



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OBTENCIÓN DE 3-VARIEDADES
HIPERBÓLICAS A TRAVÉS DE NUDOS Y
SUS COMPLEMENTOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
FRANCISCO DE JESÚS RIVERA TORRES

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. LORENA ARMAS SANABRIA

2015

Ciudad Universitaria, D. F.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Quiero agradecer a tantas personas que seguro no podré acabar de listarlas. Sin embargo, aquellas personas que no aparezcan en este apartado, pero que fueron partícipes en este trayecto de mi vida, sepan que están presentes en mi mente.

Dicho lo anterior, quiero agradecer especialmente a quienes hicieron posible que se concretara este viaje -que si bien sólo concluye una etapa más de mi formación, representa una gran satisfacción llegar al destino- A quienes me acompañaron durante todo este camino, a mi asesora la Dra. Lorena Armas Sanabria y a su esposo el Dr. Mario Eudave Muñoz; por dedicarme tiempo para este trabajo, por agunatar y tolerar mi indisciplina, que no es cosa fácil de ello estoy consciente. Pero sobre todo, por apoyarme incondicionalmente.

A mis sinodales el Dr. Max Neumann C., Dr. Enrique Ramírez L., M en C. Raybel García A. y M en C. Álvaro Reyes G. quienes se tomaron la molestía de revisar con todo detalle, me apoyaron y me auxiliaron para corregir con cuidado este trabajo y completar los huecos teóricos, gracias a ellos el resultado es, a mi gusto, muy bueno.

A mis padres Engracia Torres Cárdenas, Francisco Rivera Ramos y a mis hermanos, en particular a Angélica; ya que sin ellos, sin su ayuda, apoyo, compañía y guía en esta vida, jamás hubiese sido posible completar esta empresa. Así mismo, a quienes me inspiraron para emprender el camino de la matemática y no obstante con eso me mostraron la pasión por compartirlas, la Profesora Sarah Miranda, el Prof. Ricardo Hernández y el Prof. Sergio Serrano.

A mi compañera Karla, por aguantarme, tolerarme, acompañarme, animarme y a veces casi empujarme para que concluyera esta tesis. A mis queridos amigos y hermanos Kerygma L., Móni Jiménez, César A., Víctor S., Gabriel B., Ulises D., Fernando B., Adriana R., Eleazar P., Misael, Pedro R., Fernando N. y Jerónimo Z. en especial a estos últimos, por tomarse el tiempo de ayudarme a revisar detalles, ayudarme con la edición de las imágenes y otros asuntos.

Y también con mucha camadería a todos mis amigos que hicieron grata la estancia en esta mi querida Facultad de Ciencias, que me hicieron pasar momentos inolvidables e irrepetibles entre ellos a Melissa, Fany, Josslyn, Cris, Roberto, Pili, Lu, Yenifef, Manuel, Emiliano, Fer, Ricardo, Rafa, a todos los de Ciencia y Sociedad... En fin, son tantas las personas a las que quisiera nombrar que se volvería un proceso casi infinito, así que, aquí paro.

Índice general

Introducción.	1
1 Conceptos Preliminares.	7
1.1 Transformaciones de Möbius	
3-dimensionales.	9
1.1.1 Transformaciones de Möbius.	9
1.1.2 La Proyección Estereográfica.	10
1.1.3 Reflexiones.	14
1.1.4 Métrica Cordal.	21
1.1.5 Extensión de Poincaré.	22
1.1.6 Grupo General de Möbius.	23
1.2 Algo de Geometría y Topología.	30
1.2.1 Los Conceptos de Isometría, Escalamiento, Variedad	
y Variedad Diferenciable.	30
1.2.2 Triangulación y Orientabilidad.	37
1.3 Conceptos Básicos de la Teoría de Nudos.	42
1.3.1 Nudos y Enlaces.	42
1.3.2 Trenzas.	44
2 Geometría Hiperbólica 3-dimensional.	53
2.1 Algunos Modelos Hiperbólicos...	58
2.1.1 El Modelo del <i>Semiespacio Superior</i> \mathbb{H}^3	58
2.1.2 El Modelo de la <i>Bola Unitaria</i> \mathcal{B}^3	61
2.1.3 El Espacio de Lorentz y el Modelo del <i>Hemisferio de</i>	
<i>Radio Imaginario</i> \mathcal{H}^3	63
2.2 Isometrías Hiperbólicas.	71
2.2.1 Clasificación de las Transformaciones de Möbius.	72
2.2.2 Grupos Discretos.	73

2.2.3	Isometrías del Espacio Hiperbólico.	74
2.3	Algunos Conceptos de la Geometría Hiperbólica.	76
2.3.1	3-Variedades Hiperbólicas.	79
3	Obtención de 3-variedades Hiperbólicas...	81
3.1	Identificación de Poliedros y Triangulación.	82
3.1.1	Identificación de Poliedros Para Obtener 3-Variedades Hiperbólicas.	85
3.1.2	3-Variedades Hiperbólicas Completas.	97
3.2	El Espacio Complemento...	106
3.2.1	El Complemento del Nudo Ocho.	107
3.2.2	El Complemento de los Anillos Borromeanos.	115
	Apéndice.	125
A	El Algoritmo de Sakuma y Weeks.	127
A- 1	El Espacio Complemento de... Trenzas...	127
B	Tabla de Referencias de las Figuras Utilizadas.	133
	Bibliografía.	141

Introducción.

“Si como estimaba Demócrito, una sola demostración vale más que el reino de los persas, resulta incalculable el valor del método científico en los tiempos modernos. Quienes lo ignoran íntegramente no pueden llamarse modernos, y quienes lo desdennan se exponen a no ser veraces ni eficaces”¹.

Una variedad 3-dimensional M , se dice que tiene una *estructura hiperbólica*, si existe un grupo discreto G de transformaciones de Möbius (isometrías de \mathbb{H}^3), tal que el cociente es homeomorfo a M . En cuyo caso la estructura hiperbólica está dada por G . Una variedad junto con una estructura hiperbólica, es llamada una *variedad hiperbólica*.

El propósito fundamental de esta tesis es mostrar cómo se descomponen los complementos del *nudo ocho* y del enlace *los anillos Borromeanos* -complementos que se encuentran encajados en \mathbb{S}^3 - Con la finalidad de exponer que tienen una estructura *hiperbólica 3-dimensional*. Estas estructuras para los respectivos nudo y enlace, se dan por medio de una descomposición en poliedros que son pegados de forma adecuada. Tanto el nudo ocho como los anillos borromeanos tienen una descomposición en dos poliedros cada uno. Se mostrará que el complemento de ambos, es homeomorfo a una 3-variedad hiperbólica orientable y completa, respectivamente. La estructura hiperbólica se encuentra usando el concepto de (X, G) -estructura para M .

Tal algoritmo de identificación se describe en el libro de Ratcliffe “*Foundation of Hyperbolic Manifolds*” cf. [26], obra que tiene como base los escritos de Thurston cf. [32]. Estos trabajos son el sustento de esta tesis.

¹Mario Bunge, Cf. [6].

Entonces, el desarrollo de la presente, permitirá adentrarnos de manera breve en algunos conceptos de la geometría hiperbólica 3-dimensional, ya que echaremos un vistazo breve a su estructura analítica, sus formas o modelos y sus isometrías. Pretendiendo que este escrito esté formado a manera tal, que el lector poco habituado con los conceptos mencionados, pero, que esté familiarizado con la geometría hiperbólica bidimensional, pueda abordar y comprender el rumbo de dicha tesis.

El contenido de la tesis se divide en tres capítulos y un apéndice. En el capítulo uno expondremos conceptos preliminares como las definiciones de nudo, enlace, trenza cerrada, así como, herramientas básicas necesarias. Por ejemplo veremos entre otros conceptos las transformaciones de Möbius 3-dimensionales, el grupo general de Möbius, las variedades 3-dimensionales y las (X, G) -estructuras. En el capítulo dos abordaremos los modelos de la geometría hiperbólica, mostrando de forma breve la geometría de estos modelos, así como sus isometrías. En el capítulo tres veremos la descomposición canónica de los complementos del nudo ocho y los anillos borromeos, tratando de tener cuidado en los detalles, mostraremos que dichos complementos son homeomorfos a una 3-variedad con estructura hiperbólica, orientable y completa. Finalmente en el apartado del apéndice, expondremos el algoritmo de descomposición canónica de los complementos de algunos elementos de la familia de trenzas cerradas $(\widehat{\sigma_1\sigma_2^{-1}})^n$, determinado por Makoto Sakuma y Jeffrey Weeks, en el artículo titulado “*Examples of Canonical Decompositions of Hyperbolic Link Complements*” cf. [36].

Debido a lo vasto de la teoría de la geometría hiperbólica 3-dimensional y de las 3-variedades hiperbólicas, y dada la naturaleza de este trabajo, únicamente expondremos las ideas centrales. Por lo que en ciertos casos sólo haremos mención de la teoría que da soporte a estos conceptos, omitiendo algunos detalles técnicos y algunas demostraciones. Recomiendo al lector consultar [12], [13], [18], [19], [26] y [32] para futuras aclaraciones de los conceptos mostrados, así como visualizar las herramientas que se usaran de forma implícita.

Ahora bien, en los siguientes párrafos desarrollaré una corta reflexión, a modo de relato histórico, a propósito de la *geometría hiperbólica* y su relación con la *teoría de enlaces*, por lo que puede omitirse su lectura.

Una Breve Reflexión Histórica sobre la Geometría.

El estudio de la geometría a través del tiempo ha dado paso a grandes e incontables avances en muchos aspectos, comprensión y visiones del hombre. Tal estudio está naturalmente ligado a diversas ramas de la ciencia, e inclusive ha impactado directamente la cosmogonía e interpretación del entorno de éste.

Desde el entendimiento de la geometría *plana*, *rectangular* o *sinéctica*², hasta el estudio analítico detallado del cálculo; sus avances profundos y abstractos dentro de la matemática, como son el análisis matemático, la teoría de la medida, la geometría diferencial, la geometría riemanniana, la topología general, además de diversos estudios avanzados de sus aplicaciones en distintas áreas de las ciencias, las ingenierías y en la tecnología, la geometría ha jugado un papel fundamental y de suma relevancia.

Así, la geometría -a criterio propio y considerando múltiples aspectos- junto con el álgebra son los soportes fundamentales que constituyen las herramientas básicas, para abstraer y describir toda ciencia natural. Ahora bien, el estudio de la geometría, como cualquier otro estudio, ha variado en el transcurso de su entendimiento desde un punto de vista histórico, de una sociedad a otra y de un tiempo a otro, con diversos enfoques e impactos hacia con la humanidad.

En el siglo XVIII y XIX, el estudio de la geometría cobró nuevos aires gracias a matemáticos como Gerolamo Saccheri(1667-1733), Nikolái Lobachevsky (1792-1856) y algunos otros estudiosos de la época, como lo fueron Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Eugenio Beltrami (1835- 1899) y David Hilbert (1862-1943)³. Quienes al estudiar lo que ahora conocemos como bases axiomáticas de la matemática, y en particular las bases de la geometría euclidiana, se dieron cuenta que al cuestionar o re-intrepretar los cimientos de éstas, se encuentran nuevos caminos y resultados al respecto.

Entre estos resultados, uno de los más contundentes en lo que a la geometría respecta, fue cuando se puso en tela de juicio lo que Euclides nombró: “*los*

²Ahora nombrada *Euclidiana* en honor al gran matemático y geometra griego Euclides de Alejandría (aprox. 325-265 A.C.).

³Cf. [30] y [14, tomo III, p. 26].

cinco postulados de la geometría de la regla y el compás". En particular su famoso *postulado V*, el cual es quizás uno de los postulados más polémicos de la historia. Si se recuerda, este postulado habla en una de sus varias equivalencias de la existencia de una única paralela a otra línea dada que pasa por un punto fuera de ésta, de forma más precisa dice lo siguiente: "*Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado, ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado*"⁴.

¡Vaya discusión, desembocó en resultados asombrosos, otras vertientes de la geometría eran posibles! Tiempo después se comprendió que en realidad dichas alternativas eran por sí solas ¡otras geometrías! ¡Que gran avance para la matemática y para el pensamiento humano! Resultó ser que la geometría euclidiana, simplemente es una más de las posibles geometrías que existen.

Sin embargo, esto únicamente se logró al tomar una postura radical sobre los principios de la geometría misma, pues resultaba bastante sugestivo para los matemáticos de esas épocas tratar de demostrar este postulado, ya que no es tan "natural" su comprensión a simple vista como pasa con los otros cuatro postulados de este gran geómetra. Tratar de mostrar este postulado a partir de los cuatro anteriores, junto con lo que se llaman las "*nociones comunes*", llevó a estos matemáticos en algún momento clave a pensar en la negación de este V postulado, a meditar en ¿qué pasaría si se negaba dicho postulado? ¿Qué consecuencias se tendrían? A caso ¿se volvería inconsistente el sistema?

Luego de una fuerte confrontación de ideas y posterior a su maduración, se percataron de que no resultaba en problema alguno el negarlo, ¡no había inconsistencia alguna! Esto, como es de esperarse, conllevó a plantearse más preguntas, obteniendo como desenlace, nuevas visiones de la geometría, "las nuevas geometrías". Además esto permitió esclarecer al fin, si se podía considerar o no el "V postulado" como un postulado (o axioma) efectivamente y no como una inferencia lógica de las demás bases establecidas como se pensaba, concluyendo de manera afirmativa esta cuestión.

Así pues, la negación del V postulado, permitió desarrollar lo que ahora conocemos como *Geometrías No Euclidianas, Esférica o Elíptica e Hipérbolica*, puesto que dicha negación vuelca en dos posibilidades lógicas.

⁴Postulado V, Libro primero de Euclides, cf. [9]

La primera de ellas, verifica que no existe línea recta paralela alguna, es decir, todas las líneas “rectas” se intersectan, obteniendo así la *Geometría Elíptica*. La segunda posibilidad es que existan una infinidad de líneas “rectas” paralelas a otra dada, desembocando en la *Geometría Hiperbólica*, que es la vertiente que nos interesa para este trabajo.

Estas “nuevas geometrías” resultan ser de sumo interés por si solas, asimismo, han permitido el desarrollo de nuevas teorías dentro de la matemática. Pero no sólo eso, en el transcurso de su aparición y hasta la fecha, han dado grandes aportes, mayores perspectivas y nuevos entendimientos a las teorías ya existentes en otras ramas de la ciencia, auxiliando por ejemplo a la física moderna y contemporánea, a la química, a las teorías económicas, a la biología, etc.

Verbigracia está la relación con la cartografía (rama de estudio de la geografía) y la geometría elíptica, que a pesar de que ya se conocía se manejaba de una forma intuitiva, por lo que se dio pie a una mejor comprensión, a una formalidad y un mejor manejo de ésta. Otro ejemplo está en la fuerte conexión entre la geometría hiperbólica con la teoría especial de la relatividad. Asimismo, la aportación de ambas geometrías en el desarrollo de los sistemas dinámicos y complejos, la notable relación y el parecido entre la geometría hiperbólica y algunos modelos económicos, entre otros.

Por supuesto, también, hay bastantes aportes de estas *herramientas*, en las matemáticas mismas. Están por ejemplo, relacionadas con la *Geometría Diferencial*, con la *Topología* y con el estudio de la *Teoría de Nudos y Enlaces* -que como se verá en este trabajo, presentan una estrecha relación en su estudio con dicha geometría-, entre muchas más.

Entrando un poco en detalles con la geometría hiperbólica, su nombre fue acuñado por Felix Klein (1849-1925) aproximadamente en el año 1871. Este nombre hace énfasis en una clara relación entre las cónicas y la geometría proyectiva, que en palabras de A. Marden, “*es un doble acierto, ya que por un lado en el sentido etimológico de la palabra Hipérbole -que proviene del griego- significa exceso, e indudablemente la geometría Hiperbólica habla de un exceso de líneas*” paralelas ... “*Y por el otro también lo es, comparada -ésta- con la geometría Euclidiana*”⁵.

En el siglo XX surgieron nuevas herramientas matemáticas, entre ellas

⁵Cf. [19, pags. 7 - 8].

la topología y la teoría de nudos o enlaces. Pero fue hasta finales de la década de los años 70's y principio de los años 80's del siglo pasado, que debido al trabajo de los matemáticos Troels Jørgensen y William Thurston, entre otros, que se dio otro aporte al estudio de la geometría hiperbólica y su comprensión. Una revolucionaria forma que permite obtener espacios hiperbólicos 3-dimensionales, de una manera concreta [herramienta fundamental y eje angular de esta tesis! Resultado que se obtiene al relacionar la geometría hiperbólica a través de los conceptos de *variedad diferenciable* y variedad determinada por un grupo o *G-variedad*, con el de enlaces y sus complementos.

Cabe mencionar que con las herramientas que hoy en día se desarrollan en la topología de bajas dimensiones (en la cual se desarrolla este escrito), así como los resultados innovadores de la matemática aplicada, la computación, la programación, junto con la solución reciente de la *Conjetura de Poincaré* por parte del gran científico matemático Grigory Perelman⁶, los resultados en conjunto y entrelazados, estarán aportando de nuevo avances grandes, los cuales serán muy significativos para la matemática y las ciencias contemporáneas.

De nuevo tenemos diversos ejemplos de lo anterior, entre los cuales podemos encontrar los avances computacionales, como es el caso del programa de computo "*SnapPy*"⁷, el cual permite graficar nudos o enlaces y conocer sus propiedades espaciales (estructura geométrica, volumen, etc.). O también, en la relación que guarda la teoría de nudos o enlaces con las redes neuronales y las neurociencias. Un ejemplo más, lo hallamos en el ámbito de la ingeniería genética, la cual se ve relacionada directamente con los resultados que se han obtenido en las últimas décadas sobre estos estudios, nuevamente en relación con la Teoría de Enlaces y estos a su vez con las geometrías.

Así, para concluir esta nota, tenemos que los tópicos que se abordan en esta tesis, tienen una múltiple gama de posibilidades para futuras aplicaciones en la ciencia moderna y con grandes posibilidades asimismo en la tecnología, como se ha expuesto en corto, por lo cual es menester abordar dichos temas y continuar con la enorme labor, de la manera en que nos sea factible, para poder difundir, desarrollar, profundizar y sentar puentes de conexiones entre esta y otras disciplinas del hombre a las cuales les pueda resultar útil.

⁶La cual ahora ostenta el título de Teorema de Perelman.

⁷Consúltese <http://www.math.uic.edu/t3m/SnapPy/doc/>

Capítulo 1

Conceptos Preliminares.

“Las Geometrías No Euclidianas surgen gracias a la actividad de muchos estudiosos de actividades aparentemente tan distintas como el Arte, la Geometría y la Lógica. Eso explica en parte la dificultad que el ser humano tuvo para integrar este nuevo conocimiento a los acumulados hasta entonces”¹.

En este capítulo se dará una breve introducción a los conceptos necesarios para abordar el tema principal, el cual tiene como objetivo describir el algoritmo para determinar que los complementos del nudo ocho y del anillo Borromeano en \mathbb{S}^3 , son *3-variedades hiperbólicas*.

Estas herramientas consisten de conceptos elementales como son las transformaciones de Möbius y su extensión en \mathbb{R}^3 , la proyección estereográfica, la métrica cordal y el grupo que se establece con estas transformaciones. Asimismo, es necesario exponer algunos conceptos más, sobre la topología general, la topología algebraica, la teoría de nudos y otros que a la postre nos resulten indispensables.

Entonces, para comprender los algoritmos de descomposición, será necesario primero entender un poco de la estructura del espacio hiperbólico 3-dimensional y sus modelos -como es el caso del modelo del semiespacio superior \mathbb{H}^3 -. Para este fin, es pertinente responder tres cosas en concreto. La primera de ellas, la cual abordaremos en este capítulo, es la relación que guarda \mathbb{R}^3 con la esfera \mathbb{S}^3 , para mostrar de este modo la relación que se tiene con \mathbb{H}^3 . Por esta razón veremos las transformaciones de Möbius, las

¹Cf. [35, p. 1].

cuales actúan sobre \mathbb{R}^3 , veremos un poco de su comportamiento y el grupo que inducen. Después daremos algunas definiciones y conceptos relevantes como son el de *variedad*, *atlas*, (X, G) -*estructura*, *orientabilidad* y *triangulación*, entre otros. Finalmente expondremos lo que entenderemos por *un nudo*, *un enlace* y *las trenzas*, además de algunas nociones relacionadas a éstos. De esta manera concluiremos este capítulo.

1.1. Transformaciones de Möbius 3-dimensionales.

El estudio de la proyección estereográfica y las transformaciones de Möbius es de suma importancia, ya que nos aporta algunas de las herramientas para entender y trabajar con funciones, grupos y estructuras que heredará el espacio hiperbólico tridimensional.

Para empezar a hilar las definiciones es necesario introducir un bosquejo del semiespacio superior, esto es, *el espacio hiperbólico 3-dimensional*,

$$\mathbb{H}^3 := \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t \geq 0\}. \quad (1.1.0.1)$$

Es decir, x pertenece a \mathbb{H}^3 si $x = (z, t)$, donde $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $x = (z, t) = (x_1, x_2, x_3)$, tal que $x_i \in \mathbb{R}$ para toda $i = 1, 2, 3$ y $x_3 \geq 0$. Recordemos que el plano complejo \mathbb{C} es homeomorfo a \mathbb{R}^2 bajo la identificación siguiente, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow x + iy \in \mathbb{C}$, por lo que $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ bajo dicha identificación. Por lo pronto y para fines prácticos, entenderemos a \mathbb{H}^3 como lo hemos indicado, a modo de “*definición intuitiva*”.

1.1.1. Transformaciones de Möbius.

Recordemos que las transformaciones de variable compleja en \mathbb{C} , definidas de la forma,

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.1.1.1)$$

donde $z, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ $ad - bc \neq 0$, se llaman transformaciones de Möbius.

Es pertinente en este punto introducir algunas nociones, como la del plano complejo extendido, $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 1.1.1. Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano complejo extendido, denotado por $\widehat{\mathbb{C}}$.

También es oportuno, al igual que en el plano complejo extendido, introducir el punto al infinito “ ∞ ” en el estudio de las transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^3 . Esto es

$$\widehat{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

Las transformaciones de Möbius están también definidas en los puntos del plano complejo extendido:

I. si $c = 0$ se define $\bar{T}(\infty) = \infty$.

II. Si $c \neq 0$ se define $\bar{T}(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\bar{T}(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Cabe mencionar que estas transformaciones resultan ser las únicas biyecciones *meromorfas*² de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, en otras palabras, son las únicas funciones regulares.

El estudio analítico de este tipo de funciones, su álgebra, sus clasificaciones, junto con algunas definiciones más, aunados a la proyección estereográfica y la “métrica cordal”, nos resulta de gran utilidad para caracterizar las transformaciones que preservan al semiplano superior³, por lo cual es necesario tener presente estos temas antes de poder definir la geometría hiperbólica 3-dimensional. Además resulta que esta idea se puede extender bien, con la ayuda de la *extensión de Poincaré* al semiespacio superior.

1.1.2. La Proyección Estereográfica.

Nos centraremos ahora en la construcción de la proyección estereográfica. Para este fin, consideramos un encaje $\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (véase Figura 1.1), es decir, damos la función inclusión “ ι ”, donde

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \iota x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$$

²Para referencia sobre función *meromorfa*, véase [37, p. 248].

³Recuerde que el semiplano superior coincide con \mathbb{H}^2 , uno de los modelos de la geometría hiperbólica bidimensional.

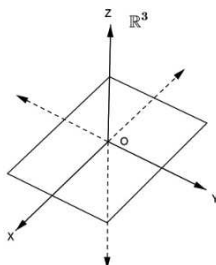


Figura 1.1: Plano por el origen $\Pi_{x_3=0}$

Sea $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (x_1, x_2, x_3) \text{ y } \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria⁴ con la topología inducida por $\widehat{\mathbb{R}^3}$. Tenemos que identificar entonces, los puntos del plano \mathbb{R}^2 , al que llamaremos $\Pi_{x_3=0}$ (para distinguirlo de otros), con los de la esfera en $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Proyectamos desde $N = e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a $x \in \Pi_{x_3=0}$, de forma que encontremos el punto de proyección en la esfera, véase Figura 1.2. Si denotamos a este punto como $\pi(x)$, con la notación usual de la proyección estereográfica, tendremos analíticamente que

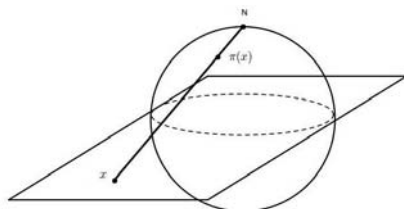


Figura 1.2: Proyección desde el polo norte N a cualquier punto en el plano $\Pi_{x_3=0}$

$$\pi(x) = x + t(e_3 - x) \text{ con } t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

⁴Llamada *Esfera de Riemann*, en honor al gran matemático *Bernhard Riemann* (S.XIX).

considerando que $\|\pi(x)\|^2 = 1$, ya que queremos que sea un punto de \mathbb{S}^2 , entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\|^2 &= (x + t(e_3 - x)) \cdot (x + t(e_3 - x)) = 1 \\ \|x\|^2 - 2t\|x\|^2 + t^2(1 + \|x\|^2) &= 1 \\ (1 + \|x\|^2)t^2 - 2t\|x\|^2 + \|x\|^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Si resolvemos la ecuación cuadrática resulta que,

$$t = \frac{\|x\|^2 \pm 1}{\|x\|^2 + 1}.$$

Ahora, si $t = 1$, entonces $\pi(x) = e_3$, lo cual pasa si y sólo si se toma el signo positivo en la ecuación anterior. Se concluye que

$$t = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}.$$

Por lo que de (1) tenemos que

$$\pi(x) = x + t(e_3 - x) = x + \left(\frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \cdot (e_3 - x),$$

y para los subíndices $j \in \{1, 2\}$, realizando las operaciones convenientes nos resulta que,

$$[\pi(x)]_j = \frac{2x_j}{\|x\|^2 + 1},$$

y

$$[\pi(x)]_3 = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1},$$

de lo cual obtenemos la función deseada $\pi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$, dada por

$$\pi(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \frac{2x_2}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

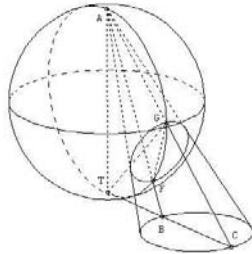


Figura 1.3: Otro tipo de proyección estereográfica.

Si ahora asociamos el punto al infinito con el polo norte N , entonces obtenemos $\pi(x) : \widehat{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{S}^2$ de la siguiente manera,

$$\pi(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \frac{2x_2}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right), & \text{si } x \neq \infty. \\ e_3, & \text{si } x = \infty. \end{cases} \quad (1.1.2.1)$$

□

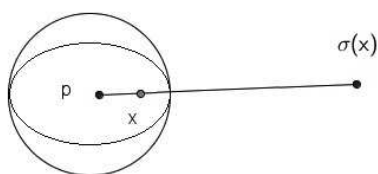
Esta función que acabamos de definir es una biyección ⁵. De forma análoga se obtiene una función de la esfera a la inclusión canónica del plano extendido $\widehat{\mathbb{R}^2}$. Lo haremos del siguiente modo, $\varphi(\bar{y}) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2}$, con regla de correspondencia,

$$\varphi(y) = \begin{cases} \left(\frac{y_1}{1-y_3}, \frac{y_2}{1-y_3} \right), & \text{si } y \neq e_3. \\ \infty, & \text{si } y = e_3. \end{cases} \quad (1.1.2.2)$$

De modo tal que $(\varphi \circ \pi)(x) = Id|_{\widehat{\mathbb{R}^2}}$, y que $(\pi \circ \varphi)(y) = Id|_{\mathbb{S}^2}$, pues ambas funciones son biyectivas e inversas, respectivamente. Éste resultado se comprueba de manera sencilla, (véase Figura1.3).

En resumen, obtenemos dos funciones π y φ , inversas la una de la otra, continuas y a las que definimos en el plano $\widehat{\mathbb{C}}$ identificando el polo norte N de \mathbb{S}^2 con ∞ de la siguiente manera, $\pi(\infty) = e_3$ y $\varphi(e_3) = \infty$, que nos permite, entonces, realizar una biyección del plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$, con la esfera de Riemman \mathbb{S}^2 .

⁵Se insta al lector a que verifique tal afirmación.

Figura 1.4: Reflexión en la esfera $S_r(p)$.

1.1.3. Reflexiones.

Una esfera de radio r y centro en p , en \mathbb{R}^3 , está definida como sigue,

$$S_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - p| = r, r > 0 \text{ y } p \in \mathbb{R}^3 \text{ fijo}\}, \quad (1.1.3.1)$$

Ahora, para definir las inversiones o reflexiones en la esfera $S_r(p)$, hay que proyectar una $x \neq p$, $x \in \mathbb{R}^3$ cualquiera desde $p \in \mathbb{R}^3$ fijo, para obtener la ecuación (véase Figura 1.4),

$$|t(x - p)| |x - p| = r^2,$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, por lo que despejando obtenemos,

$$t = \frac{r^2}{|x - p|^2}.$$

Esto nos motiva a dar la siguiente definición,

Definición 1.1.2. Sea $S_r(p)$ una esfera en \mathbb{R}^3 , se define la reflexión en $S_r(p)$ como la función $\sigma : \widehat{\mathbb{R}^3} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^3}$ tal que,

$$\sigma(x) = \begin{cases} p + \frac{r^2}{|x - p|^2}(x - p), & \text{si } x \neq p. \\ \infty, & \text{si } x = p. \end{cases} \quad (1.1.3.2)$$

Si, en particular, tomamos a $p = 0$ y $r = 1$ entonces tenemos,

$$\sigma(x) = \frac{x}{|x|^2},$$

llamemos a esta $\sigma(x)$ particular, x' , es decir

$$x' = \frac{x}{|x|^2}.$$

Ahora veremos que la reflexión se compone de distintas transformaciones.

Proposición 1.1.3. Si tomamos una traslación en p unidades, $T(x) = x+p$, la aplicación $\psi(x) = x'$ y luego una homotecia, $H(x) = rx$, donde $p \in \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces la *reflexión* en la esfera $S_p(r)$ está determinada bajo composición de funciones como sigue:

$$T \circ H \circ \psi \circ H^{-1} \circ T^{-1} = TH\psi H^{-1}T^{-1} = \sigma.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} (TH\psi H^{-1}T^{-1})(x) &= TH\psi H^{-1}(x-p) = TH\psi\left(\frac{x-p}{r}\right) = \\ &= TH\left(\frac{\frac{x-p}{r}}{\left|\frac{x-p}{r}\right|^2}\right) = T\left(\frac{r^2(x-p)}{|x-p|^2}\right) = \\ &= p + r^2\frac{(x-p)}{|x-p|^2} = \sigma(x). \end{aligned}$$

□

Note que por como se definió a σ , se tiene que si $x \in S_r(p)$ entonces $\sigma(x) = x$ y viceversa, esto se sigue inmediatamente, pues,

$$x = p + r^2\frac{(x-p)}{|x-p|^2}$$

si y sólo si,

$$(x-p) = r^2\frac{(x-p)}{|x-p|^2}$$

si y únicamente sí,

$$r^2 = |x-p|^2.$$

También resulta que σ es una involución, i.e., $\sigma \circ \sigma = Id$.

Definamos ahora los planos en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.1.4. Un plano en \mathbb{R}^3 está determinado por la siguiente ecuación,

$$P_t(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \alpha = t, \alpha \neq 0 \text{ donde } |\alpha| = 1\} \quad (1.1.3.3)$$

con el producto interno usual entre los vectores α y x .

Entonces, para definir la reflexión ϕ en el plano $P_t(\alpha)$, necesitamos que el punto medio entre x y $\phi(x)$ esté en $P_t(\alpha)$ (véase Figura 1.5). Ahora $\phi(x)$ tiene la siguiente forma,

$$\phi(x) = x + m\alpha$$

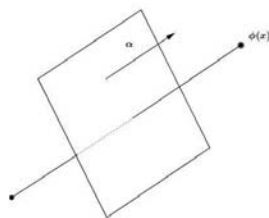


Figura 1.5: Reflexión en el plano $P_t(\alpha)$.

donde $m \in \mathbb{R}$, así pues,

$$\frac{x + \phi(x)}{2} = \frac{x + x + m\alpha}{2} \in P_t(\alpha),$$

es decir,

$$\frac{1}{2}(2x + m\alpha) \cdot \alpha = t,$$

observe que $\alpha \cdot \alpha = |\alpha|^2 = 1$ por definición de $P_t(\alpha)$, de lo cual obtenemos al despejar,

$$m = 2(t - (x \cdot \alpha)).$$

De este modo nos resulta natural dar la siguiente definición.

Definición 1.1.5. Sea $P_t(\alpha)$ un plano en \mathbb{R}^3 , definimos la reflexión sobre $P_t(\alpha)$ como la función: $\phi : \widehat{\mathbb{R}^3} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^3}$ establecida por,

$$\phi(x) = \begin{cases} x + 2(t - (x \cdot \alpha))\alpha, & \text{si } x \neq \infty. \\ \infty, & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

En particular si $t = 0$, obtenemos

$$\phi(x) = x - 2(x \cdot \alpha)\alpha = \gamma(x). \quad (1.1.3.4)$$

Al igual que en la esfera, en la reflexión sobre el plano se observa que es una composición finita de funciones del tipo que hemos estado trabajando.

Proposición 1.1.6. Sean $T(x) = x + t\alpha$ y $\gamma(x) = x - 2(x \cdot \alpha)\alpha$, entonces la reflexión en el plano $P_t(\alpha)$, está dada bajo composición de funciones por,

$$T\gamma T^{-1} = \phi$$

DEMOSTRACIÓN:

La demostración se realiza de forma análoga a la de la Proposición 1.1.2.

□

Obsérvese que si ϕ es la reflexión en $P_t(\alpha)$, entonces, $\phi(x) = x$ si y sólo si $x \in P_t(\alpha)$. Esto se debe a que $x = x - 2(x \cdot \alpha - t)\alpha$ si y únicamente si $0 = x \cdot \alpha - t$. Por lo que $t = x \cdot \alpha$.

La función ϕ también es una involución, basta probar este hecho para planos por el origen dada la Proposición 1.1.6. Sea pues $\phi(x) = x - 2(x \cdot \alpha)\alpha$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(\phi(x)) &= \phi(x) - 2(\phi(x) \cdot \alpha)\alpha = \\ &= x - 2(x \cdot \alpha)\alpha - 2[(x - 2(x \cdot \alpha) \cdot \alpha)\alpha] \alpha = \\ &= x - 2(x \cdot \alpha)\alpha - 2(x \cdot \alpha)\alpha + 4(x \cdot \alpha)\alpha = \\ &= x. \end{aligned}$$

Es importante mencionar que si ϕ es una reflexión sobre un plano por el origen, entonces ϕ es lineal y ortogonal⁶, y por tanto es un automorfismo⁷, esto es,

⁶Recuerde que una aplicación lineal ϕ es ortogonal si cumple que para cualesquiera dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $(\phi(\bar{u}) \cdot \phi(\bar{v})) = (u \cdot v)$.

⁷Recuerde que ϕ es un automorfismo si es una aplicación lineal del espacio en sí mismo.

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + \bar{y}) &= \lambda x + \bar{y} - 2((\lambda x + \bar{y}) \cdot \alpha)\alpha = \\ &= \lambda x - 2(\lambda x \cdot \alpha)\alpha + \bar{y} - 2(\bar{y} \cdot \alpha)\alpha = \lambda\phi(x) + \phi(\bar{y}).\end{aligned}$$

Además, es ortogonal pues,

$$\begin{aligned}|\phi(x)|^2 &= (x - 2(x \cdot \alpha)\alpha) \cdot (x - 2(x \cdot \alpha)\alpha) = \\ |x|^2 - 2(x \cdot \alpha)(x \cdot \alpha) - 2(x \cdot \alpha)(x \cdot \alpha) + 4(x \cdot \alpha)(x \cdot \alpha)\alpha \cdot \alpha &= \\ &= |x|^2,\end{aligned}$$

en particular si tomamos $\phi(x) \cdot \phi(y)$ tenemos que $\phi(x) \cdot \phi(y) = (x \cdot y)$, lo cual muestra que es ortogonal.

El siguiente resultado nos muestra que la proyección estereográfica π , es justo la restricción de una reflexión en una esfera.

Proposición 1.1.7. Sea σ la reflexión en $S_{\sqrt{2}}(e_3)$ y π la proyección estereográfica definida como en (1.1.2.1), entonces si

$$x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

se tiene que

$$\sigma(x) = \pi(x).$$

DEMOSTRACIÓN:

De la ecuación de (1.1.3.2) tenemos,

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= e_3 + \frac{2}{|x - e_3|^2} (x - e_3) = \\ &= e_3 + \frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)} (x - e_3) = \\ &= e_3 + \frac{2}{|x|^2 + 1} (x - e_3),\end{aligned}$$

por lo que, realizando las operaciones adecuadas se obtiene,

$$\sigma(x) = \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) = \pi(x).$$

□

Como espacio, \mathbb{R}^3 , es equivalente a $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ bajo el homeomorfismo dado en (1.1.0.1), así las reflexiones anteriores pueden ser reescritas de la siguiente manera,

- 1) Si C es el círculo en el plano complejo de centro p y radio $r > 0$, entonces la ecuación de la semiesfera en \mathbb{H}^3 que genera es,

$$\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid |z - p|^2 + t^2 = r^2\}.$$

Así la reflexión en C está dada por,

$$\sigma(z) = \frac{r^2}{z - p} + p.$$

Y su extensión se obtiene por la reflexión en la semiesfera generada, es decir,

$$\sigma(z, t) = \frac{r^2(z - p, t)}{|z - p|^2 + t^2} + (p, 0).$$

- 2) Si C es la recta $L \cup \{\infty\}$ pasando por el punto $p \in \mathbb{C}$ y haciendo un ángulo θ con el eje $\{Im(z) = 0\}$, entonces la semiesfera generada por L en \mathbb{H}^3 es un semiplano ortogonal a la frontera de L , dada por la ecuación,

$$\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid z \in L\}.$$

De este modo, tenemos que la reflexión en C es,

$$\sigma(z) = e^{2i\theta} (\overline{z - p}) + p,$$

y por consiguiente su extensión viene dada por,

$$\sigma(z, t) = e^{2i\theta} ((\overline{z - p}) + p, t).$$

Consúltese (1.1.5.1).

Proposición 1.1.8. La reflexión σ sobre la esfera $S_r(p)$ es continua en $\widehat{\mathbb{R}^3}$.

DEMOSTRACIÓN:

De la definición de σ se tiene de manera inmediata la continuidad en $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$. Por lo que basta verificar la continuidad en los puntos p e ∞ .

Veamos qué ocurre cuando $x_n \rightarrow p$, como se verá en la Proposición 1.1.12, tenemos que $\sigma(x_n) \rightarrow \infty$, esto debido a que cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que

$$|\sigma(x_n) - p| = \left| \frac{(x_n - p)}{|x_n - p|^2} r^2 \right| \leq |\sigma(x_n)| + |p|,$$

y

$$\left| \frac{(x_n - p)}{|x_n - p|^2} r^2 \right| = \frac{r^2}{|x_n - p|} \rightarrow \infty,$$

si $x_n \rightarrow p$.

Ahora cuando $n \rightarrow \infty$,

$$|\sigma(x_n) - p| = \frac{r^2}{|\sigma(x_n) - p|} \rightarrow 0,$$

debido a que $x_n \rightarrow \infty$.

□

Al igual que la reflexión en esferas, es fácil ver que la reflexión en el plano es continua.

Proposición 1.1.9. La reflexión ϕ sobre el plano $P_t(\alpha)$ es continua en $\widehat{\mathbb{R}^3}$.

DEMOSTRACIÓN:

Por como se definió la reflexión ϕ se tiene de manera inmediata la continuidad en $\widehat{\mathbb{R}^3}$, por lo que es suficiente probar la continuidad en ∞ . Apelando a la Proposición 1.1.6, basta probar la continuidad en reflexiones sobre planos por el origen y traslaciones. Para este fin, sea $\{x_n\}$ una sucesión, tal que $x_n \rightarrow \infty$, sea ψ la reflexión en $P_t(0)$, por ser ψ ortogonal se sigue la afirmación, ya que,

$$|\psi(x_n)| = |x_n|.$$

Finalmente, si $T(x) = x + \alpha$, sea $-\beta = \alpha$, $\{x_n\}$ una sucesión tal que,

$$x_n \longrightarrow \infty,$$

$M \in \mathbb{R}^+$ y $M' = M + |\beta|$. Se tiene así que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, entonces,

$$|x_n| > M + |\beta|,$$

de modo que

$$|T(x_n)| = |x_n - \beta| \geq |x_n| - |\beta| > M.$$

□

1.1.4. Métrica Cordal.

Es útil obtener una fórmula de la distancia entre dos puntos de la esfera de Riemann bajo las proyecciones en el plano $\widehat{\Pi}_{x_3=0} \subset \widehat{\mathbb{R}^3}$, z y $z' \in \mathbb{S}^2$. Esto entre otras cosas, con la finalidad de mostrar la continuidad de las reflexiones en planos y esferas.

Definición 1.1.10. La métrica cordal en $\widehat{\mathbb{R}^3}$ está definida por

$$d_c(z, z') = |\pi(z) - \pi(z')|$$

Donde π es la función definida en (1.1.2.1).

Más explícitamente,

$$d_c(z, z') = \begin{cases} \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}}, & \text{si } z, z' \in \mathbb{R}^3. \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{si } z' = \infty. \end{cases} \quad (1.1.4.1)$$

Como se vió en la Proposición 1.1.7, tenemos que $\pi(z) = \sigma(z)$, donde σ es la reflexión en $S_{\sqrt{2}}(e_3)$. Por lo que tenemos que

Caso (1): Si $z, z' \in \mathbb{R}^3$, entonces se tiene,

$$\begin{aligned} d_c(z, z') &= |\pi(z) - \pi(z')| = |\sigma(z) - \sigma(z')| = \\ &= \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}}. \end{aligned}$$

Caso (2): Si $z \in \mathbb{R}^3$, entonces $z' = \infty$,

Observese que $\pi(z') = e_3$, por lo que es suficiente probar que

$$(\pi(z) - e_3)(\pi(z) - e_3) = \frac{4}{1 + |z|^2},$$

pero esto se tiene ya que

$$\begin{aligned} |\pi(z) - e_3|^2 &= |\sigma(z) - e_3|^2 = \left| e_3 + \frac{2(z - e_3)}{|z - e_3|^2} - e_3 \right|^2 = \\ &= \left| \frac{2(z - e_3)}{|z - e_3|^2} \right|^2 = \frac{4}{|z - e_3|^2} = \frac{4}{1 + |z|^2}. \end{aligned}$$

Ergo

$$|\pi(z) - e_3| = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Note que la métrica cordal efectivamente es una métrica, dado que la esfera $S_1(0) = \mathbb{S}^2$ hereda la métrica de \mathbb{R}^3 . El siguiente resultado exhibe que la métrica cordal y la euclidiana inducen la misma topología en \mathbb{R}^3 , o en otras palabras, definen los mismos abiertos.

Teorema 1.1.11. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces f es continua con la métrica euclidiana, si y sólo si es continua con la métrica cordal.*

□

Proposición 1.1.12. *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{R}^3 entonces $d_c(x_n, \infty) \rightarrow 0$, si y sólo si $|x_n| \rightarrow 0$.*

□

1.1.5. Extensión de Poincaré.

Ahora veamos la extensión de las transformaciones de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^2$ a $\widehat{\mathbb{R}}^3$. Para este fin recordemos que podemos identificar $\widehat{\mathbb{R}}^n$ con el subespacio

$$\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) | x_{n+1} = 0\} \cup \{\infty\},$$

de manera tal que cada esfera $(n - 1)$ -dimensional \mathbb{S} de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, determina de manera única una esfera n -dimensional $\widehat{\mathbb{S}}$ de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, de forma que

$$\widehat{\mathbb{S}} \cap \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} = \mathbb{S},$$

y la intersección es ortogonal.

Tenemos así que la reflexión en \mathbb{S} es la restricción a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ de la reflexión en $\widehat{\mathbb{S}}$.

De esta forma obtenemos una extensión muy natural de cada transformación de Möbius de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ a una transformación de Möbius en $\widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$. Esta extensión es conocida como *extensión de Poincaré*.

En particular tenemos que para $n = 3$ usando la identificación de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ cf. (1.1.0.1), la extensión de Poincaré de una transformación de Möbius $T(z)$, véase (1.1.1.1), donde

$$M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

está dada por,

$$\widehat{T}(z, t) = \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}(t^2)}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \right), \quad (1.1.5.1)$$

Donde z, a, b, c y $d \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$.

1.1.6. Grupo General de Möbius.

A continuación haremos un estudio breve del grupo general de Möbius.

Definición 1.1.13. Las reflexiones en esferas 2-dimensionales de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ generan un grupo con la regla de composición, llamado el *grupo general o extendido de transformaciones de Möbius* y denotado por $\widehat{\mathbb{M}}^3$.

Definición 1.1.14. Una transformación de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^3$ es una composición finita de reflexiones en esferas y planos⁸.

Definición 1.1.15. El subgrupo de índice dos formado por las composiciones pares de estas reflexiones es denotado por \mathbb{M}^3 y llamado el *grupo de transformaciones de Möbius*. Así, las transformaciones de \mathbb{M}^3 son llamadas *transformaciones de Möbius* y las de $\widehat{\mathbb{M}}^3 \setminus \mathbb{M}^3$ son llamadas *transformaciones extendidas de Möbius*.

⁸Cf. [29].

Proposición 1.1.16. El grupo $\widehat{\mathbb{M}}^3$ es generado por,

- (i) Traslaciones, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $T(x) = x + a$ y $a \in \mathbb{R}^3$,
- (ii) Dilataciones u homotecias $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $H(x) = rx$ y $r \in \mathbb{R}^+$,
- (iii) Rotaciones, $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $R \in O[3]^9$,
- (iv) Y la Reflexión, $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ en \mathbb{S}^2 (La Esfera en \mathbb{R}^3).

Para la demostración de esta proposición, note que de la manera en como se definió a las transformaciones de Möbius, se tiene que, si $a = d = 1$ y $c = 0$ entonces corresponde a una traslación, si $b = c = 0$ y $d = 1$ se tiene una homotecia y si $a = d = 0$ $b = c = 1$ entonces es una reflexión. Con esto en mente procedamos a la demostración.

DEMOSTRACIÓN:

Observe que cada plano en \mathbb{R}^3 es imagen de una traslación de un plano por el origen. Además, cada plano por el origen, también, es rotación del plano \mathbb{R}^2 . En forma análoga, cada esfera es imagen bajo una traslación de una esfera centrada en el origen y, cada una de éstas, es la imagen por una homotecia de la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , con lo cual queda demostrado.

□

De la Proposición 1.1.8 y la Proposición 1.1.9, podemos ver claramente que cualquier transformación de Möbius es un homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ a $\widehat{\mathbb{R}}^3$. También hacemos notar que composiciones finitas de transformaciones de Möbius son de Möbius.

Como ya se mencionó en la Definición 1.1.13, las reflexiones forman un grupo, el *Grupo General de Möbius* y al que denotamos como $\widehat{\mathbb{M}}^3$.

Otros Resultados Necesarios.

En los siguientes resultados omitiremos la demostración, sin embargo para cualquier referencia futura o para profundizar más sobre el tema, se pueden consultar [2], [3] o [13].

⁹El Grupo de Matrices Ortogonales. Para mayor referencia consúltese [29].

Definición 1.1.17. Sea V un abierto de \mathbb{R}^3 y $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable en $x \in V$. Se dice que f es *conforme* si $Df(x)$ es un múltiplo escalar positivo de una matriz ortogonal, y f es *anticonforme* si es múltiplo escalar negativo de una matriz ortogonal, lo cual invierte la orientación¹⁰. A dicho escalar se le llama *factor de conformalidad*, y se le denota como $\mu f(x)$ o simplemente $\mu(x)$.

Es decir, una función conforme es aquella que preserva ángulos y orientación (1.2.25), una función anticonforme es una transformación que preserva ángulos pero que invierte la orientación.

Teorema 1.1.18. *La reflexión ϕ sobre planos en $P_t(\alpha)$ y σ sobre esferas en $S_r(p)$, es anticonforme en \mathbb{R}^3 y $\mathbb{R}^3 - \{p\}$ respectivamente.*

□

Teorema 1.1.19 (Teorema de Liouville). *Sean U, V abiertos de \mathbb{R}^3 y $f : U \rightarrow V$ un homeomorfismo conforme o anticonforme, entonces f es la restricción de una transformación (extendida) de Möbius. En particular se tiene¹¹ que $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{R}^3}) = \widehat{\mathbb{M}^3}$.*

□

Teorema 1.1.20. *Las reflexiones sobre rectas invierten la orientación.*

□

Para fines prácticos denotaremos a los planos y las esferas simplemente como “esferas” en virtud de que un plano es un caso particular de la representación analítica de las esferas.

Proposición 1.1.21. Una ecuación de la forma:

$$t|x|^2 - 2(x \cdot a) + s = 0, \text{ donde } |a|^2 > ts \text{ y } t, s \in \mathbb{R} \quad (1.1.6.1)$$

representa una esfera en $\widehat{\mathbb{R}^3}$ y viceversa, toda esfera en $\widehat{\mathbb{R}^3}$ tiene una representación de dicha forma. En particular si $t = 0$ se tiene la ecuación de un plano.

¹⁰Para ver la definición de orientación, consulte (1.2.25).

¹¹Recuerde que un automorfismo es un isomorfismo de un espacio que acepte una estructura de grupo, en sí mismo.

□

Note que el subgrupo del grupo general de Möbius que preserva orientación y al cual denotamos como \mathbb{M}^3 en la Definición 1.1.13, consta precisamente de un número par de composiciones (reflexiones en planos o esferas).

Ahora mostraremos que las transformaciones de Möbius, mandan esferas en esferas.

Proposición 1.1.22. Sea $\phi \in \mathbb{M}^3$ y Γ una esfera, entonces $\phi(\Gamma)$ es una esfera.

DEMOSTRACIÓN:

En virtud de la Proposición 1.1.3 y la Proposición 1.1.6 basta probar el resultado para traslaciones, homotecias, reflexiones en el plano por el origen y la reflexión en la esfera $S_1(0)$.

Si $T(x) = x + b$, T transforma la esfera $S_r(a)$ en $S_r(a + b)$, hagamos $y = x + b$ entonces,

$$|x - a| = r \iff |y - (a + b)| = r,$$

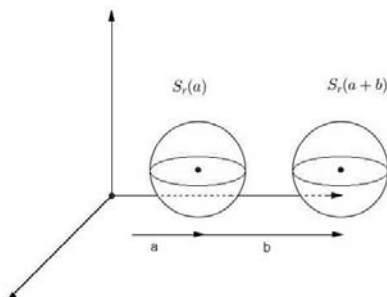


Figura 1.6: Traslación del disco $S_r(a)$ por b .

o en otras palabras, $y \in S_r(a + b)$ si y sólo si $x \in S_r(a)$. Véase Figura 1.6

Más aún, T transforma el plano $P_t(a)$ en $P_t(a + b)$ dado que,

$$x \cdot a = t \iff y \cdot a = t + (a \cdot b).$$

Ahora bien, si ϕ es la reflexión en el plano por el origen $P_0(a)$, como se vio, ϕ es ortogonal, preserva normas y el producto escalar, por lo tanto ϕ transforma $S_r(a)$ en $S_r(\phi(a))$, véase Figura 1.7, puesto que,

$$|x - a| = |\phi(x) - \phi(a)| = r,$$

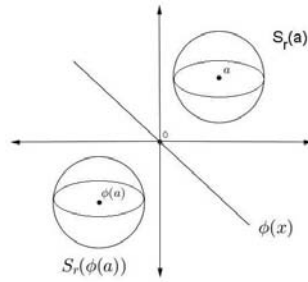


Figura 1.7: Reflexión ϕ por el origen.

del mismo modo lleva $P_t(a)$ en $P_t(\phi(a))$ dado que,

$$x \cdot a = \phi(x) \cdot \phi(a) = t.$$

Por otra parte tenemos que si $H(x) = kx$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces,

$$|x - a| = r \iff |kx - ka| = kr \iff |H(x) - H(a)| = kr$$

es decir, H manda esferas en esferas (véanse la Figura 1.8 y la Figura 1.9); así mismo, H transforma planos en planos, ya que,

$$x \cdot a = t \iff kx \cdot a = kt.$$

Por último, veamos que $\psi(x) = x'$ manda esferas en esferas.

Para esto, sea Γ definida como en la Definición 1.1.6.1, entonces si $x \neq 0$ y $x \neq \infty$, entonces podemos reescribir,

$$t|x'|^2 - 2(x' \cdot a) + s = \frac{t}{|x|^2} - 2(x' \cdot a) + s = t - 2(x' \cdot a) + \frac{s}{|x|^2} = 0,$$

y dado que $|a|^2 > ts$, entonces haciendo $y = x'$ obtenemos,

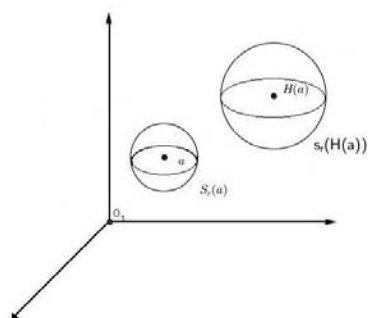


Figura 1.8: Homotecia de una esfera $S_r(a)$.

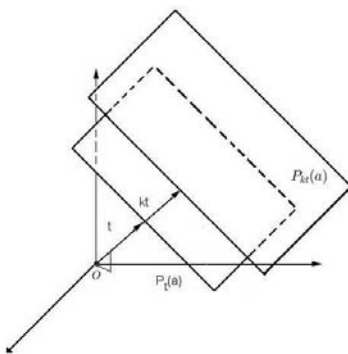


Figura 1.9: Homotecia del plano $P_t(a)$.

$$t - 2(y \cdot a) + s|y|^2 = 0, \quad (1.1.6.2)$$

que también es una esfera. De esta forma, sólo resta verificar el comportamiento en 0 e ∞ y para esto se tienen tres casos,

- (i) Si $0, \infty \in \Gamma$, entonces Γ es un plano por el origen, $t = s = 0$ y $\psi(\Gamma) = \Gamma$.
- (ii) Si $0 \in \Gamma$, $\infty \notin \Gamma$, entonces Γ es una esfera que pasa por el origen, $t = 0$ y $s \neq 0$ y $\psi(\Gamma)$ es un plano que no pasa por el origen ya que

$\psi(0) = \infty \in \psi(\Gamma)$, pero $\psi(\infty) = 0 \notin \psi(\Gamma)$, lo cual es consistente con (1.1.6.2).

- (iii) Si $0 \notin \Gamma$, $\infty \in \Gamma$, entonces Γ es un plano que no pasa por el origen, $t \neq 0$ y $s = 0$ y su imagen es una esfera por el origen, lo cual también es consistente con (1.1.6.2).

□

1.2. Algo de Geometría y Topología.

Nos sumergiremos, ahora, de manera breve, en conceptos de geometría y topología diferencial básicos. Es decir, veremos las definiciones de algunas funciones útiles, la definición de variedad y de algunos conceptos de la topología diferencial definidos para espacios topológicos en general. Sin embargo, no perdamos de vista que este trabajo está enfocado en el espacio hiperbólico 3-dimensional por lo cual basta tener claros los conceptos para espacios topológicos de dimensión 3. Para aclarar o profundizar más al respecto se puede consultar [10], [24], [25], [33] o [34].

1.2.1. Los Conceptos de Isometría, Escalamiento, Variedad y Variedad Diferenciable.

Convengamos que el espacio euclidiano E^n es el espacio \mathbb{R}^n con la topología inducida por la métrica euclidiana

$$d_E(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

donde $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, conocido también como el espacio topológico usual \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.1 (*Variedad Topológica*). Una *variedad topológica* de dimensión k es un espacio topológico M , al que exigiremos:

- i) Ser localmente euclidiano (i.e. para cada punto $x \in M$ existe un abierto $U \subset M$, entorno de x , homeomorfo mediante $\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^k$ a un abierto V de \mathbb{R}^k).
- ii) Ser Hausdorff, i.e. T^2 .
- iii) Verificar el segundo axioma de numerabilidad.

En particular una *3-variedad topológica* es un espacio topológico M , Hausdorff, segundo numerable y que es localmente homeomorfo a un abierto $B \subset \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.2.1. Tenemos que la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ junto con la topología inducida por la métrica cordal (véase Figura 1.3), que definimos en la sección anterior, resulta ser una variedad topológica, más aún es una 2-variedad.

Usaremos la definición usual de espacio topológico metrizable o simplemente de espacio métrico, es decir, un espacio topológico X provisto con una métrica d_x . Recordemos de manera breve los conceptos de *isometría* y de *función afín de escalamiento*.

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos, donde d_X y d_Y son sus respectivas métricas, se dice que una función $\phi : X \rightarrow Y$ que es biyectiva, es una *isometría del espacio X en Y* , si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se tiene que $d_X(x_1, x_2) = d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2))$, es decir, ϕ es una función que preserva distancias. Note que una función que preserva distancias, no necesariamente biyectiva, es una función continua e inyectiva.

Se dice que una función $\psi : X \rightarrow Y$ que es biyectiva, de un espacio métrico (X, d_X) en otro (Y, d_Y) , es una *función afín o símil* y particularmente un cambio de escala, si y sólo si existe un número $k \in \mathbb{R}^+$, tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se tiene que $d_X(x_1, x_2) = kd_Y(\psi(x_1), \psi(x_2))$.

Ahora introduzcamos el concepto de *geodésicas*, *arco geodésico* y *segmento geodésico*, pues estos conceptos juegan un papel importante en el desarrollo de esta tesis. Lo haremos en un sentido euclidiano y en el apartado de geometría hiperbólica lo redefiniremos para ampliar el sentido. Recordemos entonces, la noción de una curva en un espacio métrico X , esto es, una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de E^n , tal que $a < b$.

Además tenemos el siguiente teorema de caracterización,

Teorema 1.2.2. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, una curva de X , un espacio métrico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i) γ es lineal,
- ii) γ satisface la siguiente ecuación,

$$\gamma(t) = \gamma(a) + \left(\frac{t-a}{b-a} \right) (\gamma(b) - \gamma(a)),$$

- iii) la curva γ tiene derivada constante $\gamma' : [a, b] \rightarrow X$.

Éste es un teorema cuya demostración es rutinaria, por lo que se invita a realizarlo como ejercicio.

Definición 1.2.3 (*Arco Geodésico*). Un arco geodésico $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, en un espacio métrico X donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de E^n , tal que $a < b$, es una función que preserva distancias.

Observación. Un arco geodésico α , es una curva inyectiva. Por otro lado tenemos, que una curva α es un arco geodésico si y sólo si es lineal y $|\alpha'(t)| = 1$ para toda $t \in [a, b]$.

Ahora extendemos un poco más la idea de geodésica pensando dentro de una geometría esférica.

Definición 1.2.4. Un círculo máximo de \mathbb{S}^n , es la intersección de \mathbb{S}^n con un subespacio vectorial de dimensión dos $V \subset E^{n+1}$.

Observación. Note que si $x, y \in \mathbb{S}^n$ son puntos tales que $x \neq y$. Si x y y son linealmente independientes, entonces x y y generan un subespacio 2-dimensional $V(x, y)$ de E^{n+1} y de esta forma se tiene que $S(x, y) = \mathbb{S}^n \cap (V(x, y))$ es el único círculo máximo que contiene a x y y . Ahora bien si x y y son linealmente dependientes se tiene que $y = -x$, de modo tal que si $n > 1$, entonces existe un círculo máximo continuo de \mathbb{S}^n que contiene a x y a $-x$, de donde podemos advertir que cada círculo máximo de \mathbb{S}^n que contenga a x deberá contener, también, a $-x$.

De nuevo tendremos un teorema de caracterización, que nos permite ver cuando una curva α es un arco geodésico.

Teorema 1.2.5. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$ una curva con $b - a < \pi$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) α es un arco geodésico,
- ii) existen vectores ortogonales $x, y \in \mathbb{S}^n$, tales que,

$$\alpha(t) = (\cos(t - a))x + (\sen(t - a))y,$$

- iii) la curva α satisface la ecuación diferencial $\alpha'' + \alpha = 0$.

Particularmente tenemos que una función $\lambda : [a, b] \subset E \rightarrow \mathbb{S}^n$ es una línea geodésica si y sólo si existen dos vectores ortogonales $x, y \in \mathbb{S}^n$ tales que,

$$\lambda(t) = x\cos(t) + y\sen(t).$$

Corolario 1.2.6. Los círculos máximos son las geodésicas de \mathbb{S}^n .

Definición 1.2.7 (*Función Diferenciable*). Sean M y N dos variedades de dimensiones m y n respectivamente. Sea U un abierto de M , una $F = (F_1, \dots, F_m) : U \rightarrow N$ se dice *diferenciable*, si cada componente $F_i : U \rightarrow N$ es de clase C^∞ , con $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sean $S \subset M$ y $T \subset N$. Una función $F : S \rightarrow T$, se dice diferenciable si, para cada punto $p \in S$, existen un abierto U de M que contiene a p y una función diferenciable $\widehat{F} : U \rightarrow N$, tales que $F \upharpoonright U \cap S = \widehat{F} \upharpoonright U \cap S$.

Definición 1.2.8. Sea M una variedad topológica de dimensión m . Una carta o sistema de coordenadas en M , es un par $(U, \varphi) = U_\varphi$, donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo de U sobre el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Definición 1.2.9 (*Atlas diferenciable*). Sea M una variedad de dimensión m . Una colección \mathcal{A} , donde,

$$\mathcal{A} = \{U_\varphi \mid U_\varphi \text{ es una carta } m\text{-dimensional sobre el conjunto } M\},$$

se denomina atlas diferenciable m -dimensional de M si satisface las siguientes propiedades:

- i) La unión de todos los dominos de U_φ es M ,
- ii) Para cada pareja de cartas U_φ, U_ψ de \mathcal{A} se tiene que la función $U_\psi U_\varphi^{-1}$ es de clase C^∞ .

Definición 1.2.10 (*Atlas Maximal*). Sea \mathcal{A} tal que

$$\mathcal{A} := \{(U, \varphi) \mid U \subset M, \text{ y } \varphi : U \rightarrow \varphi(U)\},$$

donde U es un abierto de M y φ es un homeomorfismo. Diremos que \mathcal{A} es un atlas maximal de una variedad M , si cada carta (U, φ) de M , que es compatible con \mathcal{A} , está contenido en \mathcal{A} .

Definición 1.2.11 (*Variedad diferenciable*). Sea M un espacio topológico metrizable. M es una *variedad de dimensión k con estructura diferenciable* si es localmente difeomorfo a \mathbb{R}^k , es decir, una “ M ” variedad aunada a un atlas *maximal* diferenciable \mathcal{A} .

Definición 1.2.12. Sean M y N variedades diferenciables. Una función $F : M \rightarrow N$ de clase C^∞ , es un *difeomorfismo* si y sólo si F es un homeomorfismo bi-diferenciable. Es decir, F es diferenciable, biyectiva y su inversa $F^{-1} : N \rightarrow M$, también es diferenciable.

Más aún, un difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ donde $U \subset M$, es una parametrización de la vecindad $V \subset \mathbb{R}^k$. El difeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ es un sistema de coordenadas o cartas en V .

Ejemplo 1.2.2. Se puede constatar que el grupo general lineal (GL, \mathbb{R}) y el grupo especial lineal (SL, \mathbb{R}) son variedades diferenciables, ya que el primero es abierto en un *espacio euclidiano afín* y el segundo es un caso especial del primero.

Hasta aquí tenemos algunas de las definiciones usuales de la topología diferencial. Sin embargo, en las siguientes líneas ampliaremos un poco estos conceptos con la idea de grupo, en particular, nos interesa el grupo conformado por transformaciones rígidas. Esto es, tomaremos las nociones dadas de cartas, atlas y variedad, entre otras y veremos cómo podemos redefinir estos conceptos bajo la acción de elementos de ciertos grupos, como el que hemos elegido de las transformaciones rígidas, actuando sobre un espacio métrico.

El ejemplo anterior nos ayuda a ilustrar la idea, pues como veremos en el capítulo dos, el grupo de transformaciones rígidas será el grupo de isometrías que actúa en el espacio hiperbólico 3-dimensional, y el cual está determinado por las transformaciones de Möbius, que a su vez, forman el grupo general lineal sobre \mathbb{C} , (GL, \mathbb{C}) . Así este grupo nos auxiliará para dotar de la estructura buscada a nuestro espacio, con la ayuda de estas nuevas definiciones.

Por tanto, la ampliación de estos conceptos es importante para comprender la descomposición de los espacios complementos de los nudos, con los cuales trabajaremos en el capítulo tres, pues tales nociones son la base teórica para comprobar que el exterior de algunos nudos o enlaces en \mathbb{S}^3 tienen estructura hiperbólica, por lo que se exhorta al lector a consultar con mayor detalle a [26].

Sea G el grupo de transformaciones rígidas de un espacio topológico metrizable 3-dimensional X , y sea M una 3-variedad.

Definición 1.2.13. Un (X, G) -Atlas para M está definido por la familia de funciones,

$$\Phi = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in I},$$

llamadas cartas, que satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) El conjunto U_i , llamado *vecindad coordenada*, es un subconjunto abierto, conexo de M , para cada i .
- (ii) La carta ϕ_i mapea la vecindad coordenada U_i , sobre un subconjunto abierto de X de manera homeomorfa para cada i .
- (iii) El conjunto de vecindades coordenadas $\{U_i\}_{i \in I}$ cubre a M .
- (iv) Si U_i y U_j se intersecan, entonces la función

$$\phi_j \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j),$$

llamada un *cambio de coordenadas* (véase diagrama (1.10)), coincide en una vecindad en cada punto de su dominio con un elemento de G .

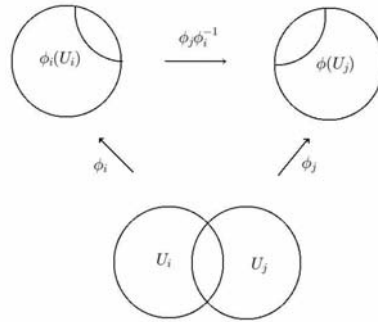


Figura 1.10: Diagrama cambio de coordenadas.

Teorema 1.2.14. Sea Φ un (X, G) -Atlas para M . Entonces existe un único (X, G) -Atlas maximal para M , que contiene a Φ .

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\Phi = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$ y sea $\bar{\Phi}$ el conjunto de todas las funciones $\phi : U \rightarrow X$ tales que,

- (a) el conjunto U es un subconjunto conexo y abierto de M ,
- (b) la función ϕ mapea U de manera sobre y homeomórficamente sobre un subconjunto abierto de X ,

(c) la función

$$\phi\phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U) \rightarrow \phi(U_i \cap U),$$

coincide, en una vecindad para cada punto del dominio, con un elemento de G , esto para cada i .

Es claro que $\bar{\Phi}$ contiene a Φ . Supongamos que $\phi : U \rightarrow X$ y $\psi : V \rightarrow X$ están en $\bar{\Phi}$. Entonces tenemos para cada i que,

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V \cap U_i) \rightarrow \psi(U \cap V \cap U_i),$$

es la composición de $\psi\phi^{-1}\phi_i\phi_i^{-1}$. Por lo tanto tenemos que cada vecindad de los puntos del dominio coincide con un elemento de G . Luego, como $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de M , tenemos que $\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$, coincide en una vecindad para cada punto del dominio, con un elemento de G . Esto es, $\bar{\Phi}$ es un (X, G) -Atlas para M . También es claro que $\bar{\Phi}$ contiene a cada (X, G) -Atlas de M que contiene a Φ , por lo que, $\bar{\Phi}$ es el único (X, G) -Atlas maximal de M que contiene a Φ , que es lo que se quería mostrar.

□

Teorema 1.2.15. *Sea X un espacio métrico, geodésico-conexo y completo. Si g y h son funciones símiles de X que coinciden en un subconjunto abierto y no vacío de X , entonces $g = h$.*

DEMOSTRACIÓN:

El espacio X es un espacio rígido, recuerde que un espacio métrico se dice rígido si la única función afín de X que fija todo punto de un subconjunto no vacío y abierto de X , es la identidad sobre X . Luego entonces g debe ser igual con h .

□

Definición 1.2.16. Una (X, G) -estructura para una 3-variedad M es un (X, G) -atlas maximal para M .

Definición 1.2.17. Una (X, G) -variedad M de dimensión 3, es una 3-variedad M junto con una (X, G) -estructura para M .

Teorema 1.2.18. *Sea $\phi_j\phi_i^{-1} : \phi(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ un cambio de coordenadas de una (X, G) -variedad M . Entonces $\phi_j\phi_i^{-1}$ coincide con un elemento de G , sobre cada componente conexa de su dominio.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea C una componente conexa de $\phi_i(U_i \cap U_j)$. Supongamos que u, v están en C , tenemos así subconjuntos abiertos W_1, \dots, W_m de C tales que u está en W_1 . Los conjuntos W_k y W_{k+1} se intersecan para $k = 1, \dots, m-1$, y el conjunto W_m contiene a v , además tenemos que $\phi_j \phi_i^{-1}$ coincide con un g_k de G sobre W_k . Ahora como g_k y g_{k+1} coinciden en el conjunto no vacío, $W_k \cap W_{k+1}$, entonces tenemos que $g_k = g_{k+1}$ por el teorema (1.2.15). Por lo que todos los g_k son el mismo. Esto es $\phi_j \phi_i^{-1}$ coincide con g_1 en v y por lo tanto en todo C .

□

Definición 1.2.19 ((X, G) -mapa). Una función $\mu : M \rightarrow N$ entre dos (X, G) -variedades M y N , es un (X, G) -mapa si y sólo si μ es continua, y para cada carta $\phi : U \rightarrow X$ de M y $\psi : V \rightarrow X$ de N tal que U y $\mu^{-1}(V)$ se intersecan, la función

$$\phi \mu^{-1} \psi : \phi(U \cap \mu^{-1}(V)) \rightarrow \psi(\mu(U) \cap V)$$

concuerdan en una vecindad para cada punto de su dominio con un elemento de G .

Teorema 1.2.20. Una función $\mu : M \rightarrow N$ entre dos (X, G) -variedades M y N , es un (X, G) -mapa si y sólo si para cada punto $u \in M$, existe una carta $\phi : U \rightarrow X$ para (M, u) , tal que μ mapea U homeomórficamente sobre un subconjunto abierto de N y $\phi \mu^{-1} : \mu(U) \rightarrow X$ es una carta para N .

□

1.2.2. Triangulación y Orientabilidad.

La idea de *triangulación* también es importante para el presente escrito, ya que será a través de cierta triangulación y del estudio del comportamiento de ésta, que nos daremos cuenta cuándo el complemento de algunos nudos o enlaces cumplen con las condiciones para ser una 3-variedad hiperbólica. Es por ello que dedicamos esta subsección, aunque de forma muy breve, para describir esta herramienta y dar un ejemplo sencillo y claro que la esponga.

Recordemos que una *superficie* S , es una variedad topológica bidimensional.

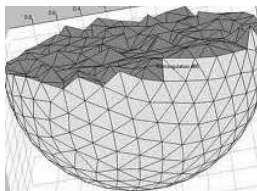


Figura 1.11: Triangulación de una superficie.

Definición 1.2.21. Una *triangulación* \mathcal{T} de una superficie S , consiste de una familia de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ tales que cubren a S , y una familia de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$, donde cada T'_i es un triángulo en el plano \mathbb{R}^2 . Al elemento T_i de la triangulación lo llamamos “*triángulo*”, (posteriormente veremos que cada T_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, corresponde a un *2-simplejo* al que nombraremos Δ^2). El subconjunto de las T_i que es la imagen de los vértices y lados del triángulo T'_i bajo φ_i , los llamamos vértices y lados respectivamente. Finalmente es requerido que cualesquiera dos triángulos T_i y T_j o sean disjuntos, o tengan un vértice en común, o un lado entero en común. (Véase la Figura 1.11 y la Figura 1.12).

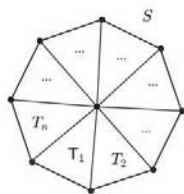


Figura 1.12: Triangulación de una superficie S

Ejemplo 1.2.3. Consideremos la superficie de un tetraedro ordinario en E^3 . Éste es homeomorfo a \mathbb{S}^2 . Además, resulta fácil exhibir cuatro triángulos que satisfacen las condiciones para la triangulación de \mathbb{S}^2 , los cuales se eligen en E^3 .

Resulta fácil extender esta idea a un cierto conjunto de poliedros con determinadas características, tales que concuerden con la geometría que queremos tratar.

Recordemos que X es un conjunto convexo si cualquier recta que une a un par de puntos dentro de X está completamente contenida en X . Tomemos de esta manera X un espacio topológico metrizable en el cual tenga sentido la convexidad, es decir, un espacio X en el que hayan segmentos de rectas o geodésicas (según sea el caso), que unan un par de puntos arbitrarios y que estén completamente contenidos en X .

Definición 1.2.22. Un *poliedro convexo* P en X , es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de X , tal que la colección L de lados es localmente finita en X . (Véase Figura 1.13)

Obsérvese que cada lado de un poliedro convexo 3-dimensional P en X , tiene dimensión 2. Y cada lado de un poliedro convexo 3-dimensional P en X , es un poliedro convexo, cf. [26] y [32], para ver los detalles.

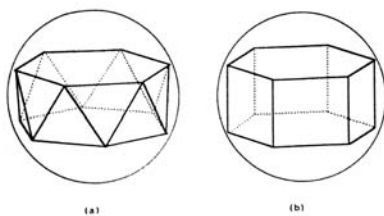


Figura 1.13: Poliedros convexos.

Definición 1.2.23 (*Envolvente Convexa*). Diremos que la envolvente convexa de un conjunto de puntos V en X , de dimensión n , es la intersección convexa de todos los conjuntos que contienen a V , i.e. dados k puntos x_1, \dots, x_k , su envolvente convexa viene dada por

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Tratemos ahora la *orientabilidad* en una variedad topológica M . En un contexto de triangulación podemos dar la idea de orientabilidad como sigue: Si \mathcal{T} es una triangulación para una superficie S , cada triángulo $T_i = \Delta^2$, admite dos posibles orientaciones a las que podemos llamar θ y $-\theta$. Éstas a su vez inducen una orientación en la frontera, ya sea abc o bien cba donde a, b y c son los vértices de cada triángulo T_i (véanse Figura 1.14.(a) y Figura 1.14.(b)). Podemos identificar cada una de las orientaciones del

triángulo como una forma de girar en pequeñas regiones, como discos. Es decir, podemos ver también que un triángulo orientado, orienta discos pequeños contenidos en él.

Diremos que dos triángulos que son adyacentes tienen orientación compatible, si ambos admiten la misma orientación al identificarlos e inducen orientaciones opuestas en sus aristas compartidas, lo cual cancela la orientación en dichas aristas. (Véase Figura 1.14.(c))

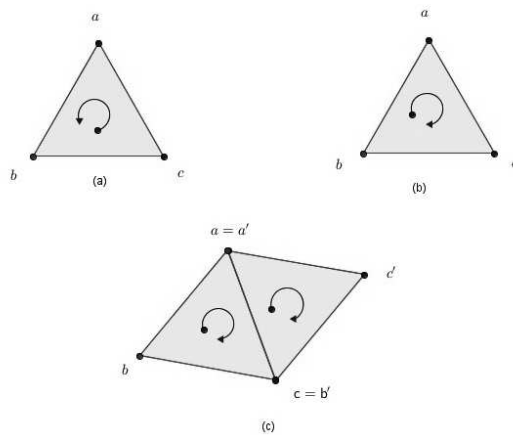


Figura 1.14: (a) Orientación abc . (b) Orientación cba . (c) Compatibilidad de orientaciones.

También podemos determinar la orientación en espacios vectoriales a través de sus bases¹². Para esto sean \mathcal{B} , \mathcal{D} dos bases ordenadas de la variedad M . Definamos la relación “ \sim ” entre \mathcal{B} y \mathcal{D} , como sigue, $\mathcal{B} \sim \mathcal{D}$ si la matriz de cambio de base $A \in (\text{GL}, \mathbb{R})$ tiene determinante positivo. Esta relación es una relación de equivalencia sobre una base ordenada \mathcal{B} . Como cada matriz en (GL, \mathbb{R}) tiene determinante con signo positivo o negativo, entonces hay únicamente dos clases de equivalencia en el cociente (\mathcal{B}/\sim) .

Definición 1.2.24 (Orientabilidad). Cada clase de equivalencia en (\mathcal{B}/\sim) es llamada una orientación en M , i. e., una orientación en M es un conjunto θ de bases ordenadas de M , con la siguiente propiedad si $\lambda \in \theta$ y $F \in \mathcal{B}$,

¹²Recordemos que estamos tratando con espacios métricos normados M , por lo que para cada p en el espacio M se tiene que $T_p M$ es su espacio vectorial asignado.

entonces $F \in \theta$ si y únicamente si, la matriz de cambio de base de λ a F tiene determinante positivo. Llamamos a esta, una orientación positiva de M . Dada una orientación positiva, θ de M , entonces, la opuesta la llamaremos orientación negativa y la denotaremos como $-\theta$.

Definición 1.2.25. Diremos que una superficie S es orientable cuando tiene una triangulación en la que todos sus elementos adyacentes estén orientados de forma compatible.

Si una superficie es orientable, entonces toda curva cerrada \mathcal{C} contenida en la superficie S preserva la orientación. También podemos decir que una superficie S , es orientable si y sólo si no contiene una banda de Möbius o alguno de sus equivalentes. En caso contrario es no orientable.

Para extender la idea de orientación a una 3-variedad M , usemos los poliedros convexos $P_i \in M$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, de modo tal, que a cada cara, a cada arista y a cada vértice de $P_i \in M$ se le asigne una orientación que sea compatible con la orientación del $P_j \in M$ adyacente, donde $i \neq j$, es decir, que cada P_i tenga una triangulación en la que todos sus elementos adyacentes estén orientados de forma compatible con los elementos de P_j , de modo que al identificarlos la orientación sea compatible.

Definición 1.2.26 (3-Variedad Orientable). Diremos que una 3-variedad es orientable si admite una triangulación (con poliedros convexos) en la que todos sus elementos adyacentes estén orientados de forma compatible. Otra manera de definir una 3-variedad orientable es si ésta admite una orientación en términos de 1.2.24.

1.3. Conceptos Básicos de la Teoría de Nudos.

A continuación veremos, en breve, algunas nociones básicas sobre la *teoría de nudos*, como son las definiciones de *nudo o enlace*. Así mismo veremos la definición de *trenza* y la relación que guarda con los nudos o enlaces. Tales conceptos nos ayudarán a comprender mejor el trabajo desarrollado en el capítulo 3 y el apéndice A.

1.3.1. Nudos y Enlaces.

Definición 1.3.1 (*Nudo*). Sea $X = \mathbb{R}^3$ o \mathbb{S}^3 . A un subconjunto K de X lo llamamos *Nudo* si K es homeomorfo a \mathbb{S}^1 , es decir, un nudo es una curva, $K \subset X$, simple y cerrada.

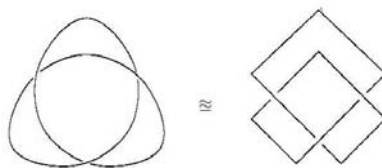


Figura 1.15: Nudo *Trébol* y su representación poligonal.

Más general tenemos que L es un *enlace*, si L es homeomorfo a la unión disjunta de dos o más esferas $\mathbb{S}_1^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}_r^1$ encajadas en X . En otras palabras, L es un enlace si es la unión disjunta y finita de r componentes, donde cada componente es una curva cerrada y simple.

Para evitar los llamados Nudos "*Salvajes*", suele pedirse que la curva K sea homeomorfa a una poligonal, en cuyo caso lo llamaremos *Nudo Manso* (véase la Figura 1.15 y la Figura 1.16). Nosotros trabajaremos con los nudos o enlaces mansos.

Definición 1.3.2. Dos nudos o enlaces K y K' en X son equivalentes si podemos transformar de manera continua, sin cortes y sin autointersecar uno en el otro, es decir, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$, tal que $h(K) = K'$. De este modo tenemos que (X, K) es homeomorfo a (X, K') .

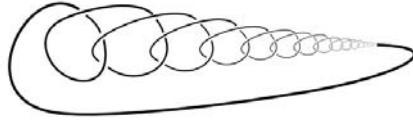


Figura 1.16: Nudo salvaje

Definición 1.3.3 (*Isotopía*). Una *deformación isotópica* de un espacio topológico X , es una familia de homeomorfismos h_t , $0 \leq t \leq 1$, de X en si mismo, tal que h_0 es la identidad, i.e., $h_0(p) = p$ para toda $p \in X$, y la función $H : X \rightarrow X$ dada por $H(t, p) = h_t(p)$ es un homeomorfismo para cada t .

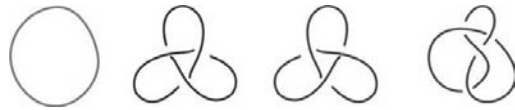


Figura 1.17: Algunos tipos de nudos.

Definición 1.3.4. Un proyección P de un nudo K en \mathbb{R}^2 , lo llamamos proyección regular si y sólo si:

- i) Los únicos puntos múltiples de K , son puntos dobles y existe un número finito de ellos,
- ii) los puntos dobles que existen no son la imagen de algún vértice de K .

Definición 1.3.5 (*Diagrama de un nudo*). Sea K un nudo. Definimos el diagrama P de K , como una proyección regular de K en el plano \mathbb{R}^2 tal que tiene arcos distinguidos, es decir, se distinguen los arcos que pasan por arriba del plano, (véase Figura 1.18).

Otra manera de ver si dos nudos son equivalentes es usando las *Movidas de Reidemeister*, las cuales se dan en términos de los diagramas que representan a los nudos y son las siguientes.

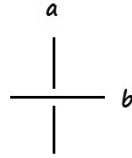


Figura 1.18: Un cruce de arcos o arco distinguido en un diagrama.

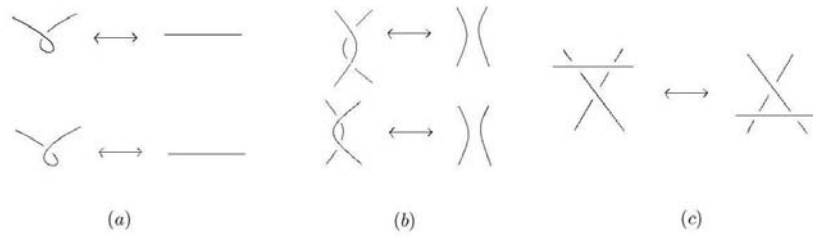


Figura 1.19: (a) R_1 y R'_1 . (b) R_2 y R'_2 . (c) R_3 .

Teorema 1.3.6 (Movidas de Reidemeister). *Dos diagramas de nudos, K y K' , representan al mismo nudo si y sólo si estos difieren por una sucesión finita de movimientos del tipo R_1, R_2 o R_3 .*

Definición 1.3.7 (Nudo o enlace alternante). Diremos que un nudo o enlace es alternante si tiene un *diagrama alternante*, es decir, si después de elegir un punto y una dirección en la cual lo recorreremos, los cruces se van alternando por arriba y por abajo hasta llegar al punto inicial.

Ahora bien, el complemento de un nudo o enlace K encajado en $X = \mathbb{R}^3$ o \mathbb{S}^3 , es el concepto usual de complemento de un espacio topológico, es decir, el complemento de un nudo K es $X \setminus K := \{x \in X \mid x \notin K\}$.

1.3.2. Trenzas.

Otros objetos matemáticos que nos interesan son las trenzas, las cuales definiremos a continuación.

Definición 1.3.8 (*Trenza β*). Sean Π un plano paralelo al plano XY en \mathbb{R}^3 y p_1, \dots, p_n , n puntos distintos en el plano Π , y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n arcos en \mathbb{R}^3 tales que

$$\alpha_i(0) \in \{p_1, \dots, p_n\} \subset \Pi \text{ y } \alpha_i(1) \in \{p_1, \dots, p_n\} \subset XY,$$

diremos que β es una trenza de n -hebras, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son disjuntos y la proyección regular de los arcos, junto con sus puntos extremos en un plano perpendicular a Π , siempre es decreciente. Además los puntos finales p'_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ son los mismos n puntos iniciales p_i permutados.

Es útil remarcar que las trenzas tienen asociada una permutación, puesto que los puntos iniciales p_i son los mismos puntos finales p'_i , salvo una permutación dada por el grupo simétrico de n elementos. Teniendo así, por ejemplo, que los p'_i pueden tener asociada la permutación identidad. Si esto pasa diremos que la trenza β es una *trenza pura*.

El conjunto de trenzas de n hebras B_n , tiene una estructura de grupo. Estas propiedades fueron estudiadas por el matemático *Emil Artin* (1925), por tal razón al grupo B_n , también se le conoce con el nombre de *grupo de Artin*. Nosotros veremos que a partir de las trenzas geométricas podemos describir dicho grupo.

Comencemos por determinar los elementos del grupo. Para esto, sea σ_i el i -ésimo cruce entre los arcos α_i y α_{i+1} , donde σ_i , es una permutación que transpone dichos arcos y deja fijos los $(n - 2)$ restantes, tal que α_i pasa por arriba de α_{i+1} en su proyección al plano perpendicular. Definimos σ_i^{-1} como el cruce inverso entre α_i y α_{i+1} (véase la Figura 1.20.(a) y la Figura 1.20.(b)). Estableceremos la operación entre σ_i y σ_j , como el operador concatenación, es decir, $\sigma_i * \sigma_j = \sigma_i \sigma_j$, que consta de realizar primero el i -ésimo cruce entre α_i y α_{i+1} , seguido del j -ésimo cruce entre α_j y α_{j+1} , donde puede ser que $i \geq j$ o $i < j$ (obsérvese la Figura 1.21).

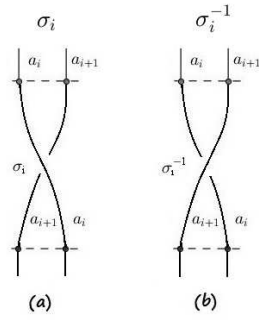


Figura 1.20: (a) Cruce positivo. (b) Cruce negativo.

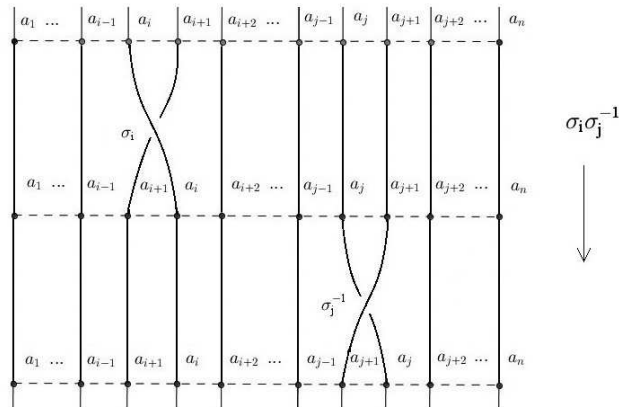


Figura 1.21: Concatenación $\sigma_i \sigma_j^{-1}$.

Note que la identidad del grupo Id , es la trenza sin cruces que por lo tanto induce la permutación identidad, es decir, no hay cruces en el diagrama (véase la Figura 1.22). La concatenación de $\sigma_i \sigma_i^{-1}$ nos resulta en la identidad $\sigma_i \sigma_i^{-1} = Id$, entonces, hay elementos inversos, donde σ_i^{-1} se obtiene geoméricamente de reflejar σ_i en el diagrama (observe la Figura 1.23).

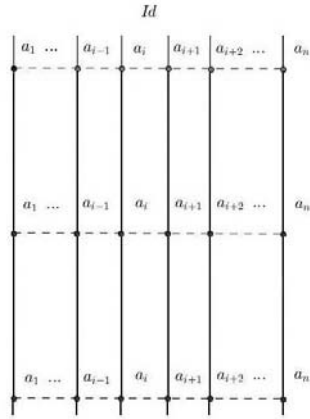


Figura 1.22: La identidad Id .

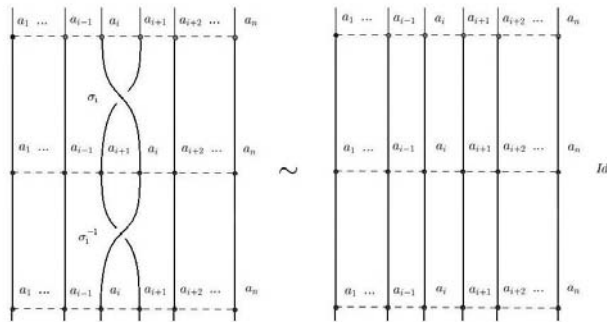


Figura 1.23: Elemento inverso de σ_i ; σ_i^{-1} .

También es claro, por la operación de concatenación, que el grupo es asociativo. Esto es, si tomamos $i \neq j \neq h$, entonces $(\sigma_i \cdot \sigma_j) \cdot \sigma_h$ es equivalente a $\sigma_i \cdot (\sigma_j \cdot \sigma_h)$. Es decir, $(\sigma_i \cdot \sigma_j) \cdot \sigma_h = \sigma_i \cdot (\sigma_j \cdot \sigma_h)$ con i, j y h no necesariamente iguales, como lo muestra el ejemplo en el diagrama siguiente (Figura 1.24).

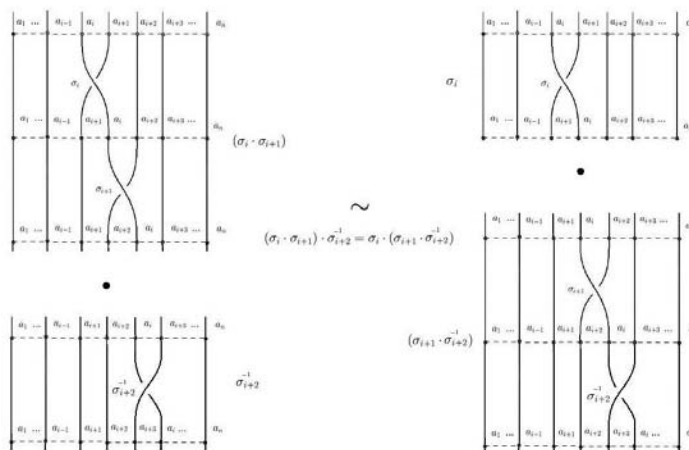


Figura 1.24: Asociatividad en la operación.

Podemos observar, además, que si $|i - j| \geq 2$, entonces la concatenación conmuta ; esto es $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, véase la Figura1.25. Finalmente, podemos ver que una concatenación consecutiva $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$, es equivalente a $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. Esto es, $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sim \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ (observe la Figura1.26). Bajo estas condiciones, con dichas observaciones geométricas y con tal operación podemos definir el grupo del siguiente modo.

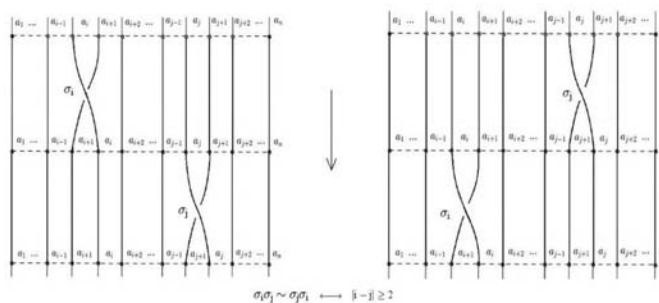


Figura 1.25: La distancia entre los subíndices $|i - j| \geq 2$.

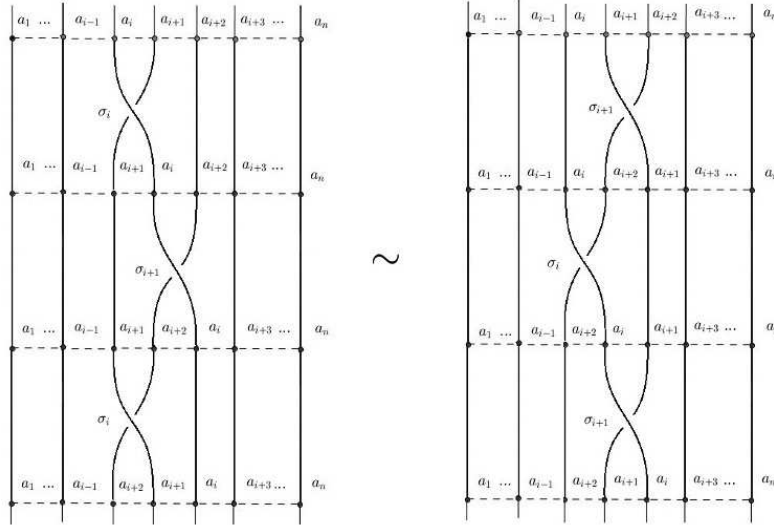


Figura 1.26: Equivalencia $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sim \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

Definición 1.3.9 (*Grupo de trenzas B_n*). El grupo de trenzas B_n (de n hebras,) está conformado por el conjunto de trenzas B_n y el operador concatenación.

Teorema 1.3.10. *El grupo de trenzas B_n , de n hebras, es tal que:*

- (a) $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ son sus generadores.
- (b) Tiene las siguientes relaciones:
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ cuando $|i - j| \geq 2$.
 - $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n - 2$

□

Teorema 1.3.11 (Alexander). *Cada nudo o enlace es combinatoriamente equivalente a una trenza cerrada.*

Si tomamos una trenza de n hebras y la cerramos de manera ordenada sin producir nuevos cruces, identificando los puntos p_i y p'_i , obtenemos un nudo o enlace dependiendo del número de ciclos disjuntos que dan la

descomposición de la permutación asociada. A esta operación la llamaremos la *cerradura de una trenza*. Como veremos a continuación, por el Teorema de Alexander todo enlace tiene asociada una trenza cerrada y viceversa. Además a través del algoritmo que describiremos en las líneas siguientes, sabremos de que manera obtenerlas.

DEMOSTRACIÓN: (del Teorema 1.3.11)

Dado un enlace arbitrario L de n componentes, representado en su forma poligonal, analizaremos como se puede ver como una trenza cerrada. Sea Π_L el plano que contiene a la proyección de L , consideremos a $l \subset E^3$, una recta perpendicular al plano Π_L , a la que llamaremos eje de la trenza. Sea \hat{l} el punto de intersección de l con dicho plano (elegido de modo arbitrario). Ahora elegimos a l de forma que sea disjunta a L , además de que para cada segmento de L , al proyectar no interseque a L , y consideramos la proyección de L en E^2 (véase Figura 1.27). Posteriormente asignaremos una dirección positiva a la rotación con respecto de l , que representaremos en el diagrama con el siguiente símbolo \odot .

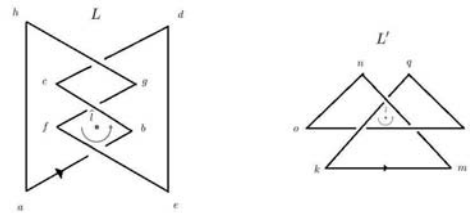


Figura 1.27: Viendo el nudo trébol como una trenza cerrada.

Sea ab un segmento orientado de L . Diremos que este segmento ab tiene orientación positiva (respectivamente negativa) y lo denotaremos como $ab > 0$ (respectivamente $ab < 0$), si el radio vector asociado a \hat{l} de ab , que va desde a a b a lo largo de ab , rota con respecto a l en dirección positiva (respectivamente negativa). Note que si L está en una posición general, cada segmento de L puede ser positivo o negativo. Se dice que un enlace (cerrado y orientado) es una trenza cerrada si cada segmento del enlace es positivo y, por tanto, se recorre L con una orientación positiva.

Ahora bien, si en cualquiera de los cruces de los segmentos de L se

invierte la orientación de positiva a negativa, se puede realizar una isotopía conveniente a dichos segmentos, de modo tal, que nos resulte un recorrido en orientación positiva, esto, con respecto a l . Así obtenemos las condiciones para representar cualquier nudo o enlace cerrado y orientado, como una trenza cerrada y por lo tanto su respectivo diagrama.

Para una demostración formal de este teorema cf. [5, pags. 37-42].

□

Como ejemplo para ilustrar estas ideas tenemos los diagramas de los enlaces L y L' que representan, ambos, al nudo trébol. Los segmentos cd , de , ef y fg del enlace L son negativos. Ahora, realizando cierto número finito de isotopías en los segmentos de L que invierten la orientación, podemos llevar L a L' . Observe que para L' el radio vector de \hat{l} correspondiente a L' en ningún caso rota en dirección negativa a l , por lo que el enlace L' es recorrido en sentido siempre positivo.

Para obtener una trenza a partir de un enlace L dado, toda vez que se ha seleccionado el eje de la trenza y después de realizar las isotopías adecuadas para que dicho enlace se recorra en un sentido positivo; al diagrama resultante le podemos realizar un corte con una semirrecta que empiece en \hat{l} y que no toque ningún cruce de éste, de tal forma que, nos permita partir al enlace para obtener una trenza abierta.

Finalmente, tendremos que una trenza cerrada es un enlace alternante, si al hacer la operación cerradura para dicha trenza, ésta respeta las condiciones de la definición de nudo o enlace alternante.

Capítulo 2

Geometría Hiperbólica 3-dimensional.

“El nombre de Geometría Hiperbólica acuñado por Felix Klein[1871], hace énfasis en una clara relación entre las cónicas y la geometría proyectiva; que en palabras de A. Marden: “Es un doble acierto, ya que por un lado en el sentido etimológico de la palabra Hipérbole -que proviene del griego- significa exceso, e indudablemente la geometría Hiperbólica habla de un exceso de líneas. Y por el otro también lo es comparada con la geometría euclidiana”¹.

El objetivo de este capítulo es mostrar de manera sucinta la geometría de hiperbólica 3-dimensional, sus modelos, las estructuras analíticas que presentan y algunas de sus herramientas.

Comenzaremos por listar algunos de los puntos clave de la geometría hiperbólica, a modo de introducción de este capítulo. Esto, bajo el entendido de que el lector está familiarizado con la geometría hiperbólica en dos dimensiones, especialmente con los modelos de ésta, el disco de Poincaré, el de Beltrami-Klein y el del plano superior. Para referencias futuras o para profundizar más sobre el tema consúltese [3] o [15].

Las siguientes propiedades básicas se distinguen y diferencian de los axiomas de la geometría elíptica y la euclidiana, y nos resultan importantes para una mejor comprensión de los modelos del espacio hiperbólico.

¹Cf. [19, págs. 7 y 8].

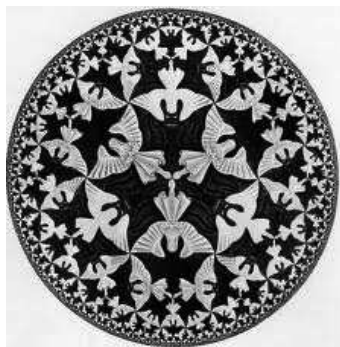


Figura 2.1: “Circle Limit IV” M.C. Escher.

- I.- La suma τ de los ángulos internos en un triángulo hiperbólico Δ siempre es menor que π radianes (véase figura 2.2). Lo cual podría parecer una característica poco agradable, pues parece que no hay claridad con respecto a la suma de los ángulos de un triángulo, sin embargo, el déficit de esta suma será directamente proporcional al área del triángulo. Esto es

$$\alpha + \beta + \gamma = \tau$$

donde $0 \leq \tau < \pi$, está relacionada a través de

$$\tau = \pi - C(\Delta)$$

donde C es una constante y Δ es el área del triángulo en cuestión. La constante C depende de las unidades que se seleccionen para medir longitudes y áreas.

Observemos que en los casos límite tenemos:

- a) Cuando $\tau = 0$, lo llamamos triángulo ideal y decimos que tiene sus vértices en el infinito.
- b) En el otro caso límite tenemos que $\tau = \pi$. Este es el caso límite de triángulos hiperbólicos de áreas “muy chicas”². “De hecho

²Entiéndase como el concepto de cálculo, un área infinitesimal.

en una escala infinitesimal, la geometría hiperbólica se puede interpretar como la geometría euclidiana”³.

- II.- No se preserva la isotropía en el espacio hiperbólico. Esto es, de forma más sencilla, que no hay semejanza, pues de ninguna manera se puede escalar una figura geométrica sin alterar sus ángulos o su forma. Del mismo modo, no necesariamente se conserva la congruencia, aunque esta última sí puede suceder. Se sigue así, que todos los triángulos hiperbólicos con sus ángulos iguales son isométricos (los triángulos hiperbólicos son “rígidos”).

Por los hechos anteriores I y II, se puede notar que la elección de la unidad de medida no resulta tan arbitraria como en el espacio euclideo, pues se puede privilegiar a una unidad más eficaz tomándonos una medida que tenga una propiedad especial. Verbigracia, para el caso entre la relación de los ángulos y el área hiperbólica de un triángulo, se puede fijar una escala en la cual C sea igual a 1. También podríamos seleccionar como unidad a la longitud de un lado de un triángulo equilátero, cuyos ángulos son iguales a $\frac{\pi}{4}$. Un hecho notable es que en la geometría hiperbólica se puede expresar de una manera más sencilla el área de un triángulo.

- III.- Para cualquier θ tal que $0 \leq \theta < \frac{(n-2)\pi}{n}$ existe un polígono hiperbólico regular de n -lados con ángulos iguales a θ . Observe que estamos usando θ indiscriminadamente para denotar vértice y el ángulo correspondiente a dicho vértice. Más general, una condición necesaria y suficiente para la existencia de polígonos hiperbólicos convexos de n -lados con ángulos en los vértices θ_i , con $0 \leq \theta_i < \pi$, recorridos en el sentido de las manecillas del reloj es que $\tau < (n-2)\pi$, donde τ es la suma de los ángulos internos. El polígono es único salvo isometrías y su área es $(n-2)\pi - \tau$.

- IV.- Dos poliedros hiperbólicos convexos que son combinatoriamente equivalentes⁴, con los mismos ángulos diédricos y de valencia 3⁵, son en todos sus vértices isométricos⁶.

³Cf. [19, p. 7].

⁴En el sentido de la teoría de complejos simpliciales.

⁵Recuérdese que la valencia o grado de un vértice, según la teoría de gráficas, es el número de aristas incidentes al vértice.

⁶Ídem p. 7.

V.- El volumen hiperbólico “ V ” (véase 2.3.6), de una bola B y el área S de su frontera δB , la cual es una superficie esférica, están delimitados por el crecimiento exponencial del radio hiperbólico R . La relación del área de la superficie con la del volumen, es tal que se aproxima a 2 toda vez que $R \rightarrow \infty$.

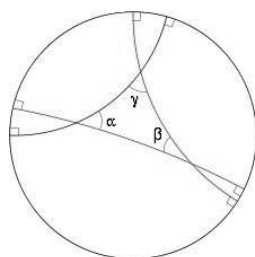


Figura 2.2: Triángulo hiperbólico en el modelo del disco de Poincaré.

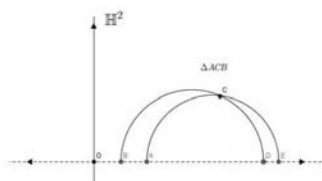


Figura 2.3: Triángulo hiperbólico en \mathbb{H}^2

En suma, resulta que en el plano y en el espacio hiperbólico existen “más formas geométricas” que en el plano y en el espacio euclidiano, con una tendencia clara a la rigidez, esto, a groso modo, en el sentido de que no hay una relación de semejanza. Más aún, hay considerablemente mayor “espacio” en esta geometría, para construir tales formas geométricas. A. Marden describe en una frase esta idea: “*En estimación de Dick Canary, para poder llevar a cabo un juego de beisbol en un plano hiperbólico, se requerirían más de 1×10^{100} jugadores⁷ para proporcionar el mismo nivel*

⁷Un dato curioso es que este número lleva el nombre de Googol, i.e. 1Googol = 1×10^{100} ; término acuñado por el matemático Edward Kasner en su libro *Las matemáticas y la imaginación*.

de cobertura de los jardines como lo es en el plano euclidiano”^{8,9}.

Para aclarar un poco esta analogía, debemos acordarnos que en un partido de beisbol se cuenta con 9 jugadores, los cuales se reparten por un jardín que tiene la forma de un sector circular, también tenemos que recordar que en el modelo del disco de Poincaré¹⁰, entre más nos acerquemos al borde del disco, la distancia entre puntos cercanos a la frontera y el centro tiende al infinito. Una representación de este modelo es la famosa pintura que se conoce como “Ángeles y Demonios” de M.C. Escher (Véase Figura2.1 y Figura2.4). De este modo si se quisiera cubrir un campo de beisbol en un plano hiperbólico requeriría sin duda de un mayor número de jugadores, ¡lo puede imaginar, se necesitarían más de un uno seguido de cien ceros de jugadores de beisbol para poder cubrir solamente un campo! Una cantidad mucho mayor a la de habitantes del planeta tierra o mayor a la cantidad de estrellas visibles en el universo, inclusive, una cantidad mayor “al número de átomos en el universo”¹¹

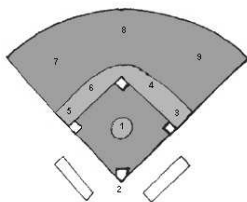


Figura 2.4: Un juego de beisbol en \mathbb{R}^2 .

⁸Ibidem p. 7.

⁹Dick Canary es actualmente profesor e investigador en el área de topología algebraica y geometría hiperbólica, en la universidad de Michigan, E.U.A.

¹⁰Uno de los modelos de la geometría bidimensional.

¹¹Según la revista *Nature*, se estima que la cantidad de estrellas en el universo es de 3×10^{23} , por otro lado se estima que el número de átomos oscila entre los 4×10^{78} y 6×10^{79} .

2.1. Algunos Modelos Hiperbólicos. El Modelo del Semiespacio Superior \mathbb{H}^3 , el Modelo de la Bola Unitaria y el modelo del Hemisferio de Radio Imaginario o modelo de *Klein* \mathcal{H}^3 .

Es turno de mostrar algunos de los modelos de la geometría hiperbólica 3-dimensional. Sin embargo, aclaramos que únicamente abordaremos de manera superficial estos modelos, sin profundizar a detalle. Dejamos de un lado tópicos que pueden resultar de sumo interés para la geometría hiperbólica misma, pero que, abordarlos con mayor profundidad requiere de un texto más completo. A pesar de esto, expondremos lo esencial para que el trabajo se desarrolle claro y sin mayor dificultad.

Los resultados de estos modelos, así como, algunos otros conceptos se pueden consultar en [12], [13], [16], [18], [26] y [32].

2.1.1. El Modelo del *Semiespacio Superior* \mathbb{H}^3 .

Definamos primero el modelo del *Semiespacio Superior* que es posiblemente el modelo con el que estamos más familiarizados. Sea \mathbb{H}^3 dado como sigue

$$\mathbb{H}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ahora bien, si recordamos cómo definimos la extensión de Poincaré en la sección [1.1.5.1] tenemos que si $T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^3)$, entonces por el Teorema de Liouville 1.1.19, tenemos que $T \in \widehat{\mathbb{M}}^3$, de esta forma podemos ver que

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) = \left\{ T \in \widehat{\mathbb{M}}^3 : T(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3 \right\},$$

y como resultado de esto tendremos que,

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) = \widehat{\mathbb{M}}^2,$$

ya que de la definición de la extensión de Poincaré es evidente que

$$\widehat{\mathbb{M}}^2 < \text{Aut}(\mathbb{H}^3).$$

Más aún, si $T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^3)$ es claro, entonces, que $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$; luego la restricción de T a \mathbb{R}^2 es un automorfismo conforme (o anticonforme) de

ésta; además, es una transformación (extendida) de Möbius cuya extensión de Poincaré también resulta exáctamente ser ésta. En otras palabras tenemos que

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) = \widehat{\mathbb{M}}^2.$$

Así tenemos que \mathbb{H}^3 junto con la métrica Rimanniana¹² dada por

$$ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{x_3},$$

es un modelo de la geometría hiperbólica 3-dimensional. Para este efecto podemos identificar \mathbb{H}^3 con

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} | t > 0\},$$

de la manera como se había expuesto en el capítulo anterior, por lo que la métrica hiperbólica resultante es

$$ds = \frac{\sqrt{|dz|^2 + dt^2}}{t}.$$

Podemos, con ésto, definir en particular la longitud de curvas. Un ejemplo conveniente de ello, es la longitud hiperbólica de una trayectoria diferenciable

$$\mu : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^3 \text{ donde } \mu(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha)),$$

que está dada por la siguiente fórmula,

$$\mathcal{L}(\mu) = \int_{\mu} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{x_1'^2(\alpha) + x_2'^2(\alpha) + x_3'^2(\alpha)}}{x_3(\alpha)} d\alpha.$$

Y como $\mu([a, b])$ es un subconjunto compacto de \mathbb{H}^3 , pues lo hereda de la topología usual de \mathbb{R}^3 , existen valores $0 < T < S < \infty$ tales que $x_3(\alpha) \in [T, S]$.

- Podemos ver en particular que

$$\frac{1}{S} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\mu) \leq \mathcal{L}(\mu) \leq \frac{1}{T} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\mu), \quad (2.1.1.1)$$

donde $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\mu)$ denota la longitud euclidiana de μ . Recordando que

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\mu) = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(\alpha) + x_2'^2(\alpha) + x_3'^2(\alpha)} d\alpha.$$

¹²Cf. [38, p. 72].

Definición 2.1.1. La distancia hiperbólica $d_{\mathcal{H}}(p, q)$ entre dos puntos $p, q \in \mathbb{H}^3$, está dada por el ínfimo de las longitudes de todos los caminos continuos que hay entre p y q .

Con lo anterior podemos mostrar, que dicha función propuesta como distancia, $d_{\mathbb{H}^3}$, está bien definida. De modo que:

- i) $d(p, q) \geq 0$. Además $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$. Esta aseveración la obtenemos como resultado de la desigualdad (2.1.1.1), la cual nos dice que $d(p, q) = 0$ si y solamente si $\|p - q\| = 0$,
- ii) $d(p, q) = d(q, p)$ y
- iii) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$. La desigualdad del triángulo, donde $p, q, r \in \mathbb{H}^3$, no necesariamente iguales. Esta afirmación resulta clara dado que si $p, q, r \in \mathbb{H}^3$, entonces existen trayectorias μ_1, μ_2 entre p y r así como entre r y q respectivamente de modo tal que por concatenación tenemos una nueva trayectoria μ_3 de p a q tal que:

$$\mathcal{L}(\mu_3) = \mathcal{L}(\mu_1) + \mathcal{L}(\mu_2)$$

Por lo que

$$d(p, q) \leq \mathcal{L}(\mu_1) + \mathcal{L}(\mu_2).$$

Dada la forma en que definimos a “ d ”, tenemos que la siguiente proposición es válida.

Proposición 2.1.2. Sea d como se definió anteriormente, entonces d es una métrica para \mathbb{H}^3 a la cual también llamamos métrica hiperbólica $d_{\mathcal{H}}$.

De esta manera el espacio \mathbb{H}^3 junto con su métrica $d_{\mathcal{H}}$, $(\mathbb{H}^3, d_{\mathcal{H}})$ es un modelo del espacio hiperbólico 3-dimensional al que llamaremos sólo \mathbb{H}^3 .

Finalmente, tenemos un resultado importante. Un subconjunto S de \mathbb{H}^3 es una esfera hiperbólica de \mathbb{H}^3 si y sólo si S es una esfera euclidiana de E^3 que está contenida en \mathbb{H}^3 .

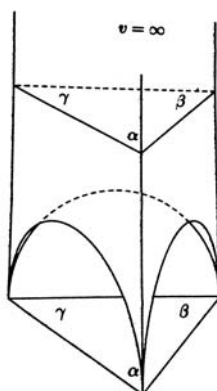


Figura 2.5: Un triángulo hiperbólico en \mathbb{H}^3 , con vértices en el infinito.

2.1.2. El Modelo de la *Bola Unitaria* \mathcal{B}^3 .

Para construir este modelo, consideremos las bolas (véase Figura 2.6)

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - p\| < r\} \subset \mathbb{R}^3.$$

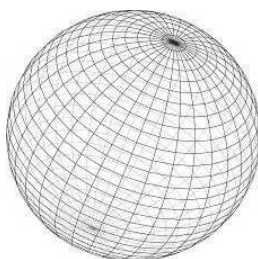


Figura 2.6: Bola de radio r en \mathbb{R}^3 .

Podemos construir este modelo si llevamos la métrica de \mathbb{H}^3 , $d_{\mathcal{H}}$ a una métrica hiperbólica para $B_r(p)$. Esto lo podemos hacer a través de una transformación de Möbius conveniente $\psi \in \widehat{\mathbb{M}}^3$, de forma tal que

$$\psi(\mathbb{H}^3) = B_r(p). \quad (2.1.2.1)$$

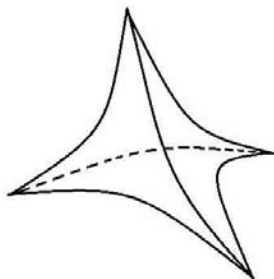


Figura 2.7: Un tetraedro regular hiperbólico, centrado en el origen de \mathcal{B}^3 .

Por ejemplo, si elegimos $p = 0$ y $r = 1$ obtenemos

$$\mathcal{B}^3 = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1\},$$

luego la métrica Riemanniana está dada por

$$ds = \frac{2(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2)^{1/2}}{1 - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}.$$

Como ejemplo vemos que si tomamos una reflexión sobre el hiperplano $x_3 = 0$ del modo siguiente

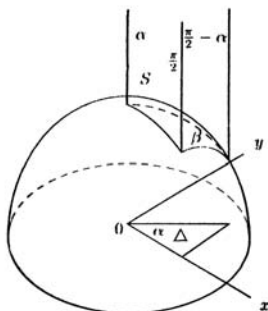
$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto x - 2(x \cdot e_3)e_3 = (x_1, x_2, -x_3)$$

y una reflexión en la esfera 2-dimensional centrada en el punto $e_3 = (0, 0, 1)$ y de radio $\sqrt{2}$

$$\varphi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3 : x \longmapsto \frac{2(x - e_3)}{\|x - e_3\|^2} + e_3,$$

entonces tenemos que la transformación de Möbius $\psi = \varphi \circ \phi : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{B}^3$, definida por esta composición, nos sirve para ilustrar el tipo de transformaciones que podemos usar para pasar de la métrica de \mathbb{H}^3 a la métrica en \mathcal{B}^3 . Ya que si utilizamos la identificación $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, tenemos que

$$\varphi(z, t) = (0, 1) + \frac{2(z, t - 1)}{(|z|^2 + (t - 1)^2)}.$$

Figura 2.8: Un triángulo en $\mathbb{H}^3 \cap \mathcal{B}^3$.

Es decir,

$$\psi(x) = \frac{(2x_1, 2x_2, -2x_3 - 2 + x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2)}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2},$$

es la transformación buscada, que nos servirá para heredar la métrica.

Por lo anterior concluimos que $(\mathcal{B}^3, d_{\mathcal{H}})$ es un modelo del espacio hiperbólico 3-dimensional.

2.1.3. El Espacio de Lorentz y el Modelo del *Hemisferio de Radio Imaginario* \mathcal{H}^3 .

Consideremos ahora otro modelo importante, el *Modelo del Hemisferio de Radio Imaginario, modelo de Klein o Cono de Luz* (\mathcal{H}^3), como se le conoce en la física contemporánea (véase Figura 2.9). Comencemos hablando del *Espacio de Lorentz* que nos ayudará a definir \mathcal{H}^3 .

Realicemos primero una pequeña reflexión, con la finalidad de motivar la imaginación y hacernos una “mejor” idea de la representación de este espacio. Hagamos pues, una analogía entre la esfera de radio r en \mathbb{R}^4 cuya curvatura $\frac{1}{r^2}$ es constante, con el espacio hiperbólico 3-dimensional de curvatura constante negativa. Esto es, la dualidad entre estas dos características nos sugiere pensar que el espacio hiperbólico 3-dimensional debe ser una esfera de radio “imaginario.” Las distancias imaginarias serán

posibles en el $(n + 1)$ -espacio de Lorentz, en particular en el 4 -espacio de Lorentz, utilizando una métrica conveniente la cual viene dada por la métrica a la que llamaremos la *métrica de Minkowski*.

Hablemos, entonces, del espacio de Lorentz. Para este fin comencemos definiendo el producto interior “no degenerado”, que no será ni positivo ni negativo definido.

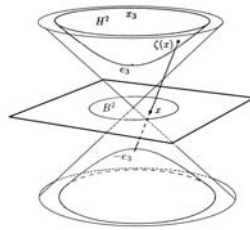


Figura 2.9: Cono de Luz o modelo de *Klein*.

Definición 2.1.3 (*Producto Interno de Lorentz*). Consideremos el espacio \mathbb{R}^4 , entonces el producto interno no degenerado (que no es positivo, ni negativo definido) llamado el producto interno de Lorentz en \mathbb{R}^4 está dado por¹³

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

Definición 2.1.4. El espacio con producto interno que consiste de todos los vectores en \mathbb{R}^4 junto con el producto interno no degenerado de Lorentz es llamado Espacio de Lorentz y denotado como $\mathbb{R}^{(3,1)}$.

Por simplicidad en esta sección seguiremos usando la notación \mathbb{R}^4 en lugar de $\mathbb{R}^{(3,1)}$, sin embargo, al lector debe de quedarle claro que estamos haciendo referencia al espacio de Lorentz indicado. Note que por como se define el espacio $\mathbb{R}^{(3,1)}$ se puede hacer una equivalencia sin problema alguno con el espacio $\mathbb{R}^{(1,3)}$ utilizando, a su vez, una equivalencia conveniente del producto interno de Lorentz, esto es,

$$x \cdot y = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

¹³Es importante aclarar que los resultados que concretamente se dan para espacios 4-dimensionales son sólo un caso particular de las definiciones para espacios n-dimensionales.

La norma de Lorentz de cualquier vector x en \mathbb{R}^4 la podemos definir a través de un número complejo, del siguiente modo,

$$\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}.$$

Así $\|x\|$ puede ser positivo, cero o un complejo puro de signo positivo, más específico, un imaginario i con signo positivo. Si $\|x\|$ es un imaginario positivo entonces convenimos en denotar su valor absoluto (o módulo) como $|\|x\||$.

Además, con esto presente, también podemos definir una métrica para el espacio de Lorentz. La distancia de Lorentz entre dos vectores x, y en \mathbb{R}^4 está dada por el número complejo asociado a

$$d_L(x, y) = \|x - y\|.$$

Igual que sucede con la norma, la distancia $d_L(x, y)$ puede ser o bien positiva, cero o un imaginario positivo. El conjunto de todas las $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $\|x\| = 0$ es el *hipercono* \mathcal{C}^3 definido por la ecuación,

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (2.1.3.1)$$

Al *Hipercono* \mathcal{C}^3 lo llamaremos el *Cono de Luz* de \mathbb{R}^4 (véase Figura 2.10).

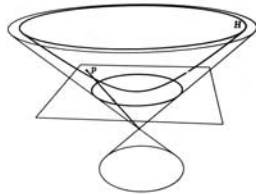


Figura 2.10: Cono de Luz 2-dimensional.

Si $\|x\| = 0$ entonces se dice que es un *vector-luz*. Se dice además, que un vector luz x es positivo (análogamente negativo) si y sólo si $x_1 > 0$ (respectivamente $x_1 < 0$).

Si $\|x\| > 0$ entonces x se dice que es un *vector-espacial*. Se observa que x es un vector espacial si y sólo si sus coordenadas satisfacen la desigualdad siguiente,

$$x_1^2 < x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Si, por el contrario, $\|x\|$ es imaginario de signo positivo, entonces se dice que x es un *vector-temporal* y sus coordenadas satisfacen la desigualdad siguiente,

$$x_1^2 > x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Se dice que un vector temporal x es positivo (análogamente negativo) si y sólo si $x_1 > 0$ (respectivamente $x_1 < 0$). Además, cabe observar que el exterior del cono \mathcal{C}^3 en \mathbb{R}^4 es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^4 que está conformado por el conjunto de todos los vectores espaciales. Así mismo, el interior del cono $\mathcal{C}^3 \in \mathbb{R}^4$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^4 que está conformado por el conjunto de todos los vectores temporales.

También es importante observar que el producto interno de Lorentz corresponde a la forma cuadrática

$$Q(x) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - x_4^2.$$

Consideremos ahora el grupo lineal $O(Q)$ llamado el grupo ortogonal de la forma Q , formado por los isomorfismos $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ llamados transformaciones ortogonales de la forma Q , que dejan invariante tal forma o, en otras palabras, tales que para $x, y \in \mathbb{R}^4$,

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle,$$

de manera equivalente, si $M = \text{diag}[1, 1, 1, -1]$, entonces,

$$A^t M A = M.$$

Donde A representa la matriz asociada a la transformación A .

Definición 2.1.5 (*Transformación de Lorentz*). Una función ϕ , donde $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, es una transformación de Lorentz si y sólo si

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^4.$$

En particular los elementos del grupo ortogonal de la forma Q , son transformaciones de Lorentz.

Una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de \mathbb{R}^4 se dice que es una base Lorentz-ortonormal si $v_4 \cdot v_4 = -1$ y $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker) en cualquier otro caso. Note que la base estandar $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de \mathbb{R}^4 es Lorentz-ortonormal.

Teorema 2.1.6. *Una función $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una transformación de Lorentz si y sólo si ϕ es lineal y $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3), \phi(e_4)\}$ es una base Lorentz-ortonormal de \mathbb{R}^4 .*

Algunos resultados que se pueden mostrar de forma rutinaria son: que si $T \in O(Q)$ entonces $\det(T) = \pm 1$ y que T resulta ser una isometría de \mathbb{R}^4 respecto a la forma cuadrática Q , esto último casi se hereda de la definición de isometría y de la manera en que definimos T .

Ahora, con estos puntos en mente, podemos dar paso a definir \mathcal{H}^3

Definición 2.1.7. Definimos el *Espacio Hiperbólico 3-dimensional de Radio Imaginario* como,

$$\mathcal{H}^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, x \rangle = -1, x_4 > 0\}.$$

Como cada vector v tangente a \mathcal{H}^3 es tal que $\langle v, v \rangle > 0$, tenemos que en la forma Q se define un producto interior positivo definido en cada espacio tangente a este espacio (obsérvese Figura 2.11). Tal producto define entonces una métrica Riemanniana, a la cual llamaremos métrica de *Minkowski*.

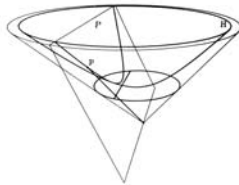


Figura 2.11: Espacio tangente para el caso 2-dimensional.

Definición 2.1.8 (*Métrica de Minkowski*). La métrica de Minkowski viene dada por

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2},$$

en \mathcal{H}^3 .

Ahora consideremos una función $G : \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{H}^3$ definida de la siguiente forma, por cada punto $x \in \mathcal{B}^3$, observamos la recta que pasa por $-e_4$ y

$(x, 0)$. Esta interseca a \mathcal{H}^3 en exactamente un punto $G(x)$. De manera explícita, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in B^3$, entonces

$$G(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - \|x\|^2}, \frac{2x_2}{1 - \|x\|^2}, \frac{2x_3}{1 - \|x\|^2}, \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \right) = (y_1, y_2, y_3, y_4). \quad (2.1.3.2)$$

Luego resulta que G es una isometría, pues,

$$\sqrt{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 - dy_4^2} = \frac{2\|dx\|}{1 - \|x\|^2},$$

y después de hacer algunas operaciones algebraicas, se observa que,

$$\|dy\|^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 - dy_4^2,$$

y como $y = G(x)$, entonces,

$$dy_i = \frac{2dx_i}{1 - \|x\|^2} + \frac{4x_i(xdx)}{(1 - \|x\|^2)^2},$$

de modo que,

$$dy_i^2 = \frac{4dx_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2} + \frac{16x_i dx_i(xdx)}{(1 - \|x\|^2)^3} + \frac{16x_i^2(xdx)^2}{(1 - \|x\|^2)^4},$$

ahora, si sumamos desde $i = 1$ hasta $i = 3$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 dy_i^2 &= \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \left(\|dx\|^2 + \frac{4(xdx)^2}{1 - \|x\|^2} + \frac{4\|x\|^2(xdx)^2}{(1 - \|x\|^2)^2} \right) = \\ &= \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \left(\|dx\|^2 + \frac{4(xdx)^2}{(1 - \|x\|^2)^2} \right), \end{aligned}$$

pues, podemos observar que,

$$\frac{4(xdx)^2}{1 - \|x\|^2} \left(1 + \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \right) = \frac{4(xdx)^2}{1 - \|x\|^2} \left(\frac{1 - \|x\|^2 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \right) = \frac{4(xdx)^2}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

Por otro lado tenemos que,

$$y_4 = \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2}$$

por lo que,

$$dy_4 = \frac{2x dx(1 - \|x\|^2) - (1 + \|x\|^2)(2x dx)}{(1 - \|x\|^2)^2} = \frac{4x dx}{(1 - \|x\|^2)^2},$$

finalmente tenemos que,

$$\left(\sum_{i=1}^3 dy_i^2 - dy_4^2 \right)^{1/2} = \frac{2\|dx\|}{1 - \|x\|^2},$$

como se quería mostrar.

Por lo anterior podemos afirmar que (\mathcal{H}^3, ds) , donde $d_s = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2}$ es un modelo del espacio 3-dimensional, llamado el *Hemisferio de Radio Imaginario*.

Es bueno retomar y hacer notar en este punto que, si $T \in O(Q)$, entonces $T(\mathcal{H}^3)$ tiene dos posibilidades, ser igual a \mathcal{H}^3 o ser igual a

$$\overline{\mathcal{H}^3} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, x \rangle = -1, x_4 < 0\}$$

En $O(Q)$ existe un subgrupo de índice dos, denotado por $O(3, 1)$, formado por aquellas transformaciones ortogonales de la forma Q (transformaciones de Lorentz). Las transformaciones que dejan invariante a \mathcal{H}^3 , las denotaremos como $SO(3, 1)$. Éstas tienen determinante 1. Resulta de este modo que $O(3, 1)$ es grupo de isometrías de \mathcal{H}^3 .

Si ahora contemplamos la siguiente composición $\tau = G \circ \psi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathcal{H}^3$, donde G y ψ se definen como en las definiciones Definición2.1.3.2 y Definición2.1.2.1, entonces obtenemos un isomorfismo τ^* , tal que

$$\tau^* : \widehat{M}^2 \rightarrow O(3, 1),$$

de modo que,

$$\tau^*(\widehat{M}^2) = SO(3, 1).$$

Así el modelo nos permite representar el grupo extendido de Möbius como un grupo de matrices ortogonales respecto a la forma cuadrática Q . Con esto podemos dar paso a la siguiente sección para hablar de isometrías y su utilidad.

Finalmente podemos observar en la siguiente imagen una dualidad proyectiva para el caso 2-dimensional entre un plano y un punto tangencial x , que puede servir como referencia para comprender los modelos de una mejor forma.

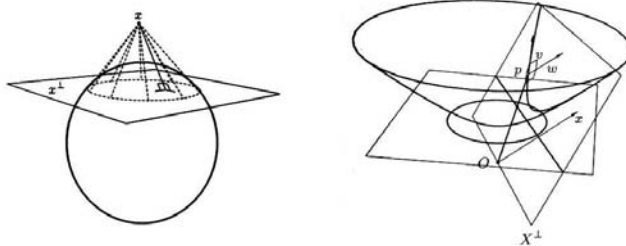


Figura 2.12: Dualidad Proyectiva entre un hiperplano y un punto.

2.2. Isometrías Hiperbólicas.

Resulta conveniente resaltar que podemos usar indistintamente cualquiera de los modelos del espacio hiperbólico. Esto lo logramos a través de las transformaciones de Möbius, las cuales usaremos como isometrías, pues, como se ha expuesto durante la construcción de tales, nos han permitido definir los modelos aplicando algunas de las propiedades de los otros, previamente mostrados.

Esto nos permite utilizar indiscriminadamente cualquiera de los modelos del espacio hiperbólico.

Resulta también que las isometrías dentro de los modelos de los espacios hiperbólicos 3-dimensionales y actuando sobre ellos, forman un grupo, el grupo de isometrías de X , $\mathcal{I}(X)$, donde $X = \mathbb{H}^3$, o algún modelo equivalente.

Como ejemplo de lo anterior, tenemos que la isometría $\psi : \mathbb{H}^3 \rightarrow B^3$, como se definió en (2.1.2.1) es una transformación de Möbius y como consecuencia se tiene que:

- (a) ψ manda semiesferas \mathbb{H}^3 ortogonales a la frontera $\partial\mathbb{H}^3$, en semiesferas en B^3 también ortogonales al borde $\partial B^3 = \mathbb{S}^2$,
- (b) ψ envía esferas euclidianas en \mathbb{H}^3 en esferas euclidianas en B^3 .

Proposición 2.2.1. Sea $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 , entonces

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^3) = \widehat{\mathbb{M}}^2 < \mathcal{I}(\mathbb{H}^3).$$

DEMOSTRACIÓN:

Tenemos que $\widehat{\mathbb{M}}^2$ está generado por traslaciones, homotecias, rotaciones y la reflexión de la esfera \mathbb{S}^1 como se definieron en la Definición 1.1.16. Ahora bien, la extensión de Poincaré de una traslación $T(x) = x + \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}^2$, está dada por la traslación $\widehat{T}(x, t) = (x + \alpha, t)$ y en particular tenemos que $\frac{\|D\widehat{T}(x, t)\|}{\widehat{T}(x, t)} = \frac{1}{t}$, donde $D\widehat{T}(x, t)$ significa el diferencial de \widehat{T} , de tal modo que nos resulta en una isometría hiperbólica.

La extensión de Poincaré de una homotecia $H(x) = rx$, donde $r > 0$ viene dada por $\widehat{H}(x, t) = r(x, t)$, así $\frac{\|D\widehat{H}(x, t)\|}{\widehat{H}(x, t)} = \frac{1}{t}$, la cual también es una

isometría hiperbólica.

Para los casos de rotación y reflexión, se obtienen de una manera muy similar. Sea $R(x)$ una rotación, entonces su extensión de Poincaré es la rotación $\widehat{R}(x, t) = (R(x), t)$ y como R es una isometría euclídeana, se tiene que $\|\widehat{R}(x, t)\| = 1$ y por lo tanto $\frac{\|D\widehat{R}(x, t)\|}{\widehat{R}(x, t)} = \frac{1}{t}$, obteniendo, de igual manera, que ésta es una isometría hiperbólica.

Finalmente, la extensión de Poincaré de una reflexión $\sigma(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, es

$$\widehat{\sigma}(x, t) = \frac{(x, t)}{\|(x, t)\|^2},$$

cuyo diferencial $D\widehat{\sigma}(x, t) = \frac{1}{\|(x, t)\|^2}(I - 2A)$, donde $(I - 2A)$ es una matriz ortogonal cuyo determinante es -1 . Como la última coordenada de $\widehat{\sigma}(x, t)$ es $\frac{t}{\|(x, t)\|^2}$, tenemos así que $\frac{\|D\widehat{\sigma}(x, t)\|}{\widehat{\sigma}(x, t)} = \frac{1}{t}$, con lo que concluimos que también $\widehat{\sigma}$ es una isometría hiperbólica.

□

2.2.1. Clasificación de las Transformaciones de Möbius.

Ahora veremos una forma de clasificar las transformaciones de Möbius. Para tal fin, observemos qué pasa con estas transformaciones y ciertos puntos. Tomemos $T \in \mathbb{M}^2$ una transformación diferente a la identidad y denotemos por \widehat{T} a la extensión de Poincaré de T . El Teorema del Punto Fijo de *Brouwer* asegura que $\widehat{T} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ debe tener al menos un punto fijo (Cf. [28]). Ahora, si \widehat{T} fija un punto en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , entonces diremos que T es una *transformación elíptica*.

Si T no es elíptica, entonces debe tener a lo más dos puntos fijos en la esfera \mathbb{S}^2 . Efectivamente, pues de lo contrario, podemos suponer que tiene al menos tres puntos diferentes fijos en la esfera α, β y $\gamma \in \mathbb{S}^2$. Consideremos al único círculo C determinado por estos tres puntos fijos. Por otro lado, en \mathbb{H}^3 existe una única semiesfera $S \subset \mathbb{H}^3$, 2-dimensional ortogonal al borde en C , tal esfera debe ser invariante bajo \widehat{T} , sin embargo, S es isométrico con la métrica inducida al plano hiperbólico y \widehat{T} es una isometría de éste.

Más aún, tenemos que toda transformación de Möbius bidimensional (véase 1.1.1.1), diferente de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos, por lo que \widehat{T} necesariamente debe ser la identidad cuando se restringe a S , y en particular, tiene todos sus puntos fijos en \mathbb{H}^3 , lo cual es una clara contradicción a la suposición.

Todo lo anterior nos permite hacer la siguiente clasificación de las transformaciones de Möbius.

Proposición 2.2.2. Sea $T \in \mathbb{M}^2$ una transformación de Möbius diferente de la identidad, entonces las siguientes afirmaciones son excluyentes entre si:

- i) T es elíptica.
- ii) T tiene exactamente un punto fijo en \mathbb{S}^2 , en cuyo caso diremos que T es una transformación parabólica.
- iii) T tiene exactamente dos puntos fijos en \mathbb{S}^2 , en cuyo caso llamaremos a T una transformación loxodrómica.

Además se puede ver que la clasificación anterior es independiente de conjugación por transformaciones de Möbius.

2.2.2. Grupos Discretos.

Definiremos de manera corta¹⁴ lo que entenderemos por un grupo discreto y cómo actúa de forma discontinua en \mathbb{H}^3 .

En primera instancia, recordemos lo que es una acción de un grupo sobre un conjunto arbitrario. Tenemos, pues, que un grupo G actúa sobre un conjunto cualquiera X si y sólo si existe una función $G \times X \rightarrow X$ dada por $(g, x) \mapsto gx$, tal que para todo $g, h \in G$ y $x \in X$, tenemos que,

- a) $ex = x$, donde e es elemento neutro de G y,
- b) $g(hx) = (gh)x$.

¹⁴Este tema es bastante elaborado y por si solo es un tópico interesante, por lo que se hace la invitación al lector con poca experiencia, a que lo estudie con mayor detalle. Consúltese por ejemplo [31].

A una función $G \times X \rightarrow X$ tal que cumple a) y b) la llamamos una acción de G en X . Por ejemplo, tenemos que si X es un espacio métrico, el grupo de isometrías " $\mathcal{I}(X)$ " actúa sobre X , en otras palabras, si $\phi \in \mathcal{I}(X)$ y $x \in X$ entonces $\phi x = \phi(x)$.

Además, si una acción de un grupo G sobre un conjunto X , es tal que para todo $x, y \in X$ existe un $g \in G$ de modo que $gx = y$, entonces se dice que la acción es una *acción transitiva*, o bien que G actúa de manera transitiva sobre X .

Pasemos ahora a definir qué es un grupo discreto, esto es,

Definición 2.2.3. Un grupo discreto es un grupo topológico Γ cuyos puntos son aislados¹⁵.

En particular tenemos que un subgrupo G de $\widehat{\mathbb{M}^2}$ es un grupo discreto si no existe una sucesión $g_k \in G$ de elementos distintos que converjan a alguna transformación $g \in \widehat{\mathbb{M}^2}$.

Decimos que un grupo G actúa de manera discontinua en \mathbb{H}^3 si y sólo si G actúa en \mathbb{H}^3 , y para cada subconjunto compacto K de \mathbb{H}^3 , el conjunto $K \cap gK$ es no vacío únicamente para un número finito de elementos $g \in G$.

Se puede mostrar, también, que todo grupo de isometrías I de \mathbb{H}^3 , es discreto si y sólo si I actúa de manera discontinua en todo punto de \mathbb{H}^3 . Particularmente si G es un grupo discreto en $\widehat{\mathbb{M}^2}$, entonces G es finito o numerable.

2.2.3. Isometrías del Espacio Hiperbólico.

Tenemos hasta aquí, que las transformaciones de Möbius forman un grupo y que este grupo actúa sobre los conjuntos \mathbb{H}^3 , \mathcal{B}^3 y \mathcal{H}^3 . Veamos cuál es la relación que sostienen dichas transformaciones y los modelos de la geometría que estamos tratando.

Supongamos por ejemplo que G es un grupo discreto de transformaciones de Möbius. Podemos ver entonces a G como un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 que preservan orientación, además se tiene que G actúa de manera discontinua sobre todo \mathbb{H}^3 . Más adelante, retomaremos este ejemplo cuando

¹⁵Es decir, son puntos abiertos

definamos que es una variedad hiperbólica, por lo que debemos mantenerlo en mente.

Notemos además, que cada transformación de Möbius queda completamente determinada por su acción en la frontera $\delta\mathcal{B}^3 = \mathbb{S}^2$, gracias a la extensión de Poincaré. En consecuencia tenemos que \mathbb{S}^2 determina una topología natural en el grupo $M(\mathcal{B}^3)$. Si tomamos una isometría $T : \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}^3$, entonces podemos componer T con la extensión de Poincaré de una transformación de Möbius para suponer que $T(0) = 0$, y al ser T una isometría se verifica que preserva cada esfera Euclidiana centrada en 0.

Por otro lado, cada diámetro de \mathcal{B}^3 es una geodésica en \mathcal{B}^3 y T envía diámetros en diámetros, así se tiene que T es una rotación Euclidiana; dichas rotaciones se pueden obtener, además, como la extensión de Poincaré de algunas transformaciones de Möbius sobre \mathbb{S}^2 . Ahora bien, hemos visto que las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius en $\widehat{\mathbb{M}}^2$ son isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 . Podemos concluir así, la siguiente clasificación.

Teorema 2.2.4. *La clasificación de isometrías del espacio Hiperbólico es de la forma siguiente:*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathbb{H}^3) &= \text{Aut}(\mathbb{H}^3) = \widehat{\mathbb{M}}^2, \\ \mathcal{I}(\mathcal{B}^3) &= \text{Aut}(\mathcal{B}^3), \\ \mathcal{I}(\mathcal{H}^3) &= O(3, 1).\end{aligned}$$

□

2.3. Algunos Conceptos de la Geometría Hiperbólica.

Finalmente, para concluir este capítulo, introduciremos un par de definiciones.

Recordemos de la geometría hiperbólica bidimensional, que un *horociclo* en el modelo de Poincaré, es una curva para la cual sus normales convergen asintóticamente¹⁶ en un punto p fijo al borde del disco. En otras palabras, podemos describir el horociclo, como el límite de los círculos que comparten una tangente en un punto p ideal y fijo, cuando sus radios tienden al infinito.

El interior de un horociclo es llamado *horodisco*. Es importante recalcar que tales círculos, no son círculos hiperbólicos, en la geometría euclidiana un tal “círculo de radio infinito” sería más bien una línea recta, pero, visto en la geometría hiperbólica, a través de la geometría euclideana ésta es una curva. El modelo del disco de Poincaré permite ver claro el concepto de horociclo como lo muestra la figura siguiente(2.13).

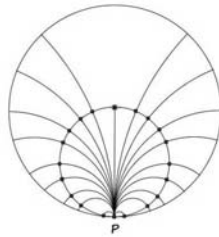


Figura 2.13: Horociclo.

Una definición alternativa está dada para el modelo del semiplano superior \mathbb{H}^2 , aquí definimos el horociclo basado en un punto $p \in \widehat{\mathbb{R}}$, como un círculo en \mathbb{H}^2 , tangente en p a la recta real si p es finito. Y es cualquier recta en \mathbb{H}^2 paralela a la recta real (y distinta de ésta), si $p = \infty$.

Ahora podemos definir los conceptos de horoesfera y horobolla en la geometría hiperbólica 3-dimensional, en terminos generales, pues como

¹⁶Término acuñado por William Thurston en [32].

hemos visto podemos pasar de un modelo a otro sin mayores dificultades.

Definición 2.3.1 (Horoefera). Una horoesfera Σ de \mathcal{B}^3 basada en un punto p de \mathbb{S}^2 , está dada por la intersección de \mathcal{B}^3 con una esfera euclidiana, tangente a la esfera \mathbb{S}^2 en p . El interior de la horoesfera es llamada horobola.

La siguiente definición nos dice lo que entenderemos por una *línea hiperbólica*, esto es,

Definición 2.3.2. Una línea hiperbólica de \mathbb{H}^3 , es la intersección de \mathbb{H}^3 con un subespacio vector temporal 2-dimensional de \mathbb{R}^4 .

Además tenemos que dos vectores de \mathbb{R}^4 , x, y son Lorentz-ortonormales si y sólo si $\|x\|^2 = -1$, $x \cdot y = 0$ y $\|y\|^2 = 1$.

Teorema 2.3.3. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3$ una curva. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) α es un arco geodésico,
- ii) existen vectores Lorentz-ortonormales $x, y \in \mathbb{R}^4$, tales que,

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))x + (\sinh(t - a))y,$$

- iii) la curva α satisface la ecuación diferencial $\alpha'' + \alpha = 0$.

Para una demostración consúltese ([26, p.69]).

Teorema 2.3.4. Una función $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una línea geodésica si y sólo si existen vectores Lorentz-ortonormales (L-O) $x, y \in \mathbb{R}^4$, tales que,

$$\lambda(t) = (\cosh(t))x + (\sinh(t))y.$$

DEMOSTRACIÓN:

Mostremos primero que si tomamos vectores L-O $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, tales que

$$\lambda(t) = (\cosh(t))x + (\sinh(t))y,$$

entonces $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una línea geodésica.

Notemos que λ , satisface la ecuación diferencial $\lambda'' + \lambda = 0$. Por lo tanto la restricción de λ a cualquier intervalo $[a, b]$, con $a < b$ es un arco geodésico

según el teorema (2.3.3). Por lo que λ es una línea geodésica.

De manera converso, tenemos que λ es una línea geodésica. Así que por el teorema (2.3.3) λ satisface la ecuación diferencial $\lambda'' + \lambda = 0$, en consecuencia tenemos que,

$$\lambda(t) = (\cosh(t))\lambda(0) + (\sinh(t))\lambda'(0).$$

Ahora si diferenciamos la ecuación $\lambda(t) \circ \lambda(t) = -1$, podemos ver que $\lambda(t) \circ \lambda'(t) = 0$, en particular, $\lambda(0) \circ \lambda'(0) = 0$. Observe además que,

$$\|\lambda(t)\|^2 = \cosh^2(t-a) + \sinh^2(t-a)\|\lambda'(t)\|^2,$$

y como $\|\lambda(t)\|^2 = -1$, tenemos entonces que, $\|\lambda'(t)\|^2 = 1$. Por lo tanto $\lambda(t)$, $\lambda'(t)$ son L-O. □

Corolario 2.3.5. *Las geodésicas de \mathbb{H}^n , son las líneas hiperbólicas.* □

Definición 2.3.6. Sea X un subconjunto medible¹⁷ de \mathcal{H}^3 , el volumen hiperbólico de X está dado por la fórmula,

$$Vol(X) = \int_{h^{-1}(X)} \sinh^2(\gamma_1) \sinh(\gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2,$$

donde,

$$h : \mathbb{R} \times [0, \pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathcal{H}^3,$$

definida por,

$$h(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

En la definición anterior, cada x_i está determinada en coordenadas hiperbólicas como sigue,

$$\begin{aligned} x_1 &= \cosh(\gamma_1), \\ x_2 &= \sinh(\gamma_1)\cos(\gamma_2), \\ x_3 &= \sinh(\gamma_1)\sin(\gamma_2)\cos(\gamma_3), \\ x_4 &= \sinh(\gamma_1)\sin(\gamma_2)\sin(\gamma_3). \end{aligned}$$

¹⁷En el sentido usual del análisis matemático.

Se puede observar que h es suprayectiva, y es inyectiva cuando se restringe el dominio al conjunto abierto $\mathbb{R} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. Otro concepto que es necesario redefinir es el concepto de convexidad en el sentido hiperbólico, esto es,

Definición 2.3.7. Sea $X \subset \mathbb{H}^3$, X es convexo si y sólo si, para cada par de puntos $x, y \in X$ el segmento geodésico $[x, y]$ está contenido en X .

2.3.1. 3-Variedades Hiperbólicas.

Definición 2.3.8. Sea M una 3-variedad conexa. Diremos que M es una *variedad hiperbólica*, si admite una estructura hiperbólica, es decir, si localmente es isométrica a \mathbb{H}^3 .

En otras palabras M es una *variedad hiperbólica*, si tiene un (X, Iso) -atlas maximal, donde X puede ser $\mathbb{H}^3, \mathcal{B}^3, \mathcal{H}^3$ e $Iso = I(\mathbb{H}^3), I(\mathcal{B}^3), I(\mathcal{H}^3)$.

Se puede probar, que si G es un grupo discreto de transformaciones de Möbius, libre de torsión (es decir que no contiene elípticos) entonces obtenemos una variedad hiperbólica M a través de G como cociente, de la siguiente forma $M(G) \equiv \mathbb{H}^3/G$ (vid. [12]). Obsérvese, también, que en este caso $\pi_1(M) \cong G$, donde $\pi_1(M)$ es el grupo fundamental.

Recordemos que un espacio métrico X es *completo*, si y sólo si toda sucesión de Cauchy en X converge en X .

Definición 2.3.9. Una (X, G) -variedad es completa si el espacio cubriente universal es un espacio métrico completo.

En particular tendremos que una 3-variedad hiperbólica será completa, si admite la definición anterior.

Capítulo 3

Obtención de 3-variedades Hiperbólicas a Través de Nudos y sus Complementos.

“En estimación de Dick Canary, para poder llevar a cabo un juego de beisbol en un plano hiperbólico, se requerirían más de 10^{100} jugadores para proporcionar el mismo nivel de cobertura a los jardines, como lo es en el plano euclidiano”¹

En este capítulo abordaremos la descomposición de los complementos del nudo 8 y el enlace los anillos Borromeanos, con la finalidad de encontrar 3-variedades hiperbólicas. Haremos tal descomposición con base en el trabajo de John Ratcliffe en [26], quien utilizó el algoritmo desarrollado por W. Thurston en [32]. De este modo este escrito tiene como apoyo ambas obras.

Usaremos poliedros con ciertas características,² que nos permitirán identificar y descomponer los complementos de dicho nudo y enlace, para mostrar de este modo sus propiedades hiperbólicas.

¹[19, p. 7].

²Algunas de estas características se mencionaron en capítulos anteriores, otras se expondrán en este capítulo y otras más, simplemente se asumirán *de facto*.

Asimismo, como punto final, mostraremos en el apartado del apéndice A, el algoritmo que presentan M. Sakuma y J. Weeks en [36]. Pero este último, lo veremos únicamente de forma motivacional, sólo para mostrar una alternativa “más práctica”, para identificar 3-variedades hiperbólicas orientables y completas. En este apartado, se estudian algunos elementos de la familia de trenzas cerradas³ $(\widehat{\sigma_1\sigma_2})^n$, bajo dicho algoritmo. En este caso también usaremos poliedros con características semejantes a los del primer algoritmo y algo que llamaremos *coloración*.

3.1. Identificación de Poliedros y Triangulación.

Ya hemos presentado los conceptos de triangulación en la Definición1.2.21 y de poliedro convexo en la Definición1.2.22. Sin embargo, en esta sección ampliaremos estos conceptos. Introduciremos el concepto de *simplejo* y la identificación de éstos, a los que llamaremos *complejos simpliciales*. Además, redefiniremos la triangulación, bajo el entendido de la geometría hiperbólica y los modelos vistos en el capítulo 2.

Sea X igual a \mathbb{H}^3 , \mathcal{B}^3 o \mathcal{H}^3 . Recordemos que estos son espacios métricos y en ellos tiene sentido hablar de convexidad. Ahora bien, aun cuando no requerimos saber a profundidad las siguientes nociones, es bueno tenerlas claras pues haremos uso determinado de ellas.

Tenemos así, que un n -*simplejo* “ σ ”, es un poliedro convexo, envolvente (véase Definición1.2.22) de los $n + 1$ puntos v_0, \dots, v_n de X , de modo tal que si elegimos k de ellos, el hiperplano que los contiene es dimensión $k - 1$ (véase Figura3.1). Al subconjunto envolvente convexo de $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, lo llamaremos una cara, una arista o simplemente un subsimplejo de σ , según sea el caso y no genere confusión. Usualmente a un simplejo 0-dimensional se le nombra vértice de σ y a un simplejo 1-dimensional se le llama arista.

³Familia donde aparece nuevamente el nudo “ocho” y “los anillos Borromeanos”, entre otros.

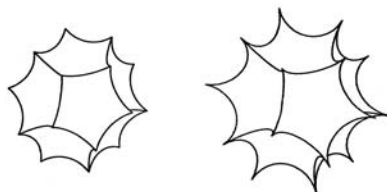


Figura 3.1: Dodecaedros regulares hiperbólicos, centrados en el origen en \mathcal{B}^3 .

Tenemos además que un complejo simplicial finito de dimensión n , será una colección localmente finita Σ de simplejos en X , que satisfagan las siguientes condiciones:

- i) Si un simplejo $\sigma \in \Sigma$, entonces todas sus caras pertenecen a Σ .
- ii) Si dos simplejos en Σ se intersecan, ésta intersección es una cara en común.

A la unión de todos los simplejos en Σ la llamaremos un poliedro de Σ y lo denotaremos como $|\Sigma|$ (la realización de Σ). El k -esqueleto de Σ es el subcomplejo simplicial que consiste de simplejos de dimensión $k < n$.

Además estas anotaciones sobre complejos simpliciales resultan familiares a la definición de poliedro convexo, el cual por ejemplo se definió como la envolvente convexa de un número finito de puntos, de forma tal que un poliedro convexo es la unión de un número finito de simplejos, los cuales, no necesariamente están determinados de manera única. Cuando hablemos de un poliedro convexo, nos estaremos refiriendo a este concepto, aunque la finitud no esté de forma explícita.

Sea P un poliedro convexo de X . El grupo de simetrías de P en $\langle P \rangle$ (el n -plano convexo de X que contiene la cara de P), es finito (véase [26] p. 227). Además definimos el centroide c de P en \mathbb{H}^3 , con vértices v_1, v_2, \dots, v_k como el punto:

$$c = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{k}.$$

Note que el centroide c es un punto de X . Además como estamos tomando P en X , la envolvente convexa de los vértices de P , entonces P contiene a c . Más aún, se puede mostrar que c está en el interior topológico de P .

Además tenemos que cada simetría de P fija el centroide de P (vid. Ídem.).

Ahora, la *identificación 3-dimensional* consiste en un conjunto finito de 3-simplejos, los cuales elegimos por pares de caras o de aristas según sea el caso, y a los cuales llamaremos *facetas* después de identificar, tales que cada *faceta* aparezca exactamente en uno de los pares. Estamos interesados, en el espacio cociente resultante de la relación de equivalencia generada por la aplicación *identificación*, y a la cual nombraremos los *ciclos de Φ* .

Resulta conveniente introducir un par de definiciones sobre los vértices de un poliedro convexo. Estas definiciones las daremos para el modelo de la bola unitaria \mathcal{B}^3 , sin embargo, se pueden definir de forma similar para los otros modelos hiperbólicos descritos.

Primero tenemos que un *punto ideal* de un poliedro convexo $P \in \mathcal{B}^3$, es un punto $v \in P^c \cap \mathbb{S}^2$, donde P^c es la cerradura topológica de P en E^3 . Un *horopunto* de un poliedro convexo $P \in \mathcal{B}^3$, es un vértice ideal de P , para el cual exista una horoesfera suficientemente pequeña Σ de \mathcal{B}^3 con base en v , tal que Σ interseque únicamente a las caras de P que incidan en v ⁴. A dicha intersección la llamaremos la *aureola* de Σ .

Definición 3.1.1. Un *vértice ideal* de un poliedro convexo $P \in \mathcal{B}^3$, es un horopunto de P cuya aureola es compacta.

Para concluir, tenemos una interpretación de la triangulación -más general una teselación- bajo el contexto hiperbólico, dentro de los modelos hiperbólicos 3-dimensionales descritos. Recordemos que, al igual que en el caso bidimensional euclidiano, existen ciertas restricciones para los poliedros. Esto es, dos poliedros únicamente se podrán intersecar por superposición de lados, es decir, sólo pueden intersecarse por caras, aristas o vértices.

Definición 3.1.2. Una teselación en X , en un modelo del espacio 3-dimensional hiperbólico, es una colección \mathcal{P} de poliedros convexos 3-dimensionales, tal que:

- a) Los interiores de los poliedros en \mathcal{P} son mutuamente disjuntos,
- b) la unión de los poliedros en \mathcal{P} es X , y
- c) la colección \mathcal{P} es localmente finita.

⁴Recuerde que $v \notin P$ en el modelo hiperbólico \mathcal{B}^3 .

3.1.1. Identificación de Poliedros Para Obtener 3-Variedades Hiperbólicas.

Ahora construiremos 3-variedades hiperbólicas con la identificación de poliedros convexos en X , donde X es un modelo de la geometría hiperbólica 3-dimensional. Recordemos que en este caso un poliedro tiene dimensión 3 y consta de vértices, aristas y caras. Así la identificación o pegado de sus caras, estará determinada por la identificación de las caras, aristas y vértices de estos poliedros.⁵

Sea \mathcal{P} una familia de poliedros convexos disjuntos en X y G el grupo de isometrías de X , que consta de transformaciones de Möbius.⁶

Definición 3.1.3. Sea $\widehat{\mathcal{S}}$ la colección de caras de los poliedros P en \mathcal{P} . Una identificación bajo G de los elementos de $\widehat{\mathcal{S}}$, es un subconjunto de G ,

$$\Phi = \{g_S \mid g_S \in G \text{ y } S \in \widehat{\mathcal{S}}\},$$

se tiene entonces que:

- (i).- Para cada cara S en $\widehat{\mathcal{S}}$ existe una cara S' en $\widehat{\mathcal{S}}$ tal que $g_S(S') = S$;
- (ii).- Las isometrías g_S y $g_{S'}$ satisfacen la relación $g_{S'} = g_S^{-1}$; y
- (iii).- Si S es una cara de $P \in \mathcal{P}$ y S' es una cara de $P' \in \mathcal{P}$, entonces

$$P \cap g_S(P') = S$$

Observemos que de (i) tenemos que S' está únicamente determinado por S . Ahora de (ii) se deduce que $S'' = S$ pues como $g_S(S') = S$ de (i) y de (ii) tenemos que $g_{S'} = g_S^{-1}$, es decir, $g_S g_{S'} = Id$ entonces $g_S = g_{S'}^{-1}$. Así si existe $S'' \in \widehat{\mathcal{S}}$ entonces $S'' = g_{S'}^{-1}(S') = g_{S'}^{-1}(g_S^{-1}(S)) = g_S(g_S^{-1}(S)) = S$. Además, la identificación de caras, determinada por los elementos de Φ , generan una relación de equivalencia en el conjunto formado por la unión de las caras de \mathcal{P} , al cual denotaremos como $\coprod = \{\cup P\}_{P \in \mathcal{P}}$, a través de los puntos contenidos en dichas caras. A las clases de equivalencias de esta relación las llamaremos *los ciclos de Φ* .

⁵Se puede consultar o profundizar en los resultados de esta sección, así como en los detalles técnicos en [26], pag. 431-443.

⁶Consúltese capítulo 1 sección 1 y 2, y capítulo 2 sección 3 y 4.

Recordemos que un ángulo diedro o diédrico, es el ángulo que forman las caras que comparten una arista en común. Definiremos el ángulo sólido ω , subtendido por el poliedro P en X en el punto x de P , por el número real,

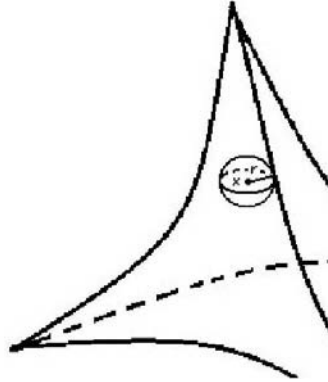


Figura 3.2: Bola de radio r , $B_r(x)$ centrada en un punto $x \in P$.

$$\omega = 4\pi \frac{\text{Vol}(P \cap B_r(x))}{\text{Vol}(B_r(x))},$$

Donde $\text{Vol}(X)$ hace referencia al volumen hiperbólico de X (véase Figura 3.2, consúltese Definición 2.3.6 o vid. [26, p. 80]), y r es menor a la distancia de x a cualquiera de las caras de P que no contengan a x . Note que el ángulo sólido no depende de r .

Sea $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ciclo finito de Φ . Sea P_i un poliedro en \mathcal{P} que contiene al punto x_i para cada $i = 1, \dots, n$. La suma de los ángulos sólidos de $[x]$ está dada por el número real,

$$\omega[x] = \omega_1 + \dots + \omega_n.$$

Si x está en el interior topológico de algún poliedro P en \mathcal{P} , entonces $[x] = \{x\}$ y $\omega[x] = 4\pi$. Si x está en el interior de alguna cara S , de un poliedro en \mathcal{P} , entonces $x' = g_S^{-1}(x)$ está en el interior de S' , luego $[x] = \{x, x'\}$ y por lo tanto $\omega[x] = 2\pi$ o 4π de acuerdo a si $x = x'$ ⁷ o si

⁷Esto por cómo se definió ω y dado que al estar x en una cara de P , se considera únicamente la mitad del ángulo sólido correspondiente.

$x \neq x'$. Sin embargo el primer caso no lo tomaremos en cuenta en este trabajo.

Ahora supongamos que x está en el interior de alguna arista de un poliedro en \mathcal{P} , entonces todo punto de $[x]$ está en el interior de la arista del poliedro en \mathcal{P} . En este caso, $[x]$ es llamado un Φ -ciclo de aristas. Sea θ_i un ángulo diédrico de P_i a lo largo de la arista que contiene a x_i ; para cada i , la suma de los ángulos diédricos del ciclo de arista $[x]$ está definido por el número real, como sigue

$$\theta[x] = \theta_1 + \dots + \theta_m.$$

Observe que la suma de los ángulos diédricos $\theta[x]$ debe ser igual a 2π , esto es, $\omega_i = 2\theta_i$ para cada i . Por lo que $\omega[x] = 2\theta[x]$.

Diremos que una G -identificación de caras de P en \mathcal{P} , Φ , es *propia* si y sólo si cada ciclo de Φ es finito y tiene suma de sus ángulos diédricos 2π y por tanto, según se muestra en el párrafo anterior, la suma de sus ángulos sólidos es exactamente 4π .

Teorema 3.1.4. *Sea Φ una identificación propia de las caras de P , para una familia finita \mathcal{P} de poliedros convexos y disjuntos en X , entonces:*

- (1) *La isometría g_S no fija ningún punto de S' para cada S en \hat{S} , donde $g_S(S') = S$;*
- (2) *Cada ciclo de aristas de Φ contiene a lo más un punto de cada arista de un poliedro en \mathcal{P} .*

Observe que el hecho de pedir que la isometría dada no fije ningún punto, nos permitirá que la identificación se realice de un modo correcto.

DEMOSTRACIÓN:

Para mostrar (1) procedamos por contradicción. Supongamos que g_S fija al menos un punto en S' .

Sea $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde x_i es un punto que fija g_S p. a. i , ya que Φ es propia, entonces $n \geq 2$. Sea P_i un poliedro en \mathcal{P} , tal que x_i está contenido en P_i para cada i . Sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que r es menor a la mitad de la distancia entre x_i y x_j para cada $i \neq j$ y a la distancia que hay entre x_i a cualquiera de las caras de P_i que no contengan a x_i , para cada i . Entonces para cada i

$$P_i \cap S_r(x_i)$$

es un polígono en la esfera $S_r(x_i)$ y los polígonos $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$ son disjuntos.

Tomemos la restricción de Φ a la identificación propia de caras dada por $I(\mathbb{S}^2)$ (las isometrías de \mathbb{S}^2), en los polígonos $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$. Sea Σ el espacio obtenido al identificar dichos polígonos, podemos observar que Σ tiene estructura esférica. Más aún, es una 2-esfera compacta, conexa y $\omega[x] = 4\pi$ (consúltese [26] capítulo 9, sección 2).

Sea $P \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P$. Sean $(S \cap S_r(x))$ y $(S' \cap S_r(x))$ caras de $P \cap S_r(x)$, los cuales están identificados (pegados) uno con el otro. Sea y un punto en $S \cap S_r(x)$, tal que $y' = g_s^{-1}y$. Se tiene que $y \neq y'$ pues para el caso de superficies tenemos que las isometrías propias no fijan puntos (consúltese [26], p. 376). Ahora como $P \cap S_r(x)$ es un polígono convexo, existe un segmento geodésico $[y, y']$ en $P \cap S_r(x)$, que une a y con y' . Además, como y está identificada con y' , entonces, la proyección de dicho segmento $[y, y']$ es una circunferencia máxima sobre la esfera Σ , lo cual es una contradicción, pues la longitud de $[y, y']$ es máximo la mitad de la longitud del círculo máximo $S_r(x)$.

Para mostrar (2) supongamos que $[x]$ es un ciclo de caras, podemos ordenar

$$[x] = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

de modo tal que

$$x = x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_n \sim x.$$

Consideremos E_i como la arista de P que contiene a x_i y sea q el número de puntos de $[x]$ contenidos en E_i . Por como se definió la relación de equivalencia, podemos suponer que E_i contiene q puntos de $[x]$, para cada i . Sea y_i el centroide de los puntos de $[x]$ en E_i para cada i , sea $y = y_1$. Tenemos entonces

$$y = y_1 \sim y_2 \sim \dots \sim y_n \sim y.$$

Ya que el centroide queda fijo bajo la isometría. Todavía más, se tiene que

$$d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) = \dots = d(x_n, y_n).$$

Por lo que sólo le resta ser $q = 1$ o 2 , pues si fuese $q \geq 3$ las distancias entre estos puntos y el centroide serían claramente distintas. Por otro lado

$$4\pi = \omega[x] = 2\theta[x] = 2q\theta[y] = q\omega[y] = 4q\pi$$

por lo tanto q debe ser igual a 1 que es lo que se quería mostrar.

□

Sea Φ una G -identificación propia de las caras de los elementos de \mathcal{P} y sea M el espacio cociente obtenido al aplicar Φ a los elementos de \mathcal{P} . A continuación, en el siguiente teorema, veremos que M tiene estructura de 3-variedad.

Teorema 3.1.5. *Sea G el grupo de isometrías de X y sea M el espacio obtenido por la identificación de una familia finita \mathcal{P} de poliedros convexos y disjuntos de X , bajo una G -identificación propia de caras de $P \in \mathcal{P}$. Entonces M es una 3-variedad con (X, G) -estructura tal que el encaje natural de P° (el interior topológico de P) en M es un (X, G) -mapa para cada $P \in \mathcal{P}$.*

Mostraremos primero que el espacio obtenido bajo una identificación propia de una familia finita \mathcal{P} de poliedros convexos y disjuntos de X , nos resulta en una 3-variedad M con (X, G) -estructura. Para esto veremos que la restricción de los elementos de G a cierto espacio, resulta ser un homomorfismo entre este espacio y algún abierto de M .

Luego veremos que M es Hausdorff. Así tendremos que M es una 3-variedad con (X, G) -estructura. Posteriormente veremos que estas restricciones forman cartas y aún más, la familia de estas cartas será un atlas, bien definido sobre las clases de equivalencia de la identificación. Lo anterior nos permitirá ver que el encaje natural de P° (el interior topológico de P) en M es un (X, G) -mapa para cada $P \in \mathcal{P}$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Veamos que M es una 3-variedad con (X, G) -estructura. Sea $\pi : \Pi \rightarrow M$, dada por el mapeo cociente, donde $\Pi = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Sea x un punto de Π y sea $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$. Sea P_i un poliedro en \mathcal{P} , tal que x_i está contenido en P_i , para cada i . Si x_i está en una cara de P_i , entonces $n \geq 2$ según el Teorema 3.1.4. Sea $\delta(x)$, donde $\delta(x)$ es la mínima de las distancia entre x_i y x_j , para cada $i \neq j$ y menor que la distancia que hay entre x_i a cualquiera de las caras de P_i que no contengan a x_i , esto para cada i , es decir,

$$\delta(x) < \min\{d(x_i, x_j)_{\{i \neq j\}}, d(x_i, S)_{\{x_i \notin S\}}\}.$$

Sea r un número real, tal que, $0 < r < \delta(x)/2$. Entonces para cada i , $P_i \cap S_r(x_i)$ es un polígono en la esfera $S_r(x_i)$ y los polígonos $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$

son disjuntos (note que la esfera $S_r(x_i)$, está dada a través de un escalamiento, es decir, a través de ciertas funciones que cambian de escala de forma afin). Tomemos la restricción de Φ a la identificación propia de caras dada por $I(\mathbb{S}^2)$ de los polígonos $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$. Sea $\Sigma_r(x)$ el espacio obtenido al identificar dichos polígonos. Entonces, $\Sigma_r(x)$ tiene estructura esférica, todavía más, es una 2-esfera compacta, conexa y $\omega[x] = 4\pi$ (consúltese [26] capítulo 9, sección 2, teorema 9.2.3).

Entonces para cada i , la restricción de π (el mapeo cociente), al polígono $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$ se extiende a una isometría. Esto es

$$\mu_i : S_r(x_i) \rightarrow \Sigma_r(x_i).$$

Aún más, tenemos que para cada i y j , la isometría

$$\mu_j^{-1}\mu_i : S_r(x_i) \rightarrow S_r(x_j)$$

se extiende a una única isometría g_{ij} de X , y $g_{ij}(x_i) = x_j$.

Suponga que el elemento g_S de Φ identifica la cara $S' \cap S_r(x_i)$ del polígono $P_i \cap S_r(x_i)$ con la cara $S \cap S_r(x_j)$ de $P_j \cap S_r(x_j)$. Entonces $\mu_j^{-1}\mu_i$, coincide con g_S en el conjunto $S' \cap S_r(x_i)$. Por lo tanto, se tiene que $\mu_j^{-1}\mu_i$ coincide con g_S en el círculo máximo $\langle S' \rangle \cap S_r(x_i)$, e inclusive g_{ij} concuerda con g_S en el plano $\langle S' \rangle$. Ahora, como g_{ij} y g_S mapean $P_i \cap S_r(x_i)$ con el lado opuesto del plano $\langle S \rangle$ de $P_j \cap S_r(x_j)$, deducimos que $g_{ij} = g_S$ ⁸.

Supongamos que

$$x_i = x_{i_1} \sim x_{i_2} \sim \dots \sim x_{i_k} = x_j.$$

Así tenemos que

$$\mu_j^{-1}\mu_i = (\mu_{i_k}^{-1}\mu_{i_{k-1}})(\mu_{i_{k-1}}^{-1}\mu_{i_{k-2}}) \cdots (\mu_{i_2}^{-1}\mu_{i_1}).$$

Y por lo tanto

$$g_{ij} = g_{i_{k-1}i_k}g_{i_{k-2}i_{k-1}} \cdots g_{i_1i_2}.$$

Los elementos $g_{i_1i_2}, \dots, g_{i_{k-1}i_k}$ están en Φ por el argumento anterior. Por lo que g_{ij} está en G para cada i y j . Definamos

$$U(x, r) = \bigcup_{i=1}^n \pi(P_i \cap B_r(x_i)).$$

⁸Cf. [26, p. 119]

Como el conjunto

$$\pi^{-1}(U(x, r)) = \bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i)$$

es abierto en Π , entonces tenemos que $U(x, r)$ es un abierto de M . Supongamos que $x = x_p$ y definamos la siguiente función,

$$\psi_x : \bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) \rightarrow B_r(x)$$

con la siguiente regla de correspondencia $\psi_x(z) = g_{ip}(z)$ si $z \in P_i \cap B_r(x_i)$. Supongamos que $g_S(x_i) = x_j$, entonces $g_S = g_{ij}$. Sea y un punto en $S \cap B_r(x_j)$ y $y' = g_S^{-1}(y)$. Así tenemos que y' es un punto en $S' \cap B_r(x_i)$. Luego

$$\mu_p^{-1} \mu_i = (\mu_p^{-1} \mu_j)(\mu_j^{-1} \mu_i)$$

tenemos que $g_{ip} = g_{jp} g_{ij}$. Por lo tanto

$$\psi_x(y) = g_{jp}(y) = g_{jp} g_S(y') = g_{ip}(y') = \psi(y').$$

Como consecuencia ψ_x induce una función continua

$$\varphi_x : U(x, r) \rightarrow B_r(x).$$

Luego, para cada t tal que $0 < t < r$, la función φ_x restringe a la isometría

$$\mu_p^{-1} : \Sigma_t(x) \rightarrow S_r(t)$$

con la correspondiente t . Por lo que tenemos que φ_x es una biyección con inversa continua definida del siguiente modo

$$\varphi_x^{-1}(z) = \pi g_{ip}^{-1}(z)$$

toda vez que z esté en $g_{ip}^{-1}(P_i \cap B_r(x_i))$. Es decir, φ_x es un homeomorfismo.

(2) Ahora mostraremos que M es Hausdorff. Sean $x, y \in \Pi$ tal que $\pi(x) \neq \pi(y)$ en M . Sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_m\}$ los ciclos de Φ que contienen a x y a y respectivamente. Entonces $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_m\}$ son conjuntos ajenos de Π . Sean P_i y Q_j polígonos en \mathcal{P} , que contienen a x_i y y_j respectivamente para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$. Escojamos radios r y s como lo hemos hecho antes, de forma tal que

$$\pi \left(\bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) \right) = U(x, r)$$

y

$$\pi \left(\bigcup_{j=1}^m Q_j \cap B_s(y_j) \right) = U(y, s).$$

Además, como podemos elegir r y s tan pequeños como queramos, tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) \quad \text{y} \quad \bigcup_{j=1}^m Q_j \cap B_s(y_j)$$

son conjuntos ajenos en Π . Más aún como

$$\bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) = \pi^{-1}(U(x, r))$$

y

$$\bigcup_{j=1}^m Q_j \cap B_s(y_j) = \pi^{-1}(U(y, s)),$$

deducimos que $U(x, r)$ y $U(y, s)$ son vecindades abiertas y ajenas de $\pi(x)$ y $\pi(y)$ de M . Por lo tanto M es Hausdorff, ergo M es una 3-variedad.

(3) Probaremos a continuación que,

$$\{\varphi_x : U(x, r) \rightarrow B_r(x) \mid x \in \Pi \text{ y } r < \delta(x)/3\}$$

es un (X, G) -atlas para M .

Por construcción $U(x, r)$ es un subconjunto abierto y conexo de M , y φ_x es un homeomorfismo. Asimismo, tenemos que $U(x, r)$ de radio suficientemente pequeño, está definido para cada punto $\pi(x)$ en M , lo cual nos permite afirmar que $\{U(x, r)\}$ es una cubierta abierta de M .

Supongamos que $U(x, r)$ y $U(y, s)$ tienen intersección no vacía, donde $r < \delta(x)/3$ y $s < \delta(y)/3$. Sea $F(x)$ una cara del poliedro en \mathcal{P} que contiene a x en su interior. Intercambiamos ahora los papeles de x y y y de ser necesario asumimos que

$$\dim F(x) \geq \dim F(y).$$

Como en las líneas anteriores tenemos,

$$\pi^{-1}(U(x, r)) = \bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i)$$

y

$$\pi^{-1}(U(y, s)) = \bigcup_{j=1}^m Q_j \cap B_s(y_j).$$

Ahora bien, para algún i y j , el conjunto $P_i \cap B_r(x_i)$ se interseca con $Q_j \cap B_s(y_j)$. Si reetiquetamos, podemos asumir que $P_1 \cap B_r(x_1)$ se interseca con $Q_1 \cap B_s(y_1)$. Entonces $P_1 = Q_1$ y $d(x_1, y_1) < r + s$. Afirmamos que y_1 está en cada cara de P_1 que contiene a x_1 , de lo contrario, podemos suponer que y_1 no está en alguno de las caras de P_1 que contiene a x_1 , lo cual implica que $s < d(x_1, y_1)/3$. Por lo tanto x_1 está en cada cara de P_1 que contiene a y_1 , debido a que si x_1 no está en alguna de las caras de P_1 que contiene a y_1 , tendríamos que $r < d(x_1, y_1)/3$, lo cual es una contradicción (pues tendríamos que $d(x_1, y_1) < r + s < d(x_1, y_1)/3 + d(x_1, y_1)/3$). Entonces $F(x_1)$ es una cara propia de $F(y_1)$, lo cual no puede pasar pues $\dim F(x) \geq \dim F(y)$. Por lo tanto y_1 está en cada cara de P_1 que contiene a x_1 , esto implica que para cada i el conjunto $P_i \cap B_r(x_i)$ se interseca con $Q_j \cap B_s(y_j)$ para alguna j .

Afirmamos que el conjunto $P_i \cap B_r(x_i)$ se interseca con $Q_j \cap B_s(y_j)$, sólo para una j . Ya que de lo contrario podemos suponer que $P_i \cap B_r(x_i)$ se interseca con $Q_j \cap B_s(y_j)$ y con $Q_k \cap B_s(y_k)$, para alguna j y k en $\{1, \dots, m\}$, entonces $P_i = Q_j = Q_k$. De este modo tenemos que y_j y y_k están en cada cara de P_i que contiene a x_i , así que $F(y_j)$ y $F(y_k)$ son caras de $F(x_i)$. Más aún tenemos que $F(y_j)$ y $F(y_k)$ son caras distintas por el Teorema 3.1.4, por lo que $F(y_j)$ y $F(y_k)$ son caras propias de $F(x_i)$, consecuentemente tenemos

$$r < d(x_i, y_j)/3, \quad r < d(x_i, y_k)/3 \quad \text{y} \quad s < d(y_j, y_k)/3.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} d(x_i, y_j) + d(x_i, y_k) &< (r + s) + (r + s) \\ &< d(x_i, y_j)/3 + d(x_i, y_k)/3 + 2d(y_j, y_k)/3 \\ &\leq d(x_i, y_j) + d(x_i, y_k), \end{aligned}$$

lo cual es claramente una contradicción. Por lo tanto, el conjunto $P_i \cap B_r(x_i)$ se interseca con $Q_j \cap B_s(x_j)$ para una sola j .

Ahora afirmamos que el conjunto $Q_j \cap B_s(x_j)$ interseca a $P_i \cap B_r(x_i)$, para una única i . De lo contrario tendríamos que $Q_j \cap B_s(x_j)$ interseca a $P_i \cap B_r(x_i)$ y $P_k \cap B_r(x_k)$, para algunas i y k en $\{1, \dots, n\}$. Entonces $P_i = Q_j = P_k$. Ahora consideremos y_j en cada cara de P_i que contiene a x_i o a x_j . Así tenemos que $F(y_j)$ es una cara de $F(x_i)$ o de $F(x_k)$. Más aún $F(x_i)$ y $F(x_k)$ son distintas por el Teorema 3.1.4. Por lo tanto, $F(y_j)$ es una cara propia de $F(x_i)$ y de $F(x_k)$, en consecuencia,

$$r < d(x_i, y_j)/3 < (r + s)/3.$$

Y por lo tanto $r < s/2$. Como $s < \delta(y)/3$, tenemos que $2r < \delta(y)/3$ y por lo tanto $r < \delta(y)/6$. Ahora notemos que,

$$d(x_i, y_j) < r + s < \delta(y)/2$$

y

$$d(x_k, y_j) < r + s < \delta(y)/2.$$

Por construcción de $U(x, r)$, podemos deducir que π mapea $P_i \cap B_{(r+s)}(y_j)$ de forma inyectiva en M . Así x_i y x_k están en $P_i \cap B_{(r+s)}(y_j)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, podemos reetiquetar la clase $[y]$, tal que, $P_i \cap B_r(x_i)$ se interseca únicamente con $Q_i \cap B_r(x_i)$, para toda $i = 1, \dots, n$. Ergo $P_i = Q_i$ para toda i .

Sean g_{ij} y h_{ij} elementos de G del mismo modo como se construyeron para x y y . Supongamos que g_S identifica la cara $S' \cap S_r(x_i)$ de $P_i \cap S_r(x_i)$ con la cara $S \cap S_r(x_j)$ de $P_j \cap S_r(x_j)$. Entonces $g_S(x_i) = x_j$, por lo que x_i está en S' . Ahora supongamos que $P_i \cap B_r(x_i)$ interseca a $P_i \cap B_s(y_i)$, tenemos así que y_i está en S' también. Observemos que $g_S(P_i \cap B_r(x_i))$ interseca a $g_S(P_i \cap B_s(y_i))$. Luego $P_j \cap B_r(x_j)$ interseca a $P_i \cap B_s(g_S(y_i))$. Por lo que $g_S y_i = y_j$. Así $g_{ij} = h_{ij}$.

Ahora supongamos que,

$$x_i = x_{i_1} \sim x_{i_2} \sim \dots \sim x_{i_p} = x_j.$$

Luego, podemos deducir del argumento previo, que,

$$y_i = y_{i_1} \sim y_{i_2} \sim \dots \sim y_{i_p} = y_j,$$

Y así,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{i_{p-1}i_p} g_{i_{p-2}i_{p-1}} \cdots g_{i_1i_2} = \\ &= h_{i_{p-1}i_p} h_{i_{p-2}i_{p-1}} \cdots h_{i_1i_2} = h_{ij}. \end{aligned}$$

Ahora podemos ver que,

$$\begin{aligned} U(x, r) \cap U(y, s) &= \\ \pi \left(\bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) \right) \cap \pi \left(\bigcup_{j=1}^m Q_j \cap B_r(y_j) \right) &= \\ \pi \left[\bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) \cap \bigcup_{j=1}^m Q_j \cap B_r(y_j) \right] &= \\ \pi \left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m [P_i \cap B_r(x_i) \cap Q_j \cap B_r(y_j)] \right) &= \\ \pi \left(\bigcup_{i=1}^n P_i \cap B_r(x_i) \cap B_s(y_i) \right). \end{aligned}$$

Sea $x = x_k$ y $y = y_l$, entonces,

$$\varphi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) = \bigcup_{i=1}^n g_{ik} (P_i \cap B_r(x_i) \cap B_s(y_i)),$$

y

$$\varphi_y(U(x, r) \cap U(y, s)) = \bigcup_{i=1}^n h_{il} (P_i \cap B_r(x_i) \cap B_s(y_i)).$$

Ahora en el conjunto,

$$g_{ik} (P_i \cap B_r(x_i) \cap B_s(y_i)),$$

el mapa $\varphi_y \varphi_x^{-1}$ es la restricción de,

$$h_{il} g_{ik}^{-1} = h_{il} h_{ik}^{-1} = h_{il} h_{ik} = h_{kl},$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto se tiene que $\varphi_y \varphi_x^{-1}$ es la restricción de h_{kl} . Esto es, $\varphi_y \varphi_x^{-1}$ concuerda con algún elemento de G . Esto completa la prueba de que $\{\varphi_x\}$ es un (X, G) -atlas para M .

(4) Finalmente falta mostrar que la (X, G) -estructura de M dada por la inclusión natural propia de P° en M es un (X, G) -mapa, para cada $P \in \mathcal{P}$. Para esto, sea P un polígono en \mathcal{P} e $\iota : P^\circ \rightarrow M$ el encaje natural de P° en M . Entonces para cada punto x en P° y cada carta $\varphi_x : U(r, x) \rightarrow B_r(x)$ el mapa,

$$\iota^{-1} : \iota B_r(x) \rightarrow B_r(x),$$

es precisamente φ_x . Por lo tanto ι es un (X, G) -mapa (consúltese Definición 1.2.20). Por lo que la (X, G) -estructura de M dada por la inclusión natural propia de P° en M es un (X, G) -mapa, para cada $P \in \mathcal{P}$, como se quería mostrar.

□

El siguiente teorema introduce una aplicación directa del teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.6. *Sea G un grupo de isometrías que preserva la orientación de X , y sea $\Phi = \{g_S \mid g_S \in G \text{ y } S \in \widehat{\mathcal{S}}\}$ una G -identificación de caras de P , para una familia finita \mathcal{P} de poliedros convexos y disjuntos en X . Entonces Φ es propio si y sólo si:*

- (1) *Cada ciclo de Φ es finito;*
- (2) *Las isometrías de g_S no fijan puntos de S' , para cada $S \in \widehat{\mathcal{S}}$; y*
- (3) *Cada ciclo de arista de Φ tiene suma de ángulos diédricos 2π .*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que Φ es propio. Entonces cada ciclo de Φ es finito y tiene su suma de su ángulo sólido igual a 4π , más aún, g_S no fija ningún punto S' de cada S en $\widehat{\mathcal{S}}$ por el Teorema 3.1.4. Sea $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ciclo de aristas de Φ . Como $\omega[x] = 2\theta[x]$, tenemos así que $\theta[x] = 2\pi$. Es decir, cada ciclo de arista de Φ tiene suma de su ángulo diédrico de 2π .

Ahora, de modo contrario, supongamos que Φ cumple las condiciones (1), (2) y (3). Cada ciclo de Φ es finito por (1). Ahora tomemos $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$

un ciclo de Φ . Si x está en el interior de algún poliedro de \mathcal{P} , entonces $\omega[x] = 4\pi$. Si x está contenido en alguna cara de un poliedro de \mathcal{P} , entonces $\omega[x] = 4\pi$ por (2). Y si x está contenido en una arista de algún poliedro de \mathcal{P} , entonces $[x]$ es un ciclo de segmentos y por (3) tenemos que $\omega[x] = 2\theta[x] = 4\pi$.

Asumamos que x es un vértice de un poliedro de \mathcal{P} , entonces x_i es un vértice de un poliedro $P_i \in \mathcal{P}$ para cada i . Sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que r es más pequeño que la mitad de cualesquiera de las distancias entre x_i y x_j para cada $i \neq j$, así como, la distancia de x_i a cualquier cara de P_i que no contenga a x_i para cada i . Entonces para cada i ,

$$P_i \cap S_r(x_i)$$

es un polígono en la esfera $S_r(x_i)$ y los polígonos $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$ son disjuntos. Restringamos Φ a la identificación propia de caras dada por $I(\mathbb{S}^2)$ (las isometrías de \mathbb{S}^2), en los polígonos $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$. Sea Σ el espacio obtenido al identificar dichos polígonos, entonces, tenemos que Σ tiene una estructura esférica orientable (cf.[26, capítulo 9, sección 2, teorema 9.2.3.]). Más aún, es una 2-esfera compacta, conexa y $\omega[x] = 4\pi$. Es decir, Φ es propio, con lo que concluimos la demostración de dicho teorema.

□

3.1.2. 3-Variedades Hiperbólicas Completas.

En este apartado nos ocuparemos de mostrar que la identificación de poliedros antes descrita nos permite obtener 3-variedades hiperbólicas completas. Veremos a modo de esbozo cuales son las condiciones necesarias y suficientes para que el espacio cociente obtenido bajo una G -identificación, sea una 3-variedad hiperbólica completa. Es preciso aclarar que únicamente se muestra el bosquejo de los resultados, ya que la extensión del trabajo no permite entrar en detalles técnicos.

Consideremos ahora una 3-variedad hiperbólica M , la cual obtenemos bajo una identificación de una familia finita de poliedros \mathcal{P} , disjuntos, convexos, con un número finito de caras y de volumen finito en \mathbb{H}^3 , dada por la G -identificación propia de caras, donde G es el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 , $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$.

Es fácil extraviarse al pensar en lo que estamos tratando de observar con respecto a la completez para estos espacios cocientes. Por ejemplo, podemos ver en la siguiente figura (Figura 3.3), que una identificación que no obedece a las condiciones requeridas en esta sección, no necesariamente será compacta. De esta forma, si no le pedimos que tengan volumen finito a nuestro poliedro, entonces como se muestra en el dibujo, éste, claramente no será completo en \mathcal{B}^3 , ya que estaríamos permitiendo que dicho poliedro tenga al menos una arista \overline{uv} en la frontera $\partial\mathbb{S}^2$, luego no podríamos garantizar la completez de las aureolas.⁹

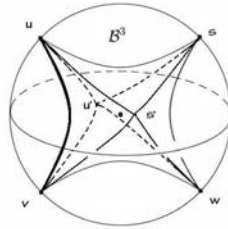


Figura 3.3: Un poliedro de volumen infinito en \mathcal{B}^3 .

Para lo siguiente utilizaremos el modelo de la bola unitaria \mathcal{B}^3 . Como los poliedros tienen volumen finito, entonces, sus vértices están dentro del espacio hiperbólico o son vértices ideales, pero no se admiten aristas al infinito. De este modo cada poliedro P en \mathcal{P} tiene un número finito de vértices ideales en la esfera \mathbb{S}^2 , la cual es frontera de \mathcal{B}^3 , es decir, $\mathbb{S}^2 = \partial\mathcal{B}^3$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que no hay dos poliedros en \mathcal{P} que compartan los vértices ideales.

Entonces la G -identificación propia Φ , de caras S de los poliedros en \mathcal{P} , puede extenderse por la identificación de estos vértices ideales de los P en \mathcal{P} . Esto por supuesto, nos define una relación de equivalencia en el conjunto de dichos vértices. Nombraremos a estas clases de equivalencia, simplemente, *ciclos*. Usaremos $[v]$, para denotar el ciclo que contiene a un

⁹En realidad por como elegimos los poliedros no puede suceder lo expuesto, sin embargo, sólo es un ejemplo de lo fácil que es extraviarse en este apartado. Otro caso que permite ver que es indispensable mostrar la completez, es si no le pedimos ser regulares a los poliedros, pues el pegado podría determinarnos una aureola a la que se le pueda extraer una sucesión de Cauchy no convergente.

vértice ideal v , y al cual llamaremos *punto cuspid* de la variedad M .

Sea v un vértice ideal de un poliedro P_v contenido en \mathcal{P} . Tomemos la horoesfera Σ_v basada en v , véase Definición 2.3.1, la cual cumple con que únicamente las caras \hat{S} que inciden en v la intersecan. La *aureola* de los vértices ideales v está definida por el conjunto,

$$\mathcal{F}(v) = P_v \cap \Sigma_v.$$

Observemos que $\mathcal{F}(v)$ es un polígono euclidiano¹⁰, compacto en la horoesfera Σ_v , respecto a la métrica euclidiana usual en Σ_v , que además, por el tipo de afinidad no depende de la elección de la horoesfera. Para cada ciclo $[v]$ de vértices ideales, asumimos que hemos seleccionado lo suficientemente pequeñas las horoesferas $\{\Sigma_u | u \in [v]\}$, de modo tal, que las aureolas $\{\mathcal{F}(u) | u \in [v]\}$ son disjuntas.

Recordemos que un espacio topológico es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente. En particular nos fijaremos en el espacio inducido por tales aureolas, para mostrar que los espacios cocientes que nos resultan de una G identificación propia son completos. Nos interesa ver que el pegado adecuado, el cual estamos tomando al pedir que sea propio, nos determine una identificación correcta en las aureolas. Esto lo debemos garantizar, ya que podría suceder que como lo muestran las figuras Figura 3.4 y Figura 3.5, se nos puede formar una sucesión no convergente de puntos de identificación en las aureolas.

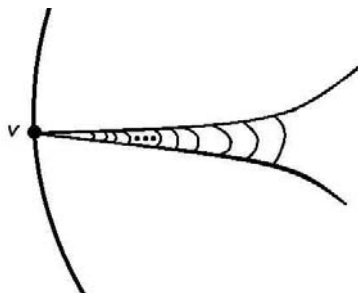


Figura 3.4: Sucesión de Cauchy no convergente formada por un pegado no correcto de la aureola

¹⁰Esto debido a que el modelo que estamos usando es el modelo de la bola \mathcal{B}^3 , por lo que al intersecarlo con el poliedro obtenemos un polígono euclidiano en \mathbb{R}^2 .

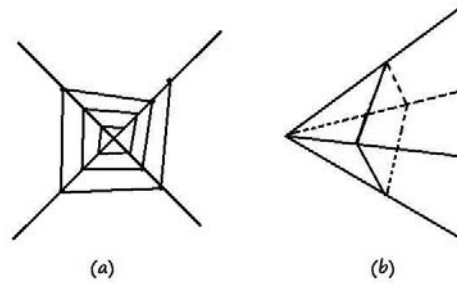


Figura 3.5: (a) Pegado incorrecto. (b) Pegado correcto.

Este análisis es indispensable, pues por la forma en que se han definido las aureolas, hay detalles que tratar con sumo cuidado. Debido a que las aureolas están basadas en puntos ideales, entonces, los radios de las bolas que se toman para definirlas no están completamente determinados con respecto a la métrica hiperbólica, véase Figura 3.6, por lo que se debe usar afinidad y mostrar que las aureolas que se dan por la identificación, están adecuadamente pegadas. En suma, queremos estar seguros que al identificar y completar los ciclos estos se identifican de forma correcta y por lo tanto sean compactos. Sin embargo, debemos notar que como los poliedros son regulares y el pegado es propio, es decir adecuado, entonces las aureolas formarán un cuadrilátero regular euclidiano que al identificarse debe ser completo, véase Figura 3.7.

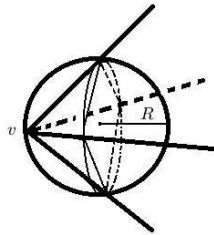


Figura 3.6: Aureola basada en v ideal. Con $0 < R < \infty$ muy pequeño.

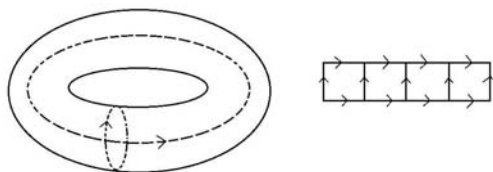


Figura 3.7: Identificación correcta de las aureolas.

En el demás espacio generado por los polígonos y la identificación parece claro que es compacto y totalmente acotado, por lo que es completo, así que no existe conflicto con la identificación, por lo que bastará con determinar lo antes expuesto.

Probaremos ahora, que Φ determina una identificación propia de caras de $\mathcal{I}(\mathbb{E}^2)$ (el grupo de isometrías en E^2) de los polígonos $\{\mathcal{F}(u) | u \in [v]\}$. Para este fin, sea g_S un elemento de Φ y sean w, w' elementos de $[v]$, tales que $g_S(w') = w$. Sean S y S' caras de los poliedros P y P' , donde P y P' pueden ser iguales, tenemos así que $\Sigma_{w'} \cap S'$ es una cara de $\mathcal{F}(w')$, y $\Sigma_w \cap S$ es una cara de $\mathcal{F}(w)$. Tomemos un función auxiliar \bar{g}_S , la cual está dada a través de la siguiente restricción,

$$\bar{g}_S \downarrow_{g_S}: \Sigma_{w'} \rightarrow g_S(\Sigma_{w'}).$$

Entonces \bar{g}_S es una isometría con respecto a la métrica euclidiana usual de las horoesferas $\Sigma_{w'}$ y $g_S(\Sigma_{w'})$. Observe también que el segmento de línea,

$$g_S(\Sigma_{w'} \cap S') = g_S(\Sigma_{w'}) \cap S$$

es paralelo al segmento de línea $\Sigma_w \cap S$, puesto que $g_S(\Sigma_{w'})$ es concéntrico a Σ_w . Sea

$$p_S: g_S(\Sigma_{w'}) \rightarrow \Sigma_w$$

la proyección radial de $g_S(\Sigma_{w'})$ en Σ_w . Se tiene, por tanto, que p_S es un cambio de escala con respecto a la métrica euclidiana usual de $g_S(\Sigma_{w'})$ y Σ_w . Definimos, ahora, una nueva función

$$k_S: \Sigma_{w'} \rightarrow \Sigma_w$$

como sigue $k_S = p_S \bar{g}_S$. Luego, resulta que k_S es una función afín con respecto a la métrica euclidiana usual de Σ_w y $\Sigma_{w'}$. Aún más, tenemos que k_S mapea la cara $\Sigma_{w'} \cap S'$ de $\mathcal{F}(w')$ en la cara $\Sigma_w \cap S$ de $\mathcal{F}(w)$. Por lo tanto, es claro que $\{k_S\}$ es una identificación propia de caras de $\mathcal{I}(\mathbb{E}^2)$, de los polígonos $\{\mathcal{F}(w)\}$. Cabe señalar que las isometrías $\mathcal{I}(\mathbb{E}^2)$, se extienden sobre el conjunto de todas las caras de $\widehat{\mathcal{S}}$ que inciden con el ciclo $[v]$. Asumamos ahora que las horoesferas $\{\Sigma_w\}$, las hemos seleccionado de manera que se cumpla $p_S = 1$, para el mayor número posible de caras S .

Sea $\mathcal{F}[v]$ el espacio obtenido por la identificación de caras de los polígonos $\{\mathcal{F}(w)\}$ con k_S . Entonces $\mathcal{F}[v]$ es una superficie que tiene estructura afín¹¹. A la superficie $\mathcal{F}[v]$, la llamaremos *aureola del punto cuspide* $[v]$ de la 3-variedad hiperbólica M , la cual fue obtenida bajo la identificación del poliedro en \mathcal{P} por Φ . El siguiente teorema nos muestra la topología de $\mathcal{F}[v]$.

Teorema 3.1.7. *La aureola del punto cuspide $[v]$ de M , $\mathcal{F}[v]$, es homeomorfa a cualquiera de los dos siguientes espacios, a un toro o a una botella de Klein, dependiendo si acepta o no orientación. Todavía más, si cada elemento de Φ preserva la orientación entonces $\mathcal{F}[v]$ es un toro.*

DEMOSTRACIÓN:

Por construcción tenemos que $\mathcal{F}[v]$ es una superficie cerrada. Subdividamos los polígonos $\{\mathcal{F}(u)\}$. De ser necesario, podemos asumir que $\{\mathcal{F}[v]\}$ son triángulos. Sea p, q, t los números de vértices, segmentos y triángulos respectivamente. Luego se sigue que hay $3t = 2q$, puesto que cada triángulo tiene 3 aristas y cada arista es frontera de dos triángulos. Además tenemos que la suma de todos los ángulos de los triángulos por un lado es πt y por el otro resulta que es $2\pi p$. Por lo tanto $t = 2p$ y de este modo, la característica de Euler (cf. [28]) es,

$$\chi(\mathcal{F}[v]) = p - q + t = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}t + t = 0.$$

Se tiene así que $\mathcal{F}[v]$ es cualquiera de los dos siguientes casos, o un toro o una botella de Klein. Si cada elemento de Φ preserva la orientación, entonces cada elemento de $\{k_S\}$, donde k_S como anteriormente se definió, preserva la orientación y de este modo $\mathcal{F}[v]$ es orientable, por lo que $\mathcal{F}[v]$ es un toro.

□

¹¹Cf. ([20]).

Enlistaremos a continuación, otros teoremas que son importantes para ver la completez de las 3-variedades hiperbólicas.

Teorema 3.1.8. *Una aureola $\mathcal{F}[v]$ de un punto cúspide $[v]$ de M , es completa si y únicamente si las aureolas $\{\mathcal{F}(u)\}$ de los vértices ideales en $[v]$ se pueden elegir de manera tal que Φ se restringe a una identificación de caras para $\{\mathcal{F}(u)\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que Φ restringe a una identificación de caras para $\{\mathcal{F}(u)\}$. Entonces $k_S = \bar{g}_S$ para cada S , y por tanto $\{k_S\}$ es una $\mathcal{I}(E^2)$ -identificación de caras para $\{\mathcal{F}(u)\}$. Luego, como $\mathcal{F}[v]$ es compacto, la $(E^2, \mathcal{I}(E^2))$ -estructura en $\mathcal{F}[v]$ determinada por $\{k_S\}$ es completa. Entonces $\mathcal{F}[v]$ es una superficie completa $(E^2, S(E^2))$ donde $S(E^2)$ es la restricción de la isometría $\mathcal{I}(E^2)$ a la cara S , (consúltese [26], págs. 364-365).

Ahora, de manera inversa, supongamos que $\mathcal{F}[v]$ es completo. Sea \mathcal{G} una gráfica¹², cuyos vértices son elementos de $[v]$ y cuyos segmentos son el conjunto $\{w, w'\}$, para los cuales hay un elemento g_S de Φ tal que $g_S(w') = w$. Entonces \mathcal{G} es conexa. Sea \mathcal{J} una subgráfica de \mathcal{G} cuyos vértices son los de \mathcal{G} y cuyos segmentos son el conjunto $\{w, w'\}$, para los cuales hay un elemento g_S de Φ tal que $g_S(w') = w$ y $p_S = 1$. Mostraremos que \mathcal{J} es conexa. Lo haremos por contradicción. Supongamos que \mathcal{J} es disconexa, así tenemos, que hay un segmento $\{w, w'\}$ de \mathcal{G} que junta dos componentes de \mathcal{J} . Si re-elegimos todas las horoesferas correspondientes a una de esas componentes, por un cambio uniforme en la escala, podemos agregar entonces el segmento $\{w, w'\}$ a \mathcal{J} . Sin embargo nosotros asumimos en la elección original de horoesferas, que \mathcal{J} tiene el mayor número de segmentos posibles, lo cual es una contradicción. Por lo que \mathcal{J} debe ser conexa.

Luego como $\mathcal{F}[v]$ es completo, la $(E^2, S(E^2))$ -estructura de $\mathcal{F}[v]$ contiene una $(E^2, \mathcal{I}(E^2))$ -estructura, más aún, ya que \mathcal{J} es conexo podemos elegir, entonces, una escala de la $(E^2, \mathcal{I}(E^2))$ -estructura en $\mathcal{F}[v]$ de forma tal que el mapeo natural inyectivo de $\mathcal{F}^\circ[v]$ en $\mathcal{F}[v]$, es una isometría local para cada $w \in [v]$. Sea g_S un elemento de Φ tal que $g_S(w') = w$. Entonces la restricción de k_S al interior de la cara $\Sigma_{w'} \cap S'$ de $\mathcal{F}(w')$ es una isometría local puesto que es un múltiplo escalar de $\mathcal{F}[v]$. Por consiguiente tenemos

¹²Como en Teoría de Gráficas.

que k_S es una isometría y por lo tanto $p_S = 1$. Se sigue que Φ se restringe a una identificación de caras para $\{\mathcal{F}(w)\}$.

□

Enunciaremos los siguientes teoremas dando únicamente un esbozo de sus demostraciones, ya que requieren de herramientas que no abordamos, y rebasan el propósito de este escrito. Para consultar el procedimiento técnico de tales demostraciones o lo referente a ellas véase [26], págs. 442 y 443.

Para mayor claridad pasaremos al modelo \mathbb{H}^3 y asumiremos, sin perder generalidad que $v = \infty$. Asumiremos, además, que $\mathcal{F}[v]$ es completo. Podemos afirmar que existe un grupo de isometrías Γ_v de \mathbb{H}^3 , tal que actúa libre y discontinua en Σ_v . Así mismo, existe $(E^2, \mathcal{I}(E^2))$ -equivalencia de Σ_v/Γ_v en $\mathcal{F}[v]$ compatible con la proyección de $\mathcal{F}(v)$ en $\mathcal{F}[v]$ (cf. Ídem, p. 365).

Sea $B(v)$ la horobola abierta con base en v tal que $\partial B(v) = \Sigma_v$, entonces Γ_v actúa libre y discontinuamente en $B(v)$ como grupo de isometrías. En consecuencia tenemos que $B(v)/\Gamma_v$ es una 3-variedad hiperbólica llamada *horocuspide sólida*. Por la forma en que se construyó M a través de una cierta identificación, y por las condiciones que acabamos de dar, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.9. *Si la aureola $\mathcal{F}[v]$ del punto cuspide $[v]$ de M es completa, entonces existe una isometría local*

$$\iota : B(v)/\Gamma_v \rightarrow M$$

compatible con la proyección de P_v en M .

□

Teorema 3.1.10. *Sea M una 3-variedad hiperbólica obtenida bajo una identificación finita de caras obtenida de una familia finita de poliedros \mathcal{P} disjuntos, convexos, con un número de caras finito y de volumen finito en \mathbb{H}^3 , bajo la identificación propia de caras Φ , a través de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$. Entonces M es completo si y sólo si $\mathcal{F}[v]$ es completo, para cada punto cuspide $[v]$ de M .*

DEMOSTRACIÓN:

Primero veremos que si M es completo, entonces $\mathcal{F}[v]$ es completo para cada punto cuspide $[v]$ de M . Esto lo haremos por un argumento contrapositivo.

Así pues, supongamos que $\mathcal{F}[v]$ no es completo para cada uno de sus vértices ideales v . Tenemos por el Teorema 3.1.8, que existe una cara S que incide en $[v]$ tal que $p_S \neq 1$. Sea \mathcal{J} la gráfica como en la prueba del Teorema 3.1.8. Ya que \mathcal{J} es conexo según vimos, entonces hay un número finito de caras S_1, S_2, \dots, S_n que inciden con el ciclo $[v]$ en sus vértices ideales v_1, \dots, v_n , respectivamente, tal que $g_{S_i}(v_{(i+1)}) = v_i$, $g_{S_n}(v_1) = v_n$, y $p_{S_i} = 1$ para cada $i = 1, \dots, n-1$, y $S_1 = S'_n$.

Sea $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(v_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Podemos elegir un punto x'_0 en la cara $S \cap \mathcal{F}_1$ del polígono \mathcal{F}_1 . Sea a_1 un arco geodésico euclidiano en \mathcal{F}_1 que une el punto x'_0 con el punto x'_1 en la cara $S_1 \cap \mathcal{F}_1$. Podemos usar un argumento inductivo para encontrar i arcos geodésicos euclidianos, de una manera similar a a_1 , donde $p_S(x'_n) = x'_0$. Construimos una sucesión de puntos $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ en \mathcal{B}^3 , de forma tal que resulta en una sucesión de Cauchy como se muestra en la Figura 3.5. Si x_n es más cercano a v_1 que x'_0 , la sucesión de Cauchy es continua, no convergente en M , pues resulta que las imágenes de dichos puntos son una sucesión de Cauchy no convergente en la superficie (cf. [26, p. 419]). Ahora si x_0 es más cercano a v_1 que x'_n tenemos que la sucesión de Cauchy $\{x_i\}_{i=n, \dots, 1}$, será de igual forma divergente. Lo cual implica que M no es completo.

Ahora, de forma inversa, mostraremos que si $\mathcal{F}[v]$ es completo para cada punto cuspide $[v]$ de M , entonces M es completo. Supongamos que $\mathcal{F}[v]$ es completo para cada punto cuspide $[v]$ de M . Del Teorema 3.1.8, podemos deducir que existe una 3-variedad compacta con frontera M_0 en M tal que $M - M_0$ es la unión disjunta de horocuspides sólidas. Luego podemos ver que existe una sucesión de vecindades compactas $\{M_i\}_{i \in I}$ de M tal que $M = \cup_{i=1}^{\infty} M_i$, con lo que concluimos que M es completo¹³.

□

Con estos conceptos y lo visto hasta aquí, podemos analizar las descomposiciones de los complementos de los nudos antes citados.

¹³Para ver los detalles formales de esta demostración consúltese ibídem, págs. 366, 421-422 y 443.

3.2. El Espacio Complemento de los Nudos o Enlaces, el Nudo Ocho y el enlace de los Anillos Borromeos.

Veremos en esta sección el algoritmo de descomposición en poliedros para los complementos de los nudos el “*Nudo Ocho*” y el enlace de “*Los Anillos Borromeos*” (véanse Figura3.8 y Figura3.9) encajados en \mathbb{S}^3 . De tal forma, que el espacio cociente que resulta de la identificación de dichos poliedros con los complementos de los respectivos (nudo o enlace), bajo alguna G -identificación propia de caras, será una 3-variedad M , con estructura hiperbólica, completa. La identificación que emplearemos, será obtenida a través de algunas isometrías hiperbólicas convenientes.



Figura 3.8: Nudo Ocho.

Este algoritmo fue descrito por Thurston en [32], pero, fue Ratcliffe quien lo muestra con mayor detalle en [26]. Nos basaremos en los resultados de este último para describir dichas descomposiciones, y completaremos el algoritmo de descomposición para el complemento de los Anillos Borromeos.

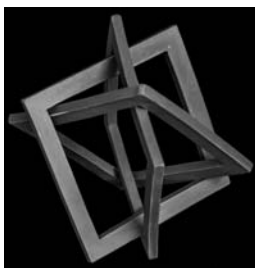


Figura 3.9: Los Anillos Borromeos.

3.2.1. El Complemento del Nudo Ocho.

Sea K el nudo Ocho, véase Figura3.10. A continuación veremos que $\mathbb{S}^3 - K$, el complemento del nudo K , es una 3-variedad con estructura hiperbólica orientable y completa.



Figura 3.10: Nudo Ocho.

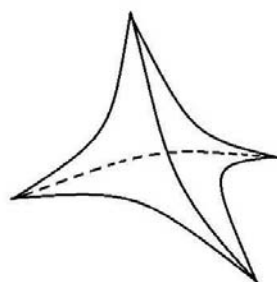


Figura 3.11: Tetraedro regular centrados en el origen en \mathcal{B}^3 .

Sean T y T' dos tetraedros regulares disjuntos con vértices ideales, en el modelo de la bola unitaria \mathcal{B}^3 , véase la Figura3.11. Etiquetemos las caras y aristas de T y T' como lo indica la Figura3.13. Si ahora nos pasamos al modelo del semiespacio superior \mathcal{H}^3 , podemos acomodar a T , de modo tal que sus vértices estén en ∞ , como lo muestra la Figura3.12. Teniendo de esta manera que las caras de T intersectan a una horoesfera horizontal, de modo que forman un triángulo equilátero. Así tenemos que todos los ángulos diédricos de T son de $\frac{\pi}{3}$.

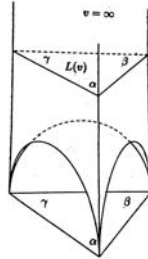


Figura 3.12: Tetraedro regular con vértices en el infinito en \mathbb{H}^3 .

Observemos que el grupo de simetrías de T actúa de forma transitiva en sus caras, así como en todos los ángulos diédricos de T . Ya que las transformaciones de Möbius en \mathcal{B}^3 están determinadas por la acción sobre sus cuatro vértices, el grupo de simetrías de T corresponde al grupo de permutaciones de los vértices de T . Luego existe una única isometría R_S , de \mathcal{B}^3 , para $S = A, B, C, D$, que invierte la orientación, tal que mapea T' en T ; y del mismo modo, R_S mapea la cara S' en S de tal forma que preserve el patrón de identificación entre S y S' , como se muestra en la Figura 3.13.

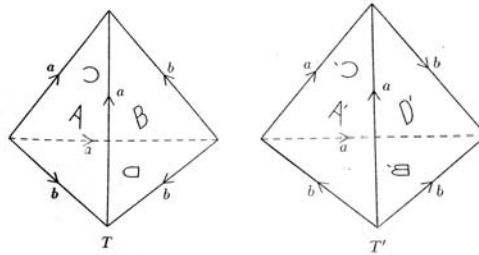


Figura 3.13: Patrón de identificación para el complemento del Nudo Ocho.

Sea g_S dado por la composición de R_S seguida de la reflexión en la cara S . Entonces g_A, g_B, g_C, g_D y sus inversos forman un $\mathcal{I}_0(\mathcal{B}^3)$ -identificación Φ , de caras para $\{T, T'\}$. Note que hay seis puntos en cada ciclo de aristas de Φ . Más aún, la suma de los ángulos diédricos de cada ciclo de aristas de Φ , es 2π . Por lo tanto Φ es una G -identificación propia de caras.

Sea M el espacio cociente obtenido de la identificación de T con T' a través de Φ . Tenemos, entonces, que M es una 3-variedad hiperbólica orientable según el Teorema3.1.5. Ahora hay un ciclo de vértices ideales, por el Teorema3.1.7, la aureola de los puntos cúspides de M es un toro. Podemos verificar esto directamente en la imagen Figura3.14.

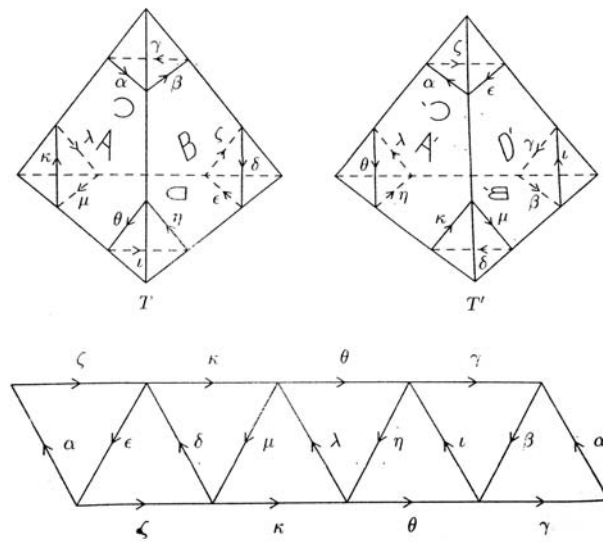


Figura 3.14: Aureola del punto Cuspide.

Veamos que la aureola de los puntos cúspide, es completa. Para esto seleccionemos horoesferas basadas en los vértices ideales de T' disjuntas, las cuales elegimos de forma tal que sean invariantes bajo el grupo de simetrías de T' . Así tenemos que las isometrías R_A, R_B, R_C, R_D , mapean estas horoesferas en horoesferas basadas en los vértices ideales de T , y son invariantes bajo el grupo de isometrías de T . En consecuencia dichas horoesferas serán identificadas bajo elementos de Φ . Luego tenemos que la aureola de los puntos cúspide de M es completa por el Teorema3.1.9. Esto es, M tiene una horobola sólida según el Teorema3.1.9. Finalmente, tenemos que M es completa en virtud del Teorema3.1.10.

Ahora probaremos que M es homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - K$. Para tal fin imaginemos que hemos dibujado al nudo K en el vértice de T con altura 1 como muestra la Figura 3.16. Añadamos dos arcos dirigidos α , β a K como se muestra en la Figura 3.16. Estos dos arcos corresponden con dos segmentos de M .

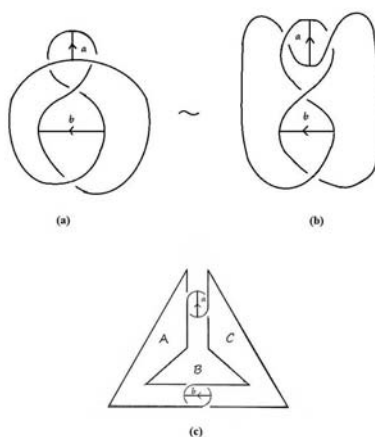


Figura 3.15: Isotopía de Nudo 8.

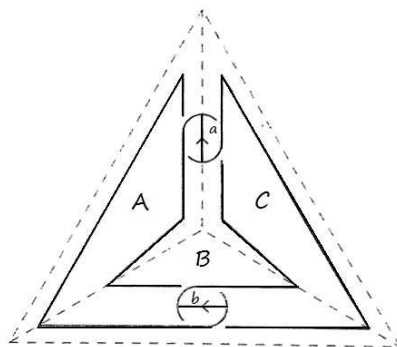


Figura 3.16: Arcos dirigidos.

El patrón de identificar la frontera de A , está dado como se muestra en las figuras Figura3.17y Figura3.18. El espacio cociente que nos resulta es homeomorfo al disco cerrado sin dos puntos, véase Figura3.17,(b). Luego tenemos que el espacio cociente es homeomorfo a un disco con un punto y parte de la frontera removidos como se muestra en la imagen Figura3.18, en (c) y (d). El último disco se extiende sobre las partes de K que siguen el contorno de la cara A .

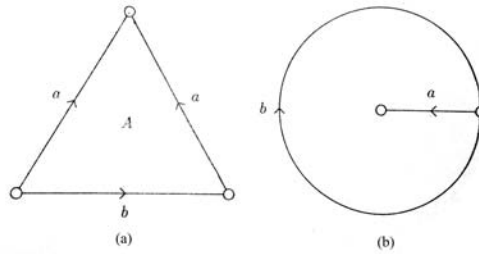


Figura 3.17: Patrón de identificación para la región A .

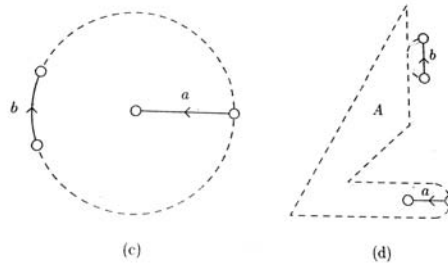


Figura 3.18: Patrón de identificación para la región A .

Del mismo modo podemos determinar los discos que resultan del espacio cociente y que se extienden sobre las partes de K , tal que siguen los contornos de las caras B , C , y D respectivamente como lo muestran los siguientes diagramas Figura3.19, (a) y (b); Figura3.20, (c) y (d)), Figura3.21, (a) y

(b); Figura 3.21, (c) y (d) y en Figura 3.23, (a) y (b) y Figura 3.22, (c) y (d). Estos cuatro discos junto con K , forman un 2-simplejo L cuyo 1-esqueleto es la unión de K y los arcos α , β . Sea M^2 la imagen de ∂T en M . Debido a la compatibilidad del patrón de identificación, podemos ver claramente que M^2 es homeomorfo a L_K .

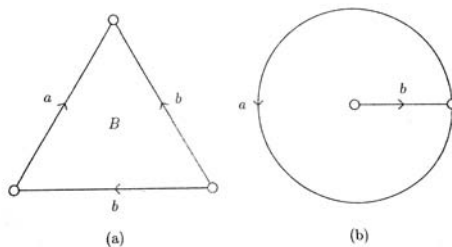


Figura 3.19: Patrón de identificación para la región B .

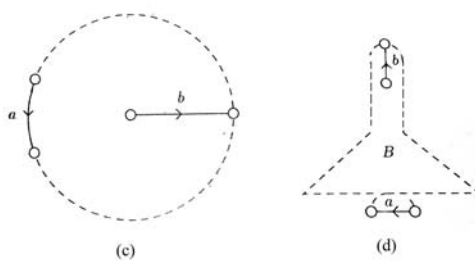
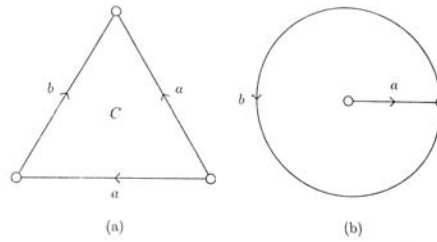
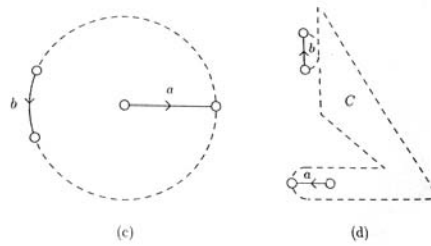
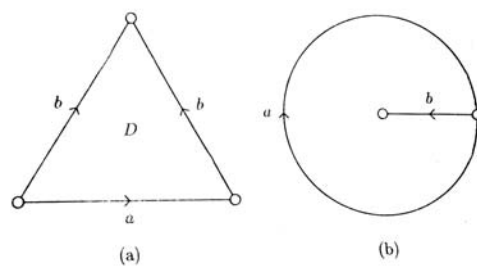


Figura 3.20: Patrón de identificación para la región B .

Figura 3.21: Patrón de identificación para la región C .Figura 3.22: Patrón de identificación para la región C .Figura 3.23: Patrón de identificación para la región D .

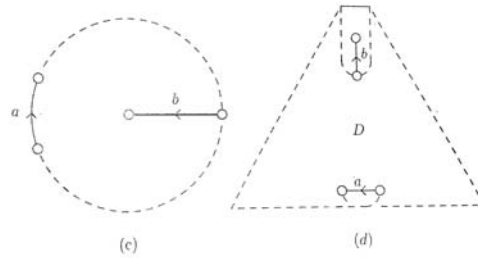


Figura 3.24: Patrón de identificación para la región D .

Observemos que para cada uno de los arcos α y β , estos reúnen cada una de las cuatro celdas de L . Si colapsamos los arcos α y β a puntos, entonces, L tiene el mismo tipo de homotopía que la 2-esfera. En consecuencia tenemos que $\mathbb{S}^3 - L$ es la unión de dos 3-bolas abiertas. Cortemos ahora, $\mathbb{S}^3 - L$ abriendo a lo largo de los interiores de las 2-celdas de L y partiendo los arcos α y β a lo largo de sus interiores. Esto lo hacemos de forma tal que el resultado que obtenemos son dos 3-variedades conectadas por su frontera N y N' , donde N y N' tienen como frontera dos 2-esferas menos cuatro puntos, con el mismo tipo de descomposición que las fronteras de T y T' , respectivamente como se muestra en la imagen Figura3.25.

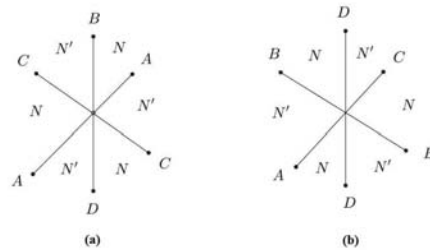


Figura 3.25: Variedades N y N' .

Como el interior de N y N' son 3-bolas abiertas, las variedades N y N' son 3- bolas cerradas, menos cuatro puntos en sus fronteras. Por lo que existe una función

$$\phi : N \amalg N' \longrightarrow T \amalg T',$$

que induce un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^3 - K$ y M . Es decir M es homeomorfo al complemento del nudo ocho en \mathbb{S}^3 como se quería mostrar.

3.2.2. El Complemento de los Anillos Borromeos.

Sea $L \subset \mathbb{S}^3$ el enlace “los Anillos Borromeos”, véase Figura3.26. A continuación veremos que $\mathbb{S}^3 - L$, el complemento del enlace L es una 3-variedad con estructura hiperbólica y completa.

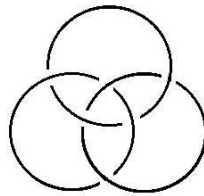
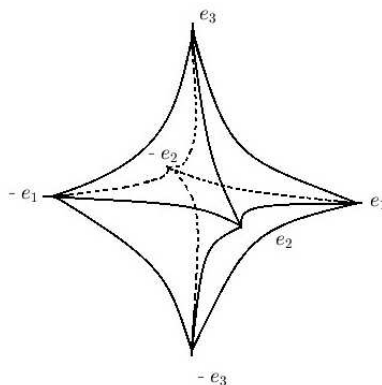
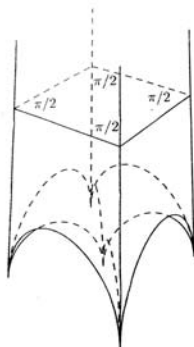


Figura 3.26: Los Anillos Borromeos

Sean P y P' dos octaedros regulares disjuntos en B^3 como el que se muestra en la Figura3.27. Pasemos ahora al modelo \mathbb{H}^3 de modo tal que los poliedros P y P' tengan sus vértices al infinito, como se muestra en la Figura3.28, podemos notar que todos los ángulos diédricos tanto de P , como de P' son de $\frac{\pi}{2}$.

Figura 3.27: Octaedro regular en B^3 .Figura 3.28: Octaedro regular ideal en H^3 .

Etiquetemos las caras, aristas y vértices de P y P' respectivamente de manera conveniente como lo muestra la Figura 3.29. Observe que las transformaciones de Möbius de B^3 están completamente determinadas por la acción del grupo $\mathcal{I}(B^3)$ sobre los vértices de P . Así el grupo de simetrías de P corresponde al grupo de permutaciones de sus vértices de P . En consecuencia tenemos que existe una única isometría g_S de B^3 que preserva la orientación y mapea P en P' y las caras S de P en las caras S' de P' , de

manera tal que se preserve el patrón de identificación entre las caras S y S' , para $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ y $S' = \{A', B', C', D', E', F', G', H'\}$ las caras respectivas de P y P' .

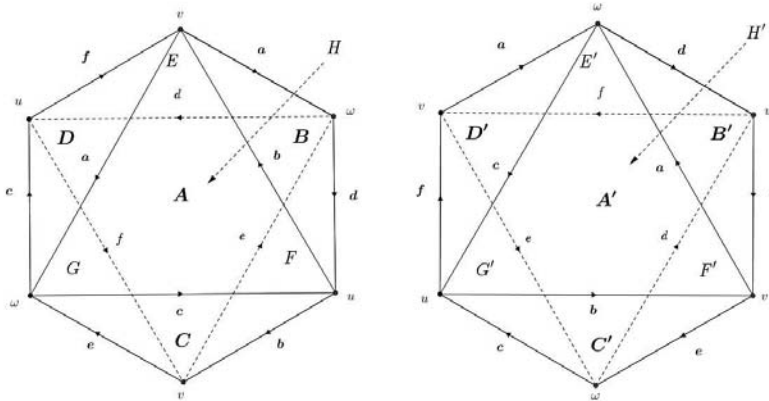


Figura 3.29: Patrón de identificación de los poliedros P y P' .

Sean g_S para $S = A, C, E, H$ y g_{S^*} , $S^* = B, D, F, G$, dado por la transformación de Möbius en B^3 , tal que, g_S es una rotación de $\frac{2\pi}{3}$ en el plano que contiene a S alrededor del centro de S , y en sentido positivo con respecto al interior de S . Sea g_{S^*} como se definió g_S pero en sentido opuesto al sentido de g_S , de manera tal que se vayan alternando las orientaciones si son caras adyacentes. Entonces $g_A, g_B, g_C, g_D, g_E, g_F, g_G, g_H$ y sus respectivos inversos conforman una G-identificación de caras $\mathcal{I}_0(B^3)$, Φ , para los poliedros $\{P, P'\}$. Hay cuatro puntos en cada ciclo de arista de Φ . Se tiene, así, que la suma de los ángulos diédricos de cada ciclo de arista de Φ es igual a 2π , por lo que Φ es una G-identificación propia de caras.

Sea M el espacio obtenido por la identificación de las caras del octaedro P con P' por Φ . Entonces M es una 3-variedad hiperbólica orientable por el Teorema3.1.5. Además hay tres ciclos de vértices ideales de P . Por el Teorema3.1.7, tenemos que la aureola del punto cuspide forma un toro. Podemos verlo directamente en las figuras Figura3.30 y Figura3.31.

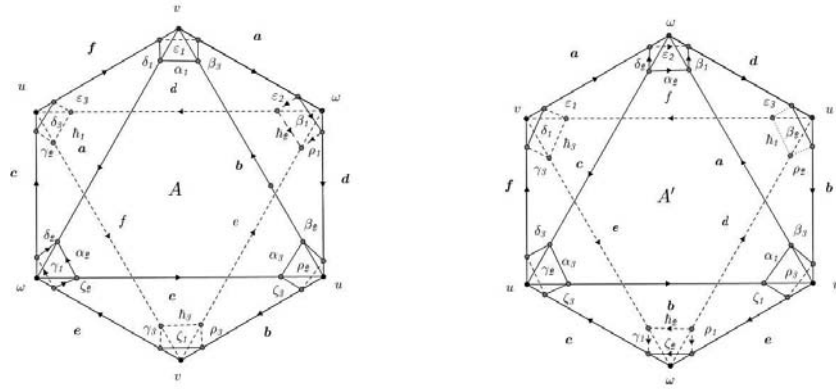


Figura 3.30: Aureolas.

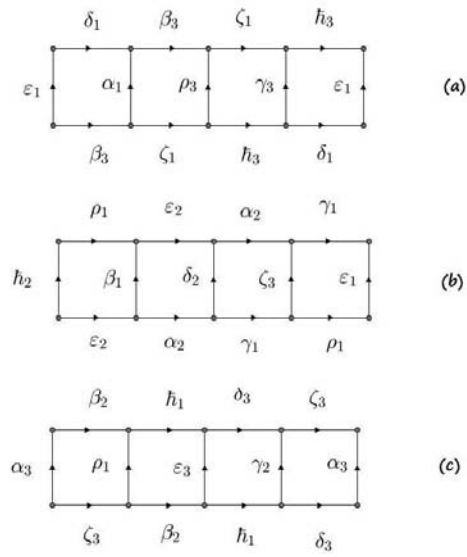
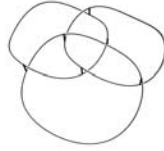
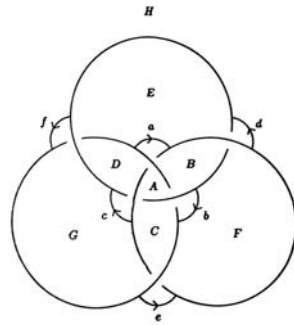


Figura 3.31: Aureolas.

Figura 3.32: Arcos dirigidos a, \dots, f en L .

Elijamos horosferas disjuntas basadas en los vértices ideales de P que son invariantes bajo el grupo de isometrías de P . Entonces las isometrías $g_A, g_B, g_C, g_D, g_E, g_F, g_G, g_H$ mapean las horoesferas basadas en los vértices ideales de P , en horoesferas en P' que son invariantes bajo las isometrías de P' . En consecuencia dichas horoesferas están identificadas por los elementos de Φ . Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.1.9, la aureola del punto cuspide es completa y así M tiene una horobola sólida por el Teorema 3.1.9. Finalmente M es completa por el Teorema 3.1.10.

Figura 3.33: El 2-simplejo Λ .

Ahora, adjuntemos seis arcos dirigidos a, b, \dots, f a L , como se muestra en la Figura 3.32. La unión de L y de los seis arcos, forman el 1-esqueleto del 2-simplejo Λ , donde las 2-celdas son discos que corresponden a las ocho regiones A, B, \dots, H en la Figura 3.33. Obsérvese que cada uno de los arco a, b, \dots, f reúne a cuatro de las 2-celdas de Λ . Podemos colapsar los arcos a, b, \dots, f en puntos, de donde se obtiene que Λ tiene el mismo tipo de homotopía que el de la 2-esfera. En consecuencia $\mathbb{S}^3 - \Lambda$ es la unión de dos 3-bolas abiertas.

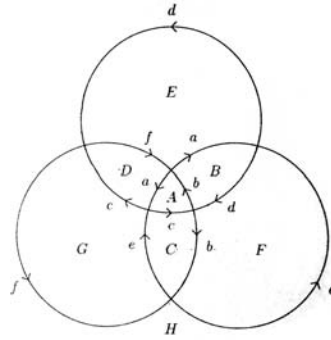


Figura 3.34: El patrón de identificación.

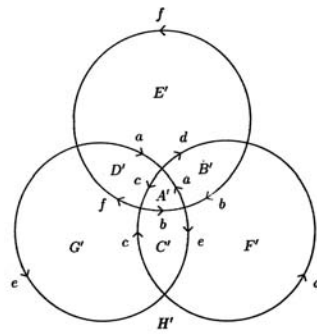


Figura 3.35: El patrón de identificación.

Procedemos a cortar el abierto $\mathbb{S}^3 - L$, a lo largo del interior de las 2-celdas de Λ y partiendo los arcos a, b, \dots, f a lo largo de sus interiores, de forma tal, que se producen dos 3-variedades con frontera conectadas N y N' ; donde las fronteras son 2-esferas menos seis puntos. Estamos considerando las mismas descomposiciones de celdas que de las fronteras ∂P y $\partial P'$ de los octaedros P y P' respectivamente, como se muestra en las figuras de los patrones de pegado Figura 3.33 y Figura 3.35. El interior de N y de N' son 3-bolas abiertas; N y N' son 3-bolas cerradas menos seis puntos en sus fronteras. Por lo que $\mathbb{S}^3 - L$ puede obtenerse de la identificación de dos octaedros ideales regulares P y P' , a lo largo de sus caras, bajo la identificación de caras como se observa en la Figura 3.35.

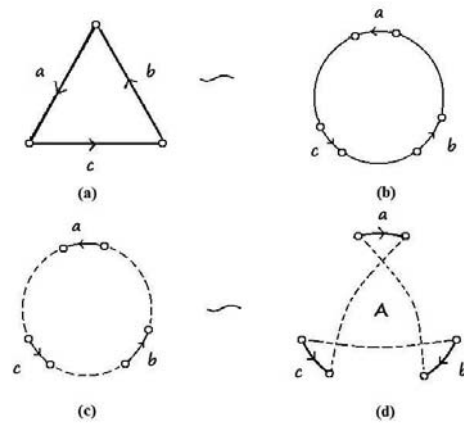


Figura 3.36: Patrón de identificación de la región A .

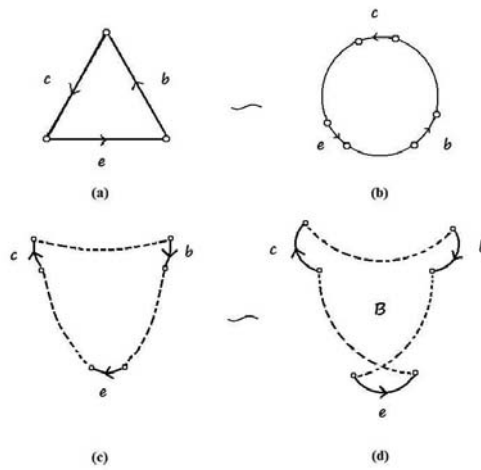


Figura 3.37: Patrón de identificación de la región B , análogo con C y D .

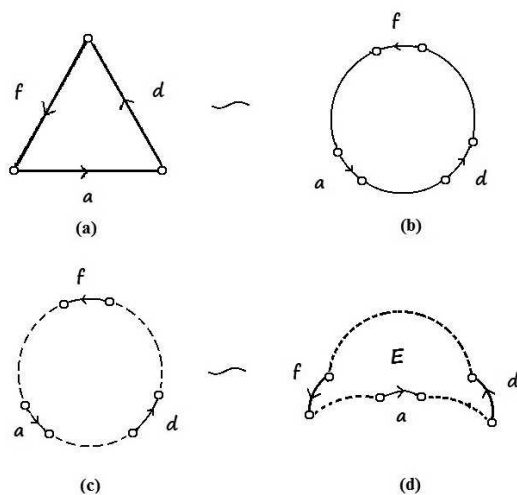


Figura 3.38: Patrón de identificación de la región E , análogo con F y G .

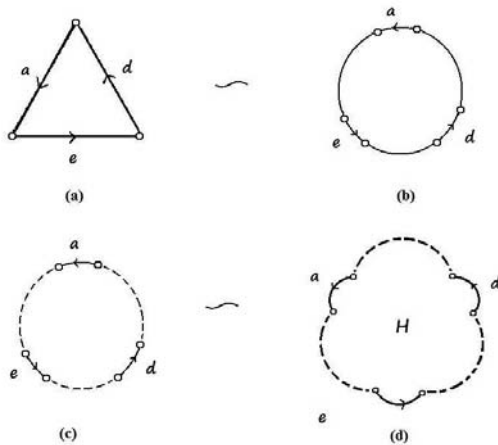


Figura 3.39: Patrón de identificación de la región H .

Esta identificación como ya mencionamos la podemos lograr emparejando las caras correspondientes de P con P' bajo una rotación de 120° , alternando en dirección de las caras con los caras adyacentes. Sea M^2 y M'^2 las respectivas imágenes de ∂P y $\partial P'$ en M y M' . Por la compatibilidad de la identificación podemos observar que $M^2 \sqcup M'^2$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^3 - L$, pues $\psi : N \sqcup N' \rightarrow P \sqcup P'$ que induce un homeomorfismo de $\mathbb{S}^3 - L$ a $M \sqcup M'$. Finalmente $M \sqcup M'$ es homomorfo al complemento de los anillos Borromeos y por lo tanto se ha mostrado que es una 3-variedad con estructura hiperbólica, completa.

Apéndice.

Apéndice. A

El Algoritmo de Descomposición Canónica de Sakuma y Weeks.

En este apartado daremos un breve vistazo al algoritmo de descomposición canónica para el espacio complemento de los enlaces asociados a la familia de trenzas generadas por $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^n$, familia donde aparecen de nuevo el nudo Ocho, los Anillos Borromeos, entre otros. Presentado por Sakuma y Weeks en [36]. Mostraremos únicamente los puntos claves, sin profundizar en los detalles teóricos ni técnicos. La finalidad de este apéndice, es simplemente mostrar una alternativa a la presentada hasta aquí en la descomposición del complemento de ciertos nudos o enlaces contenidos en \mathbb{S}^3 , que puede resultar más sencilla -en cuanto al algoritmos se refiere- una vez que se conoce la teoría que lo sustenta.

A- 1. El Espacio Complemento de los Enlaces Asociados a la Familia de Trenzas Generadas por $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^n$.

Sea M una 3-variedad hiperbólica con puntos cuspides (cf. capítulo 3 sección 1.1). Existe un algoritmo canónico de descomposición de M en

celdas ideales, al que llamamos *la descomposición canónica de M* . Podemos calcular el grupo que determinan sus clases de automorfismos, siempre que conozcamos la estructura combinatoria¹ de su descomposición canónica. De hecho tenemos que, en virtud del Teorema de *rígidez de Mostow*, dos variedades hiperbólicas orientables son homeomorfas si y sólo si sus respectivas descomposiciones canónicas tienen el mismo tipo de estructura combinatoria, y sus grupos son isomorfos bajo automorfismos del grupo combinatorio de sus respectivas descomposiciones canónicas (cf. [36]).

Describiremos ahora el algoritmo a seguir para descomponer el complemento de algunos miembros de una familia de enlaces alternantes. En particular estamos interesados en la familia de trenzas $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^n$. Recordemos que, en virtud del Teorema 1.3.11, tenemos que toda trenza cerrada es combinatoriamente equivalente a un nudo o enlace.

Para llevar a cabo este algoritmo, utilizaremos las nociones de envolvente convexa como en la Definición 1.2.23, los modelos del espacio hiperbólico que se definieron en §-2, con los poliedros regulares y su identificación mostrada en §-3 sección 1, entre otros conceptos.

Sea K un enlace alternante no separable (cf. Definición 1.3.7). Denotemos al diagrama del enlace K , con el mismo símbolo K . Recordemos que podemos ver el diagrama K , como una gráfica 4-valente en la frontera de \mathcal{B}^3 . Tenemos determinado, así, un poliedro combinatorio o simplejo, al cual denotaremos por B_K . Ahora colorearemos las regiones de ∂B_K de dos colores, blanco y negro, como un tablero de ajedrez como se ilustra en la Figura A.1, y asignaremos los símbolos $+$ y $-$ para los colores blanco y negro respectivamente.

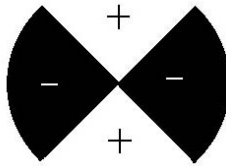


Figura A.1: Coloración de ∂B_K .

¹En el sentido de los complejos simpliciales.

Denotaremos como B_K^+ , al simplejo que nos resulta de dicha coloración. B_K^- será el simplejo obtenido de revertir la coloración y los signos, consúltese FiguraA.2. Cada cara S_i de B_K^\pm es un n_i -polígono combinatorio, con signo σ_i asignado. Ahora identificaremos S_i con la correspondiente cara S'_i de B_K^\mp bajo una rotación de $\sigma_i \frac{2\pi}{n_i}$, donde el signo + denota el sentido usual de las manecillas del reloj. Al espacio topológico que resulta de dicha identificación lo llamaremos \bar{M}_k , y al espacio M_k , sin los vértices simplemente M_k .

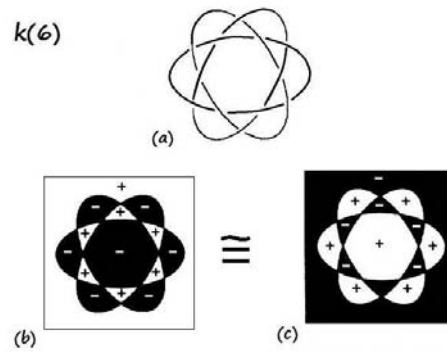


Figura A.2: Coloración B_K^+ y coloración intercambiada B_K^- del enlace $K(6)$.

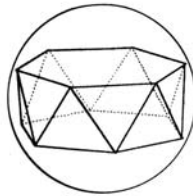


Figura A.3: Poliedro convexos asociado al enlace $K(6)$.

Proposición A- 1.1. Si K no es un diagrama estándar de un nudo o enlace $(2, n)$ -toroidal, entonces M_k es canónicamente homomomorfo a $\mathbb{S}^3 - K$. Y cada segmento de M_k corresponde a un cruce del diagrama K .

Consúltese [36] página 188.

□

Ejemplo A- 1.1. Del algoritmo previamente descrito tenemos que la familia de trenzas cerradas $(\widehat{\sigma_1\sigma_2^{-1}})^n$ cumple con tales requisitos. Sea $K(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ el enlace representado por la trenza cerrada $(\widehat{\sigma_1\sigma_2^{-1}})^n$. Estos son los enlaces alternantes simples obtenidos a partir de los poliedros básicos. Entre estos se encuentran: $K(1)$ el nudo trivial, $K(2)$ el nudo ocho, $K(3)$ los anillos Borromeos, etc. Si $n \geq 2$, $\mathbb{S}^3 - K$ se obtiene de la identificación de dos poliedros regulares convexos como se muestra en las figuras FiguraA.4 y FiguraA.7.

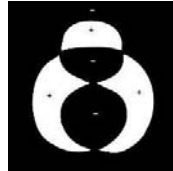


Figura A.4: Una coloración del complemento del Nudo Ocho, $K(2)$.

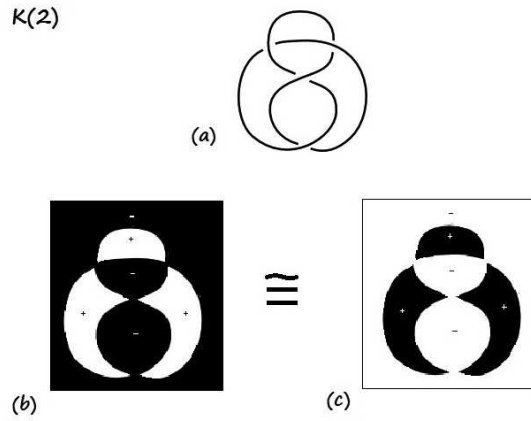


Figura A.5: Coloraciones B_K^\pm y B_K^\mp del complemento del Nudo Ocho, $K(2)$.

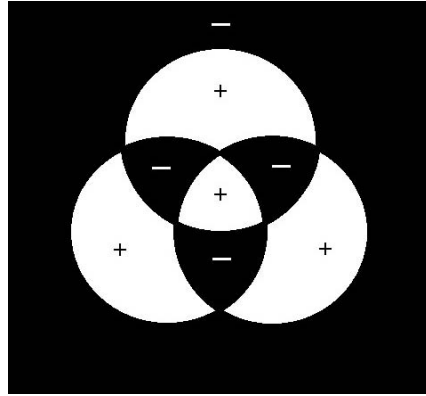


Figura A.6: Una coloración del complemento de los Anillos Borromeanos, $K(3)$.

$k(3)$

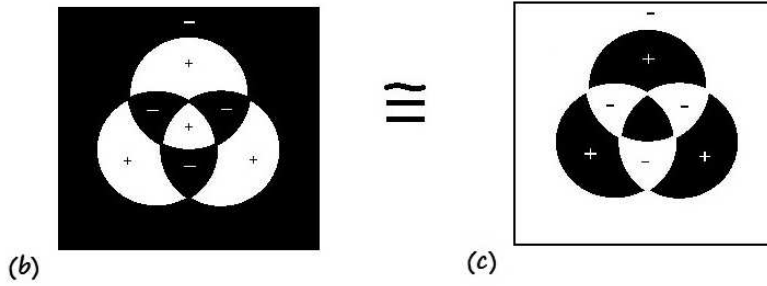
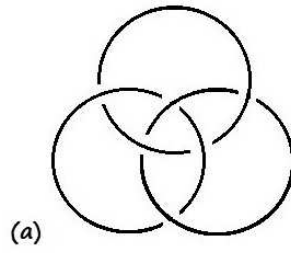


Figura A.7: Coloraciones B_K^\pm y B_K^\mp del complemento de los Anillos Borromeanos, $K(3)$.

Los ejemplos que muestran las figuras anteriores de la coloración del complemento de los enlaces de la familia $(\widehat{\sigma_1\sigma_2^{-1}})^n$, corresponden con una coloración adecuada en forma de tablero de ajedrez, luego concuerdan con la ProposiciónA- 1.1. Ahora veremos que \overline{M}_k es homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - K$ y tiene estructura hiperbólica, orientable y completa.

Sea K como en la DefiniciónA- 1.1. $\mathbb{S}^3 - K$ se puede obtener de dos copias de $P(n)$, donde $P(n)$ es un poliedro ideal, convexo y con caras regulares, correspondiente a n , con $n \in \mathbb{Z}$, la potencias de $(\widehat{\sigma_1\sigma_2^{-1}})^n$, que genera el enlace correspondiente a la trenza cerrada, bajo una G -identificación propia de caras. Dado que cada cara es regular, la identificación se puede dar a través de una isometría hiperbólica. Elijamos $2n$ horobolas en el modelo de Klein con sus vértices en $P(n)$ de magnitudes iguales. Entonces la identificación determinada por dichas isometrías, respeta las secciones de cruce de las horoesferas.

Basta verificar que la suma de los ángulos diédricos para cada identificación de aristas es 2π , entonces podemos ver que estos poliedros ideales junto con la identificación dada por las isometrías hiperbólicas, nos determinarán una estructura hiperbólica completa. Esto lo podemos observar claramente para cada aureola de cada arista en el punto cuspide.

Un ejemplo de esto lo tenemos para $K(6)$, donde $P(6)$ será como en la FiguraA.3. En el diagrama siguiente FiguraA.8, se puede verificar de manera sencilla que la suma de los ángulos diédricos es 2π y en consecuencia los poliedros ideales FiguraA.3, junto con la identificación dada por las isometrías hiperbólicas, nos determinarán una estructura hiperbólica completa. De esta manera concluimos este apartado.

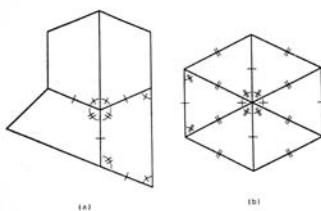


Figura A.8: Identificación de la aureola cuspide para $p(6)$ asociado a $K(6)$.

Apéndice. B

Tabla de Referencias de las Figuras Utilizadas.

En Orden de Aparición.

- [C-1.0] “Otro tipo de proyección estereográfica”, figura (1.3) Cf. Anónimo, “Proyección Estereográfica”, Tomado de “http://bibliotecadealejandriamartabalbi.blogspot.mx/2010_02_01_archive.html”. Última consulta 27/06/2014.
- [C-1.1] “Triangulación de una superficie”, figura (1.12). Cf. Mirez Jorge, “Triangulación de Una Esfera 3D”, Tomado de “<http://jmirezmath.wordpress.com/2011/03/16/enmallado-meshgrid-de-una-esfera-3d-triangulacion-hecho-en-matlab/>”. Última consulta 27/06/2014.
- [C-1.2] “Poliedros Convexos”, figura (1.13). Cf. [36] p. 216 F. I.2.5.
- [C-1.3] “Nudo *Trébol* y su representación poligonal”, figura (1.15). Cf. [4] p.27 F. 2.1.
- [C-1.4] “Nudo salvaje”, figura (1.16). Cf. Anónimo, “Nudo Salvaje”, Tomado de “<http://www.irracional.org/index.php/2426/que-es-un-nudo-salvaje>”. Última consulta 27/06/2014.
- [C-1.5] “Algunos tipos de nudos”, figura (1.17). Cf. Núñez Hernández Víctor, Recuperado de

- “<http://www.cimat.mx/~victor/introNudos/index.html>”, CIMAT, 2014.
- [C-2.0] “Circle Limit IV” M.C. Escher, figura (2.1). Cf. Escher M. C., “Circle Limit IV”, Recuperado de “<http://www.lapatilla.com/site/2014/04/13/fernando-nunez-noda-escher-creador-de-mundos-imposibles/>”, Última consulta 27/06/2014.
- [C-2.1] “Triángulo hiperbólico en el modelo del disco de Poincaré”, figura (2.2). Cf. Anónimo, “Triángulo hiperbólico”, Tomado de “<http://varepsilon.wordpress.com/2013/05/06/nociones-basicas-en-geometria-hiperbolica-ultima-parte/>”. Última consulta 27/06/2014.
- [C-2.2] “Un triángulo hiperbólico en \mathbb{H}^3 , con vértices en el infinito”, figuras (2.5) y (3.11). Cf. [26], p. 462 F. 10.4.1.
- [C-2.3] “Bola de radio r en \mathbb{R}^3 ”, figura (2.6). Cf. Anónimo, “Bola unitaria”, Tomado de “<http://openclipart.org/detail/183675/sph%C3%83%C2%A8re-by-enolynn-183675>”. Última consulta 27/06/2014.
- [C-2.4] “Un triángulo en $\mathbb{H}^3 \cap \mathcal{B}^3$ ”, figura (2.8). Cf. [26], p. 468 F. 10.4.5.
- [C-2.5] “Cono de Luz o modelo de *Klein*”, figura (2.9). Cf. [26], p. 127 F. 4.5.1.
- [C-2.6] “Cono de Luz”, figura (2.10). Cf. [32] p.65 F. 2.15.
- [C-2.7] “Espacio tangente”, figura (2.11). Cf. [32] p.67 F. 2.16.
- [C-2.8] “Dualidad Proyectiva entre un hiperplano y un punto”, figura (2.12). Cf. [32] p.71 F. 2.20.
- [C-3.0] “Dodecaedros regulares hiperbólicos, centrados en el origen en \mathcal{B}^3 .”, figura (3.1). Cf. [26], p. 272 F. 7.1.3.
- [C-3.1] “Nudo Ocho”, figura (3.8). Cf. Anónimo, “Nudo Ocho”, Tomado de “<http://portal.educ.ar/debates/eid/ciencia/la-matematica-puede-ser-mas-ro.php>” Última consulta 27/06/2014.
- [C-3.2] “Los Anillos Borromeos”, figura (3.9). Cf. C. Isabel Labrador Fariña, “Anillos de Borromeo en Barro”, Tomado de “<http://ztfnews.wordpress.com/2013/06/25/los-anillos-de-borromeo-de-una-alfarera/>”. Última consulta 27/06/2014.

- [C-3.3] “Nudo Ocho”, figura (3.10). Cf. Anónimo, “Nudo Ocho”, Tomado de “[http://es.wikipedia.org/wiki/Nudo_\(matem%C3%A1tica\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Nudo_(matem%C3%A1tica))”. Última consulta 27/06/2014.
- [C-3.4] “Patrón de identificación para el complemento del Nudo Ocho”, figura (3.13). Cf. [26], p. 445 F. 10.3.3.
- [C-3.5] “Enlace del Punto Cuspide”, figura (3.14). Cf. [26], p. 446 F. 10.3.4.
- [C-3.6] “Arcos dirigidos”, figura (3.16). Cf. [26], p. 447 F. 10.3.6.
- [C-3.7] “Patrón de identificación para la región A ”, figura (3.17). Cf. [26], p. 448 F. 10.3.7.
- [C-3.8] “Patrón de identificación para la región A ”, figura (3.18). Cf. [26], p. 448 F. 10.3.7.
- [C-3.9] “Patrón de identificación para la región B ”, figura (3.19). Cf. [26], p. 449 F. 10.3.8.
- [C-3.10] “Patrón de identificación para la región B ”, figura (3.20). Cf. [26], p. 449 F. 10.3.8.
- [C-3.11] “Patrón de identificación para la región C ”, figura (3.21). Cf. [26], p. 450 F. 10.3.9.
- [C-3.12] “Patrón de identificación para la región C ”, figura (3.22). Cf. [26], p. 450 F. 10.3.9.
- [C-3.13] “Patrón de identificación para la región D ”, figura (3.23). Cf. [26], p. 451 F. 10.3.10.
- [C-3.14] “Patrón de identificación para la región D ”, figura (3.24). Cf. [26], p. 451 F. 10.3.10.
- [C-3.15] “Variedades N y N' ”, figura (3.25). Cf. [26], p. 445 F. 10.3.3.
- [C-3.16] “”, figura (3.28). Cf. [26], p. 459 F. 10.3.13.
- [C-3.17] “Arcos dirigidos a, \dots, f en L ”, figura (3.32). Cf. [32], p. 132 F. 3.7.
- [C-3.18] “El 2-simplejo Λ ”, figura (3.33). Cf. [26], p. 459 F. 10.3.21.
- [C-3.19] “El patrón de identificación”, figura (3.34). Cf. [26], p. 460 F. 10.3.22.
- [C-3.20] “El patrón de identificación”, figura (3.35). Cf. [26], p. 460 F. 10.3.22.

- [A-1.0] “Coloración de ∂B_k ”, figura (A.1). Cf. [36], p212. F.I.2.2.
- [A-1.1] “Coloracion B_K^+ y coloración revertida B_K^- del enlace $K(6)$ ”, figura (A.2). Cf. [36], p213. F.I.2.2.
- [A-1.2] “Identificación del enlace cuspide”, (A.8). Cf. [36], p216. F.I.2.6.

Índice de figuras

1.1	Plano por el origen $\Pi_{x_3=0}$	11
1.2	Proyección desde el polo norte N a cualquier punto en el plano $\Pi_{x_3=0}$	11
1.3	Otro tipo de proyección estereográfica.	13
1.4	Reflexión en la esfera $S_r(p)$	14
1.5	Reflexión en el plano $P_t(\alpha)$	16
1.6	Traslación del disco $S_r(a)$ por b	26
1.7	Reflexión ϕ por el origen.	27
1.8	Homotecia de una esfera $S_r(a)$	28
1.9	Homotecia del plano $P_t(a)$	28
1.10	Diagrama cambio de coordenadas.	35
1.11	Triangulación de una superficie.	38
1.12	Triangulación de una superficie S	38
1.13	Poliedros convexos.	39
1.14	(a) Orientación abc. (b) Orientación cba. (c) Compatibilidad de orientaciones.	40
1.15	Nudo <i>Trébol</i> y su representación poligonal.	42
1.16	Nudo salvaje	43
1.17	Algunos tipos de nudos.	43
1.18	Un cruce de arcos o arco distinguido en un diagrama.	44
1.19	(a) R_1 y R'_1 . (b) R_2 y R'_2 . (c) R_3	44
1.20	(a) Cruce positivo. (b) Cruce negativo.	46
1.21	Concatenación $\sigma_i \sigma_j^{-1}$	46
1.22	La identidad Id	47
1.23	Elemento inverso de σ_i ; σ_i^{-1}	47
1.24	Asociatividad en la operación.	48
1.25	La distancia entre los subíndices $ i - j \geq 2$	48
1.26	Equivalencia $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sim \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$	49

1.27	Viendo el nudo trébol como una trenza cerrada.	50
2.1	“Circle Limit IV” M.C. Escher.	54
2.2	Triángulo hiperbólico en el modelo del disco de Poincaré.	56
2.3	Triángulo hiperbólico en \mathbb{H}^2	56
2.4	Un juego de beisbol en \mathbb{R}^2	57
2.5	Un triángulo hiperbólico en \mathbb{H}^3 , con vértices en el infinito.	61
2.6	Bola de radio r en \mathbb{R}^3	61
2.7	Un tetraedro regular hiperbólico, centrado en el origen de \mathcal{B}^3	62
2.8	Un triángulo en $\mathbb{H}^3 \cap \mathcal{B}^3$	63
2.9	Cono de Luz o modelo de <i>Klein</i>	64
2.10	Cono de Luz 2-dimensional.	65
2.11	Espacio tangente para el caso 2-dimensional.	67
2.12	Dualidad Proyectiva entre un hiperplano y un punto.	70
2.13	Horociclo.	76
3.1	Dodecaedros regulares hiperbólicos, centrados en el origen en \mathcal{B}^3	83
3.2	Bola de radio r , $B_r(x)$ centrada en un punto $x \in P$	86
3.3	Un poliedro de volumen infinito en \mathcal{B}^3	98
3.4	Sucesión de Cauchy no convergente formada por un pegado no correcto de la aureola	99
3.5	(a) Pegado incorrecto. (b) Pegado correcto.	100
3.6	Aureola basada en v ideal. Con $0 < R < \infty$ muy pequeño.	100
3.7	Identificación correcta de las aureolas.	101
3.8	Nudo Ocho.	106
3.9	Los Anillos Borromeanos.	106
3.10	Nudo Ocho.	107
3.11	Tetraedro regular centrados en el origen en \mathcal{B}^3	107
3.12	Tetraedro regular con vértices en el infinito en \mathbb{H}^3	108
3.13	Patrón de identificación para el complemento del Nudo Ocho.	108
3.14	Aureola del punto Cuspide.	109
3.15	Isotopía de Nudo 8.	110
3.16	Arcos dirigidos.	110
3.17	Patrón de identificación para la región A	111
3.18	Patrón de identificación para la región A	111
3.19	Patrón de identificación para la región B	112
3.20	Patrón de identificación para la región B	112
3.21	Patrón de identificación para la región C	113
3.22	Patrón de identificación para la región C	113
3.23	Patrón de identificación para la región D	113

3.24	Patrón de identificación para la región D .	114
3.25	Variedades N y N' .	114
3.26	Los Anillos Borromeanos	115
3.27	Octaedro regular en \mathcal{B}^3 .	116
3.28	Octaedro regular ideal en \mathbb{H}^3 .	116
3.29	Patrón de identificación de los poliedros P y P' .	117
3.30	Aureolas.	118
3.31	Aureolas.	118
3.32	Arcos dirigidos a, \dots, f en L .	119
3.33	El 2-simplejo Λ .	119
3.34	El patrón de identificación.	120
3.35	El patrón de identificación.	120
3.36	Patrón de identificación de la región A .	121
3.37	Patrón de identificación de la región B , análogo con C y D .	121
3.38	Patrón de identificación de la región E , análogo con F y G .	122
3.39	Patrón de identificación de la región H .	122
A.1	Coloración de ∂B_k .	128
A.2	Coloración B_K^+ y coloración intercambiada B_K^- del enlace $K(6)$.	129
A.3	Poliedro convexos asociado al enlace $K(6)$.	129
A.4	Una coloración del complemento del Nudo Ocho, $K(2)$.	130
A.5	Coloraciones B_K^+ y B_K^- del complemento del Nudo Ocho, $K(2)$.	130
A.6	Una coloración del complemento de los Anillos Borromeanos, $K(3)$.	131
A.7	Coloraciones B_K^+ y B_K^- del complemento de los Anillos Borromeanos, $K(3)$.	131
A.8	Identificación de la aureola cuspidal para $p(6)$ asociado a $K(6)$.	132

Bibliografía.

- [1] James W Anderson. *Hyperbolic Geometry*. Springer(SUMS), 1999.
- [2] Víctor Manuel Ávila Baez. Producto inversivo y polígonos hiperbólicos. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, 2005.
- [3] A. F. Beardon. *The Geomtry of Discrete Groups*. Springer-Verlang, 1983.
- [4] Omar Becerra Muratalla. Nudos en superficies. Tesis de maestría, ESFM SEPI IPN, 2005.
- [5] Joan S. Birman. *Braids, Links and Mappin Class Group*. Princeton University Press and University of Tokyo, 1975.
- [6] Mario Bunge. *La Ciencia, su Método y su Filosofía*. Nueva Imagen, 2005.
- [7] José Luis Cisneros Molina. Introducción a la teoria de nudos. V Jornadas de Física y Matemáticas, 2011.
- [8] Mamfredo P. do Carmo. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza, 1995.
- [9] Euclides. *Elementaria, Obra completa: vol. 1 Libros I-IV*. Editorial Gredos, Madrid, 1991.
- [10] Jesus Gonzalo Pérez. *Varietades y Geomtretría: Un curso breve*. Ediciones de la universidad autónoma de Madrid, 2010.
- [11] Coxeter H. S. M. *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, INC., segunda edición edition, 1989.

-
- [12] Rubén A. Hidalgo. *Breve introducción a los grupos Kleinianos y las variedades Hiperbólicas*. Monografías Matemáticas UTFSM, 2006.
- [13] Rubén A. Hidalgo. *Transformaciones de Moebius, una Introducción*. Monografías Matemáticas UTFSM, 2012.
- [14] Joseph Ehenfried Hofmann. *Historia de la matemática*. UTHEA, 1961.
- [15] Antonio Lascurain Orive. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Las Prensas de Ciencias, 2005.
- [16] María Teresa Lozano Imízcoz. *Variedades tridimensionales cónicas: geometría e invariantes*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1995.
- [17] María Teresa Lozano Imízcoz. *La teoría de los nudos en el siglo xx*. Universidad de Zaragoza, 1997.
- [18] María Teresa Lozano Imízcoz. *Geometric invariants of 3-manifolds*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1998.
- [19] Albert Marden. *Outer Circles, An Introduction to Hyperbolic 3-Manifolds*. Cambridge University Press, primera edición edition, 2007.
- [20] Ángel Montesdeoca Delgado. *Geometría Afín y Euclídea*. Departamento de Matemática Fundamental, Universidad de la Laguna, 2012.
- [21] Luis Moreno Armella. El postulado de las paralelas. *Rev. Acad. Colomb. Cien.*, 22:83, 1998.
- [22] Lee Neuwirth. La description algébrique des noeuds. *Pour la Science*, 2011.
- [23] Roger Penrose. *El Camino a la Realidad, una guía completa de las leyes del universo*. DEBATE, 2006.
- [24] Sergio Plazas. *Variedades diferenciables*, 2008.
- [25] Carlos Prieto. *Topología Básica*. Fondo de Cultura Economica, 2005.
- [26] Jonh G. Ratcliffe. *Foundation of Hyperbolic Mainfolds*. Graduate Text in Mathematics. Springer, 2006.
- [27] Dale Rolfsen. *Knots and Links*. AMS, Chelsea Publishing, 2003.

-
- [28] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, primera edición, 1988.
- [29] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, cuarta edición, 1995.
- [30] A. S. Smorgorzhevski. *Acerca de la geometría de Lobachevski*. MIR, 1978.
- [31] José Lucio Sánchez Garrido. Grupos kleinianos elementales y no elementales. Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático, vol. 11 No. 1, ISSN 1405-1745, 2001.
- [32] William Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, volume 1. Princeton University Press, 1997.
- [33] Ferran Valédez. Notas del curso sobre geometría diferencial, capítulo 1: Variedades diferenciales.
- [34] Victor Guillemin y Alan Pollack. *Topología Diferencial*. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [35] Ana I. Ramirez Galarza y Guillermo Sienna Loera. *Invitación a las Geometrías No Euclidianas*. Las Prensas de Ciencias, 2000.
- [36] Makoto Sakuma y Jeffrey Weeks. Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements.
- [37] Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja*, pages 248, 327. Trillas, 2005.
- [38] Hector Sánchez Morgado y Oscar A. Palmas Velasco. *Geometría Riemanniana*. Las Prensas de Ciencias, primera edición, 2007.
- [39] Richard H. Crowell y Ralph H. Fox. *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlang, 1965.
- [40] Felipe Zaldívar. *Introducción a la Teoría de Grupos*. Aportaciones Matemáticas, SMM, 2006.