UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN TEOREMA DE NOETHER FRACCIONARIO

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

FÍS. DAVID LANDA MARBÁN

DR. JORGE FUJIOKA ROJAS

2015

Ciudad Universitaria, D. F.

Hoja de datos de jurado

1. Datos del alumno	
Apellido Paterno	Landa
Apellido Materno	Marbán
Nombre	David
Teléfono	56322927
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	41001130-8
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre	Jorge
Apellido Paterno	Fujioka
Apellido Materno	Rojas
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dra.
Nombres	María del Carmen
Apellido Paterno	Jorge
Apellido Materno	y Jorge
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombres	Ramón Gabriel
Apellido Paterno	Plaza
Apellido Materno	Villegas
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dr.
Nombre	Pablo
Apellido Paterno	Barberis
Apellido Materno	Blostein
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dr.
Nombre	Rafael
Apellido Paterno	Pérez
Apellido Materno	Pascual
7. Datos del trabajo escrito	
Título	Un Teorema de Noether Fraccionario
Número de páginas	72 pp
Año	2015

Agradecimientos

*A **Dios**, por permitirme tener una vida plena y saludable, por el cuerpo que me dio y tanto por mis virtudes como por mis defectos.*

*A mi madre **Julia Marbán Hernández**, por darme la vida, haberme educado con amor e inculcado en mi valores de responsabilidad, respeto, dedicación y por estar siempre a mi lado, dándome una excelente alimentación y cuidados. Así mismo a mi padre **Ing. Daniel Landa Piedra**, que me ha brindado todos los recursos necesarios para estudiar y una educación basada en su ejemplo de vida. También a **Edgar Landa Marbán**, por ser mi hermano mayor y haber compartido momentos grandiosos en nuestra niñez.*

*A mi asesor, el **Dr. Jorge Fujioka Rojas**, por permitirme trabajar con él en la presente tesis, brindándome en todo momento su apoyo, asesoría y orientación, resultando así en una posible colaboración para trabajos futuros.*

*A mis abuelos, tíos y primos, que me han brindado su apoyo y compañia en todo momento, en especial a mi ahijado **Emilio Chávez Marbán** y a mi primo **Javier Marbán Suárez**.*

*A mis amigos, en especial a **José Luis Ugalde**, **Iván Alejandro Cornejo** y **José de Jesús Zamora**, con quienes he pasado prácticamente la mitad de mi vida a su lado, permaneciendo juntos tanto en las buenas como en las malas.*

*A mis profesores, de los cuales he adquirido conocimiento y me han guiado en mi vida académica, en especial al **Prof. Radilla**, **Ing. Bernardo González**, **Fís. Benito Pantoja** y **Dr. Wolfgang Bietenholz**.*

A todas las personas que he conocido a lo largo de mi vida y han sido relevantes en algún aspecto.

Fís. David Landa Marbán

Contenido

Prefacio

Emmy Noether es una figura de gran importancia en la historia de las matemáticas y su prestigio ha ido creciendo con el paso del tiempo. El 23 de marzo de este año (2015) el portal de Google en internet mostraba el dibujo de una mujer, cuyas ropas y peinado recordaban la moda de 1900, y al colocar el cursor sobre el dibujo aparecía una nota que decía: "133 aniversario del nacimiento de Emmy Noether". Este simple hecho muestra que Emmy ya no sólo es una figura famosa entre los matemáticos, sino que ha pasado a formar parte de la cultura de la humanidad.

Emmy Noether generó muchas ideas sumamente originales que revolucionaron las matemáticas de su tiempo, pero la mayor parte de sus trabajos sólo pueden ser comprendidos por especialistas en álgebra abstracta. Sin embargo, existe un trabajo de Emmy que no solamente es conocido por los algebristas, sino por la mayoría de los matemáticos y físicos del mundo: *el Teorema de Noether*. Este teorema ocupa un lugar muy importante en el estudio de un tipo especial de ecuaciones diferenciales: aquéllas que pueden ser deducidas de lagrangianas apropiadas mediante *el principio de mínima acción* (conocido como *principio de Hamilton* entre los físicos). Cuando se tiene una ecuación de este tipo, el Teorema de Noether dice que hay una relación entre las cantidades conservadas por la ecuación diferencial y las simetrías de la lagrangiana. Este resultado es obviamente importante en física, por lo cual el Teorema de Noether ocupa un lugar central en la física teórica.

Conviene enfatizar que el Teorema de Noether no solamente es aplicable a ecuaciones diferenciales ordinarias (*ODEs*), sino también a ecuaciones diferenciales parciales (*EDPs*). Además, no sólo se aplica a *EDPs* lineales, sino también a *EDPs* no lineales, lo cual hace del Teorema de Noether una herramienta utilísima en el estudio de *EDPs* no lineales, que no se pueden resolver mediante los métodos que se usan con las ecuaciones lineales.

El Teorema de Noether se colocó como uno de los teoremas más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales desde su formulación en 1918 (cuando Emmy tenía 36 años) y permaneció sin modificaciones fundamentales hasta principios del siglo XXI. Sin embargo, al empezar el siglo XXI surgió una idea inquietante: ¿sería posible generalizar el Teorema de Noether de manera que fuera aplicable a *ecuaciones diferenciales fraccionarias* (*EDFs*)?, es decir, a ecuaciones que además de contener derivadas "normales" (es decir, de órdenes enteros), contuvieran también esas extrañas derivadas conocidas como "derivadas fraccionarias". Esta idea estaba motivada por la aparición de múltiples *EDFs* en problemas recientes de matemáticas aplicadas: en problemas de difusión, problemas de transporte, en la teoría de solitones, en la teoría de control y procesamiento de señales, en economía e inclusive en biotecnología. La aparición de *EDFs* en estos campos y el interés en contar con nuevas herramientas teóricas para analizar el comportamiento de sus soluciones, condujeron de forma natural a la idea de utilizar métodos variacionales para profundizar en la comprensión de las propiedades de estas ecuaciones y de sus soluciones. De esta forma, a finales del siglo XX se descubrió que muchas de las nuevas *EDFs* surgidas en matemáticas aplicadas podían deducirse de lagrangianas fraccionarias vía una generalización fraccionaria del principio de mínima acción. Una vez descubierto esto, era sólo cuestión de tiempo que se considerara la posibilidad de extender el Teorema de Noether a estas nuevas lagrangianas fraccionarias. Y así, al inicio del siglo XXI empezaron a desarrollarse extensiones fraccionarias del Teorema de Noether [1] [2] [3] [4]. Sin embargo, en algunas de estas extensiones sólo se consideraban "coordenadas generalizadas" dependientes de una sola variable independiente, en otras (que sí consideraban varias variables independientes) las derivadas fraccionarias sólo actuaban sobre la variable que actuaba como "variable de evolución" y finalmente en otras extensiones del Teorema de Noether sólo se consideraban transformaciones infinitesimales que dejaban a las variables independientes sin cambio. Sin embargo, existen *EDFs* interesantes que dependen de funciones de varias variables independientes, en las cuales las derivadas fraccionarias no actúan sobre la variable de evolución, sino sobre "las otras" variables independientes. En el 2010 apareció un artículo en una revista china prácticamente desconocida en el cual se buscaba formular una versión fraccionaria aplicable a este tipo de ecuaciones [5]. No obstante, este artículo contiene un par de pequeños errores, además de presuponer que el lector está familiarizado con el cálculo fraccionario, el cálculo variacional fraccionario y con el Teorema de Noether, de manera que para lectores sin esa preparación previa el artículo resulta difícil de seguir. Por lo tanto, el objetivo de esta tesis es presentar de manera ordenada todos los elementos necesarios (que difícilmente se estudian en los cursos regulares de la licenciatura) para formular una versión fraccionaria del Teorema de Noether aplicables a lagrangianas de la forma:

$$\mathscr{L}(u(z,t), u_z, u_{tt}, \partial_t^\alpha u, v(z,t), v_z, v_{tt}, \partial_t^\alpha v) \tag{0.1}$$

donde z y t son variables reales, $u(z,t)$ y $v(z,t)$ pueden ser funciones reales o complejas, u_z, u_{tt}, v_z, v_{tt} indican a las derivadas parciales de u y v respecto a z y a tt respectivamente y $\partial_t^\alpha u$ y $\partial_t^\alpha v$ denotan derivadas de un orden fraccionario α en el intervalo $2 < \alpha < 3$. Conviene observar aquí que en (0.1) se llama z a la *variable de evolución*, mientras que t es "la otra variable", la cual es llamada a veces "variable transversal", pues en algunos artículos de investigación esa "otra variable" no representa al tiempo, sino a una coordenada espacial perpendicular a la coordenada z.

La versión fraccionaria del Teorema de Noether que se formulará en esta tesis será una versión limitada, correspondiente únicamente a transformaciones infinitesimales relativamente sencillas. Sin embargo, el teorema que obtendremos será suficiente para probar que las leyes de conservación básicas (de lo que los físicos llaman energía, momento y la Hamiltoniana) están asociadas a invariancias de la integral de acción (es decir, la integral de la lagrangiana) ante las transformaciones infinitesimales consideradas. La formulación de un Teorema de Noether Fraccionario más general, asociado a transformaciones infinitesimales totalmente generales (como las consideradas por Emmy Noether) y aplicable a lagrangianas de la forma (0.1), es un problema que, hasta donde se investigó en este trabajo, no ha sido resuelto y constituye un reto para el futuro.

Este trabajo está dividido en los ocho capítulos siguientes:

1. Ecuaciones de Euler-Lagrange.

2. Teorema de Noether.

3. Ecuación no lineal de Schrödinger (*NLS*) y sus generalizaciones.

4. Derivadas fraccionarias.

5. Ecuación *NLS* fraccionaria.

6. Ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias.

7. Teorema de Noether Fraccionario.

8. La derivada de Riesz-Feller.

En el Capítulo 1 se empieza recordando cómo se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange (a partir del principio de mínima acción) en el caso más sencillo en el cual se tiene una lagrangiana que depende de una sola función (dependiente, a su vez, de una sola variable real). Posteriormente se ve cómo se modifica esta deducción cuando la lagrangiana depende de varias funciones, las cuales, a su vez, dependen de varias variables independientes.

En el Capítulo 2 se estudia en qué consiste el Teorema de Noether (y cómo se demuestra) en el caso de transformaciones infinitesimales sencillas.

En el Capítulo 3 se presenta al lector una *EDP* no lineal de gran interés e importancia: la ecuación *NLS*. Esta ecuación puede deducirse de una lagrangiana, y la existencia de esta lagrangiana ha permitido desarrollar métodos variacionales para calcular de manea aproximada el comportamiento de sus soluciones y la estabilidad de las mismas.

En el Capítulo 4 se explica qué es una *derivada fraccionaria* y se ve que hay varias definiciones de "derivada fraccionaria" que no son necesariamente equivalentes: la de Caputo, la de Riemann-Liouville y la de Grünwald-Letnikov. También se explica por qué existen derivadas fraccionarias *derechas e izquierdas.*

En el Capítulo 5 se ve que la ecuación *NLS* tiene una extensión fraccionaria interesante, que tiene entre sus soluciones *ondas solitarias*, a las que aquí se llamarán *solitones fraccionarios* (abusando un poco del término). Esta ecuación *NLS* fraccionaria sirve como un ejemplo para ver cómo se aplica el Teorema de Noether Fraccionario que se obtiene en esta tesis y qué tipo de cantidades conservadas se obtienen.

En el Capítulo 6 se ve cómo se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange cuando se tiene una lagrangiana que contiene derivadas normales (de orden entero) y derivadas fraccionarias derechas e izquierdas.

En el Capítulo 7 se formula (y demuestra) una versión fraccionaria del Teorema de Noether aplicable a lagrangianas de la forma (0.1).

En el Capítulo 8 se ve que también es posible formular un Teorema de Noether Fraccionario aplicable a lagrangianas que contienen *derivadas de Riesz-Feller*, que son otro tipo de derivadas fraccionarias que también aparecen con frecuencia en las aplicaciones del cálculo fraccionario.

Finalmente, se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Así como en el cálculo diferencial e integral elemental la atención está dirigida hacia *funciones*, esto es, reglas que asocian números reales a números reales:

$$f : x \in \Re \to f(x) \in \Re \tag{1.1}$$

en el *cálculo variacional* la atención está dirigida hacia *funcionales*, esto es, reglas que asocian números reales a funciones. Es decir, si S es una funcional y $f(x)$ es una función (dentro de cierto espacio de funciones $\mathfrak{F}$), entonces $S[f]$ será un número real:

$$S : f \in \mathfrak{F} \to S[f] \in \Re \tag{1.2}$$

Un ejemplo típico de funcional es la longitud S de una curva $y = f(x)$ entre los puntos x_1 y x_2:

$$S[f] = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx \tag{1.3}$$

En vista, pues, de que el dominio de una funcional es un *espacio de Banach de funciones*, conviene recordar con más detalle qué son estos espacios: un espacio de funciones $\mathfrak{F}$ sobre $\Re$ es un conjunto que cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall a, b \in \mathfrak{F} \quad a + b \in \mathfrak{F}$
2. $\forall a, b \in \mathfrak{F} \quad a + b = b + a$
3. $\forall a, b, c \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
4. $\exists \text{“}0\text{”} \in \mathfrak{F} \mid \ \forall a \in \mathfrak{F} \quad a + 0 = 0$
5. $\forall a \neq 0 \ \exists - a \mid \ a + (-a) = 0$
6. $\forall a \in \mathfrak{F} \wedge \forall r \in \Re \quad ra \in \mathfrak{F}$
7. $\forall r \in \Re \wedge \forall a, b \in \mathfrak{F} \quad r(a + b) = ra + rb$
8. $\forall r, s \in \Re \wedge \forall a \in \mathfrak{F} \quad (rs)a = r(sa)$

Una funcional $|| \cdot || : \mathfrak{F} \to \Re$ es una norma en $\mathfrak{F}$ si satisface:

1. $||ra|| = |r| ||a||, \ \forall \ a \in \mathfrak{F}, \ r \in \Re$
2. $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||, \ \forall a, b \in \mathfrak{F}$
3. $||a|| = 0 \Rightarrow a = 0$

Así, el espacio:

$$C^{\infty}[x_1, x_2] := \{a \in \mathfrak{F} : [x_1, x_2] \to \Re | a \text{ es infinitamente diferenciable, } x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in \Re\}$$

con la norma:

$$||a||_{\infty} = \max_{x \in [x_1, x_2]} |a(x)|$$

es un espacio de Banach de funciones. La norma induce una métrica en $C^{\infty}[x_1, x_2]$ definida por:

$$d(a, b) = ||a - b||_{\infty};\ a, b \in C^{\infty}[x_1, x_2]$$

Entonces, cuando se mencione que una función es cercana a otra, es en el sentido de la métrica.

1.1. Ecuación de Euler-Lagrange para una variable independiente

El problema central del cálculo variacional es determinar la función $y(t)$ tal que la integral [6]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(y(t), \dot{y}(t), \ldots) dt \tag{1.4}$$

sea un extremal, es decir, un máximo o un mínimo. Se tiene que la funcional S depende de la función $y(t)$, y los límites de integración están fijos. Para hallar la extremal, la función $y(t)$ se varía hasta encontrar la extremal de S. Esto es, si una función $y = y(t)$ da un valor mínimo a S, entonces cualquier función vecina, debe hacer crecer a S, no importa la cercanía de ésta a y. Considérese ahora a una familia de curvas cercanas a la función $y(t)$. Una familia de este tipo puede definirse así [7]:

$$y(t, \alpha) = y(t) + \alpha \delta y(t) \tag{1.5}$$

donde $\delta y(t)$ es una función que tiene derivadas continuas y ya que la función variada $y(t, \alpha)$ toma los mismos valores que $y(t)$ en los extremos de integración, deberá anularse en t_1 y t_2, es decir, $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$.
Considerando a $y(t, \alpha)$, se puede escribir a la integral S en función del parámetro α:

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(y(t, \alpha), \dot{y}(t, \alpha), \ldots) dt \tag{1.6}$$

La condición de que S tiene un valor extremal es:

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.7}$$

para todas las funciones $\delta y(t)$. Esto es una condición necesaria, pero no suficiente.
Así, se calcula la derivada de (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(y(t, \alpha), \dot{y}(t, \alpha), \ldots) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathscr{L}(y(t, \alpha), \dot{y}(t, \alpha), \ldots) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \alpha} + \ldots \right] dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

Derivando (1.5) respecto a α:

$$\frac{\partial y(t,\alpha)}{\partial \alpha} = \delta y(t) \tag{1.9}$$

Derivando (1.5) respecto a t:

$$\frac{\partial y(t,\alpha)}{\partial t} = \dot{y}(t) + \alpha(\dot{\delta y(t)}) \tag{1.10}$$

Así, al derivar (1.10) respecto a α:

$$\frac{\partial \dot{y}(t,\alpha)}{\partial \alpha} = (\dot{\delta y(t)}) \tag{1.11}$$

Aquí se debe recordar que $\delta\dot{y} = \frac{d}{dt}\delta y$ [7].
Se sigue este procedimiento para derivadas de órdenes mayores. Tomando en cuenta lo anterior en (1.8):

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}(\dot{\delta y}) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}(\ddot{\delta y}) + \ldots\right]dt \tag{1.12}$$

Integrando por partes y usando que $\delta y(t_1) = \dot{\delta y}(t_1) = \ldots = \delta y(t_2) = \dot{\delta y}(t_2) = \ldots = 0$ (esto debido a que es una condición que se le pide a $y(t)$):

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}(\dot{\delta y})dt &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}\delta y\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta y\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}dt = -\int_{t_1}^{t_2}\delta y\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}dt \\
\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}(\ddot{\delta y})dt &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}\dot{\delta y}\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}(\dot{\delta y})\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}dt \\
&= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}\delta y\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\delta y\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta y\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}}dt
\end{aligned} \tag{1.13}$$

y así para derivadas de órdenes mayores de δy, esto para escribir todos los términos de la integral con δy.
Sustituyendo las integrales anteriores en (1.12):

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta y\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \delta y\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \delta y\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} + \ldots\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} + \ldots\right]\delta y dt \tag{1.14}$$

Como $(dS/d\alpha)|_{\alpha=0}$ debe ser cero en el valor extremo y $\delta y(t)$ es una función arbitraria, la suma dentro de los corchetes de la integral (1.14) debe ser cero cuando $\alpha = 0$, por lo que se llega a la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} + \ldots = 0 \tag{1.15}$$

Cuando $\mathscr{L}(y(t), \dot{y}(t))$, se tiene la expresión más conocida de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{1.16}$$

1.2. Ecuación de Euler-Lagrange para dos variables independientes

Supóngase ahora que y es función de las variables independientes t y z, es decir, $y(t,z)$, por lo que se puede expresar a una función vecina en la forma:

$$y(t,z,\alpha) = y(t,z) + \alpha\delta y(t,z) \tag{1.17}$$

La integral (1.6) resulta ser:

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathscr{L}(y(t,z,\alpha), y_t(t,z,\alpha), y_z(t,z,\alpha), \ldots)dzdt \tag{1.18}$$

Al derivar S respecto a α:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathscr{L}(y(t,z,\alpha), y_t(t,z,\alpha), y_z(t,z,\alpha), \ldots)dzdt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathscr{L}(y(t,z,\alpha), y_t(t,z,\alpha), y_z(t,z,\alpha), \ldots)dzdt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t}\frac{\partial y_t}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_z}\frac{\partial y_z}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{tt}}\frac{\partial y_{tt}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}\frac{\partial y_{zz}}{\partial\alpha} + \ldots\right]dzdt\end{aligned} \tag{1.19}$$

Análogamente al procedimiento seguido para obtener (1.11), se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_t}{\partial\alpha} &= (\delta y)_t\\ \frac{\partial y_z}{\partial\alpha} &= (\delta y)_z\\ \frac{\partial y_{tt}}{\partial\alpha} &= (\delta y)_{tt}\end{aligned} \tag{1.20}$$

Tomando en cuenta las identidades anteriores en (1.19):

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t}(\delta y)_t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_z}(\delta y)_z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{tt}}(\delta y)_{tt} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}(\delta y)_{zz} + \ldots\right]dzdt \tag{1.21}$$

Dado que se puede cambiar el orden de las integrales $\int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}$ indistintamente por $\int_{z_1}^{z_2}\int_{t_1}^{t_2}$, además $\delta y(t_1,z) = (\partial\delta y/\partial t)|_{t=t_1} = \ldots = \delta y(t_2,z) = (\partial\delta y/\partial t)|_{t=t_2} = 0$ y de igual forma $\delta y(t,z_1) = (\partial\delta y/\partial z)|_{z=z_1} = \ldots = \delta y(t,z_2) = (\partial\delta y/\partial z)|_{z=z_2} = \ldots = 0$, entonces al integrar por partes los miembros del lado derecho de (1.21):

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t}(\delta y)_t dzdt &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t}\delta y\Big|_{t_1}^{t_2} dz - \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \delta y\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t}dzdt\\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2} \delta y\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t}dzdt\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}(\delta y)_{zz}dzdt &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}(\delta y)_z\bigg|_{z_1}^{z_2}dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}(\delta y)_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}dzdt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\delta y\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}\bigg|_{z_1}^{z_2}dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}\delta y\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}dzdt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}\delta y\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}}dzdt
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

y así para derivadas de órdenes mayores de δy, esto para escribir todos los términos de la integral con δy y poder factorizar.
Así, al sustituir lo anterior en (1.21):

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}\left[\delta y\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y} - \delta y\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t} - \delta y\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_z} + \delta y\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{tt}} + \delta y\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}} + \dots\right]dzdt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}} + \dots\right]\delta y dzdt = 0
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

Como $(dS/d\alpha)|_{\alpha=0}$ debe ser cero en el valor extremo y $\delta y(t)$ es una función arbitraria, entonces la suma de términos dentro de los corchetes debe ser igual a cero cuando $\alpha = 0$, por lo que se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange para dos variables independientes:

$$
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_{zz}} + \dots = 0 \tag{1.25}
$$

1.3. Ecuación de Euler-Lagrange para el caso de lagrangianas que dependen de dos funciones (y sus derivadas)

Supóngase ahora que $\mathscr{L}$ depende de las funciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$, por lo que se tendrían dos funciones vecinas:

$$
y_1(t,\alpha) = y_1(t) + \alpha\delta y_1(t) \tag{1.26a}
$$

$$
y_2(t,\alpha) = y_2(t) + \alpha\delta y_2(t) \tag{1.26b}
$$

La integral (1.6) resulta:

$$
S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}(y_1(t,\alpha), \dot{y}_1(t,\alpha), \dots, y_2(t,\alpha), \dot{y}_2(t,\alpha), \dots)dt \tag{1.27}
$$

Derivando S respecto a α y usando la linealidad de la derivada:

$$
\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{y}_1}\frac{\partial\dot{y}_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\ddot{y}_1}\frac{\partial\ddot{y}_1}{\partial\alpha} + \dots\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{y}_2}\frac{\partial\dot{y}_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\ddot{y}_2}\frac{\partial\ddot{y}_2}{\partial\alpha} + \dots\right]dt \tag{1.28}
$$

Cada uno de los sumandos anteriores corresponden al que se llegó en (1.8), por lo que siguiendo un procedimiento análogo que en la Sección 1.1 se tiene una ecuación de Euler-Lagrange para cada variable dependiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}_1} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}_1} + \ldots = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}_2} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}_2} + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

1.4. Ejemplos de ecuaciones con lagrangianas

Sea $\mathscr{L} = \mathscr{L}(u, u_z, u_t, u^*, u_z^*, u_t^*)$ con $u(z,t)$ y $u^*(z,t)$. La expresión de $\mathscr{L}$ es:

$$\mathscr{L} = i(u^* u_z - u u_z^*) + u^2(u^*)^2 - u_t u_t^* \tag{1.30}$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z^*} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t^*} = 0 \tag{1.31}$$

Al derivar cuidadosamente:

$$\begin{aligned} iu_z + 2u^2u^* - \frac{\partial}{\partial z}(-iu) - \frac{\partial}{\partial t}(-u_t) = 0 \\ 2iu_z + u_{tt} + 2uuu^* = 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Considerando que u^* es el complejo conjugado de u, se obtiene la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS):

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = 0 \tag{1.33}$$

Otros ejemplos de ecuaciones con lagrangiana son:

$$iu_z + \frac{1}{2}\alpha(z)u_{tt} + |u|^2 u = 0 \tag{1.34}$$

$$iu_z + \frac{1}{2}(u_{xx} + u_{yy}) + |u|^2 u = 0 \tag{1.35}$$

$$\begin{cases} iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + (|u|^2 + |v|^2)u = 0 \\ iv_z + \frac{1}{2}v_{tt} + (|v|^2 + |u|^2)v = 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

donde (1.34) describe un solitón con "manejo de la dispersión", (1.35) un solitón que viaja por una fibra óptica con condiciones inciales sobre un plano y (1.36) la interacción de dos solitones. Las lagrangianas correspondientes a cada ecuación son:

$$\mathscr{L} = i(u_z u^* - u u_z^*) - \alpha(z) u_t u_t^* + u^2(u^*)^2 \tag{1.37}$$

$$\mathscr{L} = i(u_z u^* - u u_z^*) - u_x u_x^* - u_y u_y^* + u^2(u^*)^2 \tag{1.38}$$

$$\mathscr{L} = i(u_z u^* - u u_z^*) - u_t u_t^* + u^2(u^*)^2 + i(v_z v^* - v v_z^*) - v_t v_t^* + v^2(v^*)^2 + vv^*u^*u \tag{1.39}$$

Capítulo 2

Teorema de Noether

Antes de dar una formulación del Teorema de Noether Fraccionario, es conveniente comenzar estudiando el Teorema de Noether. Así, en el presente Capítulo se demuestra el Teorema de Noether para un caso de transformaciones infinitesimales relativamente sencillas.

2.1. La invariancia de la acción

Considérese una transformación infinitesimal asociada a un grupo continuo de transformaciones dependientes de un parámetro real. En particular, la siguiente transformación infinitesimal:

$$z^\dagger = z + \eta\xi_1 \tag{2.1a}$$

$$t^\dagger = t + \eta\xi_2 \tag{2.1b}$$

$$u^\dagger = u + \eta\phi_1(u) \tag{2.1c}$$

$$v^\dagger = v + \eta\phi_2(v) \tag{2.1d}$$

donde ξ_1 y ξ_2 son constantes reales, $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ son funciones complejas de u y v respectivamente y η representa un pequeño incremento en el parámetro del grupo de transformaciones. Es de mencionar que estas transformaciones son mucho más sencillas que las transformaciones que consideró Emmy Noether, en las cuales ξ_1, ξ_2, ϕ_1 y ϕ_2 dependian de u, v y sus derivadas. Sin embargo, para fines del trabajo, basta considerar transformaciones de la forma (2.1a)-(2.1d).

Se dice que la acción es invariante ante las transformaciones (2.1a)-(2.1d) si cumple la igualdad:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u(z,t), u_z, \ldots, v(z,t), v_z, \ldots) dt dz \\ &= \iint\limits_{\Omega^\dagger} \mathscr{L}(u^\dagger(z^\dagger,t^\dagger), u^\dagger_{z^\dagger}, \ldots, v^\dagger(z^\dagger,t^\dagger), v^\dagger_{z^\dagger}, \ldots) dt^\dagger dz^\dagger\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde se supone que Ω es cualquier región rectangular:

$$\Omega = \{(z,t) | z_1 < z < z_2, t_1 < t < t_2\} \tag{2.3}$$

y $\Omega^\dagger$ es la imagen de Ω bajo las traslaciones (2.1a) y (2.1b):

$$\Omega^\dagger = \{(z^\dagger,t^\dagger) | z_1^\dagger = z_1 + \eta\xi_1 < z^\dagger < z_2 + \eta\xi_1 = z_2^\dagger, t_1^\dagger = t_1 + \eta\xi_2 < t^\dagger < t_2 + \eta\xi_2 = t_2^\dagger\} \tag{2.4}$$

Usando la información de las transformaciones (2.1a)-(2.1d), entonces las funciones $u^\dagger$ y $v^\dagger$ están dadas por:

$$u^\dagger(z^\dagger, t^\dagger) = u(z^\dagger - \eta\xi_1, t^\dagger - \eta\xi_2) + \eta\phi_1(u(z^\dagger - \eta\xi_1, t^\dagger - \eta\xi_2)) \tag{2.5a}$$

$$v^\dagger(z^\dagger, t^\dagger) = v(z^\dagger - \eta\xi_1, t^\dagger - \eta\xi_2) + \eta\phi_2(v(z^\dagger - \eta\xi_1, t^\dagger - \eta\xi_2)) \tag{2.5b}$$

Como $z^\dagger$ y $t^\dagger$ son variables mudas, podemos quitar la etiqueta de $\dagger$, para obtener:

$$u^\dagger(z, t) = u(z - \eta\xi_1, t - \eta\xi_2) + \eta\phi_1(u(z - \eta\xi_1, t - \eta\xi_2)) \tag{2.6a}$$

$$v^\dagger(z, t) = v(z - \eta\xi_1, t - \eta\xi_2) + \eta\phi_2(v(z - \eta\xi_1, t - \eta\xi_2)) \tag{2.6b}$$

Se tiene que (2.2) no es una identidad, ya que en general Ω y $\Omega^\dagger$ son distintas. Aunque en el caso en que Ω sea todo el plano z-t se tiene $\Omega = \Omega^\dagger$, (2.2) sigue sin ser una identidad, ya que las funciones $u^\dagger$ y $v^\dagger$ son funciones distintas de u y v.

2.2. Enunciados del Teorema de Noether

A continuación se muestran dos posibles formas de enunciar el Teorema de Noether. Las dos formas son equivalentes, y la única diferencia es que la segunda forma es más compacta pues en ella se presupone que el lector sabe lo que es la variación $\delta\mathscr{L}$ de la lagrangiana.

2.2.1. Enunciado 1 del Teorema de Noether

Si se tiene una densidad lagrangiana dependiente de dos funciones complejas $u(z, t)$ y $v(z, t)$, y de sus derivadas:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(u, u_t, u_z, u_{tt}, \ldots, v, v_t, v_z, v_{tt} \ldots) \tag{2.7}$$

y la integral de acción dada por:

$$S[u, v] = \iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u, \ldots, v, \ldots)dtdz \tag{2.8}$$

con:

$$\Omega = \{(z, t)|z_1 < z < z_2, t_1 < t < t_2\}$$

es tal que satisface la condición de invarianca:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u(z, t), u_z, \ldots, v(z, t), v_z, \ldots)dtdz \\ &= \iint\limits_{\Omega^\dagger} \mathscr{L}(u^\dagger(z^\dagger, t^\dagger), u^\dagger_{z^\dagger}, \ldots, v^\dagger(z^\dagger, t^\dagger), v^\dagger_{z^\dagger}, \ldots)dt^\dagger dz^\dagger \end{aligned}$$

ante la transformación infinitesimal:

$$\begin{aligned} z^\dagger &= z + \eta\xi_1 \\ t^\dagger &= t + \eta\xi_2 \\ u^\dagger &= u + \eta\phi_1(u) \\ v^\dagger &= v + \eta\phi_2(v) \end{aligned}$$

entonces se cumple la siguiente *ley de conservación* [5]:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0 \tag{2.9}$$

donde:

$$Q_1 = \xi_1 \mathscr{L} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = \xi_2 \mathscr{L} &+ \frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta u - \dots \\ &+ \frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta v - \dots \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\delta u = u^{\dagger}(z,t) - u(z,t) \tag{2.12}$$

$$\delta v = v^{\dagger}(z,t) - v(z,t) \tag{2.13}$$

Fin del teorema.

Integrando (2.9) sobre t, se sigue que:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t}\right)dt = \frac{d}{dz}\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt + Q_2\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{2.14}$$

Entonces, si:

$$Q_2(z,t_1) = Q_2(z,t_2) = 0 \tag{2.15}$$

para toda z, (2.14) implica:

$$\frac{d}{dz}\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt = 0 \tag{2.16}$$

por lo que la integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt \tag{2.17}$$

tendrá un valor constante a lo largo de z. Es por esto que se le llama a (2.9) ley de conservación.

Conviene observar que el teorema que se acaba de enunciar se refiere únicamente a transformaciones infinitesimales de la forma (2.1a)-(2.1d). Estas transformaciones son mucho más sencillas que las que consideró Emmy Noether, ya que en el trabajo de Emmy ξ_1, ξ_2, ϕ_1 y ϕ_2 dependían de u, v y sus derivadas. Parecería, por lo tanto, que el teorema que se acaba de enunciar está muy lejos del auténtico Teorema de Noether, pero no es así. Un análisis riguroso (y extremadamente complicado) muestra que si una ley de conservación puede obtenerse mediante una formulación variacional, es innecesario considerar transformaciones infinitesimales en las cuales las cantidades ξ_i no sean constantes [8]. Por lo tanto, al considerar que ξ_1 y ξ_2 son constantes, no se pierde realmente generalidad. Por otra parte, al considerar que ϕ_1 y ϕ_2 sólo dependen de u y v (respectivamente) sí se está restringiendo a un caso más sencillo que el caso más general considerado por Emmy Noether (en el cual ϕ_1 y ϕ_2 dependían de u, v y sus derivadas). Por lo tanto, el Teorema de Noether que se demostrará más adelante es una versión simplificada del auténtico Teorema de Emmy Noether.

2.2.2. Simplificación de la condición de invariancia

Debido a la simplicidad de las transformaciones (2.1a)-(2.1d), se puede simplificar más el Enunciado 1 del Teorema de Noether. Tanto (2.1a) como (2.1b) expresan el cambio de coordenadas que transforma $\Omega^\dagger$ en Ω. Entonces, se sustituye en el lado derecho de (2.2) $z^\dagger$ y $t^\dagger$ por $z+\eta\xi_1$ y $t+\eta\xi_2$ respectivamente. El jacobiano de la transformación es igual a uno, ya que la transformación es una simple traslación, por lo que el miembro derecho de (2.2) se transforma como:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega^\dagger} \mathscr{L}(u^\dagger(z^\dagger,t^\dagger), u^\dagger_{z^\dagger}(z^\dagger,t^\dagger),\ldots, v^\dagger(z^\dagger,t^\dagger), v^\dagger_{z^\dagger}(z^\dagger,t^\dagger),\ldots)dt^\dagger dz^\dagger \\
&= \iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u^\dagger(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2), u^\dagger_{z^\dagger}(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2),\ldots, \\
&\qquad v^\dagger(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2), v^\dagger_{z^\dagger}(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2),\ldots)dtdz
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Aunque se realizó el cambio de variables $z^\dagger = z+\eta\xi_1$ y $t^\dagger = t+\eta\xi_2$, se sigue escribiendo $u^\dagger_{z^\dagger}$ y $v^\dagger_{z^\dagger}$ dentro de la lagrangiana, ya que lo que se tiene son las funciones:

$$\left.\frac{\partial u^\dagger(z^\dagger,t^\dagger)}{\partial z^\dagger}\right|_{\substack{z^\dagger = z+\eta\xi_1 \\ t^\dagger = t+\eta\xi_2}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial v^\dagger(z^\dagger,t^\dagger)}{\partial z^\dagger}\right|_{\substack{z^\dagger = z+\eta\xi_1 \\ t^\dagger = t+\eta\xi_2}} \tag{2.19}$$

De manera análoga, dentro de la lagrangiana del miembro derecho de (2.18):

$$\left.\frac{\partial u^\dagger(z^\dagger,t^\dagger)}{\partial t^\dagger}\right|_{\substack{z^\dagger = z+\eta\xi_1 \\ t^\dagger = t+\eta\xi_2}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial v^\dagger(z^\dagger,t^\dagger)}{\partial t^\dagger}\right|_{\substack{z^\dagger = z+\eta\xi_1 \\ t^\dagger = t+\eta\xi_2}} \tag{2.20}$$

Después del cambio de variables, (2.2) resulta:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u(z,t), u_z,\ldots, v(z,t), v_z,\ldots)dtdz \\
&= \iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u^\dagger(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2), u^\dagger_{z^\dagger},\ldots, v^\dagger(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2), v^\dagger_{z^\dagger},\ldots)dtdz
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Para simplificar la igualdad anterior, se toman las definiciones correctas de las funciones $u^\dagger$ y $v^\dagger$ dadas por (2.6). Sustituyendo z y t por $z+\eta\xi_1$ y $t+\eta\xi_2$ respectivamente:

$$u^\dagger(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2) = u(z,t) + \eta\phi_1(u(z,t)) \tag{2.22a}$$

$$v^\dagger(z+\eta\xi_1,t+\eta\xi_2) = v(z,t) + \eta\phi_2(v(z,t)) \tag{2.22b}$$

Derivando (2.22) respecto a $z^\dagger$ y $t^\dagger$:

$$u^\dagger_{z^\dagger}(z^\dagger = z + \eta\xi_1, t^\dagger = t + \eta\xi_2) = u_z(z,t) + \eta\frac{\partial\phi_1}{\partial u}u_z(z,t) \tag{2.23a}$$

$$u^\dagger_{t^\dagger}(z^\dagger = z + \eta\xi_1, t^\dagger = t + \eta\xi_2) = u_t(z,t) + \eta\frac{\partial\phi_1}{\partial u}u_t(z,t) \tag{2.23b}$$

$$v^\dagger_{z^\dagger}(z^\dagger = z + \eta\xi_1, t^\dagger = t + \eta\xi_2) = v_z(z,t) + \eta\frac{\partial\phi_2}{\partial v}v_z(z,t) \tag{2.23c}$$

$$v^\dagger_{t^\dagger}(z^\dagger = z + \eta\xi_1, t^\dagger = t + \eta\xi_2) = v_t(z,t) + \eta\frac{\partial\phi_2}{\partial v}v_t(z,t) \tag{2.23d}$$

Se sustituye (2.22) y (2.23) en el miembro derecho de (2.21):

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u, u_z, \ldots, v, v_z, \ldots)dtdz \\ &= \iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u + \eta\phi_1 u, u_z + \eta\phi_{1,u}u_z, \ldots, v + \eta\phi_2 v, v_z + \eta\phi_{2,v}v_z, \ldots)dtdz\end{aligned} \tag{2.24}$$

Se expande en serie de Taylor la lagrangiana del lado derecho de (2.24):

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(u + \eta\phi_1 u, u_z + \eta\phi_{1,u}u_z, \ldots, v + \eta\phi_2 v, v_z + \eta\phi_{2,v}v_z, \ldots) \\ &= \mathscr{L}(u, u_z, \ldots, v, v_z, \ldots) + \delta\mathscr{L} + O(\eta^2)\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $\delta\mathscr{L}$ es la parte de la expansión que es lineal en η. A primer orden en η, (2.24) toma la forma:

$$\iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u, u_z, \ldots, v, v_z, \ldots)dtdz = \iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u, u_z, \ldots, v, v_z, \ldots)dtdz + \iint\limits_{\Omega} \delta\mathscr{L}dtdz \tag{2.26}$$

lo que implica que:

$$\iint\limits_{\Omega} \delta\mathscr{L}dtdz = 0 \tag{2.27}$$

Dado que esta ecuación debe cumplirse para cualquier región Ω (debido a la condición de invariancia), se debe tener que:

$$\delta\mathscr{L} = 0 \tag{2.28}$$

Así, la condición de invariancia (2.2) se ha reducido a (2.28). Por lo tanto, se puede enunciar el Teorema de Noether de una manera más compacta, como se muestra a continuación.

2.2.3. Enunciado 2 del Teorema de Noether

Si se tiene una densidad lagrangiana dependiente de dos funciones complejas $u(z,t)$ y $v(z,t)$, y de sus derivadas:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(u, u_t, u_z, u_{tt}, \ldots, v, v_t, v_z, v_{tt}\ldots)$$

y se cumple la condición de invariancia $\delta\mathscr{L} = 0$ para la transformación infinitesimal:

$$
\begin{aligned}
z^\dagger &= z + \eta\xi_1 \\
t^\dagger &= t + \eta\xi_2 \\
u^\dagger &= u + \eta\phi_1(u) \\
v^\dagger &= v + \eta\phi_2(v)
\end{aligned}
$$

y además se cumple que $Q_2(z, t_1) = Q_2(z, t_2) = 0$, donde:

$$
\begin{aligned}
Q_2 = \xi_2\mathscr{L} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta u - \dots \\
+ \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta v - \dots \\
\delta u = u^\dagger(z, t) - u(z, t) \\
\delta v = v^\dagger(z, t) - v(z, t)
\end{aligned}
$$

entonces:

$$
\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt \tag{2.29}
$$

donde:

$$
Q_1 = \xi_1\mathscr{L} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v
$$

es una cantidad conservada (es decir, la integral (2.29) no depende de z).

2.3. La variación de la lagrangiana

La variación causada por las transformaciones (2.1a) - (2.1d) está dada por:

$$
\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{zz}}\delta u_{zz} + \dots + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}\delta v + \dots \tag{2.30}
$$

Comparando con la variación de la lagrangiana que aparecía al obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, los dos primeros términos son nuevos, los cuales se agregan debido a que las transformaciones (2.1a) - (2.1d) están alterando los valores de z y t.
La variación de u producida por las transformaciones (2.1a)-(2.1d) es:

$$
\delta u = u^\dagger(z, t) - u(z, t) \tag{2.31}
$$

Al sustituir (2.6a) en lo anterior:

$$
\delta u = u(z - \eta\xi_1, t - \eta\xi_2) + \eta\phi_1(u(z - \eta\xi_1, t - \eta\xi_2)) - u(z, t) \tag{2.32}
$$

El teorema de Taylor para funciones de dos variables independientes está dado por [9]:

$$
\begin{aligned}
f(x+h,y+k) = f(x,y) &+ \{hf_x(x,y) + kf_y(x,y)\} \\
&+ \frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(x,y) + 2hkf_{xy}(x,y) + k^2 f_{yy}(x,y)\} \\
&+ \dots \\
&+ \frac{1}{n!}\left\{h^n f_{x^n}(x,y) + \binom{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y}(x,y) + \dots \right. \\
&\left. + k^n f_{y^n}(x,y)\right\} + R_n,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

donde R_n denota el residuo:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\{h^{n+1} f_{x^{n+1}}(x+\theta h, y+\theta k) + \dots + k^{n+1} f_{y^{n+1}}(x+\theta h, y+\theta k)\} \tag{2.34}$$

donde $0 < \theta < 1$.
Expandiendo en serie de Taylor los dos primeros términos del miembro derecho de (2.32):

$$\delta u = [u(z,t) - u_z \eta \xi_1 - u_t \eta \xi_2] + [\eta \phi_1(u(z,t)) + O(\eta^2)] - u(z,t) \tag{2.35}$$

A primer orden en η:

$$\delta u = \eta[\phi_1(u(z,t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] \tag{2.36}$$

Análogamente:

$$\delta v = \eta[\phi_2(v(z,t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2] \tag{2.37}$$

Cabe mencionar que aun cuando ϕ_1 y ϕ_2 sean cero, los valores de δu y δv pueden no ser cero.
Las variaciones de las derivadas están dadas por:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z}\delta u, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t}\delta u, \quad \delta u_{zz} = \frac{\partial}{\partial z^2}\delta u, \quad \delta v_z = \frac{\partial}{\partial z}\delta v, \dots \tag{2.38}$$

Así, conociendo las variaciones (2.36) - (2.38), queda más claro el significado de la variación $\delta\mathscr{L}$ dada en (2.30).

2.4. Demostración del Teorema de Noether

Dada una lagrangiana de la forma (2.7), la evolución de las funciones u y v está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathscr{L}}{\partial u_{tt}} + \dots = 0 \tag{2.39a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathscr{L}}{\partial v_{tt}} + \dots = 0 \tag{2.39b}$$

Sustituyendo ambos términos de (2.39) en (2.30), e igualando $\delta\mathscr{L} = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t +\\ +\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}} + \dots\right)\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta u + \dots\\ +\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}} + \dots\right)\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta v + \dots = 0\end{aligned} \tag{2.40}$$

Se introducen las identidades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u\right) &= \delta u\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta u\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\delta u\right) &= \delta u\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u\\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\delta u\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta u\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta u\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta u\right] - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta u\end{aligned} \tag{2.41}$$

e identidades similares con v en lugar de u. Así, podemos escribir (2.40) como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t +\\ +\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta u\right] + \dots\\ +\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_t}\delta v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta v\right] + \dots = 0\end{aligned} \tag{2.42}$$

De (2.1a) y (2.1b), se tiene $\delta z = \eta\xi_1$ y $\delta t = \eta\xi_2$, por lo que (2.42) resulta:

$$\begin{aligned}&\eta\frac{\partial}{\partial z}\left[\xi_1\mathscr{L} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right] +\\ &\quad +\eta\frac{\partial}{\partial t}\left[\xi_2\mathscr{L} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta u - \dots\right.\\ &\quad\quad \left. +\frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}\delta v - \dots\right] = 0\end{aligned} \tag{2.43}$$

Considerando las definiciones de Q_1 y Q_2 dadas en (2.10) y (2.11), entonces (2.43) coincide con (2.9), por lo que queda demostrado el Teorema de Noether.

Capítulo 3

Ecuación no lineal de Schrödinger (*NLS*) y sus generalizaciones

En este Capítulo se presentan dos deducciones de una ecuación diferencial parcial de gran importancia e interés:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0 \tag{3.1}$$

donde $u(z,t)$ es una función compleja. Esta ecuación es frecuentemente llamada "ecuación no lineal de Schrödinger" por su parecido a la famosa ecuación de Schrödinger que estudian los físicos en sus cursos de mecánica cuántica. La ecuación (3.1) es útil para describir el comportamiento de cualquier medio dispersivo no lineal (donde el adjetivo "dispersivo" implica que ondas de distinta frecuencia viajan con distinta velocidad). Sin embargo, la aplicación más importante de la ecuación *NLS* es la descripción del comportamiento de los pulsos de luz que viajan en las fibras ópticas usadas en los sistemas de telecomunicaciones. La ecuación *NLS* tiene múltiples propiedades interesantes, como el poderse deducir de una lagrangiana, el poderse resolver de manera exacta mediante el método de dispersión inversa (en inglés inverse scattering) y el tener soluciones tipo solitón (es decir, ondas no lineales solitarias, que viajan sin deformarse). Conviene mencionar aquí que en rigor un solitón debe ser una solución estable, capaz de sobrevivir a colisiones con pulsos similares. Sin embargo, al igual que en la mayoría de los trabajos sobre solitones ópticos, en esta tesis se llama "solitón" a cualquier solución localizada (onda solitaria) de la ecuación *NLS*, independientemente de la estabilidad de la solución.
Para deducir la ecuación *NLS*, se tienen tres métodos básicos:

1. Electromagnetismo (a partir de las ecuaciones de Maxwell).
2. Escalas múltiples (a partir de la serie de Taylor).
3. Mecánica Cuántica (a partir de la segunda cuantización).

A continuación se muestra la deducción de la ecuación *NLS* a partir de las ecuaciones de Maxwell y el núcleo de la idea que permite obtener esta ecuación mediante el método de escalas múltiples. La deducción a partir de la segunda cuantización se omite.

3.1. Ecuación *NLS* a partir del Electromagnetismo

Para la deducción de la ecuación *NLS*, se parte de las ecuaciones de Maxwell [10]:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_L - \nabla \cdot \vec{P} \tag{3.2a}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.2b}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.2c}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J_L} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3.2d}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ el campo magnético, $\vec{P}$ la polarización, $\vec{M}$ la magnetización, $\vec{J_L}$ la corriente debida a las cargas libres, ρ_L la densidad de carga libre, ϵ_0 la permitividad del vacío y μ_0 la permeabilidad del vacío. En el caso que la carga libre sea cero ($\rho_L = 0$) y lo mismo para la corriente libre ($\vec{J_L} = \vec{0}$), las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \vec{0} \tag{3.3a}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.3b}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.3c}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3.3d}$$

Para deducir la ecuación de onda a partir de las ecuaciones anteriores, se calcula el rotacional de (3.3c):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \tag{3.4}$$

Sustituyendo (3.3d) en (3.4):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{P}_{tt} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{E_{tt}} \tag{3.5}$$

A continuación, se usará la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \tag{3.6}$$

por lo que (3.5) resulta:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \vec{P}_{tt} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{E_{tt}} \tag{3.7}$$

Posteriormente, se elige la orientación de los ejes coordenados de tal manera que $\vec{E}$ solo tenga componente en y, es decir, $\vec{E}(x, y, z; t) = (0, E(x, y, z; t), 0) = E(x, y, z; t)\hat{j}$. Así, (3.7) se desarrolla explícitamente:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla(E_y) - (0, \nabla^2 E, 0) &= (E_{xy}, E_{yy}, E_{zy}) - (0, E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}, 0) \\ &= -\mu_0 \vec{P}_{tt} - \mu_0 \epsilon_0 (0, E_{tt}, 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, se supone la relación más simple entre la polarización $\vec{P}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} \tag{3.9}$$

donde $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad eléctrica del material. Entonces, (3.8) se puede escribir como:

$$(E_{xy}, E_{yy}, E_{zy}) - (0, E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}, 0) = -\mu_0(0, \epsilon_0 \chi^{(1)} E_{tt}, 0) - \mu_0 \epsilon_0 (0, E_{tt}, 0) \tag{3.10}$$

Así, se obtienen las siguientes ecuaciones para cada componente de $\vec{E}$:

$$x: \quad E_{xy} = 0 \tag{3.11a}$$

$$y: \quad -E_{xx} - E_{zz} = -\mu_0 \epsilon_0 (\chi^{(1)} + 1) E_{tt} \tag{3.11b}$$

$$z: \quad E_{zy} = 0 \tag{3.11c}$$

Para satisfacer (3.11a) y (3.11c), basta pedir que $E_y = 0$, es decir, la magnitud del campo eléctrico no depende de y ($E(x, z)$).
Al definir la constante dieléctrica ϵ_L como $\epsilon_L \equiv \epsilon_0(1 + \chi^{(1)})$, se puede escribir (3.11b) como:

$$E_{xx} + E_{zz} - \mu_0 \epsilon_L E_{tt} = 0 \tag{3.12}$$

Definiendo $v \equiv 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_L}$, entonces:

$$E_{xx} + E_{zz} - \frac{1}{v^2} E_{tt} = 0 \tag{3.13}$$

que es la ecuación de onda deseada. Se propone ahora una solución tentativa de la ecuación (3.13) que no dependa de x, de la siguiente forma:

$$E(x, z; t) = \frac{1}{2} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c \tag{3.14}$$

donde $c.c$ es el complejo conjugado del primer sumando y β_0 es la constante de propagación, que está relacionado con el número de onda k de la siguiente manera: si se considera un haz de luz viajando por una fibra óptica, β_0 es la componente de k paralela a la fibra . Así, en el caso más simple donde el haz viaja sin rebotar en la frontera de la fibra, ambos coinciden.
Sustituyendo el primer sumando de (3.14) en (3.13):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{2} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{2} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{1}{2} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}) = 0 \tag{3.15}$$

A continuación se presenta a detalle el cálculo de cada uno de los sumandos de (3.15):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{2} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{2}u(z,t)e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}[u_z e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + ui\beta_0 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}] \\
&= \frac{1}{2}[u_{zz}e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + u_z i\beta_0 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} \\
&+ u_z i\beta_0 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + u(i\beta_0)^2 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}] \\
-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{1}{2}u(z,t)e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}) &= -\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + u(-i\omega_0)e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}] \\
&= -\frac{1}{2v^2}[u_{tt}e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + u_t(-i\omega_0)e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} \\
&+ u_t(-i\omega_0)e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + u(-i\omega_0)^2 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}]
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Así, al juntar las tres partes:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[u_{zz}e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + 2u_z i\beta_0 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} - u\beta_0^2 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}] \\
&- \frac{1}{2v^2}[u_{tt}e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} - 2u_t i\omega_0 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} - u\omega_0^2 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}] = 0
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Eliminando el término $e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[u_{zz} + 2iu_z\beta_0 - u\beta_0^2] - \frac{1}{2v^2}[u_{tt} - 2iu_t\omega_0 - u\omega_0^2] = 0 \\
&\frac{1}{2}u_{zz} + i\beta_0 u_z - \frac{1}{2}\beta_0^2 u - \frac{1}{2v^2}u_{tt} + i\frac{\omega_0}{v^2}u_t + \frac{\omega_0^2}{2v^2}u = 0
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

De la ecuación anterior, se desprecia el término u_{zz}, ya que se supone que la variación en z de u es pequeña comparada con los cambios en t.
Por otro lado, recordando la relación entre la velocidad de la onda en el medio v, la velocidad de la onda en el vacío c y el índice de refracción n, se supone que se puede escribir n como un término n_0 función de la frecuencia más un término que depende de la intensidad de la onda:

$$
\frac{1}{v} = \frac{n}{c} = \frac{n_0(\omega_0) + n_{NL}|u|^2}{c} \tag{3.19}
$$

Recordando las definiciones de ω_0 y c:

$$
\begin{aligned}
\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad c = \frac{\lambda}{T} \\
\Longrightarrow \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} = k
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Posteriormente, se supone que el término $n_{NL}|u|^2$ es pequeño (originalmente se agrega porque es una corrección), así que al elevar al cuadrado (3.19) multiplicada por ω_0 por ambos lados, se desprecia el término $(n_{NL}|u|^2)^2$, obteniéndose:

$$
(\frac{\omega_0}{v})^2 = (\frac{\omega_0}{c})^2(n_0 + n_{NL}|u|^2)^2 \approx k^2(n_0^2 + 2n_0 n_{NL}|u|^2) \tag{3.21}
$$

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, (3.18) resulta:

$$
i\beta_0 u_z - \frac{1}{2}\beta_0^2 u - \frac{1}{2v^2}u_{tt} + \frac{\omega_0}{v^2}u_t + \frac{1}{2}k^2(n_0^2 + 2n_0 n_{NL}|u|^2)u = 0 \tag{3.22}
$$

Después, aproximando $n_0 \approx c/v$:

$$kn_0 \approx \frac{2\pi}{\lambda}\frac{c}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{T}\frac{T}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \beta_0 \tag{3.23}$$

Es importante mencionar que cuando un haz viaja en un medio y posteriormente cambia a otro, la frecuencia ω_0 no cambia pero la longitud de onda sí. Así, se define a λ como la longitud de onda en el vacío y λ_0 en el material. Entonces, la velocidad en el medio está dada por:

$$v = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\beta_0} \tag{3.24}$$

Usando lo obtenido en (3.23), se cancelan dos términos en (3.22), por lo que resulta:

$$i\beta_0 u_z - \frac{1}{2v^2}u_{tt} + \frac{\omega_0}{v^2}u_t + k^2 n_0 n_{NL}|u|^2 u = 0 \tag{3.25}$$

Dividiendo por β_0 y reagrupando los términos anteriores:

$$i(u_z + \frac{\omega_0}{\beta_0 v^2}u_t) - \frac{1}{2v^2\beta_0}u_t t + \frac{1}{\beta_0}k^2 n_0 n_{NL}|u|^2 u = 0 \tag{3.26}$$

Usando (3.23) y (3.24), se llega a la expresión:

$$i(u_z + \frac{1}{v}u_t) - \frac{\beta_0}{2\omega_0^2}u_{tt} + kn_{NL}|u|^2 u = 0 \tag{3.27}$$

Ahora, se define el siguiente tiempo retardado $\tau = t - \frac{1}{v}z$. Así, se piensa a la función u como $u = u(z, \tau(z,t))$. Entonces [11]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_z \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_z \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_t = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_z \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)_t &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\tau - \frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_z \\ \implies \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_t + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\tau \end{aligned} \tag{3.29}$$

Considerando al tiempo retardado τ en lugar de t, usando (3.28) y (3.29) en (3.27) se obtiene la ecuación *NLS* temporal:

$$iu_z - \frac{\beta_0}{2\omega_0^2}u_{\tau\tau} + kn_{NL}|u|^2 u = 0 \tag{3.30}$$

La forma usual adimensional de la ecuación *NLS* temporal es:

$$iu_z - \frac{\mathrm{sgn}(\beta_2)}{2}u_{\tau\tau} + |u|^2 u = 0 \tag{3.31}$$

en donde sign$\beta_2 = 1$ si $\beta_2 > 0$, sign$\beta_2 = -1$ si $\beta_2 < 0$ y sign$\beta_2 = 0$ si $\beta_2 = 0$. Para el vidrio (SiO_2) se tiene que β_2 es función de λ, siendo $\beta_2 > 0$ cuando $\lambda < 1270$ nm y $\beta_2 < 0$ cuando $\lambda > 1270$ nm. Para $\lambda > 1270$ nm, la ecuación y la solución fundamental son respectivamente:

$$\begin{aligned} iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = 0 \\ u(z,t) = A\mathrm{sech}(At)e^{i\frac{A^2}{2}z} \end{aligned} \tag{3.32}$$

A estas soluciones se les conoce como *bright solitons*, que son los solitones que se usan para telecomunicaciones, ya que son pulsos de luz de corta duración que viajan por la fibra y que después de interaccionar con otros solitones, recuperan su forma y velocidades originales.
Por otro lado, para $\lambda < 1270$ nm, la ecuación y la solución son respectivamente:

$$\begin{aligned} iu_z - \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = 0 \\ u(z,t) = B\tanh(Bt)e^{iB^2 z} \end{aligned} \tag{3.33}$$

A estas soluciones se les conoce como *dark solitons*, ya que corresponde a tener iluminada toda la fibra excepto una zona oscura que avanza por la fibra.
Cabe mencionar que la atenuación en un material también es función de la longitud de onda, por lo que en las fibras ópticas de SiO_2 se tiene mínima atenuación para $\lambda = 1550$nm, que es la longitud de onda que se usa para telecomunicaciones.
Regresando a (3.14), si se hubiera propuesto en lugar de esa solución la función:

$$E(x,z;t) = \frac{1}{2}u(x,z)e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c \tag{3.34}$$

se hubiera obtenido la ecuación *NLS* espacial:

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = 0 \tag{3.35}$$

Aunque la deducción de la ecuación anterior es más sencilla (no se necesita agregar al tiempo retardado τ), con la ecuación que se trabajará es la ecuación *NLS* temporal, ya que físicamente existen motivos para agregarle derivadas temporales de orden superior, mientras que no existen razones físicas para agregar derivadas espaciales de orden superior en x a la ecuación *NLS* espacial.

3.2. Ecuación *NLS* usando escalas múltiples

En esta sección se presenta el núcleo de la idea que permite obtener la ecuación *NLS* mediante el método de escalas múltiples [12].
Para cualquier onda periódica, se define el número de onda k y la frecuencia angular ω por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.36}$$

donde λ es la longitud de onda y T el periodo de oscilación. Así, la velocidad v está dada por:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \tag{3.37}$$

Por definición, un medio dispersivo es aquel donde la velocidad de la onda que viaja en dicho medio depende de la frecuencia angular, por lo que el número de onda resulta:

$$k(\omega) = \frac{1}{v(\omega)}\omega \tag{3.38}$$

Ahora, se define un medio dispersivo no lineal como aquel donde la velocidad, además de ser función del número de onda, es función de la amplitud A de la onda, por lo que k está dado por:

$$k(\omega, |A|^2) = \frac{1}{v(\omega, |A|^2)}\omega \tag{3.39}$$

Por otro lado, usando (2.33), se expande (3.39) en serie de Taylor alrededor de $\omega = \omega_0$ y $|A|^2 = 0$ (la convergencia de esta seria de Taylor no se demuestra, es por esto que esta deducción no es rigurosa):

$$\begin{aligned} k = k_0 + k_1(\omega - \omega_0) + k_2|A|^2 + \frac{1}{2!}[k_{11}(\omega - \omega_0)^2 + 2k_{12}|A|^2(\omega - \omega_0) + k_{22}|A|^4] \\ + \frac{1}{3!}[k_{111}(\omega - \omega_0)^3 + \ldots + k_{222}|A|^6] \ldots \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde:

$$\begin{aligned} k_0 = k\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ k_1 = \frac{\partial k}{\partial \omega}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ k_2 = \frac{\partial k}{\partial |A|^2}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ k_{11} = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ k_{12} = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega \partial |A|^2}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \\ k_{22} = \frac{\partial^2 k}{\partial (|A|^2)^2}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ k_{111} = \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ k_{222} = \frac{\partial^3 k}{\partial (|A|^2)^3}\Big|_{\substack{\omega_0 \\ 0}}, \ldots \end{aligned} \tag{3.41}$$

Después, se escribe la amplitud $A(Z,T)$ usando la transformada inversa de Fourier:

$$A(Z,T) = \mathfrak{F}^{-1}[\widetilde{A}(k,\omega)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}(k,\omega)e^{i[(k-k_0)Z-(\omega-\omega_0)T]}dkd\omega, \tag{3.42}$$

Derivando respecto a T y Z (3.42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T} &= \mathfrak{F}^{-1}[-i(\omega - \omega_0)\widetilde{A}(k,\omega)] = -i(\omega - \omega_0)\mathfrak{F}^{-1}[\widetilde{A}(k,\omega)] \\ \frac{\partial A}{\partial Z} &= \mathfrak{F}^{-1}[i(k - k_0)\widetilde{A}(k,\omega)] = i(k - k_0)\mathfrak{F}^{-1}[\widetilde{A}(k,\omega)] \end{aligned} \tag{3.43}$$

Estas ecuaciones muestran que si en el espacio (Z,T) se deriva a la función $A(Z,T)$ respecto a Z o respecto a T,en el espacio (k,ω) se debe multiplicar a la función $\widetilde{A}(k,\omega)$ por $-i(\omega-\omega_0)$ o $i(k - k_0)$, respectivamente. Es decir, se tienen las relaciones:

$$(\omega - \omega_0) \leftrightarrow i\frac{\partial}{\partial T} \quad \text{y} \quad (k - k_0) \leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial Z} \tag{3.44}$$

Posteriormente, se definen las variables [7] $t = \epsilon T$ y $z_n = \epsilon^n Z$. Así, las expresiones anteriores resultan:

$$(\omega - \omega_0) \leftrightarrow i\frac{\partial}{\partial T} = i\epsilon\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.45}$$

$$(k - k_0) \leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial Z} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial z_n}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial z_n} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^n\frac{\partial}{\partial z_n} \tag{3.46}$$

Al sustituir en (3.40) los operadores diferenciales (3.45) y (3.46) se obtiene:

$$\begin{aligned} -i\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^n\frac{\partial}{\partial z_n} = i\epsilon k_1\frac{\partial}{\partial t} + k_2|A|^2 + \frac{1}{2!}[-\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i\epsilon k_{12}|A|^2\frac{\partial}{\partial t} + k_{22}|A|^4] \\ + \frac{1}{3!}[-i\epsilon^3 k_{111}\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \ldots + k_{222}|A|^6] + \ldots \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ahora, se aplican los operadores anteriores al campo $A(z_1, z_2, \ldots, t) = \epsilon u(z_1, z_2, \ldots, t)$. Es decir, así como se ha reemplazado el tiempo t por un nuevo tiempo T que difiere en un factor de escala ϵ, ahora se está reemplazando el campo $A(z_1, \ldots, t)$ por un nuevo campo $u(z_1, \ldots, t)$ que también difiere por un factor ϵ. Al agrupar los términos de ambos lados de la igualdad con la misma potencia de ϵ, se llega a una infinidad de ecuaciones, siendo las tres primeras:

$$O(\epsilon^2) : u_{z_1} + k_1 u_t = 0 \tag{3.48}$$

$$O(\epsilon^3) : iu_{z_2} - \frac{1}{2!}k_{11}u_{tt} + k_2|u|^2 u = 0 \tag{3.49}$$

$$O(\epsilon^4) : u_{z_3} - \frac{1}{3!}k_{111}u_{ttt} + k_{12}|u|^2 u_t = 0 \tag{3.50}$$

El procedimiento anterior que permite obtener estas ecuaciones se llama método de escalas múltiples. Se observa que el valor de los coeficientes (3.41) son desconocidos. Los valores de dichos coeficientes dependen del medio en el cual se propaga la onda.

A la ecuación (3.48) se le conoce como ecuación de transporte con coeficientes constantes, (3.49) es la ecuación *NLS* y (3.50) se conoce como ecuación *cmKdV* (complex modified KdV) [13].

Para cada tamaño λ de la onda, se usa la ecuación conveniente, es decir, para ϵ más chicas la ecuación describe a una onda de menor longitud de onda.

La elección del campo $A(z_1, z_2, \ldots, t) = \epsilon u(z_1, z_2, \ldots, t)$ y las variables $t = \epsilon T$, $z_n = \epsilon^n Z$ permite obtener la ecuación *NLS* para ϵ^3, ecuación con muchas aplicaciones en la ciencia. Se pueden aplicar los operadores (3.47) a un campo diferente y con diferentes definiciones de t y z, obteniéndose diferentes ecuaciones que quizá describan a otros sistemas.

Aunque la deducción anterior es incompleta (ya que no se examina ni se demuestra la convergencia de la serie de Taylor de la función $k[\omega, |A|^2]$), ésta permite comprender por qué la ecuación *NLS* aparece en cualquier medio dispersivo no lineal, sin importar los detalles particulares del medio en cuestión. Por eso se dice que la ecuación *NLS* es una ecuación universal y aparece en la descripción de olas en el mar, fibras ópticas, condensados de Bose-Einstein, plasmas, propagación de luz en películas delgadas, etc.

Una vez habiéndose obtenido la ecuación *NLS* tanto por escalas múltiples, como a partir de las ecuaciones de Maxwell, se quiere obtener una generalización de esta ecuación usando "derivadas fraccionarias". Por lo tanto, en el siguiente Capítulo se verá qué es una "derivada fraccionaria" y qué tipos de derivadas fraccionarias existen.

Capítulo 4

Derivadas fraccionarias

Cuando se quiere conocer la derivada de una función $f(t)$ en el punto t, se debe calcular el siguiente límite:

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \tag{4.1}$$

Sin embargo, es posible dar definiciones más generales de derivada de una función, que se reducen a la definición anterior cuando se consideran derivadas de orden entero. Pero antes de dar dichas definiciones, se empieza con el concepto de integral fraccionaria.

4.1. La integral fraccionaria

Sea $f(t)$ una función integrable. Se define:

$$[J^{(1)}f](t) = \int_0^t f(y_1)dy_1 \tag{4.2}$$

Volviendo a integrar la ecuación anterior, se define:

$$[J^{(2)}f](t) = \int_0^t \left(\int_0^{y_2} f(y_1)dy_1 \right) dy_2 \tag{4.3}$$

y así para la integral n-ésima:

$$[J^{(n)}f](t) = \int_0^t \int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \dots \int_0^{y_2} f(y_1)dy_1 dy_2 \dots dy_n \tag{4.4}$$

Se afirma que la expresión anterior se puede escribir en términos de una sola integral como:

$$[J^{(n)}f](t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-y)^{n-1} f(y)dy \tag{4.5}$$

Se presenta una demostración por inducción de la afirmación anterior.

1. $n = 1$
   Primero, se prueba (4.5) para $n = 1$:
   $[J^{(1)}f](t) = \frac{1}{(1-1)!} \int_0^t (t-y)^{1-1} f(y)dy = \int_0^t f(y)dy$

2. $n = k$
   Posteriormente, se supone (4.5) válido para $n = k$:
   $[J^{(k)}f](x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-y)^{k-1} f(y)dy$

3. $n = k+1$

   Por último, se prueba (4.5) para $n = k+1$:

   $[J^{(k+1)}f](t) = \int_0^t [J^{(k)}f](x)dx = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t \left[\int_0^x (x-y)^{k-1} f(y)dy \right] dx$

   El área de integración corresponde a un triángulo rectángulo en el plano (x,y), cuyos vértices son $(0,0)$, $(t,0)$ y (t,t). Cambiando el orden de las integrales, los límites también cambian, obteniéndose:

$$\begin{aligned} [J^{(k+1)}f](t) &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t \left[\int_y^t (x-y)^{k-1} f(y)dx \right] dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t f(y) \left[\int_y^t (x-y)^{k-1} dx \right] dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t f(y) \frac{1}{k-1}(t-y)^{k-1} dy \\ &= \frac{1}{k!}\int_0^t (t-y)^k f(y)dy \end{aligned} \tag{4.6}$$

   Por lo que queda demostrado (4.5).

Usando la definición de la función gamma:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \tag{4.7}$$

y recordando que cuando $t = n$ con $n \in \mathcal{N}$ se cumple $\Gamma(n) = (n-1)!$, se define la integral fraccionaria de orden β como:

$$[J^{(\beta)}f](t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-y)^{\beta-1} f(y)dy \tag{4.8}$$

4.2. Derivada fraccionaria de Caputo

Una vez hallada la expresión de la integral fraccionaria de orden β, se busca definir la derivada fraccionaria de orden α de f. Para ello, sea n el número natural tal que dado $\alpha > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$. La idea básica para la derivada fraccionaria de orden α es derivar n veces la función y el resultado integrarlo $n-\alpha$ veces. Así, la derivada fraccionaria izquierda de Caputo de orden α es [14]:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-y)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(y)dy \tag{4.9}$$

donde a es una constante real menor que t, y la derivada fraccionaria derecha de Caputo de orden α es:

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (y-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(y)dy \tag{4.10}$$

donde b es otra constante real (mayor que t).

4.3. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Derivar n veces la función y el resultado integrarlo $n-\alpha$ veces no necesariamente es lo mismo que integrar la función primero $n-\alpha$ veces y el resultado derivarlo n veces. Así, la derivada fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville de orden α es [15]:

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-y)^{n-\alpha-1} f(y) dy \tag{4.11}$$

mientras que la derivada fraccionaria derecha de Riemann-Liouville de orden α es:

$$ {}_{t}^{RL}D_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (y-t)^{n-\alpha-1} f(y) dy \tag{4.12}$$

4.4. Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

La derivada de orden n de una función $f(t)$ se puede aproximar usando diferencias finitas adelantadas de la siguiente forma:

$$ \frac{d^n f}{dt^n} \approx \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{r} f(t-rh) \tag{4.13}$$

Análogamente, usando diferencias finitas atrasadas, se puede aproximar la derivada de f de orden n como:

$$ \frac{d^n f}{dt^n} \approx \frac{(-1)^n}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{r} f(t+rh) \tag{4.14}$$

Usando lo anterior, se define la derivada fraccionaria izquierda de Grünwald-Letnikov de orden α como [16] [17]:

$$ {}_{a}^{GL}D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \qquad \text{con} \quad nh := t-a \tag{4.15}$$

y la derivada fraccionaria derecha de Grünwald-Letnikov de orden α es:

$$ {}_{t}^{GL}D_b^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t+rh), \qquad \text{con} \quad nh := b-t \tag{4.16}$$

Las derivadas fraccionarias de Caputo, Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov coinciden si $a=-\infty$ y $b=\infty$ [18], pero si $a \neq -\infty$ y $b \neq \infty$ estas derivadas no necesariamente coinciden [18].
Habiendo introducido el concepto de derivada fraccionaria, se puede obtener la ecuación *NLS* fraccionaria.

Capítulo 5

Ecuación *NLS* fraccionaria

En el Capítulo anterior se introdujo el concepto de derivada fraccionaria, por lo que es natural preguntarse si existen ecuaciones diferenciales que describan sistemas físicos y que contengan derivadas fraccionarias. Cuando los solitones son muy intensos (del orden de 1 mW) y de poca duración (de menos de 1 ps), la ecuación que los describe es una generalización de la ecuación *NLS* temporal [19]:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i\varepsilon_3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \varepsilon_4\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1|u|^2u - \gamma_2|u|^4u = 0 \tag{5.1}$$

una de cuyas soluciones es:

$$u(z,t) = A_1\mathrm{sech}\left(\frac{t-a_1z}{w_1}\right)e^{i(q_1z+r_1t)} \tag{5.2}$$

donde los coeficientes están dados por:

$$A_1 = \left(\frac{6}{5\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\gamma_1 - \left(2\varepsilon_2 + \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon_4}\right)\left(\frac{\gamma_2}{24\varepsilon_4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.3a}$$

$$w_1 = \left(\frac{24\varepsilon_4}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{A_1} \tag{5.3b}$$

$$r_1 = \frac{\varepsilon_3}{4\varepsilon_4} \tag{5.3c}$$

$$a_1 = 2\varepsilon_2r_1 + 8\varepsilon_4r_1^3 \tag{5.3d}$$

$$q_1 = -\varepsilon_2r_1^2 - 3\varepsilon_4r_1^4 + (\varepsilon_2 + 6\varepsilon_4r_1^2)\left(\frac{\gamma_2}{24\varepsilon_4}\right)^{\frac{1}{2}}A_1^2 + \frac{\gamma_2}{24}A_1^4 \tag{5.3e}$$

5.1. Surgimiento de la derivada fraccionaria

Tomando $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$, $\varepsilon_3 = 0$ (lo cual es posible ya que se observa en (5.3) que ε_3 no aparece en algún denominador) en (5.1):

$$iu_z + u_{tt} + u_{4t} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \tag{5.4}$$

Tomando $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ (lo cual es posible ya que se observa en (5.3) que ε_2 no aparece en algún denominador) en (5.1):

$$iu_z - iu_{3t} + u_{4t} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \tag{5.5}$$

Analizando (5.4) y (5.5), se pueden generalizar, introduciendo la derivada fraccionaria D^α, a la siguiente ecuación:

$$iu_z + \varepsilon(\alpha) D^\alpha u + u_{4t} + |u|^2 u - |u|^4 u = 0 \tag{5.6}$$

donde $\varepsilon(2) = 1$, $\varepsilon(3) = -i$ y $D^\alpha u(z,t)$ se define como:

$$D^\alpha u(z,t) \equiv \frac{1}{2}\left[{}_{-\infty}^{GL}D_t^\alpha u(z,t) + (-1)^\alpha {}_t^{GL}D_\infty^\alpha u(z,t) \right] \tag{5.7}$$

La presencia del factor $(-1)^\alpha$ en (5.7) es producto de considerar la aproximación en diferencias adelantadas para la n-ésima derivada (4.14), en la cual aparece dicho factor. Se usan las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov debido a que son las que restrigen menos a la función y son más fáciles de calcular numéricamente. Se observa que se usa un promedio de la derivada fraccionaria derecha e izquierda, esto para no favorecer ni el pasado ni el presente de $u(z,t)$. Así, cuando simplemente se escriba ${}_{-\infty}D_t^\alpha$ o ${}_tD_\infty^\alpha$, se hace referencia a las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov izquierda o derecha respectivamente.
La ecuación *NLS* fraccionaria que se estudia se construye simplemente como una generalización original (fraccionaria) que contiene a las ecuaciones (5.4) y (5.5) como casos particulares. Esta ecuación fraccionaria no se deduce de argumentos físicos que hagan evidente la necesidad de introducir derivadas fraccionarias. Sin embargo, como se verá más adelante, el término dispersivo fraccionario describe mejor la dispersión de los pulsos luminosos que una simple combinación lineal de derivadas temporales de segundo y tercer orden.

5.2. Elección de la función $\varepsilon(\alpha)$

Para poder resolver numéricamente (5.6), se necesita conocer la función $\varepsilon(\alpha)$ con $2 \leq \alpha \leq 3$. Sabiendo que $\varepsilon(2) = 1$ y $\varepsilon(3) = -i$, se propoponen dos funciones que corresponden a los arcos de un círculo unitario en el plano complejo, siendo la que lo recorre en sentido contrario de las manecillas del reloj:

$$\varepsilon_+(\alpha) = -e^{i\alpha\frac{3\pi}{2}} \tag{5.8}$$

y en el sentido de las manecillas del reloj:

$$\varepsilon_-(\alpha) = -e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} \tag{5.9}$$

Para escoger alguna de las dos, se considera la parte lineal de (5.6):

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon(\alpha) D^\alpha u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0 \tag{5.10}$$

Para resolver (5.10), se usa la técnica de la transformada de Fourier, donde se define:

$$\mathfrak{F}[u(z,t)] \equiv U(z,\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(z,t) e^{i\omega t} dt \tag{5.11a}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[U(z,\omega)] \equiv u(z,t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(z,\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{5.11b}$$

Dado que $\mathfrak{F}[D^{\alpha}u(z,t)] \equiv (-i\omega)^{\alpha}U(z,\omega)$, entonces la transformada de Fourier de (5.6) resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial z} - i[\varepsilon(\alpha)(-i\omega)^{\alpha} + \omega^4]U = 0 \tag{5.12}$$

cuya solución es:

$$U(z,\omega) = U(0,\omega)e^{i[\varepsilon(\alpha)(-i\omega)^{\alpha}+\omega^4]z} \tag{5.13}$$

Ahora bien, como se quiere investigar el efecto de la derivada fraccionaria sobre un pulso similar a un solitón, se considera $u(0,t) = A\text{sech}(t/\varpi)$ como condición inicial. Considerando dicha condición inicial, se tiene lo siguiente:

$$U(0,\omega) = \mathfrak{F}[u(0,t)] = \pi\varpi A\text{sech}\frac{\pi\varpi\omega}{2} \tag{5.14}$$

Así, usando (5.11b), obtenemos la solución a (5.6):

$$u(z,t) = \frac{\varpi A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}\left(\frac{\pi\varpi\omega}{2}\right)e^{i[\varepsilon(\alpha)(-i\omega)^{\alpha}z+\omega^4 z-\omega t]}d\omega \tag{5.15}$$

Tomando $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{+}(\alpha)$, (5.15) diverge para $2 < \alpha < 3$, por lo que se deshecha. Para $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{-}(\alpha)$, se parte (5.15) en dos integrales considerando las frecuencias negativas y positivas, resultando:

$$u_1(z,t) = \frac{\varpi A}{2}\int_{0}^{\infty} \text{sech}\left(\frac{\pi\varpi\omega}{2}\right)e^{f(z,\alpha,\omega)}e^{ig(z,t,\alpha,\omega)}d\omega \tag{5.16a}$$

$$u_2(z,t) = \frac{\varpi A}{2}\int_{0}^{\infty} \text{sech}\left(\frac{\pi\varpi\omega}{2}\right)e^{i(-z\omega^{\alpha}+z\omega^4+\omega t)}d\omega \tag{5.16b}$$

donde:

$$f(z,\alpha,\omega) = -\sin(\alpha\pi)z\omega^{\alpha} \tag{5.17a}$$

$$g(z,t,\alpha,\omega) = -\cos(\alpha\pi)z\omega^{\alpha} + \omega^4 z - \omega t \tag{5.17b}$$

Las ecuaciones (5.16) convergen para $2 < \alpha < 3$, entonces ε_{-} parece ser una buena elección. Considerando $\alpha = 2.75$ con condición inicial $u(0,t) = A\text{sech}(t/\varpi)$ con $A = 2.2$ y $\varpi = 1.5$, resolviendo numéricamente (5.10), se obtiene el comportamiento mostrado en la Fig. 1 [20]:

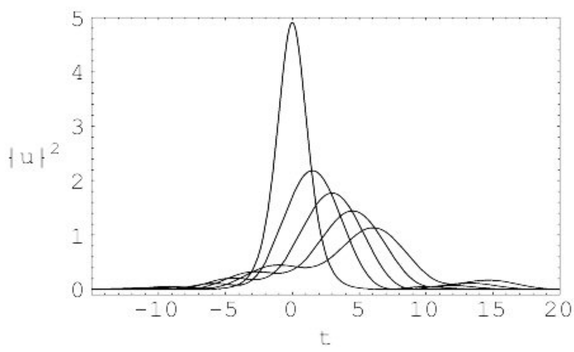

Fig. 1: Perfil $|u|^2$ de la solución de (5.10), donde cada perfil corresponde a $z = 0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40$.

Si en lugar de considerar $\varepsilon_- D^\alpha u$ se usa una combinación lineal de u_{tt} y u_{ttt}:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i\varepsilon_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0 \tag{5.18}$$

con $\varepsilon_2 - i\varepsilon_3 = \varepsilon_-(\alpha = 2.75)$ y la misma condición inicial que en la Fig. 1, se tiene un nuevo perfil para $|u|^2$ mostrado en la Fig. 2:

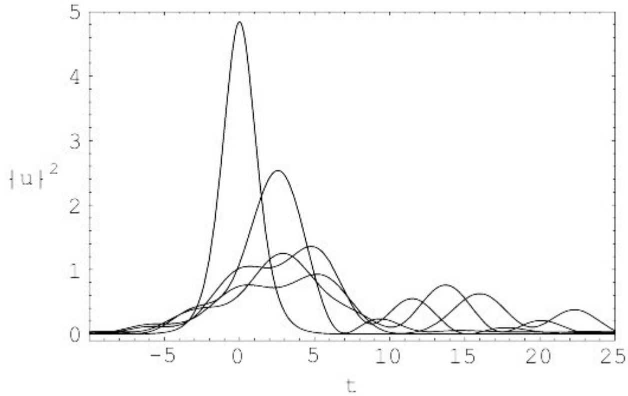

Fig. 2: Perfil $|u|^2$ de la solución de (5.18), donde cada perfil corresponde a $z = 0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40$.

Se observa que el pulso se distorsiona considerablemente, por lo que el efecto del término $\varepsilon_2 u_{tt} - i\varepsilon_3 u_{ttt}$ es más destructivo (para una onda solitaria) que $\varepsilon_-(\alpha)D^\alpha u$.
Sin embargo, calculando la solución numérica de (5.6), usando $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_-(\alpha) = \varepsilon_2 - i\varepsilon_3$ y como condición inicial la solución de (5.1) con $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon_4 = 1$, se obtiene la Fig. 3:

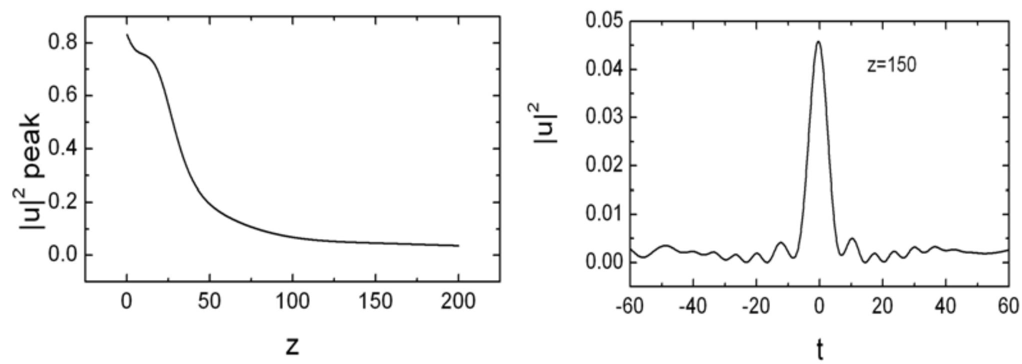

Fig. 3: (a) Valor máximo del $|u|^2$ en función de z, con $\alpha = 2.7$. (b) Perfil $|u|^2$ para $z = 150$.

Se observa que el pulso cae abruptamente y hay disipación de energía. Por lo anterior, (5.1) no describe la propagación de solitones, esto debido a que en (5.4) y (5.5) el efecto dispersivo está balanceado con los términos no lineales. Sin embargo, al agregar el término $\varepsilon(\alpha)D^\alpha u$ en (5.6), se rompe dicho balance, por lo que se debe agregar un término no lineal tal que restaure el equilibrio. La parte no lineal de (5.1) sugiere agregar un término de la forma $\gamma(\alpha)|u|^{E(\alpha)}u$ con $2 \leq \alpha \leq 3$. Para recuperar (5.4) y (5.5), $\gamma(\alpha)$ debe anularse en los valores extremos de α ($\gamma(2) = \gamma(3) = 0$). Entonces, se propone la función $\gamma(\alpha) = \pm\sin(\alpha\pi)$. Por otro lado, $E(\alpha)$ debe coincidir con los exponentes de (5.4) y (5.5), es decir, $E(2) = 2$ y $E(3) = 4$, así se propone la función $E(\alpha) = 2(\alpha - 1)$. Por lo tanto, la ecuación que podría permitir la propagación de solitones es:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_-(\alpha)D^\alpha u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2u \pm \sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - |u|^4u = 0 \tag{5.19}$$

Tomando el signo positivo en el término $\sin(\alpha\pi)$ y resolviendo (5.19) para diferentes valores de α y de la condición inicial, la solución de (5.1) con $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon_4 = 1$ y $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_-(\alpha) = \varepsilon_2 - i\varepsilon_3$, , tiene la forma mostrada en la Fig. 4 [20]:

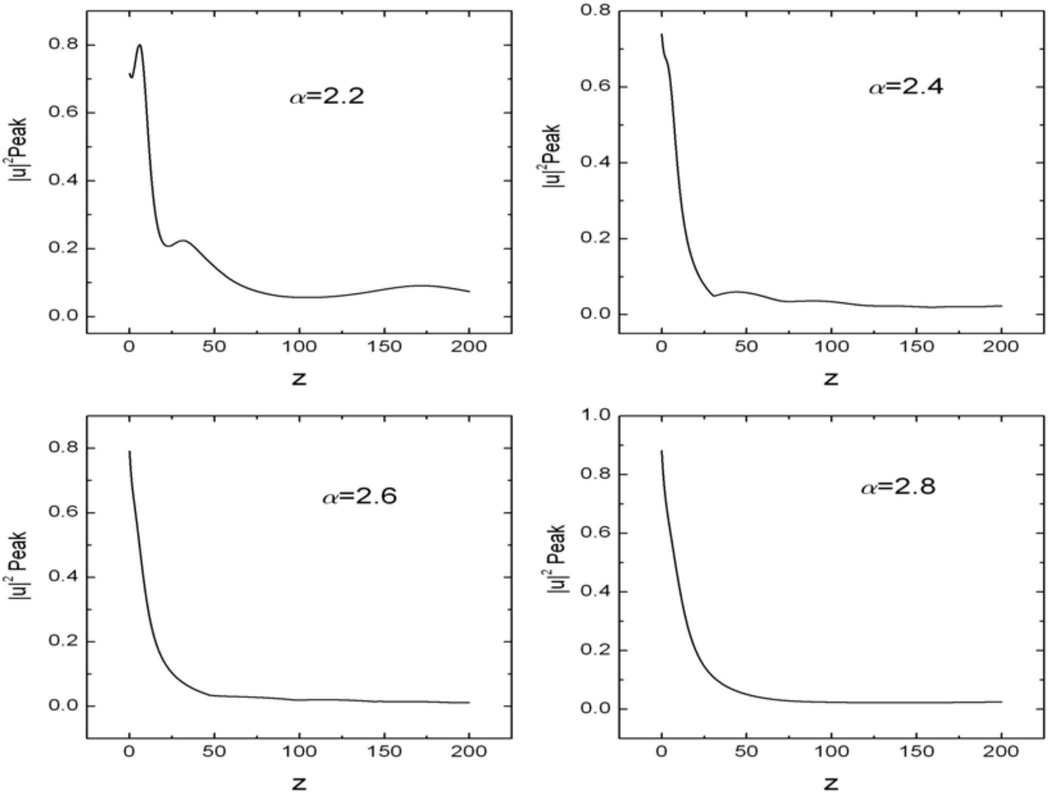

Fig. 4: Valor pico de $|u|^2$ en función de z, para distintos valores de α.

Se observa que la altura del pulso cae abruptamente. Sin embargo, tomando el signo negativo en el término $\sin(\alpha\pi)$:

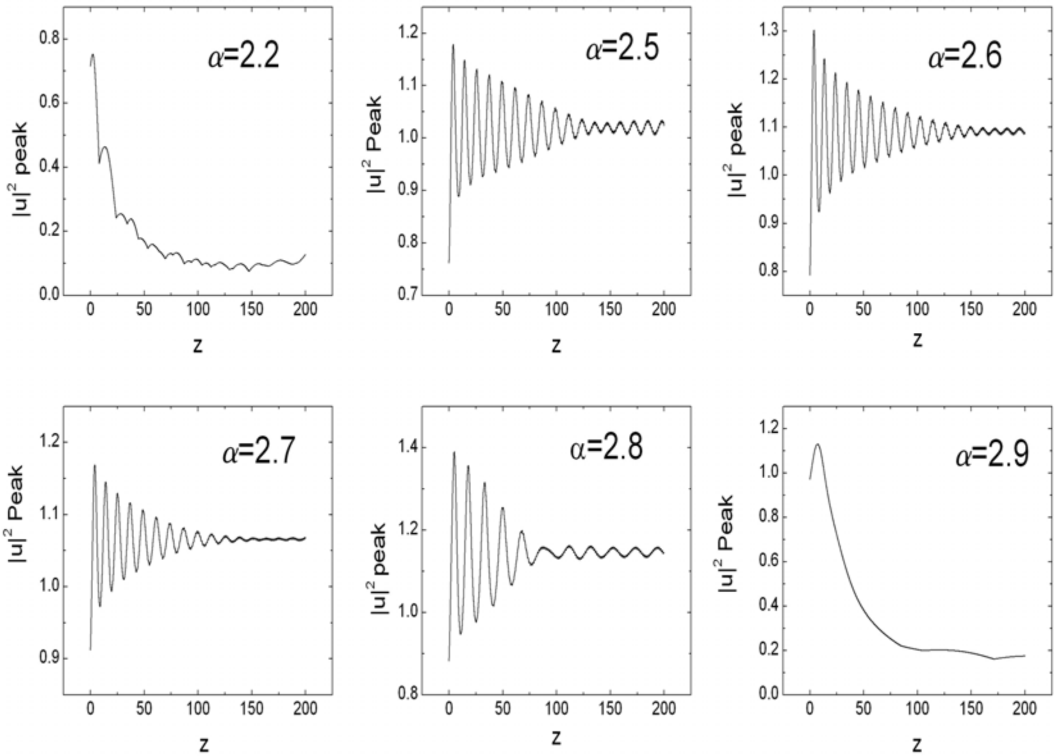

Fig. 5: Valor pico de $|u|^2$ en función de z, para distintos valores de α.

Así, si $2.6 \leq \alpha \leq 2.8$, la altura del pulso presenta un comportamiento de amortiguamiento, tendiendo a un valor aproximadamente constante. Por lo tanto, la siguiente ecuación permite la propagación de solitones para $2.6 \leq \alpha \leq 2.8$, ecuación que se referirá como ecuación *NLS fraccionaria*:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon(\alpha)D^{\alpha}u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2u - \sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - |u|^4u = 0 \tag{5.20}$$

donde $\varepsilon(\alpha) = -e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$. Dichos solitones se conocen como *solitones fraccionarios*.

5.3. Conservación de la energía

Para demostrar que la energía se conserva en la ecuación *NLS fraccionaria* (5.20), se hace uso de la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)_{-\infty}D_t^{\alpha}q(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)_tD_{\infty}^{\alpha}p(t)dt \tag{5.21}$$

La demostración de la identidad anterior es sencilla. Recordando las definiciones de las derivadas fraccionarias izquierda y derecha de Grünwald-Letnikov de orden α, con $a = -\infty$

y $b = \infty$ respectivamente:

$$ {}_{\infty}^{GL}D_t^{\alpha}u(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}u(t-kh) \tag{5.22a} $$

$$ {}_{t}^{GL}D_{\infty}^{\alpha}u(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}u(t+kh) \tag{5.22b} $$

Entonces, sustituyendo (5.22a) en el lado izquierdo de la igualdad (5.21):

$$ \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)_{-\infty}D_t^{\alpha}q(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}q(t-kh)\right]dt \tag{5.23} $$

Dado que $p(t)$ no depende de k, se puede meter a la suma, además se intercambia la integral por la suma, obteniéndose:

$$ \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}q(t-kh)\right]dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)q(t-kh)dt \tag{5.24} $$

Realizando el siguiente cambio de variable $\tau = t - kh \Rightarrow d\tau = dt$:

$$ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)q(t-kh)dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau+kh)q(\tau)d\tau \tag{5.25} $$

Dado que τ es una variable muda, podemos regresar a la variable t. Reescribiendo los términos anteriores:

$$ \begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t+kh)q(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}p(t-kh)\right]dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)_tD_{\infty}^{\alpha}p(t)dt \end{aligned} \tag{5.26} $$

Una vez demostrada la identidad anterior, se demuestra a continuación que al utilizar la derivada fraccionaria (5.7) se conserva la energía en (5.20). La conservación de la energía implica que se cumple:

$$ \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dt = 0 \tag{5.27} $$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad anterior:

$$ \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}u^*udt = \int_{-\infty}^{\infty}(u^*u_z + uu_z^*)dt \tag{5.28} $$

Despejando de (5.20) u_z y usando la definición (5.7):

$$ u_z = \frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)[_{-\infty}D_t^{\alpha}u + (-1)^{\alpha}{}_tD_{\infty}^{\alpha}u] + i\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + i|u|^2u - i\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - i|u|^4u \tag{5.29} $$

Debido a la expresión de $\varepsilon(\alpha)$, se cumple:

$$\varepsilon(\alpha)(-1)^{\alpha} = -e^{-i\alpha\pi/2}e^{i\alpha\pi} = -e^{i\alpha\pi/2} = \varepsilon^{*}(\alpha) \tag{5.30}$$

Por lo que (5.29) resulta:

$$u_z = \frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}u + i\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + i|u|^2u - i\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - i|u|^4u \tag{5.31}$$

Así, se calcula la integral (5.28):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}(u^{*}u_z + uu_z^{*})dt = \int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[&\frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u^{*}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u^{*}{}_tD_{\infty}^{\alpha}u + iu^{*}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\\
&+ i|u|^2u^{*}u - i\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u^{*}u - i|u|^4u^{*}u\\
&- \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u_{-\infty}D_t^{\alpha}u^{*} - \frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u_tD_{\infty}^{\alpha}u^{*} - iu\frac{\partial^4 u^{*}}{\partial t^4}\\
&- i|u|^2uu^{*} + i\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}uu^{*} + i|u|^4uu^{*}\Bigg]dt\\
= \int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[&\frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u^{*}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u^{*}{}_tD_{\infty}^{\alpha}u + iu^{*}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\\
&- \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u_{-\infty}D_t^{\alpha}u^{*} - \frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u_tD_{\infty}^{\alpha}u^{*} - iu\frac{\partial^4 u^{*}}{\partial t^4}\Bigg]dt
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Considerando que $u(z,t)$ es cero cuando $t \to \infty$ y $t \to -\infty$, se tiene el siguiente resultado al integrar por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}u^{*}u_{4t}dt - \int_{-\infty}^{\infty}uu_{4t}^{*}dt &= u^{*}u_{3t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}u_{3t}u_t^{*}dt - uu_{3t}^{*}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}u_{3t}^{*}u_tdt\\
&= -u_t^{*}u_{tt}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}u_{tt}^{*}dt + u_tu_{tt}^{*}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}^{*}u_{tt}dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}u_{tt}^{*}dt - \int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}^{*}u_{tt}dt = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Por lo anterior, (5.32) resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dt = &\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u^{*}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u^{*}{}_tD_{\infty}^{\alpha}u\right]dt\\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u_{-\infty}D_t^{\alpha}u^{*} - \frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u_tD_{\infty}^{\alpha}u^{*}\right]dt
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Dado que el lado derecho de la igualdad anterior es la suma de una integral y su complejo conjugado, se tiene:

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dt = 2\mathbb{R}e\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{2}\varepsilon(\alpha)u^{*}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \frac{i}{2}\varepsilon^{*}(\alpha)u^{*}{}_tD_{\infty}^{\alpha}u\right\}dt\right] \tag{5.35}$$

Además, $\mathbb{R}e(iz) = \mathbb{R}e(i(x+iy)) = \mathbb{R}e(ix-y) = -\mathbb{I}m(z)$. Utilizando esta igualdad y escribiendo a las funciones $u(z,t) = u_r + iu_z$ y $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$ en términos de su parte real e imaginaria:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dt &= -\mathbb{I}m\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\varepsilon(\alpha)u^*{}_{-\infty}D_t^\alpha u + \varepsilon^*(\alpha)u^*{}_tD_\infty^\alpha u\Big\}dt\Big]\\
&= -\mathbb{I}m\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)(u_r - iu_i)({}_{-\infty}D_t^\alpha u_r + i{}_{-\infty}D_t^\alpha u_i) +\\
&(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)(u_r - iu_i)({}_tD_\infty^\alpha u_r + i{}_tD_\infty^\alpha u_i)\Big\}dt\Big]\\
&= -\mathbb{I}m\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[(\varepsilon_r u_r + \varepsilon_i u_i) + i(\varepsilon_i u_r - \varepsilon_r u_i)]({}_{-\infty}D_t^\alpha u_r + i{}_{-\infty}D_t^\alpha u_i)\Big\}dt\Big]\\
&- \mathbb{I}m\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{[(\varepsilon_r u_r - \varepsilon_i u_i) - i(\varepsilon_i u_r + \varepsilon_r u_i)]({}_tD_\infty^\alpha u_r + i{}_tD_\infty^\alpha u_i)\Big\}dt\Big]\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{(\varepsilon_r u_r + \varepsilon_i u_i){}_{-\infty}D_t^\alpha u_i + (\varepsilon_i u_r - \varepsilon_r u_i){}_{-\infty}D_t^\alpha u_r\\
&+ (\varepsilon_r u_r - \varepsilon_i u_i){}_tD_\infty^\alpha u_i - (\varepsilon_i u_r + \varepsilon_r u_i){}_tD_\infty^\alpha u_r\Big\}dt\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\varepsilon_r(u_r{}_{-\infty}D_t^\alpha u_i - u_i{}_tD_\infty^\alpha u_r) + \varepsilon_r(u_r{}_tD_\infty^\alpha u_i - u_i{}_{-\infty}D_t^\alpha u_r)\Big\}dt\\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\varepsilon_i(u_i{}_{-\infty}D_t^\alpha u_i - u_i{}_tD_\infty^\alpha u_i) + \varepsilon_i(u_r{}_{-\infty}D_t^\alpha u_r - u_r{}_tD_\infty^\alpha u_r)\Big\}dt
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

Finalmente, usando la identidad (5.21), se eliminan término a término los sumandos anteriores, por lo que se conserva la energía.

Capítulo 6

Ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias

En el Capítulo 1 se presentó el desarrollo para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que contienen derivadas enteras, así que al tener sistemas físicos que en su descripción contienen derivadas fraccionarias, sería de gran utilidad dar las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que contengan derivadas tanto de orden entero como de orden fraccionario.

6.1. Ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria para una variable independiente

Para obtener la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a una lagrangiana que involucra derivadas fraccionarias, se sigue un procedimiento similar al presentado en la Sección 1.1. Se define la siguiente funcional:

$$S = \int_{\infty}^{\infty} \mathscr{L}(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, {}_{-\infty}D_t^{\alpha} y(t), \ldots, {}_t D_{\infty}^{\alpha} y(t), \ldots) dt \tag{6.1}$$

donde esta vez la integral es sobre todo $\Re$ y la lagrangiana depende de derivadas fraccionarias tanto izquierdas como derechas de $y(t)$. Se define ahora a una familia de curvas cercanas a $y(t)$:

$$y(t, \gamma) = y(t) + \gamma \delta y(t) \tag{6.2}$$

con δy definida como en la Sección 1.1. Reescribiendo la integral (6.1) considerando a $y(t, \gamma)$, se tiene a S en función de γ:

$$S(\gamma) = \int_{\infty}^{\infty} \mathscr{L}(y(t, \gamma), \dot{y}(t, \gamma), \ldots, {}_{-\infty}D_t^{\alpha} y(t, \gamma), \ldots, {}_t D_{\infty}^{\alpha} y(t, \gamma), \ldots) dt \tag{6.3}$$

Derivando la ecuación anterior respecto al parámetro γ:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{d\gamma} &= \frac{d}{d\gamma} \int_{\infty}^{\infty} \mathscr{L}(y(t, \gamma), \dot{y}(t, \gamma), \ldots, {}_{-\infty} D_t^{\alpha} y(t, \gamma), \ldots, {}_t D_{\infty}^{\alpha} y(t, \gamma), \ldots) dt \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathscr{L}(y(t, \gamma), \dot{y}(t, \gamma), \ldots, {}_{-\infty} D_t^{\alpha} y(t, \gamma), \ldots, {}_t D_{\infty}^{\alpha} y(t, \gamma), \ldots) dt \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \gamma} \ldots + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} \frac{\partial y_{-\alpha t}}{\partial \gamma} + \ldots + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{+\alpha t}} \frac{\partial y_{+\alpha t}}{\partial \gamma} + \ldots \right] dt
\end{aligned} \tag{6.4}$$

donde $y_{-\alpha t}$ y $y_{+\alpha t}$ son las derivadas fraccionarias izquierda y derecha, respectivamente. Por otro lado, tomando la derivada fraccionaria ${}_{-\infty}D_t^{\alpha}$ de (6.2):

$$y_{-\alpha t}(t, \alpha) = y_{-\alpha t}(t) + \gamma(\delta y(t))_{-\alpha t} \tag{6.5}$$

Así, al derivar (6.5) ahora respecto a γ:

$$\frac{\partial y_{-\alpha t}}{\partial \gamma} = (\delta y(t))_{-\alpha t} \tag{6.6}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial y_{+\alpha t}}{\partial \gamma} = (\delta y(t))_{+\alpha t} \tag{6.7}$$

Se sigue el procedimiento previo para derivadas de órdenes mayores. Entonces, sustituyendo lo anterior en (6.4):

$$\frac{dS}{d\gamma} = \int_{\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \partial y + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} (\dot{\delta y}) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} (\ddot{\delta y}) + \ldots + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} {}_{-\infty}D_t^{\alpha} \delta y + \ldots + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{+\alpha t}} {}_{t}D_{\infty}^{\alpha} \delta y + \ldots \right] dt \tag{6.8}$$

En la Sección 1.1 se presenta la integración por partes de los términos sin derivadas fraccionarias. Para el caso de las derivadas fraccionarias, usando la identidad (5.21) se tiene lo siguiente:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} {}_{-\infty}D_t^{\alpha} \delta y dt = \int_{\infty}^{\infty} \delta y {}_{t}D_{\infty}^{\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} dt \tag{6.9}$$

Usando los resultados de la integración por partes y de la identidad (5.21), (6.8) está dada por:

$$\begin{aligned}
&\int_{\infty}^{\infty} \Bigg[\delta y \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \delta y \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \delta y \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} + \ldots \\
&+ \delta y {}_{t}D_{\infty}^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} \right) + \ldots + \delta y {}_{-\infty}D_t^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{+\alpha t}} \right) + \ldots \Bigg] dt \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \Bigg[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} + \ldots \\
&+_{t} D_{\infty}^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} \right) + \ldots +_{-\infty} D_t^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{+\alpha t}} \right) + \ldots \Bigg] \delta y dt
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Recordando que la condición para que S tenga un valor extremal es igualar la integral anterior a cero, entonces dado que se requiere que sea válido $\forall \delta y$, se llega a la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} + \ldots +_{t} D_{\infty}^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} \right) + \ldots +_{-\infty} D_t^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{+\alpha t}} \right) + \ldots = 0 \tag{6.11}$$

Cuando se tiene una lagrangiana $\mathscr{L}(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), {}_{-\infty}D_t^{\alpha} y(t), {}_{t} D_{\infty}^{\alpha} y(t))$, que involucra derivadas enteras de primer y segundo órdenes, y derivadas fraccionarias izquierda y derecha de orden α, la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria correspondiente es:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{y}} +_{t} D_{\infty}^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{-\alpha t}} \right) +_{-\infty} D_t^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{+\alpha t}} \right) = 0 \tag{6.12}$$

6.2. Ejemplo de ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias

Considérese la siguiente lagrangiana, con $u = u(t,z)$ y $z = z(t,z)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{2}i(vu_z - uv_z) + u_{tt}v_{tt} + \frac{1}{2}u^2v^2 - \frac{1}{3}u^3v^3 + \frac{1}{\alpha}\gamma(\alpha)u^\alpha v^\alpha \\ &+ \frac{1}{4}\left\{u[\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^\alpha v + \varepsilon(\alpha)_t D_\infty^\alpha v] + v[\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^\alpha u + \varepsilon^*(\alpha)_t D_\infty^\alpha u]\right\}\end{aligned} \tag{6.13}$$

donde se ha definido:

$$\varepsilon(\alpha) = -e^{-i\alpha\pi/2} \qquad \text{y} \qquad \gamma(\alpha) = -\sin(\alpha\pi) \tag{6.14}$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en las Secciones 1.2 y 1.3, se deducen fácilmente las expresiones de las ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias para lagrangianas con dos variables independientes y con dos funciones dependientes. Las ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias para la lagrangiana $\mathscr{L}(u, u_z, u_{tt}, {}_{-\infty}D_t^\alpha u, {}_t D_\infty^\alpha u, v, v_z, v_{tt}, {}_{-\infty}D_t^\alpha v, {}_t D_\infty^\alpha v)$ anterior son:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}} + {}_{-\infty}D_t^\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\right) + {}_t D_\infty^\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\right) = 0 \tag{6.15a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}} + {}_{-\infty}D_t^\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right) + {}_t D_\infty^\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right) = 0 \tag{6.15b}$$

donde se ha definido:

$$\begin{aligned}u_{-\alpha t} &\equiv {}_{-\infty}D_t^\alpha u(z,t), \quad & v_{-\alpha t} &\equiv {}_{-\infty}D_t^\alpha v(z,t) \\ u_{+\alpha t} &\equiv {}_t D_\infty^\alpha u(z,t), \quad & v_{+\alpha t} &\equiv {}_t D_\infty^\alpha v(z,t)\end{aligned} \tag{6.16}$$

Entonces, al sustituir la lagrangiana (6.13) en la ecuación de Euler-Larange fraccionaria (6.15b)(se presentan los cálculos de cada sumando explícitamente):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v} &= \frac{1}{2}iu_z + u^2v - u^3v^2 + \gamma(\alpha)u^\alpha v^{\alpha-1} + \frac{1}{4}\left[\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^\alpha u + \varepsilon^*(\alpha)_t D_\infty^\alpha u\right] \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z} &= -\frac{1}{2}iu \Longrightarrow -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z} = \frac{1}{2}iu_z \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}} &= u_{tt} \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}} = u_{4t} \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}} &= \frac{1}{4}\varepsilon(\alpha)u \Longrightarrow {}_{-\infty}D_t^\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^\alpha u \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}} &= \frac{1}{4}\varepsilon^*(\alpha)u \Longrightarrow {}_t D_\infty^\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_\infty^\alpha u\end{aligned} \tag{6.17}$$

Considerando a $v(z,t)$ como el complejo conjugado de $u(z,t)$, entonces se dan las igualdades:

$$\begin{aligned}
&u^2v - u^3v^2 = uuu^* - uuu^*uu^* = |u|^2u - |u|^4u \\
&\gamma(\alpha)u^\alpha v^{\alpha-1} = \gamma(\alpha)u^\alpha u^{*(\alpha-1)} = \gamma(\alpha)\frac{(uu^*)^\alpha}{u^*}\frac{u}{u} = -\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u \\
&-\frac{1}{4}e^{-i\alpha\pi/2}{}_{-\infty}D_t^\alpha u - \frac{1}{4}e^{i\alpha\pi/2}{}_tD_\infty^\alpha u - \frac{1}{4}e^{-i\alpha\pi/2}{}_{-\infty}D_t^\alpha u - \frac{1}{4}e^{i\alpha\pi/2}{}_tD_\infty^\alpha u \\
&= -\frac{1}{2}e^{-i\alpha\pi/2}[{}_{-\infty}D_t^\alpha u + (e^{i\pi})^\alpha{}_tD_\infty^\alpha u] = -\frac{1}{2}e^{-i\alpha\pi/2}[{}_{-\infty}D_t^\alpha u + (-1)^\alpha{}_tD_\infty^\alpha u]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Por los cálculos anteriores, finalmente se obtiene:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - e^{-i\alpha\pi/2}D^\alpha u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2u - \sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - |u|^4u = 0 \tag{6.19}$$

La ecuación anterior es la ecuación *NLS fraccionaria* (5.20).

Capítulo 7

Teorema de Noether Fraccionario

En el Capítulo anterior se obtuvo la lagrangiana (6.13), que contiene derivadas de orden fraccionario, por lo que ahora se busca formular un Teorema de Noether aplicado a lagrangianas que contienen derivadas de orden fraccionario.

7.1. Enunciados del Teorema de Noether Fraccionario

A continuación se mencionan dos formas de enunciar el Teorema de Noether Fraccionario, después de ir restringiendo el problema.

7.1.1. Enunciado 1 del Teorema de Noether Fraccionario

Si se tiene una densidad lagrangiana dependiente de dos funciones complejas $u(z,t)$, $v(z,t)$ y de las derivadas:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(u, u_z, u_{tt}, u_{-\alpha t}, u_{+\alpha t}, v, v_z, v_{tt}, v_{-\alpha t}, v_{+\alpha t}) \tag{7.1}$$

y la integral de acción dada por:

$$S[u,v] = \iint_\Omega \mathscr{L}(u, u_z, u_{tt}, u_{-\alpha t}, u_{+\alpha t}, v, v_z, v_{tt}, v_{-\alpha t}, v_{+\alpha t}) dtdz \tag{7.2}$$

con:

$$\Omega = \{(z,t)|z_1 < z < z_2, t_1 < t < t_2\}$$

es tal que satisface la condición de invariancia:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} \mathscr{L}(u, u_z, u_{tt}, u_{-\alpha t}, u_{+\alpha t}, v, v_z, v_{tt}, v_{-\alpha t}, v_{+\alpha t}) dtdz \\
&= \iint\limits_{\Omega^\dagger} \mathscr{L}(u^\dagger, u^\dagger_{z^\dagger}, u^\dagger_{t^\dagger t^\dagger}, u^\dagger_{-\alpha t^\dagger}, u^\dagger_{+\alpha t^\dagger}, v^\dagger, v^\dagger_{z^\dagger}, v^\dagger_{t^\dagger t^\dagger}, v^\dagger_{-\alpha t^\dagger}, v^\dagger_{+\alpha t^\dagger}) dt^\dagger dz^\dagger
\end{aligned} \tag{7.3}$$

ante la transformación infinitesimal:

$$\begin{aligned}
z^\dagger &= z + \eta\xi_1 \\
t^\dagger &= t + \eta\xi_2 \\
u^\dagger &= u + \eta\phi_1(u) \\
v^\dagger &= v + \eta\phi_2(v)
\end{aligned}$$

entonces se cumple la siguiente *ley de conservación*:

$$\eta\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z}+\frac{\partial Q_2}{\partial t}\right)+[f_1^{(u)}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta u)-\delta u_t D_{\infty}^{\alpha}f_1^{(u)}]+[f_2^{(u)}({}_tD_{\infty}^{\alpha}\delta u)-\delta u_{-\infty}D_t^{\alpha}f_2^{(u)}]$$
$$+[f_1^{(v)}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta v)-\delta v_t D_{\infty}^{\alpha}f_1^{(v)}]+[f_2^{(v)}({}_tD_{\infty}^{\alpha}\delta v)-\delta v_{-\infty}D_t^{\alpha}f_2^{(v)}]=0 \tag{7.4}$$

donde:

$$f_1^{(u)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}},\qquad f_1^{(v)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}} \tag{7.5}$$

$$f_2^{(u)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}},\qquad f_2^{(v)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}} \tag{7.6}$$

$$Q_1=\xi_1\mathscr{L}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v \tag{7.7}$$

$$Q_2=\xi_2\mathscr{L}-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta v) \tag{7.8}$$

$$\delta u=u^{\dagger}(z,t)-u(z,t),\qquad \delta v=v^{\dagger}(z,t)-v(z,t) \tag{7.9}$$

Fin del teorema.

Integrando (7.4) sobre t, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\eta\left[\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_1dt+Q_2\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right]\\
&+\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^{(u)}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta u^*dt-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta u^*{}_tD_{\infty}^{\alpha}f_1^{(u)}dt\\
&+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^{(u)}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta u^*dt-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta u^*{}_tD_{\infty}^{\alpha}f_2^{(u)}dt\\
&+\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^{(v)}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta v^*dt-\int_{-\infty}^{\infty}\delta v^*{}_tD_{\infty}^{\alpha}f_1^{(v)}dt\\
&+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^{(v)}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta v^*dt-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta v^*{}_tD_{\infty}^{\alpha}f_2^{(v)}dt=0
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Usando la identidad (5.21), se cancelan las últimas ocho integrales de (7.10), obteniéndose:

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_1dt+Q_2\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0 \tag{7.11}$$

Entonces, si:

$$\lim_{t\to\pm\infty}Q_2=0 \tag{7.12}$$

para toda z, (7.11) implica:

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}Q_1dt=0 \tag{7.13}$$

por lo que la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_1 dt \tag{7.14}$$

tendrá un valor constante a lo largo de z. Es por esto que se le llama a (7.4) ley de conservación.

7.1.2. Simplificación de la condición de invariancia

Derivando (2.22), se obtiene:

$$u^*_{-\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = u_{-\alpha t}(z,t) + \eta\, {}_{-\infty}D_t^\alpha \phi_1(u(z,t)) \tag{7.15a}$$
$$v^*_{-\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = v_{-\alpha t}(z,t) + \eta\, {}_{-\infty}D_t^\alpha \phi_2(v(z,t)) \tag{7.15b}$$
$$u^*_{+\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = u_{+\alpha t}(z,t) + \eta\, {}_tD_\infty^\alpha \phi_1(u(z,t)) \tag{7.15c}$$
$$v^*_{+\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = v_{+\alpha t}(z,t) + \eta\, {}_tD_\infty^\alpha \phi_2(v(z,t)) \tag{7.15d}$$

Se debe observar que en el caso general, en el cual $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ son funciones arbitrarias de u y v, las derivadas fraccionarias:

$${}_{-\infty}D_t^\alpha \phi_1(u(z,t)), \quad {}_{-\infty}D_t^\alpha \phi_2(v(z,t)), \quad {}_tD_\infty^\alpha \phi_1(u(z,t)), \quad {}_tD_\infty^\alpha \phi_2(v(z,t)) \tag{7.16}$$

son complicadísimas, ya que para calcular la derivada fraccionaria de una composición de funciones no se usa simplemente la regla de la cadena. Es decir:

$${}_{-\infty}D_t^\alpha \phi_1(u(z,t)) \neq \frac{\partial \phi_1}{\partial u}\, {}_{-\infty}D_t^\alpha u(z,t) \tag{7.17}$$

En el caso finito, la derivada fraccionaria de una composición de funciones viene dada por [18]:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha F(h(t)) =& \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} F(h(t)) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{k!(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{m=1}^{k} F^{(m)}(h(t)) \sum \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(t)}{r!}\right)^{a_r} \end{aligned} \tag{7.18}$$

donde la suma $\sum$ se extiende sobre todas las combinaciones de enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que:

$$\sum_{r=1}^{k} r a_r = k \quad \text{y} \quad \sum_{r=1}^{k} a_r = m \tag{7.19}$$

Sin embargo, para los dos casos particulares de valores de $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ que se consideran en este trabajo, no hace falta calcular la derivada (7.18). En estos dos casos, la integral de acción resulta invariante ante la transformación infinitesimal correspondiente. Los valores de $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ que se consideran son:

$$\phi_1(u) = 0 \;\text{ y }\; \phi_2(v) = 0 \tag{7.20a}$$
$$\phi_1(u) = iu \;\text{ y }\; \phi_2(v) = -iv \tag{7.20b}$$

En el primer caso, (7.15) se reducirá a:

$$u^*_{-\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = u_{-\alpha t}(z, t) \tag{7.21a}$$
$$v^*_{-\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = v_{-\alpha t}(z, t) \tag{7.21b}$$
$$u^*_{+\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = u_{+\alpha t}(z, t) \tag{7.21c}$$
$$v^*_{+\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = v_{+\alpha t}(z, t) \tag{7.21d}$$

Además, este primer caso se partirá a su vez en otros dos casos:

1. Una traslación en el espacio.

2. Una traslación en el tiempo.

Por otro lado, en el segundo caso se tendrá:

$$u^*_{-\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = u_{-\alpha t}(z, t) + \eta i u_{-\alpha t}(z, t) \tag{7.22a}$$
$$v^*_{-\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = v_{-\alpha t}(z, t) - \eta i v_{-\alpha t}(z, t) \tag{7.22b}$$
$$u^*_{+\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = u_{+\alpha t}(z, t) + \eta i u_{+\alpha t}(z, t) \tag{7.22c}$$
$$v^*_{+\alpha t}(z^* = z + \eta\xi_1, t^* = t + \eta\xi_2) = v_{+\alpha t}(z, t) - \eta i v_{+\alpha t}(z, t) \tag{7.22d}$$

Estos tres casos son los más importantes pues nos permiten obtener la conservación de la energía, el momento y la Hamiltoniana. En cualquiera de los tres casos [(7.15), (7.21) o (7.22)] se puede seguir el mismo procedimiento presentado en la Sección 2.2.2, y llegar a que la invariancia de la acción ante transformaciones de la forma (2.1), con $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ de las formas mostradas en (7.16), conduce a:

$$\delta\mathscr{L} = 0 \tag{7.23}$$

donde $\delta\mathscr{L}$ es la parte de la expansión de la lagrangiana "variada" que es lineal en η, como se dijo al final de la Sección 2.2.2.
Por lo tanto, la condición de invariancia (2.2) se ha reducido a (7.23). Así, se expresa el Teorema de Noether Fraccionario en el Enunciado 2.

7.1.3. Enunciado 2 del Teorema de Noether Fraccionario

Si se tiene una densidad lagrangiana dependiente de dos funciones complejas $u(z, t)$, $v(z, t)$ y de las derivadas:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(u, u_z, u_{tt}, u_{-\alpha t}, u_{+\alpha t}, v, v_z, v_{tt}, v_{-\alpha t}, v_{+\alpha t}) \tag{7.24}$$

y se cumple la condición de invariancia $\delta\mathscr{L} = 0$ para la transformación infinitesimal:

$$z^\dagger = z + \eta\xi_1$$
$$t^\dagger = t + \eta\xi_2$$
$$u^\dagger = u + \eta\phi_1(u)$$
$$v^\dagger = v + \eta\phi_2(v)$$

y además se cumple que

$$\lim_{t\to\pm\infty} Q_2 = 0 \tag{7.25}$$

donde:

$$Q_2 = \xi_2\mathscr{L} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta v) \tag{7.26}$$

$$\delta u = u^\dagger(z,t) - u(z,t), \qquad \delta v = v^\dagger(z,t) - v(z,t) \tag{7.27}$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_1 dt \tag{7.28}$$

donde:

$$Q_1 = \xi_1\mathscr{L} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v \tag{7.29}$$

es una cantidad conservada (es decir, la integral (7.28) no depende de z).

7.2. Demostración del Teorema de Noether Fraccionario

La variación causada por las transformaciones (2.1a)-(2.1d) es:

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = {}& \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t \\ &+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\delta u_{-\alpha t} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\delta u_{+\alpha t} \\ &+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\delta v_{-\alpha t} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\delta v_{+\alpha t}\end{aligned} \tag{7.30}$$

Además, se tienen las igualdades:

$$\begin{gathered}\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z}\delta u, \quad \delta v_z = \frac{\partial}{\partial z}\delta v, \quad \delta u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta u, \quad \delta v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta v \\ \delta u_{-\alpha t} = {}_{-\infty}D_t^\alpha(\delta u), \quad \delta v_{-\alpha t} = {}_{-\infty}D_t^\alpha(\delta v), \quad \delta u_{+\alpha t} = {}_tD_\infty^\alpha(\delta u), \quad \delta v_{+\alpha t} = {}_tD_\infty^\alpha(\delta v)\end{gathered} \tag{7.31}$$

De (2.1a) y (2.1b), se tiene $\delta z = \eta\xi_1$ y $\delta t = \eta\xi_2$. Despejando $\partial\mathscr{L}/\partial u$ y $\partial\mathscr{L}/\partial v$ de (6.15a) y (6.15b) respectivamente, se sustituye lo anterior en (7.30) y reacomodando los términos se llega a:

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = {}& \frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{L}\eta\xi_1) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{L}\eta\xi_2) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right) \\ &- \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta u\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta v\right) \\ &- \left({}_{-\infty}D_t^\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\right)\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^\alpha(\delta u) - \left({}_{-\infty}D_t^\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right)\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^\alpha(\delta v) \\ &- \left({}_tD_\infty^\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\right)\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}{}_tD_\infty^\alpha(\delta u) - \left({}_tD_\infty^\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right)\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}{}_tD_\infty^\alpha(\delta v)\end{aligned} \tag{7.32}$$

donde se usaron las identidades:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z}\right)\delta u + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta u \tag{7.33a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}\right)\delta v + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta v \tag{7.33b}$$

Posteriormente, usando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\delta u\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)\\
-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\delta v\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta v)
\end{aligned} \tag{7.34}$$

la expresión (7.32) se escribe como:

$$\begin{aligned}
\delta \mathscr{L} = &\frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{L}\eta\xi_1) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{L}\eta\xi_2) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right)\\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta u\right)\\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta v) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta v\right)\\
&- \left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\right)\delta u + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}(\delta u) - \left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right)\delta v + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}(\delta v)\\
&- \left({}_{t}D_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\right)\delta u + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}{}_{t}D_{\infty}^{\alpha}(\delta u) - \left({}_{t}D_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right)\delta v + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}{}_{t}D_{\infty}^{\alpha}(\delta v)
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Usando las identidades:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta u\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)\right]\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta v) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta v\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta v)\right]
\end{aligned} \tag{7.36}$$

la expresión (7.35) se escribe como:

$$\begin{aligned}
\delta \mathscr{L} = &\frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{L}\eta\xi_1) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{L}\eta\xi_2) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right)\\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta v)\right]\\
&- \left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\right)\delta u + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}(\delta u) - \left({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right)\delta v + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}(\delta v)\\
&- \left({}_{t}D_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\right)\delta u + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}{}_{t}D_{\infty}^{\alpha}(\delta u) - \left({}_{t}D_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right)\delta v + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}{}_{t}D_{\infty}^{\alpha}(\delta v)
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Reagrupando términos:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\mathscr{L}\xi_1 + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v\right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\eta\mathscr{L}\xi_2 + \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) + \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta v)\right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}(\delta u) - \delta u\,{}_tD_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\right] + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}{}_tD_{\infty}^{\alpha}(\delta u) - \delta u\,{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}(\delta v) - \delta v\,{}_tD_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right] + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}{}_tD_{\infty}^{\alpha}(\delta v) - \delta v\,{}_{-\infty}D_t^{\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right]
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

Considerando las definiciones Q_n, $f_n^{(u)}$ y $f_n^{(v)}$ con $n = 1, 2$ dadas en (7.5)-(7.8), finalmente se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \eta\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t}\right) \\
&\quad + [f_1^{(u)}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta u) - \delta u\,{}_tD_{\infty}^{\alpha}f_1^{(u)}] + [f_2^{(u)}({}_tD_{\infty}^{\alpha}\delta u) - \delta u\,{}_{-\infty}D_t^{\alpha}f_2^{(u)}] \\
&\quad + [f_1^{(v)}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}\delta v) - \delta v\,{}_tD_{\infty}^{\alpha}f_1^{(v)}] + [f_2^{(v)}({}_tD_{\infty}^{\alpha}\delta v) - \delta v\,{}_{-\infty}D_t^{\alpha}f_2^{(v)}]
\end{aligned}
\tag{7.39}
$$

Entonces (7.39) coincide con (7.4), por lo que queda demostrado el Teorema de Noether Fraccionario.

7.3. Cantidades conservadas

A continuación se aplica el Teorema de Noether Fraccionario para comprobar que se conservan la energía, el momento y la Hamiltoniana en la ecuación *NLS fraccionaria* (5.20).

7.3.1. Conservación de la energía

Considérese la transformación infinitesimal:

$$z^{\dagger} = z \tag{7.40a}$$

$$t^{\dagger} = t \tag{7.40b}$$

$$u^{\dagger} = u + i\eta u \tag{7.40c}$$

$$v^{\dagger} = v - i\eta v \tag{7.40d}$$

Retomando el grupo de transformaciones (2.1a) - (2.1d), entonces para obtener la transformación infinitesimal anterior, la elección de los parámetros es:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \tag{7.41}$$

$$\phi_1(u) = iu \tag{7.42}$$

$$\phi_2(v) = -iv \tag{7.43}$$

Ahora, de (2.36) - (2.37) resulta:

$$\delta u = i\eta u \tag{7.44}$$

$$\delta v = -i\eta v \tag{7.45}$$

Además, de (2.1a) - (2.1b) se tiene:

$$\delta t = 0 \tag{7.46}$$

$$\delta z = 0 \tag{7.47}$$

Se presenta a continuación cada uno de los términos de $\delta\mathscr{L}$ (7.30) a partir de la lagrangiana (6.13):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t = 0\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z = 0\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}\delta u = \left[-\frac{1}{2}iv_z + uv^2 - u^2v^3 + \gamma(\alpha)u^{\alpha-1}v^{\alpha} + \frac{1}{4}\{\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v + \varepsilon(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}v\}\right](i\eta u)\\
&\qquad\quad = \eta\frac{1}{2}uv_z + \eta iu^2v^2 - \eta iu^3v^3 + \eta i\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha} + \eta\frac{iu}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v + \eta\frac{iu}{4}\varepsilon(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}v\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u_z = \left[\frac{1}{2}iv\right](i\eta u_z) = -\eta\frac{1}{2}u_zv\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} = [v_{tt}](i\eta u_{tt}) = \eta iu_{tt}v_{tt}\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\delta u_{-\alpha t} = \left[\frac{1}{4}v\varepsilon(\alpha)\right](i\eta_{-\infty}D_t^{\alpha}u) = \eta\frac{iv}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\delta u_{+\alpha t} = \left[\frac{1}{4}v\varepsilon^*(\alpha)\right](i\eta_tD_{\infty}^{\alpha}u) = \eta\frac{iv}{4}\varepsilon^*(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}u\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}\delta v = \left[\frac{1}{2}iu_z + u^2v - u^3v^2 + \gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha-1} + \frac{1}{4}\{\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \varepsilon^*(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}u\}\right](-i\eta v)\\
&\qquad\quad = \eta\frac{1}{2}u_zv - \eta iu^2v^2 + \eta iu^3v^3 - \eta i\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha} - \eta\frac{iv}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u - \eta\frac{iv}{4}\varepsilon^*(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}u\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v_z = \left[-\frac{1}{2}iu\right](-i\eta v_z) = -\eta\frac{1}{2}uv_z\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} = [u_{tt}](-i\eta v_{tt}) = -\eta iu_{tt}v_{tt}\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\delta v_{-\alpha t} = \left[\frac{1}{4}u\varepsilon^*(\alpha)\right](-i\eta_{-\infty}D_t^{\alpha}v) = -\eta\frac{iu}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\delta v_{+\alpha t} = \left[\frac{1}{4}u\varepsilon(\alpha)\right](-i\eta_tD_{\infty}^{\alpha}v) = -\eta\frac{iu}{4}\varepsilon(\alpha)_tD_{\infty}^{\alpha}v
\end{aligned}$$

Así, al sumar los términos anteriores se obtiene $\delta\mathscr{L} = 0$.
Observando la expresión (7.8) para Q_2, se necesitan calcular los siguientes términos a partir

de la densidad lagrangiana (6.13):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{tt}} = v_{tt} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{tt}} = u_{tt} \tag{7.48}$$

Derivando (7.44) y (7.45) respecto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta u = i\eta u_t \tag{7.49}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta v = -i\eta v_t \tag{7.50}$$

Así, (7.8) resulta:

$$Q_2 = -iuv_{ttt} + iv_{tt}u_t + ivu_{ttt} - iu_{tt}v_t \tag{7.51}$$

Considerando el Enunciado 2 del Teorema de Noether Fraccionario, dado que la densidad lagrangiana es de la forma (7.1) y $\delta\mathscr{L} = 0$, basta tener que (7.51) tienda a cero cuando $t \to \pm\infty$ para que se cumpla la condición (7.25) del Teorema de Noether Fraccionario. Existen diferentes soluciones para u y v que satisfacen lo anterior (es decir, tales que Q_2 tiende a cero cuando $t \to \pm\infty$), en particular cualquier solución localizada de (5.20) con extremos decayentes que tienden a cero cuando $t \to \pm\infty$, por lo que el Teorema de Noether Fraccionario asegura que la integral (7.28) es una cantidad conservada.
Retomando la expresión de la lagrangiana (6.13), se sigue:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_z} = \frac{i}{2}v \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z} = -\frac{i}{2}u \tag{7.52}$$

Dado que para la transformación infinitesimal considerada se tiene $\xi_1 = 0$, entonces al considerar (7.44), (7.45) y (7.52) en (7.7):

$$Q_1 = -uv = -|u|^2 \tag{7.53}$$

Pero la energía es la integral de $|u|^2$ sobre el tiempo, por lo que:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dt \tag{7.54}$$

es una cantidad que se conserva.

7.3.2. Conservación del momento

Considérese la transformación infinitesimal:

$$z^\dagger = z \tag{7.55a}$$

$$t^\dagger = t + \eta \tag{7.55b}$$

$$u^\dagger = u \tag{7.55c}$$

$$v^\dagger = v \tag{7.55d}$$

Retomando el grupo de transformaciones (2.1a) - (2.1d), entonces para obtener la transformación infinitesimal anterior, la elección de los parámetros es:

$$\xi_1 = 0 \tag{7.56}$$

$$\xi_2 = 1 \tag{7.57}$$

$$\phi_1(u) = \phi_2(v) = 0 \tag{7.58}$$

Ahora, de (2.36) - (2.37) resulta:

$$\delta u = -\eta u_t \tag{7.59}$$

$$\delta v = -\eta v_t \tag{7.60}$$

Además, de (2.1a) - (2.1b) se tiene:

$$\delta t = \eta \tag{7.61}$$

$$\delta z = 0 \tag{7.62}$$

Se presenta a continuación cada uno de los términos en (7.30) para $\delta\mathscr{L}$ a partir de la lagrangiana (6.13):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t &= \eta\frac{i}{2}v_t u_z + \eta\frac{i}{2}v u_{tz} - \eta\frac{i}{2}u_t v_z - \eta\frac{i}{2}u v_{tz} + \eta u_{3t}v_{tt} + \eta u_{tt}v_{3t} + \eta u u_t v^2 + \eta u^2 v v_t \\
&\quad - \eta u^2 u_t v^3 - \eta u^3 v^2 v_t + \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha-1}u_t v^{\alpha} + \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha-1}v_t \\
&\quad + \eta\frac{u_t}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v + \eta\frac{u_t}{4}\varepsilon(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}v + \eta\frac{u}{4}\varepsilon^*(\alpha)\frac{\partial}{\partial t}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}v + \eta\frac{u}{4}\varepsilon(\alpha)\frac{\partial}{\partial t}{}_t D_{\infty}^{\alpha}v \\
&\quad + \eta\frac{v_t}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \eta\frac{v_t}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}u + \eta\frac{v}{4}\varepsilon(\alpha)\frac{\partial}{\partial t}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \eta\frac{v}{4}\varepsilon^*(\alpha)\frac{\partial}{\partial t}{}_t D_{\infty}^{\alpha}u \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z &= 0 \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}\delta u &= \eta\frac{i}{2}u_t v_z - \eta u u_t v^2 + \eta u^2 u_t v^3 - \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha-1}u_t v^{\alpha} - \eta\frac{u_t}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v - \eta\frac{u_t}{4}\varepsilon(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}v \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u_z &= -\eta\frac{i}{2}u_{tz}v \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} &= -\eta u_{3t}v_{tt} \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\delta u_{-\alpha t} &= -\eta\frac{v}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u_t \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\delta u_{+\alpha t} &= -\eta\frac{v}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}u_t \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}\delta v &= -\eta\frac{i}{2}u_z v_t - \eta u^2 v v_t + \eta u^3 v^2 v_t - \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha-1}v_t - \eta\frac{v_t}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u - \eta\frac{v_t}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}u \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v_z &= \eta\frac{i}{2}u v_{tz} \\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} &= -\eta u_{tt}v_{3t}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\delta v_{-\alpha t} = -\eta\frac{u}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^\alpha v_t$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\delta v_{+\alpha t} = -\eta\frac{u}{4}\varepsilon(\alpha)_t D_\infty^\alpha v_t$$

Así, dado que para cada derivada fraccionaria se cumple ${}_tD_\infty^\alpha u_t = \partial/\partial t({}_tD_\infty^\alpha u)$, al sumar los términos anteriores se obtiene $\delta\mathscr{L} = 0$.
Derivando (7.59) y (7.60) respecto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta u = -\eta u_{tt} \tag{7.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta v = -\eta v_{tt} \tag{7.64}$$

Así, (7.8) resulta:

$$Q_2 = \mathscr{L} - 2u_{tt}v_{tt} + v_t u_{ttt} + u_t v_{ttt} \tag{7.65}$$

Considerando el Enunciado 2 del Teorema de Noether Fraccionario, dado que la densidad lagrangiana es de la forma (7.1) y $\delta\mathscr{L} = 0$, para aquellas funciones tales que (7.65) tienda a cero cuando $t \to \pm\infty$, el Teorema de Noether Fraccionario asegura que la integral (7.28) es una cantidad conservada.
Dado que para la transformación infinitesimal considerada se tiene $\xi_1 = 0$, entonces al considerar (7.52), (7.59) y (7.60) en (7.7):

$$Q_1 = \frac{i}{2}(uv_t - vu_t) \tag{7.66}$$

Pero el momento es la integral de $i(uv_t - vu_t)$ sobre el tiempo, por lo que:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} i(uv_t - vu_t)dt \tag{7.67}$$

es una cantidad que se conserva.

7.3.3. Conservación de la Hamiltoniana

Considérese la transformación infinitesimal:

$$z^\dagger = z + \eta \tag{7.68a}$$
$$t^\dagger = t \tag{7.68b}$$
$$u^\dagger = u \tag{7.68c}$$
$$v^\dagger = v \tag{7.68d}$$

Retomando el grupo de transformaciones (2.1a) - (2.1d), entonces para obtener la transformación infinitesimal anterior, la elección de los parámetros es:

$$\xi_1 = 1 \tag{7.69}$$

$$\xi_2 = \phi_1(u) = \phi_2(v) = 0 \tag{7.70}$$

De (2.36) - (2.37) resulta:

$$\delta u = -\eta u_z \tag{7.71}$$

$$\delta v = -\eta v_z \tag{7.72}$$

Además, de (2.1a) - (2.1b) se tiene:

$$\delta t = 0 \tag{7.73}$$

$$\delta z = \eta \tag{7.74}$$

Se presenta a continuación cada uno de los términos en (7.30) para $\delta\mathscr{L}$ a partir de la lagrangiana (6.13):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t = 0\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\delta z = \eta\frac{i}{2}v_z u_z + \eta\frac{i}{2}v u_{zz} - \eta\frac{i}{2}u_z v_z - \eta\frac{i}{2}u v_{zz} + \eta u_{ttz}v_{tt} + \eta u_{tt}v_{ttz} + \eta u u_z v^2 + \eta u^2 v v_z\\
&\qquad - \eta u^2 u_z v^3 - \eta u^3 v^2 v_z + \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha-1}u_z v^{\alpha} + \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha-1}v_z\\
&\qquad + \eta\frac{u_z}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v + \eta\frac{u_z}{4}\varepsilon(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}v + \eta\frac{u}{4}\varepsilon^*(\alpha)\frac{\partial}{\partial z}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}v + \eta\frac{u}{4}\varepsilon(\alpha)\frac{\partial}{\partial z}{}_t D_{\infty}^{\alpha}v\\
&\qquad + \eta\frac{v_z}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u + \eta\frac{v_z}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}u + \eta\frac{v}{4}\varepsilon(\alpha)\frac{\partial}{\partial z}{}_{-\infty}D_t^{\alpha}u\eta + \frac{v}{4}\varepsilon^*(\alpha)\frac{\partial}{\partial z}{}_t D_{\infty}^{\alpha}u\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u}\delta u = \eta\frac{i}{2}u_z v_z - \eta u u_z v^2 + \eta u^2 u_z v^3 - \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha-1}u_z v^{\alpha} - \eta\frac{u_z}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v - \eta\frac{u_z}{4}\varepsilon(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}v\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u_z = -\eta\frac{i}{2}u_{zz}v\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} = -\eta u_{ttz}v_{tt}\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{-\alpha t}}\delta u_{-\alpha t} = -\eta\frac{v}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u_z\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{+\alpha t}}\delta u_{+\alpha t} = -\eta\frac{v}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}u_z\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}\delta v = -\eta\frac{i}{2}u_z v_z - \eta u^2 v v_z + \eta u^3 v^2 v_z - \eta\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha-1}v_z - \eta\frac{v_z}{4}\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}u - \eta\frac{v_z}{4}\varepsilon^*(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}u\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v_z = \eta\frac{i}{2}u v_{zz}\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} = -\eta u_{tt}v_{ttz}\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\delta v_{-\alpha t} = -\eta\frac{u}{4}\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D_t^{\alpha}v_z\\
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\delta v_{+\alpha t} = -\eta\frac{u}{4}\varepsilon(\alpha)_t D_{\infty}^{\alpha}v_z
\end{aligned} \tag{7.75}$$

Así, dado que para cada derivada fraccionaria se cumple ${}_tD^{\alpha}_{\infty}u_z = \partial/\partial z({}_tD^{\alpha}_{\infty}u)$, al sumar los términos anteriores se obtiene $\delta\mathscr{L} = 0$.
Derivando (7.71) y (7.72) respecto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta u = -\eta u_{zt} \tag{7.76}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta v = -\eta v_{zt} \tag{7.77}$$

Así, (7.8) resulta:

$$Q_2 = v_z u_{ttt} + u_z v_{ttt} - u_{tt}v_{zt} - v_{tt}u_{zt} \tag{7.78}$$

Dado que la densidad lagrangiana es de la forma (7.1) y $\delta\mathscr{L} = 0$, para aquellas funciones tales que (7.78) tienda a cero cuando $t \to \pm\infty$, el Teorema de Noether Fraccionario asegura que la integral (7.28) es una cantidad conservada.
Ahora bien, como para la transformación infinitesimal considerada se tiene $\xi_1 = 1$, entonces al considerar (7.71) y (7.72) en (7.7) se sigue:

$$-Q_1 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z}\delta v_z - \xi_1\mathscr{L} \tag{7.79}$$

Por otro lado, en mecánica clásica la función Hamiltoniana $\mathscr{H}$ asociada a una lagrangiana $\mathscr{L}(q,\dot{q})$ es:

$$\mathscr{H} = \sum_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathscr{L} \tag{7.80}$$

Debido a que en el caso de la ecuación *NLS fraccionaria* (5.20) la variable de evolución no es t, sino z, y además se tiene u_z y v_z en lugar de $\dot{q}_i$, entonces (7.79) es la densidad Hamiltoniana $\mathscr{H}$ asociada a la densidad lagrangiana $\mathscr{L}$. Así, a partir de (6.13):

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_z} = \frac{1}{2}iv \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z} = -\frac{1}{2}iu \tag{7.81}$$

por lo que la expresión (7.79) resulta:

$$\mathscr{H} = -Q_1 = \frac{1}{2}i(vu_z - uv_z) - \mathscr{L} \tag{7.82}$$

Sustituyendo la densidad lagrangiana $\mathscr{L}$ dada por (6.13) en (7.82):

$$\begin{aligned}\mathscr{H} = -Q_1 &= -u_{tt}v_{tt} - \frac{1}{2}u^2v^2 + \frac{1}{3}u^3v^3 - \frac{1}{\alpha}\gamma(\alpha)u^{\alpha}v^{\alpha}\\ &- \frac{1}{4}\left\{u[\varepsilon^*(\alpha)_{-\infty}D^{\alpha}_t v + \varepsilon(\alpha)_t D^{\alpha}_{\infty}v] + v[\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D^{\alpha}_t u + \varepsilon^*(\alpha)_t D^{\alpha}_{\infty}u]\right\}\end{aligned} \tag{7.83}$$

Así, a partir de (7.78), se tiene que para soluciones localizadas con colas que tienden a cero cuando $t \to \pm\infty$, la Hamiltoniana $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{H}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}i(vu_z - uv_z) - \mathscr{L}\right]dt \tag{7.84}$$

es una cantidad que se conserva.

Capítulo 8

La derivada de Riesz-Feller

En las aplicaciones en que las funciones utilizadas sean reales, y aparezca una derivada fraccionaria de un orden α cercano a 2, es frecuente introducir otra derivada fraccionaria: la derivada de Riesz-Feller. La derivada de Riesz-Feller se define como [21]:

$$\frac{d^\alpha u}{d|t|^\alpha} \equiv -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\left[{}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u\right] \tag{8.1}$$

Es interesante investigar si se puede usar esta derivada fraccionaria en (5.20), en lugar de la derivada fraccionaria (5.7), que es la que se ha usado hasta ahora. Pero antes de investigar esto, conviene entender por qué se introduce el factor $-1/\cos(\alpha\pi/2)$ en la definición (8.1). Para entender esto, se calcula la transformada de Fourier de ${}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u$ y, como se verá a continuación, calcular la derivada de esta suma de derivadas fraccionarias es un poco largo.
En el Capítulo 4 se definió la derivada fraccionaria derecha de Grünwald-Letnikov de orden α:

$${}_t^{GL}D_b^\alpha u(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha}{r}u(t+rh) \equiv \lim_{h\to 0} u_h^{(\alpha)}(t), \qquad \text{con} \quad nh := b-t \tag{8.2}$$

Se tiene la siguiente identidad para los coeficientes binomiales:

$$\binom{\alpha}{r} = \binom{\alpha-1}{r} + \binom{\alpha-1}{r-1} \tag{8.3}$$

Entonces, considerando la identidad anterior:

$$\begin{aligned}
u_h^{(\alpha)}(t) &= \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}u(t+rh) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r-1}u(t+rh)\\
&= \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}u(t+rh) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r'=0}^{n-1}(-1)^{r'+1}\binom{\alpha-1}{r'}u(t+[r'+1]h)\\
&= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}u(t+nh) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}\{-u(t+[r+1]h)+u(t+rh)\}\\
&= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}u(b) + \frac{(-1)}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{\alpha-1}{r}\Delta u(t+rh)
\end{aligned} \tag{8.4}$$

donde $u(t+nh) \equiv u(b)$ y $\Delta u(t+rh) \equiv u(t+[r+1]h) - u(t+rh)$. Ahora, considérese (8.3) en la forma:

$$\binom{\alpha-1}{r} = \binom{\alpha-2}{r} + \binom{\alpha-2}{r-1} \tag{8.5}$$

por lo que (8.4) resulta:

$$\begin{aligned}
u_h^{(\alpha)}(t) &= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}u(b) + \frac{(-1)}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{\alpha-2}{r}\Delta u(t+rh)\\
&+ \frac{(-1)}{h^\alpha}\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r\binom{\alpha-2}{r-1}\Delta u(t+rh)\\
&= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}u(b) + \frac{(-1)}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{\alpha-2}{r}\Delta u(t+rh)\\
&+ \frac{(-1)}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{r+1}\binom{\alpha-2}{r}\Delta u(t+[r+1]h)\\
&= \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-1}{n}u(b) + \frac{(-1)^n}{h^\alpha}\binom{\alpha-2}{n-1}\Delta u(b-h)\\
&+ \frac{(-1)^2}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{\alpha-2}{r}\{\Delta u(t+[r+1]h) - \Delta u(t+rh)\}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Análogamente, se define $\Delta^2 u(t+rh) \equiv \Delta u(t+[r+1]h) - \Delta u(t+rh)$. Generalizando:

$$\begin{aligned}
u_h^{(\alpha)}(t) &= (-1)^n\sum_{k=0}^{m}\binom{\alpha-k-1}{n-k}h^{-\alpha}\Delta^k u(b-kh)\\
&+ \frac{(-1)^{m+1}}{h^\alpha}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{\alpha-m-1}{r}\Delta^{m+1}u(t+rh)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Analizando el k-ésimo término de la primera suma:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (-1)^n\binom{\alpha-k-1}{n-k}h^{-\alpha}\Delta^k u(b-kh)\\
&= (-1)^n\binom{\alpha-k-1}{n-k}h^{-\alpha+k}\frac{\Delta^k u(b-kh)}{h^k}\\
&= (-1)^n\binom{\alpha-k-1}{n-k}(n-k)^{\alpha-k}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\alpha-k}(nh)^{-\alpha+k}\frac{\Delta^k u(b-kh)}{h^k}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Considerando que:

$$\binom{\alpha-k-1}{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{(-\alpha+k+1)(-\alpha+k+2)\ldots(-\alpha+n)}{(n-k)!} \tag{8.9}$$

entonces:

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{\alpha-k-1}{n-k} &= (-1)^{2n-k}\frac{(-\alpha+k+1)(-\alpha+k+2)\dots(-\alpha+n)}{(n-k)!} \\ &= (-1)^{-k}\frac{(-\alpha+k+1)(-\alpha+k+2)\dots(-\alpha+n)}{(n-k)!}\end{aligned} \tag{8.10}$$

Además, de (8.2) se tiene que $nh = b-t$, por lo que:

$$S_1 = (b-t)^{-\alpha+k}(-1)^{-k}\frac{(-\alpha+k+1)(-\alpha+k+2)\dots(-\alpha+n)}{(n-k)!}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\alpha-k}\frac{\Delta^k u(b-kh)}{h^k} \tag{8.11}$$

Por otro lado, se tienen los límites:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{(-\alpha+k+1)(-\alpha+k+2)\dots(-\alpha+n)}{(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\alpha-k} = 1 \\ &\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k u(b-kh)}{h^k} = u^{(k)}(b)\end{aligned} \tag{8.12}$$

Así, el límite cuando $n\to\infty$ y $h\to 0$ de la primera suma es:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{m}(b-t)^{-\alpha+k}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\alpha+k+1)}u^{(k)}(b). \tag{8.13}$$

Considerando ahora la segunda suma de (8.7), entonces al tomar el límite cuando $n\to\infty$ y $h\to 0$ se obtiene:

$$S_2 = \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_t^b(\tau-t)^{m-\alpha}u^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{8.14}$$

Al integrar por partes:

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\left[(\tau-t)^{m-\alpha}u^{(m)}(\tau)\Big|_t^b - \int_t^b(m-\alpha)(\tau-t)^{m-\alpha-1}u^{(m)}(\tau)d\tau\right] \\ &= \frac{(-1)^{m+1}(b-t)^{m-\alpha}u^{(m)}(b)}{\Gamma(-\alpha+m+1)} - \frac{(-1)^{m+1}(m-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha+1)}\int_t^b(\tau-t)^{m-\alpha-1}u^{(m)}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{8.15}$$

y como:

$$\frac{z}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{\Gamma(z)} \tag{8.16}$$

entonces:

$$S_2 = (b-t)^{m-\alpha}\frac{(-1)^m(-1)}{\Gamma(-\alpha+m+1)}u^{(m)}(b) - \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_t^b(\tau-t)^{m-\alpha-1}u^{(m)}(\tau)d\tau \tag{8.17}$$

Por lo que al sumar $S_1 + S_2$:

$$ {}_tD_b^\alpha u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (b-t)^{-\alpha+k} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-\alpha+k+1)} u^{(k)}(b) + \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(\tau) d\tau \tag{8.18} $$

con $m-1 \leq \alpha < m$. Tomando $b = \infty$ y suponiendo que $u^{(k)}(\infty) = 0$, (8.18) resulta:

$$ \begin{aligned} {}_tD_\infty^\alpha u(t) &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^\infty (\tau - t)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{(-1)^m (-1)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^\infty (t-\tau)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{(-1)^{-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^\infty (t-\tau)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{8.19} $$

Definiendo:

$$ g(t-\tau) = \begin{cases} \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} & \text{si } \tau > t \quad \text{, es decir, } t-\tau < 0 \\ 0 & \text{si } \tau < t \quad \text{, es decir, } t - \tau > 0 \end{cases} \tag{8.20} $$

Entonces (8.19) es:

$$ {}_tD_\infty^\alpha u(t) = (-1)^{-\alpha-1} \int_{-\infty}^\infty g(t-\tau)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(\tau) d\tau = (-1)^{-\alpha-1} g(t) * u^{(m)}(t) \tag{8.21} $$

donde $*$ denota la convolución. Por otro lado, se considera la integral:

$$ \begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} e^{st} dt &= -\int_\infty^0 \frac{(-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty (-\tau)^{m-\alpha-1} e^{-s\tau} d\tau \\ &= \frac{(-1)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty \tau^{m-\alpha-1} e^{-s\tau} d\tau = \frac{(-1)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \Gamma(m-\alpha) s^{-(m-\alpha)} \\ &= (-1)^{m-\alpha-1} s^{\alpha-m} \end{aligned} \tag{8.22} $$

De (8.20), se obtiene:

$$ g(t) = \begin{cases} \frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{8.23} $$

por lo que (8.22) se puede escribir como:

$$ \int_{-\infty}^\infty g(t) e^{st} dt = (-1)^{m-\alpha-1} s^{\alpha-m} \tag{8.24} $$

Realizando el cambio de variable $s = i\omega$:

$$ \int_{-\infty}^\infty g(t) e^{i\omega t} dt = (-1)^{m-\alpha-1} (i\omega)^{\alpha-m} = \mathfrak{F}[g(t)] \tag{8.25} $$

De (8.21) y (8.25) se llega a:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[{}_tD_\infty^\alpha u] &= (-1)^{-\alpha-1}\mathfrak{F}[g(t)*u^{(m)}(t)] = (-1)^{-\alpha-1}\mathfrak{F}[g(t)]\mathfrak{F}[u^{(m)}(t)]\\ &= (-1)^{-\alpha-1}(-1)^{m-\alpha-1}(i\omega)^{\alpha-m}(-i\omega)^m\mathfrak{F}[u(t)] = (-1)^{2m}(-1)^{-2\alpha}(i\omega)^\alpha\mathfrak{F}[u(t)]\\ &= (i\omega)^\alpha\mathfrak{F}[u(t)] = (i\omega)^\alpha U(\omega)\end{aligned} \tag{8.26}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado para obtener (8.26):

$$\mathfrak{F}[{}_{-\infty}D_t^\alpha u] = (-i\omega)^\alpha U(\omega) \tag{8.27}$$

Entonces:

$$\mathfrak{F}[{}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u] = [(-i)^\alpha + i^\alpha]\omega^\alpha U(\omega) \tag{8.28}$$

pero:

$$\begin{aligned}(-i)^\alpha + i^\alpha = e^{-i\alpha\pi/2} + e^{i\alpha\pi/2} &= \cos(\alpha\pi/2) - i\sin(\alpha\pi/2) + \cos(\alpha\pi/2) + i\sin(\alpha\pi/2)\\ &= 2\cos(\alpha\pi/2)\end{aligned} \tag{8.29}$$

así:

$$\mathfrak{F}[{}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u] = 2\cos(\alpha\pi/2)\omega^\alpha U(\omega) \tag{8.30}$$

Si comparamos esta ecuación con el resultado usual:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = (-i\omega)^n\mathfrak{F}[f] \tag{8.31}$$

se verá que hay un cierto parecido, pero hay 2 diferencias importantes:

(a) en el miembro derecho de (8.30) aparece ω^α, mientras que en el miembro derecho de (8.31) aparece $(-i\omega)^n$,

(b) en el miembro derecho de (8.30) aparece el factor: $2\cos(\alpha\pi/2)$, mientras que ningún factor similar aparece en el miembro derecho de (8.31).

La diferencia (a) es debida a que en la definición (8.1) de la derivada de Riesz no se ha incluido el factor $(-1)^\alpha$ enfrente de la derivada derecha.
Por otro lado, la diferencia (b) sugiere que en vez de considerar la suma ${}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u$ se considere el operador:

$$\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}({}_\infty D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u) \tag{8.32}$$

pues la transformada de este operador ya es más similar a la ecuación (8.31).
Finalmente, conviene poner un factor (-1) enfrente de (8.32), pues así la ecuación:

$$\mathfrak{F}\left[-\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\left({}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u\right)\right] = -\omega^\alpha U(\omega) \tag{8.33}$$

toma una forma similar a la expresión (8.31) cuando $\alpha = 2$.

8.1. Conservación de la energía

Al utilizar la derivada fraccionaria (8.1), en general no se conserva la energía en (5.20), pero cuando el coeficiente $\varepsilon(\alpha)$ que se ha puesto enfrente de la derivada fraccionaria en (5.20) es simplemente una constante real, la energía si se conserva, como se muestra a continuación. Usando la derivada fraccionaria de Riesz (8.1), el término u_z dado por (5.29) es:

$$u_z = -\frac{i}{2\cos(\alpha\pi/2)}\left[\varepsilon(\alpha)_{-\infty}D_t^\alpha u + \varepsilon(\alpha)_t D_\infty^\alpha u\right] + i\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + i|u|^2 u - i\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - i|u|^4 u \tag{8.34}$$

Realizando un análisis similar al mostrado en la Sección 5.3, la integral (5.28) resulta:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2 dt\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2\cos(\alpha\pi/2)}\Big\{[\varepsilon(\alpha)u^*][_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u] - [\varepsilon^*(\alpha)u][_{-\infty}D_t^\alpha u^* + {}_tD_\infty^\alpha u^*]\Big\}dt\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2\cos(\alpha\pi/2)}\Big\{(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)(u_r - iu_i)(_{-\infty}D_t^\alpha u_r + i_{-\infty}D_t^\alpha u_i + {}_tD_\infty^\alpha u_r + i_tD_\infty^\alpha u_i)\\
&-(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)(u_r + iu_i)(_{-\infty}D_t^\alpha u_r - i_{-\infty}D_t^\alpha u_i + {}_tD_\infty^\alpha u_r - i_tD_\infty^\alpha u_i)\Big\}dt
\end{aligned}\tag{8.35}$$

donde las funciones $u(z,t) = u_r + iu_z$ y $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$ se escriben en términos de su parte real e imaginaria. Se presenta el desarrollo del producto de los términos entre llaves:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)(u_r - iu_i)(_{-\infty}D_t^\alpha u_r + i_{-\infty}D_t^\alpha u_i + {}_tD_\infty^\alpha u_r + i_tD_\infty^\alpha u_i) &=\\
\varepsilon_r u_{r-\infty}D_t^\alpha u_r + i\varepsilon_r u_{r-\infty}D_t^\alpha u_i + \varepsilon_r u_{rt}D_\infty^\alpha u_r + i\varepsilon_r u_{rt}D_\infty^\alpha u_i&\\
-i\varepsilon_r u_{i-\infty}D_t^\alpha u_r + \varepsilon_r u_{i-\infty}D_t^\alpha u_i - i\varepsilon_r u_{it}D_\infty^\alpha u_r + \varepsilon_r u_{it}D_\infty^\alpha u_i&\\
+i\varepsilon_i u_{r-\infty}D_t^\alpha u_r - \varepsilon_i u_{r-\infty}D_t^\alpha u_i + i\varepsilon_i u_{rt}D_\infty^\alpha u_r - \varepsilon_i u_{rt}D_\infty^\alpha u_i&\\
+\varepsilon_i u_{i-\infty}D_t^\alpha u_r + i\varepsilon_i u_{i-\infty}D_t^\alpha u_i + \varepsilon_i u_{it}D_\infty^\alpha u_r + i\varepsilon_i u_{it}D_\infty^\alpha u_i&\\
(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)(u_r + iu_i)(_{-\infty}D_t^\alpha u_r - i_{-\infty}D_t^\alpha u_i + {}_tD_\infty^\alpha u_r - i_tD_\infty^\alpha u_i) &=\\
\varepsilon_r u_{r-\infty}D_t^\alpha u_r - i\varepsilon_r u_{r-\infty}D_t^\alpha u_i + \varepsilon_r u_{rt}D_\infty^\alpha u_r - i\varepsilon_r u_{rt}D_\infty^\alpha u_i&\\
+i\varepsilon_r u_{i-\infty}D_t^\alpha u_r + \varepsilon_r u_{i-\infty}D_t^\alpha u_i + i\varepsilon_r u_{it}D_\infty^\alpha u_r + \varepsilon_r u_{it}D_\infty^\alpha u_i&\\
-i\varepsilon_i u_{r-\infty}D_t^\alpha u_r - \varepsilon_i u_{r-\infty}D_t^\alpha u_i - i\varepsilon_i u_{rt}D_\infty^\alpha u_r - \varepsilon_i u_{rt}D_\infty^\alpha u_i&\\
+\varepsilon_i u_{i-\infty}D_t^\alpha u_r - i\varepsilon_i u_{i-\infty}D_t^\alpha u_i + \varepsilon_i u_{it}D_\infty^\alpha u_r - i\varepsilon_i u_{it}D_\infty^\alpha u_i&
\end{aligned}\tag{8.36}$$

Cancelando términos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2 dt\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2\cos(\alpha\pi/2)}(-i2\varepsilon_r u_{r-\infty}D_t^\alpha u_i - i2\varepsilon_r u_{rt}D_\infty^\alpha u_i + i2\varepsilon_r u_{i-\infty}D_t^\alpha u_r + i2\varepsilon_r u_{it}D_\infty^\alpha u_r\\
&\qquad - i2\varepsilon_i u_{r-\infty}D_t^\alpha u_r - i2\varepsilon_i u_{rt}D_\infty^\alpha u_r - i2\varepsilon_i u_{i-\infty}D_t^\alpha u_i - i2\varepsilon_i u_{it}D_\infty^\alpha u_i)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)}(-\varepsilon_r u_{r\,-\infty}D_t^\alpha u_i - \varepsilon_r u_{rt}D_\infty^\alpha u_i + \varepsilon_r u_{i\,-\infty}D_t^\alpha u_r + \varepsilon_r u_{it}D_\infty^\alpha u_r \\
&\qquad - \varepsilon_i u_{r\,-\infty}D_t^\alpha u_r - \varepsilon_i u_{rt}D_\infty^\alpha u_r - \varepsilon_i u_{i\,-\infty}D_t^\alpha u_i - \varepsilon_i u_{it}D_\infty^\alpha u_i)dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon_i}{\cos(\alpha\pi/2)}\Big(u_{r\,-\infty}D_t^\alpha u_r + u_{i\,-\infty}D_t^\alpha u_i\Big)dt
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

Así, la integral anterior no es 0 en general. Por lo tanto, la energía no se conserva en (5.20) al considerar la derivada fraccionaria de Riesz. Cuando el factor ε es una constante real, se observa que $\varepsilon_i = 0$, por lo que se obtiene de (8.37) que la energía se conserva.

8.2. Lagrangiana usando la derivada fraccionaria de Riesz-Feller

A continuación se mostrará que existe lagrangiana para una ecuación similar a (5.20), pero usando la derivada de Riesz-Feller en lugar de la derivada fraccionaria $D^\alpha u$ que se usó en (5.20) y cuando el coeficiente $\varepsilon(\alpha)$ que aparece enfrente de la derivada fraccionaria en (5.20) es simplemente una constante real. Considérese la siguiente lagrangiana, con $u = u(t,z)$ y $v = v(t,z)$:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = \frac{1}{2}i(vu_z - uv_z) + u_{tt}v_{tt} + \frac{1}{2}u^2v^2 - \frac{1}{3}u^3v^3 + \frac{1}{\alpha}\gamma(\alpha)u^\alpha v^\alpha \\
+\frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}\Big\{u[{}_{-\infty}D_t^\alpha v +{}_t D_\infty^\alpha v] + v[{}_{-\infty}D_t^\alpha u +{}_t D_\infty^\alpha u]\Big\}
\end{aligned}
\tag{8.38}
$$

con ε una constante y donde se ha definido:

$$
\gamma(\alpha) = -\sin(\alpha\pi) \tag{8.39}
$$

Para la lagrangiana $\mathscr{L}(u, u_z, u_{tt}, {}_{-\infty}D_t^\alpha u, {}_t D_\infty^\alpha u, v, v_z, v_{tt}, {}_{-\infty}D_t^\alpha v, {}_t D_\infty^\alpha v)$ anterior, las ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias están dadas por (6.15a) y (6.15b). Entonces, al sustituir la lagrangiana (8.38) en la ecuación de Euler-Larange fraccionaria (6.15b)(se presentan los cálculos de cada sumando explícitamente):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v} = \frac{1}{2}iu_z + u^2v - u^3v^2 + \gamma(\alpha)u^\alpha v^{\alpha-1} + \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}\Big[{}_{-\infty}D_t^\alpha u +{}_t D_\infty^\alpha u\Big] \\
&\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z} = -\frac{1}{2}iu \Longrightarrow -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_z} = \frac{1}{2}iu_z \\
&\quad\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}} = u_{tt} \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{tt}} = u_{4t} \\
&\quad\quad\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}} = \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}u \Longrightarrow {}_{-\infty}D_t^\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{+\alpha t}}\right) = \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}{}_{-\infty}D_t^\alpha u \\
&\quad\quad\quad\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}} = \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}u \Longrightarrow {}_t D_\infty^\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v_{-\alpha t}}\right) = \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}{}_t D_\infty^\alpha u
\end{aligned}
\tag{8.40}
$$

Considerando a $v(z,t)$ como el complejo conjugado de $u(z,t)$, entonces se dan las igualdades:

$$
\begin{aligned}
&u^2v - u^3v^2 = uuu^* - uuu^*uu^* = |u|^2u - |u|^4u \\
&\gamma(\alpha)u^\alpha v^{\alpha-1} = \gamma(\alpha)u^\alpha u^{*(\alpha-1)} = \gamma(\alpha)\frac{(uu^*)^\alpha}{u^*}\frac{u}{u} = -\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u \\
&-\frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}{}_{-\infty}D_t^\alpha u - \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}{}_tD_\infty^\alpha u - \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}{}_{-\infty}D_t^\alpha u - \frac{\varepsilon}{4\cos(\alpha\pi/2)}{}_tD_\infty^\alpha u \\
&= -\frac{\varepsilon}{2\cos(\alpha\pi/2)}[{}_{-\infty}D_t^\alpha u + {}_tD_\infty^\alpha u]
\end{aligned}
\tag{8.41}
$$

Por los cálculos anteriores, finalmente se obtiene:

$$
i\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon\frac{d^\alpha u}{d|t|^\alpha} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2u - \sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}u - |u|^4u = 0 \tag{8.42}
$$

lo cual demuestra que esta ecuación es deducible de una lagrangiana.

8.3. Teorema de Noether Fraccionario (con derivada de Riesz-Feller)

En el Capítulo 7 se estudió el Teorema de Noether Fraccionario para densidades lagrangianas de la forma (7.1), aplicándolo a la lagrangiana (6.13) correspondiente a la ecuación *NLS fraccionaria* (5.20) y obteniendo la conservación de la energía, momento y la Hamiltoniana. En la Sección 8.3 se obtuvo la lagrangiana (8.38) correspondiente a la ecuación *NLS fraccionaria* (8.42) cuando se considera la derivada de Riesz-Feller. Así, como la lagrangiana (8.38) es de la forma (7.1), se puede aplicar el Teorema de Noether Fraccionario. Observando el desarrollo efectuado en el Capítulo 7 para obtener la conservación de la energía, momento y la Hamiltoniana, se obtienen los mismos resultados de conservación de energía y momento para la lagrangiana (8.38). Para la conservación de la Hamiltoniana, como (7.84) es función de la lagrangiana, simplemente se considera la lagrangiana (8.38) en (7.84), obteniéndose así la conservación de la Hamiltoniana.

Conclusiones

En este trabajo se demostró que el Teorema de Noether puede ser generalizado de manera que sea aplicable a ecuaciones diferenciales parciales *fraccionarias* (*EDPFs*) que pueden ser deducidas de lagrangianas fraccionarias de la forma:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(u(z,t), u_z, u_{tt}, {}_{-\infty}D_t^{\alpha}u, {}_tD_{\infty}^{\alpha}u, v(z,t), v_z, v_{tt}, {}_{-\infty}D_t^{\alpha}v, {}_tD_{\infty}^{\alpha}v) \tag{9.1}$$

donde $u(z,t)$ y $v(z,t)$ pueden ser funciones reales o complejas, z y t son variables reales (donde z juega el papel de variable de evolución y t es la variable "transversal"), ${}_{-\infty}D_t^{\alpha}u$ y ${}_{-\infty}D_t^{\alpha}v$ son derivadas fraccionarias *izquierdas*, ${}_tD_{\infty}^{\alpha}u$ y ${}_tD_{\infty}^{\alpha}v$ son derivadas fraccionarias *derechas.*

La versión fraccionaria del Teorema de Noether que se demostró en esta tesis establece la relación entre cantidades conservadas e invariancias de la integral de acción ante transformaciones infinitesimales relativamente senciallas, de la forma (2.1a)-(2.1d). No se ha intentado aquí formular un Teorema de Noether Fraccionario asociado a transformaciones infinitesimales de tipo general, tales como las que consideró Emmy Noether en su trabajo. Hasta donde yo sé, tal cosa no se ha hecho hasta este momento.

Además, se buscó escribir un trabajo que sea de utilidad para todo aquél que tenga la formación de una licenciatura en matemáticas y que desee comprender *con todo detalle* cómo obtener las cantidades conservadas en una *EDPF* deducible de una lagrangiana de la forma (9.1) mediante una generalización fraccionaria del Teorema de Noether. Para ello se ha procurado poner en esta tesis *todo el material necesario* para entender cómo se formula, cómo se demuestra y cómo se usa este Teorema de Noether Fraccionario; material que aunque no se ve en los cursos obligatorios de la licenciatura en matemáticas, debe ser perfectamente comprensible para alguien que sale de esta licenciatura. Esto implica que en esta tesis se ha procurado explicar con claridad las siguientes cosas:

a) Cómo se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange "tradicionales" (es decir, cuando no entra en juego ninguna *derivada fraccionaria*) en el caso en que la lagrangiana involucre varias funciones, que dependen de varias variables independientes y en la lagrangiana hay derivadas de órdenes superiores (es decir, no sólo de primer orden).

b) En qué consiste el Teorema de Noether "tradicional", es decir, aplicable a ecuaciones diferenciales parciales que sólo contienen derivadas "normales"(es decir, no fraccionarias).

c) Cómo surge el concepto de *integral fraccionaria.*

d) Qué son las *derivadas fraccionarias* (*DFs*).

e) Por qué existen *DFs izquierdas* y *derechas.*

f) En qué difieren las definiciones de *DFs* propuestas por Riemann y Liouville, Caputo, Grünwlad-Letnikov y Riesz-Feller.

g) Cómo se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange cuando la lagrangiana contiene *DFs* izquierdas y derechas.

h) Cómo se demuestra que la variación de la lagrangiana es cero ($\delta\mathscr{L} = 0$) cuando se tienen lagrangianas de la forma (9.1).

i) Cuál es la ecuación no lineal de Schrödinger (*NLS*), qué describe y de dónde surge.

j) Cómo se generaliza la ecuación *NLS* tradicional introduciendo derivadas fraccionarias.

Se introdujo la ecuación *NLS* en este trabajo, ya que existe una generalización fraccionaria de esta ecuación, que puede deducirse de una Lagrangian de la forma (9.1). Esta ecuación *NLS* fraccionaria es, pues, un buen ejemplo para aplicar el Teorema de Noether Fraccionario estudiado en esta tesis. Sobre las derivadas fraccionarias que aparecen en esta ecuación se han considerado dos opciones: en primer lugar se consideran las derivadas de Grünwald-Letnikov, ya que son las derivadas fraccionarias que más facilitan los cálculos numéricos. Posteriormente se consideró qué pasa si en la ecuación *NLS* fraccionaria se usa la derivada de Riesz-Feller, la cual se usa frecuentemente cuando se quiere reemplazar una segunda derivada por una derivada fraccionaria de un orden cercano a 2. Se encontró que si en la ecuación *NLS* fraccionaria (5.20) se reemplaza la derivada fraccionaria por una derivada de Riesz-Feller *la energía no se conserva*, por lo que la derivada de Riesz-Feller no parece ser "tan buena" como la derivada (5.7). Sin embargo, también se demostró que si se reemplaza la derivada (5.7) por la derivada de Riesz-Feller (8.1) y además se cambia la función que aparece enfrente de la derivada fraccionaria por una constante, entonces sí se conserva la energía, además la ecuación es deducible de una lagrangiana del tipo mostrado en (9.1) y las leyes de conservación de la energía, el momento y la Hamiltoniana se pueden deducir mediante el Teorema de Noether Fraccionario desarrollado en este trabajo.

Se espera que este trabajo ponga al Teorema de Noether (Fraccionario y no Fraccionario) al alcance de muchos matemáticos y físicos que no habían encontrado un texto en el que se explicara este teorema de manera sencilla en un número reducido de páginas. Hay textos excelentes (como el de Bluman y Kumei: *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, 1989) que presentan el Teorema de Noether en su forma más general, de manera muy cuidadosa y clara, ¡pero hay que leer 250 páginas antes de poder entender el enunciado del teorema! Además, aquí no sólo se explica de manera sencilla la idea básica del teorema original (no fraccionario), sino que se explica cómo extender este teorema al caso nada trivial en el cual se tiene una lagrangiana que contiene derivadas fraccionarias izquierdas y derechas, del tipo mostrado en (9.1).

Por último, se espera que este trabajo contribuya, aunque sea de manera pequeña, a despertar el interés en el Teorema de Emmy Noether y en sus nuevas generalizaciones fraccionarias.

REFERENCIAS

[1] G.S.F. Frederico and D.F.M. Torres, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 834-846.

[2] G.S.F. Frederico and D.F.M. Torres, Nonlinear Dyn. 53 (2008) 215-222.

[3] G.S.F. Frederico and D.F.M. Torres, arXiv: 1001. 4507v1 [math.OC] 25 Jan 2010.

[4] S.I. Muslih, arXiv: 1003. 0653v1 [math-ph] 2 Mar 2010.

[5] J. Fujioka, (a) Commun. Frac. Calc. 1 (2010) 1-14.

[6] S.T. Thornton y J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Thomson Brooks/Cole, USA, 2004.

[7] L.Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Editorial MIR, Moscú, 1997.

[8] G.W. Bluman y S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, 1989.

[9] R. Courant y J. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Vol. 2, Limusa, 1978.

[10] M. Alonso y E.J. Finn, *FISICA Vol. II: Campos y Ondas*, Fondo Educativo Interamericano, 1970.

[11] J. Fujioka, *NLS: una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger*, serie FENOMEC, UNAM, México, 2003.

[12] R.F. Rodríguez, J. Fujioka, A. Espinoza y S. González, *Embedded solitons in liquid crystals and other optical systems*, Cap. 7 del libro: *Recent Research Developments in Physics*, Vol. 8, Transworld Research Network, India, 2009.

[13] R.F. Rodríguez, J.A. Reyes, A. Espinoza-Cerón, J. Fujioka y B.A. Malomed, Phys. Rev. E 68 (2003) 036606.

[14] M. Caputo, *Elasticitá e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.

[15] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava y J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 2006.*

[16] A. K. Grünwald, *Über begrenzte Derivationen und deren Anwendung*, Z. für Math. und Phys. 12 (1867), pp. 441-442.

[17] A. V. Letnikov, *Theory of differentiation with arbitrary index (Russian)*, Mat. Sb. 3 (1868), pp. 1-66.

[18] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.

[19] A. Espinosa-Cerón, J. Fujioka y A. Goméz-Rodríguez, Physica Scripta 67 (2003) 314-324.

[20] J. Fujioka, A. Espinosa y R.F. Rodríguez, Phys. Lett. A 374 (2010) 1126-1134.

[21] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, G. Pagnini y P. Paradisi, Chem. Phys. 284 (2002) 521-541.