



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conjuntos Dominantes Convexos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

KARINA GARCÍA BUENDÍA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA



México DF 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

II

1. Datos del alumno

Karina

García

Buendía

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

2. Datos del tutor

Dra. Rita Esther

Zuazua

Vega

3. Datos del sinodal 1

Dr. Juan José

Montellano

Ballesteros

4. Datos del sinodal 2

Dra. Diana

Avella

Alaminos

5. Datos del sinodal 3

Dra. Ana Paulina

Figueroa

Gutiérrez

6. Datos del sinodal 4

Dr. César

Hernández

Cruz

7. Datos del trabajo escrito

Conjuntos Dominantes Convexos

2015

Índice general

1. Preliminares	3
1.1. Subgráficas	6
1.2. Ejemplos de gráficas	7
1.3. Operaciones de gráficas	9
1.4. Isomorfismo y homomorfismo	11
1.5. Vecindad abierta, cerrada y vecinos privados	15
1.6. Gráficas cúbicas	16
2. Conjuntos dominantes en gráficas	21
2.1. Dominación en gráficas	21
2.2. Distintos tipos de dominación en gráficas	24
2.3. Distintas dominaciones	27
2.4. Dominación y morfismos	31
3. Vizing y la dominación convexa	33
3.1. La conjetura de Vizing para la dominación convexa	33
3.2. Un dominante en el producto cartesiano	34
4. Dominación convexa	37
4.1. Estrella como dominante convexo	37
4.2. Dominantes perfectos y gráficas cúbicas	40
4.3. Dominante convexo con diámetro 2	41
4.4. Relación entre las dominaciones	43
Bibliografía	47
Índice de figuras	49

Introducción

El concepto de dominación en teoría de gráficas, tiene su origen en los años setenta. Desde entonces, hasta nuestros días, este tema ha tomado gran importancia y ha sido estudiado ampliamente, como podemos ver en los innumerables artículos que continuamente aparecen. Un excelente libro para introducirse en el tema es el de Haynes, Hedetniemi y Slater: *Fundamentals of Domination in Graphs* [14] de finales de los noventa.

La teoría de dominación clásica ha sido modificada con nuevas hipótesis o condiciones a los conjuntos dominantes, lo que ha enriquecido este concepto y ha dado lugar a diferentes versiones en la teoría.

En este trabajo, nosotros nos enfocaremos en el estudio de los conjuntos dominantes convexos. El concepto de dominación convexa fue definido, en comunicación privada, por el Profesor Jerzy Topp, de Gdańsk, Polonia. La primera publicación que existe sobre este tema, es realizada por Magdalena Lemańska, (también de Gdańsk, Polonia), en su trabajo *Weakly convex and convex domination numbers*, publicado en 2004 [9].

El presente trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se da una introducción a los conceptos básicos, definiciones y notación que se utilizarán en el resto del texto. Al final de este capítulo se hace un estudio de las gráficas cúbicas que será fundamental para el desarrollo del capítulo cuatro.

El segundo capítulo muestra algunas variaciones al concepto de dominación clásica, se definen la dominación conexa, débilmente convexa y convexa de una gráfica y se presentan algunos resultados que comparan estos conceptos para gráficas clásicas como ciclos, trayectorias y gráficas bipartitas (sec. 2.3).

En el capítulo tres presentamos algunos resultados sobre la conjetura de Vizing y se demuestra que para conjuntos dominantes convexos, la conjetura de Vizing se satisface para todo caso. Este resultado fue dado originalmente por Lemańska.

La parte más importante de este trabajo es el capítulo cuatro. En este capítulo se corrigen errores encontrados en los Teoremas 4 y 5 del trabajo original [9] de Lemańska, dando lugar a los Teoremas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4. Los errores del trabajo original se basaron en el hecho de no haber realizado un estudio previo de propiedades de las gráficas cúbicas, mismo que nosotros realizamos al final del capítulo uno.

Terminamos este trabajo con el Teorema 4.6 que nos da condiciones para que el número de dominación de gráficas cúbicas coincida con el número de dominación convexa.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo definimos los conceptos básicos de Teoría de Gráficas y presentamos algunos resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1. Una **gráfica** G consiste de un conjunto finito no vacío de objetos o elementos llamados vértices o puntos, que denotamos con V , junto con un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V , que llamamos arcos o aristas; al conjunto de aristas lo indicamos con E . Así, denotamos a una gráfica como $G = (V, E)$.

Observemos que en nuestra definición no existe la posibilidad de que una arista esté dada por vv para $v \in V$. Tampoco podemos tener aristas distintas que corresponden al mismo par no ordenado de vértices. Es decir, nos concentraremos en gráficas simples, sin lazos ni aristas múltiples.

Se llama orden de la gráfica a la cardinalidad del conjunto $V(G)$, y generalmente se denota como $|V| = n$. A la cardinalidad del conjunto $E(G)$ se le llama el tamaño de la gráfica, y lo denotaremos como $|E| = q$. Si $e \in E$ y $e = uv$, entonces u, v son vértices adyacentes en G . Una arista e incide en un vértice v , si el vértice es uno de los extremos de la arista e . Por otro lado, en este trabajo denotamos solo con V al conjunto de vértices de la gráfica, cuando se es claro de qué gráfica se trata. Y utilizamos E para denotar al conjunto de aristas de la gráfica de la cual se está hablando.

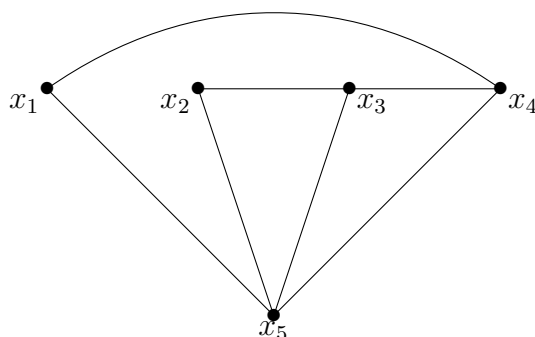


Figura 1.1: La gráfica simple $G = (V, E)$, donde $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $E = \{x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\}$

Definición 1.2. El grado de un vértice $v \in V$, escrito $d(v)$, es el número de aristas que inciden o son adyacentes a v en la gráfica G .

Si G es una gráfica simple de orden n , entonces $0 \leq d(v) \leq n - 1$ para todo $v \in V$. Un vértice con grado cero es llamado un vértice aislado, un vértice con grado $n - 1$ es llamado un vértice universal. El grado máximo de los vértices de un gráfica se denota por $\Delta(G)$ y es el número mayor de aristas que inciden en un vértice, mientras que el grado mínimo se denota por $\delta(G)$ y es el número mínimo de aristas que inciden en un vértices. En la Figura 1.1 tenemos que x_5 es un vértice universal, $d(x_5) = 4$, además $d(x_1) = d(x_2) = 2$ y $d(x_3) = d(x_4) = 3$.

Recordemos que para toda gráfica G se cumple el Lema del saludo que nos dice que la suma de los grados de los vértices de G es dos veces el número de aristas, es decir $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2q$.

Definición 1.3. En una gráfica G , un **camino** $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ es una sucesión de vértices, tal que si $0 \leq i \leq n - 1$ existe una arista $x_i x_{i+1}$. Decimos en este caso que C empieza en x_0 y termina en x_n y le llamamos un $x_0 x_n$ -camino.

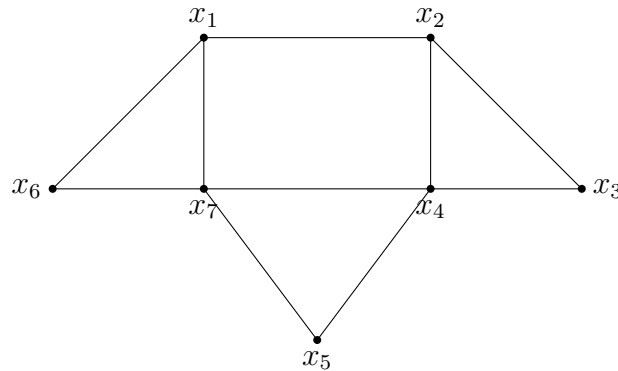


Figura 1.2: x_1x_5 -camino; $C = (x_1, x_6, x_7, x_1, x_2, x_3, x_2, x_4, x_5)$

Definición 1.4. Un **paseo** es un camino que no repite aristas.

En la Figura 1.2 tenemos al paseo $P = (x_1, x_6, x_7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Definición 1.5. Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices.

En la Figura 1.2 tenemos a $T = (x_1, x_6, x_7, x_4)$, que es una x_1x_4 -trayectoria.

Definición 1.6. Un **ciclo** es una x_0x_{n+1} -trayectoria con $n \geq 1$, tal que solo se repite el primer y el último vértice.

Definición 1.7. La **longitud de un camino** C , escrito $\ell(C)$, es el número de aristas que recorre el camino.

Observación 1.8. Así la **longitud** de una trayectoria, un paseo, etc. es el número de aristas que contiene.

En la Figura 1.2 tenemos:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (x_1, x_6, x_7, x_1) \text{ y} \\ \gamma_2 &= (x_1, x_6, x_7, x_4, x_2, x_1)\end{aligned}$$

son ciclos de tres y cinco vértices, donde su longitud es:

$$\ell(\gamma_1) = 3 \text{ y } \ell(\gamma_2) = 5$$

A las trayectorias de n vértices las denotamos con P_n , similarmente, a los ciclos de n vértices los denotamos con C_n . Observemos que la longitud o tamaño de P_n es $n - 1$. El tamaño de C_n es n con $n \geq 3$.

En la Figura 1.2 la x_1x_4 -trayectoria es un P_4 con longitud $\ell(P_4) = 3$. A los ciclos de n vértices suele llamárseles n -ciclos.

Definición 1.9. Una gráfica se dice conexa si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V$ existe una uv -trayectoria.

El concepto de conexidad nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.10. Sea G una gráfica conexa. Para dos vértices u, v de G , se define la **distancia** de u a v , escrita $d_G(u, v)$, como la longitud de una uv -trayectoria mínima en G . Es decir,

$$d_G(u, v) = \min\{\ell(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$$

Cuando se es claro de la gráfica que se está hablando, escribiremos simplemente $d(u, v)$.

1.1. Subgráficas

Definición 1.11. Una gráfica H es una **subgráfica** de una gráfica G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición 1.12. Si $V(H) = V(G)$, entonces H es una **subgráfica generadora** de G .

Dentro de las subgráficas son de gran importancia las subgráficas inducidas.

Definición 1.13. Sea $H \subset V(G)$, la **subgráfica inducida** por H , denotada $G\langle H \rangle$ se define como $V(G\langle H \rangle) = H$ y una arista $e \in E(G\langle H \rangle)$ si y sólo si $e \in E(G)$.

Definición 1.14. Dados G una gráfica y S un subconjunto de vértices de V , $G - S$ es la subgráfica inducida por $V - \{S\}$. Es decir, $G\langle V - S \rangle$ es $G - S$.

Notemos que la gráfica $G - \{v\}$ es la subgráfica inducida por $V - \{v\}$ con $v \in V$ y la denotamos con $G - v$. A lo largo de este trabajo utilizaremos dicha gráfica.

Definición 1.15. Dados G una gráfica y sea $A \subset E(G)$, la subgráfica $G - A$ es aquella que $V(G - A) = V(G)$ y $E(G - A) = E(G) - \{A\}$. Entonces ésta es una subgráfica generadora de G .

Denotaremos por $G - e$ a la subgráfica $G - \{e\}$, de lo anterior podemos decir que la subgráfica cumple que $V(G - e) = V(G)$ y $E(G - e) = E(G) - \{e\}$ con $e \in E(G)$.

1.2. Ejemplos de gráficas

En esta sección haremos un recorrido por las gráficas más conocidas y estudiadas.

Definición 1.16. Una gráfica G es **completa**, si para todo par de vértices $u, v \in V$, u y v son adyacentes.

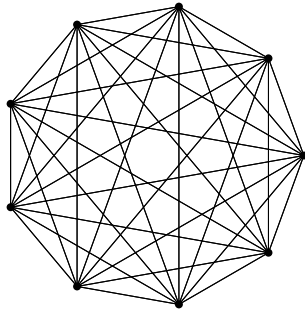


Figura 1.3: La gráfica K_9

Observación 1.17. La gráfica completa de orden p , denotada por K_p cumple que $d(v) = p - 1$ para todo $v \in V(G)$, es decir, en una gráfica completa todo vértice es universal.

Una gráfica de p vértices que no tiene aristas es llamada **gráfica nula** o discreta y se denota N_p .

Definición 1.18. Una gráfica G es **r-regular**, si para todo $v \in V$ se tiene que $d(v) = r$.

Es fácil ver que una gráfica **0-regular** es una *gráfica nula*, una gráfica **1-regular** es un conjunto de aristas no adyacentes y una gráfica **2-regular** es un conjunto de *ciclo* ajenos. A las gráficas **3-regulares** se le llama *gráficas cúbicas*.

Definición 1.19. Una **hoja o vértice final** de una gráfica G es un vértice con grado uno. Si $v \in G$ es adyacente al menos a una hoja decimos que v es un **vértice soporte**.

Denotemos al conjunto de vértices de soporte de la gráfica G como:

$$\text{sup } G = \{u \in V \mid u \text{ es vértice soporte}\}$$

Definición 1.20. Sea $u \in \text{sup } G$ y $S(u)$ el conjunto de hojas adyacentes a u :

1. Si $|S(u)| = 1$, entonces se dice que u es un soporte débil.
2. Si $|S(u)| > 1$, entonces se dice que u es un soporte fuerte.

Definición 1.21. Un **árbol** es un gráfica conexa y sin ciclos.

Todo árbol no trivial, tiene al menos dos hojas y cumple que cualesquiera dos vértices tienen una única trayectoria que los une. Podemos ver un ejemplo en la Figura 1.4.

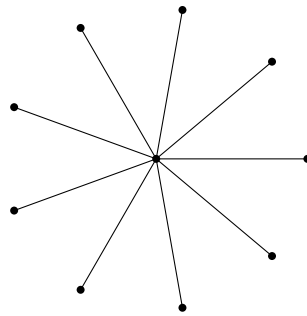


Figura 1.4: La estrella $K_{1,9}$

Definición 1.22. Una **corona** es una gráfica donde todo vértice es una hoja o un soporte débil. En este caso, el conjunto de vértices soporte $\text{sup}(G)$ se conoce como la base de la corona.

Observemos que dada una gráfica conexa H podemos construir su corona G , colgando una arista de cada vértice $v \in H$ de tal manera que $H = \text{sup}(G)$.

Definición 1.23. Una gráfica G es **bipartita**, si existe una partición del conjunto de vértices $V = X \cup Y$, tal que para toda arista $e = uv \in E(G)$, $u \in X$ y $v \in Y$. La gráfica G se denota como $G[X, Y]$.

En una gráfica bipartita $G[X, Y]$, los conjuntos de vértices X y Y son independientes, es decir las subgráficas inducidas, $G\langle X \rangle$ y $G\langle Y \rangle$ son gráficas nulas.

Definición 1.24. Si G es una gráfica bipartita $G = G[X, Y]$, tal que para toda $u \in X$, y $v \in Y$ existe la arista $uv \in E(G)$, decimos que G es una gráfica **bipartita completa**.

Si $n = |X|$ y $m = |Y|$ denotamos a la gráfica bipartita completa G como $K_{n,m}$.

Las gráficas bipartitas completas de la forma $K_{1,m}$ con $m \geq 1$ son llamadas estrellas. El centro de la estrella es un vértice soporte y universal. Como ejemplo, la Figura 1.4 muestra la estrella $K_{1,9}$.

Un árbol es una gráfica bipartita, pero no toda gráfica bipartita es un árbol. Por ejemplo, consideremos cualquier ciclo de longitud par.

1.3. Operaciones de gráficas

Hay muchas formas de obtener una nueva gráfica a partir de otras. En esta sección veremos dos operaciones muy bien conocidas y que usaremos posteriormente.

Definición 1.25. Definimos la suma de dos gráficas G_1 y G_2 , que cumplen $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, denotada por $G_1 + G_2$ como:

$$\begin{aligned} V(G_1 + G_2) &= V(G_1) \cup V(G_2) \\ E(G_1 + G_2) &= E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{ab \mid a \in V(G_1), b \in V(G_2)\} \end{aligned}$$

Definición 1.26. El producto cartesiano de dos gráficas disjuntas G_1 y G_2 , denotado por $G_1 \times G_2$, se define como:

$$\begin{aligned} V(G_1 \times G_2) &= V(G_1) \times V(G_2) \\ E(G_1 \times G_2) &= \{(a, x)(b, y) \mid a = b \text{ y } xy \in E(G_2) \text{ o } x = y \text{ y } ab \in E(G_1)\} \end{aligned}$$

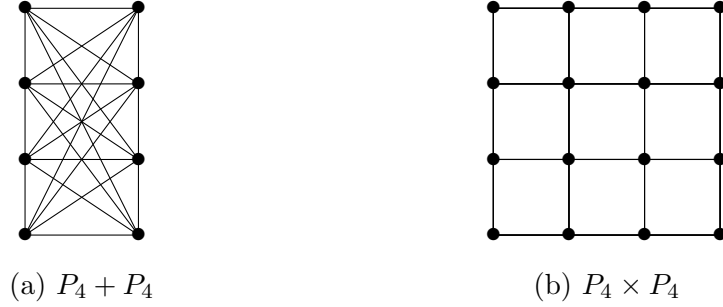


Figura 1.5: Operaciones de Gráficas

En algunos textos el producto cartesiano de dos gráficas G y H es denotado por $G \square H$. En este trabajo lo escribiremos con una cruz.

En la Figura 1.5, podemos ver la diferencia de sumar o multiplicar la trayectoria P_4 con ella misma.

Observación 1.27. Por definición del producto cartesiano tenemos que para todo $v \in V(G_1)$ podemos identificar a $\{v\} \times V(G_2)$ que es una copia de G_2 . Del mismo modo, para todo $u \in V(G_2)$ se tiene que $V(G_1) \times \{u\}$ es una copia de G_1 en el producto cartesiano.

Por otro lado, observemos que pasa con las distancias en el producto cartesiano. Ver Figura 1.6. Si $(v, u), (v', u') \in V(G_1 \times G_2)$, entonces:

$$d_{G_1}(v, v') + d_{G_2}(u, u') \leq d_{G_1 \times G_2}((v, u), (v', u'))$$

Veamos ahora que la distancia en el producto cartesiano es menor igual a la suma de las distancias en cada proyección. Sea T la proyección de $d_{G_1 \times G_2}((v, u), (v', u'))$ en G_1 , donde $T = vv'$ -trayectoria. Si $\ell(T) \neq d_{G_1}(v, v')$, entonces $d_{G_1}(v, v') + d_{G_2}(u, u') < \ell(T) + d_{G_2}(u, u') \leq d_{G_1 \times G_2}((v, u), (v', u'))$ y por la primera desigualdad, vista en el párrafo anterior, resulta una contradicción. Por lo tanto

$$d_{G_1 \times G_2}((v, u), (v', u')) = d_{G_1}(v, v') + d_{G_2}(u, u')$$

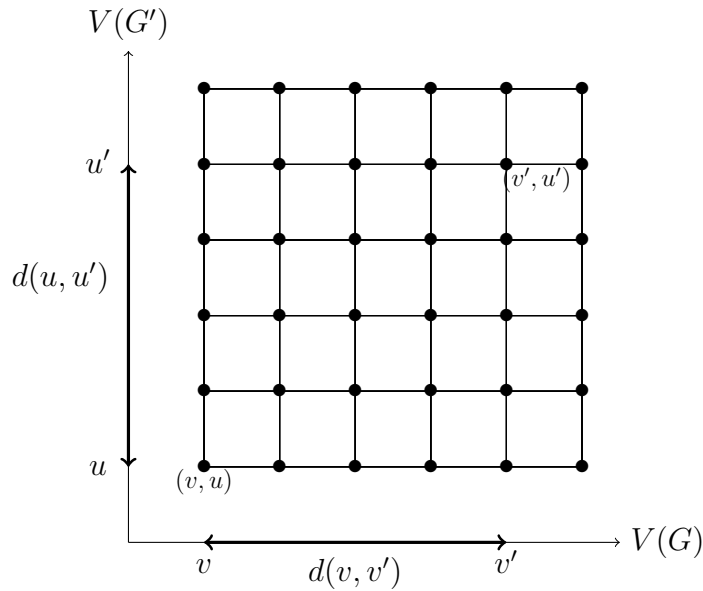


Figura 1.6: Distancia $d_{G_1 \times G_2}((v, u), (v', u'))$

1.4. Isomorfismo y homomorfismo

En esta sección estudiamos uno de los conceptos más importantes en cualquier colección de objetos o estructuras matemáticas, nos referimos al concepto de isomorfismo.

Definición 1.28. Dos gráficas G y H son **isomorfas** (tienen la misma estructura) si existe una función biyectiva $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que dos vértices u y v son adyacentes en G si y sólo si $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son adyacentes en H . A la función φ se le denomina un isomorfismo. Si G y H son isomorfas, escribimos $G \cong H$.

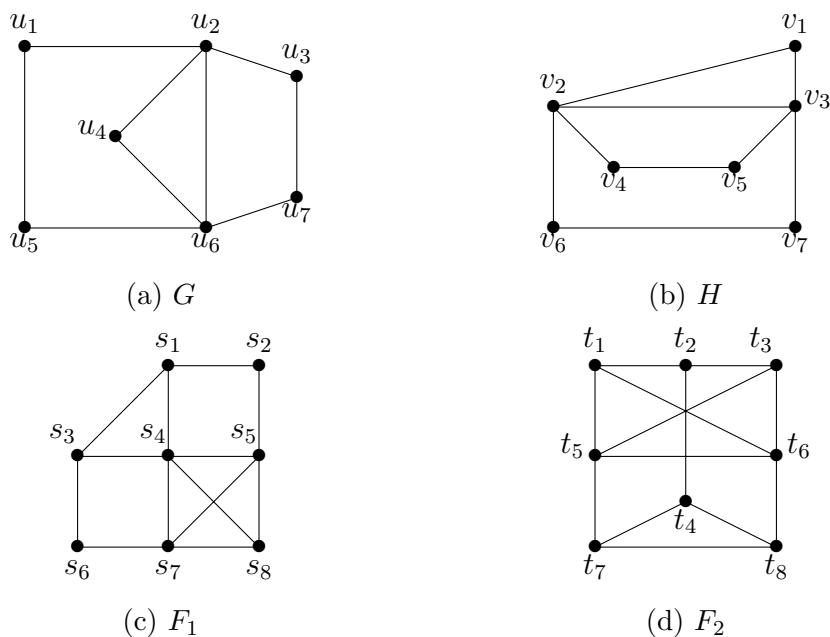


Figura 1.7: Gráficas isomorfas y no isomorfas

Las gráficas G y H de la Figura 1.7 son isomorfas ya que la función biyectiva $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ dada por: $\varphi(u_1) = v_4$, $\varphi(u_2) = v_2$, $\varphi(u_3) = v_6$, $\varphi(u_4) = v_1$, $\varphi(u_5) = v_5$, $\varphi(u_6) = v_3$, $\varphi(u_7) = v_7$ y su inversa, preservan adyacencias.

Las gráficas F_1 y F_2 de la Figura 1.7 no son isomorfas, porque los cuatro vértices s_4, s_5, s_7, s_8 inducen una subgráfica completa en F_1 y F_2 no tiene subgráficas completas de cuatro vértices. Por lo tanto no hay una función φ que sea un isomorfismo de F_1 en F_2 .

A continuación definimos el concepto de homomorfismo de gráficas, que es más débil que el de isomorfismo, ya que lo único que se le pide es que preserve adyacencias.

Definición 1.29. Un homomorfismo de una gráfica G a G' es una función $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$ tal que si $uv \in E(G)$, entonces $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$ ¹.

En este trabajo llamaremos a los homomorfismos de gráficas, morfismos.

¹ Los morfismos de gráficas preservan adyacencias, mientras los morfismos en digráficas preservan la dirección en las flechas. Así, los morfismos en digráficas son también

Observación 1.30. Si ϕ es un morfismo de G a G' y $u, v \in V(G)$ son vértices no adyacentes, entonces puede suceder cualquiera de las siguiente situaciones:

- a) $\phi(u)$ no es adyacente a $\phi(v)$
- b) $\phi(u)$ es adyacente a $\phi(v)$
- c) $\phi(u) = \phi(v)$.

Sean $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$ un morfismo y H una subgráfica de G . Entonces $\phi(H)$ es la subgráfica de G' , tal que $u' \in V(\phi(H))$ si y solo si $\phi(u) = u'$ y $u \in V(H)$, cuyo conjunto de aristas consiste de todos los $u'v' \in E(G')$, tales que $uv \in E(H)$ con $\phi(u) = u'$ y $\phi(v) = v'$. Es natural llamar a $\phi(H)$ la imagen de H bajo el morfismo ϕ .

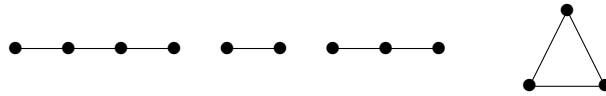


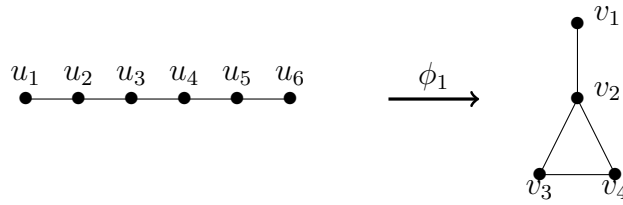
Figura 1.8: La imagen de 4 morfismos de la gráfica P_4

En la Figura 1.8 se muestra la imagen de cuatro morfismos de la gráfica P_4 . Si bien, los isomorfismos son importantes en el sentido que preservan la estructura, los morfismos nos ayudan a preservar la propiedad de adyacencia de las gráficas, lo cual generaliza dicha propiedad y nos permite observar qué sucede bajo esta función.

Veamos los siguientes ejemplos. Sea $G \cong P_6$ y G' la gráfica que se encuentra a la derecha de la Figura 1.9, definimos los morfismos de la siguiente manera:

$$\phi_i : V(G) \rightarrow V(G')$$

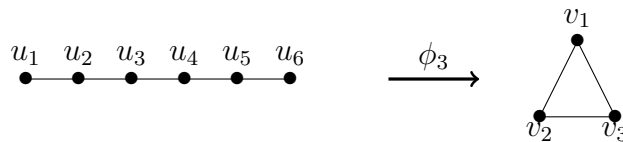
morfismos en gráficas tomando la función entre sus vértices y las adyacencias, pero no inversamente. Es importante notar que para gráficas (en general, para digráficas irreflexivas) $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$ implica que $\phi(u) \neq \phi(v)$, entonces toda arista de G' consiste de dos vértices distintos.

Figura 1.9: $\phi_1(G)$

Sea $\phi_1 : V(G) \rightarrow V(G')$ con $\phi_1(u_1) = \phi_1(u_6) = v_1$, $\phi_1(u_2) = \phi_1(u_5) = v_2$, $\phi_1(u_3) = v_3$, $\phi_1(u_4) = v_4$. En la Figura 1.9 muestra la gráfica G' que es la imagen de ϕ_1 que mapea a los vértices que no son adyacentes u_1, u_6 y u_2, u_5 a un solo punto v_1 y v_2 en G' correspondientemente, y dicha función conserva las adyacencias de P_4

Figura 1.10: $\phi_2(G) \cong P_3$

La Figura 1.10 muestra la gráfica G' tal que existe un morfismo $\phi_2 : V(G) \rightarrow V(G')$ con $\phi_2(u_1) = \phi_2(u_6) = v_1$, $\phi_2(u_2) = \phi_2(u_5) = v_2$, $\phi_2(u_3) = \phi_2(u_4) = v_3$, es decir, indica la imagen del morfismo la cual $G' \cong P_3$.

Figura 1.11: $\phi_3(G) \cong K_3$

La Figura 1.11 muestra la gráfica G' tal que existe $\phi_3 : V(G) \rightarrow V(G')$ con $\phi_3(u_1) = \phi_3(u_2) = \phi_3(u_3) = v_1$, $\phi_3(u_4) = v_2$, $\phi_3(u_5) = \phi_3(u_6) = v_3$, es decir, indica la imagen del morfismo la cual $G' \cong K_3$.

1.5. Vecindad abierta, cerrada y vecinos privados

Definición 1.31. La **vecindad abierta** de un vértice $v \in V$ es el conjunto:

$$N_G(v) = \{w \in V \mid vw \in E\}$$

La **vecindad cerrada** de $v \in V$ se define como:

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

Definición 1.32. Sea $X \subseteq V$ y $u \in X$, un vértice $v \in V$ es un **vecino privado** de u , con respecto a X , si $N_G[v] \cap X = \{u\}$.

Definición 1.33. La **vecindad abierta** de $X \subseteq V$, es el conjunto definido como $N_G(X) = \bigcup_{v \in X} N_G(v)$. La **vecindad cerrada** de $X \subseteq V$, es el conjunto definido como $N_G[X] = \bigcup_{v \in X} N_G[v]$.

La **vecindad privada** de $u \in X$ con respecto a $X \subseteq V$, es el conjunto $PN[u, X] = \{v \mid N_G[v] \cap X = \{u\}\}$, equivalentemente veamos que $PN[u, X] = N_G[u] - N_G[X - \{u\}]$. Sea $v \in PN[u, X]$ si y sólo si $N_G[v] \cap X = \{u\}$, entonces $v \in N_G[u]$ y supongamos que $v \in N_G[X - \{u\}]$. De este modo, existe $x \in N_G[v] \cap X$ y $x \neq u$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $v \notin N_G[X - \{u\}]$. Si $v \in N_G[u] - N_G[X - \{u\}]$, entonces $u \in N_G[v] \cap X$. Si $x \in N_G[v] \cap X$ y $x \neq u$, entonces $x \in X - \{u\}$ y $xv \in E$. Así, $v \in N_G[X - \{u\}]$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N_G[v] \cap X = \{u\}$.

Observación 1.34. $PN[u, X] \cap X \neq \emptyset$, si y sólo si $u \in PN[u, X]$ y u es aislado en X ; se dice que u es su propio vecino privado. Si $v \in PN[u, X]$ y $v \in V - X$, se le llama vecino privado externo de u .

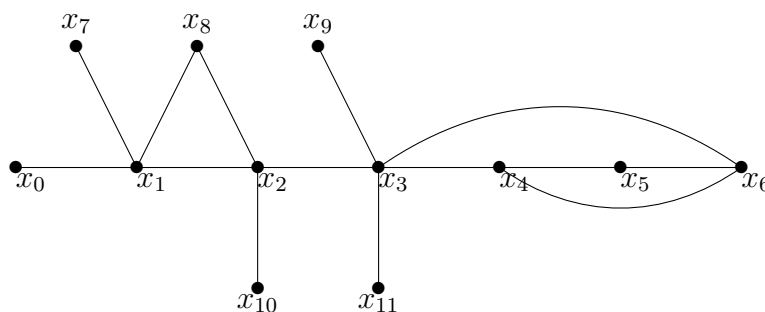


Figura 1.12: $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $S' = \{x_1, x_3, x_5, x_{10}\}$.

En la Figura 1.12 tenemos a los conjuntos $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $S' = \{x_1, x_3, x_5, x_{10}\}$. Los vecinos privados de los elementos del conjunto con respecto a S son:

$$\begin{aligned} PN[x_1, S] &= \{x_0, x_7\}, & PN[x_2, S] &= \{x_{10}\}, \\ PN[x_3, S] &= \{x_9, x_{11}\}, & PN[x_4, S] &= \emptyset, & PN[x_5, S] &= \emptyset. \end{aligned}$$

Los vecinos privados de los elementos del conjunto con respecto a S' son:

$$\begin{aligned} PN[x_1, S'] &= \{x_0, x_1, x_7, x_8\}, & PN[x_3, S'] &= \{x_3, x_9, x_{11}\}, \\ PN[x_5, S'] &= \{x_5\} & \text{y } PN[x_{10}, S'] &= \{x_{10}\}. \end{aligned}$$

1.6. Gráficas cúbicas

Para este trabajo es de nuestro interés estudiar las gráficas cúbicas y observar algunas propiedades de las mismas. Por ejemplo, la gráfica cúbica de orden menor es la completa K_4 y dicha gráfica contiene ciclos de longitud tres y de longitud 4. La siguiente proposición nos muestra que cualquier gráfica con grado mínimo mayor igual que dos, en particular las gráficas cúbicas, siempre contiene un ciclo el cual es de la longitud al menos $\delta(G) + 1$.

Proposición 1.35. *Sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$, entonces G contiene un ciclo γ de longitud al menos $\delta(G) + 1$.*

Demostración. Sea $T = (x_0, \dots, x_i)$ una trayectoria de longitud máxima en G . Entonces $N_G(x_i) \subseteq V(T)$, de lo contrario existiría a una trayectoria de

longitud mayor a T , de donde $i \geq d(x_i) \geq \delta(G)$, si $j < i$ es el índice menor en $V(T)$ con $x_i x_j \in E$, entonces existe el γ ciclo (x_j, \dots, x_i, x_j) de longitud al menos $\delta(G) + 1$, ya que todo vecino de x_i es parte de este ciclo, por lo cual la longitud de γ es al menos $\delta(x_i) + 1$. \square

Como todo vértice de una gráfica cúbica tiene grado mayor a 2, entonces las gráficas cúbicas siempre contienen al menos un ciclo de longitud mayor o igual a 4.

Lema 1.36. Si $G = (V, E)$ es una gráfica cúbica, entonces su orden es par.

Demostración. Para toda gráfica G de orden n y tamaño q , se cumple que $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2q$. Como G es una gráfica cúbica se tiene que $q = \frac{3n}{2}$. Por lo tanto $n = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$. \square

Sólo hay una gráfica cúbica con $n = 4$, ya que esta gráfica sólo tiene 6 aristas y cada vértice tiene 3 vecinos, entonces $G \cong K_4$. En esta sección demostraremos que, salvo isomorfismos, hay únicamente dos gráficas cúbicas de orden 6, ver la Figura 1.13.

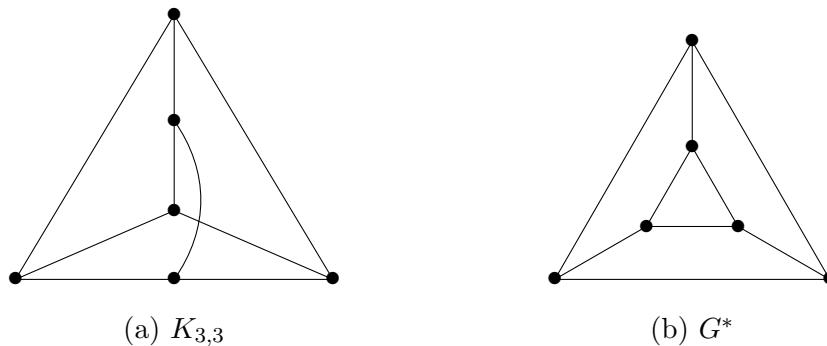


Figura 1.13: Las 2 gráficas cúbicas de orden 6

Teorema 1.37. Si G es una gráfica cúbica con $n = 6$, entonces es isomorfa a G^* (Figura 1.13) o $G \cong K_{3,3}$.

Demostración. Sea G es una gráfica cúbica con $n = 6$, entonces se tiene al menos un ciclo γ en G de longitud mínima, tal que $\ell(\gamma) \geq 3$.

Caso 1.- $\ell(\gamma) = 3$. Sea $V(\gamma) = \{x_1, x_2, x_3\}$, como $|V(G) - V(\gamma)| \leq 3$ se tiene que $|N_G(V(\gamma))| \leq 3$. Si $|N_G(V(\gamma))| < 3$, entonces existe $y \in V$, tal que $N_G(y) \cap V(\gamma) = \emptyset$. Por lo tanto $|N_G(y)| < 3$, pero esto es una contradicción ya que G es cúbica. Es decir, $|N_G(V(\gamma))| = |V(G) - V(\gamma)|$ y la subgráfica inducida $G - V(\gamma)$ forman un ciclo, de este modo se observa que $G \cong G^*$, ver la Figura 1.13.

Observemos que por el Teorema 1.35, G contiene un ciclo γ de longitud al menos 4. Si G contiene un ciclo γ de longitud mínima $\ell(\gamma) = 5$, entonces existe un vértice $y \in G - V(\gamma)$, tal que $|N_G(y) \cap V(\gamma)| = 3$. Por lo tanto existe $u, v \in V(\gamma)$ y $N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset$, tal que la subgráfica inducida $G\langle\{u, v, y, N_G(u)\}\rangle$ forma un ciclo de longitud menor a 5, lo cual es una contradicción.

Caso 2.- $\ell(\gamma) = 4$. Sea G una gráfica 3-regular con $n = 6$ y sin ciclos de longitud impar, es decir, $G \cong K_{3,3}$.

□

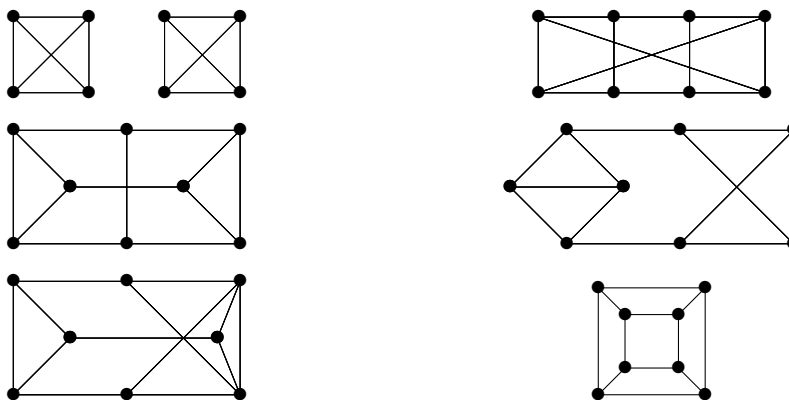


Figura 1.14: Las 6 gráficas cúbicas con $n = 8$

Similarmente, puede demostrarse que para $n = 8$ existen únicamente 6 gráficas cúbicas, salvo isomorfismos. Ver la Figura 1.14. Ejemplos de gráficas cúbicas con $2n$ vértices, para $n \geq 5$, son las gráficas $G \cong C_n \times K_2$.

Terminamos esta sección con dos gráficas cúbicas de orden 10.

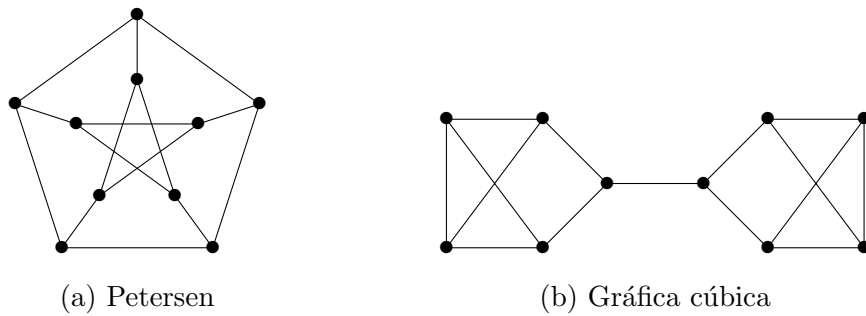


Figura 1.15: Gráficas cúbicas de orden 10

Observemos la Figura 1.15. Una gráfica cúbica, que es muy utilizada de ejemplo o contra-ejemplo por tener ciertas propiedades, es la gráfica de Petersen. La gráfica de Petersen se muestra en la Figura 1.15a, esta gráfica es de orden 10 y no contiene triángulos ni ciclos de longitud 4 pero sí contiene ciclos de longitud 5. La gráfica de la Figura 1.15b es cúbica y contiene ciclos de longitud 3, 4 y 5.

Capítulo 2

Conjuntos dominantes en gráficas

2.1. Dominación en gráficas

En 1968, Claude Berge [3] incluye en su libro *The theory of graphs and its applications* el tema de dominación en gráficas, él define por primera vez el concepto coefficient of external stability, mejor conocido como número de dominación. En 1962, Oystein Ore [17] publican por primera vez en su libro de Theory of Graphs el concepto de conjunto dominante y el número de dominación, tal y como se usa ahora. En 1977, Cockayne y Hedetniemi [8] publican algunos resultados sobre conjuntos dominantes en gráficas y son ellos quienes introducen la notación de $\gamma(G)$ para el número de dominación. En este trabajo se usa dicha notación y presentamos algunos resultados del tema.

Definición 2.1. Sea $D \subseteq V$, si $N_G[D] = V(G)$ entonces D es un **conjunto dominante** de G . Es decir, para todo $v \in V - D$, existe $u \in D$ tal que $uv \in E$. En este caso decimos que u domina v y se denota con $u \succ v$.

Definición 2.2. El **número de dominación** de G es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante de G , y se denota como $\gamma(G)$.

G tiene número de dominación $\gamma(G) = 1$, si y sólo si G tiene un vértice universal. Como toda estrella, $K_{1,m}$ tiene un vértice universal, entonces su número de dominación es $\gamma(K_{1,m}) = 1$.

Sea $G \cong K_{n,m}$ la gráfica bipartita completa con partición de su conjunto de vértices $V(K_{n,m}) = X \cup Y$, entonces su número de dominación es $\gamma(K_{n,m}) = 2$; ya que para cualesquiera $u \in X$ y $v \in Y$, tal que si $D = \{u, v\}$, entonces $N_G[D] = V(K_{n,m})$.

Sea $G = [X, Y]$ una gráfica bipartita con partición de sus vértices $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $Y = \{x_4, x_5, x_6\}$, cuyo conjunto de aristas está dado por $E(G) = \{x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_4, x_3x_5, x_3x_6\}$, ver Figura 2.1. Si $D = \{x_3, x_5\}$ entonces $N_G[D] = V(G)$, por lo tanto el número de dominación de la gráfica es $\gamma(G) = 2$. Por otro lado, observemos que la gráfica C_5 no es una gráfica bipartita y tiene número de dominación igual a $\gamma(C_5) = 2$.

En general, todavía no se puede decir mucho acerca del problema de dar una caracterización de las gráficas con número de dominación igual a dos. Sin embargo, podemos decir que las gráficas bipartitas completas están bien caracterizadas en cuanto a dar su número de dominación, pero no podemos decir lo mismo para las gráficas bipartitas. Por ejemplo, P_8 es una gráfica bipartita, con número de dominación igual a $\gamma(P_8) = 3$ y la gráfica bipartita 2.1 tiene número de dominación $\gamma(G) = 2$. Solo se tienen caracterizadas a las gráficas con número de dominación igual a 1.

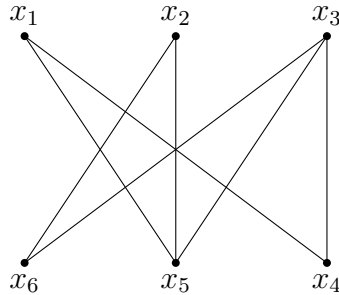
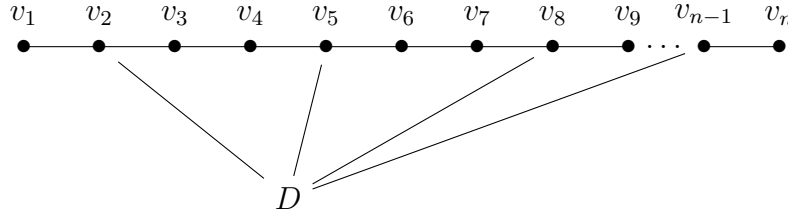


Figura 2.1: Sea $G = [X, Y]$ con $\gamma(G) = 2$

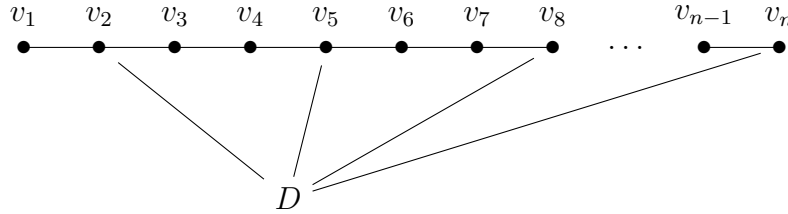
Proposición 2.3. *El número de dominación de las trayectorias P_n y los ciclos C_n con $n \geq 2$, está dado por $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Demostración. Demostraremos que existe un conjunto $D \subseteq V(P_n)$, tal que es un conjunto dominante en G , y que dicho conjunto D es de menor cardinalidad para todo conjunto dominante de G .

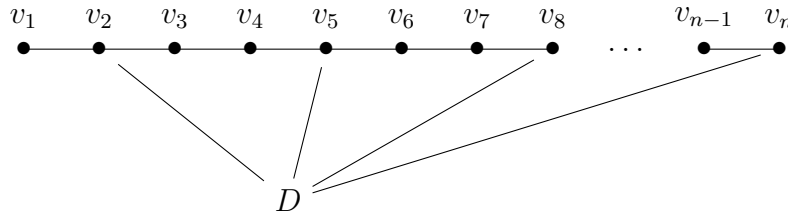
1. Sea P_n la trayectoria con $n \equiv 0 \pmod 3$, es decir $n = 3m$. Sea $D \subseteq V(P_n)$, tal que $D = \{v_i \mid i = 2 + 3j \text{ con } 0 \leq j \leq m - 1\}$. Entonces D es un conjunto dominante en G con $|D| = m = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.



2. Sea P_n la trayectoria con $n \equiv 1 \pmod 3$, es decir $n = 3m + 1$. Sea $D \subseteq V(P_n)$, tal que $D = \{v_i \mid i = 2 + 3j \text{ con } 0 \leq j \leq m - 1\} \cup \{v_n\}$. Entonces D es un conjunto dominante en G con $|D| = m + 1 = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.



3. Sea P_n la trayectoria con $n \equiv 2 \pmod 3$, es decir $n = 3m + 2$. Sea $D \subseteq V(P_n)$, tal que $D = \{v_i \mid i = 2 + 3j \text{ con } 0 \leq j \leq m\}$. Entonces D es un conjunto dominante en G con $|D| = m + 1 = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.



Ahora veamos que D es un conjunto dominante de menor cardinalidad. Supongamos que existe $D' \subseteq V(P_n)$ un conjunto dominante, tal que $|D'| < |D|$. Para cada $v \in D'$ se tiene que el número de vértices que a lo más puede dominar es 3, es decir $|N_G[v]| \leq 3$. Así, se tienen los siguientes dos casos:

1. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $|N_G[D']| = |\bigcup_{v \in D'} N_G[v]| \leq 3|D'| < 3m$, por lo cual $|D'| < |V(P_n)|$ y esto resulta una contradicción.
2. Si $n \equiv 1 \pmod{3}$ o $n \equiv 2 \pmod{3}$. Como $|D'| \leq m$, entonces $|N_G[D']| = 3|D'| \leq 3m$, por lo cual $|D'| < |V(P_n)|$ y esto resulta una contradicción.

Por lo tanto $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Veamos ahora que $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Como $P_n \subset C_n$ y $V(P_n) = V(C_n)$, entonces todo conjunto dominante de P_n es un conjunto dominante de C_n , es decir, $\gamma(C_n) \leq \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Ahora demostraremos que el ciclo C_n no tiene un conjunto dominante $D' \subseteq V(C_n)$ de menor cardinalidad que $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Supongamos que existe $D' \subseteq V(C_n)$ un conjunto dominante, tal que $|D'| < \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Para cada $v \in D'$, el número de vértices que domina es tres, es decir $|N_G[v]| = 3$. Así, se tienen los siguientes dos casos:

1. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $|N_G[D']| = |\bigcup_{v \in D'} N_G[v]| \leq 3|D'| < 3m$, por lo cual $|D'| < |V(P_n)|$ y esto resulta una contradicción.
2. Si $n \equiv 1 \pmod{3}$ o $n \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $|N_G[D']| = 3|D'| \leq 3m$, por lo cual $|D'| < |V(P_n)|$ y esto resulta una contradicción.

Por lo tanto $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. □

2.2. Distintos tipos de dominación en gráficas

En esta sección definimos los distintos tipos de dominación. Sin embargo, nuestro estudio está centrado en la dominación convexa.

Definición 2.4. Un conjunto $D \subseteq V$ es un **conjunto dominante conexo**, si D es dominante y la subgráfica inducida por D es conexa.

Definición 2.5. El **número de dominación conexa** es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante conexo de G , y se denota como $\gamma_c(G)$.

Definición 2.6. Una **uv -geodésica** es una uv -trayectoria de longitud $d(u, v)$.

Definición 2.7. El **diámetro** de una gráfica conexa G es:

$$\max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V\}$$

Definición 2.8. Se dice que un conjunto $D \subseteq V$ es **débilmente convexo** o **isométrico** en G , si para todo $u, v \in D$ existe al menos una uv -geodésica que pertenece a D .

Definición 2.9. Un **conjunto D es convexo** en G , si para todo $u, v \in D$ todos los vértices de cualquier uv -geodésica pertenecen a D .

Para dar una caracterización de los conjuntos convexos en el producto cartesiano, definimos la siguiente notación. Para todo $C \subseteq V(G \times G')$ convexo, denotamos a:

$$C_G = \{u \mid (u, v) \in C \text{ para algún } v \in V(G')\} \text{ y}$$

$$C_{G'} = \{v \mid (u, v) \in C \text{ para algún } u \in V(G)\}$$

Teorema 2.10. Sean G y G' dos gráficas conexas y $C \subseteq V(G \times G')$. C es un conjunto convexo en $G \times G'$ si sólo si $C = C_G \times C_{G'}$ con C_G y $C_{G'}$ conjuntos convexos.

Demostración. Por demostrar que si C es convexo, entonces $C = C_G \times C_{G'}$ y $C_G, C_{G'}$ son conjuntos convexos. Sean $u, u' \in C_G$, y x un vértice en uu' -geodésica en G . Entonces existen $v, v' \in V(G')$ tales que (u, v) y (u', v') están en el conjunto C . Por la Observación 1.27 se tiene que:

$$d_G(u, x) + d_G(x, u') + d_{G'}(v, v') = d_{G \times G'}((u, v), (u', v'))$$

y como C es un conjunto convexo en $G \times G'$, entonces los vértices (x, v) y (u', v) ambos están en C . Así, $x \in C_G$ y C_G es un conjunto convexo en G . Del mismo modo se demuestra que el conjunto $C_{G'}$ es un conjunto convexo en G' .

Por definición de los conjuntos C_G y $C_{G'}$, se tiene que:

$$C \subseteq C_G \times C_{G'}$$

Sólo falta demostrar la otra contenci3n. Sea $(u, v) \in C_G \times C_{G'}$. Entonces existe $x \in V(G)$ y un $y \in V(G')$, tal que (u, y) y (x, v) están en el conjunto C . Dado que:

$$d_{G'}(y, v) = d_{G \times G'}((u, y), (x, v)) \text{ y}$$

$d_G(u, x) = d_{G \times G'}((u, v), (x, v))$ se tiene que

$$d_G(u, x) + d_{G'}(y, v) = d_{G \times G'}((u, y), (x, v))$$

y como C es convexo y (u, v) está en la $(u, y)(x, v)$ -geodésica, entonces $(u, v) \in C$. Se tiene que, $C_G \times C_{G'} \subseteq C$. Por lo tanto, $C = C_G \times C_{G'}$.

Por demostrar que si $C = C_G \times C_{G'}$ y $C_G, C_{G'}$ son conjuntos convexos, entonces C es un conjunto convexo en $G \times G'$. Sean $(u, v), (u', v') \in C$ y (x, y) en la $(u, v)(u', v')$ -geodésica de $G \times G'$. Por la Observación 1.27 se tiene que:

$$\begin{aligned} d_G(u, x) + d_G(x, u') + d_{G'}(v, y) + d_{G'}(y, v') &= d_G(u, u') + d_{G'}(v, v') \\ &= d_{G \times G'}((u, v), (u', v')) \end{aligned}$$

Además C_G y $C_{G'}$ son convexos, entonces $(x, y) \in C_G \times C_{G'} = C$. Por lo tanto C es convexo. \square

El concepto de convexidad en gráficas es discutido e introducido en el libro de Buckley y Harary [5]. Este mismo concepto es estudiado por Harary y Nieminen en [12], para gráficas conexas que no son triviales. Después, Chartrand, Wall y Zang en su artículo [7], definen el número de convexidad de una gráfica, denotado por $c(G)$, que es la cardinalidad del conjunto convexo propio más grande en vértices de la gráfica. El concepto de dominación convexa fue propuesto, de manera verbal, por Jerzy Topp y aparece por primera vez en el artículo de su estudiante de doctorado Magdalena Lemańska [9].

Definición 2.11. Un conjunto $D \subseteq V$ es un **conjunto dominante débilmente convexo**, si D es débilmente convexo y dominante.

Definición 2.12. Un conjunto $D \subseteq V$ es un **conjunto dominante convexo**, si D es convexo y dominante.

Definición 2.13. El **número de dominación débilmente convexa** es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante débilmente convexo de G , y se denota con $\gamma_{wcon}(G)$.

Definición 2.14. El **número de dominación convexa** es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante convexo de G , y se denota con $\gamma_{con}(G)$.

2.3. Relación entre $\gamma(G)$, $\gamma_c(G)$, $\gamma_{wcon}(G)$ y $\gamma_{con}(G)$.

Veamos como son $\gamma(G)$, $\gamma_c(G)$, $\gamma_{wcon}(G)$ y $\gamma_{con}(G)$ para algunas gráficas y la relación que hay entre estos números.

	K_n	P_n	C_n $n \geq 7$	$K_{n,m}$ $\min\{n,m\} > 1$	$K_{1,n}$	G^* 1.13b
$\gamma(G)$	1	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	2	1	2
$\gamma_c(G)$	1	$n - 2$	$n - 2$	2	1	2
$\gamma_{wcon}(G)$	1	$n - 2$	$n - 2$	2	1	2
$\gamma_{con}(G)$	1	$n - 2$	n	2	1	2

Para los ciclos C_n con $n \leq 6$ se tiene lo siguiente:

1. Para $n = 3$, el ciclo C_3 tiene número de dominación y número de dominación convexa igual a $\gamma(C_3) = 1 = \gamma_{con}(C_3)$, dado que tiene un vértice universal.
2. Para $4 \leq n \leq 6$ el número de dominación es $\gamma(C_n) = 2$.
 - El ciclo C_4 tiene número de dominación conexa igual a $\gamma_c(C_4) = 3$, que es igual a su número de dominación débilmente convexa, es decir $\gamma_{xcon}(C_4) = 3$. Su número de dominación convexa es $\gamma_{con}(C_4) = 4$, debido a que el conjunto debe contener todas sus geodésicas.
 - El ciclo C_5 tiene número de dominación conexa, débilmente convexa y convexa igual a:
 $\gamma_c(C_5) = 3 = \gamma_{wcon}(C_5) = \gamma_{con}(C_5)$.
 - El ciclo C_6 tiene número de dominación conexa y número de dominación débilmente convexa igual a $\gamma_c(C_6) = 4 = \gamma_{wcon}(C_6)$, pero tiene número de dominación convexa igual a $\gamma_{con}(C_6) = 6$.

Los ejemplos anteriores nos muestran la relación que hay entre los distintos tipos de dominación, para éstas gráficas en particular, en general para cualquier gráfica G se tiene la siguiente desigualdad.

Lema 2.15. *Sea G una gráfica conexa, entonces se tiene que*

$$\gamma(G) \leq \gamma_c(G) \leq \gamma_{wcon}(G) \leq \gamma_{con}(G)$$

Demostración. Observemos que un conjunto dominante convexo mínimo de G es un conjunto dominante débilmente convexo. Un conjunto dominante débilmente convexo mínimo es un conjunto dominante conexo de la gráfica. Además, un conjunto dominante conexo mínimo es un conjunto dominante. Por lo tanto

$$\gamma(G) \leq \gamma_c(G) \leq \gamma_{wcon}(G) \leq \gamma_{con}(G) \quad \square$$

Lema 2.16. *Sea G una gráfica y $D \subseteq V(G)$ un conjunto dominante conexo mínimo de G . Si $\gamma(G) = \gamma_c(G)$, entonces $\Delta(\langle D \rangle) < \Delta(G)$.*

Demostración. Supongamos $\Delta(\langle D \rangle) = \Delta(G)$. Sea $u \in V(D)$ tal que $\delta_{\langle D \rangle}(u) = \Delta(G)$. Entonces $D - \{u\}$ es un conjunto dominante de menor cardinalidad que D , ya que si $v \in V(G) - V(D)$ este vértice debe ser adyacente a algún vértice del conjunto dominante; y no puede ser adyacente a v ya que el grado de dicho vértice en G sería más grande que $\Delta(G)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Delta(\langle D \rangle) < \Delta(G)$. \square

En el siguiente ejemplo se muestra que la diferencia entre $\gamma_{con} - \gamma_c$ y $\gamma_{con} - \gamma_{wcon}$ es tan grande como se quiera.

Ejemplo 2.17. Para cada $k, r \in \mathbb{N}$ con $r \geq 3$, existe una gráfica G tal que $\gamma_c(G) = \gamma_{wcon}(G) = r$ y $\gamma_{con}(G) - \gamma_c(G) = \gamma_{con}(G) - \gamma_{wcon} = k$.

Sea $r = 3$ y $k \in \mathbb{N}$. Sea H una gráfica bipartita completa isomorfa a $K_{k+1,2}$, y sea $x \in V(H)$, tal que $\delta(x) = \delta(H)$. Sea $y, z \in N_H(x)$. Construyamos la gráfica G de la siguiente manera:

- Sea $H \cong K_{k+1,2}$ y $V(H) = \{u_1, \dots, u_{k+1}\} \cup \{y, z\}$
- Sea P_6 y $V(P_6) = \{x_1, \dots, x_6\}$.

G se construye a partir de identificar los vértices y, z con los soportes de la trayectoria P_6 , es decir $x_2 = y$ y $x_5 = z$. La gráfica G se muestra en la Figura 2.2.

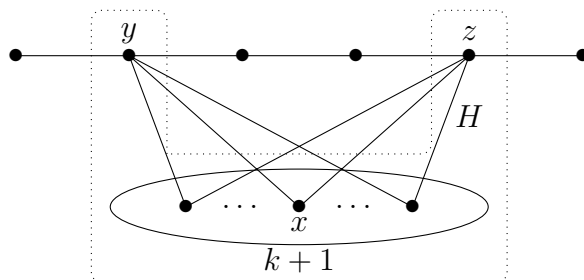


Figura 2.2: $\gamma_c(G) = \gamma_{wcon}(G) = 3$

Es fácil ver que el conjunto $\{x, y, z\}$ es un conjunto dominante conexo de G y también es un conjunto dominante débilmente conexo de G , entonces $\gamma_c(G) = \gamma_{wcon}(G) = 3$. Observemos que en G , el conjunto $V(H)$ es un conjunto dominante conexo mínimo, así $\gamma_{con}(G) = k + 3$. Por lo tanto $\gamma_{con}(G) - \gamma_c(G) = \gamma_{con}(G) - \gamma_{wcon}(G) = k$.

Sea $r \geq 4$ y $k \in \mathbb{N}$. Sea H la gráfica bipartita completa isomorfa a $K_{k,2}$ y sea $u \in V(H)$, tal que $\delta(u) = \delta(H)$. Sea $z, w \in N_H(u)$. Construyamos la gráfica G de la siguiente manera:

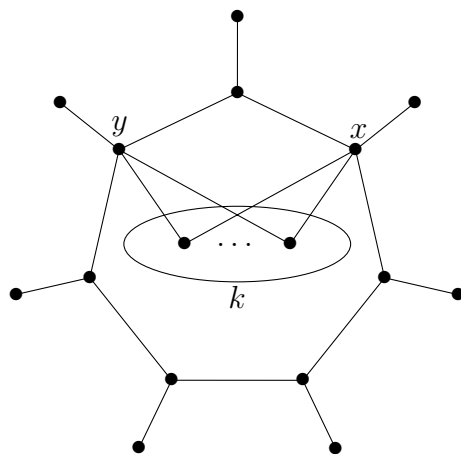


Figura 2.3: $\gamma_c(G) = \gamma_{wcon}(G) = r$

- Sea $H \cong K_{k,2}$ y $V(H) = \{u_1, \dots, u_k\} \cup \{z, w\}$
- Sea $C_r \circ K_1$, y sea $x, y \in V(C_r \circ K_1)$ tal que x, y son soportes de la gráfica y cumplen que $d(x, y) = 2$.

G se construye a partir de identificar los vértices z, w con los soportes x, y de la corona $C_r \circ K_1$, es decir $z = x$ y $w = y$. La gráfica G se muestra en la Figura 2.3

Observemos que $\gamma(G) = r$, y por el Lema 2.15 se tiene que $r \leq \gamma_c(G)$, entonces el conjunto dominante conexo tiene cardinalidad de al menos r . Los r vértices de soporte de G son un conjunto dominante conexo, entonces $\gamma_c(G) = r$. Más aún, como dicho conjunto contiene al menos una geodésica para cualquier par de vértices del ciclo C_r y es el más pequeño, entonces $\gamma_{wcon}(G) = r$. Del mismo modo, por el Lema 2.15 se tiene que $r \leq \gamma_{con}(G)$. Es fácil observar que todos los vértices de G , que no son finales, forman un conjunto dominante convexo, entonces $\gamma_{con} \leq |V(G)| - r$ y como este conjunto es mínimo, ya que todas las geodésicas de x a y deben de contener al menos los k vértices de la bipartita, más los r vértices de soporte de la corona, entonces $\gamma_{con}(G) = k + r$. Por lo tanto $\gamma_{con}(G) - \gamma_c(G) = \gamma_{con} - \gamma_{wcon} = k$.

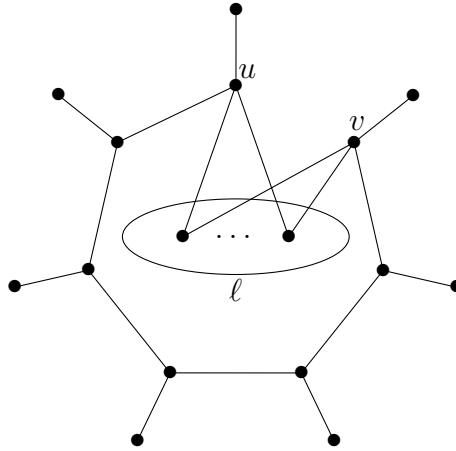


Figura 2.4: $\gamma_{con}(G) = k + \ell$

Ejemplo 2.18. Para todo entero positivo k y ℓ con $k \geq 3$, existe una gráfica G para la cual $\gamma_c(G) = k$ y $\gamma_{con}(G) = k + \ell$. Ver Figura 2.4

Sea $k, \ell \in \mathbb{N}$, con $k \geq 3$. Sea la corona $C_k \circ K_1$, G se obtiene de remplazar dos vértices de soporte de la corona, digamos u, v con $uv \in E(C_k \circ K_1)$, por ℓ (u, v) -trayectorias ajenas de longitud dos.

Es fácil ver que el número de dominación conexa es $\gamma_c(G) = k$, pues se necesitan todos los vértices de soporte de la corona para dominar conexamente a la gráfica; entonces $k \leq \gamma_{con}(G)$. Así, para dominar convexamente a la gráfica se necesitan de los k vértices de soporte de la corona y todas las geodésicas de u a v , observemos que dicho conjunto es mínimo. Por lo tanto, el número de dominación convexa es igual a $\gamma_{con}(G) = k + \ell$.

2.4. Dominación y morfismos

Teorema 2.19. *Sea $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$ un morfismo de las gráficas G y G' . Si $D \subseteq V(G)$ es un conjunto dominante, entonces $\phi(D)$ es dominante en $\phi(G)$.*

Demostración. Sea $v \in V(\phi(G)) - V(\phi(D))$, entonces existe $u \in V(G)$ tal que $\phi(u) = v$. Por lo tanto existe un $z \in D$ tal que $zu \in E(G)$, entonces $\phi(z) \in \phi(D)$ y además $\phi(u) \neq \phi(z)$. Ya que ϕ es un morfismo se tiene $\phi(z)\phi(u) \in E(G')$. Por lo tanto $\phi(D)$ es dominante en $\phi(G)$. \square

Corolario 2.20. *Sea $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$ un morfismo suprayectivo. Si $D_G \subseteq V(G)$ es dominante, entonces $\phi(D_G)$ es dominante en G' .*

Demostración. Por el Teorema 2.19 tenemos que la imagen del morfismo $\phi(D_G)$ es un conjunto dominante en $\phi(G) \subseteq G'$, como ϕ es suprayectivo por vértices, es decir, $\phi(V(G)) = V(G')$. Entonces $\phi(D_G)$ es un conjunto dominante en G' . \square

Observación 2.21. La proyección $\pi : V(H \times H') \rightarrow H$ es un morfismo de gráficas. Ya que, para toda $uv \in E(H \times H')$ si $u = (a, x)$ y $v = (b, y)$, por definición de producto se tiene que $x = y \in V(H')$ y $ab \in E(H)$ o $a = b \in V(H)$ y $xy \in E(H')$.

Corolario 2.22. *Sea $D \subseteq V(G \times G')$ un conjunto dominante, entonces $D_G \subseteq V(G)$ es dominante.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.19, del Corolario 2.20 y de la Observación 2.21. \square

Capítulo 3

Vizing y la dominación convexa

En 1963 Vizing [19] conjeturó que el número de dominación del producto cartesiano de dos gráficas G y G' , es al menos tan grande como el producto de los números de dominación de cada una de las gráficas. Es decir $\gamma(G)\gamma(G') \leq \gamma(G \times G')$. Para gráficas donde el número de dominación es $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(G) = 2$, se cumple la Conjetura de Vizing [13]. Brešar [4] demostró la Conjetura de Vizing para gráficas donde $\gamma(G) = 3 = \gamma(G')$. Un problema abierto es ver cuándo se cumple la conjetura de Vizing para cualquier gráfica G' y con $\gamma(G) = 3$. En el artículo de Liang Sun [18] se demuestra que si $\gamma(G) = 3$ existe una gráfica G' , para la cual se cumple $\gamma(G)\gamma(G') \leq \gamma(G \times G')$.

3.1. La conjetura de Vizing para la dominación convexa

Teorema 3.1. *Para dos gráficas conexas G y G' , se tiene la desigualdad $\gamma_{con}(G)\gamma_{con}(G') \leq \gamma_{con}(G \times G')$.*

Demostración. Sea $D \subseteq V(G \times G')$ un conjunto dominante convexo mínimo de $G \times G'$ donde $D = D_G \times D_{G'}$. Por el Teorema 2.10 y el Corolario 2.22 se tiene que los conjuntos D_G y $D_{G'}$ son conjuntos dominantes y convexos en G y G' respectivamente. Entonces $\gamma_{con}(G) \leq |D_G|$ y $\gamma_{con}(G') \leq |D_{G'}|$. Además, $|D| = |D_G| \times |D_{G'}|$. De este modo:

$$\gamma_{con}(G)\gamma_{con}(G') \leq |D_G||D_{G'}| = |D| = \gamma_{con}(G \times G')$$

□

Para las gráficas en donde, $\gamma(G) = \gamma_{con}(G)$ y $\gamma(G') = \gamma_{con}(G')$, es natural preguntarse si es cierta la conjetura de Vizing, sin embargo no se puede asegurar nada con esta información, lo que sí podemos asegurar es que si se tiene lo anterior y además cumple que $\gamma(G \times G') = \gamma_{con}(G \times G')$, entonces $\gamma(G)\gamma(G') \leq \gamma(G \times G')$. Es decir, la conjetura de Vizing es cierta para la dominación convexa de gráficas. Veamos el siguiente corolario.

3.2. Un dominante en el producto cartesiano

Corolario 3.2. *Para gráficas G y G' en las cuales se cumple que $\gamma(G) = \gamma_{con}(G)$ y $\gamma(G') = \gamma_{con}(G')$ y $\gamma(G \times G') = \gamma_{con}(G \times G')$, entonces la conjetura de Vizing es válida.*

Por ejemplo, si $G \cong G^*$ (ver Figura 1.13b) y $G' \cong K_2$ ya se sabe que $\gamma(G^*) = \gamma_{con}(G) = 2$ y $\gamma(G') = \gamma_{con}(G') = 1$ y $\gamma(G \times G') = \gamma_{con}(G \times G') = 4$, entonces se cumple la conjetura de Vizing. La siguiente figura nos muestra el producto cartesiano de $G^* \times K_2$.

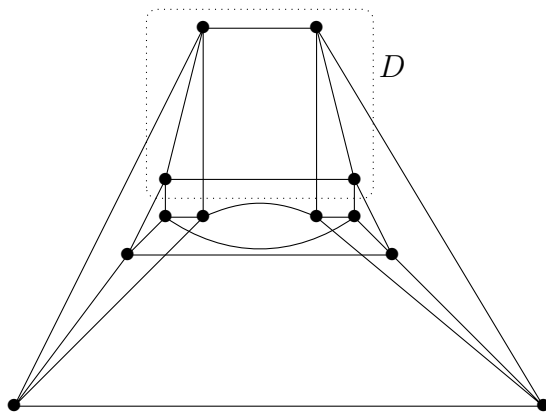
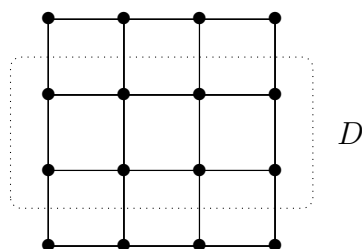


Figura 3.1: $G^* \times K_2$

En la Figura 3.1 se muestra, encerrado en un rectángulo, el conjunto dominante D de la gráfica $G^* \times K_2$, es claro que el conjunto dominante $D_{G^*} = \pi_{G^*}(D)$ (donde $\pi_{G^*}(D)$ es la proyección de D en G^*) y el conjunto dominante $D_{K_2} = \pi_{K_2}(D)$ (donde $\pi_{K_2}(D)$ es la proyección de D en K_2) no es un conjunto dominante de la gráfica $G^* \times K_2$. Sin embargo, el conjunto $D = D_{G^*} \times V(K_2)$ es un conjunto dominante de dicha gráfica.

Figura 3.2: $P_4 \times P_4$

Con la misma idea que en el párrafo anterior, en la Figura 3.2 se muestra el conjunto dominante D encerrado en un rectángulo. Observemos que el producto de dominantes de las gráficas P_4 es más pequeño que el conjunto dominante de la gráfica producto cartesiano. Lo único que podemos intuir de los dos ejemplos anteriores, es que el producto cartesiano de conjunto dominante por los vértices de la otra gráfica, es un conjunto dominante de la gráfica producto.

Teorema 3.3. *Sean G y G' dos gráficas, tal que D_G y $D_{G'}$ son conjuntos dominantes de G y G' respectivamente, entonces $D_G \times V(G')$ y $V(G) \times D_{G'}$ son conjuntos dominantes en $G \times G'$.*

Demostración. Sea $(a, x) \in V(G \times G') - (D_G \times V(G'))$, por definición de producto cartesiano $(a, x) \in V(G) \times \{x\}$, entonces existe $(b, x) \in D_G \times V(G')$ tal que (a, x) es adyacente a (b, x) , ya que D_G es dominante en G . De la misma manera se demuestra que $D_G \times V(G')$ es un conjunto dominante en $G \times G'$. \square

Es natural preguntarse cómo se comporta en general la dominación convexa bajo el producto cartesiano y bajo qué condiciones ésta se conserva. Sabemos que la convexidad bajo el producto se conserva y sabemos que un conjunto dominante D_G por los vértices de la otra gráfica es un dominante. Entonces, podemos decir que:

Corolario 3.4. *Sean G y G' dos gráficas, tal que D_G y $D_{G'}$ son conjuntos dominantes y convexos de G y G' respectivamente, entonces $D_G \times V(G')$ y $V(G) \times D_{G'}$ son conjuntos dominantes convexos en $G \times G'$.*

Demostración. Por el Teorema 2.10 se tiene que $D_G \times D_{G'}$ es un conjunto convexo, así $D_G \times V(G')$ es convexo en $G \times G'$. Y por el Teorema 3.3 se tiene

que $D_G \times V(G')$ es dominante en el producto, entonces $D_G \times V(G')$ es un conjunto dominante convexo en $G \times G'$. \square

Capítulo 4

Dominación convexa en gráficas cúbicas

Este capítulo es el más importante del trabajo, en él, hacemos correcciones a los errores encontrados en el trabajo [9] de Lemańska y demostramos los nuevos resultados obtenidos en consecuencia.

4.1. Estrella como dominante convexo en gráficas cúbicas

Teorema 4.1. *Si G es una gráfica cúbica y existe un conjunto $D \subseteq V$ dominante conexo mínimo, tal que $\langle D \rangle \cong K_{1,n}$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.*

Demostración. Sea G una gráfica cúbica y sea D el conjunto dominante conexo mínimo.

1. Si $\langle D \rangle = K_1$, entonces $G \cong K_4$ y $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.
2. Si $\langle D \rangle = K_{1,1}$, entonces $G \cong K_{3,3}$ o $G \cong G^*$ y $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$ (ver Figura 1.13).
3. Si $\langle D \rangle = K_{1,2}$, entonces $|V(G)| \geq 8$. Supongamos que $\gamma_c(G) < \gamma_{con}(G)$. Sea $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $V - D = \{v_4, v_5, v_6, \dots, v_n\}$. Como el conjunto D no es un conjunto dominante convexo, entonces existe un vértice en $V - D$ que está en una geodésica que une a dos vértices de D . Sin

pérdida de generalidad podemos suponer que es v_4 , y éste es vecino de v_1 y v_3 .

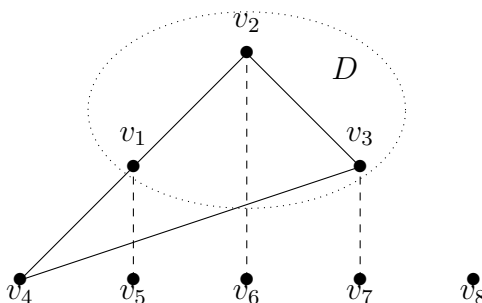


Figura 4.1: $\langle D \rangle = K_{1,2}$

Los vértices $v_5, v_6, v_7, v_8, \dots, v_n$ deben tener un vecino en D y como G es cúbica observemos que esto sólo puede ocurrir si $|V(G)| \leq 7$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, D es un conjunto convexo mínimo en G , es decir $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.

La Figura 4.1 nos muestra una gráfica G de orden 8 donde D es una estrella y con $V(\langle D \rangle) = \{v_1, v_2, v_3\}$, tal que si $\gamma_c < \gamma_{con}$ dicha gráfica no puede ser cúbica¹.

4. Si $\langle D \rangle = K_{1,3}$, entonces $|V(G)| \geq 8$. Consideremos dos casos:

Sea $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tal que $d(v_1) = 3$ en $\langle D \rangle$.

4.1 Si $|V(G)| = 8$. Sea $V - D = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Supongamos que $\gamma_c(G) < \gamma_{con}(G)$, es decir D es un conjunto dominante conexo pero no convexo. Entonces existe un vértice en $V - D$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que es v_5 , que debe tener como vecinos a dos elementos en D , digamos v_2 y v_3 . Si existiera otro vértice en $V - D$, tal que es vecino de dos vértices en D , entonces $D - \{v_2\}$ o $D - \{v_3\}$ serían conjuntos dominantes conexos más pequeños que D , lo cual no puede suceder. Así, en $V - D$ sólo hay un vértice que tiene dos vecinos en el conjunto D y este vértice es v_5 . Si dicho vértice tuviera tres vecinos en D , entonces v_2, v_3 y v_4

¹La Figura 4.1 muestra un argumento que se utilizará más adelante en el texto

sólo podrían dominar a un vértice en $V - D$, por lo cual $\langle v_6, v_7, v_8 \rangle$ induce una subgráfica K_3 en G .

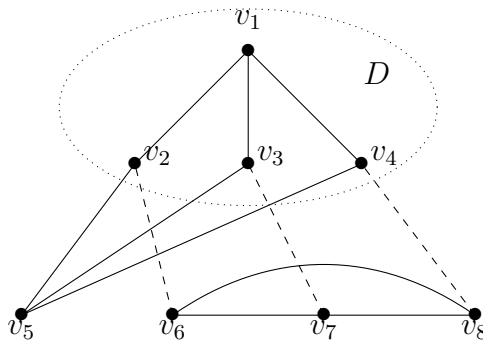


Figura 4.2: $\langle D_1 \rangle$ conjunto dominante convexo mínimo.

Por lo anterior, existe $v_i \in D$, tal que $N_G(v_7) \cap D = \{v_i\}$ para alguna $i = 2, 3, 4$. Es decir, el vértice v_7 es vecino privado de v_i , con respecto a D en G , entonces el conjunto $D_1 = \{v_i, v_6, v_7, v_8\}$ forma un conjunto dominante convexo de la gráfica con cardinalidad igual a $|D|$, pero lo anterior es una contradicción. Entonces el vértice v_5 tiene solamente dos vecinos en el conjunto D . Así, observemos que los vértices v_6, v_7 y v_8 están dominados por un solo vértice en D , y hasta ahora $N_G(v_4) = \{v_1, v_j\}$ para algún $j \in \{6, 7, 8\}$, es decir, $d(v_4) \leq 3$. Si $d(v_4) = 3$ entonces existe un vértice en $V - D$ que es vecino del vértice v_4 . Si dicho vértice fuera v_5 resultaría tener tres vecinos en D , y por lo visto anteriormente es imposible. Ahora bien, si un vértice en $V - D$ distinto a v_5 es vecino de v_4 , da como resultado que dicho vértice tiene dos vecinos en D , pero habíamos visto que esto no es posible. De este modo, lo anterior es una contradicción. Entonces D es un conjunto dominante convexo mínimo de G .

- 4.2 Si $|V(D)| > 8$, entonces por Lema 1.36 $|V(G)| \geq 10$. Denotemos a $V - D = \{v_5, v_6, \dots, v_n\}$. Supongamos que D no es un conjunto dominante convexo. Entonces existe un vértice en $V - D$ que tiene dos vecinos en D . Como G es una gráfica cúbica y por el argumento utilizado en la Figura 1.14, en el punto anterior, entonces $|V(G)| \leq 9$ lo cual es una contradicción. \square

4.2. Dominantes perfectos y gráficas cúbicas

Teorema 4.2. *Si G es una gráfica cúbica de orden $n \geq 8$ y si $D \subseteq V$ es un conjunto dominante conexo mínimo en G , tal que $\langle D \rangle \cong C_p$, entonces D es un conjunto dominante perfecto y para todo $v, w \in V - D$, $N_G[v] \cap D \neq N_G[w] \cap D$.*

Demostración. Supongamos que D no es un conjunto dominante perfecto, entonces existe un vértice $v \in V - D$ tal que $|N_G(v) \cap D| > 1$, es decir v tiene al menos dos vecinos en D , denotemos a dichos vértices por u_1 y u_2 . Entonces el conjunto $D - \{u_1\}$ o el conjunto $D - \{u_2\}$ son dominantes conexos más pequeños que D , lo cual es una contradicción. Ahora, si existiera un vértice $u \in D$, tal que para $v, w \in V - D$ se tiene que $N_G[v] \cap D = \{u\} = N_G[w] \cap D$, es decir v, w son vecinos privados de u con respecto a D , entonces $d(u) > 3$, y lo anterior no puede suceder ya que la gráfica G es cúbica. \square

Corolario 4.3. *Si G es una gráfica cúbica de orden $n \geq 8$ y si $D \subseteq V$ es un conjunto dominante conexo mínimo en G , tal que $\langle D \rangle \cong C_p$, entonces $n = 2p$.*

Demostración. Por el Teorema 4.2 se tiene que todo vértice en $V - D$ tiene solo un vecino en D , entonces

$$n = |V - D| + |D| = |D| + |D| = 2|D| = 2p$$

\square

Corolario 4.4. *Si G es una gráfica cúbica de orden $n \geq 8$ y si $D \subseteq V$ es un conjunto dominante conexo mínimo en G , tal que $\langle D \rangle \cong C_p$ con $p > 3$, entonces $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.*

Demostración. Por el Corolario 4.3 se tiene que $p \leq \gamma_{con}(G)$, si D es un conjunto dominante conexo mínimo pero no convexo, entonces existe un vértice $v \in V - D$ que tiene dos vecinos en D lo cual (por el Teorema 4.2) es una contradicción. Por lo tanto, $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$. \square

4.3. Dominante convexo con diámetro 2 en gráficas cúbicas

Teorema 4.5. *Si G es una gráfica cúbica y si $D \subseteq V$ es un conjunto dominante conexo mínimo en G , tal que $\text{diam}(\langle D \rangle) \leq 2$, entonces $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.*

Demostración. Si $D \subseteq V$ es un conjunto dominante conexo mínimo en G , tal que $\text{diam}(\langle D \rangle) \leq 1$, entonces sucede lo siguiente:

1. Si $\langle D \rangle \cong K_1$, entonces $G \cong K_4$.
2. Si $\langle D \rangle \cong K_2$, entonces $G \cong K_{3,3}$ o $G \cong G^*$.

Observemos que no existen gráficas cúbicas, tales que $\langle D \rangle \cong C_3$. Ahora bien, supongamos que $\text{diam}(\langle D \rangle) = 2$, es fácil ver que $|V(\langle D \rangle)| \geq 3$ y sucede lo siguiente:

1. Si $|V(\langle D \rangle)| = 3$, entonces:
 - a) $\langle D \rangle = K_{1,2}$ y por el Teorema 4.1 se tiene que $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.
2. Si $|V(\langle D \rangle)| = 4$, entonces:
 - a) $\langle D \rangle = K_{1,3}$ y por el Teorema 4.1 se tiene que $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.
 - b) $\langle D \rangle = C_4$ y por el Teorema 4.4 se tiene que $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.
 - c) $\langle D \rangle = K_1 + (K_1 \cup K_2)$, entonces $|V - D| = 4$, de lo contrario G sería de orden 6 y dicha gráfica tiene un dominante conexo $\langle D \rangle \cong K_2$. Observemos que D es perfecto ya que para todo $v \in V - D$ se tiene $|N_G(v) \cap D| = 1$, es decir $\langle D \rangle$ es un conjunto dominante convexo mínimo. Por lo tanto $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$. Ver Figura 4.3

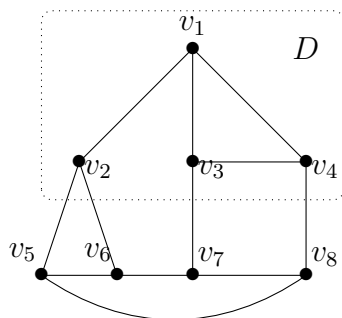


Figura 4.3: Sea G cúbica con $\langle D \rangle = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = K_1 + (K_1 \cup K_2)$

d) $\langle D \rangle = C_4 \cup \{e\}$, donde $e \in E$ es una diagonal de ciclo, entonces $|V - D| \leq 2$, lo cual es imposible porque da como resultado que $n \leq 6$ y las gráficas cúbicas de orden menor a 6 están totalmente caracterizadas.

3. Si $|V(\langle D \rangle)| = 5$, entonces:

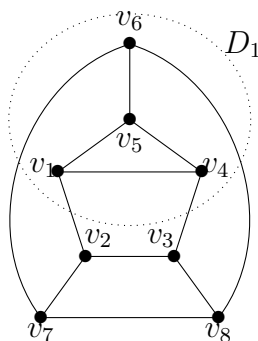


Figura 4.4: G cúbica con $\langle D_1 \rangle = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$

- a) $\langle D \rangle = C_5$ y por el Teorema 4.4 se tiene que $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.
- b) $\langle D \rangle = C_5 \cup \{e\}$, donde $e \in E$ es una diagonal del ciclo, entonces $|V - D| \leq 3$, así podemos encontrar D_1 un conjunto dominante conexo, tal que $|D_1| < |D|$, ver Figura 4.4.
- c) $\langle D \rangle = C_5 \cup \{e_1, e_2\}$, donde $e_1, e_2 \in E$ son diagonales del ciclo que no tienen vértices en común, entonces $|V - D| = 1$, lo cual es imposible ya que sabemos quienes son las gráficas cúbicas de orden menor igual a 6, estas están totalmente caracterizadas.

4. Si $|V(\langle D \rangle)| = 6$, entonces para todo $v \in V(D)$ el grado del vértice es igual $\delta(v) = 3$. Así, $|V(\langle D \rangle)| = 6 = |V(G)|$ y se conocen a todas las gráficas cúbicas de orden 6. Ver Figura 1.13.
5. Si $|V(\langle D \rangle)| \geq 8$, entonces el diámetro del conjunto dominante no es igual a 2, de lo contrario, si existiera un conjunto dominante conexo con dichas características la gráfica no sería cúbica, ya que $D \cong G$. Ver Figura 4.5.

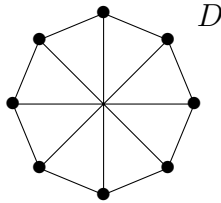


Figura 4.5: $|V(\langle D \rangle)| \geq 8$ y $\text{diam}(\langle D \rangle) = 2$

□

4.4. Relación entre el número de dominación y el número de dominación conexa

Teorema 4.6. *Si G es una gráfica cúbica y $\gamma(G) = \gamma_c(G)$, entonces $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$.*

Demostración. Sea $D \subseteq V$ un conjunto dominante conexo mínimo de G , por el Lema 2.16 se tiene que $\Delta \langle D \rangle < 3$. Entonces $\langle D \rangle$ es una trayectoria o es un ciclo en G . Supongamos que es un ciclo, sea $D = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_1\}$ y sea $v_i \in V - D$, por el Teorema 4.2 es claro que hay un solo $u_i \in D$ tal que $u_i v_i \in E$, es decir $u_j v_i \notin E$ para todo $i \neq j$. Así, v_i tiene dos vecinos en $V - D$, digamos v_j y v_k . Entonces $D - \{u_j, u_k\} \cup \{v_i\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad $\gamma(G) - 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\langle D \rangle$ es una trayectoria.

Ahora veamos que $\gamma_c(G) \leq 3$. Si $\gamma_c(G) = 4$, sean $D = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $\langle D \rangle \cong P_n$. Sea $V - D = \{w_1, v_1, v_2, \dots, v_n, w_2\}$ donde $v_i u_i \in E$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y con $w_1 u_1, w_2 u_n \in E$ (ver Figura 4.6). Por el Teorema 4.2 es claro que $v_j u_i \notin E$ para todo $i \neq j$. Sean $S_1 = \{w_1, v_1\}$, $S_2 = \{w_2, v_n\}$ y $S_3 = \{v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$.

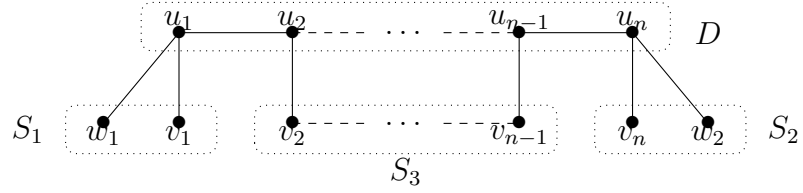
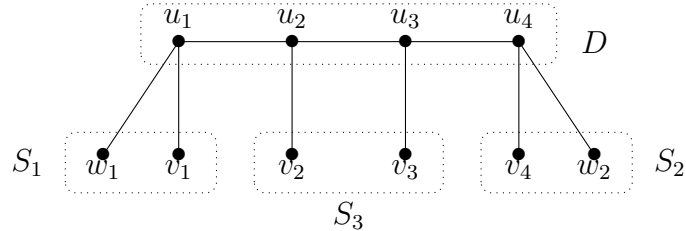


Figura 4.6: Auxiliar para la prueba del Teorema 3.6

Si dos vértices en S_3 son adyacentes, digamos v_i y v_j , entonces $D - \{u_i, u_j\} \cup \{v_i\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad $\gamma(G) - 1$, lo cual es una contradicción. Así, S_3 es un conjunto independiente. Veamos ahora que dos vértices de S_3 no puede ser adyacente a un mismo vértice de $S_1 \cup S_2$. Supongamos que $v_1v_i, v_1v_j \in E$, entonces $D - \{u_i, u_j\} \cup \{v_i\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad $\gamma(G) - 1$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior y recordando que G es cúbica, el conjunto S_3 tiene a lo más dos elementos, así $\gamma_c(G) = n = 4$. Así, observemos los siguientes casos:

1. v_2 es adyacente a dos vértices de S_1 . Entonces, como dos vértices de S_3 no pueden ser adyacentes al mismo vértice, se tiene que v_3 es adyacente a dos vértices de S_2 . Y se tiene lo siguiente:



- a) $w_1v_1, w_2v_4 \in E$. Entonces $\{v_1, u_3, u_4\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad menor. Lo cual es una contradicción.
 - b) $w_1v_4, w_2v_1 \in E$. Entonces $\{w_1, w_2, u_3\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad menor. Lo cual es una contradicción.
 - c) $w_1w_2, v_1v_4 \in E$. Entonces $\{w_1, v_4, u_2\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad menor.
2. v_2 es adyacente a dos vértices de S_2 . Entonces $\{v_2, u_3, u_1\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad menor. Lo cual es una contradicción.

3. v_2 es adyacente a un vértice de S_1 y a un vértice de S_2 . Entonces v_2 es adyacente a v_1 y v_4 . Así, v_3 es adyacente a w_1 y w_2 . Entonces $\{u_1, v_3, v_4\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad menor.

Por lo tanto $\gamma_c(G) \leq 3$. Y por el Teorema 4.5 se tiene que $\gamma_c(G) = \gamma_{con}(G)$. \square

Bibliografía

- [1] S. Arumugam and J. Paulraj. On graph with equal domination and connected domination numbers. *Discrete Mathematics*, 206:45–49, 1999.
- [2] M. Bahzad, G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster. *Graphs and Digraphs*. Prindle, Weber & Schmidt international series, 1979.
- [3] C. Berge. *The Theory of Graphs*. Dover Publications, 2001.
- [4] B. Brešar. On Vizing’s conjecture. *Discussiones Mathematicae, Graph Theory*, (21):5–11, 2001.
- [5] F. Buckley and F. Harary. *Distance in Graphs*. Addison-Wesley, 1990.
- [6] S.R. Canoy and I.J.L. Garces. Convex sets under some graphs operations. *Graphs and Combinatorics*, (18):787–793, 2002.
- [7] G. Chartrand, C. Wall, and P. Zhang. The convexity number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, (18):209–217, 2002.
- [8] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi. Towards a Theory of Domination in Graphs. *Networks*, 7(3):247–261, 1977.
- [9] J. Cyman, M. Lemańska, and J. Raczek. Graphs with convex domination number close to their order. *Discussiones Mathematicae, Graph Theory*, 26:307–316, 2006.
- [10] R. Diestel. *Graph Theory*. GTM. Springer-Verlag, 2005.
- [11] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1972.
- [12] F. Haray and J. Nieminen. Convexity in graphs. *J.Differ. Geom.*, (16):185–190, 1981.

- [13] B. Hatnell and D.F. Rall. Domination in Cartesian products: Vizing's conjecture.
- [14] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, Inc., 1998.
- [15] Pavol Hell and Jaroslav Nešetřil. *Graphs and homomorphisms*. Oxford University Press, 2004.
- [16] M. Lemańska. Weakly convex and convex domination numbers. *Opuscula Mathematica*, 24(2):181–188, 2004.
- [17] O. Øystein. *The Theory of Graphs*. American Mathematical Society, 1967.
- [18] L. Sun. A result on Vizing's conjecture. *Discrete Mathematics*, 275:363–366, 2004.
- [19] V.G. Vizing. The cartesian products on graphs. *Vyčisl. Systemy*, (9):30–43, 1963.

Índice de figuras

1.1. Gráfica simple	4
1.2. Camino	5
1.3. La gráfica K_9	7
1.4. La estrella $K_{1,9}$	8
1.5. Operaciones de Gráficas	10
1.6. Distancia $d_{G_1 \times G_2}((v, u), (v', u'))$	11
1.7. Gráficas isomorfas y no isomorfas	12
1.8. La imagen de 4 morfismos de la gráfica P_4	13
1.9. $\phi_1(G)$	14
1.10. $\phi_2(G) \cong P_3$	14
1.11. $\phi_3(G) \cong K_3$	14
1.12. $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $S' = \{x_1, x_3, x_5, x_{10}\}$	16
1.13. Las 2 gráficas cúbicas de orden 6	17
1.14. Las 6 gráficas cúbicas con $n = 8$	18
1.15. Gráficas cúbicas de orden 10	19
2.1. Sea $G = [X, Y]$ con $\gamma(G) = 2$	22
2.2. $\gamma_c(G) = \gamma_{wcon}(G) = 3$	29
2.3. $\gamma_c(G) = \gamma_{wcon}(G) = r$	29
2.4. $\gamma_{con}(G) = k + \ell$	30
3.1. $G^* \times K_2$	34
3.2. $P_4 \times P_4$	35
4.1. $\langle D \rangle = K_{1,2}$	38
4.2. $\langle D_1 \rangle$ conjunto dominante convexo mínimo.	39
4.3. Sea G cúbica con $\langle D \rangle = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = K_1 + (K_1 \cup K_2)$	42
4.4. G cúbica con $\langle D_1 \rangle = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$	42

4.5. $ V(\langle D \rangle) \geq 8$ y $\text{diam}(\langle D \rangle) = 2$	43
4.6. Auxiliar para la prueba del Teorema 3.6	44