frac{1}{i\omega} \rho^*(x)^{-1} \nabla_x p_2^0(x) \quad (6.2.75)$$

donde  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  son las matrices correctoras que son solución del problema microscópico

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \rho^{-1}(x, y) (\xi + \mathbf{P}_2(x, y)\xi) \cdot \nabla \varphi_2(y) dA(y) &= 0 \text{ para toda } \varphi_2 \in H_{\#}^1(\Omega_2) \\ \int_{\Omega_1} \rho^{-1}(x, y) (\xi + \mathbf{P}_1(x, y)\xi) \cdot \nabla \varphi_1(y) dA(y) &= 0 \text{ para toda } \varphi_1 \in H_{\#}^1(\Omega_1) \end{aligned} \quad (6.2.76)$$

y

$$\begin{aligned} \rho^*(x)^{-1} \xi &= \int_{\Omega_2} \rho(x, y)^{-1} (\xi + \mathbf{P}(x, y)\xi) dA(y) \\ \sigma^*(x) &= \int_Y \sigma(x, y) dA(y) \end{aligned} \quad (6.2.77)$$

con  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$

**Demostración.** Sea  $\Upsilon'$  una subsucesión de  $\Upsilon$  tal que  $m^\epsilon = \min\{1, \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^{-1}\}$  converge, digamos a  $m^0 \in [0, 1]$ . Usaremos funciones prueba de la forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \chi_2(x/\epsilon) (\varphi_2^0(x) + \epsilon \varphi_2^1(x, x/\epsilon)) + \chi_1(x/\epsilon) (\varphi_1^0(x) + \epsilon \varphi_1^1(x, x/\epsilon)) \\ &= \varphi^0(x) + \epsilon \varphi^1(x, x/\epsilon) \end{aligned} \quad (6.2.78)$$

que son suaves afuera de la frontera de las bandas  $\Sigma_+$  y  $\Sigma_-$  (como se observa en la figura 6-3) en la forma débil del problema de dispersión obtenido en (6.2.9). Con la función

prueba (6.2.78), esto es

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho^{-1}(x, x/\epsilon) \nabla q^\epsilon(x) \cdot (\nabla \bar{\varphi}^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}^1(x, x/\epsilon) + \epsilon \nabla_x \bar{\varphi}^1(x, x/\epsilon)) dA \\
& - \omega^2 \int_{\Omega} \sigma(x, x/\epsilon) q^\epsilon(x) (\bar{\varphi}(x) + \epsilon \bar{\varphi}(x, x/\epsilon)) dA = \\
& - i\nu_{\bar{m}} \int_{\Gamma_-} e^{i((\bar{m}+\kappa)x_2 + \nu_{\bar{m}}x_1)} (\bar{\varphi}_2^0(x) + \epsilon \bar{\varphi}_2^1(x, x/\epsilon)) dx_2
\end{aligned} \tag{6.2.79}$$

(donde recordemos que la barra arriba en  $\bar{\varphi}^0$  denota el complejo conjugado de  $\varphi^0$ )

Para lo siguiente usaremos la convergencia a dos escalas. Ahora consideremos el primer término de la ecuación. Por hipótesis impuesta anteriormente sobre  $\rho^{-1}(x, y)$ , tenemos que  $\chi_{2,1}(y)\rho(x, y)^{-1} \in C[\Omega_0; L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^2)]$ , y por lo tanto tenemos también que

$$\begin{aligned}
\zeta_2(x, y) &:= \chi_2(y)(\rho(x, y)^{-1})^\dagger (\nabla \bar{\varphi}_2^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_2^1(x, x/\epsilon)) \in C[\Omega_0; L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^2)]^2 \\
\zeta_1(x, y) &:= \chi_1(y)(\rho(x, y)^{-1}) (\nabla \bar{\varphi}_1^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_1^1(x, x/\epsilon)) \in C[\Omega_0; L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^2)]^2 \\
\xi(x, y) &:= (\rho(x, y)^{-1})^\dagger (\nabla \bar{\varphi}_2^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_2^1(x, x/\epsilon)) \in C[\Omega \setminus \Omega_0; L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^2)]^2
\end{aligned} \tag{6.2.80}$$

entonces, por el Lema 4.3.7 los campos  $\zeta_{2,1}$  y  $\xi$  convergen fuertemente a dos escalas en sus dominios correspondientes <sup>3</sup>.

Como  $\nabla p^\epsilon$  converge a dos escalas en  $\Omega_0$ , el Teorema 4.3.6 justifica el paso a la convergencia a dos escalas en el dominio entero  $\Omega$ . Análogamente se aplica al segundo término de la ecuación (6.2.79).

El Teorema 4.3.9 aplicado a la extensión de las funciones  $q_1^\epsilon$  y  $q_2^\epsilon$  del Lema 6.2.3 garantiza la convergencia a dos escalas de las trazas de estas funciones a  $q_2^0(x)$  y  $q_1^0(x)$ .

Al tomar el límite para  $\epsilon \in \Upsilon'$  de (6.2.79), obtenemos la forma débil del sistema de

---

<sup>3</sup>La sucesión  $w^\epsilon(x)$  converge fuertemente a dos escalas a  $w^0(x, y)$  en  $\Omega$  significa que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |w^\epsilon(x)| = \int_{\Omega} \int_Y |w^0(x, y)| dx dy$

ecuaciones parciales para los las funciones límites a dos escalas  $p_2^0, p_1^0, p_2^1$  y  $p_1^1$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\Omega_2} \rho(x, y)^{-1} (\nabla q_2^0(x) + \nabla_y q_2^1(x, y)) \cdot (\nabla \bar{\varphi}_2^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_2^1(x)) dx dy \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} \rho(x, y)^{-1} (\nabla q_1^0(x) + \nabla_y q_1^1(x, y)) \cdot (\nabla \bar{\varphi}_1^0(x) + \nabla_y \bar{\varphi}_1^1(x, y)) dx dy \\
& - \omega^2 \int_{\Omega_1} q_2^0(x) \bar{\varphi}_2^0(x) \int_{\Omega_2} \sigma(x, y) dy dx - \omega^2 \int_{\Omega} q_1^0(x) \bar{\varphi}_1^0(x) \int_{\Omega_1} \sigma(x, y) dx dy \\
& = -i\nu_m \int_{\Gamma_-} e^{i((m+\kappa)x_2 + \nu_m x_1)} \bar{\varphi}_2^0(x) dx_2
\end{aligned} \tag{6.2.81}$$

Esto se debe de cumplir para toda  $\bar{\varphi}_2^0, \bar{\varphi}_1^0 \in H^1(\Omega)$ ,  $\bar{\varphi}_2^1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\Omega_2))$ ,  $\bar{\varphi}_1^1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\Omega_1))$ .

Ahora vamos a encontrar las ecuaciones para el campo promedio y el problema de celda para las funciones correctoras. Primero hacemos  $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0) = 0$  en (6.2.81) para obtener

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\Omega_2} (\rho(x, y)^{-1} (\nabla q_2^0(x) + \nabla_y q_2^1(x, y)) \cdot \nabla_y \bar{\varphi}_2^1(x, y)) dy dx + \\
& \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} (\rho(x, y)^{-1} (\nabla q_1^0(x) + \nabla_y q_1^1(x, y)) \cdot \nabla_y \bar{\varphi}_1^1(x, y)) dy dx = 0
\end{aligned} \tag{6.2.82}$$

Esto se cumple para toda  $\varphi_2^1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\Omega_2))$ ,  $\varphi_1^1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\Omega_1))$ . Usando ahora las funciones prueba separables  $\varphi_2^1(x, y) = \phi(x)\psi_2^1(y)$  y  $\varphi_1^1(x, y) = \phi(x)\psi_1^1(y)$ , en (6.2.82) obtenemos el problema de la celda para cada  $x$

$$\begin{aligned}
& \int_{G^*} (\rho(x, y)^{-1} (\nabla q_2^0(x) + \nabla_y q_2^1(x, y)) \cdot \nabla_y \bar{\varphi}_2^1(y)) dy + \\
& \int_G (\rho(x, y)^{-1} (\nabla q_1^0(x) + \nabla_y q_1^1(x, y)) \cdot \nabla_y \bar{\varphi}_1^1(y)) dy = 0 \\
& \text{para toda } \varphi_2^1 \in H_{\#}^1(G^*), \varphi_1^1 \in H_{\#}^1(G)
\end{aligned} \tag{6.2.83}$$

donde  $G$  y  $G^*$  son los dominios definidos en la figura 6-3.

Ahora, definimos a las matrices correctoras  $\mathbf{P}_2(x, y)$  y  $\mathbf{P}_1(x, y)$  como la solución del

problema macroscópico

$$\begin{aligned} \int_{G^*} \rho(x, y)^{-1} (\xi + \mathbf{P}_2(x, y)\xi) \cdot \nabla \varphi(y) dA(y) &= 0 \text{ para toda } \varphi \in H_{\#}^1(G^*) \\ \int_G \rho(x, y)^{-1} (\xi + \mathbf{P}_1(x, y)\xi) \cdot \nabla \varphi(y) dA(y) &= 0 \text{ para toda } \varphi \in H_{\#}^1(G) \end{aligned} \quad (6.2.84)$$

Estas matrices  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  permiten encontrar una relación entre  $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$  y  $p^1 = (p_1^1, p_2^1)$  de la siguiente forma:

Basta sustituir  $\xi = \nabla_x p^0$  en (6.2.84), para obtener

$$\begin{aligned} \nabla_y p_2^1(x) &= \mathbf{P}_2(x, y) \nabla_x p_2^0(x) \text{ en } G^* \\ \nabla_y p_1^1(x) &= \mathbf{P}_1(x, y) \nabla_x p_1^0(x) \text{ en } G \end{aligned} \quad (6.2.85)$$

En nuestro caso, el dominio hace que la segunda columna de las matrices correctoras (correspondientes a las entradas  $y_2$ ) sean cero, y el problema se reduce a

$$\begin{aligned} \int_r^1 \rho(x, y)^{-1} (\xi_1 + (\mathbf{P}_2)_{1,1}(x, y)\xi_1) \partial_{y_1} \varphi(y) dy_1 &= 0 \quad \forall \varphi \in H_{\#}^1(G^*) \\ \int_0^r \rho(x, y)^{-1} (\xi_1 + (\mathbf{P}_1)_{1,1}(x, y)\xi_1) \partial_{y_1} \varphi(y) dy_1 &= 0 \quad \forall \varphi \in H_{\#}^1(G) \end{aligned} \quad (6.2.86)$$

Las matrices correctoras soluciones a este problema son como en el caso de la homogeneización asintótica (ver (6.1.23))

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1-r)}{(1-r)\rho_2 + r\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{(\rho_2 - \rho_1)r}{(1-r)\rho_2 + r\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.2.87)$$

Ahora, usando la ecuación (6.2.83) junto con la definición de las matrices correctoras

tenemos que

$$\nabla_y p^1(x, y) = \chi_2(y) \mathbf{P}_2(x, y) \nabla p_2^0(x) + \chi_1(y) \mathbf{P}_1(x, y) \nabla p_1^0(x) \quad (6.2.88)$$

Ahora,  $\varphi_2^1 = 0$  y  $\varphi_1^1(y) = \chi_1 y_1$  en (6.2.82) para obtener

$$\int_{\Omega_1} \rho(x, y)^{-1} (\nabla q_1^0(x) + \nabla_y q_1^0(x, y)) \cdot k \times \xi dy = 0 \quad (6.2.89)$$

(donde  $k \times \xi$  denota el producto cruz entre  $k$  y  $\xi$ )

Como  $v^0(x, y) = \frac{1}{i\omega} \rho(x, y)^{-1} (\nabla p^0(x) + \nabla_y p^1(x, y))$  obtenemos que

$$\int_{\Omega_1} v^0(x, y) dA(y) = 0. \quad (6.2.90)$$

A continuación, sea  $\varphi_1^0(y)$  arbitraria, y sea  $\varphi_2^0(y) = 0$  y  $\varphi^1 = 0$ . Los términos de gradiente se hacen cero por lo anterior y así obtenemos

$$\omega^2 \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega_1} \sigma(x, y) dy \right) q_1^0(x) \bar{\varphi}_1^0(x) dx = 0 \quad (6.2.91)$$

entonces  $q_1^0(x) = q_2^0(x)$ . Ahora sea  $\varphi_1^1 = 0$  y sean  $v_1^0, v_2^0$  arbitrarias para obtener

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \int_Q \rho(x, y)^{-1} (\nabla q^0(x) + \nabla_y q^1(x, y)) dy \right) \cdot \nabla \bar{\varphi}^0(x) dx \\ & - \omega^2 \int_{\Omega} \left( \int_Q \sigma(x, y) dy \right) q_2^0(x) \bar{\varphi}^0(x) dx = f(\varphi^0) \end{aligned} \quad (6.2.92)$$

Con  $v_{prom}(x) = \int_Q v^0(x, y) dA(y)$  y  $\int_{\Omega_1} v^0(x, y) dA(y) = 0$ , concluimos que

$$v_{prom}(x) = \int_{\Omega_2} v^0(x, y) dA(y) \quad (6.2.93)$$

Si definimos  $\rho^*(x)$  como

$$\rho^*(x)^{-1} \xi = \int_{\Omega_2} \rho(x, y)^{-1} (\xi + \mathbf{P}(x, y) \xi) dA(y) \quad (6.2.94)$$

y

$$\sigma^*(x) = \int_Q \sigma(x, y) dA(y) \quad (6.2.95)$$

obtenemos que

$$v_{prom}(x) = \frac{1}{i\omega} \rho^*(x)^{-1} (\nabla p^0(x) + \nabla_y p^1(x, y)) \quad (6.2.96)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (i\omega v_{av}(x) \cdot \nabla \bar{\varphi}(x) - \omega^2 \sigma^*(x) p_2^0(x) \bar{\varphi}(x)) dA(x) \\ &= -i\nu_{\bar{m}} \int_{\Gamma_-} e^{i((\bar{m}+\kappa)x_2 + \nu_m x_1)} \bar{\varphi} dx_2 \end{aligned} \quad (6.2.97)$$

para toda  $\varphi \in H^1(\Omega)$

Con esto tenemos que la forma débil del problema homogeneizado o límite es

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v_{prom} - i\omega \sigma^*(x) p_2^0 &= 0, \\ \nabla p_2^0(x) - i\omega \rho^*(x) v_{av} &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.98)$$

Ahora debemos de probar que  $\|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} < C$  para toda  $\epsilon \in \Upsilon'$  para que  $q^\epsilon$  puede reemplazarse por  $p^\epsilon$  en toda la demostración. Para hacer esto, primero probamos la convergencia fuerte a dos escalas de  $q^\epsilon(x)$  a  $q^0(x, y)$  en  $\Omega_0$ , la convergencia fuerte en  $\Omega \setminus \Omega_0$  siendo convergencia estándar. Por el Lema 6.2.3, las extensiones  $\tilde{q}^\epsilon$  de las restricciones de  $q^\epsilon$  a  $\Omega_2^\epsilon$  están acotadas en  $H^1(\Omega_0)$ , y por lo tanto podemos restringir  $\Upsilon'$  a una subsucesión que converge fuertemente a una función en  $L^2(\Omega)$ , llamémosla  $q_2^0(x)$ . Estos dos hechos implican que la convergencia débil en  $L^2$  de  $\tilde{q}_2^\epsilon(x)$  a  $w(x)$  y  $q_2^0(x)$ , de donde obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} (\tilde{q}_2^\epsilon(x))^2 dA(x) = \left( \int_{\Omega_0} q_2^0(x) \right)^2 \quad (6.2.99)$$

análogamente obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} (\tilde{q}_1^\epsilon(x))^2 dA(x) = \left( \int_{\Omega_0} q_1^0(x) \right)^2 \quad (6.2.100)$$

Ahora que ya tenemos la convergencia fuerte a dos escalas de  $\tilde{q}_2^\epsilon(x)$  a  $q_2^0(x)$  y  $\tilde{q}_1^\epsilon(x)$  a



$q_1^0(x)$ , así como la convergencia a dos escalas de  $\tilde{u}^\epsilon(x)\chi_2(x/\epsilon)$  a  $q_2^0(x)\chi_2(y)$  y  $\tilde{q}_1^\epsilon(x)\chi_1(x/\epsilon)$  a  $q_1^0(x)\chi_1(x)$ , aplicamos el Teorema 4.3.6 para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} (q^\epsilon(x))^2 dA(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} (\tilde{q}_2^\epsilon(x))^2 \chi_2(x/\epsilon) dA(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} (\tilde{q}_1^\epsilon(x))^2 \chi_1(x/\epsilon) dA(x) \\ &= \int_{\Omega_0} (q_2^0(x))^2 \int_Q \chi_2(y) dA(y) dA(x) + \int_{\Omega_0} (q_1^0(x))^2 \int_Q \chi_1(y) dA(y) dA(x) \\ &= \int_{\Omega_0} \int_Q (q_2^0(x, y))^2 dA(y) dA(x) \end{aligned} \quad (6.2.101)$$

Por definición de  $m^\epsilon$ , si  $m^0 < 1$ , entonces  $\|q^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$  para  $\epsilon$  lo suficientemente pequeña, y por convergencia fuerte a dos escalas de  $q^\epsilon$  a  $q^0$ , obtenemos

$$\|q^0\|_{L^2(\Omega \times Q)} = 1 \quad (m^0 < 1) \quad (6.2.102)$$

Por lo tanto  $q_2^0 \neq 0$  porque  $q_1^0 = q_2^0$ . A parte,  $q_2^0$  es solución del sistema homogeneizado con forzamiento  $m^0 f$ . De hecho, dicha solución es única, por lo que concluimos que  $m^0 \neq 0$ . Obtenemos entonces

$$\int_{\Omega} (\rho^*(x))^{-1} |\nabla p_2^0(x)|^2 - \omega^2 \sigma^*(x) |p_2^0(x)|^2 dA(x) = 0 \quad (6.2.103)$$

Si  $Im(\rho^*(x)) > 0$  entonces  $p_2^0 = 0$ . ■

**Teorema 6.2.11** *La sucesión  $p^\epsilon(x)$  converge fuertemente en los espacios  $V^\epsilon$  a su límite a dos escalas  $p^0(x, y) + \epsilon p^1(x, y)$  en el sentido que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|p^\epsilon(x) - p^0(x, x/\epsilon)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (6.2.104)$$

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\nabla p^\epsilon(x) - \nabla_x p^0(x, x/\epsilon) - \nabla_y p^1(x, x/\epsilon)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (6.2.105)$$

**Demostración.** El primer límite se obtiene por convergencia a dos escalas de  $p^\epsilon(x)$  a

$p^0(x, y)$  y el Teorema 4.3.6 . Para probar el segundo límite, escribimos

$$\begin{aligned}
& b(p^\epsilon(x) - p^0(x, y) - \epsilon p^1(x, y), p^\epsilon(x) - p^0(x, y) - \epsilon p^1(x, y)) \\
&= b(p^\epsilon(x), p^\epsilon(x)) - b(p^\epsilon(x), p^0(x, y) - \epsilon p^1(x, y)) - b(p^0(x, y) - \epsilon p^1(x, y), p^\epsilon(x)) \\
&+ b(p^0(x) - \epsilon p^1(x, y), \epsilon p^1(x, y))
\end{aligned} \tag{6.2.106}$$

el primer término del lado derecho de la igualdad es  $\omega^2 c(p^\epsilon(x), p^\epsilon(x) + f(p^\epsilon(x)))$  el cual por la convergencia fuerte a dos escalas de  $p^\epsilon(x)$  a  $p^0(x, y)$ , tiende a

$$\omega^2 \int_{\Omega} \sigma^*(x) (p_2^0(x))^2 dA(x) + f(p_2^0(x)) \tag{6.2.107}$$

Usando a  $p^0 + \epsilon p^1$  como función prueba para la convergencia a dos escalas junto con el teorema 4.3.6, podemos pasar al límite a dos escalas de los otros tres términos en (6.2.106), que son (menos o más dependiendo de su signo en la ecuación anterior)

$$\int_{\Omega} \int_Q \rho(x, y)^{-1} (\nabla_x p^0(x, y) + \nabla_y p^1(x, y)) \cdot (\nabla_x \bar{p}^0(x, y) + \nabla_y \bar{p}^1(x, y)) dA(y) dA(x) \tag{6.2.108}$$

Por el teorema anterior y la definición de  $\sigma^*$  , obtenemos que la ecuación anterior es igual a 6.2.107 , y encontramos que el lado derecho de (6.2.106) tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Por la coercividad de  $b$ ,  $(Re(b^\epsilon(q, q)) \geq \delta \|q\|_{V^\epsilon}^2)$  con lo cual obtenemos el segundo límite buscado. ■

**Teorema 6.2.12** *Los coeficientes de reflexión y transmisión para los problemas macroscópicos de dispersión por las bandas de la microestructura convergen a los coeficientes del problema de dispersión de la banda homogeneizada (6.2.73).*

**Demostración.** Recordemos que el problema de dispersión es: Encontrar funciones  $p_\omega^\epsilon =$

$p^\epsilon = (p_2^\epsilon, p_1^\epsilon) \in V^\epsilon$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (((\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon) \cdot \nabla \bar{\varphi} - \omega^2 \sigma^\epsilon p^\epsilon \bar{\varphi}) dA + \rho_0^{-1} \int_{\Gamma_\pm} (T p_2^\epsilon) \bar{\varphi}_2 dx_2 \\ = -i \nu_{\bar{m}} \rho_0^{-1} \int_{\Gamma_-} e^{i((\bar{m}\kappa)x_2 + \nu_{\bar{m}}x_1)} dx_2 \end{aligned} \quad (6.2.109)$$

para toda  $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \in V^\epsilon$ ,

, y sea  $v^\epsilon \in L^2(\Omega)^2$  definido por

$$v^\epsilon = \frac{1}{i\omega} (\rho^\epsilon)^{-1} \nabla p^\epsilon \quad (6.2.110)$$

La convergencia fuerte de las soluciones y sus gradientes fuera de la banda implican la convergencia de cada coeficiente de Fourier de las soluciones propagantes  $p^\epsilon$  a los de la solución homogeneizada  $p_2^0$ , esto es

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\pm} p^\epsilon(x) e^{-i(m+\kappa)x_2} dx_2 = \int_{\Gamma_\pm} p_2^0(x) e^{-i(m+\kappa)x_2} dx_2 \quad (6.2.111)$$

los coeficientes de reflexión y transmisión están definidos por la expansión de Fourier de la onda de Bloch dada (6.2.7), la convergencia de cada uno de estos a los del problema de dispersión homogeneizado implica que los coeficientes de los problemas macroscópicos con microestructura convergen a los del problema de homogeneización. ■

# Apéndice A

En este apéndice se verán los conceptos matemáticos básicos que se vieron en la tesis, así como algunos resultados clásicos sobre espacios de Banach y Hilbert, en particular sobre espacios de Sobolev.

## A.1. Espacios de Banach y de Hilbert

**Definición A.1.1** *Un espacio de Banach  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  normado y completo, es decir, toda sucesión de Cauchy en  $V$  tiene límite en  $V$  con respecto a la métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ , donde  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  es la norma de  $V$ .*

**Definición A.1.2** *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Un **producto escalar** en  $V$ , es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple*

**(1)**  $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$  para todos  $v_1, v_2, w \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**(2)**  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  para todos  $v, w \in V$ . **(3)**  $\langle v, v \rangle > 0$  para todo  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ .

Se puede definir una norma inducida por el producto escalar de la siguiente forma  $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

**Lema A.1.3** *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto escalar sobre  $V$ , y sea  $\|\cdot\|$  la norma inducida por dicho producton escalar, entonces*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|, \forall v, w \in V$$

**Demostración.** Sabemos que para cualquier  $v, w \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$0 \leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle = \|v\|^2 + 2\lambda \langle v, w \rangle + \lambda^2 \|w\|^2$$

Si  $w \neq 0$  podemos tomar  $\lambda := -\frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$  y con esto obtenemos

$$0 \leq \|v\|^2 - 2\frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}.$$

Si multiplicamos la desigualdad por  $\|w\|^2$  obtenemos

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \implies |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

■

**Definición A.1.4** *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial  $H$  con un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que es completo respecto a la norma inducida por dicho producto.*

**Definición A.1.5** *Si  $V$  es un subespacio vectorial del espacio de Hilbert  $H$ , el **espacio ortogonal a  $V$  en  $H$**  es aquel que cumple*

$$V^\perp := \{w \in H : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

**Definición A.1.6** *Sea  $V$  un subespacio vectorial cerrado del espacio de Hilbert  $H$ . La proyección ortogonal de  $H$  sobre  $V$ , es la función  $P_V : H \rightarrow V$  tal que a cada  $u \in H$  le asocia el único  $P_V u \in V$  tal que  $\|u - P_V u\| = \inf_{w \in V} \|u - w\|$ .*

**Corolario A.1.7** *Si  $V$  es un subespacio cerrado de  $H$  entonces  $P_V u$  es el único elemento de  $V$  tal que*

$$u - P_V u \in V^\perp$$

( [9] pag. 349)

**Teorema A.1.8** (*Complemento ortogonal*) Sea  $V$  un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ .

(a) La proyección ortogonal  $P_V : H \rightarrow V$  es la única función lineal de  $H$  en  $V$  que cumple (a.1)  $P_V \circ P_V = P_V$  y (a.2)  $\ker(P_V) = V^\perp$ .

(b)  $P_V$  continua y  $\|P_V\|_{\mathcal{L}(H,V)} = 1$  si  $V \neq \{0\}$ .

(c) La función  $\iota : V \oplus V \rightarrow H$  dada por  $\iota(v, w) := v + w$  es un isomorfismo lineal y una isometría.

**Demostración.** (a) Primero se probará que  $P_V$  es lineal, tomemos  $u, w \in H, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Entonces tenemos que  $\lambda P_V u + \mu P_V w \in V$  y

$$\lambda u + \mu w - (\lambda P_V u + \mu P_V w) = \lambda(u - P_V u) + \mu(w - P_V w) \in V^\perp$$

Del A.1.7 se tiene que  $P_V(\lambda u + \mu w) = \lambda P_V u + \mu P_V w$ . De dicho Corolario también podemos concluir que  $P_V(v) = v, \forall v \in V$ . Por lo tanto,  $P_V \circ P_V(u) = P_V(P_V(u)), \forall u \in H$ , con esto se satisface (a.1), al igual que se puede concluir inmediatamente de dicho Corolario (a.2).

Ahora, si  $T : H \rightarrow V$  es una función lineal que satisface (a.1) entonces, para todo  $u \in H$ , se tiene que  $T(u - Tu) = 0$ . Si además  $T$  cumple (a.1), entonces  $u - Tu \in V^\perp$  y el Corolario 1 asegura que  $Tu = P_V u$ . Por lo tanto  $P_V u$  es única.

(b) Como  $u = P_V u + (u - P_V u)$  y  $\langle u - P_V u, P_V u \rangle = 0$ , tenemos que

$$\|u\|^2 = \|P_V u\|^2 + \|u - P_V u\|^2.$$

En particular, tenemos

$$\|P_V u\| \leq \|u\| \quad \forall u \in H$$

Por lo tanto,  $P_V$  es continua. Además:

$$\|P_V\|_{\mathcal{L}(H,V)} := \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{P_V u}{u} \leq 1.$$

Por otra parte, si  $v \in V$  y  $v \neq \{0\}$ , entonces  $P_V v = v$  y,

$$\frac{\|P_V v\|}{\|v\|} = 1.$$

Con esto se concluye que  $\|P_V\|_{\mathcal{L}(H,V)} = 1$ .

(c) La función  $\iota : V \oplus V^\perp \rightarrow H$  dada por  $\iota(v, w) := v + w$  es lineal claramente y su función inversa está dada por:

$$H \rightarrow V \oplus V^\perp, \quad u \rightarrow (P_V u, u - P_V u),$$

.

Por lo tanto  $\iota$  es un isomorfismo de espacios vectoriales, esto implica que es una isometría para la métrica de  $V \oplus V^\perp$ , que se define con la norma inducida por el producto interno  $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle_{V \oplus V^\perp} := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$ ,  $v_1, w_1 \in V$ ,  $v_2, w_2 \in V^\perp$ . ■

**Definición A.1.9** Sea  $H$  un espacio de Hilbert, se define al espacio **dual topológico** de  $H$ ,  $\mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  como el espacio de las funciones lineales y continuas de  $H$  en  $\mathbb{R}$ .

**Proposición A.1.10** Sea  $w \in H$ . La función  $T_w : H \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $T_w u := \langle w, u \rangle$ , es lineal, continua y cumple que  $\|T_w\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})} = \|w\|$ .

**Demostración.** Con las propiedades **1** y **2** del producto interno obtenemos que  $T_w$  es lineal y la continuidad del producto escalar asegura que  $T_w$  es continua. Si  $w = 0$  entonces  $\|T_w\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})} = \|w\|$  se cumple trivialmente. Ahora supongamos que  $w \neq 0$ , usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que:

$$\|w\| = \frac{|T_w w|}{\|w\|} \leq \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|T_w u|}{\|u\|} \leq \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\|w\| \|u\|}{\|u\|} = \|w\|. \quad (\text{A.1.1})$$

Por lo tanto  $\|w\| = \|T_w\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})}$ . ■

**Teorema A.1.11 (de representación de Fréchet-Riesz)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T : H \rightarrow \mathbb{R}$  una función lineal y continua. Entonces existe un único  $w \in H$  tal que.

$$Tu = \langle w, v \rangle \quad \text{para toda } u \in H$$

Mas aún, la función  $\iota : H \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  dada por  $\iota w := T_w$  es un isomorfismo lineal.

**Demostración.** Sea  $T \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  y definamos  $V := \ker T$ . Como estamos suponiendo que  $T$  es continua, entonces  $V$  es un subespacio cerrado de  $H$ . Ahora, si  $V = H$ , entonces  $T = 0$  y usando  $w = 0$  obtenemos  $Tu = \langle w, v \rangle \forall u \in H$ .

Si ahora  $V \neq H$ , usando el **Teorema A.1.8 (complemento ortogonal)** tenemos que  $V^\perp \neq \{0\}$ . Eligamos  $w_0 \in V^\perp$  que cumpla  $\|w_0\| = 1$ . Por lo tanto  $Tw_0 \neq 0$ . Ahora definimos

$$w := (Tw_0)w_0.$$

Podemos observar que

$$T(u - \frac{Tu}{Tw_0}w_0) = Tu - \frac{Tu}{Tw_0}Tw_0 = 0 \quad \text{para toda } u \in H$$

Por lo tanto,  $u - \frac{Tu}{Tw_0}w_0 \in V$ , de lo cual podemos concluir que

$$\langle w, u \rangle = \langle w, u - \frac{Tu}{Tw_0}w_0 \rangle + \frac{Tu}{Tw_0} \langle w, w_0 \rangle = (Tu) \langle w_0, w_0 \rangle = Tu \quad \text{para toda } u \in H$$

Si algún otro  $w' \in H$  cumpliera  $Tu = \langle w', v \rangle$ , entonces  $\langle w - w', u \rangle = 0$  para todo  $u \in H$ , en particular si  $u = w - w'$ . Por lo tanto  $\|w - w'\|^2 = 0$ , esto implica que  $w' = w$ , lo cual demuestra la unicidad de  $w$ . Por último, como el producto escalar es bilineal, entonces

$$\iota(\lambda w_1 + \mu w_2)u = \langle \lambda w_1 + \mu w_2, u \rangle = \lambda \langle w_1, u \rangle + \mu \langle w_2, u \rangle = [\lambda(\iota w_1) + \mu(\iota w_2)]u.$$



Y esto se cumple para todo  $u \in H$ . Por lo  $\iota$  es lineal y biyectiva (por la **Proposición A.1.10**). ■

**Proposición A.1.12** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ . Entonces  $w \in V$  satisface

$$\langle w, u \rangle = Tu \quad \text{para toda } u \in V$$

si y sólo si  $w$  es un mínimo del funcional  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - Tu.$$

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\langle w, u \rangle = Tu$  para toda  $u \in V$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} J(u) &= J(w + u - w) = \frac{1}{2} \|w + u - w\|^2 - T(w + u - w) \\ &= \frac{1}{2} \|w\|^2 - Tw + \langle w, u - w \rangle + \frac{1}{2} \|u - w\|^2 - T(u - w) \\ &= J(w) + T(u - w) + \frac{1}{2} \|u - w\|^2 - T(u - w) \\ &= J(w) + \frac{1}{2} \|u - w\|^2 \geq J(w) \quad \text{para toda } u \in V \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que  $w$  es un mínimo del funcional  $J$ . Para cada  $u$  en  $V$  consideremos la función  $J_u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$J_u(t) := J(w + tu) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + \langle w, u \rangle t + \frac{1}{2} \|u\|^2 t^2 - Tw - (Tu)t$$

Dicha función es claramente diferenciable (al ser suma de funciones diferenciables) y su derivada está dada por

$$J'_u(t) = \langle w, u \rangle + \|u\|^2 t - Tu$$

Sabemos que  $w$  es un mínimo de  $J$ , entonces 0 es un mínimo de  $J_u$ . Por lo tanto,  $J'_u(0) = \langle w, u \rangle - Tu = 0 \quad \forall u \in V$ , obteniendo lo deseado. ■

## A.2. Espacios de Sobolev

### A.2.1. Conceptos principales

El espacio  $C_c^\infty(\Omega)$  es el espacio de las funciones infinitamente derivables, y que la cerradura de su soporte (el conjunto de puntos donde la función es distinta de cero) forma un conjunto compacto en  $\Omega$ . A continuación se presenta una propiedad que cumplen las funciones en este espacio.

**Proposición A.2.1** (a) Si  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

(b) Si  $f \in C_c^1(\Omega)$ , entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi dx + \int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

**Demostración.** (a) Realizemos la extensión trivial de  $\phi$  en  $\mathbb{R}^n$  (extender en cero a  $\phi$  fuera de  $\Omega$  de manera suave). Entonces  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Elijamos  $a > 0$  lo suficientemente grande tal que  $\text{supp}(\phi) \subset [-a, a]^n$ . Sin pérdida de generalidad hagamos  $i = 1$  y  $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ . Entonces tenemos que

$$\int_{-a}^a \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(t, y) dt = \phi(a, y) - \phi(-a, y) = 0 \quad \text{para toda } y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-a}^a \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dt dx$$

(b) Usando la afirmación (a) al producto de funciones  $f\phi \in C_c^1(\Omega)$ , obteniendo que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (f\phi)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi dx + \int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx$$

■

Está fórmula obtenida al integrar por partes motiva a una noción un poco más general de derivada. Pero antes definiremos un nuevo espacio de funciones, el espacio  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Definición A.2.2**  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  si  $f$  es integrable en cualquier subconjunto compacto de su dominio, en otras palabras

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^1(K) \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto}\}.$$

**Definición A.2.3** Sea  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Decimos que  $u$  es débilmente diferenciable en  $\Omega$  si existen  $v_1, \dots, v_n \in L^1_{loc}(\Omega)$  tales que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} v_i \varphi dx = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad (\text{A.2.1})$$

A cada función  $v_i$  se le llama la  $i$ -ésima derivada débil y se denota como  $D_i u := v_i$ .

**Proposición A.2.4** La derivada débil es lineal, esto es, si  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$  son débilmente diferenciables, y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda u + \mu v$  es débilmente diferenciable y

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v \quad \text{para toda } i = 1, 2, \dots, n$$

**Demostración.** Sea  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  y  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ (\lambda u + \mu v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (\lambda D_i u + \mu D_i v) \varphi \right] dx &= \lambda \int_{\Omega} \left[ u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i u) \varphi \right] dx \\ &\quad + \mu \int_{\Omega} \left[ v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (D_i v) \varphi \right] dx \end{aligned}$$

Lo cual prueba que  $\lambda u + \mu v$  es débilmente diferenciable y que  $D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v$ .

■

**Proposición A.2.5** Si  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  es débilmente diferenciable en  $\Omega$  y  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ , entonces  $\zeta u$  es débilmente diferenciable en  $\mathbb{R}^n$  y sucede que

$$D_i(\zeta u) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u + \zeta D_i u$$

**Demostración.** Tomemos  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , por lo tanto  $\zeta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  y, por lo tanto tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left( \zeta D_i u + u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \varphi dx = \int_{\Omega} u \frac{\partial(\zeta \varphi)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} (D_i u)(\zeta \varphi) dx = 0$$

■

**Definición A.2.6** Sea  $p \geq 1$ . Se define al espacio de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  como  $W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega, \text{ y } D_i u \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ . Si  $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ , definamos:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left( \|u\|_p^p + \|D_1 u\|_p^p + \dots + \|D_n u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1, \infty)$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup\{\|u\|_\infty + \|D_1 u\|_\infty + \dots + \|D_n u\|_\infty\}$$

Como  $L^p(\Omega)$  es un espacio vectorial y la derivada débil es lineal entonces  $W^{1,p}(\Omega)$  también es un espacio vectorial, aparte de esto también es un espacio normado, para ver esto se probará que la norma que se acaba de definir cumple todas las características de una norma.

**Proposición A.2.7**  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es una norma.

**Demostración.** Si  $u = 0$ , entonces  $D_i u = 0 \forall i = 1, \dots, n$ , esto implica que  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$ . Ahora, si  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$  como  $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  entonces  $u = 0$  en  $L^p(\Omega)$ .

Es claro que  $\|\mu u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \mu \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  para  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  y  $\mu \in \mathbb{R}$ . Finalmente podemos

demostrar la desigualdad de Minkowski en  $W^{1,p}(\Omega)$  usando la desigualdad de Minkowski en  $L^p(\Omega)$  y la desigualdad del triángulo en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la norma  $\|\cdot\|_p$

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left( \|u + v\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i u + D_i v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left( (\|u\|_p + \|v\|_p)^p + \sum_{i=1}^n (\|D_i u\|_p + \|D_i v\|_p)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left( \|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \|v\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

La demostración es completamente análogo en el caso de  $p = \infty$  ■

El siguiente lema nos servirá para demostrar que  $W^{1,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach (en el lema se observa que los límites de sucesiones en el espacio de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  se mantienen dentro del mismo espacio).

**Lema A.2.8** Sean  $p \geq 1$  y  $\{u_k\}$  una sucesión en  $W^{1,p}(\Omega)$  tal que  $u_k \rightarrow u$  en  $L^p(\Omega)$  y  $D_i u_k \rightarrow v_i$  en  $L^p(\Omega)$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $u$  es débilmente diferenciable en  $\Omega$ ,  $v_i = D_i u \forall i = 1, \dots, n$  y  $u_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Demostración.** Sea  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Entonces  $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$  para toda  $q \geq 1$ . Podemos tomar  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y aplicar la desigualdad de Hölder para obtener

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq \|u - u_k\|_p \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_q \rightarrow 0 \text{ (cuando } k \rightarrow \infty)$$

$$\left| \int_{\Omega} v_i \varphi dx - \int_{\Omega} (D_i u_k) \varphi dx \right| \leq \|v_i - D_i u_k\|_p \|\varphi\|_q \rightarrow 0 \text{ (cuando } k \rightarrow \infty)$$

■

Esto implica que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D_i u_k) \varphi dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx$$

Esto sucede para toda  $i = 1, \dots, n$ . Por lo tanto,  $u$  es débilmente diferenciable en  $\Omega$  y  $v_i = D_i u$ . Esto implica que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Además tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_i u_k - D_i u\|_p^p = 0$$

**Teorema A.2.9**  $W^{1,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con  $p \geq 1$ .

**Demostración.** Si tomamos una sucesión de Cauchy  $(u_k)$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ , entonces las sucesiones  $(u_k)$  y  $(D_i u_k)$  serán de Cauchy en  $L^p(\Omega)$ , como  $L^p(\Omega)$  es un espacio de Banach entonces  $u_k \rightarrow u$  y  $D_i u_k \rightarrow v_i$  en  $L^p(\Omega)$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ). Usando el Lema A.2.8 tenemos que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  y  $u_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ . Por lo tanto,  $W^{1,p}(\Omega)$  es de Banach. ■

Como  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert, entonces  $W^{1,2}(\Omega)$  también lo será (lo denotaremos también como  $H^1(\Omega)$  para resaltar su carácter de espacio de Hilbert) y la norma será inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} u v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (D_i u)(D_i v) dx = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

Si estamos trabajando en un espacio de Sobolev a veces es más fácil, en lugar de usar la definición, trabajar primero en un espacio más sencillo y después regresar al espacio de Sobolev, para esto es útil encontrar espacios densos en el espacio  $W^{1,p}(\Omega)$ ; a continuación se demostrará que el espacio  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en el espacio  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  cuando  $p \geq 1$ , para ello se presentarán primero algunas nociones de funciones regularizantes.

**Definición A.2.10** Sean  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ . La convolución de  $f$  y  $g$  se define como la función  $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(f * g)(x) := \int_{\Omega} f(x - y)g(y)dy$$

Lo interesante de la función  $f * g$  es que preserva la regularidad de  $f$ , esto lo observaremos en las dos siguientes proposiciones.

**Proposición A.2.11** Si  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $f * g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ .

**Demostración.** Tomemos una sucesión  $(x_k)$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $x_k \rightarrow x$ . Definamos  $h_k(y) := f(x_k - y)g(y)$  y  $h(y) := f(x - y)g(y)$ . Al ser  $f$  continua tenemos que  $h_k \rightarrow h \forall y \in \mathbb{R}^n$ . Ahora, tomemos  $r > 0$  tal que  $\text{sop}(f) \subset B^n(0, r)$  y  $x_k \in B^n(0, r) \forall k \in \mathbb{N}$ . Observemos que si  $x_k - y \in \text{sop}(f)$ , entonces  $y \in B^n(0, 2r)$ . Esto implica que  $h_k = h_k \chi_{B^n(0, 2r)}$  (donde  $\chi_{B^n(0, 2r)}$  es la función característica de  $B^n(0, 2r)$ ) y por la desigualdad de Hölder

$$|h_k(y)| \leq \|f\|_\infty |(g \chi_{B^n(0, 2r)})(y)| \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}$$

Como  $g \chi_{B^n(0, 2r)}$  es integrable, se puede aplicar el teorema de convergencia dominada obteniendo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f * g)(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k = \int_{\mathbb{R}^n} h = (f * g)(x)$$

Concluyendo con ello que la función  $f * g$  es continua. ■

**Proposición A.2.12** Si  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \quad \forall i = 1, \dots, n$$

**Demostración.** Sean  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$  fijos. Como  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ , esto implica que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$  (como tiene

soporte compacto entonces la podemos ver como una función distinta de cero definida en un conjunto compacto que al ser continua implica que es uniformemente continua en este conjunto y afuera al ser constante cero será trivialmente uniformemente continua). Entonces  $\exists \delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \right| < \epsilon \text{ si } \|y - z\| < \delta \quad (\text{A.2.2})$$

Sea  $r > 0$  tal que  $\text{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset B^n(0, r)$  y  $x + te_i \in B^n(0, r) \forall t \in [-\delta, \delta]$ , donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + te_i - y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + te_i - y)\chi_{B^n(0, 2r)}(y) \quad (\text{A.2.3})$$

Esto sucede  $\forall t \in [-\delta, \delta]$  y  $\forall y \in \mathbb{R}^n$ , aplicando el teorema del valor medio a la función  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(s) = f(x + ste_i - y)$  para cada  $t \in [-\delta, \delta]$  y  $y \in \mathbb{R}^n$ , concluimos que  $\exists s \in (0, 1)$  tal que

$$f(x + te_i - y) - f(x - y) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ste_i - y) \quad (\text{A.2.4})$$

Usando (A.2.2),(A.2.3) y (A.2.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| |g(y)| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ste_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| |(g\chi_{B^n(0, 2r)})(y)| \\ &< \epsilon |(g\chi_{B^n(0, 2r)})(y)| \end{aligned}$$

Esto sucede para toda  $t$  que cumpla  $0 < |t| < \delta$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . En consecuencia

$$\left| \frac{(f * g)(x + te_i) - (f * g)(x)}{t} - \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} g \right)(x) \right|$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right) g(y) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| |g(y)| dy \\
&\qquad\qquad\qquad < \epsilon \int_{B^n(0, 2r)} |g|
\end{aligned}$$

Como esto sucede  $\forall t$  con  $0 < |t| < \delta$ , esto prueba que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x + te_i) - (f * g)(x)}{t} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right) (x)$$

Por lo tanto  $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$  y por la Proposición A.2.11 es continua en  $\mathbb{R}^n$ . ■

Note que aunque  $f * g$  hereda la regularidad de  $f$  no necesariamente la compacidad de su soporte, por ejemplo si  $g = \chi_{\mathbb{R}^n}$ , entonces  $f * g$  es una función constante con valor  $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f dx$ , no siempre es cero esta integral por lo tanto en este caso  $\text{sup}(f * g) = \mathbb{R}^n$ . Para poder introducir finalmente la noción de sucesión regularizante necesitamos las dos proposiciones anteriores, también necesitamos la densidad de  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ([9] pag. 325).

**Definición A.2.13** Una sucesión de funciones  $\eta_k$  se llama sucesión regularizante si cumple que para toda  $k \in \mathbb{N}$

$$\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \eta_k \geq 0, \quad \text{sup}(\eta_k) \subset \bar{B}^n(0, \frac{1}{k}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k = 1$$

Lo interesante de las sucesiones regularizantes es la propiedad que tienen de aproximar funciones en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  por medio de la convolución de dichas sucesiones con la función, esto es, si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta_k * f \rightarrow f$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ([9] pag. 332). Esto nos servirá para demostrar a continuación la densidad de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , aunque antes se demostrará otro Lema que nos será útil.

**Lema A.2.14** Sean  $p \geq 1$  y  $(\psi_k)$  una sucesión en  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\psi_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces existe una sucesión  $(\varphi_k)$  en  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\varphi_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Demostración.** Tomemos  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $0 \leq \zeta(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta(x) = 1$  si  $\|x\| \leq 1$  y  $\zeta(x) = 0$  si  $\|x\| \geq 2$ . Ahora, definamos  $\zeta_k(x) := \zeta(\frac{x}{k})$ , entonces  $\zeta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y cumple que

$$0 \leq \zeta_k(x) \leq 1 \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^n, \quad \zeta_k(x) = 1 \text{ si } \|x\| \leq k, \quad \zeta_k(x) = 0 \text{ si } \|x\| \geq 2k$$

Por el teorema de convergencia dominada en  $L^p$  tenemos que

$$\|v - \zeta_k v\|_p \rightarrow 0 \quad \forall v \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

por otro lado, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta_k u - \zeta_k \psi_k|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta_k|^p |u - \psi_k|^p \leq \|u - \psi_k\|_p^p \rightarrow 0$$

y también que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \zeta_k D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta_k|^p \left| D_i u - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right|^p \leq \left\| D_i u - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_p^p \rightarrow 0$$

Con esto concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - \zeta_k \psi_k\|_p = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_p = 0$$

Por otro lado, como  $\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(\frac{x}{k})$ , se tiene que

$$\left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \right\|_\infty = \frac{1}{k} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty$$

y como  $(\psi_k)$  es acotada en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \psi_k \right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \psi_k \right|^p \leq \frac{1}{k} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty^p \|\psi_k\|_p^p \leq \frac{c}{k^p} \rightarrow 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| D_i u - \frac{\partial(\zeta_k \psi_k)}{\partial x_i} \right\|_p &= \left\| D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \psi_k \right\|_p \\ &\leq \left\| D_i u - \zeta_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_p + \left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \psi_k \right\|_p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Definiendo  $\varphi_k := \zeta_k \psi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Hemos demostrado que

$$\psi_k \rightarrow u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ y } \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \rightarrow D_i u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \forall i = 1, \dots, n$$

Por el Lema A.2.8 concluimos finalmente que  $\varphi_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Teorema A.2.15**  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , con  $p \geq 1$ .

**Demostración.** Tomemos  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  y sea  $(\eta_k)$  una sucesión regularizante. Por definición  $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} (\eta_k * D_i u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(x-y) D_i u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x-y) u(y) dy = \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} * u \right)(x) \end{aligned}$$

Usando la proposición A.2.12 tenemos que  $\eta_k * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_k * u) = \eta_k * D_i u \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Entonces,

$$\eta_k * u \rightarrow u \text{ y } \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_k * u) \rightarrow D_i u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \forall i = 1, \dots, n$$

Aplicando el Lema A.2.8 obtenemos que  $\eta_k * u \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Aplicando el Lema A.2.14, obtenemos la densidad de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . ■

Si ahora tomamos el espacio  $C_c^\infty(\Omega)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , este no es necesariamente denso en  $W^{1,p}(\Omega)$ . A continuación describiremos otro espacio para el cual si existe la densidad para todo dominio de  $\mathbb{R}^n$  en el que esté definido.

**Definición A.2.16** Sea  $p \geq 1$ . Definimos al espacio de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$  es la cerradura de  $C_c^\infty(\Omega)$  en  $W^{1,p}(\Omega)$  (i.e. la cerradura bajo la norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ ). Denotamos

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega) = \bar{C}_c^\infty(\Omega)$$

Al ser  $W_0^{1,p}(\Omega)$  un subespacio cerrado de  $W^{1,p}(\Omega)$ , entonces es un espacio de Banach y por lo tanto,  $H_0^1(\Omega)$  un espacio de Hilbert. Por definición  $C_c^\infty(\Omega)$  es denso en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Ahora suponga que tenemos un dominio acotado  $U \subset \mathbb{R}^n$  y una función  $u \in W^{1,p}(U)$  (con  $1 \leq p < \infty$ ), y queremos asignarle un valor a  $u$  en la frontera  $\partial U$  (suponiendo que  $\partial U$  es  $C^1$ , como se definió en los preliminares); si  $u$  es continua en la cerradura de  $U$  claramente tendrá un valor en la frontera, pero  $u \in W^{1,p}(U)$  por lo tanto en general no es continua y está definida casi en todas partes en  $U$  (en todos los puntos de  $U$  menos en un conjunto de medida cero), y  $\partial U$  es un conjunto de medida de Lebesgue cero en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto no es trivial saber qué significa la restricción de  $u$  a la frontera, para resolver este problema se define el operador de traza.

**Teorema A.2.17 (Teorema de traza)** Suponga que  $\Omega$  es acotado y  $\partial\Omega$  es  $C^1$ . Entonces existe un operador lineal acotado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i)  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  si  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

y

(ii)  $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  Esto se cumple  $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ , con la constante  $C$  dependiendo solo de  $p$  y  $\Omega$ . (A  $Tu$  se le llama la **Traza** de  $u$  en  $\partial\Omega$ ).

**Demostración.** El Teorema se demostrará para  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , que es el espacio de Sobolev que más nos interesa, la demostración general para  $W^{1,p}(\Omega)$  se puede encontrar en [10], pag. 258. Llamemos  $D(\bar{\Omega}) = W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  ([16], pag 407). Supongamos primero que  $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$  y supongamos que  $u \in D(\bar{\Omega})$ ; sea  $\vec{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , en este caso  $Tu = u|_{\partial\Omega} = u(\vec{x}', 0)$ , ya que  $u$  es continua en  $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$ . En estas condiciones debemos demostrar que existe una constante  $C$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\vec{x}', 0)|^2 d\vec{x}' \leq C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in D(\bar{\Omega}) \quad (\text{A.2.5})$$

Si  $x_n \in (0, 1)$  podemos escribir

$$u(\vec{x}', 0) = u(\vec{x}', x_n) - \int_0^{x_n} u_{x_n}(\vec{x}', t) dt$$

Donde  $u_{x_n}$  es la derivada parcial de  $u$  respecto a  $x_n$ .

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\left( \int_0^1 |u_{x_n}(\vec{x}', t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 |u_{x_n}(\vec{x}', t)|^2 dt$$

Es facil demostrar que  $\forall a, b > 0$ , se cumple que  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , por lo tanto tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} |u(\vec{x}', 0)|^2 &= \left| u(\vec{x}', x_n) - \int_0^{x_n} u_{x_n}(\vec{x}', t) dt \right|^2 \leq \left( |u(\vec{x}', x_n)| + \left| \int_0^{x_n} u_{x_n}(\vec{x}', t) dt \right| \right)^2 \\ &\leq \left( |u(\vec{x}', x_n)| + \int_0^1 |u_{x_n}(\vec{x}', t)| dt \right)^2 \leq 2|u(\vec{x}', x_n)|^2 + 2 \left( \int_0^1 |u_{x_n}(\vec{x}', t)| dt \right)^2 \\ &\leq 2|u(\vec{x}', x_n)|^2 + 2 \int_0^1 |u_{x_n}(\vec{x}', t)|^2 dt \leq 2|u(\vec{x}', x_n)|^2 + 2 \int_0^1 |\nabla u(\vec{x}', t)|^2 dt \end{aligned}$$

Si integramos ambos lados en  $\mathbb{R}^{n-1}$  con respecto a  $\vec{x}'$  y en  $(0, 1)$  con respecto a  $x_n$  obtenemos (8) con  $C = 2$ .

Ahora suponga que  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ . Como  $D(\bar{\Omega})$  es denso en  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$  ([16], pag. 407), podemos tomar una sucesión  $\{u_k\}$  en  $D(\bar{\Omega})$  tal que  $u_k \rightarrow u$  en  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ . La linealidad de  $T$  y la estimación que encontramos en (8) tenemos que

$$\|Tu_m - Tu_k\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sqrt{2}\|u_m - u_k\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)}$$

Como  $\{u_k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ , tenemos que  $\{Tu_k\}$  es de Cauchy en  $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ , como  $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$  es de Banach ([19], pag. 42) entonces existe  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$  tal que

$$Tu_k \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

Note que  $u_0$  no depende de la sucesión escogida. De hecho, si  $\{v_k\}$  está en  $D(\bar{\Omega})$  y  $v_k \rightarrow u$  en  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$  entonces

$$\|v_k - u_k\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$$

y como

$$\|Tv_k - Tu_k\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sqrt{2}\|v_k - u_k\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)}$$

Por lo tanto

$$Tv_k \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

Esto significa que si  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ , está bien si definimos  $Tu = u_0$ , donde  $T$  cumple por construcción las dos propiedades buscadas.

Ahora, si  $\Omega$  es un dominio  $C^1$  acotado, podemos suponer que  $x^0 \in \partial\Omega$  y que  $\partial\Omega$  es plano cerca de  $x^0$  y que está en el plano  $\{x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}$ . Supongamos que existe una bola abierta, con centro en  $x^0$  y de radio  $r$  tal que

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{\Omega} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

y sea  $\hat{B}$  la bola concéntrica a  $B$  con radio  $\frac{r}{2}$ . Si denotamos como  $\Gamma$  la porción de  $\partial\Omega$  dentro de  $\hat{B}$  y usamos la misma estimación que se tiene cuando  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  obteniendo que

$$\int_{\Gamma} |u|^2 d\vec{x}' \leq C \|u\|_{W^{1,2}(B^+) }^2$$

Donde  $u \in D(\bar{\Omega})$

Si  $x^0 \in \partial\Omega$ , pero  $\partial\Omega$  no es plano cerca de  $x^0$ , podemos *aplanarlo* como se muestra en [10], pag. 103 cerca de  $x^0$  para obtener la estimación de arriba.

Como estamos suponiendo que  $\Omega$  es un dominio acotado, entonces  $\partial\Omega$  es compacto, entonces existe un conjunto de puntos  $x_i^0 \in \partial\Omega$  y conjuntos abiertos  $\Gamma_i \subset \gamma\Omega$  ( $i = 1, \dots, N$ ) tal que  $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$  y

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad (i = 1, \dots, N)$$

En consecuencia si escribimos  $Tu := u|_{\partial\Omega}$  entonces

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

Donde  $C$  no depende de  $u$ . Recordemos que esto se cumple para  $u \in D(\bar{\Omega})$ , para obtener el resultado con  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  se utiliza la densidad de  $D(\bar{\Omega})$  al igual que se hizo en el caso en que  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ . ■

Hasta ahora introducimos el concepto de traza para funciones en  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  que generaliza la idea de valores a la frontera, naturalmente existen condiciones en las cuales la traza de una función  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  tiene traza cero, para esto se demostrará el siguiente teorema.

**Teorema A.2.18 (funciones de traza cero)** *Suponga que  $\Omega$  es un dominio acotado y  $\partial\Omega$  es  $C^1$ . Suponga también que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Entonces*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y solo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Suponga primero que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Entonces por densidad existe una sucesión  $u_k$  en  $C_c^\infty(\Omega)$  tal que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega)$$

Como por definición  $Tu_k = 0$  en  $\partial\Omega$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ ) y  $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  es un operador lineal acotado, entonces deducimos que  $Tu = 0$  en  $\partial\Omega$ .

( $\Leftarrow$ ) El regreso es un poco más complicado y se puede encontrar en [10], pag. 260. ■

**Lema A.2.19**  $g \in C^1(\mathbb{R})$  con  $g(0) = 0$  y  $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$ , y  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $g \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y se cumple la regla de la cadena con la derivada débil de la composición, esto es,  $D_i(g \circ u) = (g' \circ u)D_i u$

(la demostración de este Lema se puede encontrar en [9] pag. 377).

**Proposición A.2.20 (Cambio de variable para derivadas débiles)** Sea  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) : \Omega' \rightarrow \Omega$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  tal que  $\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j} \in L^\infty(\Omega')$  y  $\frac{\partial \theta_i^{-1}}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $u \circ \theta \in W_0^{1,p}(\Omega')$  y

$$D_i(u \circ \theta) = \sum_{j=1}^n (D_j u \circ \theta) \frac{\partial \theta_j}{\partial y_i} \quad i = 1, \dots, n$$

La demostración de la Proposición A.2.20 es de rutina y se puede encontrar en [9] pag. 378. Tanto la Proposición A.2.20 como el Lema A.2.19 son válidos para  $W^{1,p}(\Omega)$  pero requieren un resultado de aproximación que se puede encontrar en [5]. El espacio

$W_0^{1,p}(\Omega)$  también es un subespacio de  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , en sentido de que si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  y  $D_i(\bar{u}) = \bar{D}_i u$ , donde  $\bar{u}$  y  $\bar{D}_i u$  son las extensiones triviales de  $u$  y  $D_i u$  respectivamente (i.e. extender por cero a la función fuera de  $\Omega$ ) ([9], pag. 379). De

forma intuitiva podemos entender al espacio  $W_0^{1,p}(\Omega)$  como el espacio de las funciones en



$W^{1,p}(\Omega)$  que se anulan en la frontera de  $\Omega$ , aunque esto no tiene sentido en general, ya que la frontera es un conjunto de medida cero y los elementos de  $W^{1,p}(\Omega)$  son clases de equivalencia de funciones que coinciden casi donde quiera (i.e. en todo  $\Omega$  menos en un conjunto de medida cero). Pero esto se cumple para cierta clase de dominios.

**Definición A.2.21** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que  $\Omega$  es de clase  $C^k$  si  $\forall x_0 \in \partial\Omega$ , existe un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $x_0 \in U$  y un difeomorfismo  $\theta : B^{n-1}(0,1) \times (-1,1) \rightarrow U$  de clase  $C^k$  tal que  $\theta(0,0) = x_0$  y

$$\theta(B^{n-1}(0,1) \times (0,1)) = U \cap \Omega \quad \text{y} \quad \theta(B^{n-1}(0,1) \times \{0\}) = U \cap \partial\Omega.$$

**Teorema A.2.22** Si  $\Omega$  es de clase  $C^1$  y  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , entonces las siguientes dos propiedades son equivalentes

(i)  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . (ii)  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

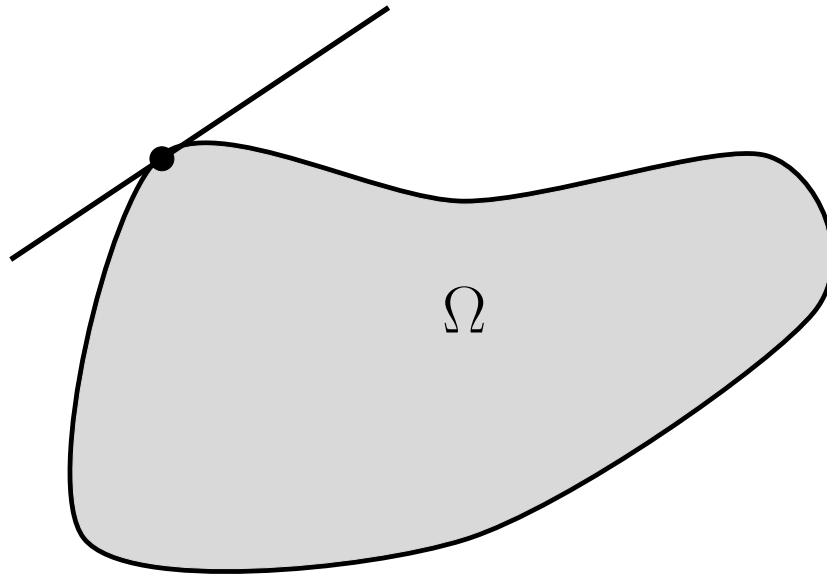


Figura A-1: Dominio de clase  $C^1$

### A.3. Desigualdades de Sobolev

Sea  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces denotaremos

$$\|\nabla u\|_p := \left( \|D_1 u\|_p^p + \dots + \|D_n u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

A continuación se hará una estimación para ver las condiciones en las que se cumple que  $\|\varphi\|_q \leq C\|\nabla\varphi\|_p$ , con  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , y  $C$  una constante que solo depende de  $n, p$  y  $q$ .

**Proposición A.3.1** *Si existe una constante  $C > 0$ , que solo depende de  $n, p$  y  $q$ , tal que para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , se cumple que*

$$\|\varphi\|_q \leq C\|\nabla\varphi\|_p \tag{A.3.1}$$

entonces  $n \neq p$  y  $q = \frac{np}{n-p}$

**Demostración.** Sea  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $\mu > 0$ , y definamos

$$\varphi_\mu(x) := \varphi(\mu x)$$

Ahora, sean  $p, q \in [1, \infty)$ . Hagamos un cambio de variable para obtener

$$\|\varphi_\mu\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\mu x)|^q dx = \frac{1}{\mu^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^q dy = \frac{1}{\mu^n} \|\varphi\|_q^q$$

Por otro lado, con la derivada tenemos

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \right\|_p^p = \mu^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi(\mu x)}{\partial x_i} \right|^p dx = \frac{\mu^p}{\mu^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi(y)}{\partial x_i} \right|^p dy = \frac{\mu^p}{\mu^n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_p^p$$

Como estamos suponiendo que  $\|\varphi\|_q \leq C\|\nabla\varphi\|_p$ , entonces

$$\frac{1}{\mu^{\frac{n}{q}}} \|\varphi\|_q \leq \frac{C\mu}{\mu^{\frac{n}{q}}} \|\nabla\varphi\|_p$$

Y esto se cumple para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $\mu > 0$ . Despejando finalmente obtenemos

$$\|\varphi\|_q \leq C\mu^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|\nabla\varphi\|_p$$

Observe que si  $\varphi \neq 0$ , esta desigualdad solo se cumple cuando  $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ , ya que el lado derecho se indetermina cuando  $\mu \rightarrow \infty$  si  $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$  o cuando  $\mu \rightarrow 0$  si  $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$ . Por lo tanto  $p \neq n$  y  $\frac{np}{n-p}$ . ■

Definamos a  $p^* = \frac{np}{n-p}$  como el coeficiente crítico de Sobolev. Note que aunque demostramos la proposición para funciones en  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , usando la densidad de dicho espacio se puede extender el resultado a  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Antes de demostrar que la desigualdad A.3.1 se cumple de una manera más general veremos un Lema que será útil para dicha prueba.

**Lema A.3.2** Sean  $f_1, \dots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  con  $n \geq 2$ , y sea  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Definamos a  $\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , y también definamos

$$f(x) := \prod_{i=1}^n f_i(\hat{x}_i)$$

Entonces  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

La demostración a este Lema se puede encontrar en [9], pag. 393.

**Teorema A.3.3 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)** Sea  $1 \leq p < n$ , entonces existe una constante  $C > 0$ , que depende de  $n$  y  $p$ , tal que

$$\|\varphi\|_{p^*} \leq C\|\nabla\varphi\|_p \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (\text{A.3.2})$$

**Demostración.** Sea  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , como el soporte de  $\phi$  es compacto, si  $i \in \{1, \dots, n\}$  entonces

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n) d\xi_i$$

por lo tanto

$$|\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n) d\xi_i \right| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n) \right| d\xi_i \quad (\text{A.3.3})$$

Si denotamos a  $\hat{x}_i$  igual que en el Lema A.3.2 y ahora hacemos

$$f(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n) \right| d\xi_i$$

Entonces usando la desigualdad (A.3.3) tenemos que

$$|\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left( \prod_{i=1}^n f_i(\hat{x}_i) \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n f_i^{\frac{1}{n-1}}(\hat{x}_i) =: f(x)$$

Por el Lema A.3.2 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{n}{n-1}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}$$

Por lo tanto

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \quad (\text{A.3.4})$$

entonces

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \max_{i=1, \dots, n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla \varphi\|_1 \quad (\text{A.3.5})$$

Sea  $\gamma > 1$ , ahora reemplazamos  $\varphi$  por  $|\varphi|^{\gamma-1}\varphi$  en (A.3.1) y aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{n\gamma}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \gamma \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\gamma-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_p \\ &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla \varphi\|_p \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

Ahora supongamos que  $p \in [1, n)$ . Si  $p = 1$  entonces  $p^* = \frac{n}{n-1}$  y con (A.3.2) tenemos la desigualdad buscada. Si  $p \neq 1$ , entonces  $\gamma = \frac{n-1}{n}p^* > 1$ , observemos que  $\frac{p(\gamma-1)}{p-1} = \frac{n\gamma}{n-1} = p^*$  y que  $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}$ .

Por lo tanto de A.2.2 obtenemos finalmente

$$\|\varphi\|_{p^*} \leq \gamma \|\nabla\varphi\|_p$$

■

Hasta ahora solo hemos acotado a  $\|\varphi\|_q$  con  $\|\nabla\varphi\|_p$  para un valor específico de  $q$ , (el coeficiente crítico de Sobolev de  $p$ ). A continuación veremos la desigualdad de Poincaré, que generaliza el resultado anterior.

**Teorema A.3.4 (Desigualdad de Poincaré)** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado. Existe una constante  $C > 0$  que sólo depende de  $n, p$  y  $q$ , tal que*

$$\|u\|_q \leq C|\Omega|^{\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p \quad \text{para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

(donde  $|\Omega|$  es la medida de  $\Omega$ ) si alguna de las siguientes tres condiciones se cumple

(i)  $p \in [1, p)$ , entonces  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ , para toda  $q \in [1, p^*]$ , y la inclusión es continua.

(ii)  $p = n$  y  $q \in [1, \infty)$ .

En consecuencia,

■ Si  $p \in [1, n)$ , entonces  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, p^*]$  y la inclusión es continua.

■  $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, \infty)$  y la inclusión es continua.

**Demostración.** (i) Antes de meternos a la demostración del Teorema A.3.4 se demostrará una Afirmación que será muy útil.

**Afirmación** Si  $|\Omega| \leq \infty$  y  $1 \leq q < s \leq \infty$ , entonces  $L^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  y ésta inclusión

es continua. Más aún, para toda  $f \in L^s(\Omega)$  se cumple.

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq |\Omega|^{\frac{s-p}{sp}} \|f\|_s \quad \text{si } s \in [1, \infty) \\ \|f\|_p &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\Omega \end{aligned}$$

En efecto, observemos que si  $|\Omega| \leq \infty$ , entonces  $\chi_\Omega \in L^q(\Omega) \forall q \in [1, \infty)$  (donde  $\chi_\Omega$  sigue representando a la función característica de  $\Omega$ ) y

$$\|\chi_\Omega\|_q = \left( \int_\Omega \chi_\Omega^q \right)^{\frac{1}{q}} = |\Omega|^{\frac{1}{q}}$$

Si  $1 \leq p < s < \infty$  y  $f \in L^s(\Omega)$ , entonces  $|f|^p \in L^{\frac{s}{s-p}}(\Omega)$  y

$$\||f|^p\|_{\frac{s}{s-p}} = \left( \int_\Omega |f|^s \right)^{\frac{p}{s}} = \|f\|_s^p$$

Utilizando la desigualdad de Hölder se sigue que  $|f|^p = \chi_\Omega |f|^p$  es integrable y

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega \chi_\Omega |f|^p \leq \|\chi_\Omega\|_{\frac{s}{s-p}} \||f|^p\|_{\frac{s}{s-p}} = |\Omega|^{\frac{s-p}{s}} \|f\|_s^p$$

Por lo tanto,  $f \in L^p(\Omega)$  y

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{s-p}{sp}} \|f\|_s \tag{A.3.7}$$

Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^\infty(\Omega)$ , entonces  $|f|^p \leq \|f\|_\infty^p \chi_\Omega$  casi en todas partes en  $\Omega$ . Pero  $|\Omega| < \infty$ , entonces la función definida como  $\|f\|_\infty^p \chi_\Omega$  es integrable. Entonces,  $f \in L^p(\Omega)$  (**Teorema 14.9 de [9], pag. 311**). Podemos integrar la desigualdad  $|f|^p \leq \|f\|_\infty^p \chi_\Omega$  para obtener que  $\|f\|_p^p \leq |\Omega| \|f\|_\infty^p$  (otra vez utilizando Hölder), entonces

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty \tag{A.3.8}$$

Por último, si  $f_k \rightarrow f$  en  $L^s(\Omega)$ , las desigualdades (A.3.7) y (A.3.8) prueban la existencia

de  $C$  tal que

$$\|f_k - f\|_p \leq C \|f_k - f\|_s$$

Concluyendo que  $f_k \rightarrow f$  en  $L^p(\Omega)$ , por lo tanto la inclusión de  $L^s(\Omega)$  en  $L^p(\Omega)$  es continua.

Ahora, regresemos a la demostración del Teorema A.3.4. Sean  $1 \leq p < n$ ,  $1 \leq q \leq p^*$  y  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Utilizando la afirmación anterior y la desigualdad (A.3.2) tenemos que

$$\|\varphi\|_q \leq |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|\varphi\|_{p^*} \leq C |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|\nabla\varphi\|_p \quad (\text{A.3.9})$$

Como ya vimos  $C_c^\infty(\Omega)$  es denso en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , entonces la desigualdad (2.2.9) se puede extender a  $W_0^{1,p}(\Omega)$  como se muestra a continuación: Si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y  $\{\varphi_k\}$  es una sucesión de funciones en  $C_c^\infty(\Omega)$  tal que  $\varphi_k \rightarrow u$  en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $\|\varphi_k - u\|_p \rightarrow 0$  y  $\|\nabla\varphi_k - \nabla u\|_p \rightarrow 0$ , utilizando (A.3.9) tenemos que

$$\|\varphi_k - \varphi_j\|_q \leq C |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_j\|_p \quad \forall k, j \in \mathbb{N}$$

Esto implica que la sucesión  $\{\varphi_k\}$  es de Cauchy en  $L^q(\Omega)$ , y por lo tanto existe  $v \in L^q(\Omega)$  tal que  $\varphi_k \rightarrow v$  en  $L^q(\Omega)$ . Por lo tanto  $u(x) = v(x)$  casi en todas partes de  $\Omega$ . Otra vez usando (A.3.9), obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} \|u\|_q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_q \leq C |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla\varphi_k\|_p \\ &= C |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|\nabla u\|_p \end{aligned}$$

(ii) Ahora, sean  $p = n$ ,  $q \in [1, \infty)$  y  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Hagamos  $r := \max\{\frac{nq}{n+q}, 1\}$ . Notemos primero que  $r \in [1, n)$  si  $n \geq 2$ , además si  $r = \frac{nq}{n+q}$ , entonces  $r^* = q$  (donde  $r^* = \frac{nr}{n-r}$ ) y si  $q \leq \frac{n}{n-1}$  si  $r = 1$ . Por lo tanto usando (A.3.2) y la afirmación demostrada en este Teorema se tiene que

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_r \leq C |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_n \quad \text{si } r = \frac{nq}{n+q}$$

y

$$\begin{aligned} \|u\|_q &\leq |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{n-1}{n}} \|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{n-1}{n}} \|\nabla u\|_1 \\ &\leq C |\Omega|^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_n \quad \text{si } r = 1 \text{ y } n \geq 2 \end{aligned}$$

Si  $n = 1$ , por (A.3.3) se cumple lo deseado inmediatamente. ■

El Teorema A.3.4 es muy útil ya que nos permite usar la norma  $\|\nabla u\|_p$  en lugar de usar la norma  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , más a aún si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotado y abierto, y  $p \in [1, n)$ , entonces  $\|u\| := \|\nabla u\|_p$  ( $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ) es una norma en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  equivalente a la vista anteriormente y sigue siendo un espacio de Banach bajo esta norma ( [9], pag. 398).

A continuación se demostrará una característica interesante de la inclusión del espacio  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  en  $L^q(\mathbb{R}^n)$ , a la cual se le conoce como encaje de Sobolev.

**Corolario A.3.5 (Encajes de Sobolev)** *Si  $p \in [1, n)$ , entonces  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$  para toda  $q \in [p, p^*]$  y dicha inclusión es continua.*

La demostración de este Corolario puede ser encontrada en [9], pag. 399.

## A.4. Método de elemento finito

Un método numérico muy usado actualmente tanto en la física como en la ingeniería para la aproximación y simulación de soluciones de ecuaciones parciales es el llamado Método de Elemento Finito que fue desarrollado en 1943 por el matemático Richard Courant, la ventaja de este método es la libertad que se tiene sobre la geometría del problema; en este capítulo se dará una pequeña introducción al método centrada en la parte aplicada. Por simplicidad solo veremos algunos resultados clásicos sobre la aproximación por elementos finitos de tipo  $P_1$ , la generalización a tipo  $P_2$  es análoga y directa.

Sea  $V$  un espacio de Hilbert separable (con una base numerable) y  $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal coerciva y simétrica en  $V$  y  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal continuo.



Por teorema de Lax-Milgram existe una única  $u \in V$  solución a

$$A(u, v) = l(v), \text{ para toda } v \in V \quad (\text{A.4.1})$$

Para todo  $V_h$  subespacio de  $V$  de dimensión finita, sea  $u_h \in V_h$  la solución única de

$$A(u_h, v_h) = l(v_h), \text{ para toda } v_h \in V_h \quad (\text{A.4.2})$$

A continuación se presenta un lema importante de elemento finito.

**Lema A.4.1 (Lema de Céa)** *Sea  $V, V_h, A, l, u$  y  $u_h$  definidos con las hipótesis anteriores. Por lo tanto existe una constante  $C > 0$  que solo depende de las constantes de coercividad y continuidad de  $A$  tal que*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \quad (\text{A.4.3})$$

**Demostración.** Usando que  $V_h \subset V$  y restando las ecuaciones (A.4.1) y (A.4.2) tenemos que

$$A(u - u_h, v - u_h) = 0, \text{ para toda } v_h \in V_h \quad (\text{A.4.4})$$

Reemplazando  $v_h$  por  $v_h - u_h \in V_h$  obtenemos

$$A(u - u_h, v - u_h) = 0, \text{ para toda } v_h \in V_h \quad (\text{A.4.5})$$

si y solo si  $A(u - u_h, v_h - u + u - u_h) = 0$ , para toda  $v_h \in V_h$

Usando la bilinearidad de  $A$  tenemos que

$$A(u - u_h, u - u_h) = A(u - u_h, u - v_h)$$

La continuidad y coercividad de  $A$  implican

$$\lambda|u - u_h|^2 \leq \Lambda|u - u_h||u - v_h| \text{ entonces } |u - u_h| \leq \frac{\Lambda}{\lambda}|u - v_h| \quad (\text{A.4.6})$$

haciendo  $C = \frac{\Lambda}{\lambda}$  la ecuación (A.4.6) se cumple para el infimo de los  $v_h$  y por lo tanto demostramos (A.4.3) ■

Podemos reescribir la última desigualdad como  $|u - u_h| \leq \frac{\Lambda}{\lambda}|u - P_{V_h}(u)|$ , donde  $P_{V_h}$  es el operador de proyección sobre  $V_h$ , para  $h \in \mathbb{R}$  y  $V_h$  es un subespacio dimensión finita. Por lo tanto  $P_{V_h}$  cerrado en  $V$ . Ahora, en el caso en el que  $V = H_0^1(D)$  con  $D \subset \mathbb{R}^d$  acotado, abierto y suave, el método de elemento finito  $P_1$  consiste en construir un subespacio finito dimensional  $V_h$  definido como sigue (solo veremos los caso  $d = 1$  y  $d = 2$ ).

**-Caso d=1:**

Al ser unidimensional,  $D$  es necesariamente un intervalo abierto  $D = (a, b)$ , con  $a < b < +\infty$ . Sea  $h > 0$  tal que  $N_h = \frac{b-a}{h} - 1$  un entero positivo y definamos la rejilla regular de discretización de  $(a, b)$  como

$$x_n := a + nh, \text{ para toda } 0 \leq n \leq N_h + 1$$

El método consiste en aproximar la solución en A.4.1 por  $u_h$  la solución de A.4.2 donde el espacio de elemento finito  $V_h$  se define por

$$V_h = \{v \in C(D), v(a) = v(b) = 0, v|_{(x_n, x_{n+1})} \text{ es lineal } \forall 0 \leq n \leq N_h\}$$

o equivalentemente

$$V_h = \langle \{\varphi_n, 0, 1 \leq n \leq N_h\} \rangle$$

y para cada  $x \in (a, b)$  definimos

$$\varphi_h^0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_n}{h} & \text{si } x \in (x_{n-1}, x_n); \\ \frac{x_n-x}{h} & x \in (x_n, x_n + 1); \\ 0 & \text{los casos restantes.} \end{cases}$$

La función  $\varphi_n^0$  es la única función lineal a pedazos tal que  $\varphi_h^0(x_n) = 1$  y  $\varphi_h^0(x'_n) = 0$  si

$n' = n$ .

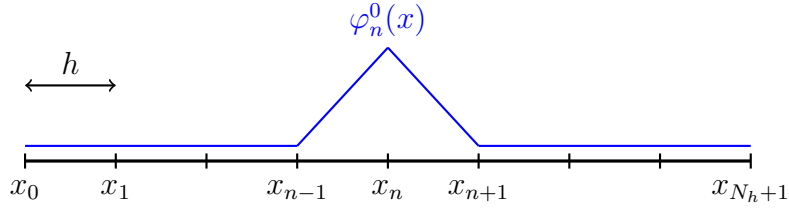


Figura A-2: Función base  $\varphi_n^0(x)$

**-Caso d=2.**

En dos dimensiones necesitamos definir una triangulación del dominio  $D$ . Supongamos entonces que  $D$  es un polígono convexo que aproxima al  $D$  original. Una triangulación es una partición de  $D$  con un número finito de triángulos  $K$ , llamados elementos, que satisfacen las siguientes condiciones

- $\cup_{K \in T_h} K = \bar{D}$ .
- Cada triángulo  $K$  es cerrado con interior no vacío.
- Para toda  $K_1 \neq K_2 \in T_h$ ,  $K_1^0 \cap K_2^0 = \emptyset$ .
- Para toda  $K_1 \neq K_2 \in T_h$ ,  $K_1 \cap K_2$  es vacío, o sólo un vértice o arista.

Sea  $N_h$  el número de nodos de la triangulación que pertenecen al interior del dominio y a  $(x_n)_{1 \leq n \leq N_h}$  las coordenadas. Análogamente al caso unidimensional el espacio de elemento finito se define como

$$V_h := \{v \in C(D), v|_{\partial D}, \text{ para toda } K \in T_h, v|_K \text{ es lineal}\}$$

y la definición de equivalente como  $V_h := \langle \{\varphi_h^0, 1 \leq n \leq N_h\} \rangle$  usa a  $\phi_h$  con  $1 \leq n \leq N_h$  como la única función tal que  $\varphi_h^0(x_n) = 1$  y  $\varphi_h^0(x'_m) = 0$  para toda  $n' \in \mathbb{N}$  con  $x_{n'} \neq x_n$  y  $\varphi_h^0$  es lineal en cada triángulo  $K \in T_h$ .

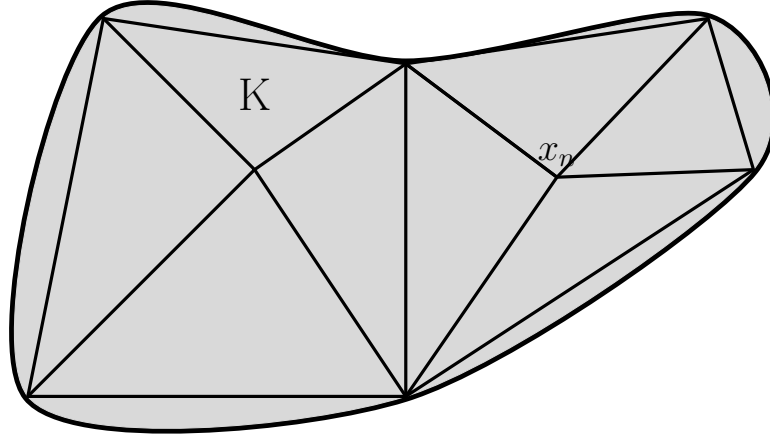


Figura A-3: Triangulación

El operador de interpolación  $\Pi_h^0$  asociado a la triangulación  $\tau_h$  es definido como sigue:

$$\Pi_h^0 v(x) := \sum_{1 \leq n \leq N_h} v(x_n) \varphi_h^0(x)$$

para toda  $v \in C(\bar{D})H_0^1(D), \forall x \in D$

La función  $\Pi_h^0 v$  es llamado el interpolador lineal de la función  $v$ . Se comprueba facilmente para toda  $1 \leq n \leq N$ ,  $\Pi_h^0 v(x_n) = v(x_n)$ . También debemos asegurar que los triángulos no se aplasten cuando  $h \rightarrow 0$ . Para esto para cada triángulo  $T$ , sea  $h_T$  su diámetro y  $\rho_T$  el diámetro del círculo más grande inscrito en  $T$ . Se dice que una familia de triángulos  $(\tau_h)$  es regular (o no degenerada) cuando  $h \rightarrow 0$  si existe una constante  $\gamma$  tal que:  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \gamma, \forall T \in (\tau_h) \forall h$ . Finalmente presentaremos un estimador clásico del operador de interpolación.

**Teorema A.4.2** *Supongamos que  $(\tau_h)_h \geq 0$  es una sucesión uniforme de triangulaciones regulares de  $D$  tal que  $\sup_{K \in \tau_h} \text{diam}(K) = h$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que para toda  $h > 0$  suficientemente pequeña y para toda  $v \in H^2(D) \cap H_0^1(D) \cap C(\bar{D})$*

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h^0 v\|_{L^2(D)} &\leq Ch^2 |v|_{H^2(D)} \\ \|\nabla(v - \Pi_h^0 v)\|_{L^2(D)} &\leq Ch |v|_{H^2(D)} \end{aligned} \tag{A.4.7}$$

Más resultados sobre el método de elemento finito pueden encontrarse en [8] pag. 135. Para términos prácticos, el problema de solución de un problema diferencial por medio del método de elementos finitos resolviendo un problema lineal con la discretización del operador diferencial. En el caso del problema con el operador laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.4.8})$$

Si expandimos a la solución  $u$  en términos de la base de elemento finito  $\{\phi_i\}$  con soporte en cada triángulo de alguna triangulación de  $\Omega$  con nodos  $\{x_i\}_{i=1}^N$ . Sea  $U = (u(x_1), \dots, u(x_N))$  (los valores de la solución en los nodos). Ahora, la formulación débil de la ecuación (A.4.8) usando como función prueba  $\phi_i$  (i-ésimo término de la base de elemento finito) es

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx$$

pero  $u(x) = \sum_i^N u(x_i) \phi_i(x)$ , por lo tanto

$$\sum_j^N \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \right) u(x_j) = \int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx$$

Por lo tanto los valores de la solución en los nodos son solución al siguiente problema lineal

$$MU = F \quad (\text{A.4.9})$$

con  $M_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx$ ,  $U_i = u(x_i)$  y  $F_j = \int_{\Omega} f(x) \phi_j(x)$ ; existen varios métodos numéricos para invertir la matriz  $M$  y así encontrar la solución discreta  $U$ , como ejemplo está el método de Gradiente Conjugado.

# Apéndice B

## Código de la simulación

```
//Mirage acustico
//Definimos las constantes y la funcion de onda incidente
real kappa0=1, rho0=1, kx=pi/5., ky=pi/5., w=sqrt(kx^2+ky^2);
real kappa=(5./10.)*kappa0, rho1=(10./5.)*rho0, rho2=(5./10.)*rho0;
real cx=sqrt(kappa/rho1), cy=sqrt(kappa/rho2);
func f=(exp(1i*kx*x)+exp(-1i*kx*x))*exp(1i*ky*y);
//Definimos el primer dominio
border a(t=0,20){x=t; y=0; label=1;};
border b(t=0,2*pi){x=20; y=t; label=2;};
border c(t=0,20){x=20-t; y=2*pi; label=3;};
border d(t=0,2*pi){x=0; y=2*pi-t; label=4;};
border e(t=0,2*pi){x=10.; y=t; label=5;};
border g(t=0,2*pi){x=5; y=t; label=6;};
int n=300;
mesh Th=buildmesh(a(n)+b(n)+c(n)+e(n)+d(n)+g(n));
plot(Th);
//Definimos el segundo dominio
border a2(t=5,20){x=t; y=0; label=1;};
```

```

border b2(t=0,2*pi){x=20; y=t; label=2;};
border c2(t=0,15){x=20-t; y=2*pi; label=3;};
border d2(t=0,2*pi){x=5; y=2*pi-t; label=4;};
border g2(t=0,2*pi){x=10; y=t; label=6;};
int nn=180;
mesh Th1=buildmesh(a2(nn)+b2(nn)+c2(nn)+d2(nn)+g2(nn));
plot(Th1);
//PRIMER PROBLEMA
//Definimos el espacio de elemento finito donde trabajare
fespace Vh(Th, P2, periodic=[[1,x],[3,x]]);
//Espacio de funciones periodicas en las fronteras 3 y 1
fespace Vhh(Th,P2);
Vh<complex> u, v;
//Definimos el problema
problem Fluido(u,v)=int2d(Th)(dx(u)*conj(dx(v)))
+int2d(Th)((ky^2)*u*conj(v)-2i*ky*dy(u)*conj(v)+dy(u)*conj(dy(v)))
-int2d(Th)(w^2*u*conj(v))+on(2,u=f*exp(-1i*ky*y))+int1d(Th,2)(0*conj(v));
Fluido;
Vhh<complex> p=u*exp(1i*ky*y);
Vhh pr=real(p), pi=imag(p);
plot(pr, fill=true, value=true);
//SEGUNDO PROBLEMA
//Definimos el espacio de elemento finito donde trabajare
fespace Ph1(Th1,P0); //Definimos el espacio de funciones continuas a pedazos
fespace Vh1(Th1, P2, periodic=[[1,x],[3,x]]);
//Espacio de funciones periodicas en las fronteras 3 y 1
fespace Vhh1(Th1,P2);
Ph1 reg=region; //Llamamos a la funcion caracteristica

```

```

//Definimos cada subdominio
int nder=reg(12,1);
int nizq=reg(6,1);
//Definimos los coeficientes con funciones características
Ph1 n1=1+(cx^2-1)*(region==nizq);
Ph1 n2=1+(cy^2-1)*(region==nizq);
Vh1<complex> uu, vv;
//Definimos el problema
problem Metafluido(uu,vv)=int2d(Th1)((n1)*dx(uu)*conj(dx(vv)))
+int2d(Th1)((n2)*((ky^2)*uu*conj(vv)-2i*ky*dy(uu)*conj(vv)+dy(uu)*conj(dy(vv))))
-int2d(Th1)(w^2*uu*conj(vv))+on(2,uu=f*exp(-1i*ky*y))+int1d(Th1,2)(0*conj(vv));
Metafluido;
Vhh1<complex> pp=uu*exp(1i*ky*y);
Vhh1 ppr=real(pp), ppi=imag(pp);
plot(ppr, fill=true, value=true);
//Definimos la función de referencia
Vhh1 prref=pr;
plot(prref, fill=true, value=true);
//Calculamos el error relativo
real err=int2d(Th1)((((abs(prref-ppr))^2)*
(region==nder))/int2d(Th1)((((abs(prref))^2)*(region==nder)));
cout << "error =" << err << endl;

```



# Bibliografía

- [1] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), no. 6, 1482–1518.
- [2] G. Allaire, *Two-scale convergence and homogenization of periodic structures*, School on homogenization (1993), 1–23.
- [3] ———, *Introduction to homogenization theory*, School on homogenization (2010), 1–27.
- [4] G. Allaire, A. Damlamian, and U. Hornung, *Two-scale convergence on periodic surfaces and applications*, In Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media **A. Bourgeat et al. eds.** (1996), 15–25.
- [5] H. Brezis, *Functional analysis: Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext (Berlin. Print), Springer, 2010.
- [6] L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity*, Academic Press, 1960.
- [7] W. Cai and V. Shalaev, *Optical metamaterials: Fundamentals and applications*, Springer, 2009.
- [8] M. Chipot, *Elliptic equations: An introductory course*, Birkhäuser Advanced Texts, Springer, 2009.
- [9] M. Clapp, *Introducción al análisis real*, Aportaciones Matemáticas, 2012.

- [10] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010.
- [11] F. Hecht, *Freefem++ documentation*, Laboratoire Jacques-Louis Lions and Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012.
- [12] R. V. Kohn and S. P. Shipman, *Magnetism and homogenization of microresonators*, Multiscale Model. Simul. **7** (1) (2008), 62–92.
- [13] H. Marmanis, *Analogy between the navier-stokes equations and maxwell's equations: Application to turbulence*, Physics of Fluids **10** (1998), 1428–1437.
- [14] A. Norris, *Acoustic metafluids*, J. Acoustic. Soc. Am **125** (2) (1995), 839–849.
- [15] W. Rudin, *Functional analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1991.
- [16] S. Salsa, *Partial differential equations in action: From modelling to theory*, Universitext, Springer, 2008.
- [17] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, *Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity*, Physical Review Letters **84** (2000), 4184.
- [18] J. D. Smith, *Application of the method of asymptotic homogenization to an acoustic metafluid*, Proc. R. Soc. A **467** (2011), 3318–3331.
- [19] M.E. Taylor, *Measure theory and integration*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc., 2006.