



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**DISPERSIÓN CAÓTICA DE UNA CARGA
ELÉCTRICA POR UN DIPOLO MAGNÉTICO
PERTURBADO**

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS**

PRESENTA:

FRANCISCO GONZÁLEZ MONTOYA

TUTOR:

DR. CHRISTOF FRIEDRICH JUNG KOHL ICF-UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. DAVID PHILIP SANDERS FC-UNAM

DR. THOMAS HENRY SELIGMAN SCHURCH ICF-UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradesco todos los que la hacen posible la Universidad Nacional Autónoma de México, a todos y cada uno que me ayudaron con este trabajo y todos mis amigos que me ha acompañado en el camino. Muchas gracias.

Este trabajo fue realizado con recursos de:

- Programa de becas nacionales para posgrado CONACYT.
- Proyecto CONACYT 79988.
- Proyecto DGAPA-UNAM IG 101113.

Resumen

En este trabajo estudiamos la dispersión caótica de una carga eléctrica por un dipolo magnético perturbado. Este es un sistema de tres grados de libertad abiertos que podemos estudiar con métodos simples. La dispersión caótica en este sistema está determinada por las variedades invariantes estable e inestable de una variedad invariante normalmente hiperbólica (NHIM). Las variedades invariantes estable e inestable de la NHIM son barreras impenetrables para las trayectorias en la variedad de energía constante. Comenzamos el análisis con el sistema no perturbado que es simétrico ante rotaciones alrededor del eje del dipolo magnético. Esta simetría nos permite encontrar la NHIM con ayuda de las técnicas desarrolladas para sistemas de dos grados de libertad. Encontramos la relación entre las singularidades de funciones de dispersión y la variedad estable de la NHIM y relación entre las funciones de dispersión y la sección de dispersión. La mayor parte de la NHIM y sus variedades invariantes del sistema simétrico son robustas ante perturbaciones; este hecho nos permite analizar la dispersión caótica del sistema perturbado con la ayuda del sistema simétrico.

Si usted tiene preguntas sobre este trabajo, por favor, escriba a la dirección francisco.glz.mty@gmail.com

Resume

We study the chaotic scattering of a electric charge in a perturbed magnetic dipolar field. This is a three open degrees of freedom system that we can study with simple methods. The chaotic scattering in this system is determined by the stable and unstable manifolds of a normally hyperbolic invariant manifold (NHIM). The stable and unstable manifolds are impenetrable barriers for the trajectories in the constant energy manifold. We start the analisis with the unperturbed system that is symmetric under rotation around the axis of the magnetic dipole. Using this symmetry we can find the NHIM with the techniques for the two degree of freedom systems. We find the relations between the singularities of the scattering function and the unstable manifold of the NHIM, and the relation between scattering functions and the scattering cross section. Most of the NHIM and their stable and unstable manifolds are robust under perturbations; this fract allow us to analyze the scattering for the perturbed system using the unperturbed system.

0.1. Introducción

La dispersión caótica es un fenómeno presente en varias áreas de la física, por ejemplo: la mecánica celeste, la difusión de partículas en un medio periódico, las reacciones químicas, la hidrodinámica, etc. En el trabajo reciente de revisión [1] se encuentran muchos ejemplos y una discusión sobre los avances recientes en el tema.

La dispersión caótica es un tipo de caos transitorio [2]. En el caos las trayectorias tienen una forma complicada todo el tiempo, mientras que, en el caos transitorio las trayectorias tienen una forma complicada sólo en un intervalo finito de tiempo. En ambos tipos de caos la forma de las trayectorias depende de sus condiciones iniciales de manera muy sensible. Dos trayectorias con condiciones iniciales muy cercanas pueden tener comportamientos muy distintos después de algún tiempo.

Ilustremos el fenómeno de la dispersión caótica en el sistema con el que empezamos el estudio. Consideremos una partícula cargada que se mueve en el campo de un dipolo magnético. El dipolo magnético se encuentra fijo en el origen y apunta en la dirección \hat{z} , el campo magnético del dipolo es simétrico bajo rotaciones alrededor del eje Z . Supongamos que la partícula es clásica y que no radia. Este es un sistema Hamiltoniano de tres grados de libertad abiertos con dos integrales de movimiento, la energía E y la componente L_z del momento angular. Consideremos diferentes trayectorias de la partícula con condiciones iniciales muy similares en la región asintótica. Supongamos que el momento inicial \vec{p}_i es paralelo al vector \hat{x} , las coordenadas iniciales de las partículas son x_i , y_i , pero la coordenada inicial z_i un poco diferente; ver la figura 2.9. Al acercarse al dipolo, las trayectorias se desvían por la influencia del campo magnético del dipolo y después regresan a la región asintótica. El comportamiento tan distinto entre trayectorias con condiciones iniciales semejantes es la dispersión caótica. El origen de la gran sensibilidad de las trayectorias respecto a condiciones iniciales está ligado a la existencia de trayectorias acotadas inestables. Las trayectorias no acotadas que estén cerca de las trayectorias acotadas inestables tienen una forma similar a las trayectorias acotadas por un intervalo de tiempo. Una trayectoria no acotada entre más cerca de una trayectoria acotada inestable más se parecerá a esta.

El estudio del problema del movimiento de una partícula cargada en el campo de un dipolo magnético comenzó a principios del siglo XX con los trabajos de Störmer [3, 4]. Este modelo simple es útil para entender el movimiento de las partículas cargadas en el campo magnético terrestre. Con este modelo y otra hipótesis, Lemaître y Vallarta determinaron la distribución de los ángulos de incidencia de los rayos cósmicos en la magnetosfera superior terrestre [5, 6]. Estos trabajos son contribuciones importantes al estudio de los rayos cósmicos y la cosmología.

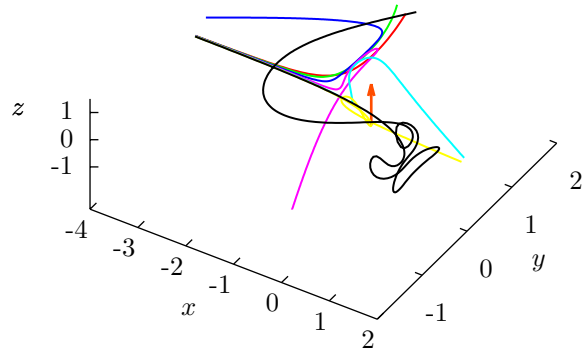


Figura 1: La dispersión caótica de una carga por un dipolo magnético. El dipolo magnético está representado con una flecha. En la figura tenemos algunas trayectorias de partículas dispersadas por el campo magnético del dipolo. Las partículas viajan en dirección \hat{x} hasta que el campo magnético las desvía. Algunas partículas tienen un comportamiento muy complicado en la región cercana al dipolo.

Alrededor de la Tierra, existe una zona donde las partículas cargadas se concentran y tienen un movimiento complicado; esta zona es llamada la campana de Van Allen [7]. En los últimos años se han desarrollado misiones espaciales para entender más sobre la dinámica de las partículas cargadas en las campanas de Van Allen y su relación con las tormentas geomagnéticas [8, 9].

La dispersión caótica clásica en sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad independientes del tiempo es un fenómeno bien entendido [10]. La comprensión del fenómeno está ligada a la dimensión del espacio fase del sistema de dos grados de libertad y los objetos que aparecen de manera natural dentro de él. Veamos esto con detalle. El espacio fase de un sistema de dos grados de libertad tiene dimensión cuatro, una variedad de energía constante tiene dimensión tres. Dentro las variedades de energía constante aparecen trayectorias periódicas de manera natural. Las trayectorias periódicas hiperbólicas y parabólicas están relacionadas con la dispersión caótica. Cada una de estas trayectorias periódicas tienen asociadas dos superficies de dimensión dos invariantes bajo el flujo. Estas superficies invariantes se llaman variedades invariantes de la trayectoria periódica; ver la figura 2. Las variedades invariantes de las trayectorias periódicas son fundamentales para entender la dispersión caótica en los sistemas de dos grados de libertad. Las variedades invariantes de dimensión dos dirigen la dinámica, ya que forman barreras impenetrables que dirigen el flujo en la variedad de energía constante.

En el caso de los sistemas de tres grados de libertad la situación es distinta. También existen trayectorias periódicas que tienen variedades invariantes. Pero según sea el sistema, las variedades invariantes de la trayectoria periódica pueden no ser los objetos que dirigen la dinámica [10]. Las variedades invariantes pueden no tener la dimensión suficiente para dividir a una variedad de energía constante.

En los últimos años se han hecho trabajos sobre el problema de la dispersión caótica en sistemas Hamiltonianos de tres grados de libertad de distintos tipos: totalmente hiperbólicos con tres grados de libertad abiertos [11], semintegrables¹ con un grado de libertad abierto y dos grados de libertad cerrados [12], con tres grados de libertad abiertos con tres canales [10]. Aún queda mucho por entender; debido a diversidad y complejidad de los espacios fase de los sistemas de tres y más grados de libertad.

En algunos sistemas de tres y más grados de libertad existen otros objetos multidimensionales invariantes bajo el flujo. Algunos de estos objetos son similares a las trayectorias periódicas hiperbólicas de dos grados de libertad. Estos objetos invariantes multidimensionales son las variedades invariantes normalmente hiperbólicas (Normally Hyperbolic Invariant Manifolds en inglés, que abreviaremos como NHIM) [13]. En los sistemas de tres o más grados de liber-

¹La definición de este concepto y otros que aparecen a lo largo del trabajo están en el apéndice I.

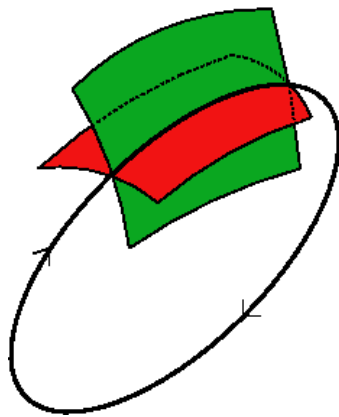


Figura 2: Segmentos de las variedades de la trayectoria periódica hiperbólica en la variedad energía constante de dimensión tres. Las variedades invariantes se cortan transversalmente en la trayectoria periódica hiperbólica. Tan sólo pintamos un segmento de cada variedad invariante para poder visualizar. Las variedades contienen la trayectoria periódica. Estas dos superficies pueden ser infinitas o conectar a la trayectoria periódica hiperbólica con otra trayectoria periódica hiperbólica. Cada una de estas variedades invariantes está formada por la unión de trayectorias. Por este motivo forman barreras impenetrables para las demás trayectorias en la variedad de energía constante.

tad pueden existir NHIMs de diferentes dimensiones: las NHIMs que tienen la menor dimensión son las trayectorias periódicas hiperbólicas de dimensión uno y las NHIMs que tienen mayor dimensión, tienen la dimensión de la variedad de energía constante menos dos.

Las NHIMs tienen variedades invariantes. Una característica importante de las variedades invariantes de una NHIM es que su dimensión es mayor que la dimensión de la NHIM. Si una NHIM tiene codimensión dos relativa a la variedad de energía constante que la contiene; entonces las variedades invariantes de la NHIM tiene codimensión uno y pueden dividir a la variedad de energía constante. En un sistema de dos grados de libertad, las NHIMs son las trayectorias periódicas hiperbólicas y sus variedades invariantes dividen la variedad de energía constante de dimensión tres que las contiene, vea la tabla 0.1. Las variedades invariantes de la NHIM tienen codimensión uno relativa a la variedad de energía constante, podemos entender la dispersión caótica de los sistemas de tres y más grados de libertad de manera completamente análoga a la dispersión caótica en los sistema de dos grados de libertad. Las variedades invariantes de la NHIM forman barreras impenetrables que dirigen el flujo [10, 14].

Dimensiones (Codimensión relativa a la variedad de energía constante)

Grados de libertad	2	3	N
Espacio fase	4	6	$2N$
Variedad de energía constante	3	5	$2N-1$
Sección de Poincaré en la variedad de energía constante	2	4	$2N-2$
Órbita periódica hiperbólica	1 (2)	1 (4)	1 ($2N-2$)
Generalización de una trayectoria periódica hiperbólica (NHIM)	1 (2)	3 (2)	$2N-3$ (2)
Variedades invariantes de la NHIM	2 (1)	4 (1)	$2N-2$ (1)

Tabla 0.1 En esta tabla consideramos NHIMs con una codimensión 2 relativa a la variedad de energía constante.

En este trabajo estudiamos la dispersión caótica de una carga por un dipolo magnético perturbado. El sistema simétrico, con el que empezamos el estudio, es un sistema semintegrable de tres grados de libertad se puede separar en un sistema de dos grados de libertad y un sistema de un grado de libertad acoplado [15]. Una parte del estudio de la dispersión caótica del sistema de dos grados de libertad está en los trabajos [16,17]. Aprovechamos el conocimiento del sistema simétrico como punto de partida para estudiar el sistema perturbado. Esta idea ha utilizada en el estudio de la dispersión caótica de otros sistemas de más de dos grados de libertad [12, 18]. El sistema simétrico aparece una NHIM de manera natural. Las variedades invariantes de esta NHIM dirigen la dinámica en la variedad de energía constante que las contiene.

Una propiedad importante de las NHIM y sus variedades invariantes es que, bajo ciertas condiciones, son robustas bajo perturbaciones. Esta propiedad nos permite estudiar la dispersión caótica de los sistema perturbados a partir de un sistema que tenga una NHIM que conozcamos.

El objetivo de la dispersión caótica es entender la relación entre la dinámica en la región de interacción con las propiedades asintóticas. El propósito de nuestro trabajo es estudiar la dispersión caótica en el sistema perturbado de tres grados de libertad abiertos. En especial estamos interesados en entender la relación entre la sección de dispersión y el conjunto de singularidades de la función de dispersión.

Escogimos una perturbación natural: adicionamos al campo del dipolo magnético el campo magnético de un cuadrupolo. Estudiamos qué le sucede a la NHIM y sus variedades invariantes al variar la magnitud de la perturbación y sus consecuencias en la dispersión caótica de la carga eléctrica.

El plan de esta tesis es:

- Capitulo I. Hablamos sobre las propiedades básicas de las NHIMs y sus variedades invariantes.
- Capitulo II. Estudiamos el sistema no perturbado, la construcción de la NHIM, la dinámica restringida a la NHIM, la relación entre las variedades invariantes de la NHIM y el conjunto de singularidades de las funciones de dispersión, y por último, la relación entre las funciones de dispersión y la forma de sección de dispersión.
- Capitulo III. Perturbamos al sistema con un campo magnético cuadrupolar, analizamos la dinámica en la NHIM con la ayuda de un mapeo de Poincaré y mostramos los cambios del conjunto de singularidades de las funciones de dispersión y la sección de dispersión.

Por último, haremos un sumario, los comentarios finales y conclusiones.

Índice general

0.1. Introducción	IV
1. Variedades invariantes normalmente hiperbólicas	1
1.1. Concepto de variedad invariante normalmente hiperbólica NHIM y sus variedades invariantes	1
1.2. Persistencia bajo perturbaciones	3
2. Sistema simétrico: el dipolo magnético	7
2.1. La función Hamiltoniana	8
2.2. El sistema de tres grados de libertad y el sistema de dos grados de libertad asociado	9
2.3. Las trayectorias periódicas hiperbólicas del sistema de dos grados de libertad	10
2.4. Mapeo de Poincaré del sistema de dos grados de libertad	14
2.5. Construcción de la NHIM y sus variedades invariantes para el sistema de tres grados de libertad	16
2.6. Singularidades de las funciones de dispersión	23
2.7. Secciones de dispersión y cústicas	27
3. Caso no simétrico: El dipolo magnético perturbado	33
3.1. Dinámica en la NHIM perturbada	33
3.2. Algoritmo para calcular la aproximación a la NHIM	40
3.3. Singularidades de las funciones de dispersión	43
3.4. Secciones de dispersión y cústicas	44
Conclusiones y comentarios finales	49
Apéndice I	53
Apéndice II	63

Capítulo 1

Variedades invariantes normalmente hiperbólicas

Las propiedades cualitativas de la dinámica generada por flujos y mapeos discretos está ligada a las estructuras invariantes que aparecen en el espacio fase. Las estructuras invariantes son algo como el esqueleto del espacio fase ya que contienen parte cualitativa de la dinámica. En este capítulo veremos las características básicas de la estructura que dirigen la dispersión caótica en problema que estudiamos. Esta estructura está formada por las variedades invariantes de una variedad invariante normalmente hiperbólica.

1.1. Concepto de variedad invariante normalmente hiperbólica NHIM y sus variedades invariantes

Las variedades invariantes normalmente hiperbólicas NHIM son la generalización multidimensional de los puntos fijos hiperbólicos; el ejemplo más sencillo de una NHIM es una trayectoria periódica hiperbólica. La dinámica alrededor de un punto fijo hiperbólico está determinada por los eigenvalores y los eigenvectores de la aproximación lineal del campo vectorial que define al sistema de ecuaciones diferenciales. En el caso de las trayectorias periódicas, utilizamos el mapeo de Poincaré para analizar la dinámica alrededor de la trayectoria periódica: a una trayectoria periódica le corresponde un punto fijo en el mapeo de Poincaré. La aproximación lineal al mapeo de Poincaré en el punto fijo del mapeo determinan la dinámica alrededor de la trayectoria periódica [19]. De igual manera, la dinámica alrededor de la NHIM está determinada por aproximación lineal a la dinámica en la NHIM [13].

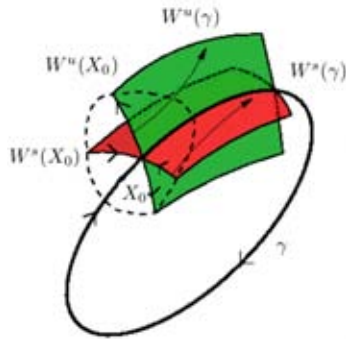


Figura 1.1: La trayectoria periódica hiperbólica γ y sus variedades invariantes $W^s(\gamma)$ y $W^u(\gamma)$. Las flechas en las superficies son segmentos de trayectorias. Las trayectorias en la variedad estable $W^s(\gamma)$ convergen a la trayectoria periódica γ y las trayectorias en la variedad inestable $W^u(\gamma)$ se alejan de la trayectoria periódica γ . En el mapeo de Poincaré las variedades invariante se definen de manera análoga. La intersección de las variedades $W^s(\gamma)$ y $W^u(\gamma)$ con la superficie de Poincaré forman las variedades invariantes $W^s(X_0)$ y $W^u(X_0)$ del punto fijo hiperbólico X_0 . El eigenvector del punto X_0 estable es tangente a $W^s(X_0)$ y el eigenvector inestable del punto X_0 es tangente a $W^u(X_0)$.

Consideremos una trayectoria periódica hiperbólica γ en el espacio de tres dimensiones \mathbb{R}^3 . Consideremos un punto en la trayectoria periódica hiperbólica y al vector tangente a la trayectoria periódica. El vector tangente está dado por el campo vectorial que define al flujo en dicho punto. Tomemos la superficie de Poincaré cuyo vector normal es paralelo al vector tangente a la trayectoria periódica en el punto; ver la figura 1.1. El punto fijo hiperbólico X_0 del mapeo de Poincaré tiene dos eigenvectores y dos eigenvalores. Estos dos eigenvectores nos definen dos direcciones y dos subespacios invariantes bajo la aproximación lineal al mapeo. En el subespacio estable $E^s(X_0)$ las trayectorias de la dinámica linealizada son atraídas hacia el punto fijo hiperbólico X_0 , mientras que en el subespacio inestables $E^u(X_0)$ las trayectorias de la dinámica linealizada son repelidas del punto X_0 . Los eigenvalores miden qué tanto se acercan y alejan las trayectorias en estas dos direcciones.

La propiedad importante de las trayectorias en una vecindad alrededor de la trayectoria periódica hiperbólica γ es que las trayectorias en esta vecindad se alejan o acercan en la direcciones normales más rápido de lo que avanzan en la dirección tangente a la trayectoria periódica. Esta propiedad está ligada a su persistencia bajo perturbaciones como veremos más adelante.

En el caso de las NHIM de más dimensiones pasa algo similar. Las NHIM de más dimensiones también tienen sus variedades invariantes estable e inestable, esta es la propiedad esencial que las define. Las variedades estable e inestable de una NHIM \mathcal{M} las denotamos por $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ respectivamente.

La variedad estable $W^s(\mathcal{M})$ está definida como el conjunto de trayectorias tales que tienden a la NHIM \mathcal{M} cuando $t \rightarrow \infty$.

La variedad inestable $W^u(\mathcal{M})$ está definida como el conjunto de trayectorias tales que tienden a la NHIM \mathcal{M} cuando $t \rightarrow -\infty$.

La NHIM \mathcal{M} está contenida en la intersección de $W^s(\mathcal{M})$ con $W^u(\mathcal{M})$, es decir, $\mathcal{M} \subset W^s(\mathcal{M}) \cap W^u(\mathcal{M})$. Las variedades invariantes de \mathcal{M} también se pueden intersectar en más lugares, como veremos más adelante.

1.2. Persistencia bajo perturbaciones

Una pregunta importante para los sistemas físicos es si las estructuras que aparecen en el espacio fase son robustas bajo perturbaciones. De alguna manera general para las variedades invariantes, la inestabilidad dinámica está estrechamente relacionada a la persistencia bajo perturbaciones.

Para darnos un idea de la relación entre la inestabilidad dinámica y la estabilidad bajo perturbaciones, consideremos el caso más simple: un punto fijo hiperbólico X_0 de un flujo. Encontrar un punto fijo X_0 de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales $\dot{X} = f(X)$ es relativamente simple: tan sólo tenemos que resolver la ecuación no lineal $f(X_0) = 0$. Probar la persistencia de un punto fijo hiperbólico de un flujo bajo perturbaciones también es simple; veamos lo con detalle. Consideremos la función auxiliar $G(X, \epsilon) = f(X) + \epsilon g(X)$, donde $\epsilon g(X)$ es la perturbación. Por definición $G(X_0, 0) = f(X_0) = 0$ y $D_X G(X_0, 0) = D_X f(X_0)$. Si el punto fijo es hiperbólico, ninguno de los eigenvalores de $D_X f(X_0)$ es cero, o equivalentemente $\det D_X f(X_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita¹ para la función auxiliar $G(X, \epsilon) = f(X) + \epsilon g(X)$, tenemos que, para ϵ suficientemente pequeño, la ecuación $G(X, \epsilon) = 0$ define a la función $X_0(\epsilon)$. Por lo tanto, el punto fijo hiperbólico persiste bajo cualquier perturbación con ϵ suficientemente pequeña.

El análisis de la estabilidad de una trayectoria periódica hiperbólica lo podemos reducir al problema de la estabilidad de un punto fijo hiperbólico en un mapeo discreto $X_{n+1} = f(X_n)$ con la ayuda del mapeo de Poincaré. El procedimiento para probar la persistencia es totalmente análogo. Tan sólo tenemos que resolver la ecuación $X_n - f(X_n) = 0$ para encontrar el punto fijo del mapeo y considerar la función $G(X_n, \epsilon) = f(X_n) + \epsilon g(X_n)$ para probar la estabilidad del punto fijo hiperbólico del mapeo. Un punto fijo de un mapeo es persistente

¹Una prueba basada en ideas geométricas del teorema de la función implícita se encuentra en [20].

bajo perturbaciones si todos los eigenvalores del mapeo linealizado son distintos de uno. Si alguno de los eigenvalores fuera uno entonces no está garantizada la persistencia bajo perturbaciones.

Encontrar una variedad invariante no es una tarea sencilla, es necesario saber con detalle la estructura del espacio fase del sistema. En general no tenemos un método, ni siquiera numérico, para encontrar variedades invariantes. En un caso concreto, probar que un sistema tiene una variedad invariante bajo el flujo puede ser una tarea extraordinaria. La dinámica interna en una variedad invariante \mathcal{M} puede ser muy rica: pueden contener puntos fijos, trayectorias periódicas, cuasiperiódicas, e incluso su dinámica puede ser caótica [13]. Recientemente apareció un trabajo en donde prueban la existencia de un tipo NHIMs sin la necesidad de partir de un caso no perturbado donde se conozca una NHIM [21]. El método está diseñado para implementarse en una computadora.

Existen tres diferentes tipos NHIM que generalizan a los puntos fijos inestables y diferentes teoremas de persistencia bajo perturbaciones:

- La NHIM compacta sin frontera [13, 22, 23].
- La NHIM no compacta con geometría acotada [24].
- La NHIM compacta con frontera [13, 25, 26]

Las pruebas de persistencia bajo perturbaciones están basadas en las propiedades del flujo en una vecindad de la NHIM. En esencia, bajo la dinámica linealizada las tasas de crecimiento y decrecimiento de los vectores normales a la NHIM dominan a las tasas de crecimiento y decrecimiento de los vectores tangentes a la NHIM [14]. Al deformar un poco el campo vectorial con una perturbación esta propiedad no cambian mucho. Las pruebas de persistencia son largas y técnicas, recomendamos al lector interesado leer las pruebas en los trabajos [13, 22–26].

Veamos en un ejemplo simple que significa que bajo la dinámica linealizada las tasas de crecimiento y decrecimiento de los vectores normales a la NHIM dominan a las tasas de crecimiento y decrecimiento de los vectores tangentes a la NHIM. Consideremos una trayectoria periódica hiperbólica γ de período T en el espacio de tres dimensiones. Tomemos un punto X_0 en una trayectoria periódica γ y linealizamos el campo vectorial f que define al flujo en ese punto. El sistema de ecuaciones que obtenemos es $\dot{\zeta} = Df(X(t))\zeta$. La matriz $Df(X(t))$ es una matriz de período T de dimensión 3×3 . La solución del sistema es la matriz fundamental $X(t) = Z(t)e^{tR}$, donde $Z(t)$ tiene período T . En particular podemos escoger $X(0) = Z(0) = I$, entonces $X(T) = Z(T)e^{TR} = Z(0)e^{RT}$.

La estabilidad de la trayectoria periódica γ está determinada por los eigenvalores de la matriz fundamental e^{TR} . Los eigenvalores de la matriz fundamental son los multiplicadores de Floquet. Uno de los eigenvalores de e^{TR} es tangente a γ . El multiplicador de Floquet asociado a la dirección tangente a

γ siempre es uno. Escogiendo una base apropiada podemos hacer que la última columna de e^{TR} sea $(0, 0, 1)^T$. La matriz de la linealización del mapeo de Poincaré es la matriz que obtenemos de eliminar la última fila y la última columna de e^{TR} . Entonces, los dos primeros multiplicadores de Floquet son los eigenvalores de la linealización del mapeo de Poincaré [19]. Para un punto hiperbólico en el mapeo los eigenvalores son reales y distintos de uno. El eigenvalor asociado a $W^u(X_0)$ es mayor que uno. El vector unitario normal a γ que más crece al aplicarle e^{TR} es el eigenvector normalizado tangente a $W^u(X_0)$, el eigenvalor asociado nos dice cuanto crece el vector. El eigenvector normal tangente a γ no crece. Por lo tanto, el cociente entre el multiplicador de Floquet asociado a la dirección de γ y el eigenvalor asociado a la variedad inestable es menor que uno. Si invertimos la dirección del tiempo en el argumento tenemos una relación similar.

En el sistema que estudiamos aparece una NHIM compacta con frontera. Para una NHIM con frontera el campo vectorial que define el flujo es siempre tangente a la NHIM. Para la prueba de persistencia es necesario que en la frontera de la NHIM exista una barrera que sea persistente ante perturbaciones para evitar que las trayectorias crucen la frontera y la NHIM deje de ser invariante. Los otros dos tipos de NHIM no tienen frontera por lo que no es necesario este elemento en las pruebas de persistencia bajo perturbaciones. Los elementos que aparecen en el teorema de persistencia de NHIM compacta con frontera y sus variedades invariantes están en el apéndice I.

Capítulo 2

Sistema simétrico: el dipolo magnético

En este capítulo estudiamos el del sistema simétrico tal como lo hicimos en [27]. Aprovechamos que el sistema simétrico de tres grados de libertad es sem-integrable, la componente del momento angular L_z es una integral de movimiento como la energía E . La integral de movimiento L_z nos permite reducir el sistema de tres grados de libertad a un sistema de dos grados de libertad más un sistema de un grado de libertad. La dinámica del sistema de un grado de libertad depende de la dinámica del sistema de dos grados de libertad. Las técnicas para estudiar los sistemas de dos grados Hamiltonianos son bien conocidas [28]. En los sistemas de dos grados de libertad la variedad de energía constante es tridimensional; vea la tabla 0.1. Las variedades invariantes estable e inestable de las trayectorias periódicas hiperbólicas son bidimensionales y forman una estructura que dirige la dispersión caótica en la variedad de energía constante tridimensional.

Después de estudiar con detalle el sistema de dos grados de libertad construimos la NHIM \mathcal{M} del sistema de tres grados de libertad y sus variedades invariantes estable $W^s(\mathcal{M})$ e inestable $W^u(\mathcal{M})$. Utilizamos la continuidad de las trayectorias periódicas hiperbólicas, sus variedades invariantes del sistema de dos grados de libertad y la de las soluciones del grado de libertad al variar L_z para unir estas variedades de manera continua. Así obtenemos la estructura que dirige la dinámica del sistema de tres grados de libertad en las variedades de energía constante de cinco dimensiones.

También estudiamos la dinámica en la NHIM \mathcal{M} ; las propiedades de la dinámica en la \mathcal{M} son importantes, ya que nos dan información sobre la estabilidad de \mathcal{M} , $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ cuando perturbamos al sistema.

Por último, estudiamos las propiedades que se pueden medir fácilmente en un experimento de dispersión, la sección de dispersión, y explicamos la forma de la sección de dispersión en base a las propiedades de variedades invariantes de \mathcal{M} de este sistema de tres grados de libertad abiertos.

2.1. La función Hamiltoniana

En esta sección analizaremos la función Hamiltoniana de una partícula cargada de masa m y carga q que se mueve en el campo de un dipolo magnético fijo en el origen que apunta en la dirección \hat{z} . Con la función Hamiltoniana podemos calcular numéricamente las trayectorias de las partículas dispersadas. Con las trayectorias calculamos las funciones de dispersión y la sección de dispersión. La función Hamiltoniana de una partícula cargada en un campo magnético es

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2.$$

El potencial vector \vec{A} asociado al campo magnético del dipolo que apunta en \hat{z} en coordenadas cartesianas es

$$\vec{A} = \vec{A}_{\text{dipolo}} = -M_z \frac{y}{R^3} \hat{x} + M_z \frac{x}{R^3} \hat{y},$$

donde R es la distancia al origen y la constante M_z es la magnitud del momento dipolar del dipolo.

El campo magnético del dipolo es simétrico bajo rotaciones alrededor del eje definido por el vector momento dipolar. Por lo tanto, las coordenadas naturales para describir la posición de la partícula en este campo magnético son las coordenadas cilíndricas estándar ρ, ϕ, z . La función Hamiltoniana de la partícula cargada en el campo del dipolo magnético en coordenadas cilíndricas es

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + p_z^2 + \left(\frac{L_z}{\rho} - qM_z \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \right].$$

donde $L_z = p_\phi$ es la componente z del momento angular. L_z es el momento conjugado a la coordenada ϕ . La coordenada ϕ no aparece explícitamente en H por tanto tenemos que L_z es una integral de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en el campo del dipolo son:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\
\frac{dp_\rho}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\phi^2}{m\rho^3} + \frac{3(qM_z)^2\rho^3}{m(\rho^2+z^2)^4} - \frac{(qM_z)^2\rho}{m(\rho^2+z^2)^3} - \frac{3qM_z p_\phi \rho}{m(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \\
\frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{3(qM_z)^2\rho^2 z}{m(\rho^2+z^2)^4} - \frac{3qM_z p_\phi \phi z}{m(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2} - \frac{qM_z}{m(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{dp_\phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0
\end{aligned}$$

La función Hamiltoniana en coordenadas cilíndricas tiene una propiedad especial que facilita el estudio, existe una relación entre las integrales de movimiento E y L_z que nos permite ver todo el escenario sin la necesidad de variar ambas integrales de movimiento [29] y [30]. Es posible fijar el valor de una integral de movimiento y variar la otra para ver todo el escenario. En nuestro estudio nos conviene fijar el valor de E y variar L_z . Para saber como son las soluciones para otros valores de E tan sólo hay que recalar el tiempo y longitud. Los valores que escogimos para realizar los cálculos numéricos¹ son $E = 0.05$, $m = q = M_z = 1$.

2.2. El sistema de tres grados de libertad y el sistema de dos grados de libertad asociado

La integral de movimiento L_z nos permite obtener al ángulo $\phi(t)$ si conocemos $\rho(t)$ y $z(t)$; ver las ecuaciones de movimiento. Entonces el sistema de tres grados de libertad es equivalente a un sistema de dos grados de libertad parametrizado por L_z , más un sistema de un grado también pormenorizado por L_z . La dinámica del sistema de un grado de libertad esta determinada por la

¹Las soluciones numéricas a las ecuaciones de movimiento las calculamos con la librería GSL para el lenguaje C. El integrador que utilizamos es Runge-Kutta-Dormand-Prince de orden 8. Las soluciones las calculamos en coordenadas cartesianas rectangulares. Para ver más detalles sobre los cálculos numéricos vea el apéndice 2.

dinámica del sistema de dos grados de libertad; vea las ecuaciones de movimiento del sistema.

A continuación estudiaremos las estructuras que dirigen a la dispersión caótica del sistema de dos grados de libertad para cada valor del parámetro L_z y después veremos qué pasa cuando tomamos en cuenta el tercer grado de libertad ϕ . Al ser L_z una integral de movimiento, podemos pensar que para cada valor fijo de L_z la función Hamiltoniana del sistema de tres grados de libertad corresponde a la función Hamiltoniana de un sistema de dos grados de libertad, ρ y z . El potencial efectivo del sistema de dos grados de libertad es

$$V_{L_z}(\rho, z) = \frac{1}{2m} \left(\frac{L_z}{\rho} - qM_z \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2.$$

En la figura 2.1 mostramos una gráfica del potencial en escala de colores para un valor de $L_z = 1$. El potencial tiene su valor mínimo en la curva cerrada definida por la ecuación $L_z/\rho = qM_z\rho/(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$. El punto $(\rho = 2qM_z/L_z, z = 0, V_{L_z} = L_z^4/(32m(qM_z)^{\frac{1}{2}}))$ es un punto silla del potencial. En el punto silla, el potencial tiene un máximo en la dirección ρ , ver figura 2.2, y un mínimo en la dirección z . Si $\rho \rightarrow \infty$ el potencial tiende a cero y si $\rho \rightarrow 0$ el potencial tiende a infinito, excepto en la curva del mínimo. En el interior de la curva del mínimo el potencial también tiende a infinito, formando una barrera cilíndrica infinita; ver figura 2.1.

La forma del potencial efectivo $V_{L_z}(\rho, z)$ nos ayuda a entender el comportamiento de las partículas. En un experimento de dispersión, algunas de las partículas que vienen de la región asintótica entran a la cuenca del potencial y quedan momentáneamente atrapadas, oscilando en las dos direcciones z y ρ de manera complicada. Después de un tiempo finito, casi todas las partículas salen de la cuenca y regresan a la región asintótica².

2.3. Las trayectorias periódicas hiperbólicas del sistema de dos grados de libertad

Al variar el valor del momento angular L_z , el potencial efectivo $V_{L_z}(\rho, z)$ cambia y tenemos distintos comportamientos de la dispersión. Para el valor $L_{z,\max} = (qM_z)^2(32mE)^{\frac{1}{4}} \approx 1.124$ el punto silla del potencial tiene el mismo valor que la energía. El punto silla del potencial genera un punto fijo hiperbólico en el sistema de dos grados de libertad. Al disminuir un poco el valor de L_z , el potencial efectivo evaluado en el punto silla disminuye y el punto fijo hiperbólico se transforma en una trayectoria periódica hiperbólica γ_{L_z} . La trayectoria γ_{L_z}

²Existe un conjunto de trayectorias que permanece atrapado por siempre y nunca regresa a la región asintótica, este conjunto de trayectorias es la variedad estable de la NHIM del sistema, más adelante hablaremos de este conjunto y su relación con la dispersión.

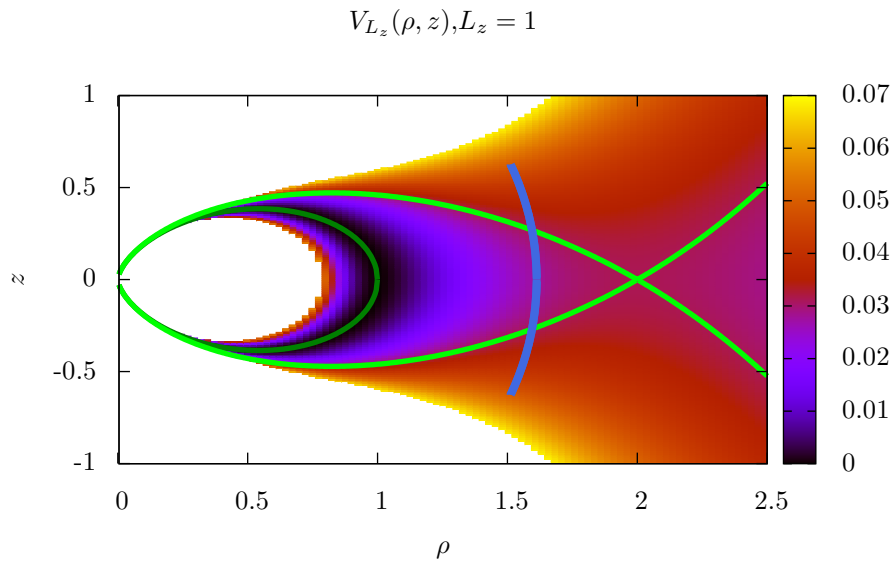


Figura 2.1: Potencial efectivo $V_{L_z}(\rho, z)$ para $L_z = 1$, la curva cerrada verde oscuro es donde el potencial alcanza su valor mínimo, $V_{L_z}(\rho, z) = 0$. La curva verde claro es la curva de nivel correspondiente a la energía del punto silla del potencial. $V_{L_z}|_{\text{silla}=E} = L_z^4/32m(qM_z)^{\frac{1}{2}}$. El punto silla del potencial se encuentra donde la curva se cortan consigo misma $\rho \approx 2$. En las zonas blancas el potencial tiene un valor mayor al valor máximo de la escala de colores. La curva azul corresponde a la trayectoria periódica hiperbólica generada por la silla de potencial.

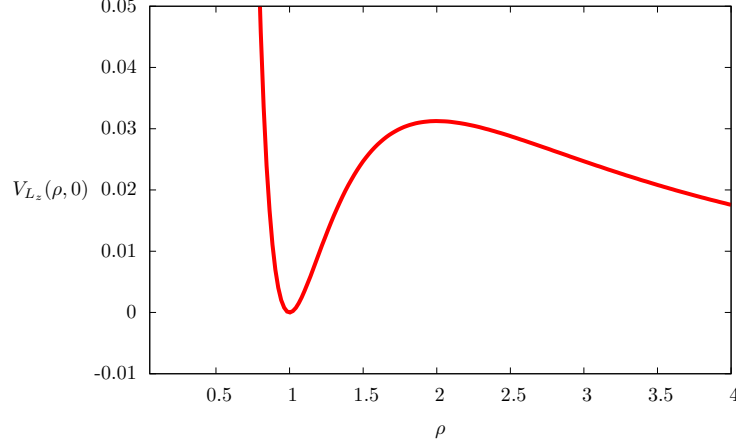


Figura 2.2: Potencial $V_{L_z}(\rho, z)$ para $L_z = 1$ y $z = 0$. El máximo de esta gráfica corresponde al punto silla del potencial en $V_{L_z}(\rho = 2/L_z, 0) = L_z^4/32m(qM_z)^{\frac{1}{2}}$. El mínimo del potencial es la curva definida por $V_{L_z}(\rho = 1/L_z, 0) = 0$.

oscila en la direcciones z y ρ . En la figura 2.1 la trayectoria periódica hiperbólica asociada al punto silla del potencial es la curva azul. La amplitud de la trayectoria γ_{L_z} aumenta conforme disminuimos el valor de L_z , hasta que finalmente la trayectoria periódica desaparece en $L_{z,\min} \approx 0.886$ en una bifurcación silla-centro; ver figura 2.3.

El conjunto de trayectorias periódicas hiperbólicas $\{\gamma_{L_z}\}_{L_z}$ es esencial para entender la dispersión caótica en el sistema que estudiamos. Para L_z entre $L_{z,\min}$ y $L_{z,\max}$ la dispersión es caótica. El caos transitorio es generado por las variedades invariantes de γ_{L_z} . En la próxima sección veremos con más detalle el origen del caos transitorio con la ayuda de un mapeo de Poincaré.

El espacio fase de un sistema de dos grados de libertad tiene dimensión cuatro, por la conservación de la energía podemos reducir la dinámica del sistema a la dinámica en una variedad de energía constante tridimensional. Podemos utilizar las coordenadas ρ, p_ρ, z para ubicar un punto en esta variedad; la coordenada p_z esta determinada por la conservación de la energía. En esta variedad tridimensional las variedades invariantes de una trayectoria periódica hiperbólica γ_{L_z} son superficies bidimensionales que se cortan transversalmente en la trayectoria γ_{L_z} ; ver la figura 1.1.

Cada trayectoria periódica hiperbólica γ_{L_z} tiene dos variedades invariantes: la variedad estable $W^s(\gamma_{L_z})$ y la variedad inestable $W^u(\gamma_{L_z})$. Las variedades $W^s(\gamma_{L_z})$ y $W^u(\gamma_{L_z})$ son barreras impenetrables que dividen la dinámica en la

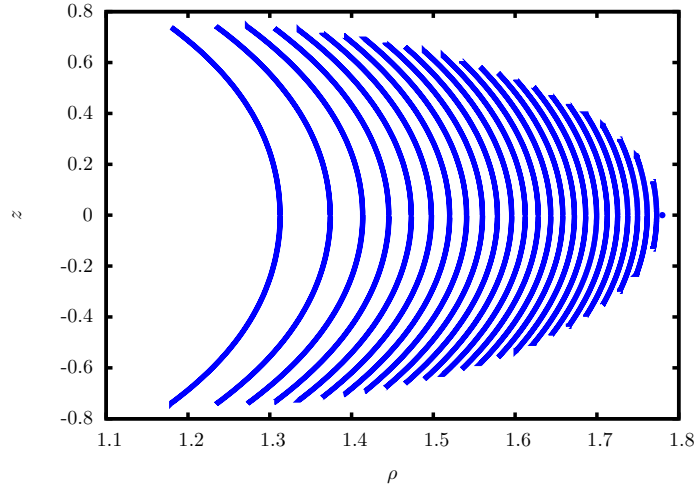


Figura 2.3: Trayectorias periódicas hiperbólicas γ_{L_z} en el plano ρ - z . El punto de la derecha es el punto fijo hiperbólico con $L_{z,\max}$. Las demás trayectorias tiene $L_z = 0.89, 0.9, \dots, 1.12$.

variedad de energía constante tridimensional, esto se debe a que las variedades son no acotadas y la invariancia bajo el flujo de $W^s(\gamma_{L_z})$ y $W^u(\gamma_{L_z})$.

Explicuemos con más detalle por qué las variedades invariantes $W^s(\gamma_{L_z})$ y $W^u(\gamma_{L_z})$ dividen la dinámica la una variedad de energía constante. Consideremos una región de la variedad de energía constante que tiene como fronteras segmentos de las variedades $W^s(\gamma_{L_z})$ y $W^u(\gamma_{L_z})$. Supongamos que una trayectoria dentro de esa región cruzara a una variedad invariante de γ_{L_z} . Entonces la trayectoria tendría un punto en una variedad invariante. Pero si la trayectoria tiene un punto en la variedad invariante, entonces toda la trayectoria esta contenida en la variedad invariante, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la trayectoria no la puede salir de la región que tiene como fronteras a segmentos de las variedades invariantes $W^s(\gamma_{L_z})$ y $W^u(\gamma_{L_z})$. El argumento es independiente de la dimensión; tan sólo necesitamos que la codimensión de las variedades invariantes relativa a la variedad de energía constante sea uno.

En este sistema, las variedades $W^s(\gamma_{L_z})$ y $W^u(\gamma_{L_z})$ se cortan transversalmente en varios lugares generando una estructura topológica complicada en el espacio de tres dimensiones. En la siguiente sección veremos con más detalle esta estructura topológica con la ayuda del mapeo de Poincaré.

2.4. Mapeo de Poincaré del sistema de dos grados de libertad

Un mapeo de Poincaré es una herramienta útil para visualizar la estructura de las variedades invariantes de una trayectoria periódica γ_{L_z} . Consideremos la intersección de trayectoria γ_{L_z} con una superficie de Poincaré bidimensional Σ ; ver la figura 1.1. Cambiamos el estudio de las trayectorias en el la variedad de energía constante tridimensional por el estudio de un mapeo discreto de menor dimensión en la superficie Σ . Elegimos como superficie de Poincaré Σ al plano $z = 0$. Las trayectorias periódicas γ_{L_z} cortan transversalmente esta superficie. Las coordenadas en la superficie Σ son ρ y p_ρ ; sólo tomamos las intersecciones con $p_z > 0$ para que las trayectorias periódicas sean puntos fijos en el mapeo de Poincaré.

Una manera de localizar numéricamente la trayectoria periódica hiperbólica γ_{L_z} es aprovechando que esta trayectoria tienen $p_\rho = 0$ cuando cruzan el plano $z = 0$ [16]. Esto se debe a que el potencial en el punto silla tiene el mínimo en la dirección z y a la simetría del potencial en dirección z . La trayectoria periódica γ_{L_z} se cortan la superficie Σ en un punto. Este punto es un punto fijo hiperbólico del mapeo de Poincaré que denotamos por X_{L_z} . Todos los puntos fijos X_{L_z} están en la línea $p_\rho = 0$. Para encontrar al punto fijo X_{L_z} , tomamos condiciones iniciales en un segmento de una línea recta $p_\rho = 0$ en la superficie de Poincaré Σ ; como se muestra en la figura 2.4, y apliquemos el mapeo de Poincaré a este segmento de recta. Para L_z entre $L_{z,\min}$ y $L_{z,\max}$, la recta de condiciones iniciales y su imagen se cortan. La intersección con ρ mayor corresponde a la trayectoria periódica hiperbólica γ_{L_z} ; la intersección con menor ρ corresponde a otra trayectoria periódica.

Las variedades $W^u(\gamma_{L_z})$ y $W^s(\gamma_{L_z})$ cortan con la superficie Σ . La intersección de cada variedad con la superficie de Poincaré es una línea. Ambas líneas se cortan en el punto fijo X_{L_z} . Estas dos líneas son la variedad estable $W^s(X_{L_z})$ e inestable $W^u(X_{L_z})$ del punto fijo X_{L_z} . Las variedades $W^s(X_{L_z})$ y $W^u(X_{L_z})$ se cortan transversalmente una infinidad de veces, formando una estructura topológica llamada maraña homoclínica [31]. En este caso, la maraña homoclínica es simétrica con respecto al eje ρ , debido a la simetría $p_\rho \rightarrow -p_\rho$ de H , ver figura 2.5. Los segmentos de línea rojos son segmentos de las variedades estables $W^s(X_{L_z})$ y los segmentos verdes son segmentos de las variedades inestables $W^u(X_{L_z})$.

Para graficar un segmento de $W^u(X_{L_z})$, construimos un segmento de recta paralelo al eigenvector estable del punto hiperbólico X_{L_z} . El punto inicial es un punto muy cercano al punto fijo X_{L_z} en la región donde podemos aproximar al mapeo por su aproximación lineal. El punto inicial está sobre la recta tangente a la variedad inestable $W^u(X_{L_z})$. Tomamos el punto final del segmento como

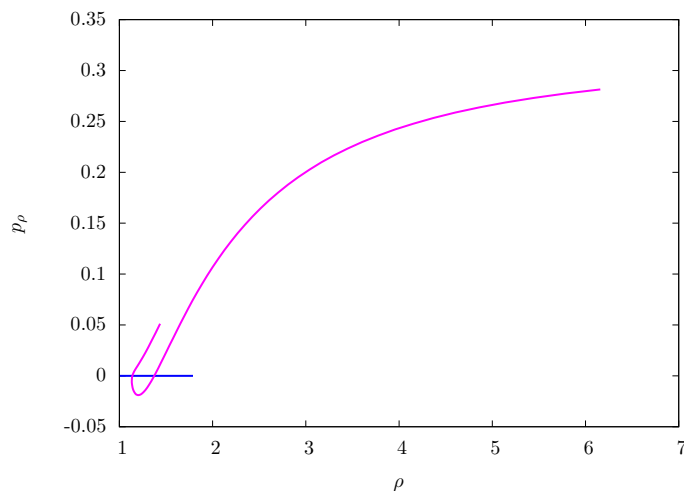


Figura 2.4: Mapeo de Poincaré de un segmento de recta contenido en el plano $p_{\rho}-\rho$ con $p_{\rho} = 0$ y $z = 0$. La línea de color azul es la línea de condiciones iniciales con $p_{\rho} = 0$. Al aplicar el mapeo de Poincaré a la línea azul obtenemos la línea morada. Cada intersección entre ambos segmentos corresponde a una trayectoria periódica; la intersección de mayor ρ es la trayectoria periódica γ_{L_z} .

la iteración del punto inicial del segmento. Después iteramos varias veces el segmento para construir un segmento de variedad $W^u(X_{L_z})$. La variedad estable $W^s(X_{L_z})$ es la reflexión de la variedad inestable $W^u(X_{L_z})$ respecto al eje ρ .

Al área encerrada entre un segmento de $W^s(X_{L_z})$ y otro segmento de $W^u(X_{L_z})$ le llamamos lóbulo; cada región de color amarillo en la figura 2.5 es un lóbulo. Una propiedad importante es que al aplicar el mapeo de Poincaré al lóbulo \mathcal{L}_k , su imagen es el lóbulo \mathcal{L}_{k+1} , como se muestra en la figura 2.5. Esta propiedad se debe a que las variedades invariantes $W^u(\gamma_{L_z})$ y $W^s(\gamma_{L_z})$ forman tubos que dan vueltas alrededor del eje Z como la trayectoria periódica γ_{L_z} . Estos tubos dirigen las trayectorias que están dentro de cada tubo; las fronteras de los lóbulos corresponden a las intersecciones de un tubo con la superficie de Poincaré Σ . El mapeo de Poincaré nos permite ver con detalle la estructura de la maraña homoclínica y la dinámica.

A continuación mostramos algunas gráficas de las marañas homoclínicas para distintos valores de L_z ; ver la figuras 2.6 y 2.7. En el mapeo de Poincaré para $L_{z,\min}$, el punto fijo hiperbólico X_{L_z} nace de una bifurcación silla-centro junto con un punto elíptico [16]. Para el valor de $L_z = 0.91$ la maraña homoclínica forma una herradura Smale completa. Al incrementar el valor de L_z los lóbulos de la herradura se enroscan hasta dar una infinidad de vueltas; ver figura 2.7(b).

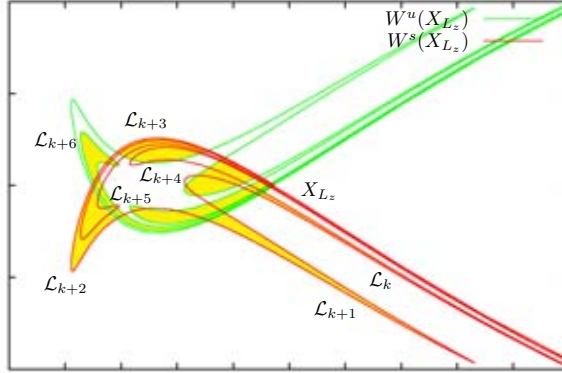


Figura 2.5: Dinámica de los puntos contenidos en un lóbulo de la maraña homoclínica.

Si incrementamos más el valor de L_z los lóbulos se desenroscan y las herraduras formadas por las marañas se vuelven más simples. Finalmente la maraña desaparece en el valor $L_{z,\max}$. La trayectoria periódica $\gamma_{L_z,\max}$ choca con el punto silla del potencial y el punto hiperbólico $X_{L_z,\max}$ del mapeo desaparece.

2.5. Construcción de la NHIM y sus variedades invariantes para el sistema de tres grados de libertad

Ahora veamos la relación entre las estructuras que dirigen la dinámica del sistema de dos grados de libertad y las estructuras que dirigen la dinámica del sistema de tres grados de libertad. Consideremos la trayectoria periódica hiperbólica γ_{L_z} del sistema de dos grados de libertad y la trayectoria asociada del sistema de un grado de libertad. Supongamos que al tiempo $t = 0$ la trayectoria en el sistema de un grado de libertad tiene un ángulo ϕ_0 . Si componemos a la trayectoria γ_{L_z} del sistema de dos grados de libertad con su trayectoria asociada del sistema de un grado de libertad formamos una trayectoria en el sistema de tres grados de libertad. Denotemos por Γ_{L_z,ϕ_0} a esta trayectoria. Las trayectorias Γ_{L_z,ϕ_0} son periódicas sólo cuando la frecuencia de oscilación de la trayectoria γ_{L_z} es conmensurable con la frecuencia de oscilación en ϕ ; la mayoría de las trayectorias Γ_{L_z,ϕ_0} son cuasiperiódicas. Las trayectorias Γ_{L_z,ϕ_0} del sistema de

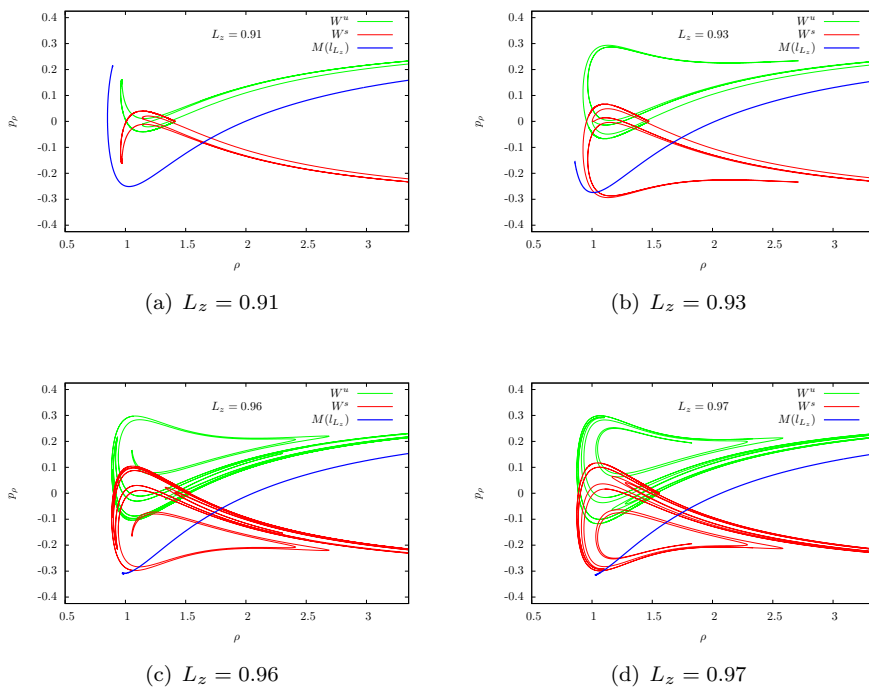


Figura 2.6: Marañas homoclínicas para distintos valores de L_z . En la sección sobre las singularidades de las funciones de dispersión hablaremos sobre las líneas azules.

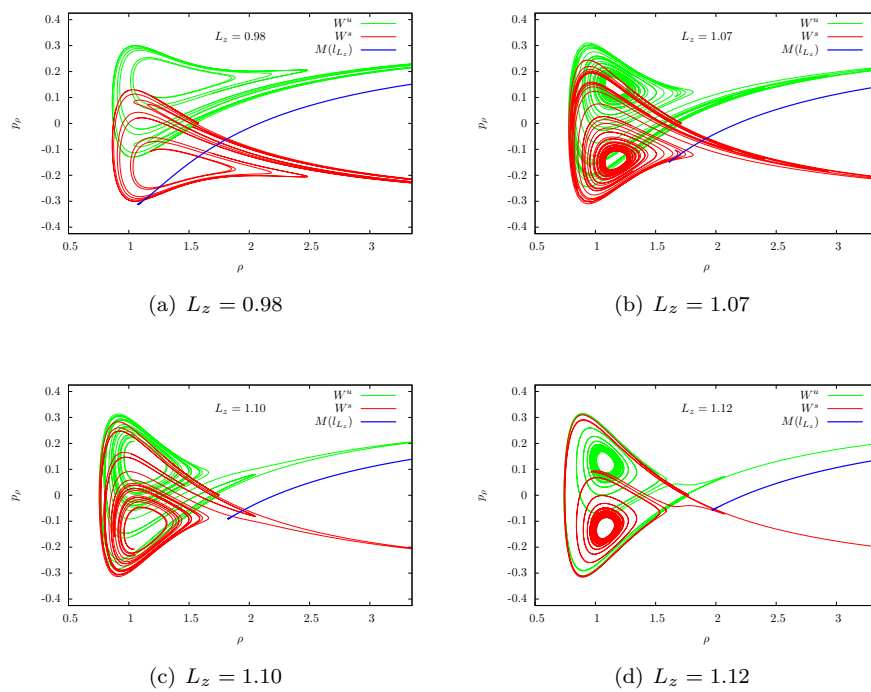


Figura 2.7: Marañas homoclínicas para distintos valores de L_z . En la sección sobre las singularidades de las funciones de dispersión hablaremos sobre las líneas azules.

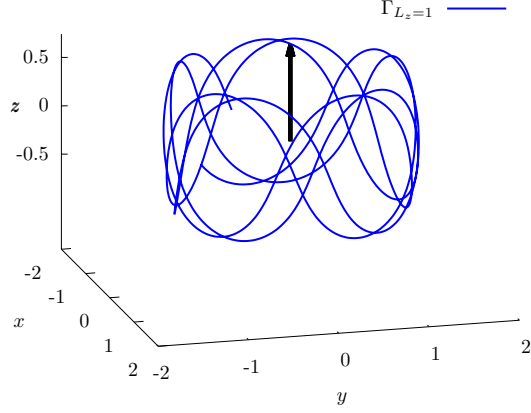


Figura 2.8: Segmento de la trayectoria cuasiperiódicas Γ_{L_z, ϕ_0} del sistema de tres grados de libertad con $L_z = 1$ en el espacio de configuración en coordenadas cartesianas.

tres grados de libertad forman la base de las estructuras que son importantes para entender la dispersión caótica en este sistema.

Una manera de entender como se forman las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} en el sistema de tres grado de libertad es la siguiente. El potencial efectivo $V_{L_z, \max}(\rho, z)$ evaluado en el punto silla tiene el mismo valor que la energía. El punto silla del potencial genera un punto fijo en sistema de dos grados de libertad. A este punto fijo de sistema de dos grados de libertad le corresponde una trayectoria periódica en el sistema de tres grados de libertad. En el espacio de configuración en coordenadas cartesianas, esta trayectoria periódica forma un círculo de radio $\rho = 2qM/L_{z, \max}$ contenido en el plano $z = 0$. La integral de movimiento L_z implica que el ángulo $\phi(t)$ de esta trayectoria crece de manera constante. Al disminuir el valor de L_z el valor de $V_{L_z}(\rho, z)$ en el punto silla disminuye y se forma una trayectoria Γ_{L_z, ϕ_0} que oscila en las direcciones z y ρ mientras avanza en el ángulo ϕ , como se muestra la figura 2.8. Entre más grande es el valor de L_z más grande es la amplitud de las oscilaciones en z y ρ . Finalmente para el valor $L_{z, \min}$ la trayectoria γ_{L_z} desaparece en una bifurcación silla-centro y las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} también desaparecen.

En la figura 2.9 se muestran segmentos de las trayectorias $\Gamma_{L_z, \phi_0=0}$ en el espacio de configuración. Las trayectorias crecen en ϕ mientras oscilan en las direcciones z y ρ al avanzar el tiempo. La conservación de L_z implica que el ángulo ϕ crece de manera constante en cada iteración del mapeo de Poincaré.

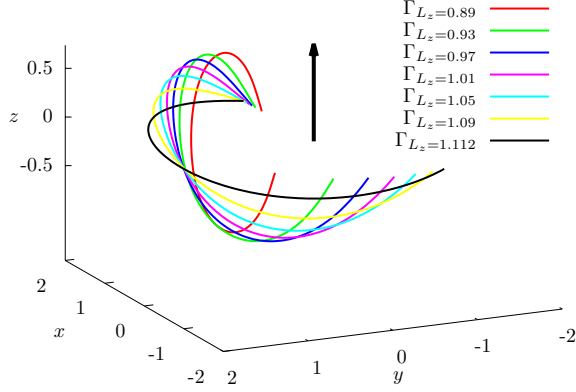


Figura 2.9: Un segmento de las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} en el espacio de configuración en coordenadas cartesianas. Todos los segmentos inician en el plano de Poincaré $z = 0$ con momento $p_z > 0$, ángulo inicial $\phi_0 = 0$ y terminan hasta volver a cortar con el plano de Poincaré con momento $p_z > 0$.

El número de rotación $\nu(L_z)$ de las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} es la fracción de revolución que avanza la trayectoria en la coordenada ϕ al dar una revolución completa en la coordenada z . En la figura 2.10 vemos que el número de rotación $\nu(L_z)$ está alrededor de $\nu = 1/2$ y crece al aumentar L_z . Más adelante veremos que la dependencia de ν con respecto a L_z tiene consecuencias importantes en la dinámica en la NHIM al perturbar el sistema.

La NHIM \mathcal{M} del sistema de tres grados de libertad está formada por la unión de todas las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} , donde el valor de L_z está entre $L_{z, \min}$ y $L_{z, \max}$ y ϕ_0 está en la circunferencia unitaria S^1 que representa el espacio de configuración del sistema de un grado de libertad:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{L_z, \phi_0} \Gamma_{L_z, \phi_0} = \bigcup_{L_z} \gamma_{L_z} \times S^1.$$

La variedad \mathcal{M} es una variedad con dos fronteras: una frontera tiene $L_{z, \max}$ y la otra frontera tiene $L_{z, \min}$. La dimensión de \mathcal{M} es la suma de la dimensión $\bigcup_{L_z} \gamma_{L_z}$ y la dimensión de S^1 . La dimensión de $\bigcup_{L_z} \gamma_{L_z}$ es dos y la dimensión de S^1 es uno, por tanto, la dimensión de \mathcal{M} es tres.

De manera análoga, las variedades estable e inestable de \mathcal{M} están formadas por la unión de las variedades invariantes de Γ_{L_z, ϕ_0} .

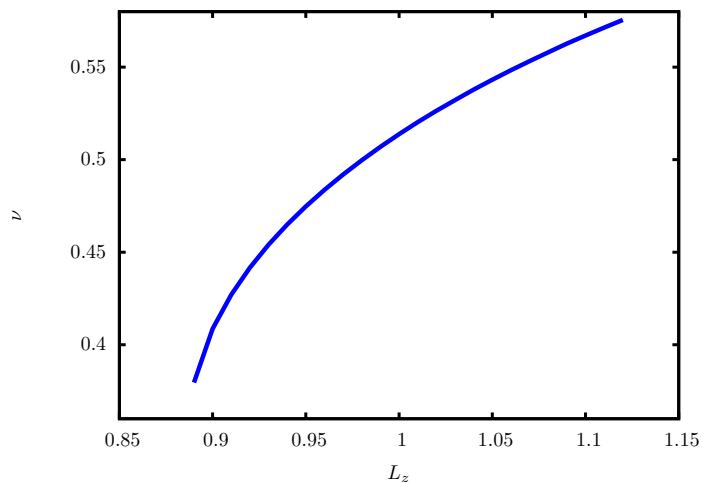


Figura 2.10: Número de rotación de las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} como función de L_z .

$$W^{s/u}(\mathcal{M}) = \bigcup_{L_z, \phi_0} W^{s/u}(\Gamma_{L_z, \phi_0}) = \bigcup_{L_z} W^{s/u}(\gamma_{L_z, \phi_0}) \times S^1.$$

La dimensión de $W^{s/u}(\mathcal{M})$ es la dimensión de \mathcal{M} más uno. Por lo tanto, la dimensión de $W^{s/u}(\mathcal{M})$ es cuatro. Las variedades invariantes de \mathcal{M} dividen el conjunto de nivel de energía constante de dimensión cinco del sistema de tres grados de libertad.

Para visualizar mejor a \mathcal{M} y a sus variedades invariantes utilizamos la superficie de Poincaré $z = 0$, esta vez dentro una variedad de energía constante de cinco dimensiones. Las coordenadas del mapeo de Poincaré para el sistema de tres grados de libertad son ρ , p_ρ , ϕ y L_z . El mapeo de Poincaré del sistema de tres grados de libertad es la pila de los mapeos de Poincaré del sistema de dos grados de libertad parametrizado por L_z , producto cartesiano con S^1 que representa los valores del ángulo ϕ . En la figura 2.12 tenemos un esquema de la estructura del mapeo de Poincaré de \mathcal{M} . La estructura topológica formada por $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ es una generalización de la maraña homoclínica.

Ahora veamos cómo es la dinámica normal a \mathcal{M} . En la figura 2.11 mostramos el eigenvalor $\lambda_\perp(L_z)$ del punto hiperbólico fijo X_{L_z} del mapeo de Poincaré del sistema de dos grados de libertad en función de L_z . Recordemos que este mapeo de Poincaré es un mapeo simpléctico, el otro eigenvalor es $1/\lambda_\perp$. Para el valor $L_{z, \min}$ el eigenvalor $\lambda_\perp(L_{z, \min}) = 1$, el punto fijo $X_{L_{z, \min}}$ es un punto parabólico, no es robusto bajo perturbaciones. Por lo tanto, las trayectorias cuasiperiódicas $\Gamma_{L_{z, \min}, \phi_0}$ no son robustas bajo perturbaciones. La NHIM \mathcal{M} no es robusta bajo

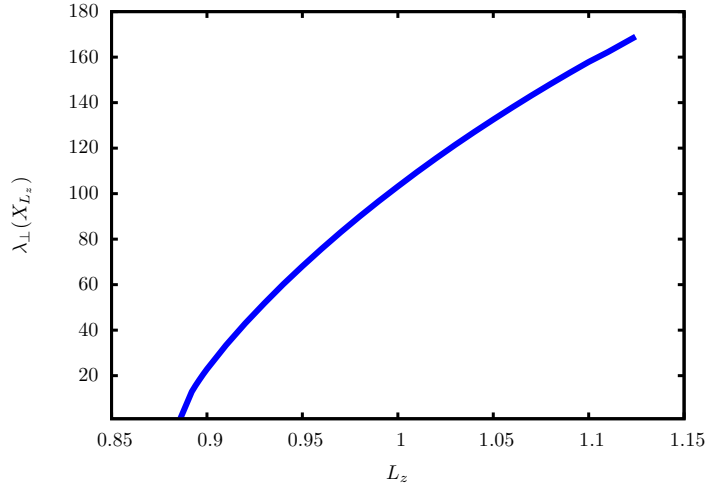


Figura 2.11: Eigenvalor λ_{\perp} del punto hiperbólico X_{L_z} como función de L_z .

perturbaciones en su frontera con $L_{z,\min}$, donde la dinámica normal no domina a la dinámica tangencial. En la otra frontera el eigenvalor está lejos de uno, $\lambda_{\perp}(L_{z,\max}) = \exp(2\pi\partial_{\rho,\rho}V_{L_{z,\max}}/\partial_{z,z}V_{L_{z,\max}})|_{\text{silla}} = \exp(2\pi(2/3)^{\frac{1}{2}}) \approx 170$ [16]. En esta frontera \mathcal{M} es robusta bajo perturbaciones.

Las tangencias entre $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ generalmente sólo ocurren en lóbulos de orden alto por lo que la estructura de los lóbulos de orden bajo no cambia.

Al perturbar el sistema las variedades $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ se deforman. La estructura de la maraña formada por ambas variedades cambia poco: sólo hay cambios en los lugares donde existen tangencias entre $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$. Al perturbar el sistema las tangencias entre las variedades $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ desaparecen. Para visualizar la maraña del sistema de tres grados de libertad podemos utilizar el mapeo de Poincaré. La robustez de la estructura de la maraña está ligada a la robustez del escenario de desarrollo de las marañas homoclínicas en el mapeo de Poincaré del sistema de dos grados de libertad. La robustez del escenario de desarrollo de las marañas homoclínicas en los mapeos bidimensionales está explicada en [32]. Las tangencias entre $W^s(\mathcal{M})$ y $W^u(\mathcal{M})$ se dan en lóbulos de orden alto en la maraña. Por lo tanto, la generalización de la maraña homoclínica del sistema de tres grados de libertad tiene el mismo tipo de robustez que el escenario de desarrollo de la maraña homoclínica del sistema de dos grados de libertad bajo perturbaciones. Este comportamiento se da en casi todo el intervalo de L_z donde existe \mathcal{M} , con excepción de la vecindad alrededor de $L_{z,\min}$ donde \mathcal{M} no es robusta bajo perturbaciones.

Otra manera en la que podemos imaginarnos al mapeo de Poincaré es como

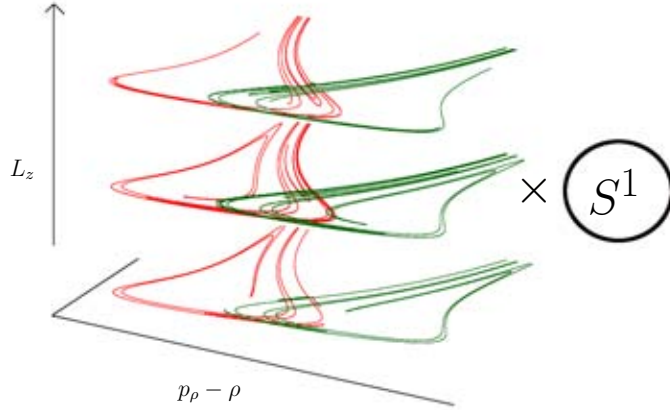


Figura 2.12: Representación del mapeo de Poincaré del sistema de tres grados de libertad. Al mapeo lo podemos construir como la pila de los mapeos del sistema de dos grados de libertad parametrizado por L_z , producto cartesiano con la circunferencia S^1 . La circunferencia S^1 representa los posibles valores del ángulo ϕ .

un cilindro formado por las coordenadas L_z y ϕ , donde para cada valor de L_z tenemos asociado el plano $\rho-p_\rho$ correspondiente al mapeo de Poincaré del sistema reducido de dos grados de libertad para todo ángulo ϕ . La dinámica del mapeo de Poincaré restringida a este cilindro es muy particular: para cada valor de L_z el incremento de la variable ϕ es constante y es creciente con L_z . Este es un tipo de mapeo que tuerce simpléctico (twist map) [33]; vea la figura 2.10 de los números de rotación. Al perturbar un mapeo de este tipo tenemos un escenario como el escenario descrito de Chirikov en [34], La persistencia de las curvas cerradas invariantes está descrita por la teoría KAM; en el siguiente capítulo veremos como cambia la dinámica de este mapeo al perturbar el sistema.

2.6. Singularidades de las funciones de dispersión

El vector potencial magnético del dipolo decrece como r^{-2} para largas distancias. Esta propiedad del potencial magnético garantiza que en la región asintótica las partículas tienen momento prácticamente constante. En un experimento de dispersión, las funciones de dispersión relacionan a cantidades asintóticas iniciales con cantidades asintóticas finales. En un sistema de tres

grados de libertad, necesitamos cinco constantes asintóticas para definir una trayectoria. En este sistema tomamos como constantes asintóticas a: la energía, los ángulos polar θ_f y azimutal ϕ_f finales medidos desde el origen y las dos componentes del parámetro de impacto.

Consideremos condiciones iniciales en la región asintótica contenidas en un plano paralelo al dipolo. El vector normal al plano de condiciones iniciales es perpendicular al dipolo. Para especificar un punto en el plano, podemos descomponer al parámetro de impacto en una componente paralela al dipolo b_{\parallel} y una componente perpendicular al dipolo b_{\perp} . Supongamos que las partículas de nuestro experimento de dispersión tienen el mismo valor de momento lineal inicial $\vec{p}_i = (p_{x,i}, p_{y,i}, 0)$ perpendicular al plano de condiciones iniciales. Con estas condiciones iniciales tenemos una equivalencia entre la coordenada b_{\perp} y la cantidad conservada L_z , dada por

$$L_z = b_{\perp} \sqrt{2E}.$$

Cuando la dispersión es caótica las funciones de dispersión presentan cambios abruptos y singularidades. En las singularidades los valores de las funciones de dispersión no están definidos. Las trayectorias asociadas a estas singularidades inician en la región asintótica pero nunca regresan a la región asintótica. Estas trayectorias son parte de la variedad estable $W^s(\mathcal{M})$ y quedan atrapadas en la región de interacción. Las singularidades en la función de dispersión están formadas por las intersecciones de la variedad estable $W^s(\mathcal{M})$ de la NHIM \mathcal{M} con el plano de parámetros de impacto para el valor del momento inicial \vec{p}_i de las partículas.

Para calcular una aproximación numérica al conjunto de singularidades, calculamos el tiempo que una partícula permanece en la región de interacción t_r , definido como

$$t_r = t_v - \frac{R_i + R_f}{\sqrt{2E}},$$

donde t_v es el tiempo que le lleva a la trayectoria llegar de la posición inicial a su posición final. Las posiciones iniciales y finales están a distancias R_i y R_f del dipolo. En una vecindad de $W^s(\mathcal{M})$, entre más cerca inicie una trayectoria de la variedad estable $W^s(\mathcal{M})$ más se acercará a \mathcal{M} y mayor es su tiempo en la región de interacción. Aproximamos al conjunto de singularidades de la función de dispersión por el conjunto puntos en el plano de parámetros de impacto tales que sus trayectorias asociadas tienen t_r mayor a un umbral.

Para observar los cambios abruptos y singularidades de la función de dispersión consideremos condiciones iniciales con el mismo valor de $L_z = 1.07$ ($b_{\perp} \approx 3.38$) y diferentes valores de b_{\parallel} ; ver la figura 2.13.

El ángulo θ_f está acotado en el intervalo [1.33, 1.81]; ver las figuras 2.13(c), 2.13(d), mientras que el ángulo ϕ_f cubre a todo el intervalo $[-\pi, \pi]$; ver las

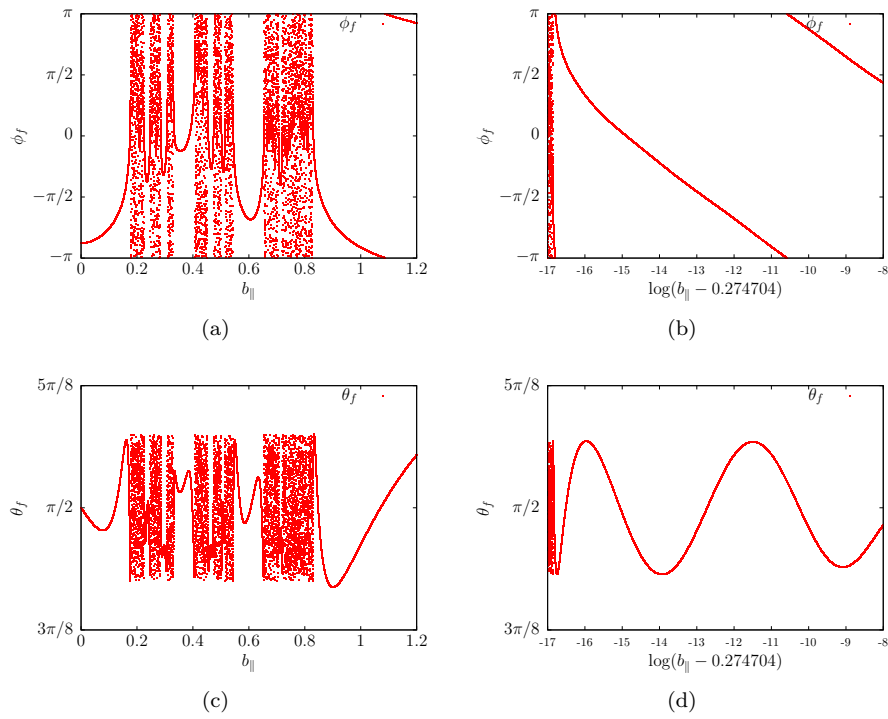


Figura 2.13: Funciones de dispersión $\theta_f(b_{\parallel})$ y $\phi_f(b_{\parallel})$ para $L_z = 1.07$. Del lado derecho tenemos ampliaciones de las funciones de dispersión cerca de un punto en la frontera de una región de continuidad, cerca de $b_{\parallel} = 0.274704$.

figuras 2.13(a), 2.13(b). Existen intervalos de b_{\parallel} donde la función de dispersión es claramente continua y que para otros valores los ángulos finales θ_f y ϕ_f tiene saltos abruptos; de hecho, la función de dispersión no esta definida en un conjunto fractal del dominio de la función [16].

Al tomar condiciones iniciales más cercanas a la frontera de un intervalo de continuidad de la función de dispersión, las condiciones iniciales están más cerca de $W^s(\mathcal{M})$, el ángulo ϕ_f crece más mientras que θ_f oscila más. Las trayectorias asociadas a estas condiciones iniciales se acercan más a las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} de la \mathcal{M} . Por lo tanto, estas trayectorias completan más vueltas alrededor del eje definido por el dipolo; ver la figura 2.13(b). Cerca del extremo izquierdo de esta gráfica tenemos una singularidad de la función de dispersión. Al acercarnos por la derecha a este punto frontera, el ángulo ϕ_f aumenta cada vez más rápido. Esta propiedad también está reflejada en las secciones de dispersión, como veremos más adelante.

Todo el conjunto de singularidades de la función de dispersión está representado en la figura 2.14. Los conjuntos de singularidades del sistema de dos grados de libertad forman el conjunto de singularidades del sistema de tres grados de libertad. Cada conjunto de singularidades del sistema de dos grados de libertad está formado por un conjunto de Cantor [16]. Al cambiar el valor de L_z la estructura de la maraña homoclínica del punto X_{L_z} cambia y el conjunto de singularidades también cambia. Por medio del conjunto de singularidades se puede conocer la estructura de la maraña formada por las variedades invariantes de X_{L_z} [17].

Veamos con detalle como obtenemos la relación entre la variedad estable $W^s(\mathcal{M})$ y la estructura del conjunto de singularidades. Consideremos un segmento de línea recta en el plano de parámetros de impacto con el mismo valor de L_z . Denotemos por l_{L_z} al segmento de línea recta, en la figura 2.14 tenemos algunos ejemplos; 8 segmentos de líneas azules con distintos valores de L_z . Cada segmento l_{L_z} está relacionado con el segmento de curva azul en las superficie Poincaré de las figuras 2.6 y 2.7 para ese valor de L_z . El segmento de curva azul $M(l_{L_z})$ es la primera intersección con el plano de Poincaré de las trayectorias con parámetro de impacto en la línea l_{L_z} . La intersección del segmento de curva $M(l_{L_z})$ con la variedad estable $W^s(X_{L_z})$ es un conjunto de Cantor que contiene la estructura de la maraña homoclínica. Esta es una consecuencia de la autosimilaridad de los tentáculos de la maraña homoclínica. Por tanto, el conjunto de singularidades en el plano de parámetros de impacto refleja la estructura de la maraña homoclínica del sistema de tres grados de libertad simétrico.

En el conjunto de singularidades del sistema de tres grados de libertad podemos distinguir tres tipos de regiones donde la función de dispersión es continua: La región exterior se extiende a infinito, regiones tipo disco y las regiones tipo anillo. Las regiones tipo disco sólo tienen una frontera y las regiones tipo anillo

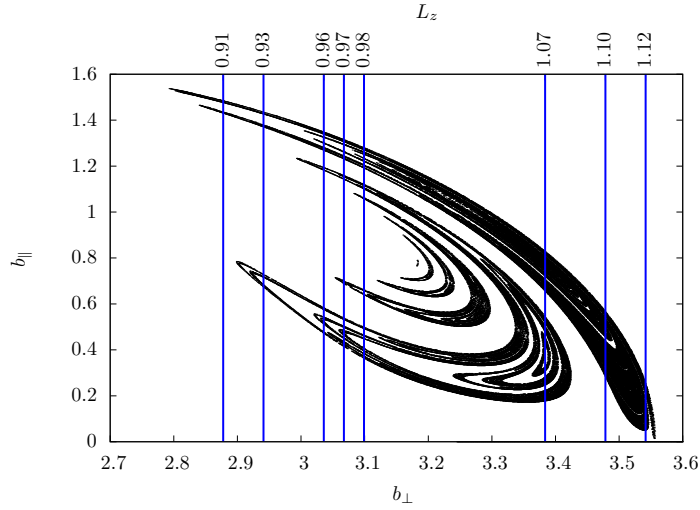


Figura 2.14: Fractal de singularidades de las funciones de dispersión en el plano de parámetros de impacto. Sólo graficamos la mitad del conjunto de singularidades; la otra mitad del conjunto de singularidades es la imagen especular respecto la coordenada b_{\parallel} .

tienen dos fronteras concéntricas; vea la figura 2.15.

2.7. Secciones de dispersión y cáusticas

En un experimento típico de dispersión las cantidades que se miden en el laboratorio son las secciones de dispersión. Existe una relación geométrica simple entre la sección de dispersión y su función de dispersión asociada. Veamos la relación entre la sección de dispersión y la función de dispersión con detalle. Consideremos un pequeño rectángulo infinitesimal en el plano de parámetros de impacto, el área del este rectángulo es $\Delta\sigma$. Supongamos que la función de dispersión en este rectángulo infinitesimal es invertible. La imagen del rectángulo bajo la función de dispersión es una región infinitesimal de ángulo sólido $\Delta\Omega$. La sección de dispersión del rectángulo infinitesimal es el número D tal que

$$\Delta\sigma = D\Delta\Omega.$$

En nuestro caso $D(\theta_f, \phi_f) = \frac{1}{|\det J|}$, donde J es la matriz jacobiana de la función de dispersión.

Las cáusticas, los máximos de la sección de dispersión están relacionadas con los puntos en el plano de parámetros de impacto donde la función de dispersión

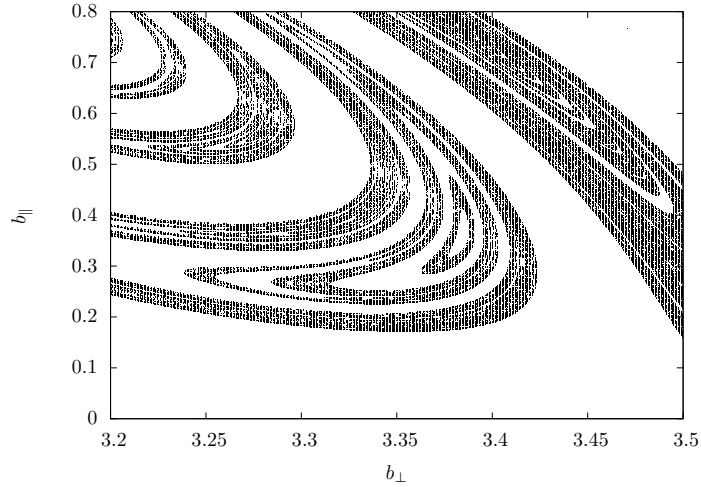


Figura 2.15: Regiones tipo disco y anillo. El disco está alrededor del punto $(b_{\perp} = 0.39, b_{\parallel} = 3.38)$. La frontera del disco está formada por una curva de singularidades de la función de dispersión. El anillo entre dos curvas concéntrica de singularidades de la función de dispersión.

no es invertible. Para ilustrar como se forman las cáusticas consideremos las secciones de dispersión de dos rectángulos en el plano de parámetros de impacto.

En un rectángulo la función de dispersión es invertible y el otro rectángulo la función de dispersión no es invertible en un segmento de línea que cruza el rectángulo, en la línea $\det J = 0$. La sección de dispersión del rectángulo donde la función de dispersión es invertible es un rectángulo deformado; ver figura 2.16.

La sección de dispersión del rectángulo que contiene a la línea donde $\det J = 0$ es un rectángulo deformado y doblado; ver figura 2.17. El doblado es una cáustica, el valor de la sección de dispersión es máximo. La región del rectángulo donde $\det J > 0$ tiene la misma orientación que su imagen mientras que la región del rectángulo donde $\det J < 0$ y su imagen tiene diferente orientación. El cambio de orientación genera el doblado del rectángulo deformado.

Finalmente, para construir la sección de dispersión en el punto (θ_f, ϕ_f) de una región arbitraria en el plano de parámetros de impacto, tenemos que sumar las contribuciones sobre todas las preimágenes de la función de dispersión que llegan al punto (θ_f, ϕ_f) . De esta manera podemos tomar en cuenta todos los dobleces que genera la función de dispersión.

Dos regiones interesantes en el plano de parámetros de impacto son las regiones de continuidad de tipo disco y anillo, de las que hablamos en la sección

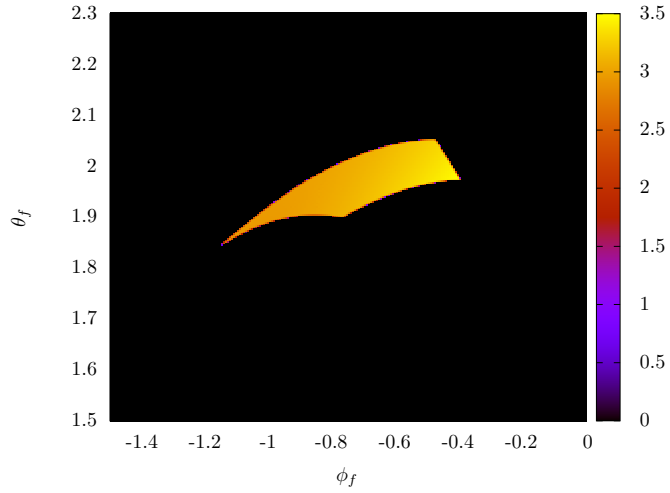


Figura 2.16: Sección de dispersión del rectángulo $b_{\perp} \in [3.4, 3.7]$, $b_{\parallel} \in [1.5, 2]$. Este rectángulo de condiciones iniciales no contiene ninguna curva con $\det J = 0$.

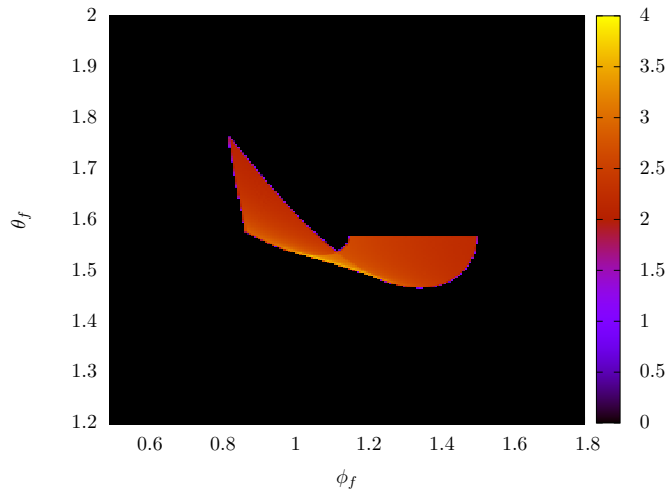


Figura 2.17: Sección de dispersión del rectángulo $b_{\perp} \in [2.5, 2.65]$, $b_{\parallel} \in [0, 0.4]$. Este rectángulo contiene una curva con $\det J = 0$.

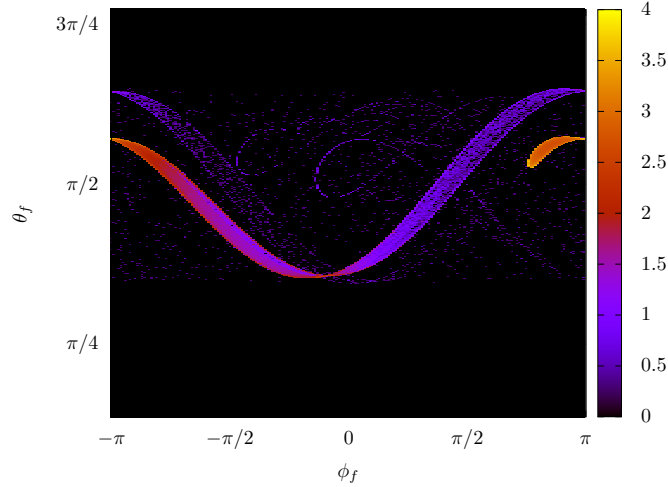


Figura 2.18: Sección de dispersión del disco alrededor de $b_{\perp} = 0.39$, $b_{\parallel} = 3.38$.

anterior. Las fronteras de ambas regiones están formadas por la intersección de las variedades estable $W^s(\mathcal{M})$ con el plano de parámetros de impacto para un valor fijo de momento inicial \vec{p}_i .

La sección de dispersión de la región tipo disco se muestra en la figura 2.18. En la sección de dispersión vemos la proyección de un tubo que oscila en la dirección θ_f de manera acotada mientras avanza en ϕ_f . Entre más vueltas completa el tubo en ϕ_f , menor es el valor de la sección de dispersión. Para entender la disminución en el valor de la sección observemos las propiedades de la función de dispersión cerca de la frontera del disco. Consideremos sólo un punto de la frontera del disco para ver con claridad; veamos nuevamente la gráfica 2.13(b). Cerca del extremo izquierdo de la gráfica tenemos un punto de la frontera del disco. Al acercarnos por la derecha a la singularidad, el ángulo ϕ_f aumenta cada vez más rápido; se completa una revolución en ϕ_f en un intervalo más pequeño. Por este motivo el valor de la sección de dispersión es menor al aumentar el ángulo ϕ_f . Podemos estimar el valor de la sección cerca de la singularidad los con el eigenvalor λ_{\perp} del punto X_{L_z} asociado para este valor de b_{\parallel} , como se describe en [35].

En el caso de la región tipo anillo, pasa algo muy similar al caso de la región tipo disco; ver figura 2.19. La frontera del anillo está formada por dos curvas cerradas concéntricas; los puntos cercanos a cada curva frontera del anillo forman un tubo similar al del caso del disco. Estos dos tubos se unen de una forma complicada con los puntos que provienen de la región que no cercana a las fronteras del anillo.

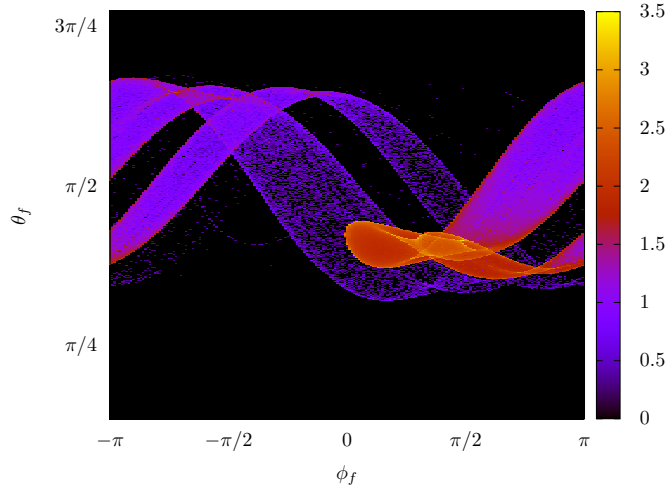


Figura 2.19: Sección de dispersión del anillo contenido el rectángulo $b_{\perp} \in [3.3, 3.4]$, $b_{\parallel} \in [0.3, 0.7]$.

Por ultimo, consideremos una gráfica de la sección de una región rectangular en el plano de parámetros de impacto que contiene a todas las singularidades de la función de dispersión; ver figura 2.20. La región con más partículas en la sección está formada por las partículas que casi no son desviadas por el campo magnético del dipolo. Las esquinas que se ven son las imágenes de las esquinas del rectángulo de condiciones iniciales en el plano de parámetros de impacto; también podemos ver la estructura de tubos que se enrollan en ϕ_f con θ_f acotado. La sección de dispersión es simétrica con respecto a la línea $\theta_f = \pi/2$. La simetría esta relacionada a la elección de las condiciones iniciales y a la simetría de las ecuaciones de movimiento $z \rightarrow -z$. Si esta simetría en las ecuaciones de movimiento se rompe entonces se romperá también la simetría de las cáusticas.

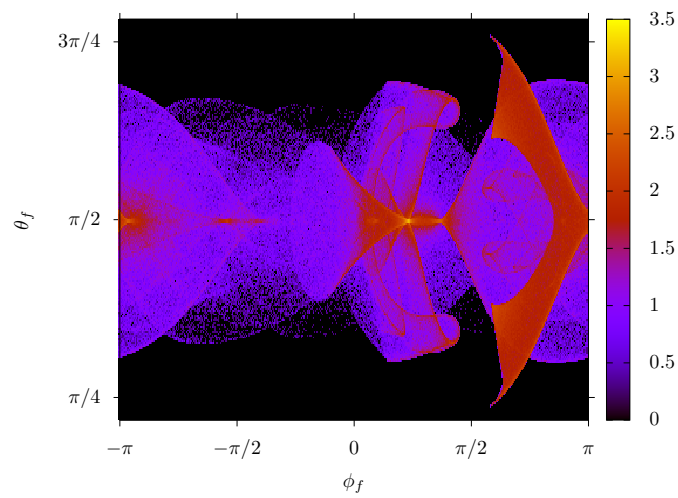


Figura 2.20: Sección de dispersión del rectángulo $b_{\perp} \in [2, 3.8]$, $b_{\parallel} \in [-2.25, 2.25]$. Este rectángulo contiene a todas las singularidades de la función de dispersión.

Capítulo 3

Caso no simétrico: El dipolo magnético perturbado

En este capítulo estudiamos la dispersión caótica y la dinámica en la NHIM al perturbar el sistema simétrico. Rompimos la simetría bajo rotaciones alrededor del eje Z del campo magnético, L_z deja de ser integral de movimiento. La perturbación que escogimos es un cuadrupolo magnético situado en el plano $z = 0$. La perturbación cuadrupolar es un ejemplo natural, ya que todo imán real tiene más de una componente multipolar.

Parte del estudio de la dinámica en la NHIM perturbada lo hicimos con la ideas que desarrollamos para el estudio de la dispersión caótica en un mapeo simpléctico de cuatro dimensiones con propiedades similares al mapeo de Poincaré de este sistema [36].

3.1. Dinámica en la NHIM perturbada

El potencial vector asociado al sistema perturbado es

$$\vec{A}_\epsilon = \vec{A}_{\text{dipolo}} + \epsilon \vec{A}_{\text{cuadrupolo}},$$

donde ϵ es la magnitud del cuadrupolo y el parámetro de la perturbación. El potencial del cuadrupolo que usamos en coordenadas cartesianas es

$$\vec{A}_{\text{cuadrupolo}} = 2 \frac{xy}{R^5} \hat{z}.$$

La función Hamiltoniana del sistema perturbado por el cuadrupolo magnético en coordenadas cilíndricas es

$$H_\epsilon = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \left(p_z - \epsilon \frac{\rho^2 \sin 2\phi}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{L_z}{\rho} - qM_z \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \right].$$

La superficie de Poincaré que utilizamos para analizar la dinámica en \mathcal{M}_ϵ es $z = 0$. Recordemos que la NHIM \mathcal{M} del sistema simétrico es una variedad con dos fronteras, una en $L_{z,\min}$ y otra en $L_{z,\max}$. Por tanto la intersección de la superficie de Poincaré con la NHIM no perturbada \mathcal{M} es una variedad con frontera de dimensión dos. Esta variedad de dimensión dos tiene una proyección uno a uno con un segmento del cilindro ($L_z, \phi, p_\rho = 0, \rho = 1$). Denotemos por \mathcal{M}_ϵ a la NHIM del sistema perturbado para el valor del parámetro de perturbación ϵ . Si la perturbación es lo suficientemente pequeña esta variedad bidimensional se deforma un poco, pero no forma pliegues, por lo tanto, se mantiene la proyección uno a uno con un segmento del cilindro. Por esta razón, utilizamos L_z y ϕ como coordenadas de la parametrización del mapeo de Poincaré de la NHIM perturbada \mathcal{M}_ϵ .

Con la ayuda del mapeo bidimensional, podemos visualizar cómo afecta la perturbación a la dinámica del grado de libertad asociado a la cantidad conservada del sistema simétrico. De esta manera, tenemos una idea de cómo se acoplan los tres grados de libertad al incrementar el valor del parámetro de perturbación ϵ . Como vimos en el capítulo anterior, el mapeo de Poincaré de \mathcal{M} restringido al cilindro es un mapeo que tuerce simpléctico. Al perturbar este mapeo tenemos un escenario similar al escenario de Chirikov. Con la diferencia de que en este sistema el mapeo tiene frontera.

La persistencia de \mathcal{M} está ligada a dos características de la dinámica de \mathcal{M} : El dominio de la dinámica normal a \mathcal{M} sobre la dinámica tangencial a \mathcal{M} y la persistencia de la mayoría de las curvas cerradas invariantes en el mapeo de Poincaré de \mathcal{M}_ϵ al perturbar el sistema garantizada por la teoría KAM. La persistencia de la mayoría de las curvas cerradas invariantes es fundamental: las curvas cerradas invariantes confinan la dinámica, evitando que las trayectorias caóticas salgan por la frontera.

La perturbación cuadrupolar es proporcional a la componente de Fourier sin 2ϕ . Al perturbar el sistema, la componente de Fourier genera dos islas estables de período dos y dos puntos hiperbólicos en el mapeo de Poincaré de la NHIM perturbada \mathcal{M}_ϵ ; ver la figura 2.10 del número de rotación como función de L_z del capítulo anterior. El valor del número de rotación $\nu = 1/2$ está en $L_z \approx 0.98$. Por lo tanto, los centros de estas islas estables de período dos aparecen en $L_z \approx 0.98$. Veamos la dinámica de \mathcal{M}_ϵ en el espacio de configuración en coordenadas cartesianas, consideremos la figura 3.1 del mapeo de Poincaré para el valor $\epsilon = 0.05$.

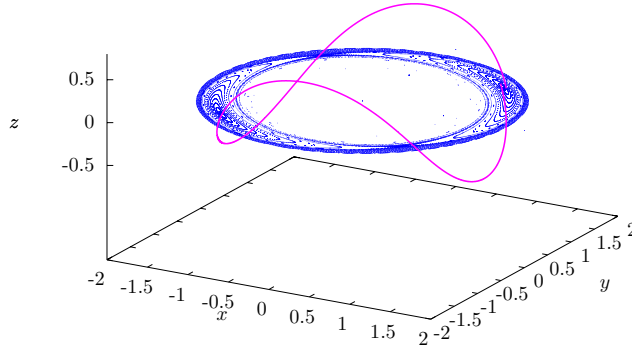


Figura 3.1: Intersecciones de las trayectorias de la NHIM \mathcal{M}_ϵ con el plano $z = 0$ en el espacio de configuración en coordenadas cartesianas para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.05$. Sólo tomamos en cuenta las intersecciones que tiene momento $p_z > 0$. La línea de color morado es un segmento de una trayectoria cuasiperiódica. Esta trayectoria esta cerca de la trayectoria periódica de período dos que pasa por el centro de las islas grandes con centros en $\phi = \pi/2$ y $\phi = -\pi/2$.

A continuación tenemos algunas gráficas del mapeo de Poincaré en el cilindro $L_z - \phi$ para distintos valores del parámetro de perturbación ϵ . En la siguiente sección, veremos el método que utilizamos para realizar el cálculo. Sólo graficamos el intervalo $\phi \in [-\pi/4, \pi/4]$ por las simetrías discretas del mapeo inducidas por la perturbación. Para obtener los mapeos de Poincaré en todo el intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$ sólo hay que reflejar las gráfica respecto a la línea $\phi = \pi/4$ y después completar utilizando que el mapeo tiene período π . En las siguientes figuras, los puntos verdes son los puntos con los que iniciamos el cálculo, los puntos azules son las iteraciones del mapeo de los puntos verdes, los puntos rojos son las últimas iteraciones que pudimos estabilizar cerca de \mathcal{M}_ϵ y los puntos negros son las iteraciones de los puntos rojos. Los puntos negros ya están fuera de \mathcal{M}_ϵ . Los últimos puntos que logramos estabilizar en una vecindad de \mathcal{M}_ϵ están la zona de menor L_z de \mathcal{M}_ϵ ; ver figura 3.2. Las condiciones iniciales las tomamos en las líneas $\phi = -\pi/4$ y $\phi = \pi/4$. En la próxima sección explicaremos el método que utilizamos para calcular el mapeo de Poincaré. Sólo tomamos estas condiciones iniciales para no sobrecargar las figuras y hacer el cálculo numérico más simple. La estructura de las gráficas de las coordenadas ρ y p_ρ la podemos ver en las figuras 3.6 y 3.5. En estas figuras utilizamos el valor $\epsilon = 0.12$.

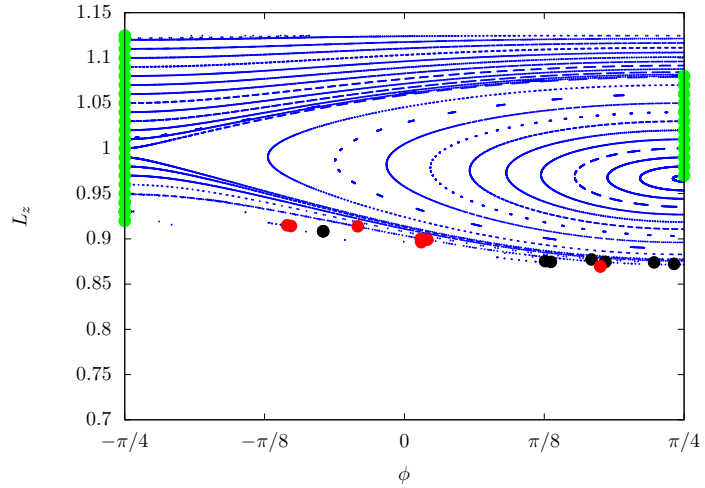


Figura 3.2: Proyección del mapeo de Poincaré en el cilindro $L_z-\phi$ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.05$. Los puntos verdes son los puntos iniciales. Los puntos azules son las iteraciones que logramos estabilizar. Los puntos rojos son las últimas iteraciones que logramos estabilizar en una vecindad de \mathcal{M}_ϵ . Los puntos negros son las iteraciones de los punto rojos.

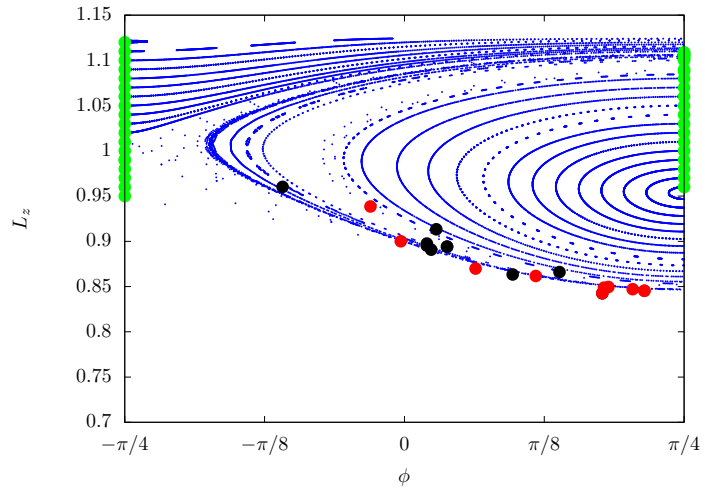


Figura 3.3: Proyección del mapeo de Poincaré en el cilindro $L_z-\phi$ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.1$.

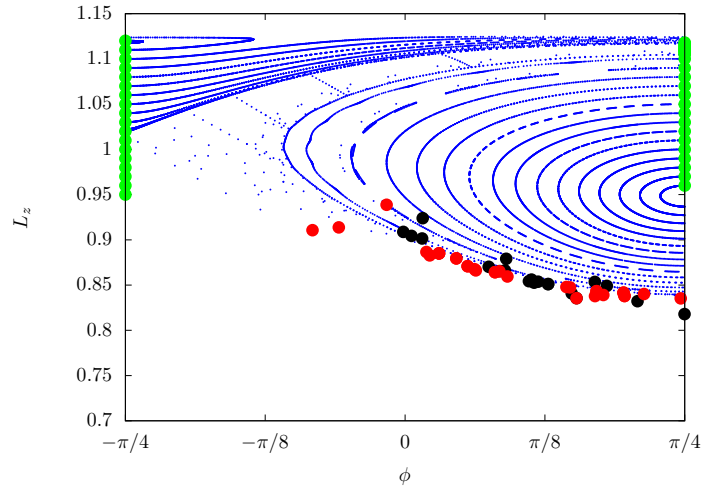


Figura 3.4: Proyección del mapeo de Poincaré en el cilindro L_z - ϕ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.12$.

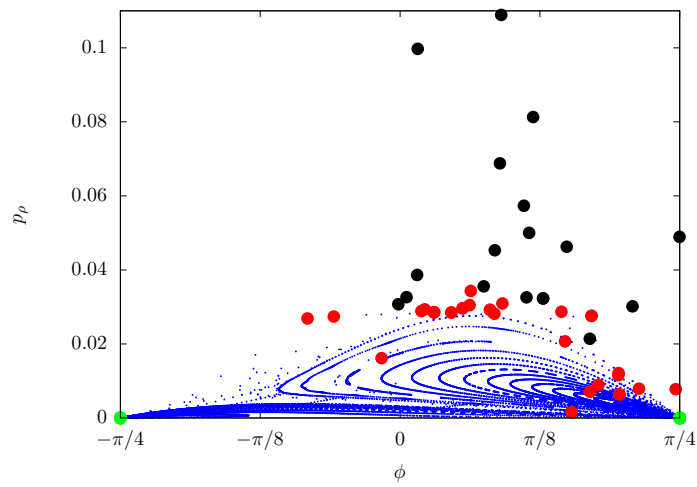


Figura 3.5: Proyección del mapeo de Poincaré en p_ρ - ϕ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.12$. Todos los puntos verdes están en $p_\rho = 0$. Los puntos negros están lejos de \mathcal{M}_ϵ .

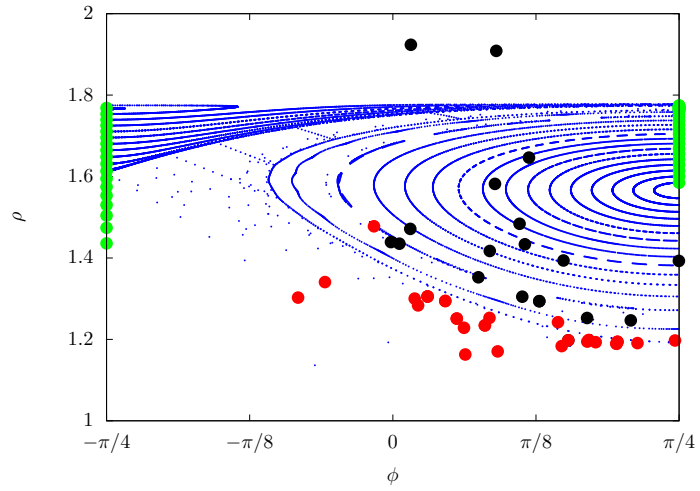


Figura 3.6: Proyección del mapeo de Poincaré en ρ - ϕ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.12$. Aquí vemos que los puntos negros están lejos de \mathcal{M}_ϵ .

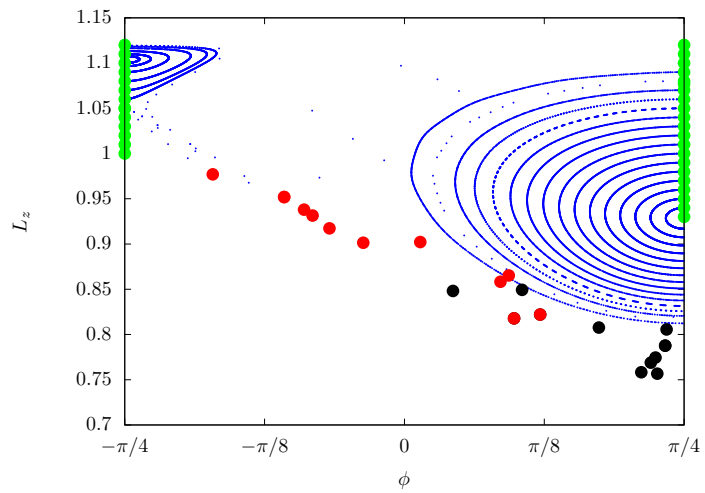


Figura 3.7: Proyección del mapeo de Poincaré en el cilindro L_z - ϕ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.2$.

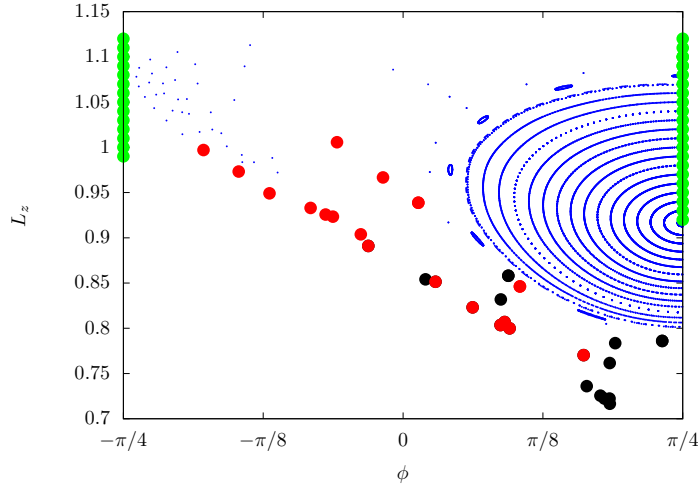


Figura 3.8: Proyección del mapeo de Poincaré en el cilindro L_z - ϕ para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.25$.

Consideremos el valor de la perturbación $\epsilon = 0.05$; ver la figura 3.2. Alrededor de las islas de período dos asociadas a $\nu = 1/2$, hay dos franjas de curvas cerradas invariantes que rodean a dos islas grandes. Las curvas que forman las franjas se acercan en los dos puntos hiperbólicos de período dos X_h . Recordemos que las trayectorias cuasiperiódicas $\Gamma_{L_z, \min, \phi_0}$ forman una de las fronteras de \mathcal{M} . La frontera con menor L_z no es robusta bajo perturbaciones. Al incrementar el valor de ϵ la frontera alrededor de $L_{z, \min}$ se disuelve. Esto se debe a que el eigenvalor $\lambda_{\perp}(X_{L_z, \min}) = 1$. Justo en el valor $L_{z, \min}$ se deja de cumplir que la dinámica normal a \mathcal{M} domina a la dinámica tangencial \mathcal{M} ; ver la figura 2.11. También vemos otras dos islas estables pequeñas cerca del valor $L_{z, \max}$ en $\phi = 3\pi/4$ y $\phi = -\pi/4$. Estas dos islas estables también están asociadas a la simetría de la perturbación. Al romper la simetría bajo rotaciones la trayectoria circular $\Gamma_{L_z, \max}$ se bifurca con la misma simetría discreta que la simetría de la perturbación cuadrupolar y se generan los dos puntos elípticos de período dos. Los puntos elípticos asociados a esta trayectoria periódica están en el centro de las islas pequeñas en la región de mayor L_z .

Para el valor $\epsilon = 0.1$, las cuatro islas estables de período dos son más grandes; ver figura 3.3. Cerca de la frontera con L_z menor, la franja de curvas cerradas invariantes ya no existe. Hay una brecha angosta entre las islas grandes y la franja de curvas cerradas invariantes con mayor L_z . Las iteraciones de puntos que inician en la brecha permanecen alrededor de las islas grandes por algunas iteraciones y después escapan lejos de \mathcal{M}_{ϵ} por la región con menor L_z . En el

interior de la isla grande también hay una franja de caos transitorio donde las trayectorias no se pueden estabilizar por muchas iteraciones. Las condiciones iniciales alrededor del valor $L_z = 1.09$ permanecen unas iteraciones en la región acotada, pero después escapan. Por ejemplo, consideremos el punto inicial verde dentro de la franja con $L_z = 1.09$ inicial. La última iteración de este punto verde es el punto rojo dentro de la franja de caos transitorio.

Al aumentar el valor de ϵ más curvas cerradas invariantes se rompen y la franja de caos transitorio se conecta con la franja que conecta a la islas grandes con las chicas.

Para el valor $\epsilon = 0.12$, la brecha entre las islas grandes y la franja de curvas cerradas invariantes con mayor L_z es aun más grande; ver la figura 3.4.

Para el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 0.2$, ver la figura 3.7, han desaparecido la franja de curvas cerradas invariantes de mayor L_z . Sólo quedan las cuatro islas de período dos. Los puntos entre las cuatro islas también escapan por la región de menor L_z . Las iteraciones de los últimos puntos que pudimos estabilizar también están en la región de menor L_z .

Para el valor $\epsilon = 0.25$, ver la figura 3.8, las islas pequeñas de período dos con centros en $\phi = 3\pi/4$ y $\phi = -\pi/4$ han desaparecido y sólo queda las islas grandes de período dos con centros en $\phi = 3\pi/4$ y $\phi = -\pi/4$. Estas islas de período dos están rodeadas por cadenas de islas secundarias. Los puntos fuera de las islas sólo se pueden estabilizar por unas cuantas iteraciones. Las iteraciones de los últimos puntos que pudimos estabilizar también se concentran en la región de menor L_z .

Consideremos el punto hiperbólico de período dos X_h del mapeo de Poincaré en la línea $\phi = -\pi/4$; ver figura 3.2. Por ser un mapeo simpléctico, sólo mostramos un eigenvalor normal a \mathcal{M}_ϵ y un eigenvalor tangente a \mathcal{M}_ϵ para describir el comportamiento de los eigenvalores de X_h al perturbar el sistema. En la figura 3.9, mostramos los eigenvalores del punto hiperbólico X_h como función de ϵ . Los eigenvalores tangente y normal a la NHIM perturbada \mathcal{M}_ϵ son $\lambda_{\parallel}(X_h)$ y $\lambda_{\perp}(X_h)$ respectivamente. En todo el intervalo donde X_h existe, el eigenvalor $\lambda_{\parallel}(X_h) > 1$. El eigenvalor siempre es menor que el eigenvalor normal $\lambda_{\perp}(X_h)$. Por este motivo, la NHIM perturbada \mathcal{M}_ϵ no se forma un pico en el punto hiperbólico X_h como el pico que se forma en el ejemplo del trabajo [36]. Para $\epsilon \approx 0.228$ el punto hiperbólico X_h colisiona con el punto elíptico de la isla pequeña. En ese momento la isla pequeña desaparece.

3.2. Algoritmo para calcular la aproximación a la NHIM

Las trayectorias cercanas a \mathcal{M}_ϵ tienen un comportamiento parecido a las trayectorias que forman \mathcal{M}_ϵ por un intervalo finito de tiempo. Después de este

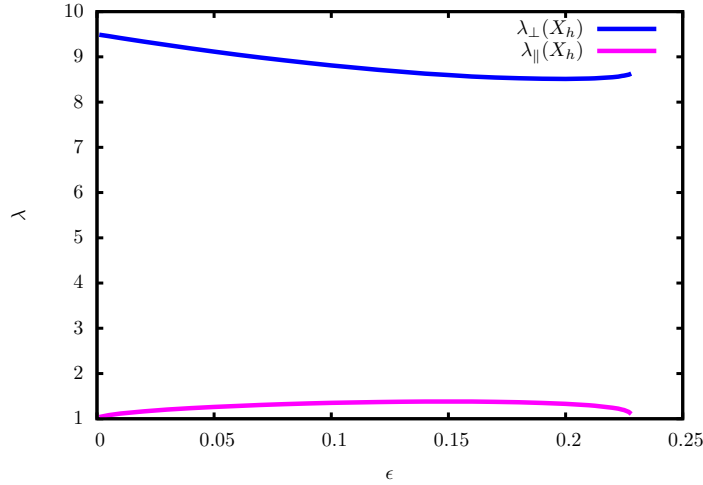


Figura 3.9: Eigenvalor normal $\lambda_{\perp}(X_h)$ y eigenvalor tangencial $\lambda_{\parallel}(X_h)$ del punto hiperbólico de período dos X_h del mapeo de Poincaré en función del parámetro de perturbación ϵ . El eigenvalor normal $\lambda_{\perp}(X_h)$ siempre es mayor al eigenvalor tangencial $\lambda_{\parallel}(X_h)$.

intervalo de tiempo las trayectorias que estaban cerca de \mathcal{M}_{ϵ} se alejan de \mathcal{M}_{ϵ} siguiendo a la variedad inestable $W^u(\mathcal{M}_{\epsilon})$. El comportamiento de las trayectorias cercanas a \mathcal{M}_{ϵ} se debe a la hiperbolicidad normal de la \mathcal{M}_{ϵ} .

El método con el que calculamos una aproximación a \mathcal{M}_{ϵ} es un método simple que compensa la divergencia de las trayectorias cercanas a \mathcal{M}_{ϵ} . Este método es una variante del control de caos. El control de caos es un método que nos permite encontrar una aproximación a una trayectoria periódica inestable con la ayuda de la variedad estable de la trayectoria periódica [37, 38].

Nuestro método está inspirado en la misma idea. El método aprovecha que la maraña formada por $W^s(\mathcal{M}_{\epsilon})$ y $W^u(\mathcal{M}_{\epsilon})$ divide la variedad de energía constante y la dinámica generada por la maraña que forman $W^s(\mathcal{M}_{\epsilon})$ y $W^u(\mathcal{M}_{\epsilon})$.

Para explicar la esencia del método, consideremos uno de los mapeos bidimensional de Poincaré que estudiamos en el capítulo anterior. Tomemos un punto inicial X_0 cerca del punto hiperbólico X_{L_z} en la región del plano donde no hay lóbulos de la maraña homoclínica, la región en forma de cuña en la figura 3.10. Después, aplicamos el mapeo de Poincaré al punto X_0 y obtenemos un punto auxiliar X_{1a} . El punto X_{1a} también está cerca del punto hiperbólico X_{L_z} . Finalmente, disminuimos el valor de la coordenada p_r del punto X_{1a} hasta encontrar un punto X_1 muy cercano a la variedad estable $W^s(X_{L_z})$ en la misma región sin lóbulos de la maraña homoclínica. El punto X_1 es la iteración estabi-

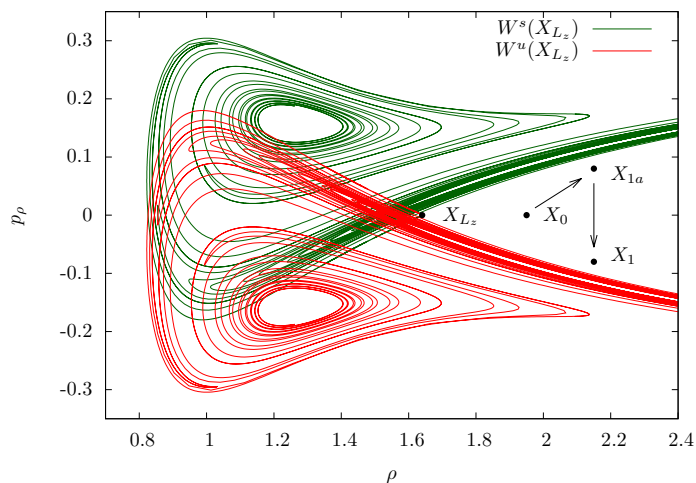


Figura 3.10: Método de estabilización de las iteraciones del mapeo para el cálculo de la NHIM. El método consta de tres pasos: Primero, tomamos un punto X_0 muy cerca de X_{L_z} en la región sin lóbulos de $W^s(X_{L_z})$. Segundo, aplicamos el mapeo de Poincaré al punto X_0 y obtenemos el punto auxiliar X_{1a} . Tercero, disminuimos la coordenada p_ρ del punto X_{1a} hasta encontrar un punto X_1 muy cercano a $W^s(X_{L_z})$; el punto X_1 es la iteración estabilizada del punto X_0 .

lizada del punto X_0 . Para calcular el siguiente punto X_2 del mapeo estabilizado sólo aplicamos el algoritmo anterior al punto X_1 .

La generalización del método para el sistema de tres grados de libertad es simple: tan sólo tenemos que agregar las coordenadas L_z y ϕ para tener el mapeo de Poincaré del sistema de tres grados de libertad y considerar los objetos invariantes en el dominio del mapeo de cuatro dimensiones. En este caso, el punto inicial X_0 es un punto en la superficie de Poincaré $z = 0$ cercano a \mathcal{M}_ϵ en la región donde no hay lóbulos. Aplicamos el mapeo de Poincaré al punto X_0 y obtenemos el punto auxiliar X_{1a} . Finalmente, disminuimos el valor de la coordenada p_r del punto X_{1a} , hasta encontrar un punto X_1 muy cercano a la variedad estable $W^s(\mathcal{M}_\epsilon)$.

En nuestro algoritmo necesitamos un criterio que nos indique si un punto del mapeo de Poincaré está a la región sin lóbulos de la maraña. El criterio que utilizamos está basado en una propiedad de las trayectorias que forman la NHIM \mathcal{M} del sistema no perturbado. Para las trayectorias que forman a \mathcal{M} la coordenada $\phi(t)$ es creciente siempre¹. Esta propiedad está ligada a la

¹Otro criterio que probamos para caracterizar a las trayectorias dentro de la cuña sin lóbulos está basado en el valor mínimo $\rho_{\mathcal{M},\min}$ de \mathcal{M} en un intervalo pequeño de L_z . Consideremos

trayectoria circular $\Gamma_{L_z, \min, \phi_0}$ y a la continuidad de las soluciones del sistema al variar L_z . Las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} son la continuación cilíndrica de la trayectoria periódica $\Gamma_{L_z, \max, \phi_0}$. Dicho de otra manera, la trayectoria $\Gamma_{L_z, \max, \phi_0}$ arrastra a las trayectorias Γ_{L_z, ϕ_0} de mayor L_z de manera que también estas trayectorias tienen $\phi(t)$ creciente. Para un ϵ lo suficientemente pequeño, las trayectorias que forman a \mathcal{M}^ϵ también tienen $\phi(t)$ creciente. Las trayectorias que están en la región donde no hay lóbulos también tienen $\phi(t)$ creciente siempre, mientras que las trayectorias que están en la región donde están los lóbulos y disminuye su coordenada $\phi(t)$ en algún valor de t y se alejan de \mathcal{M} .

Además del criterio, necesitamos un punto inicial cercano a \mathcal{M}_ϵ para empezar el cálculo del mapeo de Poincaré. La forma de la perturbación que utilizamos hace que el mapeo de Poincaré restringido a la NHIM \mathcal{M}^ϵ sea antisimétrico con respecto a p_r ; ver la figura 3.5. Por lo tanto, en las líneas $\phi = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$ el mapeo de Poincaré restringido a \mathcal{M}_ϵ tiene $p_r = 0$. Si tomamos un valor inicial de L_z en un intervalo que contenga a \mathcal{M}_ϵ sólo tenemos que buscar la coordenada r del punto inicial con la ayuda del criterio de selección de puntos.

3.3. Singularidades de las funciones de dispersión

Ahora veamos que pasa con el conjunto de singularidades de la función de dispersión cuando perturbamos el sistema y rompemos la simetría bajo rotaciones alrededor del eje Z . En las siguientes figuras mostramos el conjunto de singularidades de la función de dispersión para distintos valores del parámetro de perturbación ϵ . La perturbación rompe la simetría del conjunto de singularidades respecto al eje b_\perp , por lo cual, graficamos todo el conjunto de singularidades, no sólo la mitad como hicimos en la figura 2.14 del capítulo anterior.

Al perturbar el sistema las variedades invariantes de \mathcal{M} se deforman pero la estructura de la maraña formada por $W^s(\mathcal{M}_\epsilon)$ y $W^u(\mathcal{M}_\epsilon)$ no cambia mucho, por tanto, el conjunto de singularidades tiene una estructura similar a la estructura del caso simétrico cuando aumentamos un poco el valor de ϵ ; ver figuras 3.11 y 3.12.

La estructura del conjunto de singularidades tiene cambios apreciables alrededor de $\epsilon = 0.12$, donde dos partes del conjunto de singularidades se juntan alrededor del punto $b_\perp = 3.4$, $b_\parallel = -0.4$; ver figuras 3.13 y 3.14. Alrededor este

la intersecciones homoclínicas de menor valor de $\rho_{\min, \text{hom}}$ en la línea $p_\rho = 0$ para el mismo intervalo de L_z ; ver la figura ???. En dicho intervalo la coordenada ρ del punto fijo X_{L_z} no es menor que valor de $\rho_{\min, \text{hom}}$. Las trayectorias que tuvieran $\rho_{\min} > \rho_{\mathcal{M}, \min}$ están en la cuña; las trayectorias que están en la zona de los lóbulos tienen un $\rho_{\min} < \rho_{\mathcal{M}, \min}$. Las trayectoria en la cuña nunca no entran a los lóbulos de la maraña ni tienen que rodear a la maraña, ver figuras 3.10 y 2.5. Los resultados con ambos criterios son similares.

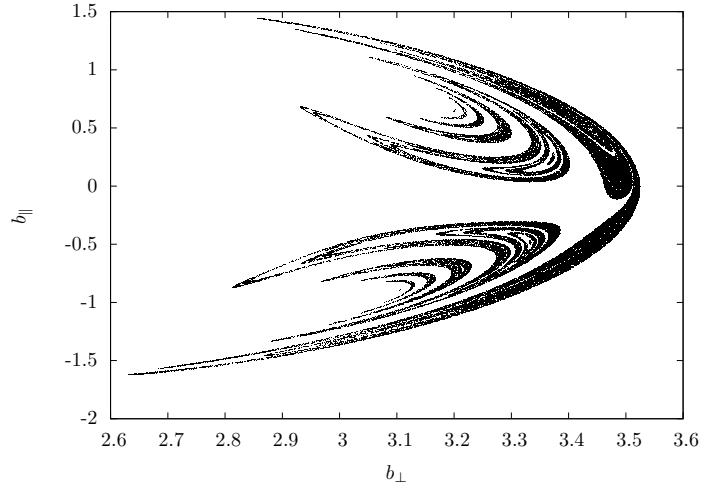


Figura 3.11: Conjunto de singularidades de las funciones de dispersión para $\epsilon = 0.05$. La simetría del conjunto de singularidades respecto al eje b_{\perp} se ha perdido pero su estructura es similar al caso simétrico.

punto se forman dos franjas de singularidades. Las franjas de singularidades están alrededor de las dos partes del conjunto de singularidades que estaban separadas para $\epsilon = 0.1$.

El cambio en la estructura del conjunto de singularidades nos indica que la estructura de la maraña formada por $W^s(\mathcal{M}_{\epsilon})$ y $W^u(\mathcal{M}_{\epsilon})$ es diferente al caso simétrico. Para los valores de $\epsilon = 0.2, 0.25$ las gráficas del conjunto de singularidades son muy parecidas a la gráfica para $\epsilon = 0.12$.

3.4. Secciones de dispersión y cáusticas

Ahora veamos que pasa con las sección dispersión al perturbar el sistema. La NHIM \mathcal{M}_{ϵ} del sistema perturbado también está formada por trayectorias que tienen $\phi(t)$ creciente y $\theta(t)$ acotada. Las trayectorias que están cerca de $W^s(\mathcal{M}_{\epsilon})$ tienen un comportamiento parecido a las trayectorias que forman a \mathcal{M}_{ϵ} por un intervalo de tiempo. Por lo tanto la sección de dispersión de las regiones cercanas al conjunto de singularidades de la función de dispersión también está formada por tubos que avanzan en ϕ_f y oscilan en θ_f de manera acotada.

A continuación tenemos unas gráficas de las secciones de dispersión para distintos valores del parámetro de perturbación, $\epsilon = 0.05, 0.1$ y 0.12 . Las regiones del plano de parámetros de impacto que utilizamos para construir estas secciones de dispersión son los rectángulo de las figuras 3.11, 3.12 y 3.13.

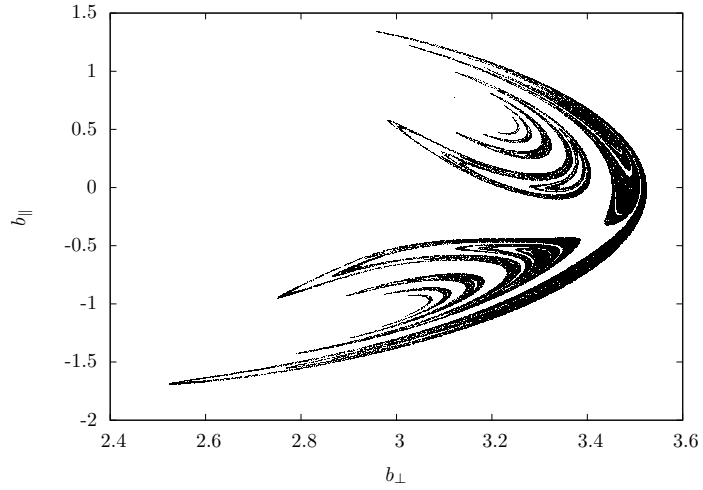


Figura 3.12: Conjunto de singularidades de las funciones de dispersión para $\epsilon = 0.1$. El conjunto de singularidades se deforma más y dos partes del conjunto se acercan alrededor del punto $b_{\perp} = 3.4$, $b_{\parallel} = -0.45$.

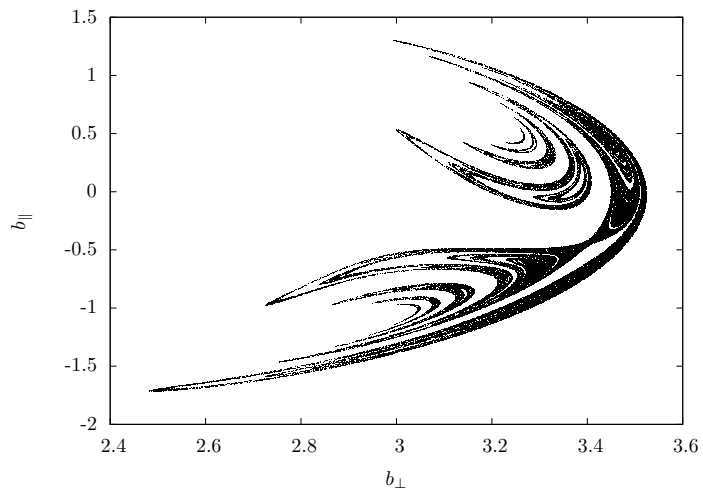


Figura 3.13: Conjunto de singularidades de las funciones de dispersión para $\epsilon = 0.12$. Dos partes del conjunto de singularidades se juntan alrededor del punto $b_{\perp} = 3.4$, $b_{\parallel} = -0.45$.

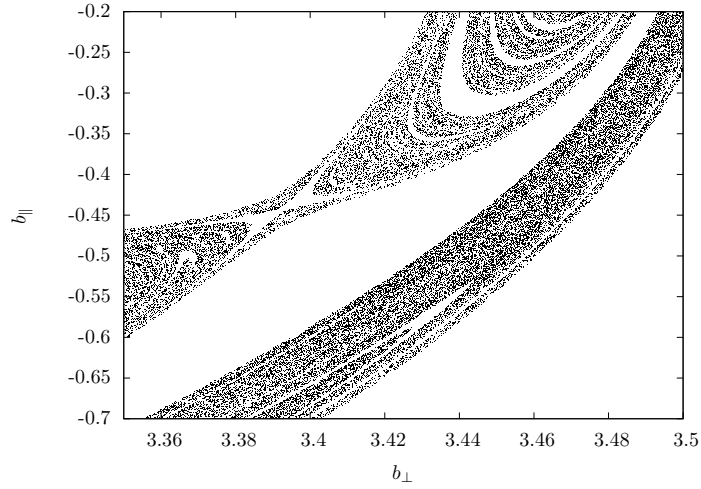


Figura 3.14: Acercamiento del conjunto de singularidades de las funciones de dispersión alrededor del punto $b_{\perp} = 3.45$, $b_{\parallel} = -0.4$ de la gráfica anterior. Dos partes grandes del conjunto de singularidades se juntan.

Al comparar las secciones del caso perturbado con el caso simétrico vemos que la simetría respecto a la línea $\theta_f = \pi/2$ se ha perdido. La ruptura de la simetría hace que la estructura de algunas cáusticas cambie, este es un fenómeno común cuando rompemos la simetría de un sistema. Por ejemplo, en la figura 2.20 para el caso simétrico hay un máximo cercano a $(\theta_f = \pi/2, \phi = \pi/4)$ donde las cáusticas convergen a un punto donde el valor de la sección tiene un máximo, para el caso perturbado las cáusticas dejan de converger a ese punto y se genera otra estructura. Los estos cambios se notan más al incrementar el valor de ϵ .

Unas cáusticas que no están formadas por esta simetría son las cáusticas cerca del punto $(\theta_f = 3\pi/8, \phi = \pi/4)$. Al perturbar el sistema estas cáusticas mantienen su estructura.

Las gráficas de las secciones de dispersión para los valores de $\epsilon = 0.2, 0.25$ se ven muy parecidas a la gráfica para $\epsilon = 0.12$.

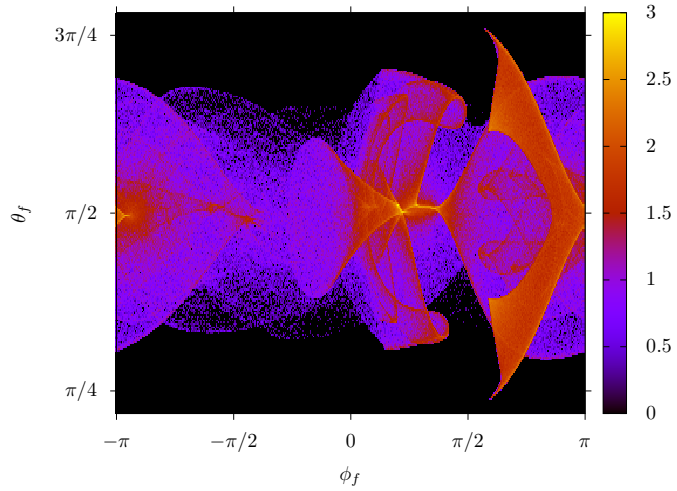


Figura 3.15: Sección de dispersión para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.05$. La simetría de la sección de dispersión respecto a la línea θ_f se ha perdido. La estructura de algunas cáusticas es diferente de estructura de las cáusticas del caso simétrico.

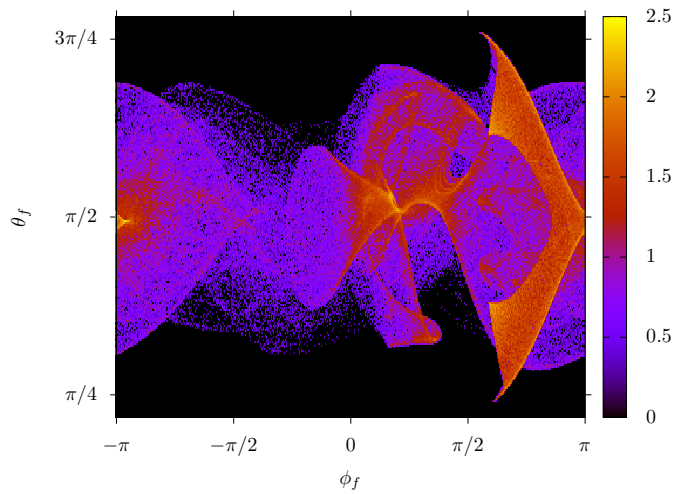


Figura 3.16: Sección de dispersión para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.1$.

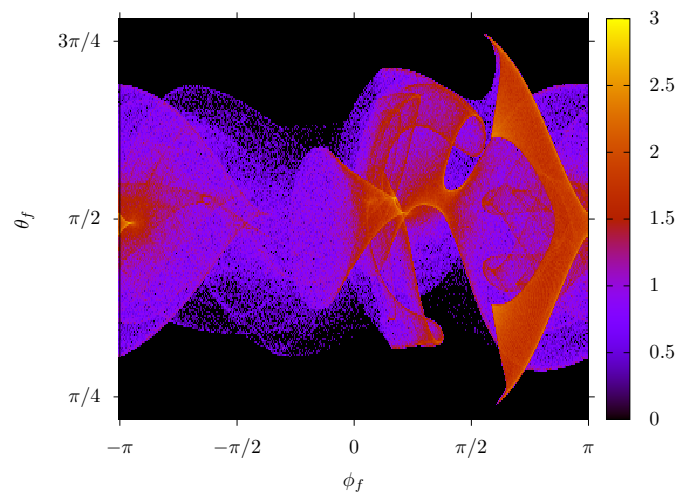


Figura 3.17: Sección de dispersión para el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.12$.

Conclusiones y comentarios finales

Estudiamos la dispersión caótica de una carga eléctrica por un dipolo magnético perturbado. El sistema no perturbado es un sistema Hamiltoniano de tres grados de libertad abiertos semintegrable con una NHIM. En este trabajo desarrollado las ideas básicas para el estudio de la dispersión caótica este tipo de sistemas.

Para realizar el estudio del sistema perturbado, primero estudiamos el sistema no perturbado. El sistema no perturbado es un sistema simétrico bajo rotaciones alrededor del eje definido por el dipolo, la cantidad conservada asociada es la componente L_z del momento angular. La cantidad conservada L_z nos permite separar al sistema de tres grados de libertad en un sistema de dos grados de libertad y un sistema de un grado de libertad. Para cada valor de L_z entre $L_{z,\min}$ y $L_{z,\max}$ el punto silla del potencial efectivo del sistema de dos grados de libertad genera una trayectoria periódica hiperbólica. Para el valor $L_{z,\max}$ el punto silla del potencial efectivo tiene el mismo valor que la energía y se genera un punto fijo hiperbólico. Al disminuir el valor de L_z el valor del potencial efectivo en el punto silla disminuye y se genera una trayectoria periódica hiperbólica. En $L_{z,\min}$ la trayectoria periódica desaparece en una bifurcación silla-centro. Las variedades invariantes de las trayectorias periódicas hiperbólicas dirigen la dispersión en el sistema de dos grados de libertad.

La NHIM del sistema de tres grados de libertad no perturbado está formada por la unión del conjunto de trayectorias hiperbólicas del sistema de dos grados de libertad parametrizadas por L_z producto cartesiano con el círculo unitario S^1 que representa al ángulo ϕ . El ángulo ϕ es la coordenada canónica conjugada a L_z . La NHIM del sistema simétrico es una variedad de tres dimensiones con dos fronteras: una frontera tiene $L_{z,\max}$ y la otra frontera tiene $L_{z,\min}$. La manera en la que construimos a la NHIM es típica en los sistemas semintegrables de tres grados de libertad.

La dinámica en la NHIM no perturbada es similar a la dinámica de un sistema de dos grados de libertad integrable. El mapeo de Poincaré restringido a un segmento del cilindro $L_z-\phi$ es un mapeo que tuerce simpléctico de dimensión

dos. El segmento de cilindro está formado por curvas cerradas invariantes con número de rotación alrededor de $\nu = 1/2$.

Al perturbar el sistema simétrico se pierde se acoplan los tres grados de libertad. Con la ayuda del mapeo restringido al segmento de cilindro vemos como se acopla la dinámica de los tres grados de libertad en la NHIM. El escenario en el mapeo es similar al escenario de Chirikov. La existencia de una franja de curvas cerradas invariantes en la vecindad de las fronteras y su persistencia bajo perturbaciones nos garantiza la persistencia de la NHIM donde la dinámica linealizada en las direcciones normales a la NHIM domina a la dinámica linealizada en las direcciones tangente a la NHIM. Las curvas cerradas invariantes contienen a las demás trayectorias y evitan que crucen la frontera de la NHIM.

Encontramos que la frontera con $L_{z,\max}$ es persistente bajo perturbaciones; mientras que la frontera con $L_{z,\min}$ no es persistente bajo perturbaciones. Este comportamiento se debe a dos propiedades importantes de la dinámica alrededor de la NHIM: la relación entre la dinámica linealizada en las direcciones tangentes a la NHIM con la dinámica linealizada en las direcciones normales a la NHIM en las fronteras y la estructura de la dinámica en la NHIM cerca de las fronteras. En la frontera persistente la dinámica linealizada en las direcciones normales domina a la dinámica linealizada en las direcciones tangentes; mientras que en la frontera no persistente no se cumple esta condición.

Para el caso particular de la perturbación cuadrupolar aparecen dos islas grandes de período dos cerca de $L_z = 0.95$ y dos islas pequeñas de período dos cerca de la frontera con L_z mayor en el mapeo de Poincaré. Al aumentar el valor del parámetro de perturbación la franja de curvas cerradas invariantes de menor L_z desaparece y las islas grandes de período dos se separan de la franja superior de curvas cerradas invariantes. Las trayectorias entre ambas partes escapan a infinito por la región donde antes exista una franja de curvas cerradas invariantes de L_z menor.

En un sistema de más grados de libertad semintegrable con una NHIM de más de tres dimensiones con frontera, la NHIM no sería tan persistente como la NHIM de tres dimensiones en el sistema de tres grados de libertad que estudiamos. En un sistema de más dimensiones, las hipersuperficies formadas por las cantidades conservadas no son barreras que aíslen a las trayectorias al perturbar. Las hipersuperficies no tendrían la dimensión suficiente para contener a las trayectorias dentro de la NHIM. Habría difusión de Arnold y una parte de las trayectorias cruzarían la frontera.

En el sistema que estudiamos, las variedades invariantes de la NHIM dividen el conjunto de nivel de la energía. Las variedades invariantes dirigen la dispersión de manera análoga a las variedades invariantes de la órbitas periódica hiperbólicas en los sistemas de dos grados de libertad. Las variedades invariantes estable e inestable de la NHIM forman tubos; una trayectoria dentro de un tubo per-

manecerá siempre en el mismo tubo.

Las variedades invariantes de la NHIM también son robustas bajo perturbaciones suficientemente pequeñas. Las intersecciones de la variedad estable con el plano de parámetros de impacto forman el conjunto de singularidades de la función de dispersión para un valor fijo de momento inicial. Por lo tanto, el conjunto de singularidades de las funciones de dispersión es tan robusto bajo perturbaciones como el desarrollo de la maraña homoclínica.

Una pregunta que queda abierta es sobre la relación entre las singularidades de la función de dispersión y la estructura de la NHIM. No encontramos una relación simple entre los cambios del conjunto de singularidades de la función de dispersión y cambios en la estructura de la NHIM al variar el parámetro de perturbación. Para tener una respuesta más clara es necesario analizar las bifurcaciones de la NHIM y conexiones heteroclínicas entre los distintos trozos.

Encontramos la estructura básica de la sección de dispersión del sistema. La estructura de la sección de dispersión está formada por tubos que se enrollan en ϕ_f y están acotados en θ_f . Concluimos que la forma de la sección de dispersión se debe al comportamiento de las trayectorias cercanas a la variedad estable de la NHIM y la forma del conjunto de singularidades de las funciones de dispersión. Al perturbar el sistema, la sección de dispersión tiene cambios en las cústicas pero sigue estando formada por tubos. Este hecho es consecuencia de la persistencia bajo perturbaciones de las variedades estable e inestable de la NHIM.

Apéndice I

Aquí están los conceptos de la teoría de sistemas dinámicos que aparecen en la tesis. Es recomendable ver una introducción intuitiva a los conceptos en [28, 39]. En esos libros, se encuentra el origen de los conceptos y ejemplos sencillos. Las definiciones que aparecen a continuación las tomamos de los libros [13, 40]. Se pueden ver más detalles sobre estas definiciones en los mismos libros.

Conceptos básicos sobre la teoría de sistemas dinámicos y variedades diferenciales

Variedad diferenciable. Un conjunto \mathcal{M} con una colección de mapeos $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{M}$, donde cada U_α es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m es una variedad diferenciable de dimensión m si se cumplen las siguientes condiciones:

- cada función $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \psi_\alpha(U_\alpha)$ es inyectiva.
- si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces existe una función diferenciable

$$\nu_{\alpha\beta} : \psi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \psi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

tal que $\psi_\alpha \circ \nu_{\alpha\beta}$.

- $\bigcup_\alpha \psi_\alpha(U_\alpha) = \mathcal{M}$.

Subvariedad diferenciable. Un subconjunto \mathcal{N} de \mathcal{M} es una subvariedad diferenciable de dimensión n si existe una colección de parametrizaciones locales de \mathcal{M} tales que dan la estructura diferenciable en \mathcal{M} y para cada punto p en \mathcal{N} una parametrización $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ con p en V_α y $\psi_\alpha((\mathbb{R}^n \times 0) \cap U_\alpha) = \mathcal{N} \cap V_\alpha$. Aquí $\mathbb{R}^n \times 0$ es el conjunto de puntos en \mathbb{R}^m con las últimas $m - n$ coordenadas iguales a 0. Las restricciones $\psi_\alpha((\mathbb{R}^n \times 0) \cap U_\alpha) = \mathcal{N} \cap V_\alpha$ dan a \mathcal{N} la estructura de variedad de dimensión n .

Variedad diferenciable con frontera. Una variedad diferenciable con frontera es un conjunto \mathcal{M} con una colección de funciones $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{M}$, donde

U_α es un subconjunto abierto relativo del semiespacio $H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_m \geq 0\}$. Las funciones ψ_α cumplen las condiciones en la definición de variedad diferenciable.

Frontera de una variedad diferenciable. Un punto p en \mathcal{M} tal que sea la imagen de un punto con $x_m = 0$ en H^m es llamado un punto frontera de \mathcal{M} . El conjunto de todos los puntos frontera de \mathcal{M} es la frontera $\partial\mathcal{M}$.

Vector tangente a una variedad. Un vector tangente v a una variedad diferenciable \mathcal{M} en el punto p es la clase de equivalencia de las curvas c en \mathcal{M} , que pasan por el punto $p \in V_\alpha$ al tiempo $t = 0$, tales que $\frac{d(\psi^{-1} \circ c)}{dt}$ representa el mismo vector $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, con respecto a alguna parametrización local $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$.

Espacio tangente de una variedad diferenciable en un punto. El espacio vectorial formado por el conjunto de vectores v tangentes a \mathcal{M} en el punto p es llamado del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$.

Haz tangente a una variedad diferenciable. El haz tangente de una variedad diferenciable \mathcal{M} está formado por todos los espacios tangentes $T_p\mathcal{M}$ de los puntos de \mathcal{M} unidos en una forma manera natural.

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} p \times T_p\mathcal{M}$$

El haz tangente $T\mathcal{M}$ tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2m$.

Transversalidad entre variedades. Si \mathcal{M}, \mathcal{K} son dos subvariedades de \mathcal{N} , decimos que \mathcal{M} es transversal a \mathcal{K} si

$$T_p\mathcal{N} = T_p\mathcal{M} \oplus T_p\mathcal{K}$$

para cualquier punto $p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{K}$

Codimensión. La codimensión es un conjunto relativo que sólo está definido para un objeto dentro de otro. Sea un subvariedad \mathcal{N} de la variedad \mathcal{M} . La codimensión de la subvariedad \mathcal{N} relativa a la variedad \mathcal{M} es la diferencia entre la dimensión de \mathcal{M} y la dimensión de \mathcal{N} , $\text{codim}\mathcal{N} = \text{dim}\mathcal{M} - \text{dim}\mathcal{N}$.

Espacio normal a una variedad diferenciable en un punto. Para un punto $p \in \mathcal{M}$ el conjunto

$$\mathcal{N}_p = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \perp T_p\mathcal{M}\}$$

es llamado espacio normal en el punto p . El símbolo \perp significa ortogonal respecto al producto interno Euclidiano estándar de \mathbb{R}^n . Es claro que

$$T_p\mathbb{R}^n = T_p\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}_p$$

Haz normal a una variedad diferenciable. El conjunto

$$\mathcal{N} = \{(p, v) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \mid v \perp T_p \mathcal{M}\}$$

es el haz normal a \mathcal{M} .

Campo vectorial sobre una variedad. Un campo vectorial diferenciable en una variedad \mathcal{M} es una función diferenciable que asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector v_p en el espacio tangente $T_p \mathcal{M}$ a p .

Flujo en una variedad y Sistema dinámico continuo. Un flujo en una variedad es una función continua $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que satisface:

- $\Phi(0, p) = p$
- $\Phi(t_1 + t_2, p) = \Phi(t_1, \Phi(t_2, p))$

para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathcal{M}$. Decimos que el flujo en la variedad \mathcal{M} define un sistema dinámico continuo.

Adoptamos la siguiente convención de notación. Dado un flujo Φ , nombremos por Φ_p la trayectoria $\Phi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $\Phi_p(t) = \Phi(t, p)$, y nombremos Φ^t a la función $\Phi^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $\Phi^t(p) = \Phi(t, p)$.

Sistema de ecuaciones diferenciales, existencia de la solución y unicidad. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable y X un campo vectorial en \mathcal{M} . Para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno $(-\epsilon, \epsilon)$ del 0 y una curva suave definida por $\Phi_p : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

- $\frac{d\Phi_p(t)}{dt} = X_{\Phi_p(t)}$
- $\Phi_p(0) = p$

La solución $\Phi_p(t)$ es única en el sentido de que si $\Phi'_p : (-\epsilon', \epsilon') \rightarrow \mathcal{M}$ satisface el mismo sistema de ecuaciones diferenciales entonces $\Phi_p(t) = \Phi'_p(t)$ en su intervalo de definición que tengan en común. La solución Φ_p depende continuamente de la condición inicial p .

Mapeo discreto y Sistema dinámico discreto. Un sistema dinámico discreto puede ser generado por las evaluaciones sucesivas de una función $M : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, a esta función le llamamos mapeo.

Mapeo de Poincaré. Una manera de reducir un sistema dinámico continuo en una vecindad de una trayectoria periódica a un sistema dinámico discreto es tomando el primer regreso a cierta superficie de sección transversal a la trayectoria periódica. Sea p un punto periódico de un flujo Φ en una variedad \mathcal{M} . Sea $T > 0$ el menor número tal que $\Phi(T, p) = p$. El flujo a través de p es una trayectoria periódica suave γ . Sea S una subvariedad de \mathcal{M} de codimensión uno transversal a la trayectoria periódica γ . Esto significa que $\frac{d\psi(0, p)}{dt}$ no es elemento de $T_p S$. La subvariedad S es llamada la sección local al flujo. Por el teorema de la función implícita existe una vecindad alrededor de p tal que para cualquier punto q en

la vecindad el flujo a través de q es transversal a S y además, existe $t(q)$ cercano a T tal que $\Phi(t(q), q) \in S$. Este mapeo diferenciable es el mapeo de Poincaré.

Puntos fijos de sistemas dinámicos continuos. El punto p_0 es un punto fijo de un sistema dinámico continuo si $f(p_0) = 0$ para todo t . La aproximación lineal del flujo o mapeo nos da información sobre la dinámica en una vecindad del punto fijo. Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{p} = X_{\Phi p(t)}$ que tiene un punto fijo $p_0 = 0$. Escogimos al punto fijo en el origen tan sólo por comodidad. En una vecindad del punto fijo p_0 podemos aproximar al sistema de ecuaciones no lineales por un sistema lineal $\dot{p} = D_p f(p_0)p$. El espacio generado por los eigenvectores de la matriz $D_p f(p_0)$ lo podemos dividir en tres clases:

- El subespacio estable $E^s(p_0)$ es el espacio generado por los eigenvectores tales que sus eigenvalores asociados tiene $Re\lambda < 0$.
- El subespacio inestable $E^u(p_0)$ es el espacio generado por los eigenvectores tales que sus eigenvalores asociados tiene $Re\lambda > 0$.
- El subespacio central $E^c(p_0)$ es el espacio generado por los eigenvectores tales que sus eigenvalores asociados tiene $Re\lambda = 0$.

Puntos fijos de sistemas dinámicos discretos. El punto p_0 es un punto fijo del sistema dinámico discreto si $M(p_0) = p_0$. En una vecindad del punto fijo p_0 podemos aproximar a $M(p)$ por un mapeo lineal $D_p M(p_0)p_0$. El espacio generado por los eigenvectores de la matriz $D_p M(p_0)$ lo podemos dividir en tres partes:

- El subespacio estable $E^s(p_0)$ es el espacio generado por los eigenvectores tales que sus eigenvalores asociados tienen $|\lambda| < 1$.
- El subespacio inestable $E^u(p_0)$ es el espacio generado por los eigenvectores tales que sus eigenvalores asociados tienen $|\lambda| > 1$.
- El subespacio central $E^c(p_0)$ es el espacio generado por los eigenvectores tales que sus eigenvalores asociados tienen $|\lambda| = 1$.

Con los subespacios podemos darnos una idea de la dinámica alrededor del punto fijo X_0 . Las trayectorias en el subespacio estable $E^s(p_0)$ se acercan a p_0 . Las trayectorias en el subespacio inestable $E^u(p_0)$ se alejan de X_0 . Numerosos ejemplos de espacios fase de sistemas de ecuaciones diferenciales y mapeos se encuentran en [41].

En el estudio de la dinámica de nuestro sistema Hamiltoniano aparecen mapeos bidimensionales simplécticos. Para este tipo de mapeos la clasificación de un punto fijo en términos de sus eigenvalores λ_{\pm} es simple, hay cinco tipos básicos de puntos fijos:

- $\lambda > 0$: el punto fijo es hiperbólico.
- $\lambda < 0$: el punto fijo es inverso hiperbólico.
- $|\lambda| = 1$ y $\text{Im}(\lambda) \neq 0$: el punto fijo es elíptico.
- $\lambda = 1$: el punto fijo es parabólico.
- $\lambda = -1$: el punto fijo es inverso parabólico.

El producto de los dos eigenvalores del punto fijo es $\lambda_+ \lambda_- = 1$

La teoría que relaciona las órbitas periódicas con los mapeos discretos y un estudio de sus bifurcaciones básicas está descrita en [19] y [41].

Sistema integrable. Un sistema Hamiltoniano de n grados de libertad es integrable si tiene n integrales f_i de movimiento cumplen dos condiciones:

- Los gradientes de las integrales de f_i son vectores linealmente independientes.
- Los paréntesis de Poisson entre las integrales son cero, $\{f_i, f_j\} = 0$. A esta condición se le llama involución.

Sistema semintegrable. Un sistema de n grados de libertad es semintegrable si tiene k integrales de movimiento, donde $n > k > 1$. Las k integrales de movimiento cumplen las dos propiedades de la definición anterior.

Grados de libertad abiertos y cerrados. Un sistema de tres grados de libertad abiertos es un sistema donde los tres grados de libertad son no acotados. Un sistema de un grado de libertad abierto y dos grados de libertad cerrados es un sistema donde un de los grados de libertad es no acotado y los otros dos grados están acotados.

Sobre NHIM con frontera y sus variedades invariantes

Las siguientes definiciones las tomamos del libro [13]. La discusión sobre las definiciones y las pruebas de los teoremas están en [13, 22]. Recomendamos ver ambas referencias simultaneamente.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales definidas en \mathbb{R}^n por:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

donde $f(x)$ es una función C^r de x , $r \geq 1$. Denotemos al flujo generado por el sistema de ecuaciones diferenciales como $\Phi_t(x)$. Sea $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ una variedad con frontera, compacta, conexa y C^r contenida en \mathbb{R}^n .

Ahora definamos tres tipos de variedades:

- $\bar{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ es una **variedad invariante negativa (overflowing invariant)** bajo el flujo si para todo $p \in \bar{\mathcal{M}}$ se cumple que $\Phi_t(p) \in \bar{\mathcal{M}}$ para todo $t \leq 0$ y el campo vectorial apunta hacia fuera de $\partial\mathcal{M}$.
- $\bar{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ es una **variedad invariante positiva (inflowing invariant)** bajo el flujo si para todo $p \in \bar{\mathcal{M}}$ se cumple que $\Phi_t(p) \in \bar{\mathcal{M}}$ para todo $t \geq 0$ y el campo vectorial apunta hacia dentro de $\partial\mathcal{M}$.
- $\bar{\mathcal{M}}$ es una **variedad invariante** bajo el flujo si para todo punto $p \in \bar{\mathcal{M}}$ se cumple que $\Phi_t(p) \in \bar{\mathcal{M}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Hagamos algunos comentarios sobre las definiciones anteriores:

- El significado de que el campo vectorial apunta hacia fuera de $\partial\mathcal{M}$ es para todo $p \in \mathcal{M}$ el flujo $\Phi_t(p) \notin \bar{\mathcal{M}}$ para todo $t \geq 0$. El significado de que el campo vectorial apunta hacia dentro de $\partial\mathcal{M}$ es análogo.
- $\bar{\mathcal{M}}$ es una variedad compacta por tanto $\Phi_t|_{\bar{\mathcal{M}}}$ existe para todo $t \leq 0$ si $\bar{\mathcal{M}}$ es negativo invariante, y para todo $t \in \mathbb{R}$ si es invariante.
- $\bar{\mathcal{M}}$ es una variedad invariante si el campo vectorial es cero o tangente en $\partial\mathcal{M}$.

Las variedades negativo invariante juegan un papel fundamental en la prueba de la persistencia de la variedad inestable de una NHIM, como veremos más adelante. Veamos que elemento aparecen en la prueba de su persistencia. Consideremos una variedad negativo invariante \mathcal{M} . Supongamos que el flujo está definido para $t \geq 0$. Denotemos por $\mathcal{M}_1 = \Phi_1(\mathcal{M})$ y $\mathcal{M}_2 = \Phi_2(\mathcal{M})$; ver figura 18.

Con la norma definida por la métrica euclidiana estándar tenemos la separación $T\mathbb{R}^n|_{\mathcal{M}_2} = T\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}$, donde \mathcal{N} es el haz normal a \mathcal{M}_2 .

Definimos el operador proyector $\Pi : T\mathbb{R}^n|_{\mathcal{M}_2} \rightarrow \mathcal{N}$. Consideremos los siguientes operadores lineales construidos a partir del flujo linealizado:

$$D\Phi_{-t}(p)|_{\mathcal{M}_2} : T_p\mathcal{M}_2 \rightarrow T_{\Phi_{-t}(p)}\mathcal{M}_2$$

$$\Pi D\Phi_t(\Pi_{-t}(p))|_{\mathcal{M}_2} : \mathcal{N}_{\Phi(p)} \rightarrow \mathcal{N}_p$$

Para un punto $p \in \mathcal{M}_2$ consideremos los vectores $w_0 \in \mathcal{N}_p$, $v_0 \in T_p\mathcal{M}_2$, $w_{-t} = \Pi D\Phi_{-t}w_0$ y $v_{-t} = D\Phi_{-t}(p)v_0$; ver figura 18. Diremos que \mathcal{M} es estable bajo la dinámica linealizada si para todo $p \in \mathcal{M}$ y $w_0 \in \mathcal{N}$ el siguiente limite se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w_0\|}{\|w_{-t}\|} = 0.$$

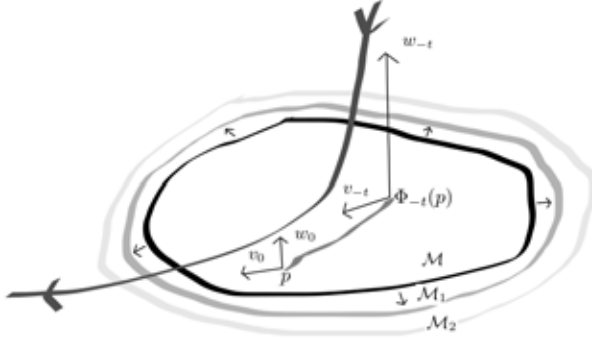


Figura 18: La una variedad \mathcal{M} negativo invariante bajo el flujo, \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 y una trayectoria cerca de \mathcal{M} . La trayectoria se aproxima a \mathcal{M} y después de aleja en la región cercana a la frontera de \mathcal{M} . El flujo comprime a la variedad negativo invariante en la dirección normal a la variedad. Al perturbar un poco al campo vectorial que define al flujo esta propiedad no cambia. Vectores w_0 , v_0 y sus imágenes w_{-t} , v_{-t} nos ayudan a medir la compresión en la dirección normal a \mathcal{M} .

El significado geométrico del limite anterior es que bajo la dinámica linealizada los vectores normales a \mathcal{M} crecen cuando $t \rightarrow \infty$.

Las propiedades del flujo alrededor de \mathcal{M} están caracterizadas por la existencia del siguiente limite para todo $p \in \mathcal{M}$, $w_0 \in \mathcal{N}$ y $v_0 \in T_p\mathcal{M}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|w_0\|^b}{\|v_0\|}}{\frac{\|w_{-t}\|^b}{\|v_{-t}\|}} = 0.$$

El significado geométrico del limite anterior para $b = 1$ es que en las vecindades de los puntos $p \in \mathcal{M}$ se estiran hacia fuera bajo la dinámica linealizada con el tiempo corriendo hacia atrás. Para $b < 1$ el las vecindades se estiran a una taza mayor.

Es conveniente asociar a estos limites tazas de convergencia para realizar los cálculos. Definimos los números tipo Lyapunov generalizados como:

$$\nu(p) = \inf \left\{ a : \frac{\|w_0\|}{\|w_{-t}\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p \right\},$$

si $\nu(p) < 1$ definimos

$$\sigma(p) = \inf \left\{ b : \frac{\frac{\|w_0\|^b}{\|v_0\|}}{\frac{\|w_{-t}\|^b}{\|v_{-t}\|}} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p, \forall v_0 \in T_p\mathcal{M}_2 \right\}.$$

Proposición. $\nu(p)$ es independiente de la métrica escogida para \mathbb{R}^n y de la separación $T\mathbb{R}^n|_{\mathcal{M}_2} = T\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}$ obtenida por la métrica. Si $\nu(p) < 1$, entonces $\sigma(p)$ también es independiente de la métrica.

La proposición anterior muestra que $\nu(p) < 1$ y $\sigma(p)$ sólo depende del campo vectorial $f(x)$ y de la estructura diferencial de \mathcal{M} y \mathbb{R}^n . Esto es importante para generalizar la teoría a variedades émbedidas en variedades diferenciales arbitrarias [22].

Consideremos el campo vectorial perturbado

$$\dot{x} = f^{\text{pert}}(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathcal{K} \supset \mathcal{M}_\epsilon$ un conjunto compacto tal que \mathcal{K} es la clausura de un conjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a \mathcal{M}_ϵ . Entonces decimos que el campo vectorial $f(x)$ es C^1 ϵ -cercano a $f^{\text{pert}}(x)$ si

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{K}} \|f(x) - f^{\text{pert}}(x)\| &\leq \epsilon, \\ \sup_{x \in \mathcal{K}} \|Df(x) - Df^{\text{pert}}(x)\| &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Teorema de Persistencia de las variedades negativo invariantes.

Sea $f(x)$ un campo vectorial C^r en \mathbb{R}^n , $r \geq 1$. Sea $\bar{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ es una variedad compacta, conexa y invariante negativa bajo el flujo generado por $f(x)$. Supongamos que $\nu(p) < 1$ y $\sigma(p) < \frac{1}{r}$ para todo $p \in \mathcal{M}$. Entonces para cualquier campo vectorial $f^{\text{pert}}(x)$ C^1 ϵ -cercano a $f(x)$, con ϵ suficientemente pequeño, existe una variedad $\bar{\mathcal{M}}_\epsilon$ negativo invariante bajo $f^{\text{pert}}(x)$ y C^r difeomorfa a $\bar{\mathcal{M}}$.

Para probar el teorema se construye un mapeo que toma las gráficas de las variedades cercanas a $\bar{\mathcal{M}}$ y se les aplica el flujo perturbado. Este mapeo es llamado la **transformación de gráficas (graph transform)**. La transformación de gráficas es un **mapeo que contrae (contracting map)**. Para este tipo de mapeos existe un punto fijo único. El punto fijo de la transformación de gráficas es la variedad invariante negativa $\bar{\mathcal{M}}_\epsilon$.

En la pagina 45 del libro [41] hay un ejemplo sencillo donde se aprecia como funciona la prueba de persistencia de una variedad negativo invariante. En ese ejemplo es fácil construir la transformación de gráficas de forma explícita y probar que es un mapeo que contrae. Recomendamos ver el ejemplo antes de leer la prueba general.

Hay un teorema completamente análogo para las variedades invariantes positivas. Para probarlo sólo hay que cambiar el sentido del tiempo y aplicar el teorema anterior.

Ahora consideremos el caso relacionado con las NHIMs con frontera. Supongamos que $T\mathbb{R}^n|_{\mathcal{M}_2} = T\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}^s \oplus \mathcal{N}^u$, donde $\mathcal{N}^s \oplus \mathcal{N}^u = \mathcal{N}$ es el haz normal a \mathcal{M}_2 . Definimos los proyectores Π^u y Π^s asociados a los subhaces \mathcal{N}^u y \mathcal{N}^s como $\Pi^s : T\mathbb{R}^n|_{\mathcal{M}_2} \rightarrow \mathcal{N}^s$ y $\Pi^u : T\mathbb{R}^n|_{\mathcal{M}_2} \rightarrow \mathcal{N}^u$.

Supongamos que los subhaces $T\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}^s$ y $T\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}^u$ son invariantes bajo $D\Phi_t$ para $t < 0$. Las tazas de crecimiento en estos subyaces están caracterizadas por números generalizados de Lyapunov como en el caso de las variedades negativo invariante. Para un punto $p \in \mathcal{M}_2$ consideremos los vectores $u_0 \in \mathcal{N}_p^s$, $w_0 \in \mathcal{N}_p^u$, $v_0 \in T_p\mathcal{M}_2$, $w_{-t} = \Pi D\Phi_{-t}w_0$ y $v_{-t} = D\Phi_{-t}(p)v_0$. Definimos los números generalizados de Lyapunov como:

$$\lambda^u(p) = \inf \left\{ a : \frac{\|u_{-t}\|}{\|u_0\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall u_0 \in \mathcal{N}_p^s \right\},$$

$$\nu^s(p) = \inf \left\{ a : \frac{\|w_0\|}{\|w_{-t}\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p^s \right\},$$

si $\nu(p) < 1$ definimos

$$\sigma^s(p) = \inf \left\{ b : \frac{\frac{\|w_0\|^b}{\|v_0\|}}{\frac{\|w_{-t}\|^b}{\|v_{-t}\|}} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p^s, \forall v_0 \in T_p\mathcal{M}_2 \right\}.$$

Estos números de Lyapunov tambien son independientes de la métrica. Decimos que tenemos una **separación hiperbólica (hyperbolic splitting)** si $\lambda^u(p) < 1$ y $\nu^s(p) < 1$ para todo $p \in \mathcal{M}$.

Teorema de existencia y persistencia de la variedad inestable de una variedad invariante negativa. Sea $f(x)$ un campo vectorial C^r en \mathbb{R}^n , $r \geq 1$. Sea $\bar{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ es una variedad C^r , compacta, conexa y invariante negativa invariante bajo el flujo generado por $f(x)$. Supongamos que $\lambda^u(p) < 1$, $\nu^s(p) < 1$ y $\sigma^s(p) < \frac{1}{r}$ para todo $p \in \mathcal{M}$. Entonces existe una variedad $W^u(\bar{\mathcal{M}})$ negativo invariante bajo el flujo definido por $f^{\text{pert}}(x)$ que contiene a $\bar{\mathcal{M}}$ y es tangente a \mathcal{N}_p en $\bar{\mathcal{M}}$. Las trayectorias que forman a $W^u(\bar{\mathcal{M}})$ se aproximan a $\bar{\mathcal{M}}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, para cualquier campo vectorial $f^{\text{pert}}(x) C^1$ ϵ -cercano a $f(x)$, con ϵ suficientemente pequeño, existe una variedad $W^u(\bar{\mathcal{M}}_\epsilon)$ negativo invariante bajo $f^{\text{pert}}(x)$ y C^r difeomorfa a $W^u(\bar{\mathcal{M}})$.

Si el campo vectorial $f(x)$ es tangente a la frontera de \mathcal{M} podemos utilizar los teoremas anteriores si modificamos el campo vectorial en una vecindad arbitrariamente pequeña de la frontera de \mathcal{M} . El campo vectorial modificado tiene que ser tal que la variedad \mathcal{M} se convierta en una variedad invariante positivo o invariante negativo. Para ver más detalles vea el capítulo 6, paginas 160 y 172 de [13] y el capítulo 4, paginas 354-357 de [25]. Las trayectorias que no crucen la frontera tienen un comportamiento idéntico que a las trayectorias que no cruzan la frontera del caso no modificado. Las trayectorias del caso modificado que cruzan la frontera pueden tener un comportamiento asintótico muy diferente a las del sistema original.

Si existe un mecanismo que evite que las trayectorias crucen la frontera en el caso perturbado, entonces casi toda \mathcal{M} persistirá bajo perturbaciones. El comportamiento bajo perturbaciones de \mathcal{M} en una vecindad arbitrariamente pequeña de las fronteras dependen de las propiedades de cada sistema.

Sólo en el caso en el que el campo vectorial es tangente a la frontera de \mathcal{M} existe la variedad estable $W^s(\bar{\mathcal{M}})$ y la variedad inestable $W^u(\bar{\mathcal{M}})$ al mismo tiempo.

La prueba de la persistencia de una NHIM con frontera está basada en los dos teoremas anteriores. El esquema de la prueba es el siguiente: Primero modificamos el flujo en la frontera de la NHIM \mathcal{M} para convertirla en una variedad con frontera invariante negativo con una separación hiperbólica. Después consideramos un segmento finito de la variedad inestable $W^u(\bar{\mathcal{M}})$ que contenga a \mathcal{M} , este segmento es una variedad negativo invariante con frontera. Por el primer teorema el segmento de $W^u(\bar{\mathcal{M}})$ es persistente bajo perturbaciones. Después hacemos lo mismo pero ahora modificamos el flujo para convertir a la NHIM \mathcal{M} en una variedad invariante positiva. Entonces existe un segmento de la variedad estable $W^s(\bar{\mathcal{M}})$ y es persistente bajo perturbaciones. La intersección entre el segmento de la variedad estable perturbada y el segmento de la variedad inestable perturbada es la NHIM perturbada.

Apéndice II

El elemento básico para realizar nuestros cálculos son las trayectorias. El método numérico de integración que utilizamos para calcular las trayectorias fue Prince–Dormand de orden 8. Este es un método de integración numérica explícito de la familia Runge–Kutta. Las propiedades de este método son bien conocidas [42]. Para nuestros cálculos utilizamos la librería GNU Scientific Libraly (GSL) para el lenguaje C. La librería GSL tiene una rutina con el integrador Prince–Dormand de orden 8.

Ajustar el tamaño de paso en la integración es muy conveniente para nuestros cálculos de dispersión, ya que, lejos de la región de interacción las integraciones necesitan un tamaño de paso mayor que en la región de interacción donde el comportamiento es más complicado. El método de integración numérica Prince–Dormand es bastante eficaz para cálculos donde variamos el tamaño de paso de integración. La rutina de integración ajusta el tamaño de paso de manera automática para mantener el error acotado. Si el error esta acotado por debajo un umbral el algoritmo busca aumentar el tamaño de paso hasta que sea óptimo [43]. Esto ayuda mucho a mejorar la velocidad del cálculo. El umbral que tomamos como tolerancia fue $\text{Error}_{\max} = 10^{-8}$. Para verificar los cálculos reducimos el umbral un orden de magnitud, cambiamos el umbral a $\text{Error}_{\max} = 10^{-9}$ y comparamos los resultados. Las figuras que obtuvimos son indistinguibles con ambos umbrales.

Consideremos una trayectoria típica del sistema no perturbado, en este caso E y L_z son integrales de movimiento. Veamos como son las fluctuaciones de E y L_z al calcular la trayectoria. La trayectoria tiene parámetro de impacto ($b_{\perp} = 3.5, b_{\parallel} = 0.2$); ver la figura del conjunto de singularidades de la función de dispersión 2.14. El parámetro de impacto de la trayectoria esta en la zona donde la funciones de dispersión tiene singularidades. En las regiones del plano de parámetros de impacto donde hay muchas singularidades, las trayectorias asociadas tienen un comportamiento complicado. En la figuras 19 y 20 mostramos las fluctuaciones de E y L_z como función del tiempo.

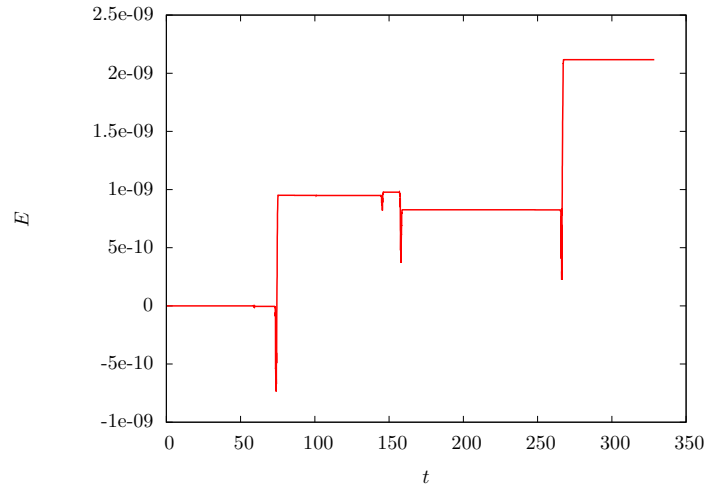


Figura 19: Fluctuaciones de E como función del tiempo.

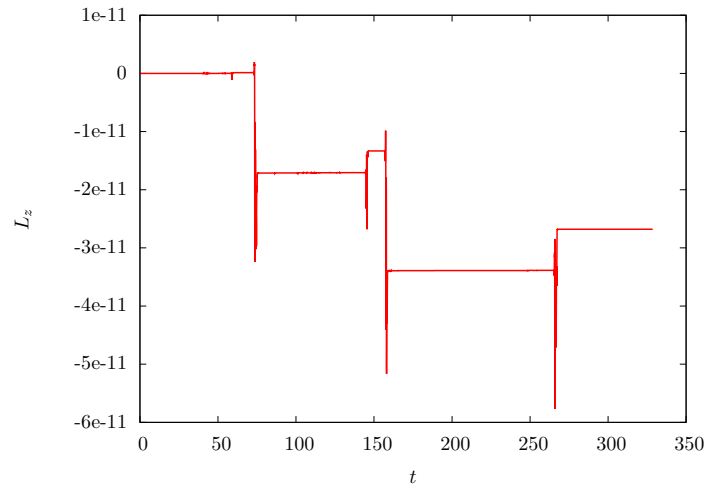


Figura 20: Fluctuaciones de L_z como función del tiempo.

En ambos casos vemos saltos, pero las fluctuaciones son pequeñas. Las fluctuaciones de E están acotadas por 6.0×10^{-9} y las fluctuaciones de L_z están acotadas por 2.5×10^{-11} . Esto nos indica que el método de integración no genera fluctuaciones grandes en las integrales de movimiento. Para una trayectoria del sistema no simétrico tenemos resultados similares en las fluctuaciones en E .

Es conveniente utilizar un cluster para realizar los cálculos de la sección de dispersión. En los cálculos de la sección de dispersión es donde se requiere calcular más trayectorias para tener una resolución y distinguir claramente los detalles de las cáusticas. Es sencillo paralelizar el cálculo de trayectorias, en cada procesador que tengamos disponible podemos calcular una trayectoria. Paralelizamos nuestros códigos con la librería MPI para el lenguaje C++.

Bibliografía

- [1] Jesús M Seoane and Miguel A F Sanjuán. New developments in classical chaotic scattering. *Reports on Progress in Physics*, 76(1):016001, 2013. Disponible en <http://www.escet.urjc.es/fisica/investigacion/publicaciones/pub.html>.
- [2] Ying-Cheng Lai and Tamás Tél. *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales*. Springer, 2011.
- [3] C. Stormer. *The Polar Aurora*. Oxford Press, 1955.
- [4] C. Stormer. Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales. *Radium*, 9, 1912.
- [5] Leîmaitre G. Vallarta M. S. On Compton's latitude effect of cosmic radiation. *Physical Review*, 43, 1933.
- [6] Manuel Sandoval Vallarta. Theory of the geomagnetic effect of cosmic radiations. *in Handbuck der Physik*, 46, 1961.
- [7] M. Braun. Particle motions in a magnetic field. *Journal of Differential Equations*, 8:294–332, 1969.
- [8] Van Allen probes. http://www.nasa.gov/mission_pages/rbsp/main/index.html#.VIS3fa024UQ. Accessed: 2014-12-07.
- [9] D. N. Baker, A. N. Jaynes, V. C. Hoxie, R. M. Thorne, J. C. Foster, X. Li, J. F. Fennell, J. R. Wygant, S. G. Kanekal, P. J. Erickson, W. Kurth, W. Li, Q. Ma, Q. Schiller, L. Blum, D. M. Malaspina, A. Gerrard, and L. J. Lanzerotti. An impenetrable barrier to ultrarelativistic electrons in the van allen radiation belts. *Nature*, 515:531—534, Nov 2014.
- [10] Z. Kovács and L. Wiesenfeld. Topological aspects of chaotic scattering in higher dimensions. *Phys. Rev. E*, 63:056207, Apr 2001. Disponible en [arXiv:chao-dyn/9810006v1](https://arxiv.org/abs/chao-dyn/9810006v1).

- [11] G Drótos, F González Montoya, C Jung, and T Tél. Asymptotic observability of low-dimensional powder chaos in a three-degrees-of-freedom scattering system. *Phys. Rev. E*, 90:022906, 2014.
- [12] C Jung, O Merlo, T H Seligman, and W P K Zapfe. The chaotic set and the cross section for chaotic scattering in three degrees of freedom. *New Journal of Physics*, 12(10):103021, 2010. Disponible en arXiv:1004.1124.
- [13] Steven Wiggins. *Normally Hiperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1994.
- [14] S. Wiggins, L. Wiesenfeld, C. Jaffé, and T. Uzer. Impenetrable barriers in phase-space. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5478–5481, Jun 2001.
- [15] R Dilao and R Aves-Pires. Chaos in the Stormer problem. *Progress in Nonlinear Differential Equations*, 75:175–194, 2007. Disponible en arXiv:0704.3250.
- [16] C Jung and H J Scholz. Chaotic scattering off the magnetic dipole. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21(10):2301, 1988.
- [17] B Ruckerl and C Jung. Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(20):6741, 1994.
- [18] L. Benet, J. Broch, O. Merlo, and T. H. Seligman. Symmetry breaking: A heuristic approach to chaotic scattering in many dimensions. *Phys. Rev. E*, 71:036225, 2005.
- [19] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear Oscilatiois, Dinamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [20] L.D. Kudriavtev. *Curso de análisis matemático*. MIR-Moscu, 1983.
- [21] Maciej J. Capiński and Piotr Zgliczyński. Geometric proof for normally hyperbolic invariant manifolds. *arXiv:1503.03323v1*, 2015.
- [22] Niel Fenichel. Persistence and smoothness of the invariant manifolds for flows. *Indiana University Mathematics Journal*, 21:193–226, 1971.
- [23] Pierre Bergera and Abed Bounemoura. A geometrical proof of the persistence of normally hyperbolic submanifolds. *Dynamical Systems: An International Journal*, 28(4):567–581, 2013.
- [24] Jaap Eldering. Persistence of noncompact normally hyperbolic invariant manifolds in bounded geometry. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(11–12):617 – 620, 2012. Disponible en arXiv:1204.1310v2.

- [25] Steven Wiggins. *Global Bifurcations and Chaos*. Springer–Verlag, 1988.
- [26] Niel Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions. *Indiana University Mathematics Journal*, 21, 1974.
- [27] F Gonzalez and C Jung. Rainbow singularities in the doubly differential cross section for scattering off a perturbed magnetic dipole. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(26):265102, 2012.
- [28] Michel Tabor. *Chaos and integrability in nonlinear dynamical systems: an introduction*. Wiley Sons, 1989.
- [29] A. J. Drag. Trapped orbits in a magnetic dipolar field. *Reviews of Geophysics*, 3:255–298, 1965.
- [30] A J Drag and J M Finn. Insolubility of trapped particle motion in a magnetic dipole field. *J. Geophys. Res.*, 81:2327–2340, 1976.
- [31] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [32] Toby Hall. Weak universality in two-dimensional transitions to chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 71:58–61, Jul 1993.
- [33] J. Meiss. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Rev. Mod. Phys.*, 64:795–848, Jul 1992.
- [34] Boris V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52:263–379, 1979.
- [35] C Jung and S Pott. Classical cross section for chaotic potential scattering. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(15):2925, 1989.
- [36] F Gonzalez, G Drotos, and C Jung. The decay of a normally hyperbolic invariant manifold to dust in a three degrees of freedom scattering system. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(4):045101, 2014.
- [37] Edward Ott, Celso Grebogi, and James Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, Mar 1990.
- [38] Troy Shinbrot, Edward Ott, Celso Grebogi, and James Yorke. Using chaos to direct trajectories to targets. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3215–3218, Dec 1990.
- [39] Roger Penrose. *The Road to Reality*. Jonathan Cape, 2004.
- [40] Keith Burns and Marian Gidea. *Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems*. Chapman Hall–CRC, 2005.

- [41] Steven Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamics and Chaos*. Springer–Verlag, 2003.
- [42] Dormand J. and Prince P. A family of embedded Runge–Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (6), 1980.
- [43] Mark Galassi, Jim Davies, James Theiler, Brian Gough, Gerard Jungman, Patrick Alken, Michael Boothand, and Fabrice Rossi. GNU Scientific Library. Manual Reference. 2011.