



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

“MODELADO POR ELEMENTO FINITO DEL CONTACTO ENTRE SUPERFICIES  
RUGOSAS CON CARÁCTER FRACTAL”

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

ING. CHRISTIAN DANIEL MAYA RAMÍREZ

TUTOR

DR. RAFAEL SCHOUWENAARS FRANSSENS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

COMITÉ TUTOR

DR. ARMANDO ORTÍZ PRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DRA. MARÍA CRISTINA PIÑA BARBA  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

MÉXICO D.F.

MAYO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres que firman con la esperanza de su corazón  
todo sueño en nuestro existir.

La familia es el castillo del que partimos y  
nuestro último reducto. Cuando se quiebra,  
caemos en la despersonalización más absoluta.

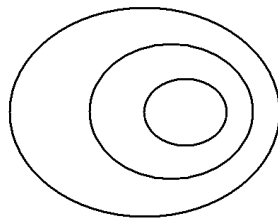
*José L. Alonso de Santos*

"He peleado la buena batalla, he acabado la carrera,  
he guardado la fe."

2 Timoteo 4:7

"Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente; no temas ni desmayes, porque Hashem tu Dios  
estará contigo en dondequiera que vayas."

Josué 1:9



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco antes que a alguien al Creador, pues siendo yo creyente, cómo no he de agradecer a quien por Verdad tengo. Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México quien me ha proporcionado los peldaños y las oportunidades que he tomado, pues me ha brindado los medios necesarios para poder superarme en un sentido de la educación formal; además doy gracias al Instituto de Investigaciones en Materiales por darme tan fructuosa oportunidad de ampliar mis conocimientos y mitigar un poco esa curiosidad de aprender acerca del universo existente del conocimiento, el cual parece cada vez más infinito.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Rafael Schouwenaars Franssens quien me brindó el apoyo y la oportunidad de realizar este proyecto de tesis. Además agradezco al Dr. Fernando Velázquez por su apoyo durante este trabajo de tesis; a los sinodales, quienes dejaron plasmadas sus aportaciones en este presente trabajo.

Agradezco principalmente a mis padres quienes con paciencia y esfuerzo fueron y han sido mis principales pilares en los que me he apoyado, pues sin ellos no hubiese sido capaz de escalar otro peldaño más. A mis hermanos Carlos y Marisol quienes con sólo su presencia soy inmensamente feliz. A mi compañera Eva Luz, quien con paciencia ha soportado y luchado a mi lado las buenas y las malas decisiones en mi vida, ella es mi compañera eterna. Todos ellos son la parte medular de mi familia, ellos son por quienes también vivo.

Agradezco a mis tíos Rubén y Blanca, ya que sus palabras de Vida han llegado a mi corazón y mente, pues son palabras de aliento y esperanza. Gracias al Creador por sus vidas.

Agradezco a los hermanos (no de sangre), Juan Manuel Gómez y Marcela Márquez quienes siempre que necesito palabras de aliento están allí para brindármelas.

Quisiera agradecer a otras muchas personas, pero el espacio que aquí tengo es muy poco, más sin embargo ese agradecimiento está en mi mente y corazón y nunca olvidaré ese apoyo directo o indirecto que me proporcionaron en esta etapa. Agradezco a los que contribuyeron directa o indirectamente a este logro.

*“Del hombre son las disposiciones del corazón;  
más de Hashem es la respuesta de la lengua”.*

Proverbios 16:1

El presente trabajo fue revisado por los siguientes sinodales:

Dr. Rafael Schouwenaars Franssens

Dr. Fernando Velázquez Villegas

Dr. Abel Camacho Galván

Dr. Francisco Manuel Sánchez Arévalo

Dr. Marco Aurelio Ramírez Argaez

# ÍNDICE

<b>ÍNDICE</b>	<b>I</b>
<b>1 ANTECEDENTES</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Mecánica de Contacto</b>	<b>5</b>
<b>1.2 Modelos en la Mecánica de Contacto</b>	<b>8</b>
1.2.1 Teoría de Contacto de Hertz	9
1.2.2 Contacto entre esferas	11
1.2.3 Contacto de dos cilindros con ejes paralelos	13
1.2.4 Modelo de Greenwood-Williamson	14
<b>1.3 Geometría Euclidiana</b>	<b>18</b>
1.3.1 Elementos de la Geometría Euclidiana	19
<b>1.4 Geometría Fractal</b>	<b>19</b>
1.4.1 Dimensión	20
1.4.2 Dimensiones Euclidianas	20
1.4.3 Dimensión 1	21
1.4.4 Dimensión 2	21
1.4.5 Dimensión 3	22
1.4.6 Dimensión Fractal	23
1.4.7 Dimensión de la Curva de Koch	26
<b>1.5 Fractales</b>	<b>27</b>
1.5.1 Breve Historia de los Fractales	27
1.5.2 Noción de Fractales en Fenómenos Naturales	29
1.5.3 ¿Qué son los fractales?	31
1.5.4 Fractales lineales y no lineales	31
1.5.5 Autosimilaridad y autoafinidad	32
<b>2 RESUMEN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA TESIS</b>	<b>33</b>
<b>2.1 General</b>	<b>33</b>
<b>2.2 Ecuaciones gobernantes</b>	<b>33</b>
<b>2.3 Contacto</b>	<b>35</b>
<b>2.4 Objetivos de la tesis</b>	<b>37</b>
<b>3 FUNDAMENTOS</b>	<b>38</b>

<b>3.1 Rugosidad en las superficies</b>	<b>38</b>
3.1.1 Rugosidad	38
<b>3.2 Cuantificación de la Rugosidad</b>	<b>40</b>
<b>3.3 Rugosidad y Fractales</b>	<b>41</b>
<b>3.4 Parámetros de la Rugosidad</b>	<b>44</b>
3.4.1 Promedio Aritmético de Alturas (Promedio de Rugosidad) ( $R_a$ )	44
3.4.2 Rugosidad Media Cuadrática ( $R_q$ )	45
3.4.3 Altura 10 puntos ( $R_z$ )	45
3.4.4 Altura máxima de picos ( $R_p$ )	46
3.4.5 Máxima profundidad de valles ( $R_v$ )	46
3.4.6 Altura promedio de picos ( $R_{pm}$ )	46
3.4.7 Profundidad Media de Valles ( $R_{vm}$ )	47
3.4.8 Altura Máxima del Perfil ( $R_t$ or $R_{max}$ )	47
3.4.9 Máximo pico a la altura del valle ( $R_{ti}$ )	47
3.4.10 Promedio del Máximo Pico a la altura del Valle ( $R_{tm}$ )	48
3.4.11 Pico más Grande a la Altura del Valle ( $R_y$ )	48
3.4.12 Altura del tercer punto ( $R_{3y}$ )	48
3.4.13 Promedio de la Altura del tercer punto ( $R_{3z}$ )	48
3.4.14 Perfil Factor de Solidez ( $k$ )	49
3.4.15 Asimetría ( $R_{sk}$ )	49
3.4.16 Kurtosis ( $R_{ku}$ )	50
3.4.17 Función de Densidad de Amplitud (ADF)	51
3.4.18 Función de Autocorrelación (ACF)	52
3.4.19 Correlación Longitudinal ( $\beta$ )	52
3.4.20 Densidad de espectro de Potencia (PSD)	52
3.4.21 Parámetros de Espaciamento	53
3.4.22 Conteo de Puntos Altos (HSC)	53
3.4.23 Conteo de Picos ( $P_c$ )	54
3.4.24 Espaciamento Promedio de los Picos Locales Adyacentes ( $S$ )	54
3.4.25 Espaciamento Promedio en la Línea Media ( $S_m$ )	55
3.4.26 Número de intersecciones del perfil en la línea media $n(0)$	56
3.4.27 Número de Picos en el Perfil ( $m$ )	56
3.4.28 Número de Puntos de Inflexión ( $g$ )	57
3.4.29 Radio Promedio de Asperezas ( $r_p$ )	57
<b>3.5 Generación de Superficies Rugosas</b>	<b>58</b>
3.5.1 Random Midpoint Displacement Method	58
3.5.2 Generación del Midpoint Displacement Method en 1D	59
3.5.3 Generación del Midpoint Displacement Method en 2D y 3D	62
<b>4 MÉTODO</b>	<b>63</b>
<b>4.1 Construcción de la malla</b>	<b>63</b>

4.1.1 Primera etapa de la construcción de la malla	63
4.1.2 Segunda etapa de la construcción de la malla	66
4.1.3 Tercera etapa de la construcción de la malla	68
4.1.4 Cuarta etapa de la construcción de la malla	69
<b>4.2 Generación del Midpoint Displacement Method (2D) Implementado para Generar la Superficie Rugosa</b>	<b>70</b>
<b>4.3 Modelado Numérico de la Superficie Rugosa</b>	<b>73</b>
4.3.1 Modelo 3D de la superficie Rugosa en ABAQUS®	73
4.3.2 Porcentaje de Interferencia de la Rugosidad	75
<b>4.4 Tamaño y descripción del modelo</b>	<b>76</b>
4.4.1 Unidades	77
4.4.2 Desplazamiento vertical	77
4.4.3 Desplazamiento horizontal	78
<b>4.5 Parámetros de la simulación</b>	<b>79</b>
4.5.1 Condiciones de Frontera	80
<b>4.6 Errores en la simulación</b>	<b>82</b>
4.6.1 Velocidad	82
4.6.2 Mallado	83
<b>5 RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES</b>	<b>85</b>
<b>5.1 Modelo Elástico</b>	<b>86</b>
5.1.1 Fuerza en Y vs Área de contacto aparente (Desplazamiento Vertical) y coeficiente de fricción	86
5.1.2 Desplazamiento vs Área de Contacto (Desplazamiento vertical)	87
5.1.3 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en Y	88
5.1.4 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en X y en Z (direcciones horizontales)	89
5.1.5 Desplazamiento vs Área Relativa de Contacto (Desplazamiento horizontal)	91
5.1.6 Coeficientes de Fricción	92
<b>5.2 Modelo Elasto-Plástico</b>	<b>94</b>
5.2.1 Área de contacto aparente vs Fuerza en Y (Desplazamiento Vertical)	94
5.2.2 Desplazamiento vs Área de Contacto (Desplazamiento vertical)	96
5.2.3 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en Y	97
5.2.4 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en X y en Z (direcciones horizontales)	99
5.2.5 Desplazamiento vs Área Relativa de Contacto (Desplazamiento horizontal)	101
5.2.6 Coeficientes de Fricción	103
<b>5.3 Resumen del Área Real de contacto para los Modelos Elástico y Elasto-plásticos</b>	<b>105</b>
<b>5.4 Visualización de las Zonas de Contacto en la Placa Fija</b>	<b>106</b>



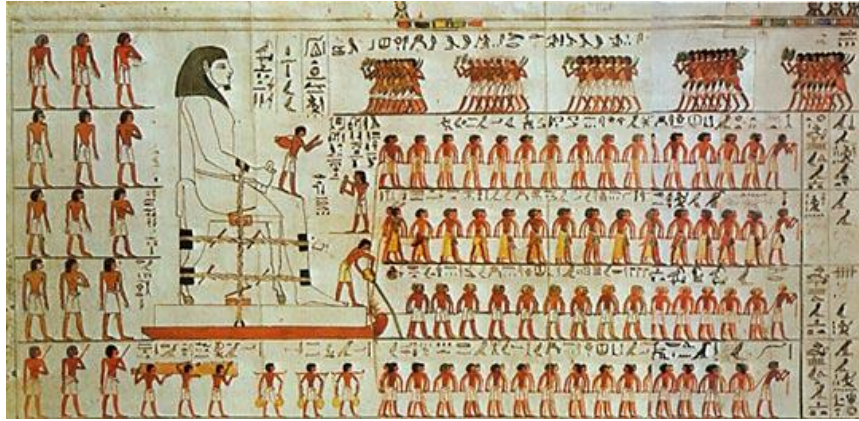
<b>DISCUSIÓN</b>	<b>108</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>110</b>
<b>APÉNDICE A</b>	<b>112</b>
<b>A.1 Modelo de fricción de Coulomb en Abaqus®</b>	<b>112</b>
<b>A.2 Formulación de adherencia elástica</b>	<b>113</b>
<b>REFERENCIA</b>	<b>117</b>

## **1 ANTECEDENTES**

En el presente capítulo se presentan los conceptos fundamentales en los cuales se apoya el presente trabajo. En primer lugar se hace referencia al marco histórico de la mecánica de contacto, cómo es que ésta tuvo su origen y la importancia que desempeña en el desarrollo científico y tecnológico. Se muestran dos principales modelos de la mecánica de contacto, el Modelo de Contacto de Hertz, el cual describe el contacto entre diferentes superficies; el Modelo de Greenwood-Williamson el cual describe una superficie rugosa conformada por un conjunto de asperezas esféricas de igual radio; se considera que la altura de cada aspereza está determinada por una distribución aleatoria con alguna distribución de probabilidad. Finalmente se muestran los elementos de la Geometría Euclidiana y de la Geometría Fractal que ayudan a diferenciar los principales conceptos que tienen una de la otra y porqué el presente trabajo se apoyó en los conceptos de la Geometría Fractal.

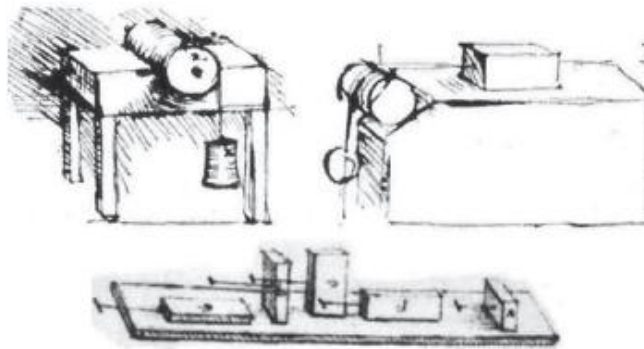
### **1.1 Mecánica de Contacto**

Los problemas de contacto son muy importantes en su estudio debido a que existen una gran variedad de fenómenos que están relacionados directamente con éste. El fenómeno de fricción y las superficies irregulares o rugosas tienen un origen muy antiguo. Al parecer las culturas antiguas sabían de su existencia debido a los efectos visibles que aparecen entre el contacto de los cuerpos, principalmente los sólidos. Los antiguos egipcios así como otras culturas tuvieron la necesidad de construir edificaciones para uso civil y religioso, de manera que la historia puede constatar que el uso de tecnología para mover grandes bloques de roca sólida tuvo que ver directamente en cierto modo con el desarrollo con la mecánica de contacto. Los egipcios al tener que superar los efectos producidos tanto por la fuerza de fricción así como la irregularidad de los cuerpos y sus efectos en ellos, desarrollaron procesos de lubricación para vencer las fuerzas que de cierto modo impedían el deslizamiento de los grandes bloques que irían destinados a la construcción de los que hoy conocemos como las Pirámides de Egipto. La figura (1.1) muestra de forma clara a un hombre poniendo fluido frente al trineo en el cual está colocada la colosal estatua.



**Figura 1.1** Descripción de trabajadores moviendo una colosal estatua en la tumba de Djehutihotep, la cual muestra a un trabajador poniendo agua frente al trineo [1].

Años más tarde, mientras la ciencia y la técnica fueron madurando a través de la historia hombres como Leonardo Da Vinci estudiaron los efectos de la fricción en diferentes cuerpos variando su tamaño, midiendo de esta manera las fuerzas que se oponían al movimiento de los mismos (Siglo XV). Leonardo Da Vinci también consideró el área de contacto en sus estudios de la mecánica de contacto así como el peso de los cuerpos, figura (1.2).



**Figura 1.2** Experimentos de Leonardo Da Vinci [2].

Leonardo Da Vinci encontró de forma experimental que la fuerza de fricción es proporcional al peso del cuerpo en estudio y ésta es independiente del área de contacto aparente. Resultados asociados son frecuentemente atribuidos a Amontons (1699) despreciando la contribución de Leonardo Da Vinci [3]. Cuando se pone en lenguaje matemático lo que Leonardo Da Vinci encontró, se obtiene de forma casi directa la conocida Ley de Fricción de Coulomb, de la cual se puede saber que la fuerza de fricción es directamente proporcional a la fuerza normal del cuerpo multiplicada por el coeficiente de fricción  $\mu$ , ecuación (1.1).

$$F_T = \mu N \quad (1.1)$$

Por otra parte los estudios acerca de la fricción fueron vistos desde un punto de vista matemático por Leonhard Paul Euler quien a mediados del siglo XVIII hizo uso de las matemáticas para la descripción de la fuerza de fricción en el cual se basó en las leyes del movimiento; sus experimentos se apoyaron en el deslizamiento de un cuerpo (bloque) sobre una pendiente, la cual por supuesto variaría su pendiente con un ángulo determinado. Dentro de las principales aportaciones que tuvo Euler en este campo de la ciencia fue la demostración de que el coeficiente de fricción cinético es menor al coeficiente de fricción estático así como en uso del símbolo  $\mu$  para hacer referencia al coeficiente de fricción.

En el año de 1785 Charles Augustin de Coulomb hizo importantes contribuciones en esta área, de los cuales consideró importantes factores relacionados con la fricción tales como presión normal, medida del área superficial, materiales y sus recubrimientos, condiciones ambientales (tales como humedad, temperatura y vacío), y la dependencia del tiempo de la fuerza de fricción, dichas observaciones resultaron en la fórmula para la resistencia de fricción del deslizamiento de un cuerpo en un plano, ecuación (1.2).

$$F_T = A + \frac{N}{\mu^*} \quad (1.2)$$

Donde  $F_T$  es la fuerza de fricción,  $N$  es la fuerza normal y  $\mu^*$  es el inverso del coeficiente de fricción.  $A$  representa la cohesión, un efecto el cual ya había sido descrita por Desaguliers (1725), el segundo término fue atribuido a una acción de arado dentro de la superficie de contacto [3].

Dentro de los estudios que Coulomb realizó, encontró que el coeficiente de fricción  $\mu$  es casi independiente de la fuerza normal, la velocidad de deslizamiento, el área de contacto (resultados similares fueron encontrados por Leonardo Da Vinci) y la rugosidad de la superficie. Sin embargo,  $\mu$  depende fuertemente de las irregularidades geométricas (asperezas) en la superficie de contacto [3].

Heinrich Rudolf Hertz fue otro científico quien realizó importantes contribuciones a la mecánica de contacto (1882) al aplicar la teoría de la elasticidad al contacto mecánico. La principal contribución de Hertz fue el contacto entre dos cuerpos curvos, en especial el contacto entre dos esferas, determinando la distribución de presiones y el área de contacto que existe entre ellas al existir una fuerza de compresión. Sin embargo muy pocos problemas que involucran contacto pueden ser resueltos analíticamente [3].

En general se puede decir que los problemas que se relacionan con el comportamiento mecánico de los materiales se resuelven mediante diferentes métodos numéricos, entre los cuales se encuentra el Método de los Elementos Finitos, el cual resuelve de forma

aproximada ecuaciones diferenciales parciales que no tienen solución analítica; dichas ecuaciones describen una gran cantidad de fenómenos físicos relacionados con el comportamiento mecánico de los materiales. El uso del Método de los Elementos Finitos se ha hecho cada vez más marcado debido al avance tecnológico en las computadoras, las cuales hoy en día tienen gran capacidad de almacenamiento y velocidad en el procesamiento de información y de cálculo. Dentro del campo de la mecánica de contacto, el Método de los Elementos Finitos se implementó aproximadamente 10 años después de que problemas estructurales fueran resueltos por este método en los años 50's, en dichos años aparecieron las primeras publicaciones en las que existieron soluciones para ciertos problemas que involucraban contacto mecánico.

De acuerdo a Thomas las primeras contribuciones en este campo se tienen a Wilson y Parsons (1970), a Chan y Tuba (1971), las cuales contienen los primeros tratados de contacto usando teoría geométrica lineal. Incluso, en una etapa anterior Wilkins (1964) desarrolló HEMP-hydrocode explícito el cual podía hacer frente a grandes deformaciones, e incluía un simple modelo de contacto. Después de esto, los códigos explícitos DYNA2D y DYNA3D, así como los códigos implícitos NIKE2D y NIKE3D, fueron desarrollados en los laboratorios Lawrence Livermore Laboratory por J. HALLQUIST, a principios de los 70's [3].

Hoy en día existen paqueterías software que hacen uso de ésta poderosa herramienta, combinando las diferentes opciones que existen para su implementación y optimización en su resolución.

A continuación se presentan la teoría de Contacto de Hertz y el modelo de Greenwood-Williamson, los cuales son importantes desde un punto de vista histórico y teórico, mismos que han sido las bases para importantes desarrollos en la actualidad y han servido como base para el desarrollo de la mecánica de contacto ya que han sido parte fundamental de la misma; estos modelos presentan una aproximación a las soluciones de problemas que tienen que ver directamente con el contacto entre superficies de diferentes geometrías, especialmente aquellas que, en el caso de superficies rugosas, presentan asperezas de forma esférica.

## **1.2 Modelos en la Mecánica de Contacto**

La mecánica de sólidos, en particular la mecánica de contacto, es una poderosa herramienta para la investigación de problemas tribológicos básicos. La mecánica de contacto investiga el estado de esfuerzo-deformación cerca de las regiones de contacto de los cuerpos como una función de su forma, de las propiedades en sus materiales y las condiciones de carga presentes en los mismos.

Con relación a lo anterior es necesario dar un panorama general de las primeras teorías que han existido para modelar y tratar de comprender el comportamiento de uno de los temas más importantes de la mecánica de contacto, el cuál es, el contacto entre superficies con diferentes geometrías.

A continuación se describe la teoría de contacto de Hertz la cual fue introducida a finales del siglo XIX por el físico alemán Heinrich Hertz.

### **1.2.1 Teoría de Contacto de Hertz**

Las siguientes definiciones fueron tomadas del texto “Modern Tribology Handbook” de Bharat Bhushan. 2001. (corresponde al capítulo 3, sección 3.2, volumen 1).

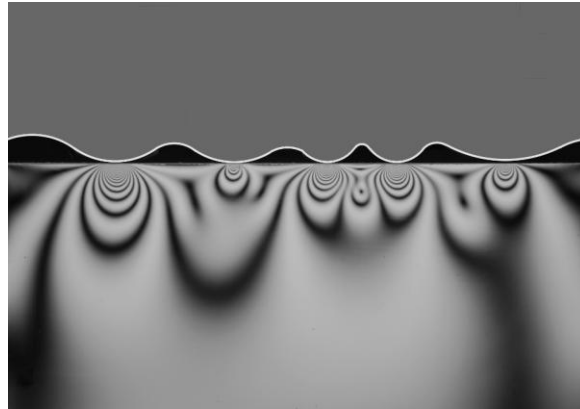
Es importante señalar que las primeras investigaciones en la mecánica de contacto fueron realizadas por Heinrich Hertz en el año de 1882 quien analizó los esfuerzos entre el contacto de dos sólidos elásticos. La teoría de Hertz fue inicialmente destinada para estudiar la posible influencia de deformación elástica en franjas de interferencia óptica de Newton en el espacio existente entre dos lentes de vidrio. Esta teoría proporcionó una base para la solución de muchos problemas tribológicos y condujo al método para el cálculo del área real de contacto de superficies rugosas y el contacto rígido de uniones, para la investigación de laminado y contacto deslizante, desgaste de levas y engranajes, para la estimación de las cargas límites para rodamientos.

Es importante tener presente que la teoría de Hertz está basada en algunas suposiciones, las cuales idealizan las propiedades de contacto entre cuerpos y las condiciones de contacto. Algunas de las suposiciones son las siguientes:

- 1) Los cuerpos son linealmente elásticos, homogéneos e isotrópicos.
- 2) Las deformaciones son pequeñas.
- 3) Las superficies son lisas y no conformes (las superficies no conformes son aquellas en las que por razón de su geometría el contacto se realiza en un área relativamente reducida, como ocurre en los rodamientos de bolas).
- 4) La forma de la superficie no cambia con el tiempo.
- 5) El contacto se presenta en ausencia de fricción.

Estas suposiciones son frecuentemente injustificadas en problemas tribológicos. Se sabe por ejemplo que, en interacciones de contacto, los esfuerzos crecen en una capa

superficial delgada, en la cual el espesor es comparable con el tamaño de la región de contacto. La figura (1.3) ilustra el esquema de contacto y esfuerzos cerca de la superficie.

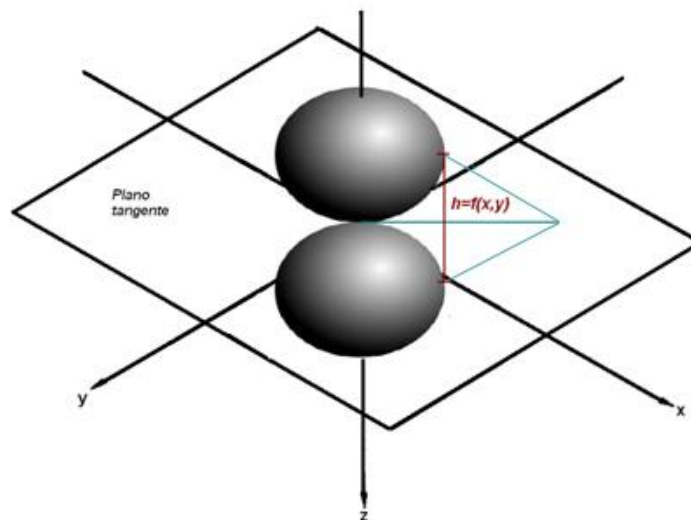


**Figura 1.3** Contacto de una superficie irregular; se pueden observar concentraciones de esfuerzos en el contacto de las irregularidades superficiales [4].

Debido a los grandes esfuerzos, grietas inician y crecen en esta capa; esto conduce a la separación de partículas (fenómeno de desgaste). Dichas propiedades de la capa superficial delgada son muy importantes en los esfuerzos subsuperficiales y en el análisis de desgaste [5].

Cuando existe contacto entre dos cuerpos curvados de diferente radio de curvatura, éstos se tocan en algún punto o a lo largo de una línea. Cuando se aplica una carga muy pequeña, la deformación elástica se extiende a través de las áreas de contacto, dichas cargas están distribuidas en la superficie de contacto de los cuerpos, las cuales se manifiestan como presión.

La figura (1.4) muestra la altura o separación inicial de las esferas no deformadas



**Figura 1.4** Espacio h de entre el contacto de dos esferas sin previa deformación.

El espacio  $h$  entre las superficies no deformadas puede aproximarse mediante la siguiente ecuación (1.3):

$$h = r^2 = Ax^2 + By^2 \quad (1.3)$$

Donde  $x$  y  $y$  representan las coordenadas ortogonales que yacen en el plano tangente común a las dos superficies en contacto. Estrictamente la anterior idealización requiere de perfiles superficiales parabólicos; el análisis de Hertz se basa principalmente en el contacto entre esferas, cilindros y elipsoides. A continuación se plantea el marco teórico relacionado con el contacto entre diferentes superficies.

### 1.2.2 Contacto entre esferas

Como primera descripción existente entre el contacto de diferentes geometrías se tiene el contacto entre dos esferas elásticas de Radio  $R_1$  y radio  $R_2$  las cuales son presionadas una contra la otra con una fuerza  $P$ , la figura (1.5) muestra de manera gráfica el contacto entre ellas.

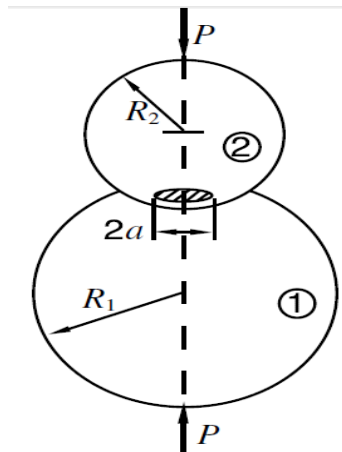


Figura 1.5 Esferas en contacto elástico, área de contacto circular [6].

Como consecuencia del contacto entre las esferas, resulta un área de contacto, la cual tiene forma circular. Dicha área circular de contacto está definida por la ecuación (1.4),

$$a = \left\{ \frac{3PR}{4E^*} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (1.4)$$

donde  $E^*$  representa el módulo de contacto;  $E_1$ ,  $E_2$  son los módulos de elasticidad respectivos y  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  son los coeficientes de Poisson asociados a los cuerpos; y está definido por la siguiente ecuación (1.5),

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (1.5)$$



$R$  representa el radio reducido de curvatura y está definido por la ecuación (1.6),

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1.6)$$

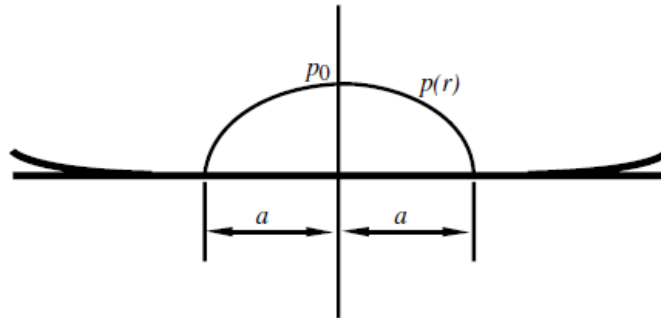
Es importante mencionar que las superficies convexas son definidas con un radio de curvatura positivo, sucede lo contrario con las superficies cóncavas, las cuales tienen un radio de curvatura negativo.

Otro parámetro importante que se debe mencionar es la distribución de presión  $p(r)$  que existe entre las dos esferas, cual tiene una forma semi-elíptica y está representada por la ecuación (1.7).

$$p(r) = p_0 \left\{ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

Recordando que  $h$  está definido por  $r^2 = Ax^2 + By^2$ .

La distribución de presiones anterior entre dos esferas con contacto Hertziano se muestra en la figura (1.6).



**Figura 1.6** Distribución de presión semi-elíptica entre dos esferas en contacto elástico [6].

En donde  $p_0$  representa la presión máxima, la cual ocurre en el eje de simetría;  $p_m$  representa la presión media. Tanto la presión máxima  $p_0$  como la presión media  $p_m$  están representadas por la ecuación (1.8).

$$p_0 = \frac{3}{2} p_m = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (1.8)$$

Cabe señalar que  $p_0$  es conocido como el esfuerzo de Hertz.

Se sabe que bajo cargas aplicadas a las esferas, los centros presentan un pequeño desplazamiento  $\Delta$ , el cual puede ser calculado mediante la siguiente ecuación (1.9).

$$\Delta = \frac{a^2}{R} = \frac{a\pi p_0}{2E^*} = \left\{ \frac{9p^2}{16RE^{*2}} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (1.9)$$

Una característica importante en el contacto Hertziano entre esferas, es que al si una de ellas sustituye por un cuerpo plano, éste tiene un radio efectivo infinito, por lo tanto se puede concluir que el radio reducido de contacto es numéricamente igual al de la esfera opuesta.

### 1.2.3 Contacto de dos cilindros con ejes paralelos

Otra importante solución propuesta por Hertz es el contacto que existe entre dos cilindros, los cuales tienen ejes paralelos.

Si dos cilindros con radios  $R_1$  y  $R_2$  se presionan uno contra el otro con ejes paralelos con una fuerza de magnitud  $P$  por unidad de longitud, la fuerza se distribuye en la zona longitudinal de contacto, esto se muestra en la figura (1.7). La porción de contacto que se da entre los cilindros tiene una anchura de  $2b$ , que representa la anchura total de contacto. La ecuación (1.10) proporciona la mitad de la anchura total de contacto entre los cilindros.

$$b = \left\{ \frac{2PR}{\pi E^*} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

$E^*$  representa en módulo de contacto definido por la ecuación (1.5) y  $R$  representa el radio reducido definido por la ecuación (1.6). La fórmula que presenta la presión contacto es semi-elíptica de y está descrita por la ecuación (1.11).

$$p(x) = p_0 \left\{ 1 - \frac{r^2}{b^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

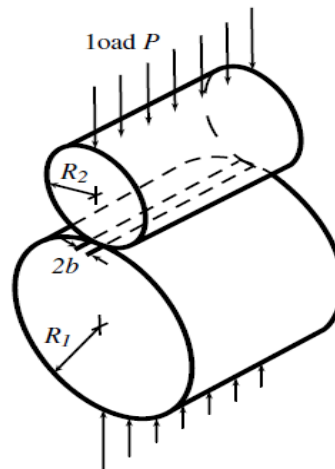


Figura 1.7 Cilindros paralelos en contacto elástico; la intensidad de la carga es  $P$  por unidad de longitud [6].

Donde la presión máxima  $p_0$  está definida por la siguiente ecuación (1.12).

$$p_0 = \left\{ \frac{PE^*}{\pi R} \right\}^{1/2} \quad (1.12)$$

La coordenada  $x$  mide perpendicularmente a los ejes del cilindro.

Otro parámetro importante dentro de este tipo de contacto es la presión media sobre la franja de contacto de los cilindros es igual a  $P/2b$  y está descrita por la ecuación (1.13).

$$p_m = \pi p_0 / 4 \quad (1.13)$$

Los ejes de los cilindros se mueven juntos una pequeña distancia  $\Delta$  donde  $\Delta$  está descrito por la ecuación (1.14).

$$\Delta = (1 - \nu_1^2) \left[ \ln \left( \frac{4R_1}{b} \right) - \frac{1}{2} \right] / E_1 + (1 - \nu_2^2) \left[ \ln \left( \frac{4R_2}{b} \right) - \frac{1}{2} \right] / E_2 \quad (1.14)$$

Existen otras idealizaciones con diferentes geometrías que Hertz realizó para poder determinar parámetros como la presión y la fuerza de contacto entre dos cuerpos elásticos con superficies curvas; en esta parte se presentan de manera general algunos de los modelos más importantes que Hertz desarrolló para tratar de resolver problemas de contacto entre diferentes geometrías, los cuales pueden ayudar a establecer una aproximación a diferentes problemas de contacto, cabe mencionar que no todos los modelos han sido incluidos debido a que su estudio completo sería pertinente en este pequeño apartado.

A continuación se presenta el modelo propuesto por Greenwood-Williamson, el cual se apoya en la teoría de contacto de Hertz incluyendo una relación estadística.

#### 1.2.4 Modelo de Greenwood-Williamson

Las siguientes definiciones fueron tomadas del texto “Contact Mechanics and Friction Physical Principles and Applications” de Valentin L. Popov, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010, págs. 82-100. (Corresponde al capítulo 7, sección 7.1).

En el contacto mecánico de superficies rugosas, Greenwood y Williamson (1966) desarrollaron un método para el cálculo de parámetros de superficies rugosas. En este modelo se considera una superficie rugosa la cual está conformada por un sistema de asperezas esféricas de igual radio; la altura de cada aspereza está determinada por una distribución aleatoria con alguna distribución de probabilidad. El modelo de Greenwood-Williamson obedece las ecuaciones de Hertz para la deformación de cada esfera

(aspereza). El desplazamiento de la superficie debido al promedio nominal de distribución de presión dentro del área de contacto nominal también se toma en cuenta en este modelo [5].

Si se tiene un modelo simple de una superficie rugosa, se puede observar una serie de asperezas con la misma geometría, las cuales tienen el mismo radio de curvatura y la misma altura, figura (1.8).

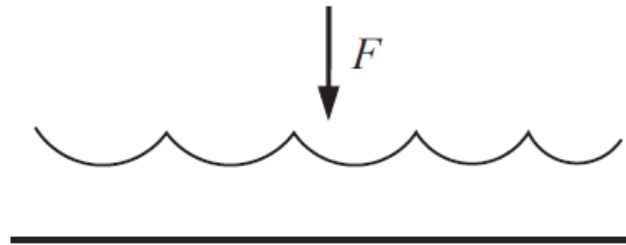


Figura 1.8 Modelo simple de una superficie rugosa [7].

Lo anterior cambia de forma, puesto que una superficie rugosa no tiene una distribución de alturas regular, sino todo lo contrario, tiene un comportamiento estocástico. Por el motivo antes mencionado Greenwood y Williamson desarrollaron y propusieron un modelo en el cual suponen que las asperezas tienen el mismo radio de curvatura y que las alturas de las mismas tiene una distribución estocástica alrededor de un valor promedio, figura (1.9).

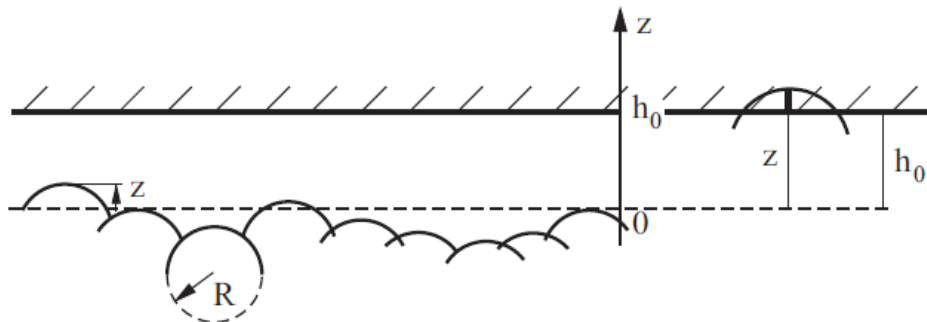


Figura 1.9 Modelo de una superficie estocástica de acuerdo con Greenwood-Williamson [8].

Este modelo plantea que debe existir una separación tal entre las asperezas de modo que sus deformaciones pueden considerarse de forma independiente en cada una de ellas. Por este motivo, la posición de las asperezas y por consecuencia la configuración de la superficie rugosa poco importa en el problema de contacto (bajo las hipótesis dadas), para este caso los valores de las alturas de las asperezas toman una gran importancia. Las alturas  $z$  de las asperezas son descritas por una función  $\Phi(z)$  de densidad de probabilidad, lo cual implica que las alturas que se encuentran dentro de un intervalo  $[z, z+dz]$ , esto puede ser representado por  $\Phi(z)dz$ ; de modo que si dentro de la superficie rugosa se tiene

un número  $N_0$  de asperezas, sus alturas se encuentran en el intervalo  $[z, z+dz]$  y puede ser representado como  $N_0\Phi(z)dz$ .

La función  $\Phi(z)$  descrita por la ecuación (1.15) adecuada para muchas superficies técnicas y naturales, de modo que se puede suponer que las alturas de los picos están distribuidos normalmente.

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}} \quad (1.15)$$

Donde  $l$  representa la raíz cuadrática media de la distribución de alturas, a la cual se le llama rugosidad y está representada por la ecuación (1.16).

$$l = \sqrt{\langle z^2 \rangle} \quad (1.16)$$

La consideración que se realiza para este modelo es que el contacto que existe ente los cuerpos sea elástico, recordando que el contacto entre las asperezas es un contacto Hertziano. El contacto se realiza entre un cuerpo elástico con una distribución estadística de rugosidad, la cual fue antes descrita, da origen a las alturas de las esferas para describir la rugosidad de la superficie en estudio, y entre un plano rígido a una distancia  $h_0$  desde un nivel medio, en el cual se supone un valor de cero para el eje  $z$ . Al hacer contacto las asperezas con el plano, las interacciones elásticas entre ellas son despreciadas, en el caso en donde las alturas corresponden a un valor  $z > h_0$  se encuentran en contacto con el plano rígido. La profundidad de penetración de una aspereza con altura  $z$  es  $d = z - h_0$ . De acuerdo con la teoría de contacto de Hertz, para un solo contacto, se puede obtener  $a^2 = dR$ . De modo que el área de contacto para una sola aspereza se determina por la ecuación (1.17).

$$\Delta A = \pi a^2 = \pi dR = \pi(z - h_0)R \quad (1.17)$$

Para determinar la fuerza de contacto en una sola aspereza se utiliza la ecuación (1.18).

$$\Delta F = \frac{4}{3}E^*R^{1/2}d^{3/2} = \frac{4}{3}E^*R^{1/2}(z - h_0)^{3/2} \quad (1.18)$$

Es importante señalar que lo que interesa conocer para el modelo de las asperezas es tanto el área total de contacto así como la fuerza normal total  $F_N$  y esto se obtiene de la integración sobre todas las asperezas en contacto, lo cual significa que la integración se debe llevar a cabo sobre todas las alturas desde  $z = h_0$  hasta el infinito, la ecuación (1.19) representa el número total de asperezas, la ecuación (1.20) representa el área total en contacto y la ecuación (1.21) representa la fuerza normal total ejercida en el contacto.

$$N = \int_{h_0}^{\infty} N_0\Phi(z)dz \quad (1.19)$$

$$A = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R(z - h_0) dz \quad (1.20)$$

$$F_N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz \quad (1.21)$$

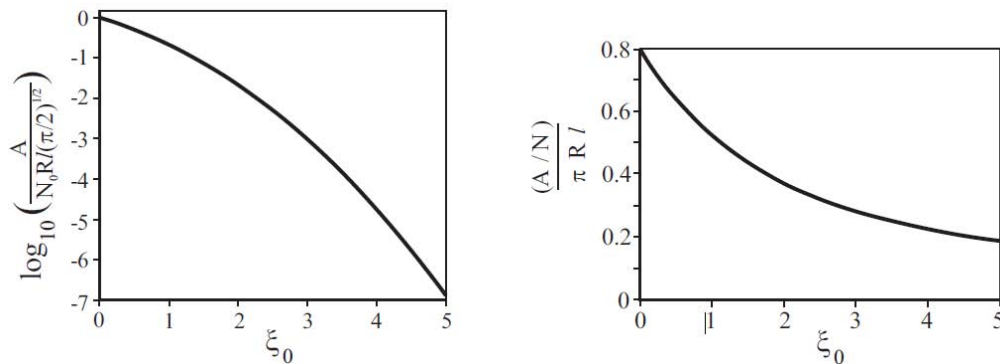
De acuerdo con este modelo, el área total, la fuerza total y el número de contactos crecen de forma exponencial a medida que los cuerpos son presionados (disminución de  $h_0$ ), mientras las relaciones entre estos valores se mantienen relativamente sin cambios. La ecuación (1.22) representa el área de contacto promedio de una aspereza.

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{A}{N} = \frac{\int_{h_0}^{\infty} dz N_0 \Phi(z) \pi R \cdot (z - h_0)}{\int_{h_0}^{\infty} dz N_0 \Phi(z)} \quad (1.22)$$

Para representar lo anterior se hará referencia a la variable  $\xi$  la cual está adimensionalizada de la siguiente manera  $\xi = z/l$  y también se define  $\xi_0 = h_0/l$  con lo cual se obtiene el área de contacto y está representada por la ecuación (1.23).

$$\langle \Delta A \rangle = \pi R l \left[ \frac{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \cdot (\xi - \xi_0)}{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2/2)} \right] \quad (1.23)$$

A continuación se presentan dos gráficas que sugieren un comportamiento exponencial en relación con el área de contacto, figura (1.10)



**Figura 1.10** Dependencia del área de contacto y el área de contacto promedio de un micro-contacto en la variable de separación  $\xi_0$  [7].

En la figura anterior se puede observar que el área de contacto, ecuación (7.6) cambia a siete órdenes de magnitud así la distancia relativa entre las dos superficies cambia de  $\xi_0=0$  a 5, mientras que el área de contacto promedio  $\langle \Delta A \rangle$  es a lo menos triplicada. Para tener una mejor idea de la interpretación de la gráfica se puede decir que el valor de  $\xi_0=0$  corresponde a una fuerza compresiva muy fuerte de la cual la superficie de contacto es aproximadamente la mitad de la superficie de contacto aparente. Es importante señalar que los valores correspondientes a un valor  $\xi_0=4$  no son realistas debido a que para este

valor existen muy pocos puntos de contacto. Se puede decir que el rango típico de la fuerza normal promedio que corresponde al área real de contacto entre  $\xi_0=10^{-2}$  y  $10^{-4}$  del área de contacto aparente, la cual logra para valores  $\xi_0=2.5$  a  $3.5$ . El radio  $\langle \Delta A / \pi R l \rangle$  cambia en este rango ligeramente alrededor del valor  $0.3$ . Una buena aproximación simplificada para el área de contacto está representada por la ecuación (1.24).

$$\langle \Delta A \rangle \approx Rl \quad (1.24)$$

Otra característica importante en este modelo es que el área de contacto microscópica se mantiene prácticamente constante (o cambia muy lentamente) mientras la fuerza cambia en varios órdenes de magnitud.

Como se ha visto hasta ahora, existen diferentes maneras de abordar, en este caso, la forma de describir superficies que contienen asperezas (rugosidad), pero no se ha llegado a una generalización y un planteamiento analítico por lo cual existen diferentes enfoques, los cuales se apoyan de forma directa en la descripción de superficies rugosas con carácter fractal debido a que la realidad de la naturaleza casi en su totalidad muestra un comportamiento como tal incluyendo las superficies rugosas que son formadas por diferentes factores; por este motivo es conveniente abordar una descripción general acerca de los fractales de modo que sea un sustento para el desarrollo de este trabajo, dicha discusión se verá más adelante.

A continuación se presenta un panorama general acerca de las dimensiones Euclidianas y fractal, así como un panorama general acerca de los fractales incluyendo una breve historia de los mismos, su relación con diferentes fenómenos de la naturaleza y en particular con las superficies.

### **1.3 Geometría Euclidiana**

La geometría Euclidiana se encarga del estudio de las propiedades del plano y el espacio tridimensional y se puede decir que describe el espacio en el que vivimos, se dice que es una propiedad aparente del mismo.

La geometría Euclidiana fue postulada por Euclides 300 años A.C. en su obra “Los Elementos”, presenta los postulados y axiomas en el que se desarrolla esta rama de las matemáticas. Dichos postulados son considerados lógicos, de los cuales a través de operaciones lógicas genera nuevos postulados que son considerados como verdaderos en donde se presenta una verdad evidente [9].

### 1.3.1 Elementos de la Geometría Euclidiana

Los principales elementos de la geometría Euclidiana son **el punto, la línea y el plano** y en un sentido menos formal **el espacio**, figura (1.11). Dentro de la geometría Euclidiana se puede definir al punto como un ente matemático que está situado en un lugar en el espacio, el cual carece de longitud y anchura. Dentro de la definición de recta se puede decir que ésta es una sucesión de puntos en el espacio la cual tiene longitud pero carece de anchura y profundidad. Dentro del concepto de plano, podemos definir a éste como una sucesión de líneas en el espacio el cual tiene longitud y anchura pero carece de profundidad. Del mismo se puede definir al **espacio** como una sucesión de planos que conforman dicho espacio y tanto el punto, la línea y el plano están contenidos en él.

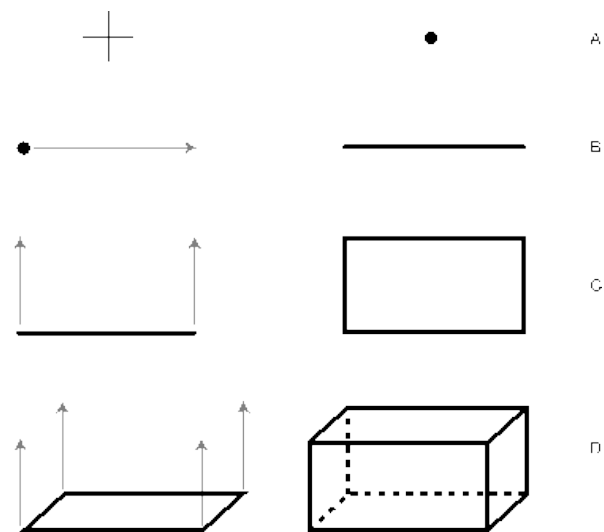


Figura (1.11) Elementos de la geometría Euclidiana [10].

De este modo se puede observar que los primeros intentos por describir el mundo físico partieron de la geometría Euclidiana haciendo uso de conceptos “básicos” para la descripción de este, de modo que en un etapa antigua la geometría Euclidiana permitió de cierto modo la interpretación del mundo físico con sus respectivas ventajas y desventajas. Al tener presente que la geometría Euclidiana se desarrolló principalmente en 1D, 2D y 3D, es importante tener presente el concepto de **dimensión**, que es un tema que se trata de manera más general en la siguiente sección.

### 1.4 Geometría Fractal

La geometría fractal es una rama de la geometría, la cual fue introducida por el matemático Mandelbrot, ésta se ocupa del estudio de geometrías que son contrapuestas a las geometrías Euclidianas las cuales son regulares y suaves, mientras que las geometrías fractales son todo lo contrario, con formas irregulares y con cambios bruscos en forma



geométrica. Se dice que la geometría fractal es la geometría de la naturaleza debido a que muchos fenómenos relacionados con ésta pueden ser planteados y resueltos mediante ella. Una característica importante de la geometría fractal es que las geometrías que son descritas no tienen dimensión entera, su dimensión generalmente es fraccionaria.

Además se puede agregar que la geometría fractal es una teoría matemática moderna, la cual introduce nuevos conceptos matemáticos para su interpretación y se puede decir que ésta describe ciertas geometrías, los cuales tienen propiedades muy particulares; un ejemplo de dichas propiedades puede ser que al aumentar estos objetos geométricos a ciertas escalas sin importar cuál sea, presentan un comportamiento que tiende al infinito, guardan una semejanza exacta al todo, entonces se dice que son simétricos en escala o autosemejantes [11].

Hasta ahora se tiene claro que la geometría Euclidiana y la fractal tienen una gran diferencia, aunque ambas se dedican al estudio de objetos geométricos, su principal diferencia radica en la dimensión en la que éstos se presentan. A continuación se conceptualiza de forma general la idea de **dimensión**, de forma que se tenga un mejor concepto de ella.

#### 1.4.1 Dimensión

Se puede decir que la dimensión es un número que está directamente relacionada con las propiedades métrica (topológicas) de un objeto matemático. Además se puede decir que la dimensión es una medida topológica del tamaño de sus propiedades geométricas. Hablando en términos generales, es el número de coordenadas necesarias para especificar un punto en el objeto. Por ejemplo, un rectángulo es bidimensional, mientras que un cubo es tridimensional. La dimensión de un objeto a veces también se conoce como “dimensionalidad” [12].

#### 1.4.2 Dimensiones Euclidianas

La dimensión euclidiana es simplemente el número de coordenadas requeridas para especificar determinado objeto geométrico en particular [13].

Más que definir qué es la dimensión Euclidiana es conveniente saber el significado de **espacio Euclideo**. El espacio Euclideo, a veces llamado espacio Cartesiano o simplemente n-espacio, es el espacio de todos los n-múltiplos de los Números Reales  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Tales tuplas son a veces llamadas puntos. La totalidad del n-espacio es comúnmente denotada por  $\mathbf{R}^n$ , aunque literatura más vieja utiliza  $\mathbf{E}^n$  [14].

En este espacio se manejan principalmente 3 dimensiones, las cuales también pueden ser llamadas dimensiones clásicas o convencionales. Las primeras tres dimensiones Euclidianas tienen que ver directamente con los elementos de la geometría Euclídea, los cuales son para la dimensión 1 la recta, para la dimensión 2 el plano y para la dimensión 3 el espacio tridimensional.

A continuación se presenta a manera de ejemplo las tres dimensiones que el espacio Euclídiano hace referencia y al mismo tiempo se ilustra el procedimiento por el cual más adelante serán determinadas las escalas de algunas geometrías fractales.

### 1.4.3 Dimensión 1

El caso más sencillo de las dimensiones Euclidianas es el de la recta, esta se forma a partir de una sucesión de puntos los cuales la conforman, dicho de otro modo la recta está contenida en la dimensión 1, debido a que ésta requiere estar contenida en un espacio de una dimensión para ser construida.

Al considerar un segmento de recta, que como es sabido se encuentra en la dimensión Euclídiana 1. Se parte que de que el segmento de recta tiene longitud 1; ahora si el este segmento de recta es dividido en  $N$  partes de longitud  $L$ , se obtienen  $N(L)$  partes de manera que lo anterior se puede expresar:

$$N(L) * L^1 = 1$$

De modo que la recta puede tener cualquier longitud  $L$  y puede ser dividida en  $N(L)$  partes iguales (Figura 1.12).

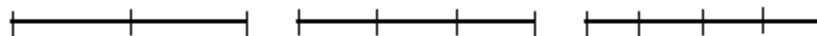


Figura 1.12 Rectas con diferentes longitudes  $L$  en sus segmentos [15].

De modo que el exponente de  $L$  representa la dimensión en la que el objeto geométrico está contenido, este procedimiento será generalizado más adelante.

### 1.4.4 Dimensión 2

Lo anterior también es extensivo para un objeto geométrico en la dimensión 2; si se toma un cuadrado de área superficial 1 y se divide en pequeñas superficies, en donde cada lado posea longitud  $L$ , de manera que el número de elementos que se necesitan para recubrirlo está dado por  $N(L)$  y el área de cada elemento será  $L^2$  de tal manera que la siguiente expresión representa la superficie total de la superficie unitaria:

$$N(L) * L^2 = 1$$

Lo anterior resulta útil para cualquier cantidad de divisiones que posea el cuadrado en la dimensión 2, esto se muestra en la siguiente figura (1.13).

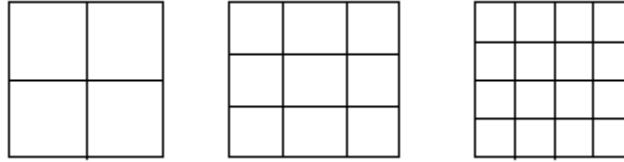


Figura 1.13 Cuadrado con diferentes tamaños de  $L^2$  [15].

### 1.4.5 Dimensión 3

Continuando con un objeto geométrico en la dimensión 3, donde ahora un cubo de volumen 1 y de longitud en cada uno de sus aristas es L. Ahora la nueva expresión que se obtiene es:

$$N(L) * L^3 = 1$$

Una vez más este procedimiento sirve para un cubo dividido en N partes conservando una longitud en la arista de tamaño L cualquiera como se muestra a continuación, figura (1.14).

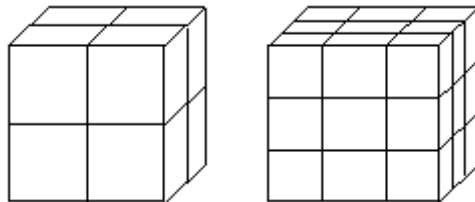


Figura 1.14 Cuadrado con diferentes tamaños de  $L^2$  [15].

Retomando la anterior idea se puede generalizar que la dimensión de un objeto geométrico es D, de tal manera que la siguiente ecuación generaliza el comportamiento antes mencionado.

$$N(L) * L^D = 1 \quad (1.32)$$

Así se puede decir en una forma generalizada que N(L) es el número de objetos elementales, de unidades de tamaño L que completan el objeto geométrico. De la

ecuación (1.32) si  $D$  es despejada se obtiene la siguiente ecuación, la cual describe la dimensión del objeto geométrico:

$$D = \frac{\log(N(L))}{\log(1/L)} \quad (1.33)$$

Resumiendo lo anterior se puede decir que: una línea tiene dimensión uno: basta dar la distancia de una de sus extremos para fijar un punto en ella. Esto se usa en las carreteras: se toma como referencia una ciudad (es decir un punto extremo de la línea) y se ponen señales que nos indican a la distancia a la que nos encontramos de determinada ciudad.

Un rectángulo tiene dimensión dos: Para ubicar un punto en el rectángulo, basta con dar la distancia de dos de sus lados. Esto se utiliza generalmente donde las calles forman una rejilla (sistema de ejes coordenados) para ubicar lugares específicos.

Un **cubo**, una **esfera** o un **cilindro** tienen **tres** dimensiones: hay que dar la altura y luego dos coordenadas para ubicar el punto a esta altura.

Hasta ahora se ha podido constatar que las dimensiones Euclidianas son enteras. Con el procedimiento anterior se puede generalizar una expresión para obtener dimensiones enteras y no enteras, dicho procedimiento será de utilidad para poder calcular y conocer las dimensiones de los fractales.

La definición anterior no es del todo satisfactoria, de tal modo que los matemáticos hicieron varios esfuerzos para mejorarla. Estos esfuerzos se describen en la dimensión topológica [15]. Para este trabajo se define de forma general el concepto de dimensión Euclidiana sin profundizar en el concepto de dimensión topológica debido a que éste desembocaría en un estudio más particularizado que estaría fuera del alcance del presente trabajo.

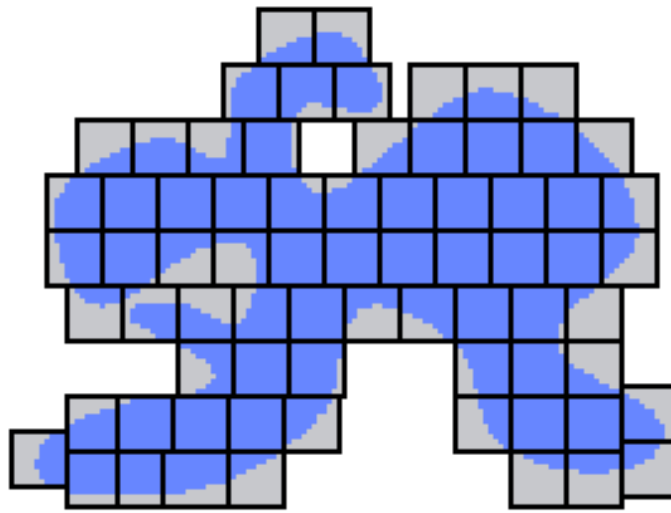
#### **1.4.6 Dimensión Fractal**

“La dimensión fractal de un grupo es un número que dice cuan densamente dicho grupo ocupa el espacio métrico en el cual éste se encuentra” [16]. También se puede decir que la dimensión fractal es una medida de su complejidad debido a que los fractales son altamente detallados y poseen formas geométricas complejas [17].

Se dice que hablar de dimensión en un contexto fractal carece de sentido debido a que los fractales tienen dimensión no entera. A continuación se presenta un ejemplo que ilustra de manera directa la idea antes escrita.

Al querer medir el área de una figura, que en este caso corresponde a la figura determinada por la mancha azul, se cubre con cuadrados, dichos cuadrados tienen por

longitud  $r$  cada lado, de modo que el objetivo es contar el número de cuadrados necesarios para llenar dicha figura (1.15).



**Figura 1.15** Figura cuadrículada para determinar su área aproximada [18].

En este ejemplo se necesitan 72 cuadrados para llenar la superficie azul. Se puede determinar de forma sencilla que los cuadrados cubren un área de  $72r^2$ , que corresponde al área de color azul más el área de color gris, de modo que esta misma área (gris), muestra la respectiva diferencia entre el área total cubierta por el conjunto de cuadrados y el área de la superficie de la figura.

Entre más pequeños sean los cuadrados, el área de color gris se reduce, de modo que el error en el cálculo del área también; como consecuencia de mejorar el cálculo del área, se necesitará un mayor número de cuadrados; para este ejemplo se asigna  $N$  a esta variable, de modo que el área que cubre los cuadrados le denominamos  $Nr^2$ . Si  $r$  tiende a cero, el área de los cuadrados determinada por  $Nr^2$  se aproxima al área de la figura en estudio.

Para medir el área de un segmento también se puede utilizar el método antes descrito. Es conveniente volver a decir que lo que se está midiendo es el área del segmento (Figura 1.16) y no su longitud, ya que en teoría el mismo no tiene área, puesto que el segmento se encuentra en 1D.



**Figura 1.16** Segmento de recta [18].

Al relacionar la longitud de la línea con la longitud  $r$  de los cuadrados nos proporciona la siguiente razón:  $N=L/r$ , de modo que se necesitan  $N=L/r$  para cubrir el segmento de recta completamente. Es necesario presentar la siguiente aclaración:  $N$  es un número entero, el

cual puede ser igual o mayor que  $L/R$ , nunca menor porque es necesario que el segmento de recta sea cubierto por completo, de modo, que  $L/r$  es muy probable que no sea un número entero; un ejemplo claro es que  $L/r=6.3$ , entonces podemos decir que necesitamos 7 cuadrados.

Para el resultado al que se quiere llegar se sabe que  $N$  es menor que  $(L/r)+1$ , además, el área cubierta por los cuadrados es menor que  $((L / r) + 1) r^2 = Lr + r^2$ .

Ahora si se hace que  $r$  tienda a cero,  $Lr + r^2$  también tenderá a cero y por lo tanto el área del segmento de recta es cero, siendo un resultado lógico.

Con fines didácticos se puede hacer una modificación al cálculo; multiplicar al número  $N$  por  $r$  y luego hacer tender a  $r$  a cero, entonces se puede observar que  $Nr$  tiende a  $L$ , que es la longitud del segmento. Con este mismo método se puede calcular la longitud del segmento considerando la expresión  $Nr$  en vez de  $Nr^2$  cuando  $r$  tiende a cero.

Si la longitud de la figura (1.15) es calculada por el método antes mencionado se puede observar qué pasa con el valor  $Nr$  si  $r$  tiende a cero; es sencillo saber que  $Nr$  tiende a infinito, lo que se puede interpretar acerca de la longitud de la mancha es infinita.

Con la anterior explicación se puede llegar a la conclusión de que la dimensión parece carecer de sentido en ciertos problemas geométricos, de modo que lo que importa en muchos de los problemas antes mencionados no son las “medidas” en sus respectivos espacios que las contienen, sino de qué manera éstas geometrías “llenan” el espacio que las contienen, de modo que ésta es la tarea de la Geometría Fractal.

Se puede hacer referencia al cálculo de la longitud y área del siguiente fractal:

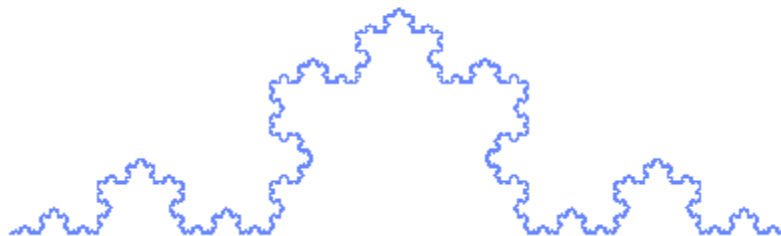


Figura 1.17 Curva de Koch [18].

Esta curva tiene una longitud infinita y un área cero. Resumiendo:

Para poder determinar la dimensión  $D$  de determinada geometría se debe considerar  $Nr^D$  y se hace tender a  $r$  hacia cero, de modo que se puede medir la longitud de un segmento

si  $D=1$  y el área de una figura plana si consideramos a  $D=2$ . Un ejemplo un poco más complejo es la Curva de Koch, figura (1.17) muestra que  $Nr^D$  se aproxima a un valor positivo y no cero cuando  $D= 1.2618$  y como consecuencia el “contenido” de la Curva de Koch se puede medir en la dimensión  $D=1.2618$  [18].

A continuación se presenta un ejemplo en el cual se determina la dimensión fractal de la Curva de Koch, en el cual se ilustra de manera clara que las dimensiones fractales no son enteras, con lo cual se puede reafirmar, que estos objetos geométricos no “llenan” en espacio que las contienen.

### 1.4.7 Dimensión de la Curva de Koch

Se puede saber partiendo de una línea recta que la longitud de la Curva de Koch aumenta  $4/3$  en cada paso de forma indefinida, figura (1.18), sabiendo que cada segmento de línea en cada paso (cada aumento de longitud) tiene la misma longitud.



Figura 1.18 Primer nivel de división de la Curva de Koch.

En un segundo nivel de división, figura (1.19) se puede observar que de nuevo cada segmento de recta es dividido en rectas con la misma longitud aumentando cada una de ellas (antes de la división)  $4/3$  de longitud.

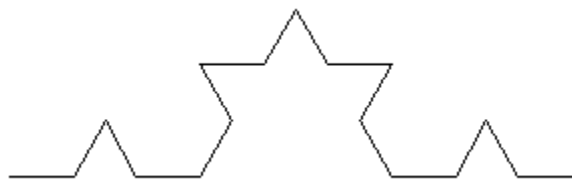


Figura 1.19 Segundo nivel de división de la Curva de Koch.

Después de un décimo nivel de división fractal, figura (1.20), se puede percibir que la longitud se incrementa de manera indefinida, lo cual resulta ser una contradicción. Con lo anterior se puede decir que la noción de longitud carece de sentido en el ámbito fractal y como consecuencia se introduce el concepto de **dimensión fractal**, de modo que ésta

describe la forma en la que se llena una porción de espacio en la cual es contenido el objeto fractal (no llena toda la porción del plano).



Figura 1.20 Décimo nivel de división de la Curva de Koch.

La dimensión fractal de la Curva de Koch es calculada mediante la ecuación (1.33):

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618 \dots$$

Es importante conocer de forma general qué es la dimensión fractal ya que como fue descrito anteriormente, en la geometría fractal el concepto de longitud carece de sentido y es más conveniente hablar de dimensión fractal. Hasta ahora se tiene un panorama muy general de los fractales que ayudarán de alguna manera a comprender el enfoque y desarrollo del presente trabajo [15].

Muy claramente se puede tener en cuenta que el concepto de dimensión es pieza fundamental para poder ayudar a comprender la diferencia entre **dimensiones** y poder hacer hincapié en la diferencia desde un panorama más general entre las geometrías de interés y el modo en el que éstas pueden ser utilizadas, de modo que es pertinente mencionar que este trabajo aborda el contacto entre superficies rugosas desde un punto de vista fractal. Habiendo definido conceptos generales pero fundamentales para la concepción de los fractales ahora conviene definir qué son éstos.

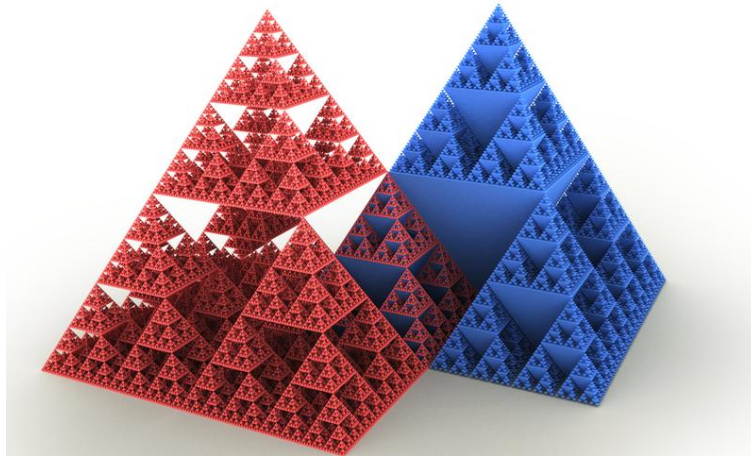
## 1.5 Fractales

### 1.5.1 Breve Historia de los Fractales

Se tiene evidencia de que los fractales ya habían sido descubiertos mucho antes de que se consolidara la Geometría Fractal, aunque no se les haya asignado tal denominación. De acuerdo a lo antes mencionado se han encontrado grabados japoneses con estas estructuras que probablemente datan del año 1400 D.C. De hecho muchos de éstos grabados tienen estructuras similares al triángulo de Sierpinski [19]. Una característica llamativa del triángulo de Sierpinski, figura (1.21), es su estricta autoafinidad. El Triángulo completo de Sierpinski naturalmente se descompone en tres partes triangulares internas, una parte superior y dos inferiores. Cada una de estas partes es una réplica exacta de la



figura completa original. Igualmente cada una de estas partes mismas, pueden ser descompuestas en tres triángulos internos más pequeños, siendo de nuevo una réplica exacta del la figura original total. “Cuando una figura es una réplica exacta en cada una de sus partes, se puede decir que la figura manifiesta autosimilitud. Entonces cada parte del Triángulo de Sierpinski tiene esta propiedad, es que es también autosimilar “ [17].



**Figura 1.21** Triángulo de Sierpinski [20].

Más formalmente “los fractales fueron concebidos aproximadamente en el año de 1890 por el francés Henry Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años 20’s. Dicho estudio fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo del ordenador digital” [21].

Es conveniente saber que se considera al Dr. Benoit B. Mandelbrot como el padre de la Geometría Fractal. Mandelbrot concibió la Geometría Fractal partiendo de las geometrías irregulares que posee la naturaleza, de tal modo que ésta se comenzó a utilizar en diferentes campos de las ciencias; Mandelbrot afirma: “La geometría fractal permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías hechas y derechas, identificando una serie de formas que llamo fractales. Las más útiles implican azar, y tanto sus regularidades como irregularidades son estadísticas” [22].

Mientras el Dr. Madelbrot trabajaba en los laboratorios de IBM para realizar análisis de ruido y perturbaciones eléctricas, encontró un patrón de comportamiento de tal modo que comenzó a descifrar su estructura, dándose cuenta de que tal compormiento no podía ser descrito por la matemática estadística de su tiempo. La visión de Mandelbrot lo llevó a considerar que otros sistemas podrían tener este mismo comportamiento. Un

planteamiento muy importante que se hizo Mandelbrot fue proyectado en su obra ¿Cuánto mide realmente la costa de Inglaterra?, figura (1.22), [23].

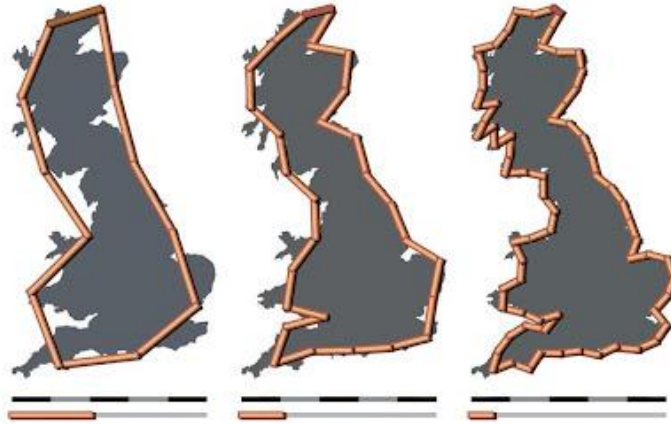


Figura 1.22 La costa de Gran Bretaña descrita con segmentos de 200, 100 y 50 km [24].

La conclusión importante en el ejemplo que Mandelbrot plantea es que las mediciones dependerán de la escala de medición que sea utilizada. Si bien, estrictamente, los fractales no son iguales a diferentes escalas, sí lo son en su forma estadística [24].

### 1.5.2 Noción de Fractales en Fenómenos Naturales

Los fractales son objetos geométricos que actualmente respaldan gran cantidad de estudios científicos que se apoyan en ellos. Debido a sus propiedades geométricas resultan adecuadas para realizar las tareas que los objetos geométricos Euclidianos no podrían realizar, especialmente en fenómenos geométricos de la naturaleza; se sabe hoy en día que la naturaleza tiene geometrías muy complejas que se asemejan a las propiedades de los fractales, y es por este motivo que para describirla, la geometría fractal es adecuada.

“La geometría Euclidiana no es apropiada por ejemplo, para describir superficies naturales, como bien podrían ser los paisajes que se forman en la naturaleza, de modo que es mejor emplear la geometría fractal. La razón es que las fuerzas que modelan las superficies naturales: gravedad, tensiones, fricción, vibraciones, erosión, gradientes térmicos y de congelación, reacciones químicas, etc; acontecimientos periódicos y no periódicos: estaciones, cambios de vegetación, sol, viento, lluvia, nieve, deslizamiento, hundimiento, etc. generan superficies las cuales su dimensión topológica es mayor a 2; esto es, mayor que la Euclidiana” [25]. La posibilidad de poder utilizar elementos tanto de la geometría Clásica o Euclidiana para describir geometrías complejas como bien podrían ser las hojas de los helechos o el perfil de un terreno montañoso o más bien la representación de una superficie rugosa la cuál será de estudio para este trabajo, no son los más

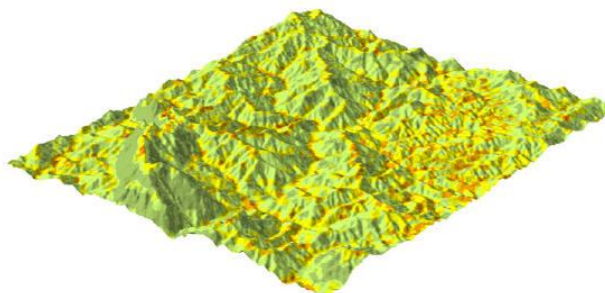
adecuados para poder generar y describir estas formas tan complejas, por la razón antes mencionada relacionada con la dimensión. La principal limitación que se presenta en este tipo de fenómenos se debe principalmente al momento de ser ampliados; un ejemplo de lo contrario es un arco de círculo, el cual al ser ampliado, se va “transformando” poco a poco en una recta. Lo anterior no sucede con las formas naturales, y por decirlo de alguna manera, reales, su comportamiento es distinto, un ejemplo con este compartamiento fractal es la superficie rugosa de una roca, la cual al ser ampliada se puede distinguir el mismo patrón de repetición sin importar su escala, manteniendo la misma complejidad a varios niveles de amplificación con algún dispositivo óptico, tal como el microscopio.

En muchas ocasiones los fractales han sido estudiados como objetos geométricos sin alguna aplicación (Matemática pura), más sin embargo hoy en día tienen una aplicabilidad tan variada como podría ser el modelado de la distribución de las estrellas del Universo, las fluctuaciones de precios en un mercado, la ramificación albeolar de los pulmones, la frontera difusa de una nube, la distribución electromagnética en una tormenta eléctrica, figura (1.23).



**Figura 1.23** Rayos en una tormenta eléctrica [26].

En una relación más cercana al tema de esta tesis, se pueden encontrar fractales en un terreno montañoso o en una superficie que presenta cierta distribución de asperezas, figura (1.24).



**Figura 1.24** Superficie fractal que representa un paisaje montañoso generada mediante un método iterativo [27].

Por otra parte se sabe que el desarrollo en la ciencia fractal también ha producido grandes contribuciones en la tecnología de generación y reproducción de imágenes. Es una herramienta muy poderosa para la generación de paisajes, tales como la imagen anterior, donde se puede observar claramente un terreno montañoso. En general, la geometría fractal ha sido de gran utilidad en muchos de los campos de la ciencia, ayudando a éstos a su desarrollo en contribución de la humanidad.

Hasta ahora se ha visto de forma preliminar una breve introducción a la historia de los fractales y de su existencia en diferentes fenómenos de la naturaleza; es importante mencionar que muchos de los fenómenos naturales tienen un comportamiento fractal pero sería imposible mencionarlos todos, es por este motivo que sólo a manera de ejemplificación se ha hecho referencia de unos cuantos. A continuación se presenta una serie de conceptualizaciones que si no definen de manera formal el concepto de fractal, dan al lector una idea del concepto de fractal.

### 1.5.3 ¿Qué son los fractales?

Un fractal es definido como un objeto geométrico en el cual su estructura básica, la cual puede ser fragmentada y/o irregular con la propiedad de que se repite a diferentes escalas. El término fractal fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en el año de 1975, el cual pertenece al etimología latina *fractus* que significa fracturado o quebrado. En la naturaleza existen muchas estructuras que pertenecen a esta clasificación. La propiedad matemática que define a un fractal genuino es que su dimensión métrica fractal es un número no entero.

Se puede decir además que un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos, que a su vez también son geométricos, de tamaño y orientación variable, con la particularidad de que tienen un aspecto similar. Si un elemento fractal es aumentado, los elementos que vuelven a ser observados vuelven a tener el mismo aspecto y esta característica es independiente de la escala que es utilizada. Otra definición los designa como objetos geométricos compuestos de elementos, que a su vez también son geométricos, de tamaño y orientación variable, de aspecto similar. Se ha mencionado anteriormente que los elementos fractales tienen una estructura geométrica recursiva, propiedad que recibe el nombre de autosimilitud.

### 1.5.4 Fractales lineales y no lineales

Dentro de una clasificación general de los fractales existen aquellos que son **lineales** y **no lineales**, de acuerdo a lo anterior se tiene [28]:

**Fractales  
Lineales**

*Son aquellos que se constituyen con un simple cambio en la variación de sus escalas. De modo que los fractales lineales son totalmente idénticos en todas sus escalas, aún en una escala infinita. Algunos ejemplos son la Curva de Cantor, la Isla de Koch y el Triángulo de Sierpinski.*

**Fractales no  
Lineales**

*Los fractales no lineales se generan a partir de distorsiones complejas (con un comportamiento no lineal), que incluye también un comportamiento que es descrito por la Matemática caótica, que describe principalmente distorsiones no lineales. El fractal no lineal se parece al original pero estrictamente no es; esto significa que éste tiene pequeñas variaciones. Ejemplos de esto fractales se pueden encontrar el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia.*

### 1.5.5 Autosimilaridad y autoafinidad

Para este trabajo es importante mencionar, para evitar confusiones en la terminología, que a la autosimilaridad también es llamada autosemjanza o autosimilitud; teniendo en cuenta dicha aclaración se procederá a describir la diferencia que existe entre autosimilaridad y autoafinidad.

Existen dos conceptos muy importantes dentro de la geometría fractal, los conceptos de autosimilaridad y autoafinidad. Los comportamientos autosimilares repiten la forma original cuando se realiza un análisis detallado de su forma a diferentes escalas. De modo que una estructura es autosimilar si puede ser cortada arbitrariamente en trozos pequeños, cada uno de los cuales es una pequeña réplica de la estructura completa [17]. A saber, es de estricto rigor que el concepto de autosemjanza y autoafinidad se aplica sólo en fractales matemáticos (que surgen de la iteración de fórmulas sencillas pero que llevan a estructuras muy complejas. E.g. Polvo de Cantor, Curva de Peano, Copo de Nieve de Koch.). Por otro lado, los fractales naturales o físicos (fractales que se encuentran en la naturaleza, e.g. una hoja de helecho, una arborización braquial, los capilares sanguíneos), son fractales autoafines debido a que su fractalidad es solamente estadística y poseen en consecuencia un escalamiento anisotrópico (lo anterior quiere decir que no tiene las mismas propiedades en todas las dimensiones del análisis), de modo que si una de sus

partes es amplificada no mantiene las mismas características de la figura como un todo [29].

“La escala de transformación que se describen para fractales autosimilares es isotrópica, lo que significa que la dilatación aumenta los tamaños del sistema de manera uniforme en cada dirección espacial. Los objetos fractales que deben ser reescalados usando una transformación anisotrópica son llamados fractales autoafines” [30].

Hasta ahora se ha visto la importancia de la mecánica de contacto en el desarrollo de diferentes áreas que han producido un amplio avance tanto en la ciencia como en la tecnología, se han mostrado las principales teorías que la sustentan, así como los conceptos fundamentales geométricos en los cuáles éstas se apoyan, de tal manera que ahora se tiene un panorama general e indicativo acerca de la importancia del presente trabajo para el contacto entre superficies rugosas. A continuación se muestran los elementos necesarios relacionados con dichas teorías, que explican conceptos necesarios que están directamente relacionados con la rugosidad, el cual es el tema central del presente trabajo.

## **2 RESUMEN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA TESIS**

### **2.1 General**

En este resumen, se da una breve descripción de los problemas que se enfrentan en la tesis. Una descripción más extensa se ha dado en la introducción y los antecedentes. Esta tesis investiga el contacto entre superficies rugosas y su movimiento relativo. La relación entre la fuerza horizontal para mover dos superficies rugosas en su plano de contacto y la fuerza vertical aplicada a los cuerpos en contacto define el coeficiente de fricción. Se sabe que la mayoría de las superficies rugosas muestran características auto-similares [31] por lo que será necesario investigar la manera de simular de manera numérica las características de superficies fractales y auto-similares. De las varias maneras para generar una superficie auto-afín [32], la superficie pseudo-aleatoria Weierstrass-Mandelbrot se ha investigado de manera más extensa en la literatura [33-35], pero la superficie generada mediante el algoritmo de punto medio respeta mejor las características auto-afines de una superficie aleatoria [36-38]. Los elementos necesarios para estudiar el contacto entre estas superficies se resumen en las secciones 2.2 y 2.3.

### **2.2 Ecuaciones gobernantes**

Para mantener breve esta introducción, se utilizará la anotación compacta usada por Mura [37]. Se indicará el tensor de esfuerzos de Cauchy mediante sus componentes  $\sigma_{ij}$ , el

vector de desplazamientos con sus componentes  $u_i$  y las deformaciones (ingenieriles) con  $\varepsilon_{ij}$ ; todos los subíndices varían de 1 a 3. En anotación libre de subíndices, los tensores se representarán con letra negrita, por ejemplo  $\sigma$ ,  $u$ ,  $\varepsilon$ . Se trabaja siempre en un sistema cartesiano, por lo que no es necesario distinguir entre tensores covariantes y contravariantes. Una coma antes de un subíndice  $i$  indica la derivada parcial de la cantidad correspondiente con respecto a  $x_i$ . Se aplica la convención de sumas de Einstein para subíndices repetidas. Las ecuaciones se expresan en coordenadas materiales (aproximación lagrangiana). En la mayor parte de los modelos analizados, el material obedecerá el comportamiento linealmente elástico. Las ecuaciones básicas por obedecer son las siguientes:

Relación entre campo de desplazamientos y deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

Equilibrio estático en ausencia de fuerzas de cuerpo:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.2)$$

Ecuaciones constitutivas (elasticidad lineal):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.3)$$

El tensor de rango 4 de constantes elásticas  $\mathbf{C}$ , debido a sus simetrías, sólo cuenta con 21 componentes independientes; para un material isotrópico, este número se reduce a 2 y las ecuaciones constitutivas se reducen a la ley generalizada de Hooke.

Condiciones de frontera:

Para superficies libres se tiene que:

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (2.4)$$

Para zonas donde existe contacto se tiene:

$$\sigma_{ij}n_j = t_i \quad (2.5)$$

donde el tensor de rango 1  $\mathbf{t}$  tiene el carácter de una fuerza distribuida sobre el área de contacto  $A$ . Definiendo la carga aplicada sobre el cuerpo que hace el contacto como  $\mathbf{P}$ , se tiene:

$$P_i = \int_A t_i dA \quad (2.6)$$

Finalmente, se tiene la ley de fricción de Coulomb:

$$T = \mu P \quad (2.7)$$

que expresa que la magnitud  $T$  de la fuerza tangencial que se opone al movimiento de dos cuerpos en contacto es proporcional a la magnitud  $P$  de la fuerza normal aplicada;  $\mu$  es el coeficiente de fricción.

Un aspecto fundamental de la problemática investigada en este trabajo es que el valor de  $\mu$  tiene diferentes significados según el nivel del análisis. En los modelos numéricos, se puede utilizar un valor de  $\mu$  que es válido en aquellas zonas donde el modelo numérico detecta que existe un contacto. Esto es un coeficiente de fricción a escala microscópica. Por el otro lado, se demostrará que estas áreas de contacto representan una fracción pequeña del área superficial total de los dos cuerpos en contacto. A escala macroscópica, la eq. 2.7 se puede utilizar también. El coeficiente de fricción macroscópico y microscópico pueden ser diferentes.

Finalmente, las asperezas de las superficies pueden deformarse plásticamente. En este caso, existirá una disipación de energía adicional durante el movimiento de las superficies y la fricción será mayor. Las ecuaciones 2.1 a 2.7 mantienen su validez, con excepción de la 2.3.

### 2.3 Contacto

La solución fundamental a las ecuaciones 2.1 a 2.6 para una carga  $\mathbf{t}$  localizada en un punto sobre la frontera de un semiespacio infinito, definida como  $x'_3 \geq 0$ , se puede presentar mediante la siguiente integral, que expresa el desplazamiento  $u_i(\mathbf{x})$  en un punto interior  $\mathbf{x}$  del semi-espacio como función de la carga distribuida  $t_j(\mathbf{x}')$  en el área de contacto  $A$  que forma parte del plano  $x'_3=0$ :

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{A}} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') t_j(\mathbf{x}') d\mathcal{A} \quad (2.8)$$

Los  $G_{ij}$  son las funciones de Green para el semi-espacio [39]:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \left( \frac{1-\nu}{R} \delta_{ij} + (1-\nu) \frac{(x_i-x'_i)(x_j-x'_j)}{R^3} + \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{R+x_3} \left( \delta_{ij} - \frac{(x_i-x'_i)(x_j-x'_j)}{R(R+x_3)} \right) \right) \quad (2.9)$$

con  $\nu$  el coeficiente de Poisson,  $\mu$  el módulo cortante,  $\delta$  la delta de Cronecker y  $R$  está dado por:

$$R^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2 \quad (2.10)$$



Las fórmulas representan una ligera simplificación comparada con la forma original obtenida por Mindlin [40] ya que se sustituyó  $x'_3=0$ .

La solución (2.8)-(2.9) es universal para materiales linealmente elásticos, homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, la utilidad de estas ecuaciones está limitada por las siguientes dos razones:

1) La integral 2.8 se puede calcular de manera analítica sólo para geometrías de A y distribuciones de los  $t_j(\mathbf{x}')$  muy sencillos. Aún en estos casos, la solución generalmente involucra funciones trascendentes superiores (por ejemplo, integrales elípticas [41] o funciones hipergeométricas [42, 43]).

2) La definición del área de contacto A es parte del problema, ya que depende de la carga total aplicada en dirección normal. Es decir, la condición 2.6 convierte el problema por resolver en una ecuación integral que se puede resolver sólo cuando es posible estimar la distribución  $t_j(\mathbf{x}')$  de antemano. Si la geometría de A está conocida (por ejemplo, un elipse o un círculo) pero no su magnitud, en ocasiones es posible encontrar una solución al problema. De lo contrario, sólo se puede resolver el problema mediante métodos numérico iterativos que van adaptando la geometría y el tamaño de A para cumplir con la condición 2.6. Para contactos entre superficies rugosas aleatorias, no se ha encontrado cómo incorporar estas soluciones en una teoría general del contacto. Cuando se pretende incorporar el efecto de la fricción microscópica, el problema se complica aún más y cuando se permite la deformación plástica de las asperezas de la superficie, la solución pierde su validez general.

Existen métodos numéricos que implementan la solución (2.8)-(2.9) de manera directa. Sin embargo, se trata de paquetería de índole experimental desarrollada por pequeños grupos de investigación [44]. No son aplicables para problemas que involucran deformaciones plásticas. Por el otro lado, existe el método de elemento finito, que se ha ido desarrollando durante las últimas cuatro décadas a través de empresas comerciales grandes y que es estable, eficiente y precisa. Para aplicaciones de la mecánica de sólidos en materiales elásticos y elasto-plásticos, este método ha demostrado su confiabilidad en virtualmente todos los campos donde se ha aplicado. Los algoritmos numéricos que permiten tomar en cuenta contacto y fricción en este tipo de paquetería son más complejos pero generalmente son confiables, siempre y cuando se utilizan con el suficiente cuidado. Existe una limitada literatura con respecto a la investigación del contacto elasto-plástico de superficies con rugosidad aleatoria mediante elemento finito [36-38,45,46]. Todas las referencias en este ámbito corresponden a los últimos 12 años, es decir, se trata de un tópico de investigación emergente.

## 2.4 Objetivos de la tesis

Considerando los argumentos anteriores, el presente trabajo se enfocará al modelado por elemento finito del contacto entre superficies con rugosidad aleatoria. Considerando que estudios previos en el ámbito se han ejecutado mediante herramientas de supercómputo, el objetivo principal de la tesis es el siguiente:

**Objetivo principal:** Verificar si es posible, con herramientas de cómputo convencionales (estaciones de trabajo) y mediante paquetería comercial (ABAQUS®), modelar el contacto y el deslizamiento entre superficies con rugosidad aleatoria y comportamiento elasto-plástico.

Para esto es necesario cumplir con el siguiente objetivo fundamental:

**Objetivo fundamental:** Establecer la metodología para generar, de manera numérica, las coordenadas de los puntos que representan la superficie rugosa aleatoria en el espacio y transferir estos puntos a una malla de elemento finito para análisis mediante paquetería comercial. Generar una malla para elemento finito que permite acomodar una cantidad elevada de puntos en la superficie (66049), requerido para permitir un análisis refinado de la geometría superficial, a la vez de mantener limitado el número de elementos en la malla, esencial para mantener una eficiencia computacional aceptable.

Para cumplir el objetivo fundamental, se establecieron los siguientes pasos:

- 1) Elaboración de un método para generar la representación numérica de una superficie rugosa aleatoria con carácter auto-afín, utilizando para la presente tesis el algoritmo de punto medio aleatorio.
- 2) Elaboración de una malla de elemento finito que permite un refinamiento eficiente del tamaño de la malla hacia la superficie de contacto.
- 3) Establecer un método para transferir los resultados obtenidos mediante el paso 1 a la malla establecida en el paso 2, siendo cada superficie aleatoria un caso particular mientras que la malla generada en el paso 2 represente una geometría fija.
- 4) Ensayar la metodología propuesta para algunos casos particulares, con la finalidad de verificar si el objetivo principal se cumple.

## **3 FUNDAMENTOS**

### **3.1 Rugosidad en las superficies**

En el pasado, los fenómenos de superficies fueron despreciados debido a la inexistencia de un marco teórico capaz de describir este tipo de sistemas. Es necesario que el comportamiento de las superficies sea investigado bajo un intenso trabajo experimental. Por este motivo, en años recientes, el interés en el modelado de las superficies ha aumentado de forma importante [47].

Desde un punto de vista de las Ciencia e Ingeniería de Materiales, es importante decir que la topografía se encarga de la descripción del conjunto de particularidades geométricas, ya sean naturales o artificiales que describen y caracterizan a determinada superficie, de modo que se puede decir que la topografía juega un papel importante en el estudio de las superficies [29].

#### **3.1.1 Rugosidad**

Desde el punto de vista mecánico, la rugosidad es el conjunto de irregularidades geométricas que posee una superficie. La rugosidad también puede definirse como una conglomeración de asperezas con un punto extremo relativamente pequeño con respecto a la longitud de las base [5].

Se dice que una superficie perfecta es considerada como una abstracción matemática, ya que, en la realidad, por perfecta que ésta tienda a ser tendrá irregularidades, que son originadas durante el proceso de fabricación de dicha pieza [48]. Se distinguen las irregularidades mayores o defectos macrogeométricos y las irregularidades menores o defectos menores. Los primeros incluyen los defectos de primer y segundo orden, mientras que los segundos incluyen los defectos de tercer y cuarto orden. En los defectos de primer orden se encuentran los errores de forma en la pieza, asociados principalmente a: la valoración en tamaño de la pieza, el paralelismo que existe entre sus superficies y planitud de una superficie (conicidad, qué tan esférica es, qué tan cilíndrica es). En los defectos de segundo orden se encuentra la ondulación periódica a nivel mesoscópico y macroscópico. Dentro de la clasificación de los defectos de tercer orden se encuentran las estrías pseudoperiódicas, las cuales están incluidas en la rugosidad. En la clasificación del cuarto orden se encuentran defectos aperiódicos de la rugosidad.

Desde el punto de vista práctico la rugosidad tiene un papel muy importante en una amplia gama de fenómenos pero se puede considerar en general que las propiedades de las superficies sólidas son cruciales para la interacción superficial porque las propiedades

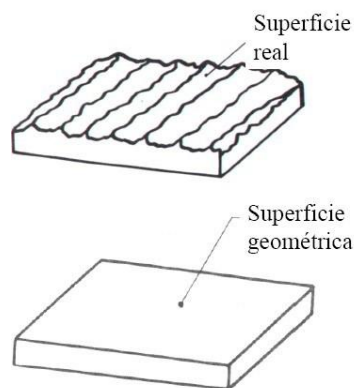
superficiales afectan el área real de contacto, fricción, desgaste, y lubricación. Además de la función que desempeña en la tribología, las propiedades superficiales son importantes en otras aplicaciones tales como óptica, electricidad, rendimiento térmico, pintura, y apariencia [6].

Se sabe que todas las superficies, independientemente de su método de formación contienen irregularidades o desviaciones de la forma geométrica prescrita de modo que es importante saber cuál es el papel que dicha rugosidad juega en torno a un fenómeno en particular, siendo de suma importancia el estudio de la misma. Los parámetros de la rugosidad describen de forma objetiva y cuantitativa cuáles son las características de la misma, de modo que es necesario saber cuáles son dichos parámetros. De modo que los parámetros que serán descritos más adelante describirán el comportamiento de las superficies de este tipo.

Las irregularidades menores son nombradas principalmente como: ondulación y rugosidad. La ondulación puede originarse por la flexión de la pieza durante su maquinado, deficiente homogeneidad en el material, liberación de esfuerzos residuales, deformaciones por tratamientos térmicos en la misma, vibraciones; la segunda es provocada por el elemento con el cual se realiza el proceso de maquinado (por ejemplo la herramienta de rectificado).

Las irregularidades antes mencionadas pueden presentarse simultáneamente sobre la superficie, lo que puede dificultar la medición de la rugosidad. Se puede decir de forma figurada, que la rugosidad es la huella digital de la pieza en estudio, y que éstas son provocadas por el proceso de manufactura de la misma.

La rugosidad superficial se define como el conjunto de irregularidades de la superficie real, definidas de forma convencional en una sección donde las irregularidades de forma y las ondulaciones han sido eliminadas, figura (3.1).



**Figura 3.1** Pieza con rugosidad superficial (distinción entre la superficie geométrica con rugosidad y superficie geométrica sin rugosidad) [49].

Muchos de los parámetros antes mencionados pueden ser medidos cuantitativamente de tal manera que se tenga una mejor descripción de las superficies rugosas para su estudio o para tener un mejor control de los parámetros en procesos de manufactura.

### **3.2 Cuantificación de la Rugosidad**

Si se echase una mirada a la importancia de la rugosidad en las superficies se podría dar cuenta de que ésta está implicada tanto en la vida cotidiana como en aplicaciones industriales, científicas y tecnológicas; dentro de estas aplicaciones muchas veces es deseable tener “alta” rugosidad y otras tantas lo contrario. En algunos, desde el punto de vista tecnológico se busca que la superficie del producto terminado presente una mínima rugosidad, para que dicho producto tenga brillo, mejor apariencia y menor fricción si su función es estar en contacto con otra pieza, minimizando el fenómeno de desgaste, la corrosión y/o la erosión de dicho material [29].

La rugosidad es también un factor biológico, puesto que existen muchos fenómenos de esta índole que tienen que ver directamente con la rugosidad; un claro ejemplo a escala molecular es el modo en que las bacterias se adhieren preferencialmente a las superficies con mayor rugosidad [29]. La retención preferencial ocurre sobre superficies rugosas, ya que una bacteria en cualquier superficie estará más protegida contra fuerzas compartidas y puede, por lo tanto, tener el tiempo necesario para entrar en contacto directo o acortar la distancia sobre la superficie [50].

Las superficies reales nunca son perfectamente lisas; todas las superficies presentan irregularidades y asperezas; tales asperezas permanecen aún cuando la superficie haya sido pulida cuidadosamente [51].

Una característica de las superficies con rugosidad es que presentan cierto grado de aleatoriedad de modo que éstas son irregulares y por decirlo de alguna manera, desordenadas. Se dice que las superficies rugosas también poseen autoafinidad estadística, de modo que si una parte de la superficie rugosa es ampliada, ésta podría ser otra superficie rugosa. En otras palabras, estas superficies tienen la misma apariencia sin importar a cual escala se observe [52].

Por lo anterior, la relación que existe entre las superficies rugosas y la Geometría fractal es extensa y la utilidad del uso de dicho concepto es considerable, puesto que ayuda a describir desde un punto de vista matemático como una buena aproximación a cómo se comportan las superficies rugosas en la realidad, dejando una posibilidad de un análisis muy amplio en la mecánica de contacto. En un sentido estricto una superficie rugosa no es

un fractal, debido a que no presenta las características geométricas fractales en todas sus escalas, pero, en un rango amplio de escalas, se aproxima bien al concepto.

Tomar en cuenta la rugosidad en diferentes procesos, más particularmente en procesos industriales puede resultar en un mejor desempeño de los mismos, reduciendo tal vez las pérdidas económicas que podrían estar implicadas en dichos procesos.

### 3.3 Rugosidad y Fractales

Muchas de las ciencias, siendo ejemplo la geografía, la geofísica, la ciencia computacional, la mecánica, hacen referencia al uso de la Geometría Fractal para la solución y aplicación de problemas relacionados con superficies rugosas ya que es bien sabido que todas las superficies tienen cierto grado de rugosidad. Un claro ejemplo de superficie rugosa es una zona montañosa, figura (3.2) que puede ser descrita como un objeto fractal porque que posee características propias de los mismos.



Figura 3.2 Terreno montañoso descrito por un terreno fractal aleatorio [53].

Las figuras (3.3) y (3.4) muestran un comportamiento fractal que bien podría ser de una superficie bidimensional geográfica montañosa, o de una superficie rugosa perteneciente a algún material que la presenta o de algún otro fenómeno descrito por dicho comportamiento.



Figura 3.3 Terreno montañoso descrito por un comportamiento fractal bidimensional [53].



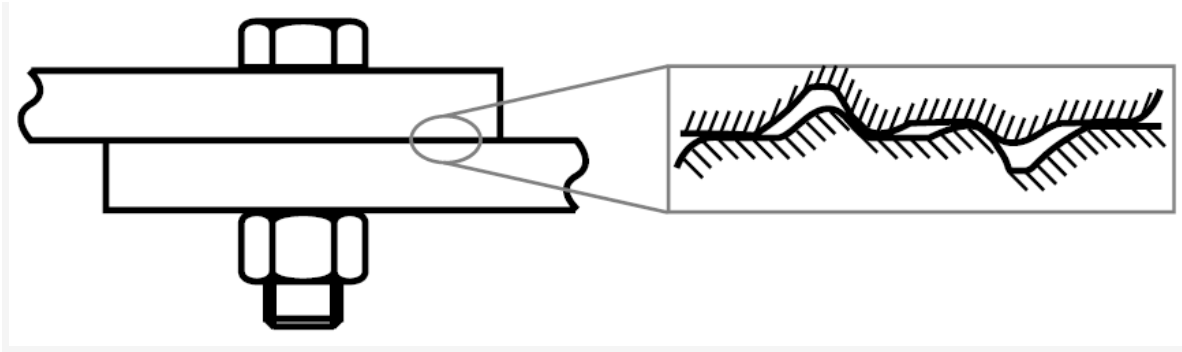
Figura 3.4 Fractal bidimensional [53].

En el presente trabajo se hace mención principalmente a superficies rugosas con un enfoque hacia la mecánica de contacto debido a que los nuevos fundamentos matemáticos de la presente aproximación multiescalar es el nuevo paradigma de una descripción de las superficies fractales, el cuál más recientemente ha impulsado de forma importante la investigación microtribológica [54]. Muchos de los sistemas tribológicos pertenecen a la clase de sistemas fractales: en procesos de fricción, tanto a escala microscópica como macroscópica juegan un papel esencial. La naturaleza multiescalar de los procesos de fricción, sin embargo, hace de la simulación de tales sistemas algo relativamente complejo [55] y [8].

La consideración del contacto entre cuerpos desde un punto de vista geométrico permite estudiar sistemáticamente todos los posibles casos de contacto: contacto entre superficies, bordes o aristas, vigas y vértices [56].

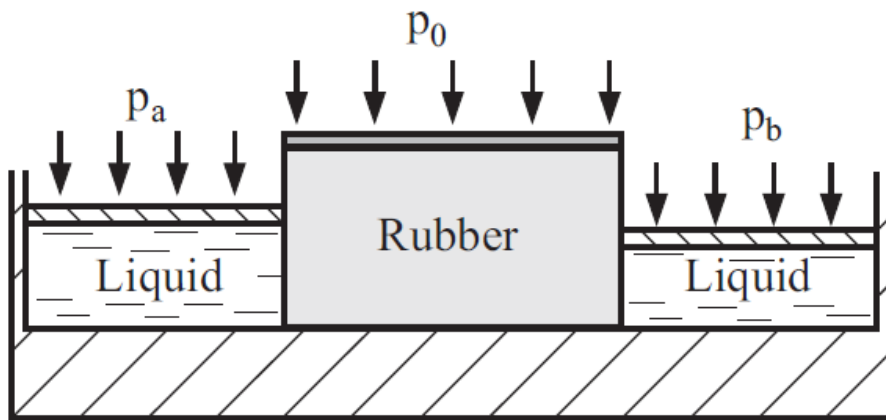
Otro ejemplo claro de en donde interviene directamente el análisis de las mismas con ayuda de la geometría fractal se presenta en los miembros individuales en una estructura construida, la predicción del comportamiento de vibración estructural puede estar involucrada, a pesar de que el comportamiento de todos los miembros individuales sea bien conocida. Esto es debido al hecho de que el contacto mecánico en las superficies de las uniones generalmente no fue modelado suficientemente. Efectos como distribuciones de presión de contactos irregulares sobre el área de contacto, amortiguación de microdeslizamientos y el no contacto en ciertas regiones de la superficie no son tomados en cuenta, pero estos efectos pueden tener considerable influencia sobre el comportamiento de vibración estructural.

Para tener en cuenta estos efectos, la rugosidad de las superficies de contacto, figura (3.5) tiene que ser considerada, al menos de manera integral para predecir la vibración en el comportamiento de las estructuras edificadas, lo cual significa frecuencias de resonancia, formas modales y valores de amortiguación modal [57].



**Figura 3.5** Aunque el área de contacto parece ser conforme en una escala macroscópica, el verdadero contacto consiste de una multitud de contactos de asperezas no conformes un una escala microscópica [57].

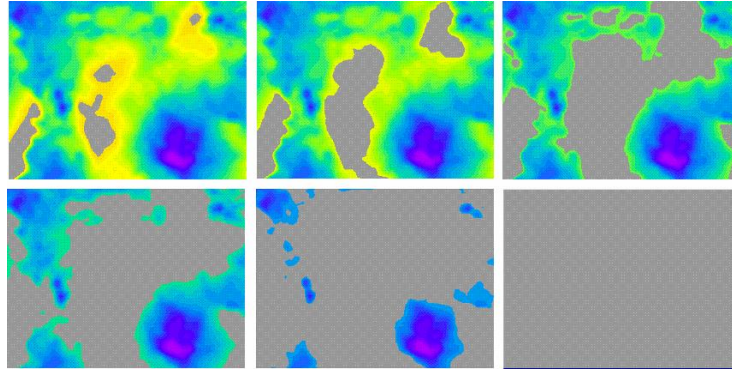
Otro ejemplo en particular en donde la geometría fractal podría ser de gran ayuda para el estudio en la interacción entre superficies rugosas es el área de contacto que presentan los sellos, puesto que de esto depende su función de impedir el paso de materia, en muchos casos fluidos, de un espacio a otro. En ingeniería, un sello se puede considerar como un elemento o estructura que tiene la tarea de minimizar o prevenir transferencia de masa involuntaria de un espacio a otro. El más grande grupo de sellos es representado por sellos de contacto, con los cuales los elementos de sellado son presionados uno contra otro [7], figura (3.6).



**Figura 3.6** Representación esquemática de cómo trabaja un sello [7].

A causa de la rugosidad siempre presente en el contacto de superficies, ellas deben estar siempre presionados juntos con una cierta presión mínima tal que el contacto las selle. Esto es ilustrado en la figura (3.7). Para pequeñas fuerzas de compresión, las superficies están en contacto real en pequeñas áreas [7].





**Figura 3.7** Área de contacto con diferentes fuerzas de compresión. El contacto es sellado si las áreas de contacto forman un clúster continuo [7].

En fenómeno anterior se puede observar que la distribución de presión no es uniforme debido al carácter rugoso de las superficies que están en contacto. [4].

Lo anterior puede explicarse debido a que cuando dos superficies entran en contacto, la presencia de morfológica de la rugosidad de la superficie provoca un contacto imperfecto. Debido a la naturaleza multi-escalar de la superficie rugosa, el contacto imperfecto se compone de un gran número de zonas de contacto con diferentes tamaños [58].

A continuación se mostrarán los principales parámetros de las superficies rugosas que sirven para describirlas.

### 3.4 Parámetros de la Rugosidad

Los parámetros que se presentan en esta sección fueron tomados del artículo Roughness Parameters. E.S. Gadelmawla, M. M. Koura, T. M. A Maksoud, I.M. Elewa, H. H. Soliman. Journal of Materials Processing Technology 123 (2002). Págs. 133-145.

#### 3.4.1 Promedio Aritmético de Alturas (Promedio de Rugosidad) ( $R_a$ )

Este parámetro es el más utilizado. Se puede definir como la desviación absoluta promedio de las irregularidades de rugosidad desde la línea media sobre una determinada longitud de muestreo, figura (3.8). Se sabe que este parámetro es fácil de definir, fácil de medir y da una buena descripción general de la variación de las alturas. Es importante mencionar que este parámetro no es sensible a pequeños cambios en el perfil. A continuación se muestra la definición matemática y la implementación discreta del parámetro del promedio aritmético de alturas, ecuaciones (3.1) y (3.2) respectivamente:

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx \quad (3.1)$$

$$R_a = \sum_{i=1}^n |y_i| \quad (3.2)$$

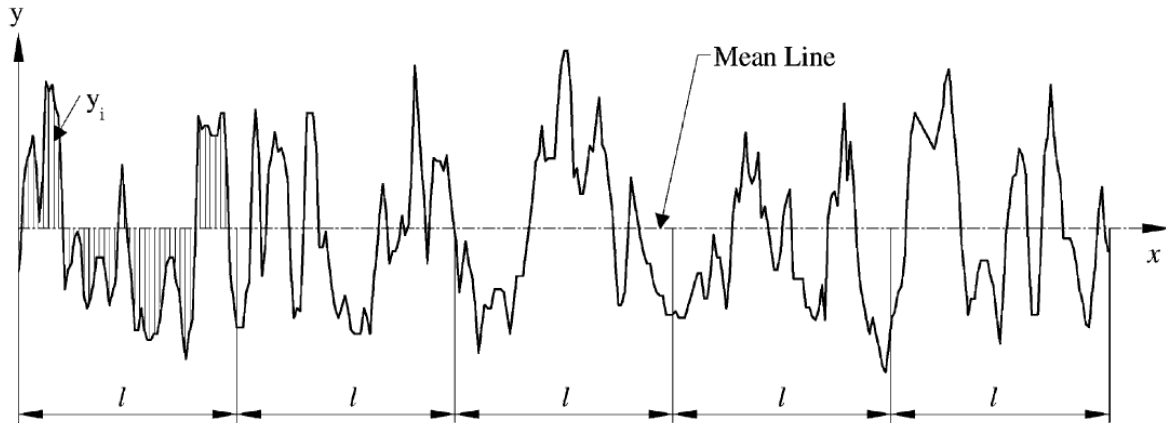


Figura 3.8 Definición del promedio aritmético de alturas [59].

$l$  se define como la longitud relativa del perfil o longitud de muestreo.

### 3.4.2 Rugosidad Media Cuadrática ( $R_q$ )

Este parámetro también es llamado RMS por sus siglas en inglés y representa la desviación estándar de la distribución de las alturas de la superficie. Es un importante parámetro que describe la rugosidad superficial para métodos estadísticos. Cabe mencionar que este parámetro es más sensible que el promedio aritmético de las alturas ( $R_a$ ) a lo largo de la desviación de la línea media. La definición matemática y la implementación discreta de este parámetro se muestran en las ecuaciones (3.3) y (3.4) respectivamente:

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l \{y(x)\}^2 dx} \quad (3.3)$$

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (3.4)$$

La línea media RMS es la línea que divide al perfil de modo que la suma de los cuadrados de las desviaciones de la altura del perfil de alturas de este es igual a cero.

### 3.4.3 Altura 10 puntos ( $R_z$ )

Este punto es más sensible para picos altos ocasionales o valles profundos que  $R_a$ . Se define por dos diferentes métodos. En el sistema internacional ISO este parámetro es la diferencia en alturas entre el promedio de los cinco picos más altos y los valles más bajos a lo largo de la longitud de evaluación del perfil.

El sistema alemán DIN define  $R_z$  como el promedio de la suma de los cinco picos más altos y los cinco valles más bajos a lo largo de la longitud de evaluación del perfil. La figura (3.9) muestra la definición del parámetro de la altura a 10 puntos. Las definiciones matemáticas de los dos tipos de  $R_z$  están definidas por las ecuaciones (3.5) y (3.6):

$$R_{z(ISO)} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n v_i) \quad (3.5)$$

$$R_{z(DIN)} = \frac{1}{2n} (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n v_i) \quad (3.6)$$

Donde  $n$  es el número de muestras a lo largo de la longitud de evaluación.

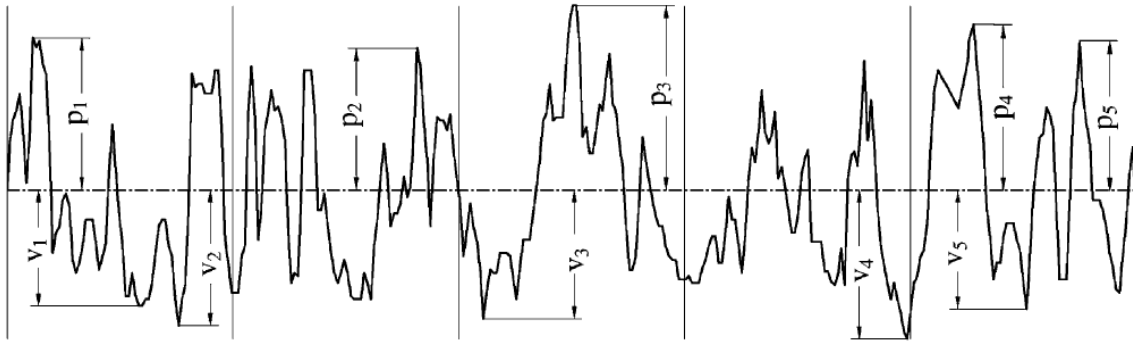


Figura 3.9 Definición del parámetro de la altura a 10 puntos ( $R_{z(ISO)}$ ,  $R_{z(DIN)}$ ) [59].

### 3.4.4 Altura máxima de picos ( $R_p$ )

$R_p$  es definida como la altura máxima del perfil sobre la línea media dentro de la longitud de evaluación, mostrada en la figura (3.10). En la figura  $R_{p3}$  representa el parámetro  $R_p$ .

### 3.4.5 Máxima profundidad de valles ( $R_v$ )

$R_v$  es definida como la máxima profundidad del perfil bajo la línea media dentro de la longitud de evaluación, como se muestra en la figura (3.10). En la figura  $R_{v4}$  representa el parámetro  $R_v$ .

### 3.4.6 Altura promedio de picos ( $R_{pm}$ )

$R_{pm}$  es definida como el promedio de altura máxima de picos ( $R_p$ ) obtenida para cada longitud de muestreo de la longitud de evaluación, como se muestra en la figura (3.10). Este parámetro puede ser calculado con la siguiente ecuación (3.7):

$$R_{pm} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n R_{pi}) \quad (3.7)$$

Donde n es el número de muestras a lo largo de la longitud de evaluación del perfil. De la figura (3.10),  $R_{pm} = (R_{p1} + R_{p2} + R_{p3} + R_{p4} + R_{p5})/5$ .

### 3.4.7 Profundidad Media de Valles ( $R_{vm}$ )

$R_{vm}$  es definido como el promedio de la profundidad máxima de los valles ( $R_v$ ) obtenido para cada longitud de muestreo de la longitud de evaluación, como puede ser observado de la figura (3.10). Este parámetro puede ser calculado de la siguiente ecuación (3.8):

$$R_{vm} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n v_i) \quad (3.8)$$

Donde n es el número de muestras a lo largo de la longitud de evaluación del perfil. De la figura (3.10),  $R_{vm} = (R_{v1} + R_{v2} + R_{v3} + R_{v4} + R_{v5})/5$ .

### 3.4.8 Altura Máxima del Perfil ( $R_t$ or $R_{max}$ )

Este parámetro es muy sensible a los picos altos o a la profundidad de los valles.  $R_{max}$  o  $R_t$  es definido como la distancia vertical entre el pico más alto y el valle más bajo a lo largo de la longitud de evaluación del perfil. De la figura (3.10),  $R_{max} = R_p + R_v = R_{p3} + R_{v4}$ .

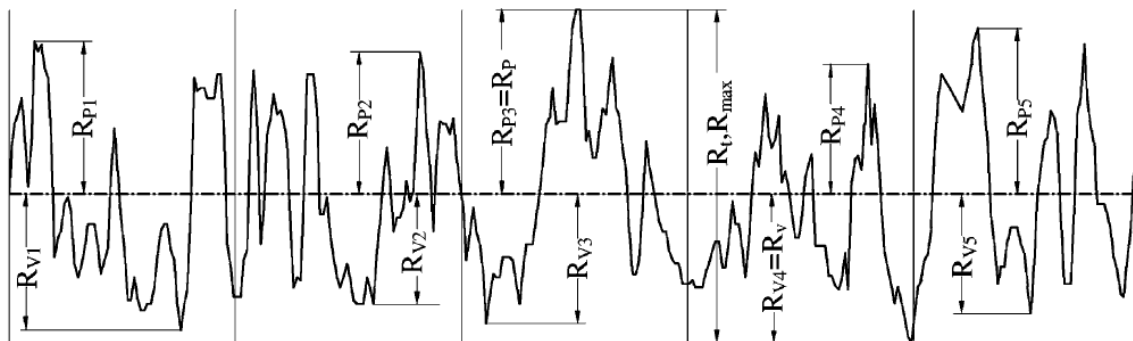


Figura 3.10 Definición de los parámetros  $R_p, R_v, R_{pm}, R_{vm}, R_t (R_{max})$  [59].

### 3.4.9 Máximo pico a la altura del valle ( $R_{ti}$ )

$R_{ti}$  es la distancia vertical entre el pico más alto y el valle más bajo de cada longitud de muestreo del perfil. Como la longitud de evaluación se divide en cinco longitudes de muestreo, el máximo pico a la altura del valle puede ser definido como se muestra a continuación, ecuación (3.9), figura (3.11):

$$R_{ti} = R_{pi} + R_{vi} \quad (3.9)$$

Donde los i rangos son de 1 a 5. De la figura,  $R_{t1} = R_{p1} + R_{v1}$ ,  $R_{t2} = R_{p2} + R_{v2} + \dots$ ,

### 3.4.10 Promedio del Máximo Pico a la altura del Valle ( $R_{tm}$ )

$R_{tm}$  es definido como el promedio de todos los máximos picos a las alturas de los valles dentro de  $l$

a longitud de evaluación del perfil. De la figura (3.11), la definición matemática de este parámetro es la siguiente ecuación (3.10):

$$R_{tm} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{ti} \quad (3.10)$$

Donde  $n$  es el número de muestras a lo largo de la longitud de evaluación del perfil. De la figura  $R_{tm} = (R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} + R_{t4} + R_{t5})/5$ .

### 3.4.11 Pico más Grande a la Altura del Valle ( $R_y$ )

Este parámetro se define como el valor más grande del máximo pico a los parámetros alturas del valle ( $R_{ti}$ ) a lo largo de la longitud de evaluación. De la Figura (3.11),  $R_y = R_{t3}$ .

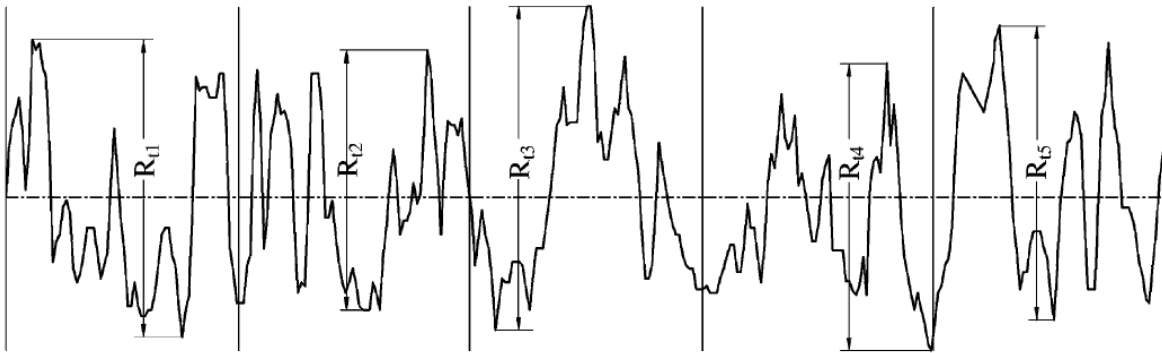


Figura 3.11 Definición del máximo pico a los parámetros alturas del valle ( $R_{ti}$ ) [59].

### 3.4.12 Altura del tercer punto ( $R_{3y}$ )

Para calcular este parámetro, la distancia entre el tercer pico más alto y el tercer valle más bajo es calculada para cada longitud de muestra, entonces la distancia más larga es considerada como la altura del tercer punto ( $R_{3y}$ ). De la figura (3.12) el parámetro altura del tercer punto ( $R_{3y}$ ) es el máximo valor de los cinco valores de  $R_{3y1}$ ,  $R_{3y2}$ ,  $R_{3y3}$ ,  $R_{3y4}$ ,  $R_{3y5}$ , que es  $R_{3y5}$ .

### 3.4.13 Promedio de la Altura del tercer punto ( $R_{3z}$ )

Este parámetro es el promedio de los cinco parámetros de las alturas del tercer punto ( $R_{3y1}$ ,  $R_{3y2}$ ,  $R_{3y3}$ ,  $R_{3y4}$  y  $R_{3y5}$ ). Como se muestra en la figura (3.12)  $R_{3z}$  es igual a  $(R_{3y1} + R_{3y2} +$

$R_{3y3} + R_{3y4} + R_{3y5})/5$ . La definición matemática de este parámetro es la siguiente ecuación (3.11):

$$R_{3z} = \frac{1}{5} (\sum_{i=1}^5 R_{3y1}) \quad (3.11)$$

### 3.4.14 Perfil Factor de Solidez (k)

El perfil de Factor de Solidez (k) se define como la proporción entre la máxima profundidad de valles y la máxima altura del perfil. La definición matemática de este parámetro es la siguiente ecuación (3.12):

$$k = \frac{R_v}{R_{max}} \quad (3.12)$$

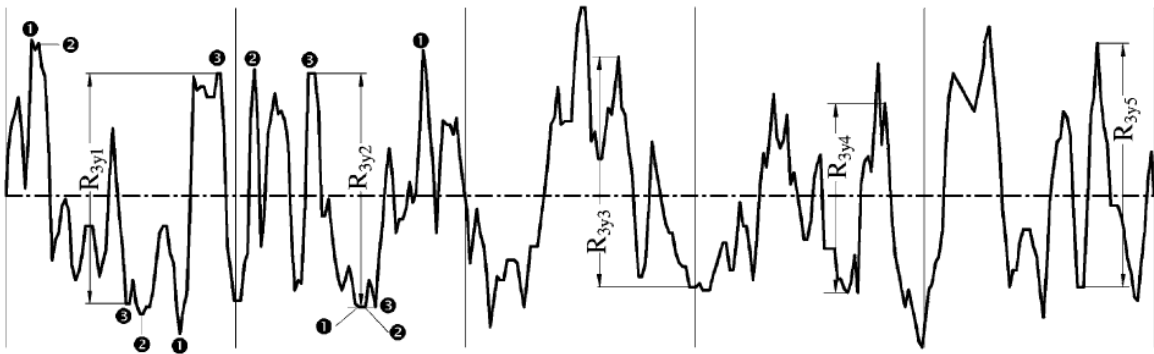


Figura 3.12 Definición de los parámetros de las alturas del tercer punto ( $R_{3y}$ ,  $R_{3z}$ ) [59].

### 3.4.15 Asimetría ( $R_{sk}$ )

La asimetría de un perfil es el tercer momento central de la amplitud del perfil de la función de densidad de probabilidad medida sobre la longitud en evaluación. Éste da la asimetría del perfil sobre la línea media. Este parámetro es sensible para valles profundos ocasionales o picos altos. Una distribución de alturas simétrica, con tantos picos como valles tiene asimetría cero. Perfiles con picos eliminados o profundos rasguños tienen asimetría negativa. Perfiles con valles rellenos o picos altos tienen asimetría positiva. Esto se muestra en la figura (3.13). El parámetro asimetría puede ser usado para distinguir entre dos perfiles que tienen los mismos valores de  $R_a$  o  $R_q$  pero con diferente forma.

El valor de asimetría depende de si la masa del material de la muestra está por encima (asimetría negativa) o debajo (asimetría positiva) de la línea media como se muestra en la figura (3.13). La fórmula matemática y numérica usada para calcular el perfil de asimetría, el cual tiene un número de puntos N, son las siguientes ecuaciones (3.13) y (3.14):

$$R_{sk} = \frac{1}{R_q^3} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 p(y) dy \quad (3.13)$$

$$R_{sk} = \frac{1}{NR_q^3} (\sum_{i=1}^N Y_i^3) \quad (3.14)$$

Donde  $R_q$  es la RMS del parámetro de rugosidad y  $Y_i$  la altura del perfil al punto número  $i$ .

En la figura (3.13), aunque los dos perfiles pueden tener el mismo valor de  $R_a$ , tienen diferentes formas.

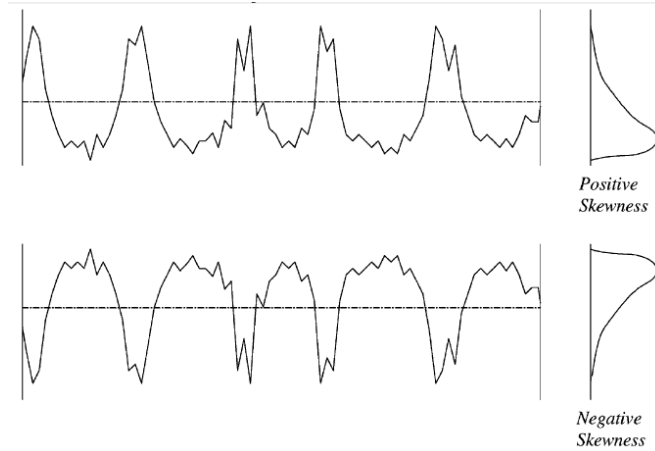


Figura 3.13 Definición de asimetría ( $R_{sk}$ ) y la amplitud de la curva de distribución [59].

### 3.4.16 Kurtosis ( $R_{ku}$ )

El coeficiente de Kurtosis es el cuarto momento central de la amplitud del perfil de la función de densidad de probabilidad, medido sobre la longitud en evaluación. Este describe lo cerrado de la densidad de probabilidad del perfil. Si  $R_{ku} < 3$  se dice que la curva de distribución es platicúrtica y tiene relativamente pocos picos altos y valles bajos. Si  $R_{ku} > 3$  se dice que la curva de distribución es leptocúrtica y tiene relativamente muchos picos altos y valles bajos. La figura (3.14) muestra estos dos tipos de Kurtosis.

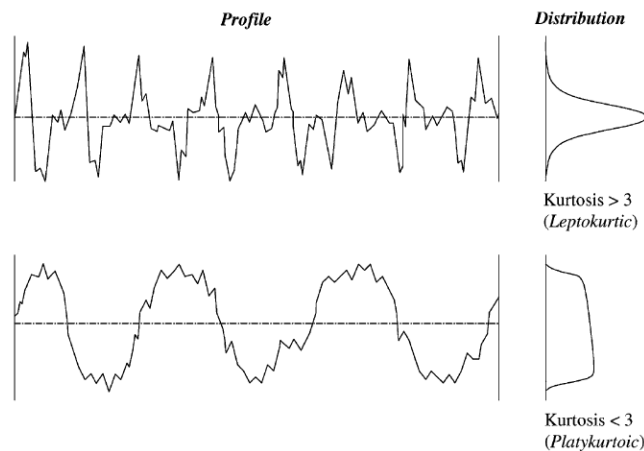


Figura 3.14 Definición del parámetro Kurtosis ( $R_{ku}$ ) [59].

La fórmula matemática y numérica para calcular el coeficiente de Kurtosis ( $R_{ku}$ ) de un perfil con un número de puntos  $N$  son las siguientes ecuaciones (3.15) y (3.16):

$$R_{ku} = \frac{1}{R_q^4} \int_{-\infty}^{\infty} y^4 p(y) dy \quad (3.15)$$

$$R_{ku} = \frac{1}{NR_q^4} (\sum_{i=1}^N Y_i^4) \quad (3.16)$$

Donde  $R_q$  es el RMS del parámetro de rugosidad y  $Y_i$  la altura del perfil al punto número  $i$ .

### 3.4.17 Función de Densidad de Amplitud (ADF)

El término densidad de amplitud corresponde exactamente al término densidad de probabilidad en estadística. La ADF representa el histograma de distribución del perfil de alturas. Este puede ser encontrado mediante el trazado de la densidad del perfil de alturas en el eje horizontal y el perfil mismo de alturas en el eje vertical como se muestra en la figura (3.15).

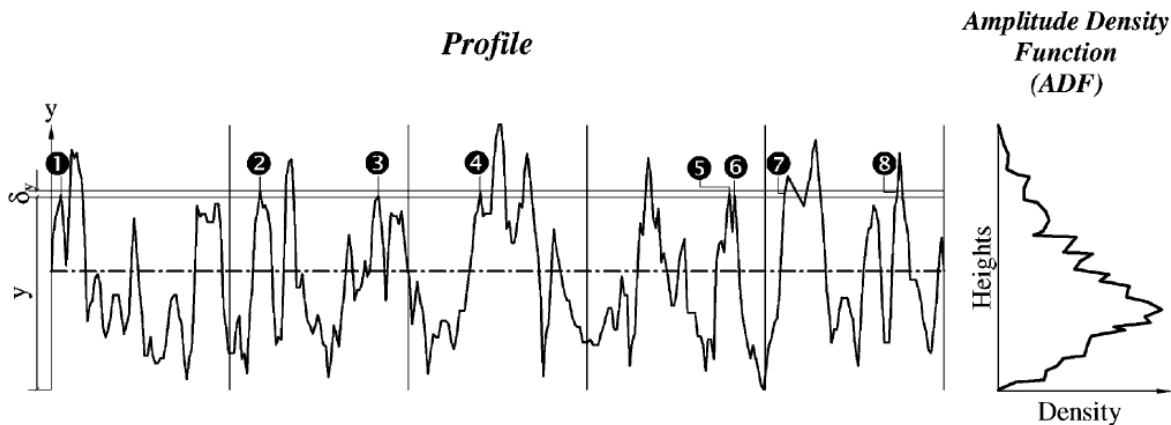


Figura 3.15 Definición de ADF [59].

Para calcular la densidad del perfil de alturas, la escala de amplitud se divide en partes pequeñas  $\delta_y$ . La medida de los valores de amplitud encontrados dentro de  $\delta_y$ , pueden encontrarse calculando todos los valores de amplitud entre  $y$  y la relativa  $\delta_y$  para la longitud en evaluación del perfil. La densidad de amplitud es por lo tanto definida por la siguiente ecuación (3.17):

$$p(y) = \lim_{\delta_y \rightarrow 0} \frac{P(y, y + \delta_y)}{\delta_y} \quad (3.17)$$

El ADF de una distribución Gaussiana de alturas superficiales dadas por la siguiente ecuación (3.18):



$$ADF(y) = \sqrt{2\pi R_q^2} \exp\left(\frac{-y^2}{2R_q^2}\right) \quad (3.18)$$

### 3.4.18 Función de Autocorrelación (ACF)

La ACF describe la dependencia general de los valores de los datos de una posición a sus valores en otra posición. Esto se considera como una herramienta muy útil para procesamiento de señales porque provee información básica sobre la relación entre la longitud de onda y las propiedades de amplitud de la superficie. La ACF puede ser considerada como una medida cuantitativa de la semejanza entre un cambio lateral y una versión sin cambio del perfil. Las representaciones matemática y numérica de esta función son las siguientes ecuaciones (3.19) y (3.20):

$$ACF(\delta x) = \frac{1}{L} \int_0^L y(x)y(x + \delta x)dx \quad (3.19)$$

$$ACF(\delta x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N y_i y_{i+1} \quad (3.20)$$

Donde  $\delta x$  es la distancia del desplazamiento y  $y_i$  la altura del perfil al punto número  $i$ .

La ACF puede ser normalizada para tener un valor unitario al cambio de distancia de cero. Esto suprime cualquier información de la amplitud en la ACF pero permite una mejor comparación de la información de la longitud de onda en varios perfiles.

### 3.4.19 Correlación Longitudinal ( $\beta$ )

Este parámetro se usa para describir las características de correlación de la ACF. Éste es definido como la distancia más corta en la cual el valor de la ACF se reduce a una cierta fracción, usualmente 10% del valor a desplazamiento cero. Los puntos en un perfil de superficie que son separados por más que una correlación longitudinal puede ser considerados sin correlación, esto es, porciones de la superficie representada para estos puntos fueron producidos por eventos formadores de superficies separadas. Longitudes de correlación pueden variar de la longitud de correlación infinita para una longitud de onda perfectamente periódica a cero para una forma de onda completamente aleatoria. En este último caso, la función de autocorrelación es un pico de Dirac.

### 3.4.20 Densidad de espectro de Potencia (PSD)

La función PSD es una importante función para caracterizar tanto las amplitudes de asperezas como el espaciamiento. Ésta se calcula mediante una descomposición de Fourier del perfil de la superficie dentro de su componente sinusoidal de frecuencia

espacial (f). Para un perfil de superficie 2D éste se puede calcular mediante las siguientes ecuaciones (3.21) y (3.22):

$$PSD(f) = \frac{1}{L} \left| \int_0^L y(x) \exp(-i2\pi fx) dx \right|^2 \quad (3.21)$$

$$PSD = \frac{1}{N-1} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} y_i e^{-j2\pi\beta i/N} \right]^2 \quad (3.22)$$

Donde  $\beta$  es la relación longitudinal.

### 3.4.21 Parámetros de Espaciamiento

Los parámetros de espaciamiento son aquellos que miden las características horizontales de las desviaciones superficiales. Los parámetros de espaciamiento son muy importantes en algunas operaciones de manufactura, tales como en la producción de lámina de acero estampada. En tal caso, la evaluación de los parámetros de espaciamiento es necesaria para obtener lubricación consistente al prensar las hojas, para evitar rayaduras y para dar la apariencia de la textura superficial en el producto final. Uno de los parámetros de espaciamiento es el *espaciamiento máximo*, el cual puede ser un importante factor para el rendimiento de superficies con fricción tales como tambores de frenos. Mediante el control de los parámetros de espaciamiento es posible obtener una mejor delimitación de acabados, acabados más uniformes de recubrimientos galvánicos y pintura.

### 3.4.22 Conteo de Puntos Altos (HSC)

El parámetro HSC es definido como el número de regiones altas del perfil sobre la línea media, o sobre la línea paralela a la línea media, por unidad de longitud a lo largo de la longitud en evaluación. La figura (3.16) muestra cómo calcular el parámetro HSC sobre un nivel seleccionado.

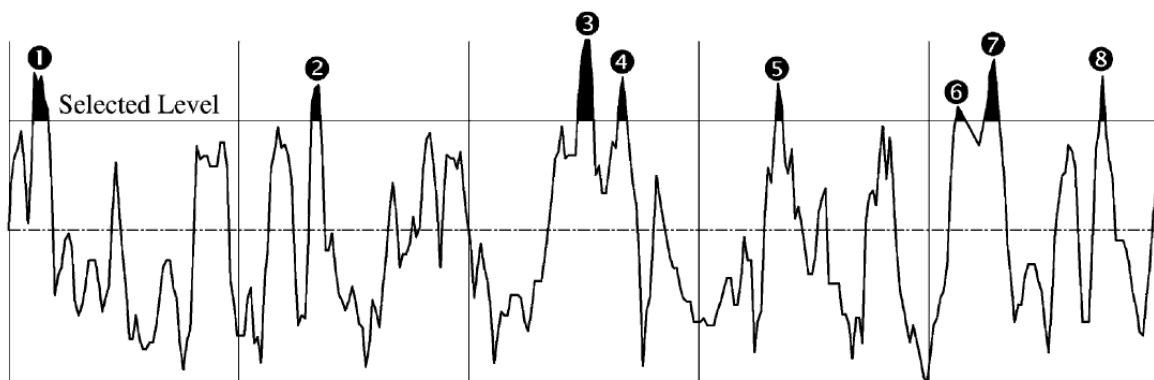


Figura 3.16 Cálculo del HSC sobre un nivel seleccionado [59].

### 3.4.23 Conteo de Picos ( $P_c$ )

La importancia del parámetro conteo de picos aparece en algunos procesos de manufactura tales como formado, pintura o recubrimiento de superficies. Éste se define como el número de picos locales, el cual es proyectado a través de una banda seleccionable localizada sobre y debajo de la línea media con la misma distancia. El número del conteo de picos se determina a lo largo de la longitud en evaluación y el resultado es dado en picos por centímetro (o pulgada). Si la longitud de evaluación es menos que 1 cm, el resultado debería ser multiplicado por un factor para obtener el conteo de picos por centímetro.

Como se muestra en la figura (3.17) el conteo de picos se determina sólo para áreas cercanas al perfil, en los cuales el perfil interseca cada banda superior e inferior en al menos dos puntos. El perfil mostrado en la figura tiene cuatro picos.

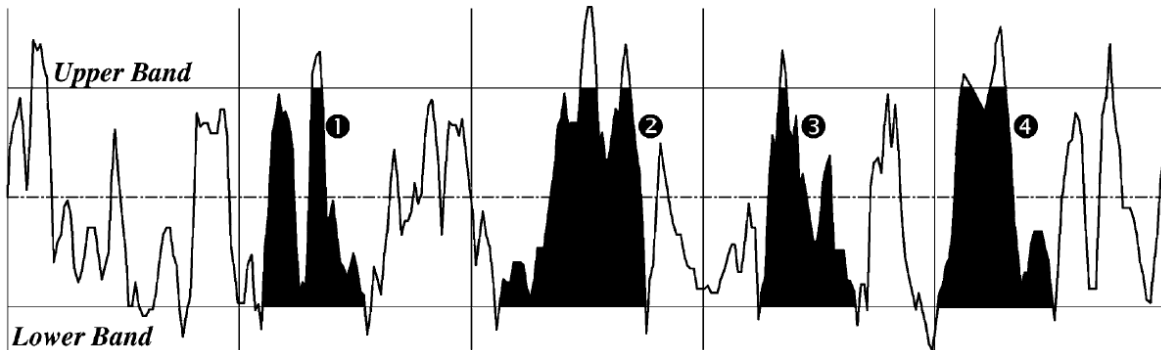


Figura 3.17 Cálculo del parámetro conteo de picos ( $P_c$ ) dentro de una banda seleccionada [59].

### 3.4.24 Espaciamiento Promedio de los Picos Locales Adyacentes ( $S$ )

Este parámetro es definido como el espaciamiento promedio de los picos locales adyacentes del perfil medido a lo largo de la longitud en evaluación. El pico local se define como la parte más alta del perfil medido entre dos mínimos adyacentes y es sólo medido si la distancia vertical entre los picos adyacentes es más grande o igual a 10% del  $R_t$  del perfil. La figura (3.18) muestra cómo medir este parámetro. Este parámetro puede ser calculado de la siguiente ecuación (3.23):

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n S_i \quad (3.23)$$

Donde  $N$  es el número de picos locales a lo largo del perfil.

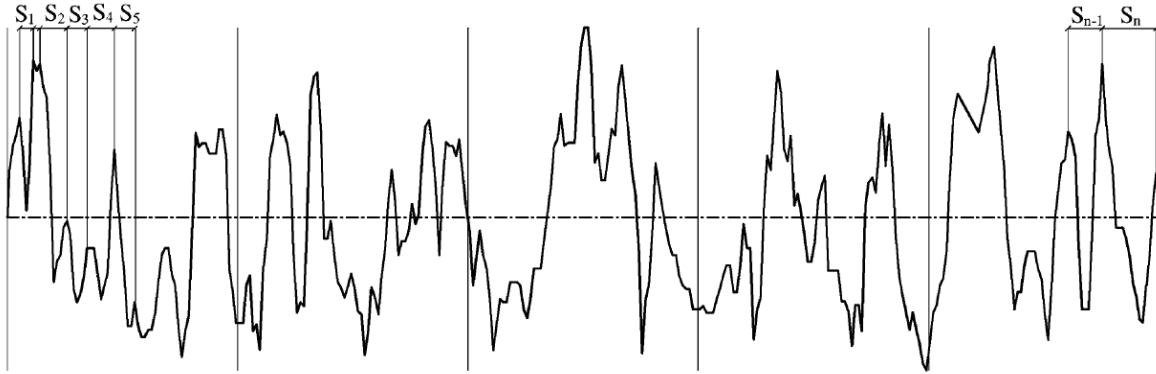


Figura 3.18 Cálculo del espaciamiento medio de los picos locales adyacentes (S) [59].

### 3.4.25 Espaciamiento Promedio en la Línea Media ( $S_m$ )

Este parámetro es definido como el espaciamiento promedio entre los picos del perfil a la línea media y es denotado como ( $S_m$ ). El pico del perfil es el punto más alto del perfil entre los cruces hacia arriba y hacia abajo de la línea media. La figura (3.19) muestra cómo medir el espaciamiento promedio al parámetro línea media.

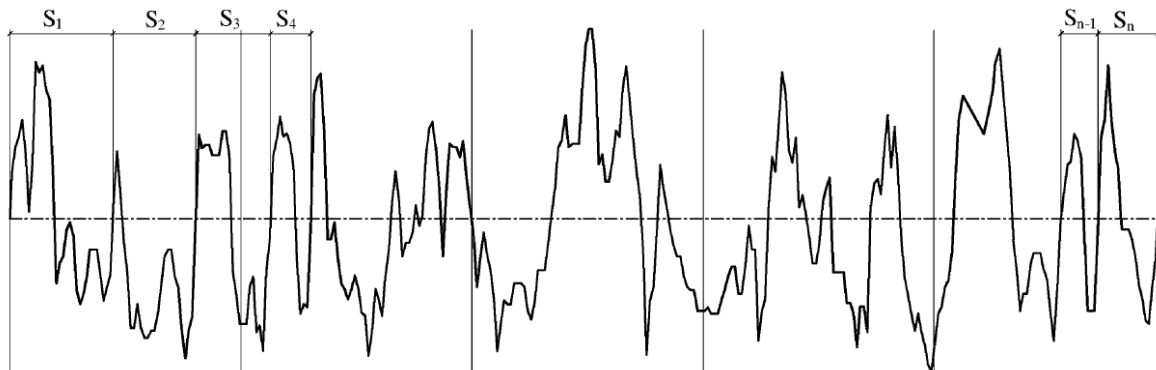


Figura 3.19 Cálculo del espaciamiento promedio de la línea media ( $S_m$ ) [59].

Este parámetro puede calcularse de la siguiente ecuación (3.24):

$$S_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n S_i \quad (3.24)$$

Donde  $N$  es el número de picos del perfil en la línea media.

La diferencia entre los dos tipos de parámetros de espaciamiento promedio,  $S$  y  $S_m$ , es que el primer parámetro ( $S$ ) se mide en los puntos más altos del perfil, mientras que el segundo parámetro ( $S_m$ ) se mide en la intersección del perfil con la línea media.

### 3.4.26 Número de intersecciones del perfil en la línea media $n(0)$

Este parámetro calcula el número de intersecciones del perfil con la línea media medida por cada centímetro de longitud del perfil. Como se muestra en la figura (3.20), el número de intersecciones del perfil a la línea media puede ser calculado de la siguiente ecuación (3.25):

$$n((0)) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n c_i \quad (3.25)$$

Donde L es la longitud del perfil (en centímetros).

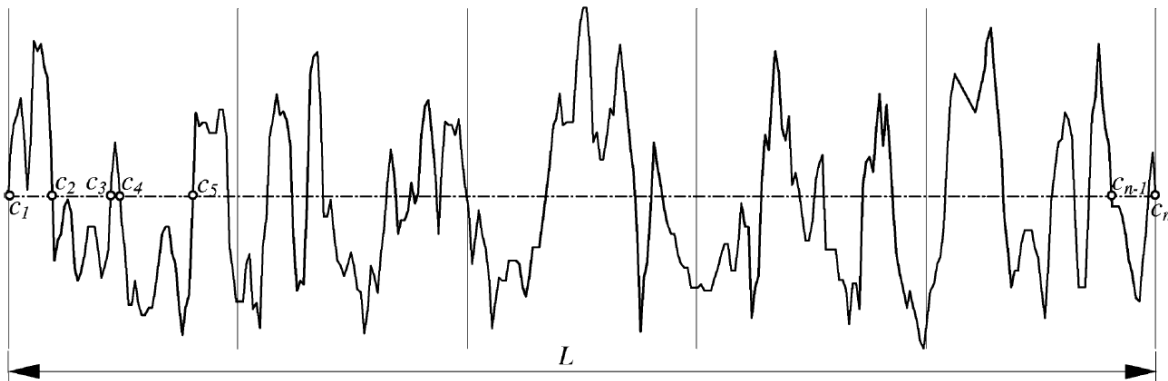


Figura 3.20 Cálculo del número de intersecciones del perfil en la línea media [59].

### 3.4.27 Número de Picos en el Perfil ( $m$ )

Este parámetro calcula el número de picos del perfil por unidad de longitud (centímetro o pulgada). Los picos son contados sólo cuando la distancia entre el actual pico y el anterior es más grande que 10% de la máxima altura del perfil ( $R_t$ ). En la figura (3.21) los tres picos pequeños, los cuales siguen los picos  $m_2$ ,  $m_3$  y  $m_4$  son despreciados porque la distancia entre cada pico y el anterior es demasiado pequeña.

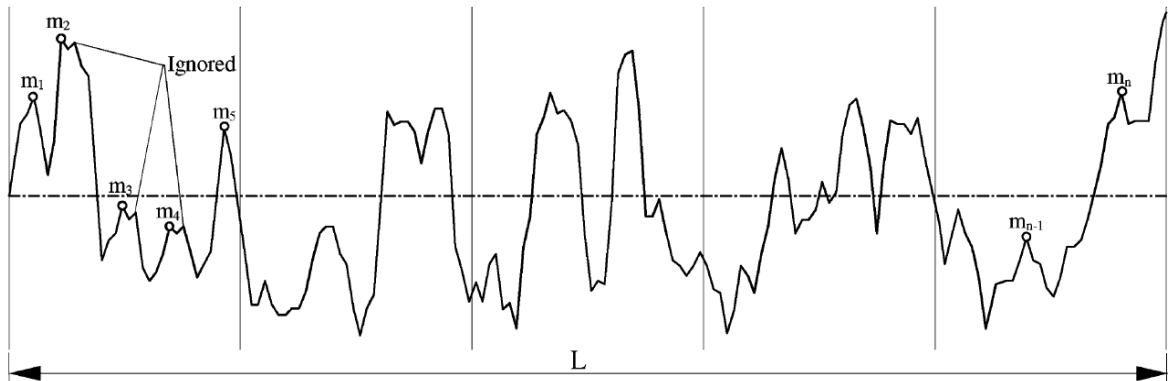


Figura 3.21 Cálculo del número de picos a lo largo del perfil [59].

El número de picos puede ser calculado de la siguiente ecuación (3.26):

$$m = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.26)$$

Donde L es la longitud del perfil en centímetros.

### 3.4.28 Número de Puntos de Inflexión (g)

Este parámetro calcula el número de puntos de inflexión del perfil por unidad de longitud (centímetro o pulgada). Un punto de inflexión ocurre cuando el perfil cambia su dirección en cualquier punto como se muestra en la figura (3.22). Este parámetro puede ser calculado de la siguiente ecuación (3.27):

$$g = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n g_i \quad (3.27)$$

Donde L es la longitud del perfil (en centímetros).

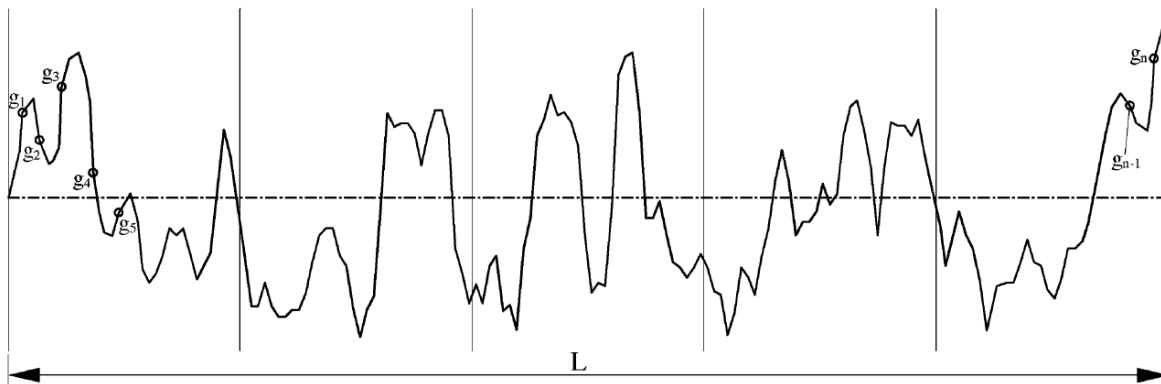


Figura 3.22 Cálculo del número de puntos de inflexión a lo largo del perfil [59].

### 3.4.29 Radio Promedio de Asperezas ( $r_p$ )

El radio promedio de pico o el parámetro de curvatura se define como el promedio de las curvaturas principales de los picos dentro de la longitud en evaluación. Este parámetro puede conocerse por el cálculo del radio de curvatura para cada pico a lo largo del perfil, entonces se calcula el promedio de estos radios de curvatura.

El radio de curvatura para un pico ( $r_{pi}$ ) puede determinarse de la siguiente ecuación (3.28):

$$r_{pi} = \frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{l^2} \quad (3.28)$$

Donde  $y_i$  es la altura del pico en el cual el radio de curvatura del pico ( $r_{pi}$ ) va a ser calculado,  $y_{i-1}$  es la altura del pico anterior, y  $y_{i+1}$  es la altura del siguiente pico.

El radio de curvatura promedio del pico ( $r$ ), entonces puede ser calculado de la siguiente ecuación (3.29):

$$r_p = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\rho_{pi}} \quad (3.29)$$

### 3.5 Generación de Superficies Rugosas

El presente apartado tiene por objetivo describir los conceptos fundamentales que fueron implementados a lo largo del trabajo del modelado de las superficies rugosas con carácter fractal. Se hace referencia al método llamado **Random Midpoint Displacement Method** para generar superficies rugosas fractales. Se da una breve descripción del Midpoint Displacement Method, la relación existente con la generación de las superficies rugosas los métodos de construcción en una y dos dimensiones.

Algunos autores mencionan que el Random Midpoint Displacement Method es un método conveniente debido a su comportamiento probabilístico:

Existen diversos enfoques en el modelado de superficies rugosas de contacto, sin embargo parece que el enfoque más conveniente es el enfoque probabilístico [60]. Existen diferentes métodos para la generación de superficies fractales, los cuales, entre los más populares se encuentran la función Weierstrass-Mandelbrot, el modelo Ganti-Bhushan, el Método de Síntesis Espectral y el Método del Desplazamiento del Punto Medio Aleatorio (RMD) [52].

Es importante resaltar que la RMD es una simple y poderosa técnica numérica para generar campos de alturas realistas a cualquier resolución. La superficie resultante es una aproximación de un fractal autoafín. De hecho una ampliación a detalle de la superficie es similar, en un sentido estadístico, a las superficie original total [52]. En el presente trabajo se utilizará el RMD debido a su relativa simplicidad en la generación de superficies fractales.

#### 3.5.1 Random Midpoint Displacement Method

El Random Midpoint Displacement o Diamond Square Algorithm, genera superficies con carácter fractal que bien pueden ser en una, dos y hasta tres dimensiones. La idea de este método fue introducida por primera vez por Alain Fournier, Donald S. Fussell y Loren C. Carpenter en 1982, el cual es un método iterativo; es utilizado principalmente para la generación de representaciones de medios porosos, paisajes montañosos, medios geológicos, nieve, así como en el modelado de fenómenos tribológicos tales como contacto mecánico, fricción, adhesión, desgaste, lubricación. Consiste en realizar un

número  $n$  de iteraciones para, en un caso de una dimensión (línea) realizar una partición en el punto medio de cada segmento de línea realizada en cada iteración, agregándole un número pseudoaleatorio de una distribución Gaussiana, de modo que se obtienen valores tanto positivos como negativos para generar los “relieves” y las “depressiones” en el perfil.

El Random Midpoint Displacement Fractal puede describirse como un fractal “autosimilar” debido a que es una copia exacta de sí mismo en cada iteración en cada escala del procedimiento por el cual se determina. La autosimilitud es estadística, en el sentido de que la geometría específica de cada simulación es particular, pero sus propiedades topológicas y estadísticas son idénticas. En dos dimensiones, el método contiene valores ordenados en una matriz cuadrada con un tamaño de  $2^p+1$  de modo que ésta es una matriz no par, debido a la forma en que toma los promedios de los dos puntos extremos y los coloca en un valor de posición intermedia; al partir de una matriz impar el promedio puede ser tomado de tal manera que éste pueda ser colocado en el centro de la matriz, y de esta manera se pueda generar una retícula de puntos promediados a partir de una matriz cuadrada no par. Para propósitos de análisis, es una herramienta que crea el mismo tipo de arreglo de datos morfológicos como la mayoría de los métodos de adquisición de exploración de imágenes de rango real [61].

### 3.5.2 Generación del Midpoint Displacement Method en 1D

Como paso inicial se define una Distribución Gaussiana en un intervalo de  $[-1,1]$ , de donde se obtendrán todos los números pseudoaleatorios necesitados. El siguiente paso es definir los extremos de una línea, los cuales servirán para tomar el promedio de ambos y colocarlos en el centro de la misma, añadiéndole un valor pseudoaleatorio Gaussiano, figura 3.23.



**Figura 3.23** Primera iteración en el método. Muestra el valor promedio en el punto medio más un valor Gaussiano multiplicado por un factor de amplitud  $f$  [62].



El siguiente paso es tomar como extremos los valores ya fijados. Cada línea se toma de manera independiente, se realiza el promedio de los extremos una vez más y se le agrega un valor pseudoaleatorio Gaussiano, de modo que se tendrá de nueva cuenta para cada línea un punto medio con el promedio de los extremos más un valor pseudoaleatorio Gaussiano (VGA) multiplicado por un valor de amplitud  $f$  de modo que ahora no se tendrán dos sino cuatro segmentos de línea a los cuales se les realizará este procedimiento una vez más, figura (3.24).

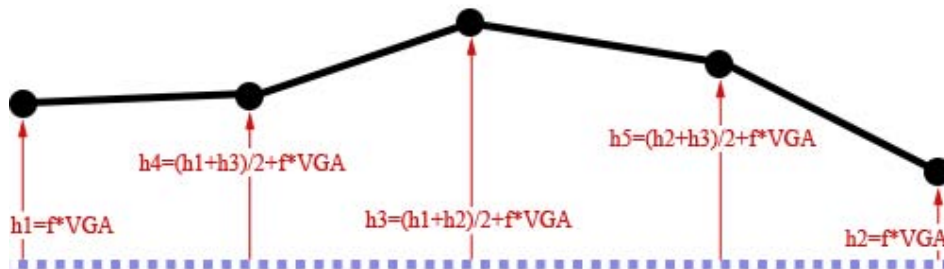


Figura 3.24 Segunda iteración. Muestra los 4 nuevos segmentos de línea generados [62].

Este procedimiento se realiza  $n$  veces para generar la escala deseada para el fenómeno en estudio en 1D. El factor de escala se puede definir como  $\frac{1}{\sqrt{2^n+1}}$ , de modo que  $n$  es el número de iteración realizada en el procedimiento. Para una tercera iteración se obtendrán ya no 4 sino 8 segmentos de recta para volver a repetir el procedimiento respectivo, figura (3.25). Es conveniente mencionar que el factor  $f$  tiene la tarea de aumentar o disminuir la amplitud de cada altura por un número constante establecido desde un principio el procedimiento, de modo que el fractal es afectado enteramente por este factor de amplitud  $f$ , estableciendo para cada valor de  $f$  diferente un nuevo fractal, el cual a diferentes escalas es un fractal autosimilar debido a su mismo comportamiento estadístico en toda su construcción.

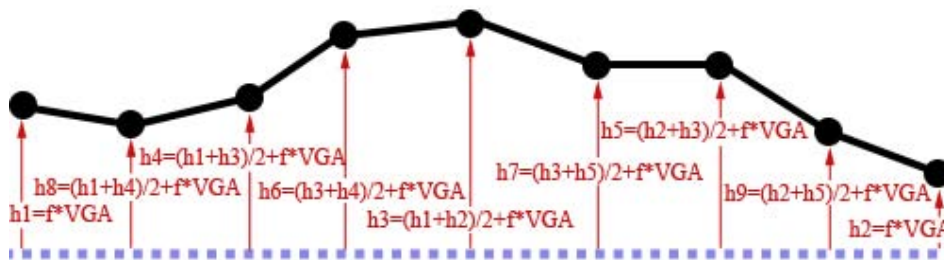


Figura 3.25 Tercera iteración. Muestra 8 nuevos segmentos de línea generados [62].

Al procedimiento anterior se le puede agregar otro factor, éste es el coeficiente de Hurst,  $H$ , el cual controla de manera directa los perfiles obtenidos por el método, si el perfil es cercano a uno, el perfil se hace muy escarpado, figura (3.26) y si está cercano a cero, éste se suaviza notablemente, figura (3.27). El coeficiente de Hurst se encuentra entre los valores 0 y 1 ( $0 \leq H \leq 1$ ). El coeficiente de Hurst es otra manera de controlar la amplitud de cada elevación en cada iteración; en este trabajo no se hace uso de este coeficiente, sino del factor de amplitud  $f$ .



**Figura 3.26** Perfil correspondiente a un coeficiente de Hurst de 0.7 [62].



**Figura 3.27** Perfil correspondiente a un coeficiente de Hurst de 0.5 [62].

El coeficiente de Hurst y el factor de multiplicación  $f$  tienen funciones similares, la preferencia del uso del factor  $f$  es debido a la extensa aplicación que éste tiene dentro de la generación de superficies topográficas; para la generación de dichas superficies se hace uso de un factor  $f$  igual a 0.5, mismo que se ha utilizado durante el desarrollo del presente trabajo.

### 3.5.3 Generación del Midpoint Displacement Method en 2D y 3D

Este procedimiento se puede hacer extensivo para dos, figura (3.28) y tres dimensiones, figura (3.29), y su tratamiento es relativamente el mismo para cualquier dimensión deseada, de modo que su uso lo hace una herramienta muy útil por su simplicidad.

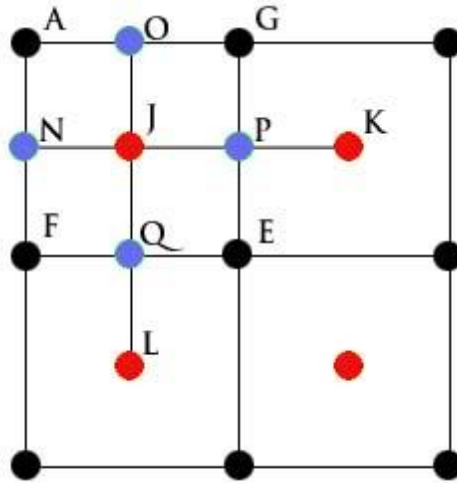


Figura 3.28 Midpoint Displacement Method aplicado a un arreglo de dos dimensiones [63].

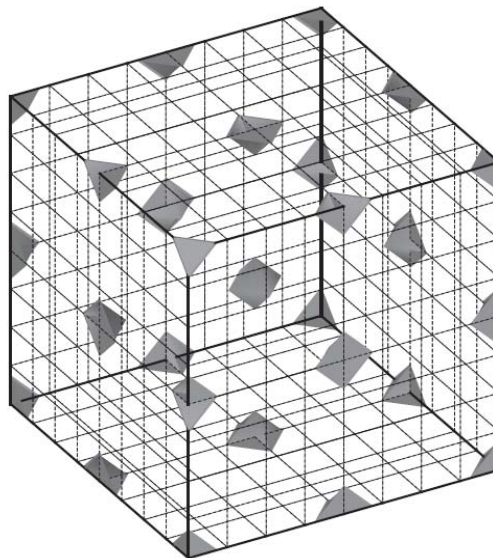


Figura 3.29 Midpoint Displacement Method aplicado a un arreglo de tres dimensiones [64].

## 4 MÉTODO

En este apartado se describe la forma en que la malla fue construida para dar origen al modelo, la manera en que se generó la superficie rugosa, la forma en que se genera para este caso en particular, la matriz que contiene las alturas de la superficie rugosa, la forma en la que esta rugosidad fue introducida en el modelo CAE, además de los parámetros que fueron implementados en dicha simulación. Los conceptos matemáticos que sustentan la solución que resulta de dichas simulaciones aparecen en el Apéndice A, el cual contiene la formulación que utiliza el programa Abaqus® para la solución del contacto entre superficies, esto con el fin de no perder el objetivo del presente trabajo, generar una metodología capaz de generar superficies rugosas de carácter fractal haciendo el uso del elemento finito para su solución e interpretación.

### 4.1 Construcción de la malla

Por cuestiones didácticas se describirá el proceso de construcción de la malla en varias etapas, debido a que éste método permite una mejor descripción y organización de la misma.

#### 4.1.1 Primera etapa de la construcción de la malla

Para la primera capa de la malla serán utilizadas las siguientes geometrías de acuerdo al modelo que se implementó en el análisis.

La malla consiste principalmente de paralelepípedos organizados de tal manera que la malla sea fina en la parte donde la rugosidad es añadida (superficie de contacto).

A continuación se presentan las geometrías básicas para la elaboración de la malla. Como primer figura se tiene un cubo el cual tiene dimensiones de una unidad por cada lado, al igual que la profundidad figura (4.1).

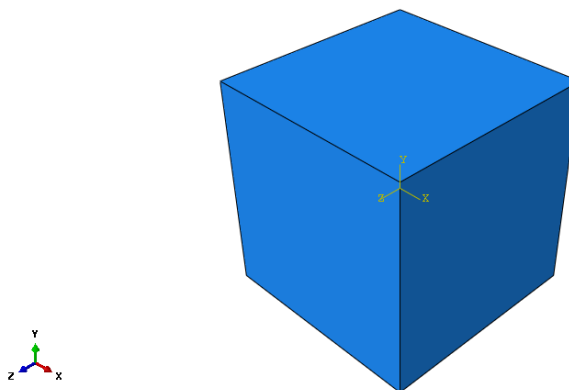
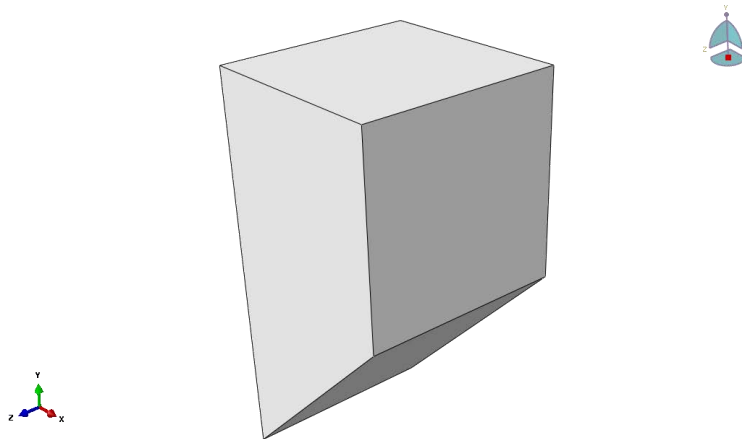


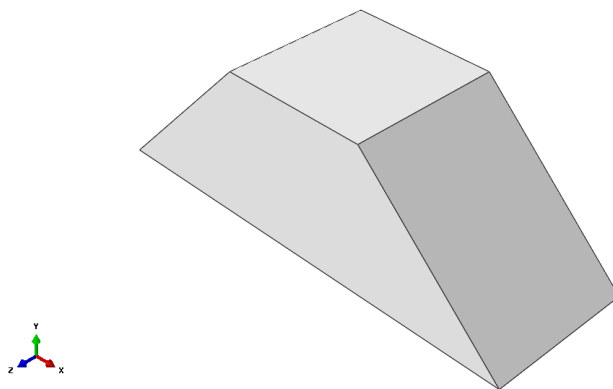
Figura 4.1 Cubo de con dimensión unitaria por lado.

La siguiente figura muestra un paralelogramo irregular el cual tiene dimensiones tales que, el lado más grande de éste tiene 2 unidades de longitud, y sus lados opuesto y adyacente 1 unidad de longitud, mientras que la profundidad de ésta pieza geométrica es de 1 unidad de longitud, figura (4.2).



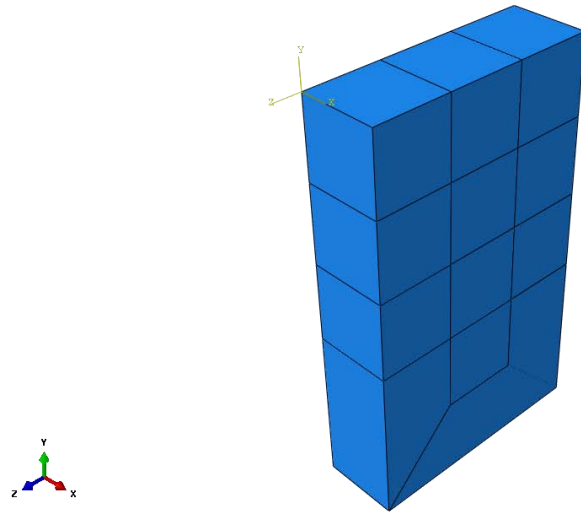
**Figura 4.2** Paralelepípedo irregular con profundidad 1.

La siguiente figura corresponde a un paralelogramo que también es irregular y con ésta pieza se puede formar la primera capa de nodos de la malla completa. La figura geométrica (trapecio) tiene como base mayor una longitud de 3 unidades, como base menor 1 unidad y altura de 1 unidad, de tal modo que el paralelepípedo tiene una profundidad de 1 unidad, figura (4.3).

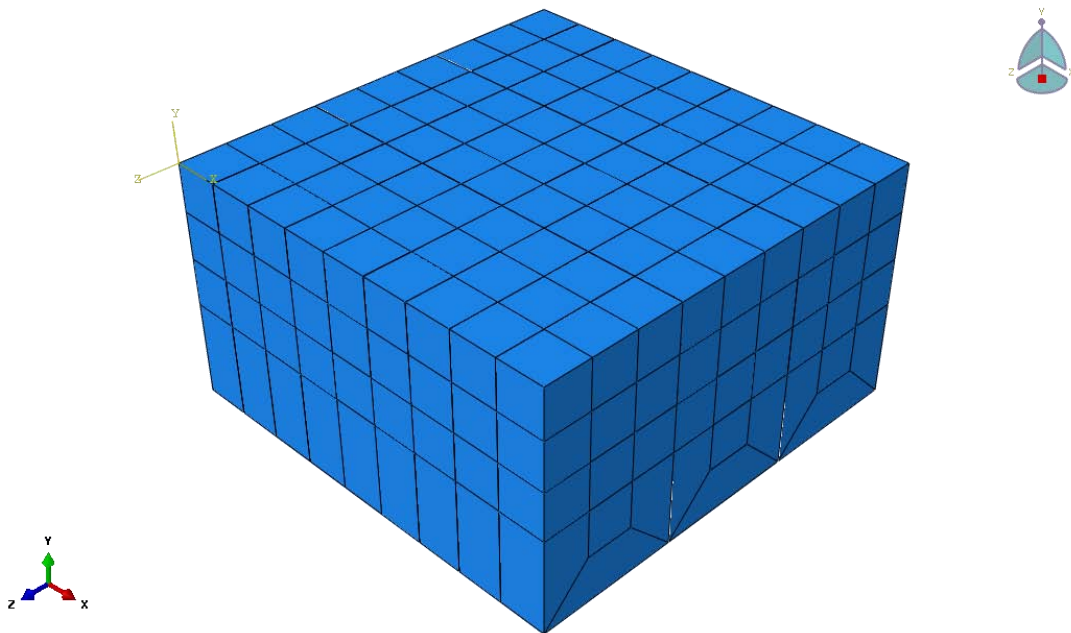


**Figura 4.3** Paralelepípedo irregular con profundidad 1 unidad.

Con las geometrías antes descritas se procede a formar una nueva pieza en el módulo assembly, multiplicando cada pieza y orientándola para su respectivo ensamble, de tal modo que con la opción Merge/Cut Instances se formará una nueva pieza, figura (4.4), dicha pieza será multiplicada en dirección Z, 3 veces, en dirección X, 9 veces, de tal modo que se tenga una nueva geometría la cual se muestra en la figura (4.5).



**Figura 4.4** Geometría realizada con 3 geometrías base, primera etapa.



**Figura 4.5** Figura anterior multiplicada 3 veces en dirección Z y 9 en dirección X.

Es conveniente mencionar que existen diferentes alternativas para realizar el proceso la construcción de la malla, pero un dato importante es que en cada paso de multiplicación debe existir un Merge/Cut Instances para facilitar la reproducción de la malla de tal modo que al final sea más simple reorganizar las piezas. Más adelante se especificará hasta qué punto es conveniente tener cierto tamaño de malla debido a las implicaciones computacionales que ésta implica, de modo que será mejor multiplicarla desde el archivo .inp y no desde el archivo .cae.

### 4.1.2 Segunda etapa de la construcción de la malla

Hasta este punto se tiene la geometría de la figura (4.5) a la cual se le añadieron nuevas geometrías, dichas geometrías se muestran en esta segunda etapa para formar una nueva pieza la cual será ensamblada a la geometría final de la primera etapa.

La nueva geometría consiste de tres figuras básicas, las cuales, cada una de ellas puede ser reproducida y orientada las veces que sea necesario. A continuación se muestra un prisma cuadrangular, el cual está orientado sobre el eje Z y tiene por medidas en la base 1 unidad por lado y altura 3 unidades, figura (4.6).

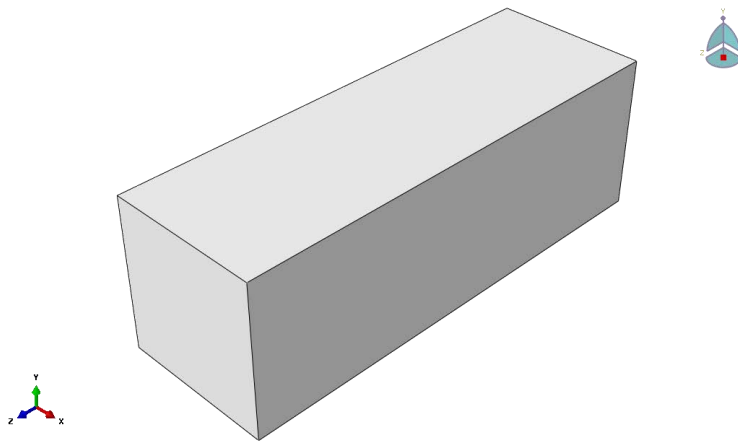


Figura 4.6 Prisma con base cuadrada de 1 unidad por lado y altura 3 unidades.

La siguiente figura muestra un paralelogramo irregular el cual tiene dimensiones tales que el lado más grande de éste tiene 2 unidades de longitud, y sus lados opuesto y adyacente 1 unidad de longitud, mientras que la profundidad de ésta pieza geométrica es de 3 unidades de longitud, figura (4.7).

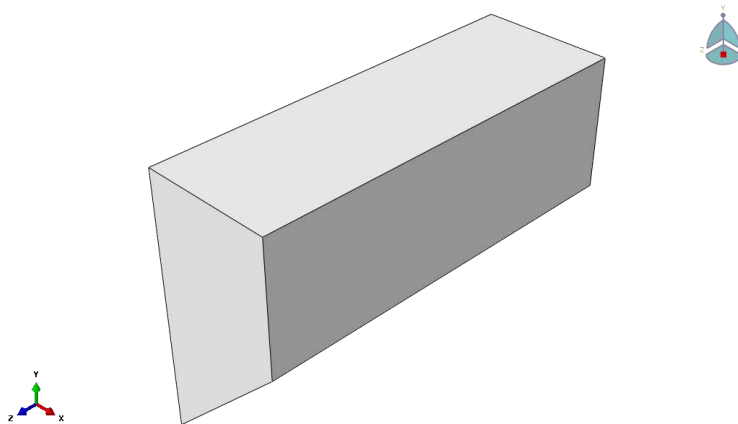
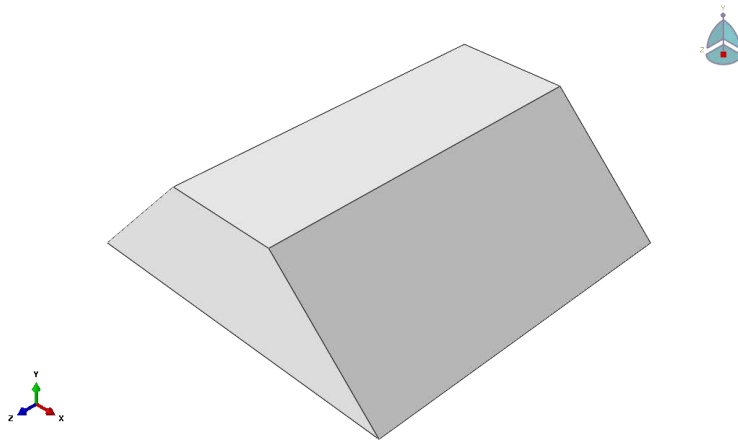


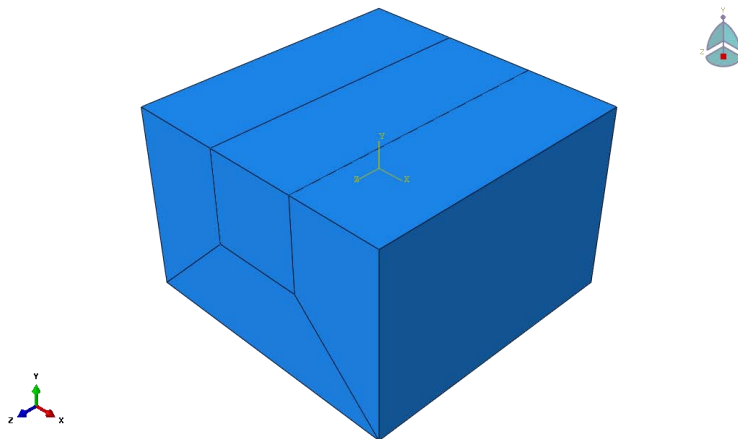
Figura 4.7 Paralelepípedo irregular con profundidad de 3 unidades.

De la misma manera, la siguiente figura corresponde a un paralelogramo que también es irregular, pero en este caso la profundidad será diferente. La figura geométrica (trapezoido) tiene como base mayor una longitud de 3 unidades, como base menor 1 unidad y altura de 1 unidad de tal modo que el paralelepípedo tiene una profundidad de 3 unidades, figura (4.8).



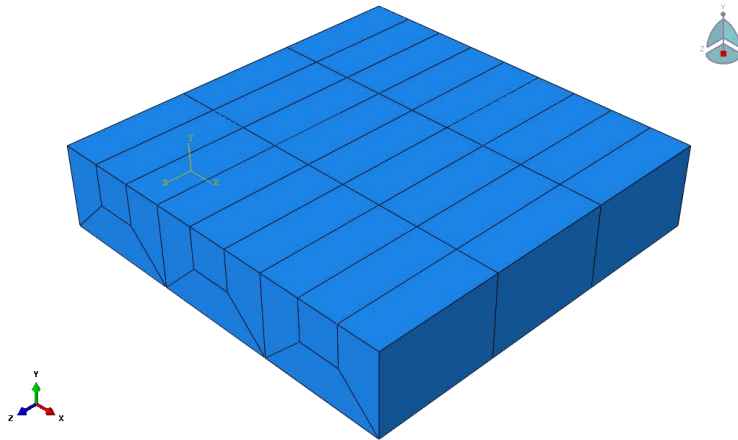
**Figura 4.8** Paralelepípedo irregular con profundidad de 3 unidades.

De nuevo, en el módulo assembly se realizan los respectivos pasos para formar la segunda etapa de la malla, de tal modo que se tiene la nueva pieza, figura (4.9), que se multiplicará para formar la geometría final de la segunda etapa, la cual será ensamblada a la geometría final de la primera etapa, figura (4.10).



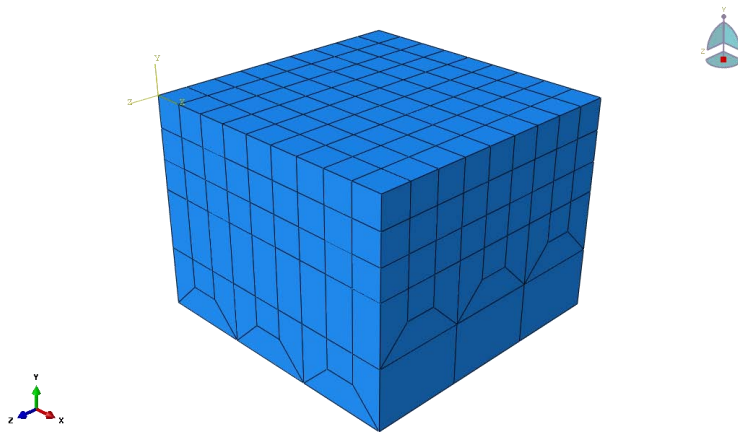
**Figura 4.9** Geometría realizada con 3 geometrías base, segunda etapa.





**Figura 4.10** Figura 3.28 multiplicada 3 veces en dirección Z y 3 e dirección X.

Al ensamblar la pieza final de la etapa 1 y la pieza final de la etapa 2 se tiene una nueva configuración geométrica la cual se presenta en la figura (4.11).



**Figura 4.11** Unión de geometrías finales (etapas 1 y 2).

### 4.1.3 Tercera etapa de la construcción de la malla

El proceso es repetitivo, las geometrías son muy parecidas, pero las medidas cambian de acuerdo a un patrón intuitivo como el que se presenta en el desarrollo de construcción de la malla.

Las figuras (4.12) y (4.13) muestra las nuevas geometrías ensambladas en esta etapa, la cuales son sencillas de reproducir para futuros trabajos debido a su sencilla forma intuitiva de construcción.

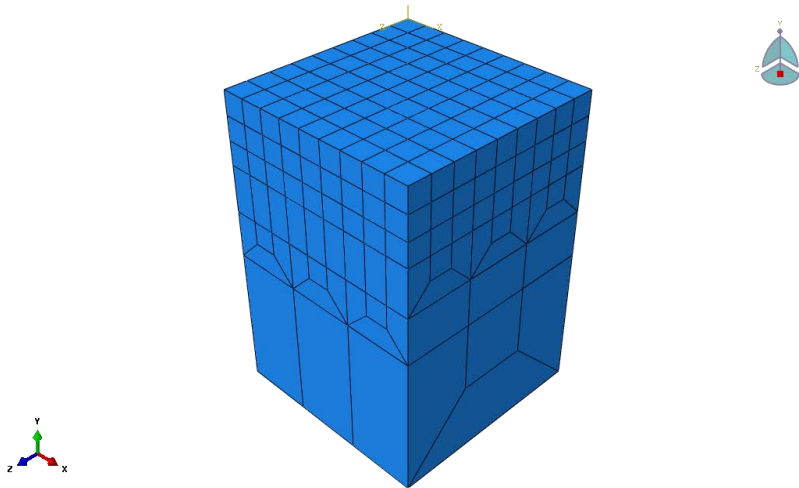


Figura 4.12 geometría final correspondiente a la tercera etapa.

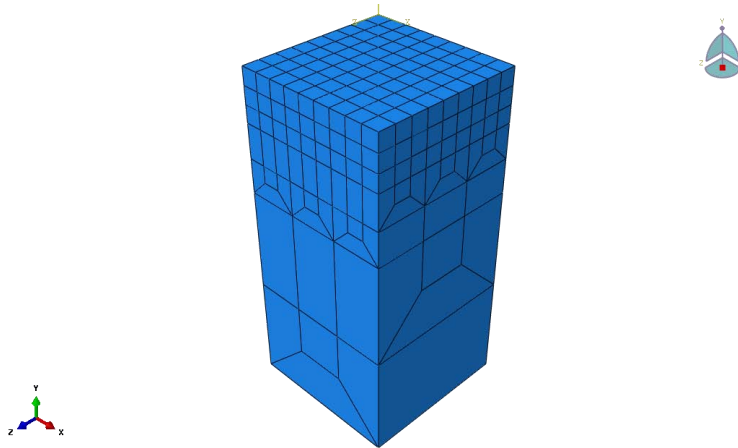


Figura 4.13 Geometría final de la cuarta etapa de ensamble.

#### 4.1.4 Cuarta etapa de la construcción de la malla

Las figuras (4.14) y (4.15) muestran las últimas geometrías para dar paso a la malla del modelo final, señalando que la geometría de la figura (4.15) debe ser multiplicada 27 veces por cada lado, obteniendo un total de 244x244 nodos en la superficie de la placa final.

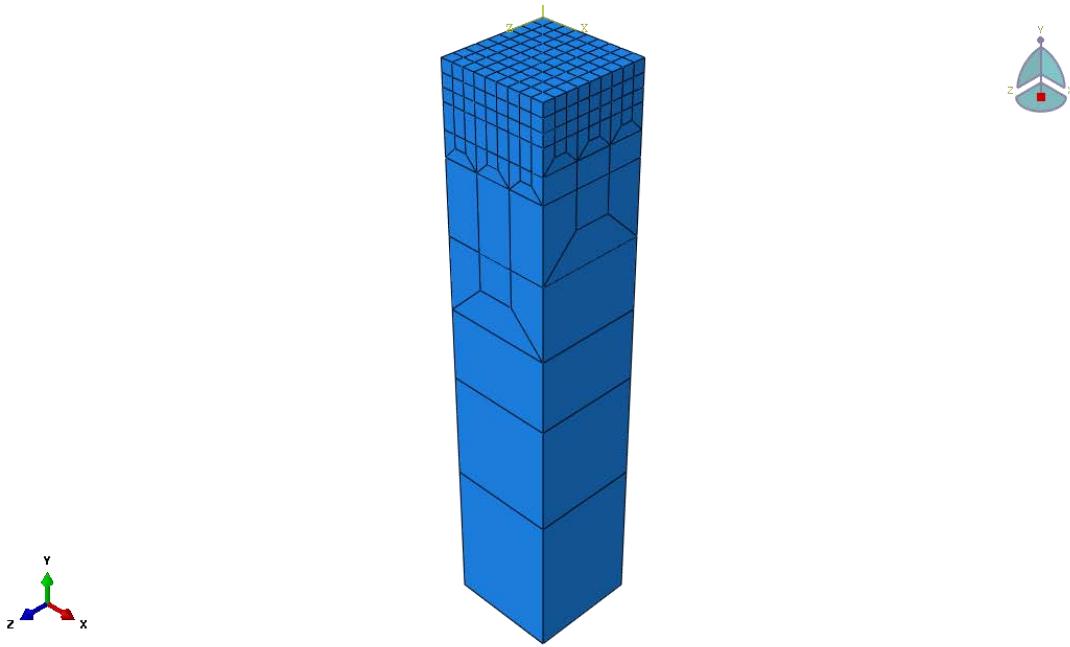


Figura 4.14 Geometría final de la quinta etapa de ensamble.

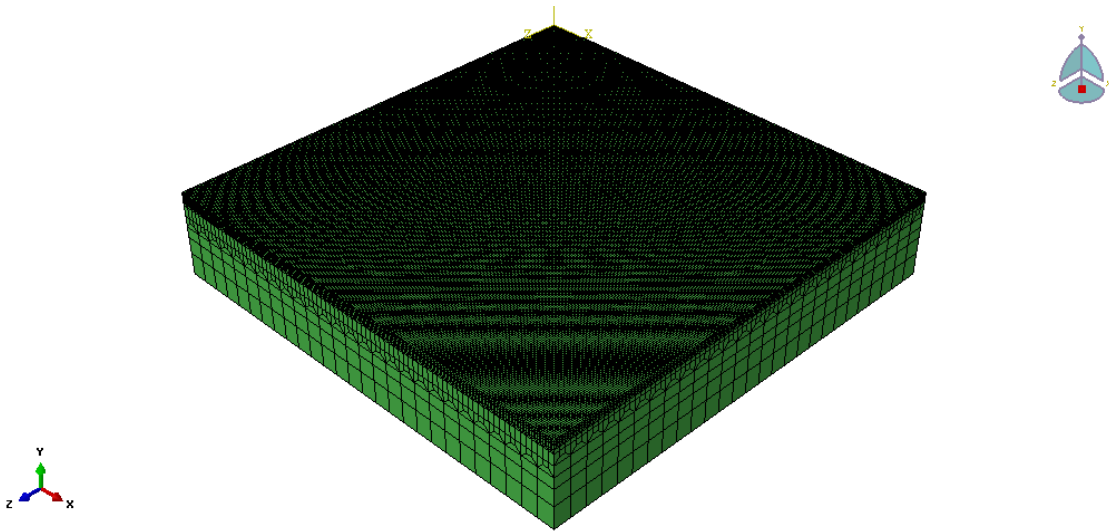


Figura 4.15 Geometría final del mallado, placa de 244 por 244 nodos.

## 4.2 Generación del Midpoint Displacement Method (2D) Implementado para Generar la Superficie Rugosa

La implementación del Midpoint Displacement Method en dos dimensiones no difiere en gran medida al aplicado en una dimensión. El primer paso consiste en definir una Distribución Gaussiana en un intervalo de  $[-1,1]$ , de donde se obtendrán todos los números pseudoaleatorios necesitados. El siguiente paso consiste en definir una matriz

cuadrada de tamaño  $2^p+1$  en donde se tomará el promedio de las esquinas a los que se les asigna previamente un valor pseudoaleatorio inicial a cada una de ellas, figura (4.16a), después de lo anterior se procede a realizar el promedio de las cuatro esquinas agregándole un valor pseudoaleatorio de la distribución Gaussiana, consecuentemente se coloca este número en el centro de la matriz, figura (4.16b), como paso siguiente se realiza el promedio de las esquinas (las cuales son dos) que pertenecen a cada lado de la matriz y de nuevo se le agrega un nuevo valor pseudoaleatorio Gaussiano y se coloca en el centro del lado bajo consideración, figura (4.16c), esto se realiza para los 3 lados restantes, de modo que ahora no se tiene un cuadrado sino cuatro a causa de la división que se realizó al tomar los promedios anteriores y este mismo método se repite de manera iterativa para cada uno de los cuadrados. La figura (4.16) muestra el procedimiento.

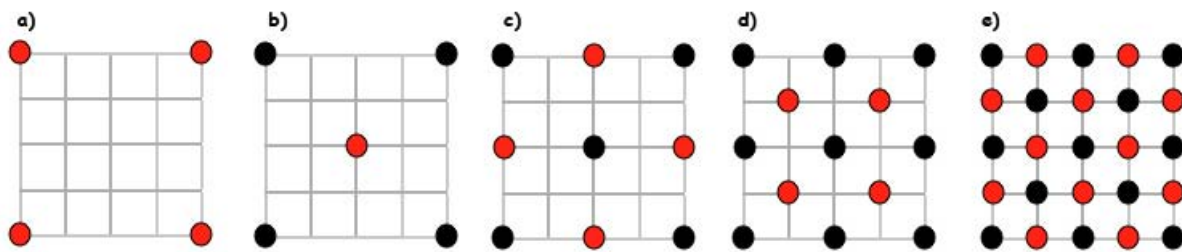


Figura 4.16 Procedimiento para generar superficies fractales en 2D [65].

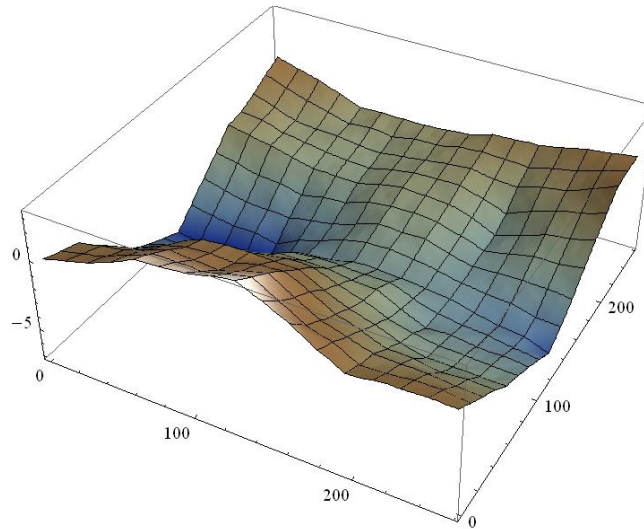
Los puntos rojos representan los nuevos valores asignados, de modo que en la primera matriz se han asignado cuatro valores en las cuatro esquinas de la matriz, en la segunda matriz se ha tomado el promedio de los cuatro valores anteriores de las esquinas y se le ha asignado un valor pseudoaleatorio y éste se coloca en el centro de la matriz, de modo que en la tercera matriz de la figura anterior se promedian los dos valores que pertenecen a cada lado y se les asigna un valor pseudoaleatorio, y el valor obtenido se coloca en el centro de cada lado. Este método se realiza hasta terminar de llenar la matriz de forma completa.

Es importante señalar que el tamaño de la matriz que será llenada debe ser impar, puesto que los valores que se toman de las esquinas deben ser colocados en un centro. El tamaño de dicha matriz es  $2^p+1$ .

Todo el procedimiento que se realiza para obtener la distribución de alturas a lo largo de un plano mediante el **Midpoint Displacement Method**, se implementa en un código de programación, el cual se basa en una matriz de tamaño  $2^p+1$  llena de ceros, los cuales se van llenando, como mencionado con anterioridad. El código de Programación fue realizado en **Wolfram Mathematica®**.

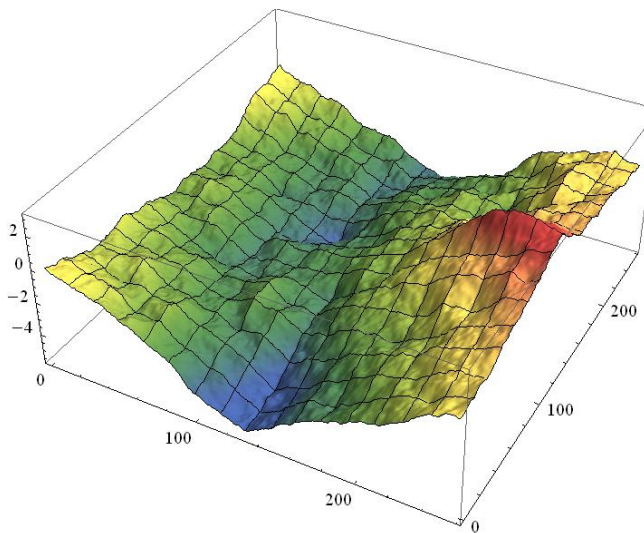
A continuación se presentan algunas superficies rugosas. Las figuras (4.17), (4.18), (4.19) y (4.20) muestran superficies con diferentes “ $f$ ”.

**$f=0.3$**



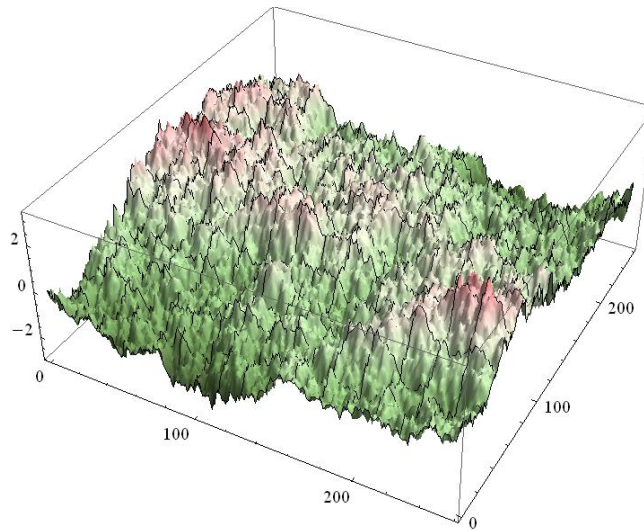
**Figura 4.17** Superficie rugosa con  $f=0.3$  y 257 nodos por lado.

**$f=0.5$**



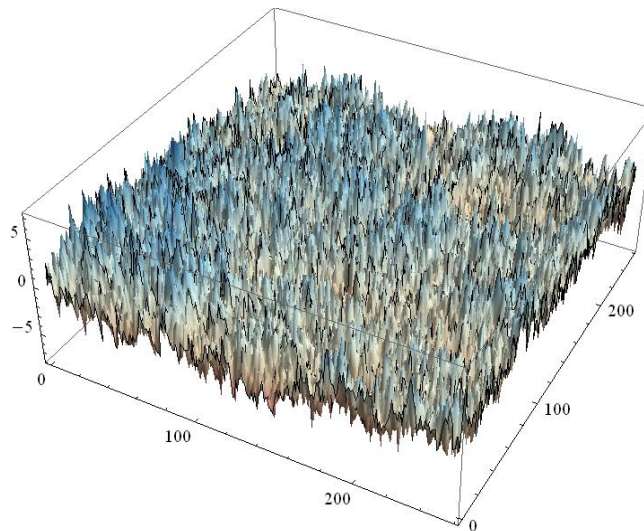
**Figura 4.18** Superficie rugosa con  $f=0.5$  y 257 nodos por lado.

**f=0.7**



**Figura 4.19** Superficie rugosa con  $f=0.7$  y 257 nodos por lado.

**f=1**



**Figura 4.20** Superficie rugosa con  $f=1$  y 257 nodos por lado.

### **4.3 Modelado Numérico de la Superficie Rugosa**

#### **4.3.1 Modelo 3D de la superficie Rugosa en ABAQUS®**

En esta sección se describe la forma en que se implementó el modelo 3D de la superficie rugosa basada en el Midpoint Displacement Method.

La mejor manera de generar la superficie rugosa consiste primeramente en construir el modelo, el cual es mallado mediante un “orphan mesh” debido a que mediante este tipo

de mallado se conserva la geometría de la malla completa. La elaboración de la malla se describe en el apartado titulado **elaboración de la malla**. Consecuentemente se llevó a cabo una simulación la cual generó un archivo **.inp** (archivo input). Dicho archivo comunica entre el ordenador y el software de elemento finito (Abaqus®) y contiene información completa del modelo. Puede ser manipulado mediante un editor de textos o mediante algún software capaz de manipular datos en texto plano.

La principal información de interés que contiene el archivo **.inp** son las coordenadas de los nodos, los cuales forman los elementos finitos que conforman la malla, además de la relación que existe entre éstos para poder formar la malla. Este archivo es muy importante puesto que mediante paquetería capaz de modificarlo, reescribe los valores de la matriz previamente generada (Midpoint Displacement Method), coloca los valores correspondientes en la superficie de las placas que van a generar el contacto, de modo que las placas ahora tienen rugosidad del tipo fractal. Ahora se tienen dos superficies con rugosidad fractal, que entrarán en contacto en la simulación. Es muy importante mencionar que la sustitución de los puntos en la parte superficial de cada una de las placas (nodos de contacto entre las mismas) para generar la superficie rugosa en cada una de ellas se lleva a cabo con un código elaborado en Wolfram Mathematica®, puesto que la malla del modelo consta de una gran cantidad de nodos y elementos y la sustitución mediante un editor de textos sería una tarea imposible.

Los nodos están enumerados en orden ascendente en el archivo **.inp** y corresponden a las coordenadas de cada uno de los nodos en la malla; los valores que serán sustituidos serán los valores que corresponden a la tercera columna puesto que dichas superficies son paralelas al plano formado por los ejes X y Z, siendo el eje Y paralelo a la línea que describe el espesor de las placas. Es importante señalar que los nodos en la superficie de cada una de las placas (nodos de contacto) corresponde a un valor constante en la malla original, y su valor Y está sustituida por el valor generado con el método previamente descrito.

A continuación se muestra un fragmento del archivo **.inp**, figuras 4.21 y 4.22, que contiene la información de los nodos que conforman la malla, el cual aún no ha sido modificado, primeramente se encuentra una keyword, la cual describe dentro del archivo que la sección corresponde a información acerca de los nodos a continuación se presenta un arreglo de cuatro columnas. La primer columna muestra el número de nodo, mientras que las siguientes tres columnas describen las coordenadas X, Y y Z respectivamente.



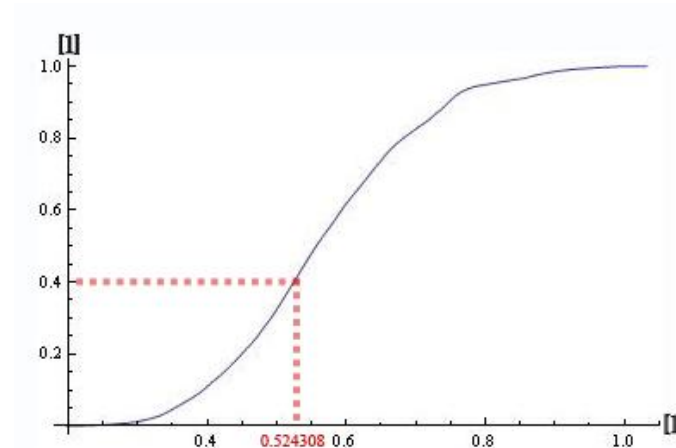


resultados pertinentes en la simulación numérica, de modo que se puede establecer dicha interferencia mediante una distribución acumulada de las diferencias que existen entre los puntos de las superficies. Lo anterior se puede traducir de la siguiente manera:

$$[D]=[M_{\text{valor de separación inicial}}]+[V_{\text{fija}}]-[V_{\text{móvil}}]$$

Siendo **[D]** la matriz que contiene las diferencias de cada uno de los puntos de las matrices que representan, **[M<sub>valor de separación inicial</sub>]** es la matriz que contiene la diferencia inicial de las placas (sin rugosidad), la cual en este caso es 0.5, por este motivo esta matriz contiene 0.5 en cada uno de sus elementos. **[V<sub>fija</sub>]** es la matriz que contiene las posiciones de los puntos en Y que generan la rugosidad para la placa que se mantiene fija; de igual modo **[V<sub>móvil</sub>]** son las posiciones de los puntos en Y contenidos en la matriz de rugosidad correspondientes a la placa móvil la cual se desplaza con cierta velocidad a la placa fija.

El porcentaje de interferencia entre las placas se calcula mediante la distribución acumulada de la diferencia de los puntos, tomando de forma directa a partir de dicha distribución el porcentaje de interferencia en estudio para el modelo de rugosidad. La figura (4.23) muestra la distribución acumulada de la cual se toman los porcentajes de interferencia para las placas., en la cual se muestra el valor que corresponde al 40%, la cual da la distancia que la placa móvil tiene que recorrer.



**Figura 4.23** Función de distribución acumulada que ilustra el valor correspondiente a una interferencia del 40%, el cual es 0.524308.

#### 4.4 Tamaño y descripción del modelo

Como primer intento de simular un superficie rugosa y con el objetivo de evitar posibles problemas posteriores se ha trabajado sobre una superficie rugosa con un total de 28x28, el cual corresponde a un tamaño de  $3^3+1$  por lado de la matriz cuadrada, 784 nodos en la superficie de contacto en ambas placas, tanto fija como móvil la cual es 76 veces más pequeña que la superficie con la cual se trabajará en esta tesis la cual consiste de 244x244

(59536) nodos en su superficie de contacto en ambas placas. Lo anterior tiene por objetivo saber de manera concisa los posibles problemas en una simulación de mayor tamaño y por consecuencia de mucho mayor tiempo de simulación numérica.

#### 4.4.1 Unidades

Las unidades que se manejan en este modelo son metros y no micrómetros, las cuales son las unidades de la rugosidad; esto para evitar complicaciones de consistencia de unidades en el modelo, puesto que es más sencillo trabajar en el Sistema Internacional de Unidades dentro del software de simulación. Es conveniente mencionar que las unidades de referencia no son de suma importancia en un principio para los efectos que interesan en el modelo simulado, puesto que éste es un primer intento de construir una herramienta capaz de generar superficies rugosas de carácter fractal, sabiendo que se pueden hacer escalamientos de unidades sin alterar la esencia de los resultados y tomando en cuenta que todos los resultados reportados están en el Sistema Internacional de Unidades.

#### 4.4.2 Desplazamiento vertical

Es importante tener en cuenta que la simulación se realiza en dos pasos. En el primer paso se realiza el desplazamiento vertical el cual aproxima a la placa móvil a la placa fija y al mismo tiempo en este paso se realiza la interferencia deseada. La velocidad con la cual se realiza la aproximación es de  $V$  [m/s]; La velocidad en este paso es muy importante debido a que la energía cinética del modelo no debe exceder el 5% de la energía interna del cuerpo al realizar el desplazamiento para dicha velocidad. Es muy importante controlar la velocidad para que no existan problemas de vibración en el momento de acercar las placas.

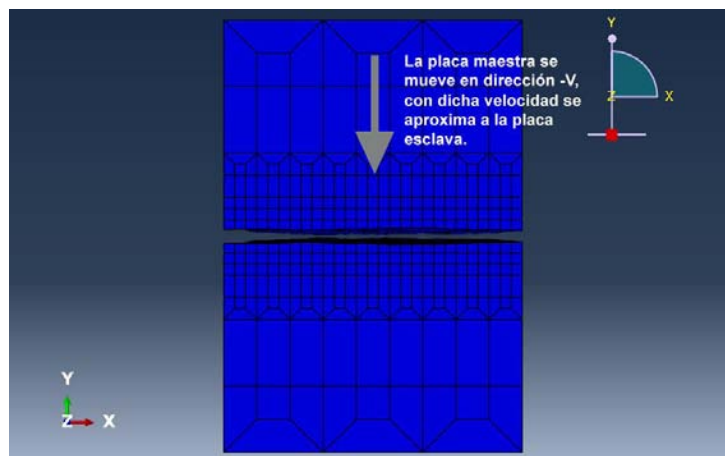


Figura 4.24 Desplazamiento vertical de la placa móvil.

En la figura (4.24) anterior se puede observar el desplazamiento de la placa, el cual es paralelo al eje Y. Es posible observar que existe una separación entre las placas, la cual va a ser cubierta por el porcentaje de desplazamiento proporcionado a dicha placa.

El porcentaje de interferencia entre las superficies le es asignado en un primer criterio de 25 %, de modo que este dato es obtenido de la distribución acumulada para la diferencia de la distancia que existe en las asperezas de cada placa.

#### **4.4.3 Desplazamiento horizontal**

El desplazamiento realizado para el segundo paso corresponde a un desplazamiento horizontal, de modo que una vez concluido el primer paso, en donde se lleva a cabo el desplazamiento vertical y por lo tanto la interferencia de las asperezas, el paso consecutivo consiste en realizar un desplazamiento tangencial entre las placas y esto sólo puede ser realizado mediante el desplazamiento en el sentido positivo del eje X, siendo así el desplazamiento para simular el contacto entre las superficies. De igual modo que en el paso anterior es importante tener un control sobre la energía cinética de la placa móvil puesto que la energía cinética debe ser menor o igual al 5% de la energía interna del sistema. De este modo se evita que existan fenómenos indeseados en la simulación, como bien podrían ser una deformación excesiva de la placa móvil o vibraciones en ambas placas.

La velocidad con la que la placa móvil se desliza sobre la placa fija deber ser tal que no tenga efectos dinámicos sobre la misma, de modo que no genere errores de cálculo en los parámetros obtenidos.

La figura (4.25) muestra la manera en la que la placa móvil se mueve en sentido positivo al eje X, para poder realizar el contacto tangencial entre dichas placas, sabiendo que previamente hubo un porcentaje de interferencia entre las asperezas de las ambas placas en el paso anterior (desplazamiento vertical).

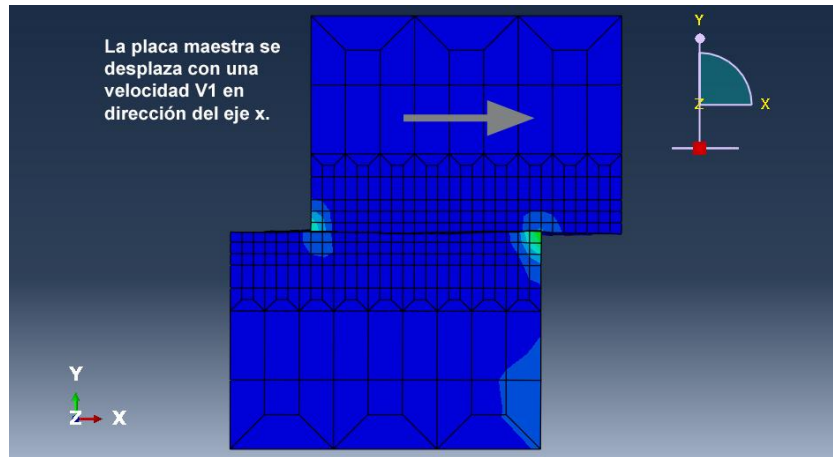


Figura 4.25 Desplazamiento horizontal de la placa móvil.

En este paso el desplazamiento vertical de las placas corresponde a un 25 % de la distancia total de cualquiera de las placas (móvil o fija) medido en sentido horizontal, esto tiene dos objetivos: 1) el evitar un excesivo tiempo de simulación contrario a si la placa móvil se deslizará el 100% de su propia distancia. 2) Evitar el incremento de la energía cinética, ya que como fue mencionado anteriormente la energía cinética del modelo no debe rebasar el 5 % de la energía interna del mismo; puesto que con ayuda de simulaciones previas se pudo determinar de forma aproximada que la energía cinética aumenta representativamente cuando ha recorrido un 60 % de la distancia total de las placas (móvil o fija), este fenómeno se debe muy seguramente a que ambas placas van perdiendo gradualmente el contacto lo que incrementa la energía cinética de la placa móvil en comparación con la energía interna, la cual disminuye conforme el área de contacto disminuye (a menor contacto de las placas mayor es la energía cinética de la placa móvil, no olvidando que ésta es la que se desplaza).

#### 4.5 Parámetros de la simulación

A continuación serán descritos los parámetros más importantes de la simulación, los cuáles pueden ser de ayuda para futuros trabajos, para futuras simulaciones.

Después de haber sido definidas las propiedades mecánicas y geométricas del modelo es necesario definir en el módulo de paso tanto el tiempo total virtual para cada paso, esto es, la duración del desplazamiento en cada paso. El modelo contiene dos pasos, el primero corresponde al desplazamiento vertical, en éste mismo se define el porcentaje de interferencia de la rugosidad; el segundo paso corresponde al desplazamiento horizontal, figura (4.25). Para definir la velocidad a la cual se lleva a cabo dicho desplazamiento se hace uso de la siguiente ecuación:

$$v = \frac{d}{t}$$

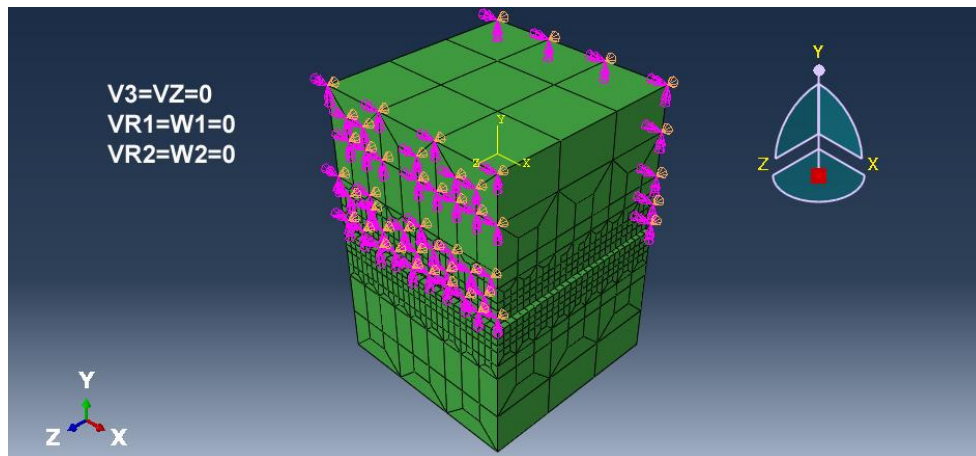
En la ecuación anterior se puede obtener con un simple despeje el tiempo de cada paso, ya que en la en el módulo **Load** la opción elegida en este mismo módulo es la opción de **Velocity/Angular velocity** en la cual se determina directamente la velocidad, sabiendo que el desplazamiento y la velocidad son variables que son controladas de forma directa.

En el módulo **Interaction** la opción elegida para el contacto es **Surface-to-surface contact (Explicit)** debido a que esta opción como su nombre lo describe resulta ser adecuada para el contacto entre dos superficies las cuales tendrán contacto. En el recuadro de **Edit Contact Property** para el caso de presente trabajo se ha elegido la opción **Tangential Behavior** para ambos pasos (desplazamiento vertical y horizontal) debido a que el contacto entre las asperezas tiene un comportamiento tangencial en dicho contacto.

#### 4.5.1 Condiciones de Frontera

Par el modelo de contacto entre superficies rugosas de carácter fractal se tomaron las siguientes condiciones de frontera:

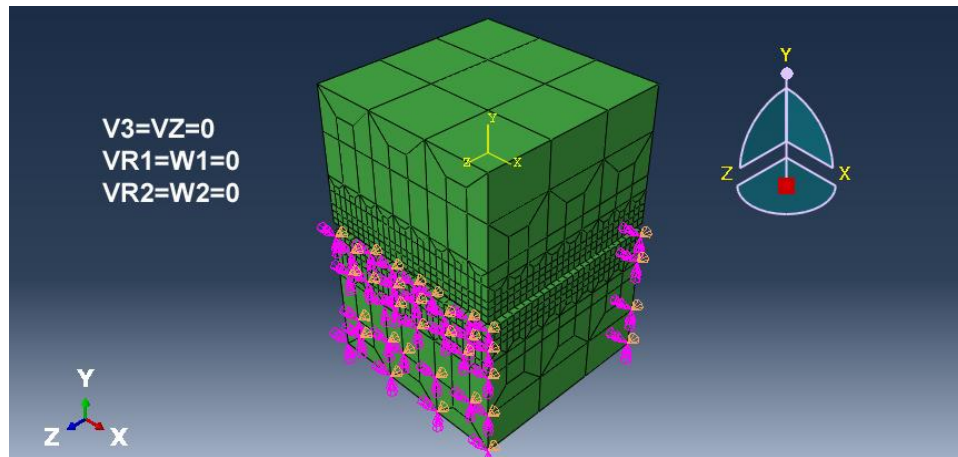
En la figura (4.26) se puede observar la primera condición de frontera en la placa móvil, la misma que existe tanto en el paso 1 como en el paso 2; se restringe el desplazamiento en la dirección Z, se restringe el movimiento angular alrededor del eje X y del eje Y.



**Figura 4.26** Condición de frontera que restringe desplazamiento en Z y movimiento angular alrededor de X y Y.

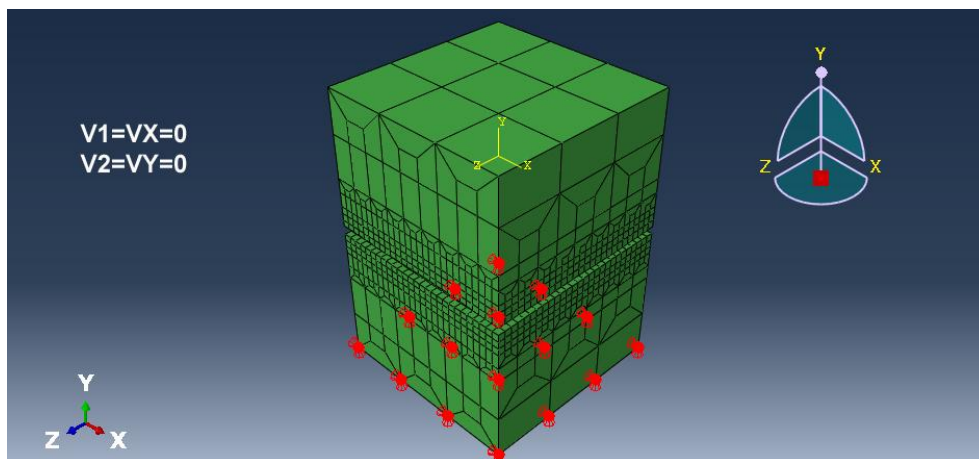
La siguiente condición de frontera pertenece a la placa fija, de la misma manera existe tanto en el paso 1 como en el paso 2; esta condición permanece en toda la simulación en el modelo. La figura (4.27) muestra la manera en cómo fue colocada dicha condición de

frontera, restringiendo el movimiento en dirección del eje Z y restringiendo el movimiento angular alrededor de los ejes X y Y.



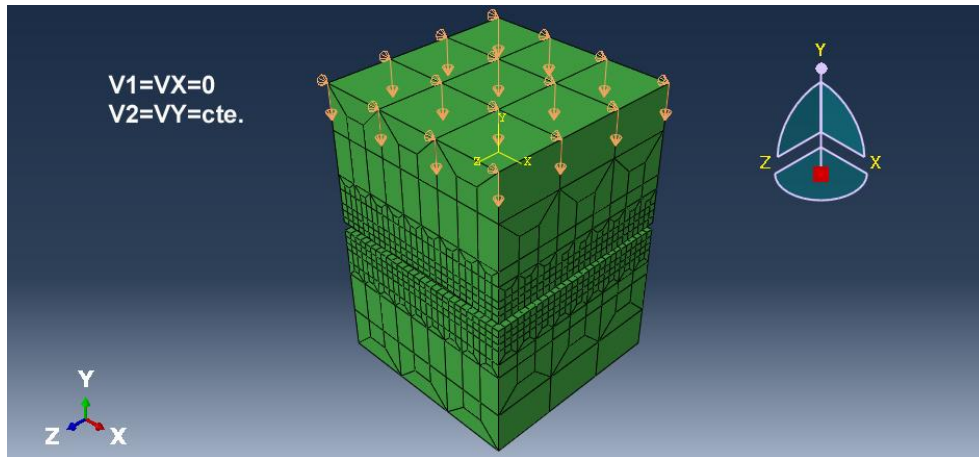
**Figura 4.27** Condición de frontera que restringe desplazamiento en Z y movimiento angular alrededor de X y Y.

Existe otra condición de frontera que se determinó para el presente modelo, éste restringe los desplazamientos en dirección de X y de Y; ésta condición de frontera se determina para el paso 1 y el paso 2, de tal manera que la placa fija no se desplaza al realizar el desplazamiento de la placa móvil. Las restricciones para esta condición de frontera se muestran en la figura (4.28).



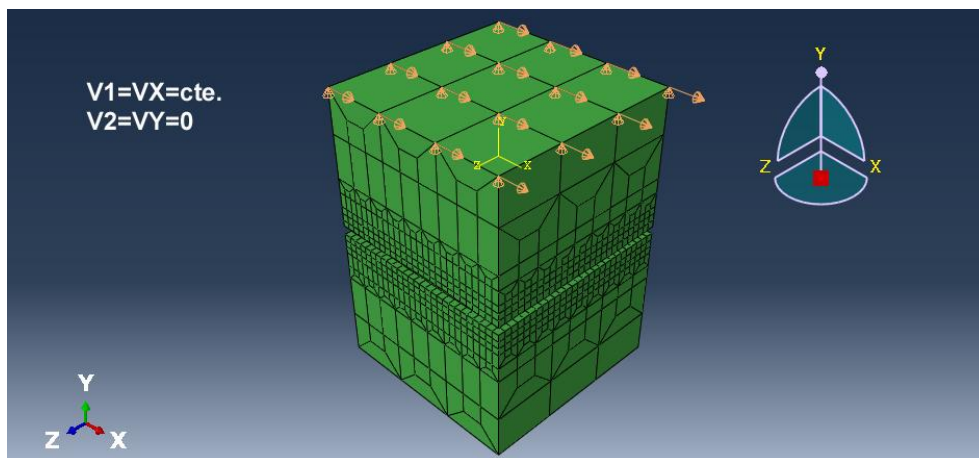
**Figura 4.28** Condición de frontera que restringe desplazamiento en dirección X y en dirección Y.

En la siguiente figura (4.29) se muestra el desplazamiento de la placa móvil y éste sólo se aplica en dirección negativa de Y con un valor constante y restringiendo el desplazamiento en dirección de X, el cual se da en el paso 1; aquí es donde se presenta la interferencia de la rugosidad con la placa fija.



**Figura 4.29** Desplazamiento en dirección negativa de Y, con restricción de desplazamiento en dirección X.

El siguiente desplazamiento corresponde a la placa móvil y sólo se presenta en el paso 2 de la simulación numérica, de modo que el desplazamiento en este paso será horizontal, teniendo en cuenta que previamente (paso 1) existió un determinado porcentaje de interferencia entre las asperezas de la placa móvil y la placa fija. En la siguiente figura (4.30) se muestra el desplazamiento que corresponde a un valor constante en dirección positiva de X y una restricción de desplazamiento en dirección Y.



**Figura 4.30** Desplazamiento en dirección positiva de X, con restricción de desplazamiento en dirección Y.

## 4.6 Errores en la simulación

### 4.6.1 Velocidad

Al realizar las simulaciones se pudo observar que la velocidad con la cual se desplaza la placa móvil debe ser mínima de tal modo que no exista energía cinética considerable en el modelo debido a que principalmente se generan vibraciones en las mismas; esto no es

deseable debido a que este fenómeno no permite un análisis correcto de las fuerzas actuando en el mismo, debido a que como se puede observar en la gráfica de la figura (4.31), existe variación de fuerzas en la parte superior de la misma, lo cual tiene un efecto negativo en la cuantificación de la fuerza, de modo que no se podrían conocer parámetros importantes en las simulación, entre los cuales se puede contar el área de contacto en un tiempo determinado de la simulación en que la placa móvil haga contacto con la fija. Todo lo anterior sucede en el desplazamiento vertical, el cual corresponde al primer paso de la simulación, que es donde se lleva a cabo el contacto de las asperezas, en ambas placas.

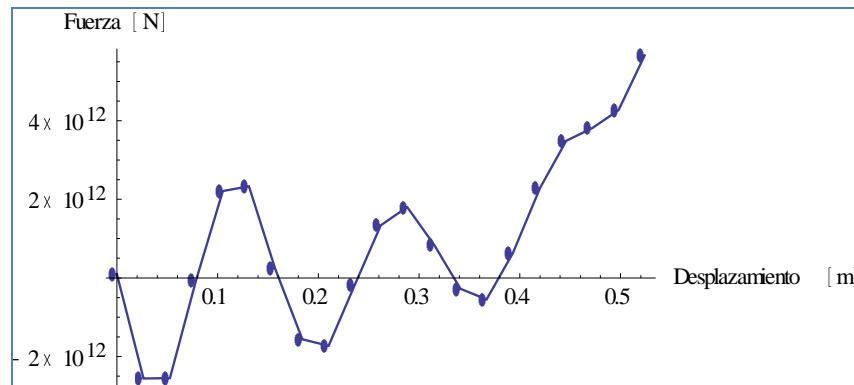


Figura 4.31 Desplazamiento vertical, 40 % de interferencia, ausencia de fricción.

En una primera serie de simulaciones la velocidad de desplazamiento de la placa fue de 1 m/s, pero dicha velocidad induce en la placa móvil una vibración indeseada, de modo que la velocidad más apropiada para el primer paso (desplazamiento vertical) es de 0.1 m/s o menor; es importante mencionar que esta velocidad fue determinada a prueba y error. En la figura (4.31) se puede observar el efecto de una velocidad inadecuada.

#### 4.6.2 Mallado

Al realizar simulaciones con la malla descrita en el apartado “construcción de la malla” se presentaron concentraciones de esfuerzo en las dos orillas de la placa fija paralelas al eje x, esto se resolvió incluyendo biseles en toda la fila de nodos pertenecientes a dichas orillas en el módulo de malla, resolviendo de forma directa el problema, para este modelo en particular se rebajó una distancia de 0.09 m, cabe decir que éste es un dato empírico, en el cual por prueba y error se llegó a esta distancia de modo que la concentración de esfuerzo en ambos lados fue eliminado. En la figura (4.32), se presenta la forma en la que estas concentraciones de esfuerzos afectaron de manera directa la simulación.



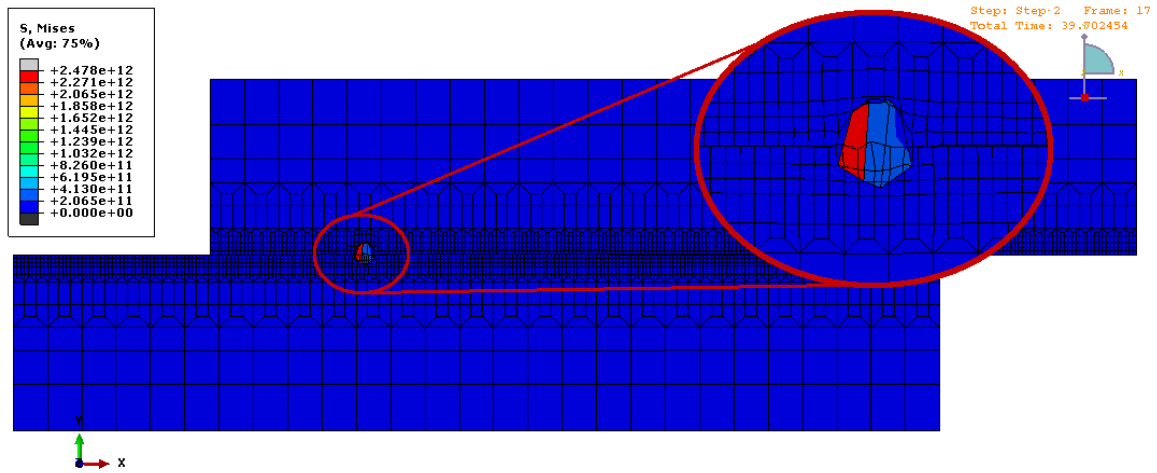
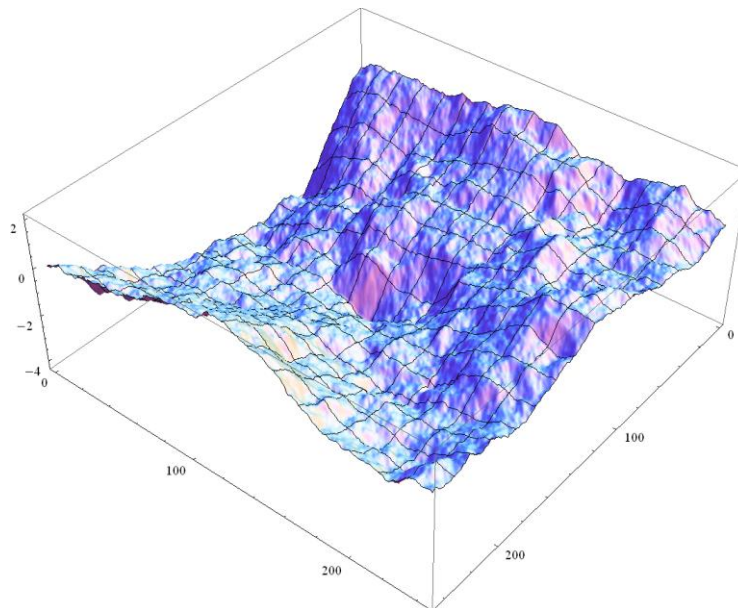


Figura 4.32 Exceso de deformación en el modelo elástico en el desplazamiento vertical.

## 5 RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

Aquí se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones correspondientes al acero en modelos elásticos y elasto-plásticos con diferentes esfuerzos de fluencia y diferentes coeficientes de endurecimiento, sin fricción y con un coeficiente de fricción de 0.1 y con el mismo coeficiente de amplitud en la rugosidad, el cual corresponde a un valor de 0.5 y con una interferencia del 40 % en las asperezas de las placas móvil y fija. Las diferentes variables que se observaron en las simulaciones fueron la fuerza aplicada vs área de contacto en el desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical vs área de contacto, desplazamiento horizontal vs área de contacto, así como el coeficiente de fricción durante el periodo de tiempo del desplazamiento.

Las figuras (5.1) y (5.2) muestran las superficies rugosas correspondientes a la placa móvil y a la placa fija respectivamente para esta simulación, en donde se puede apreciar a detalle la distribución de las asperezas a lo largo de las mismas.



**Figura 5.1** Gráfica de la matriz de altura para la placa fija.

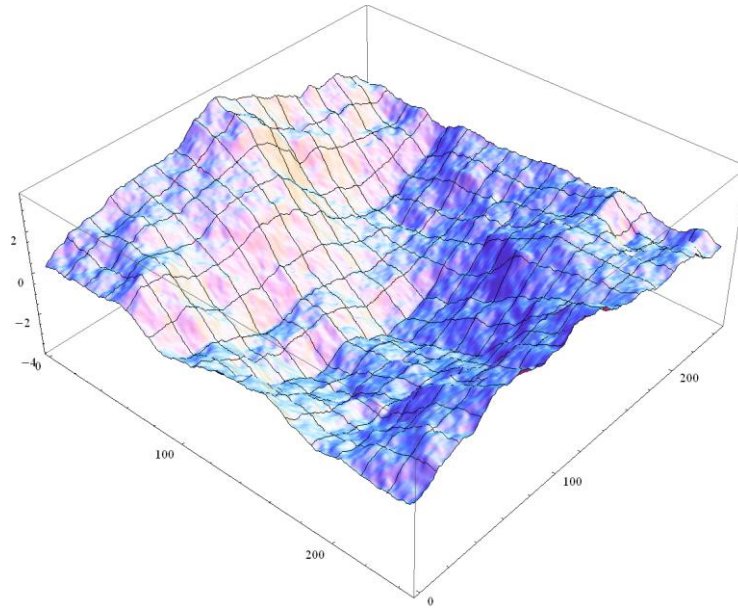


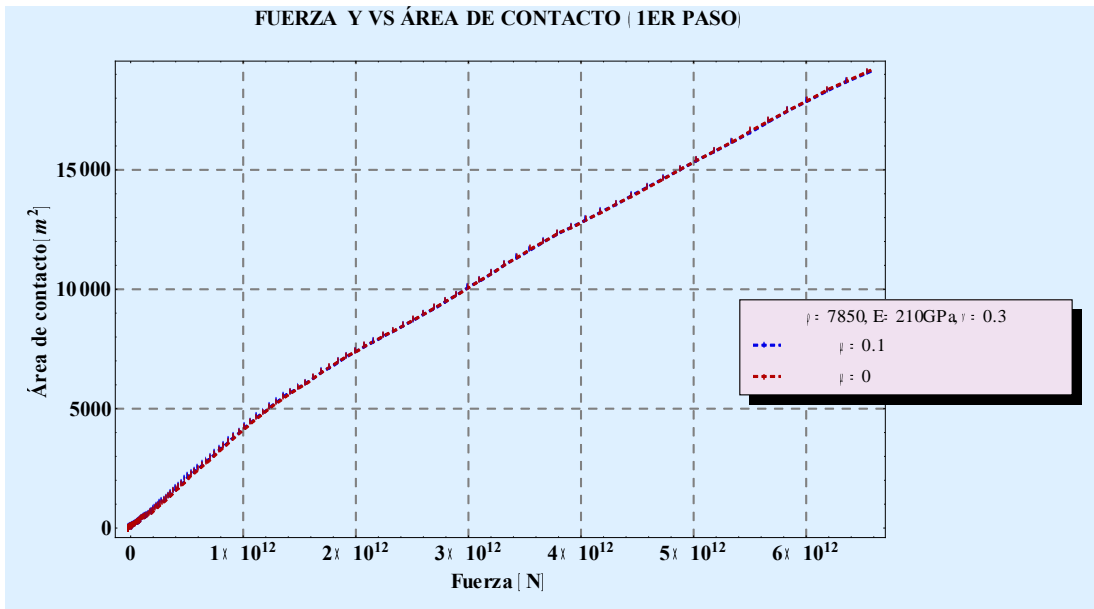
Figura 5.2 E Gráfica de la matriz de altura para la placa móvil.

## 5.1 Modelo Elástico

### 5.1.1 Fuerza en Y vs Área de contacto aparente (Desplazamiento Vertical) y coeficiente de fricción

En el modelo fractal que se presenta en este trabajo resulta conveniente mencionar que una característica importante en el contacto es el área aparente de contacto, la cual es mucho mayor al área real de contacto, además presenta un comportamiento aproximadamente lineal con respecto a la carga aplicada, de modo que se puede confirmar este resultado con investigaciones realizadas por Greenwood-Williamson [66] y L. Pei and et. al. [67], figura (5.3); lo anterior corresponde a un desplazamiento vertical de la placa móvil, el cual es el primer paso del desplazamiento total.

Otro factor importante que fue tomado en cuenta dentro de las simulaciones elásticas fue el coeficiente de fricción, de modo que la figura (5.3) muestra que no hay diferencias significativas con relación al área de contacto y el coeficiente de fricción en el desplazamiento vertical de la placa móvil. Tomando en cuenta que el área aparente de contacto corresponde a  $59\,049\text{ m}^2$  se puede decir con base en la simulación llevada a cabo, la interferencia de las asperezas corresponde a un 40 % de modo que en este caso el área aparente de contacto corresponde a un valor del 32.36 % para el contacto con fricción y un valor del 32.44 % para el contacto sin fricción.



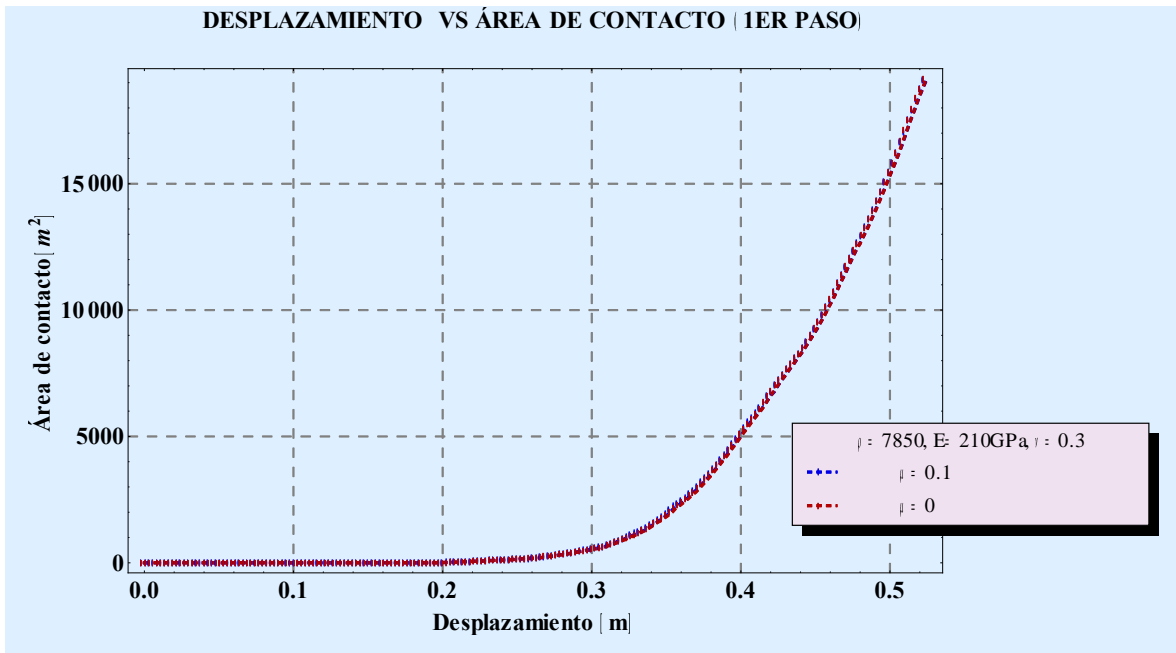
**Figura 5.3** Comportamiento aproximadamente lineal de la carga con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

Se observa que el modelo fractal utilizado en este trabajo presenta el mismo comportamiento de la aplicación de la fuerza con respecto al área real de contacto que el citado anteriormente. Otro factor importante dentro del modelo es el efecto del desplazamiento vs el área de contacto, el cual se muestra a continuación.

### 5.1.2 Desplazamiento vs Área de Contacto (Desplazamiento vertical)

El comportamiento que presenta el desplazamiento vertical con respecto al área de contacto es exponencial, figura (5.4), los resultados son similares a los resultados teóricos de L. Pei et. al [67]. En esta figura se puede observar que no existe una diferencia significativa en cuanto al coeficiente de fricción y la relación que existe entre el desplazamiento y el área de contacto; ambas curvas presentan prácticamente las mismas propiedades.

De la misma manera que en la figura (5.3) se puede concluir que las áreas reales de contacto no difieren significativamente para cada uno de los modelos (con coeficiente de fricción nulo y con coeficiente de fricción igual a 0.1).

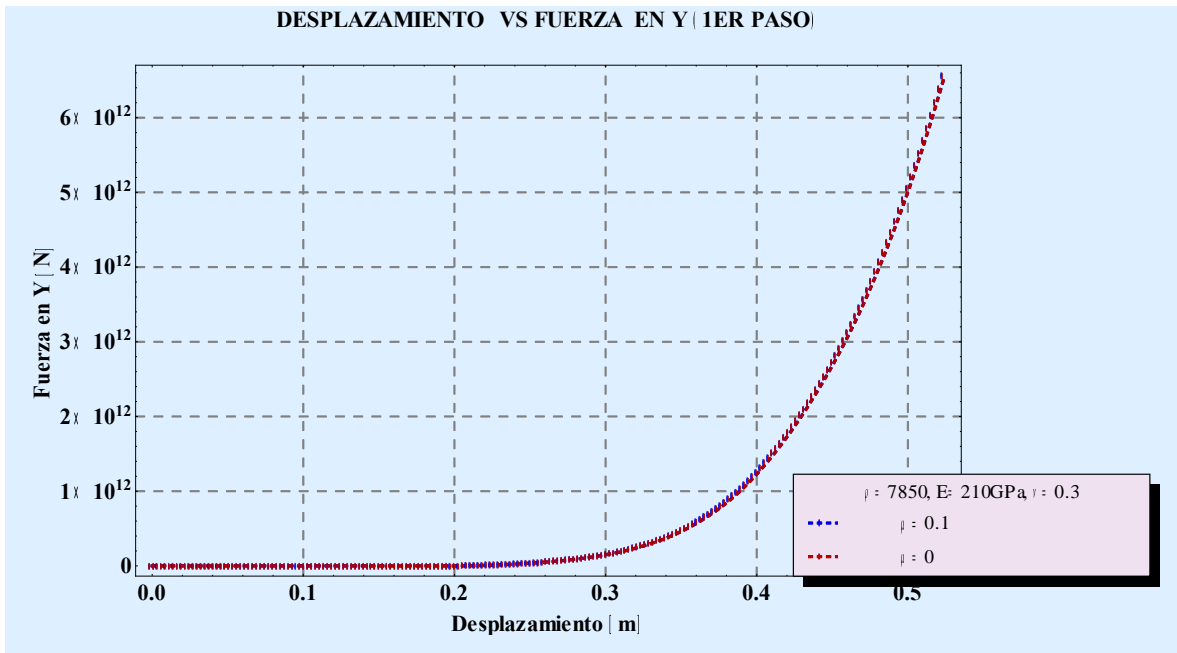


**Figura 5.4** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil (la zona plana al inicio de la curva corresponde a la parte de la simulación donde aún no se genera el contacto entre las placas).

### 5.1.3 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en Y

De la figura (5.5) se puede observar que el comportamiento del desplazamiento con respecto a la fuerza en Y también presenta un comportamiento que se aproxima a un comportamiento del tipo exponencial y es similar al comportamiento que presenta la curva que describe al desplazamiento con respecto a la fuerza en X, más sin embargo en para este caso no existe una diferencia significativa entre el modelo el cual posee un coeficiente de fricción  $\mu=0.1$  y el modelo que posee un coeficiente de fricción nulo  $\mu=0$ .

Es importante mencionar que este comportamiento se confirma con los resultado obtenidos por L. Pei et. al. [67] en donde se describe que la curva del desplazamiento con respecto a la carga tiene un comportamiento del tipo exponencial.



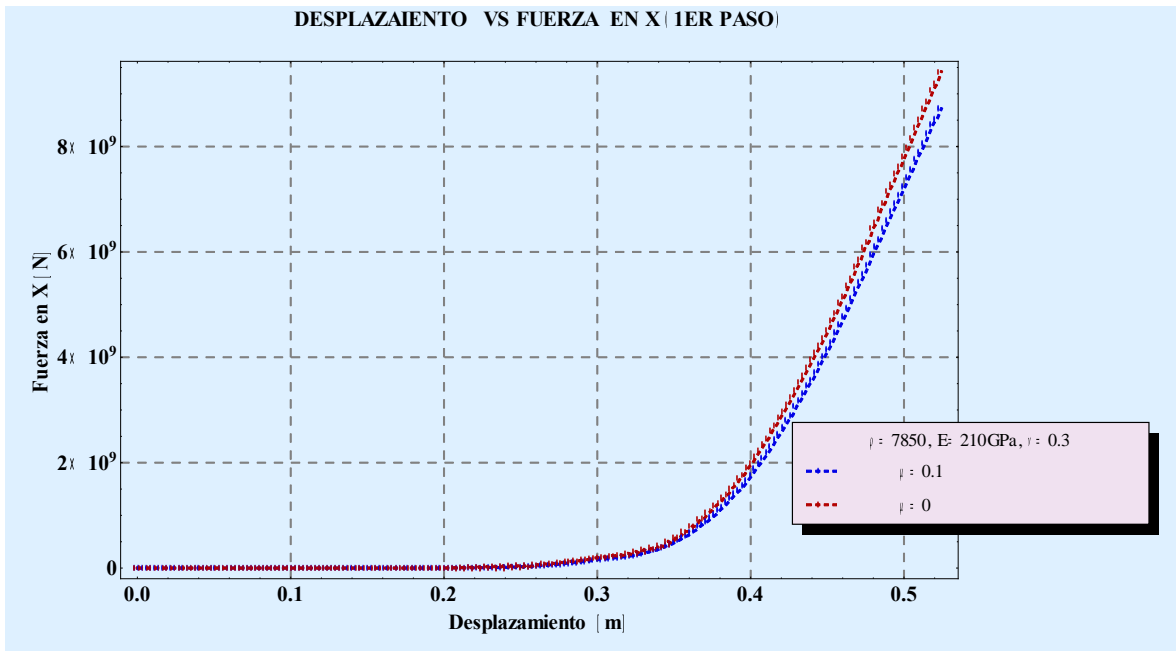
**Figura 5.5** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en Y de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

Una pregunta interesante que podría ser planteada es que si de forma análoga la curva que describe el comportamiento del desplazamiento con respecto a la fuerza en dirección Z presenta este mismo comportamiento exponencial, a continuación se presenta dicha curva.

#### 5.1.4 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en X y en Z (direcciones horizontales)

El desplazamiento que se tiene en este análisis también es vertical; la figura (5.6) muestra las curvas que corresponden al desplazamiento con respecto a la fuerza en dirección X que se origina debido a dicho desplazamiento vertical al entrar en contacto la placa móvil con la placa fija. Es importante hacer notar que el comportamiento es muy similar a un comportamiento exponencial, similar al comportamiento que tiene el desplazamiento con respecto al área de de contacto para este mismo desplazamiento vertical.

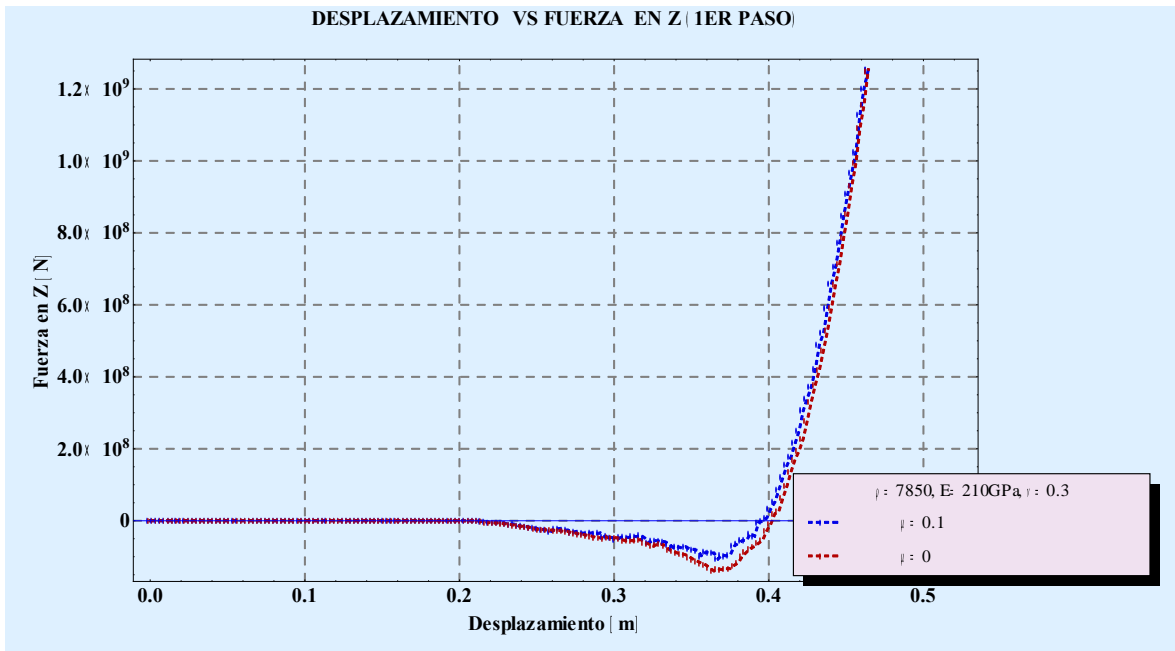
Como se puede observar en esta misma figura (5.6) existe una diferencia del desplazamiento con respecto a la fuerza en X para los dos diferentes coeficientes de fricción que se tuvieron para esta simulación, los cuales corresponden a  $\mu=0.1$  y  $\mu=0$ .



**Figura 5.6** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza de contacto en X (la cual es un dirección horizontal) durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

Para los modelos simulados realizados también se midieron las fuerzas en dirección Z al irse desplazando la placa móvil sobre la fija de forma vertical; en esta gráfica se puede observar que el comportamiento también se aproxima a un comportamiento exponencial con el hecho de que existe un mínimo, esto probablemente se debe al hecho de que existe un efecto de las fuerzas de reacción de una elevación significativa en la superficie rugosa que al entrar en contacto estas fuerzas reactivas provocan este fenómeno. Es necesario realizar más simulaciones para estudiar más a fondo este tipo de efectos, la hipótesis antes mencionada al parecer resulta adecuada, pero es necesario ver a través de diferentes simulaciones si esto es sistemático. En dicha curva se puede percibir que la pendiente presenta un comportamiento negativo al entrar en contacto las placas, después ésta llega a un mínimo y después dicha pendiente pasa de ser negativa a positiva, figura (5.7).

En esta misma figura, las curvas presentan una diferencia en cuanto a la fuerza en dirección Z al presentar los dos diferentes coeficientes de fricción elegidos para estas simulaciones; se puede observar que esta diferencia se encuentra principalmente más cerca de la depresión de las curvas.



**Figura 5.7** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en Z de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

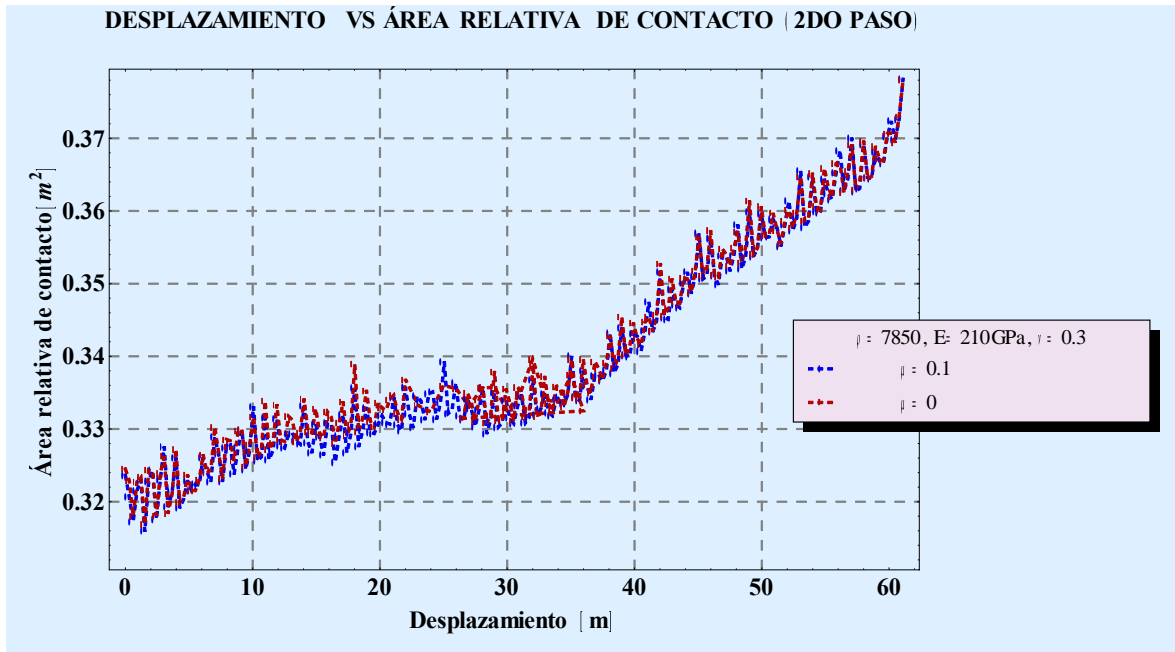
Es importante conocer el área de contacto tanto en el desplazamiento vertical, el cual corresponde al primer paso de la simulación, como en el desplazamiento horizontal el cual es denominado como segundo paso de la simulación, puesto que este dato arroja información acerca de la forma en que se da el contacto entre las asperezas en este segundo desplazamiento.

### 5.1.5 Desplazamiento vs Área Relativa de Contacto (Desplazamiento horizontal)

El segundo paso de la simulación corresponde al desplazamiento horizontal, en este desplazamiento se puede observar que el contacto entre las placas aumenta y disminuye en pequeños desplazamientos, figura (5.8), esto se debe a la transición de las asperezas al dejar de hacer contacto debido al desplazamiento, después de un pequeño lapso de tiempo, las asperezas vuelven a hacer contacto con asperezas vecinas. También se puede observar de manera global que el área de contacto crece, esto se debe a la geometría de las placas, al parecer existe una elevación considerable en la placa fija, ocasionada por la formación aleatoria de la superficie; esto causa que exista una deformación elástica en la zona más alta y al desplazarse la placa móvil, ésta hace contacto durante la mayor parte del tiempo del desplazamiento. Con futuras simulaciones esto será explicado más a detalle, en donde se podrá observar si este fenómeno es sistemático. Es importante mencionar que el porcentaje de desplazamiento de la placa móvil corresponde a un 25 % de la distancia de la misma.



En esta misma figura se puede observar que existe una pequeña diferencia entre el área relativa de contacto para ambos modelos, para los cuales se sigue preservando el mismo coeficiente de fricción (0 y 0.1).



**Figura 5.8** Comportamiento con una tendencia lineal del desplazamiento con respecto al área relativa de contacto durante el desplazamiento horizontal de la placa móvil.

Para el modelo elástico se ha tomado principalmente en cuenta el coeficiente de fricción y el porcentaje de interferencia entre las asperezas como variables que pueden controlarse de manera directa, de tal modo que es necesario corroborar mediante resultados de la simulación los coeficientes de fricción para afirmar que estos realmente corresponden a datos correctos y no erróneos de los presentes resultados. A continuación se presenta dicha corroboración.

### 5.1.6 Coeficientes de Fricción

Los coeficientes de fricción que se utilizaron para el presente trabajo en el modelo elástico, al ser medidos dentro de las mismas simulaciones, corresponden a los coeficientes de fricción teóricos impuestos para este modelo. La figura (5.9) puede confirmar lo antes dicho, aunque en un análisis más particular se puede observar que al iniciar el desplazamiento vertical, el coeficiente de fricción es ligeramente mayor que al transcurrir un cierto periodo de tiempo. A pesar de tratarse de una simulación elástica, este resultado ya da un fundamento al hecho bien conocido que el coeficiente de fricción dinámico es menor al coeficiente de fricción estático, en las figuras (5.10) y (5.11) se puede observar dicho fenómeno.

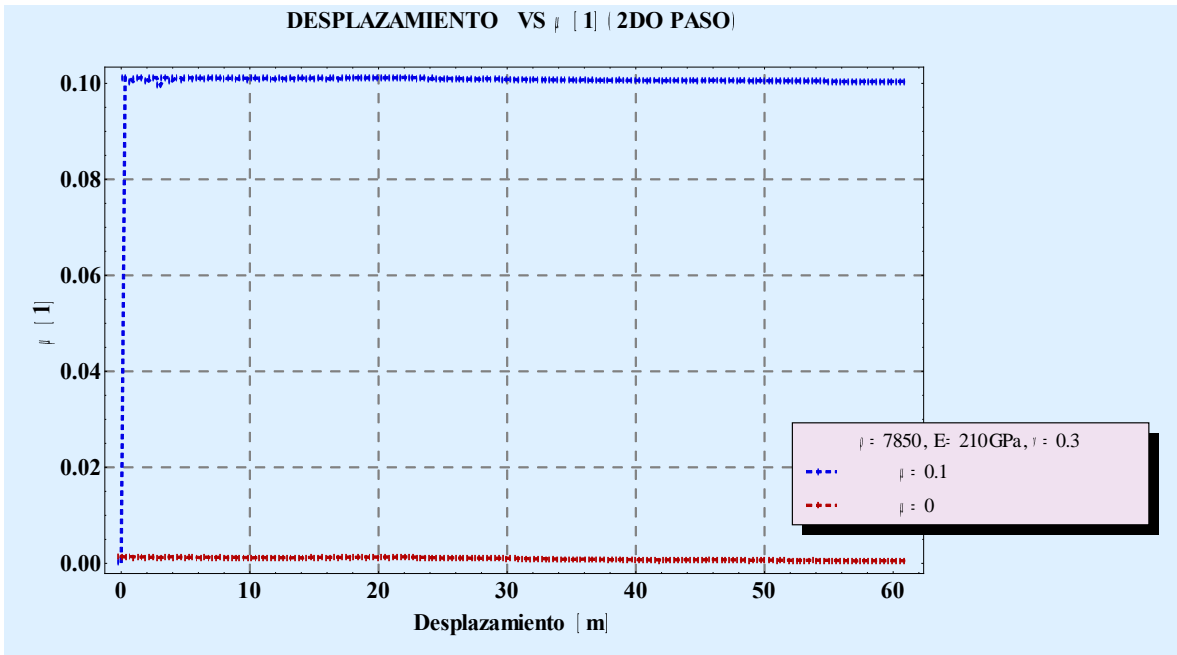


Figura 5.9 Coeficientes de fricción del modelo elástico para el desplazamiento vertical.

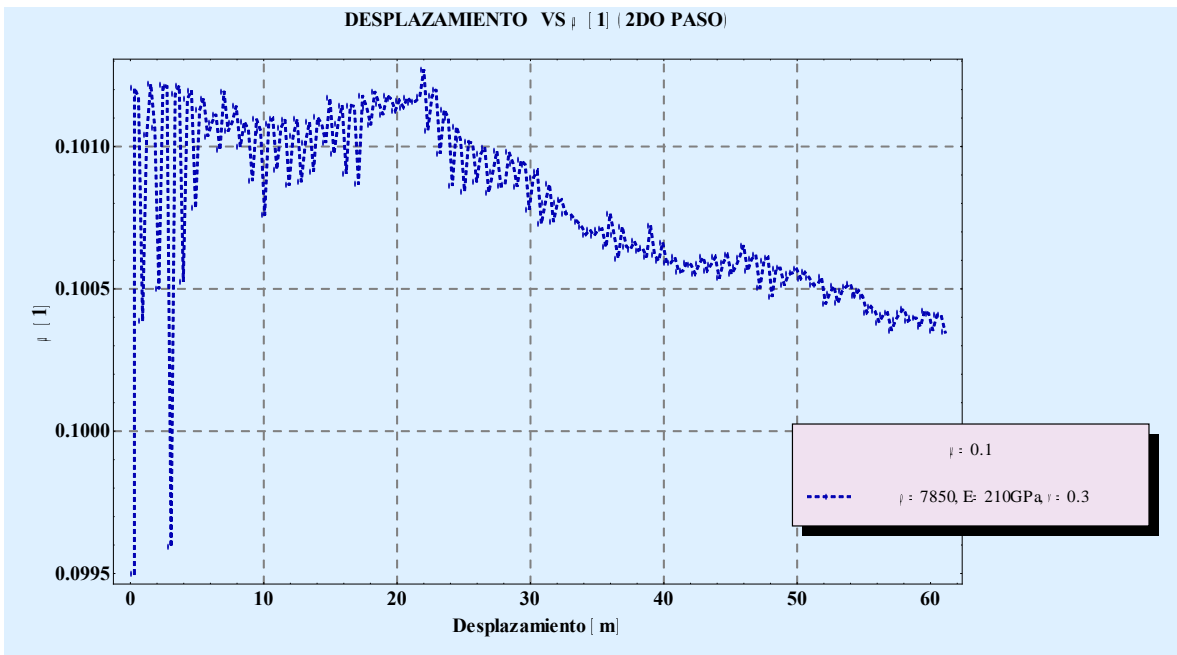
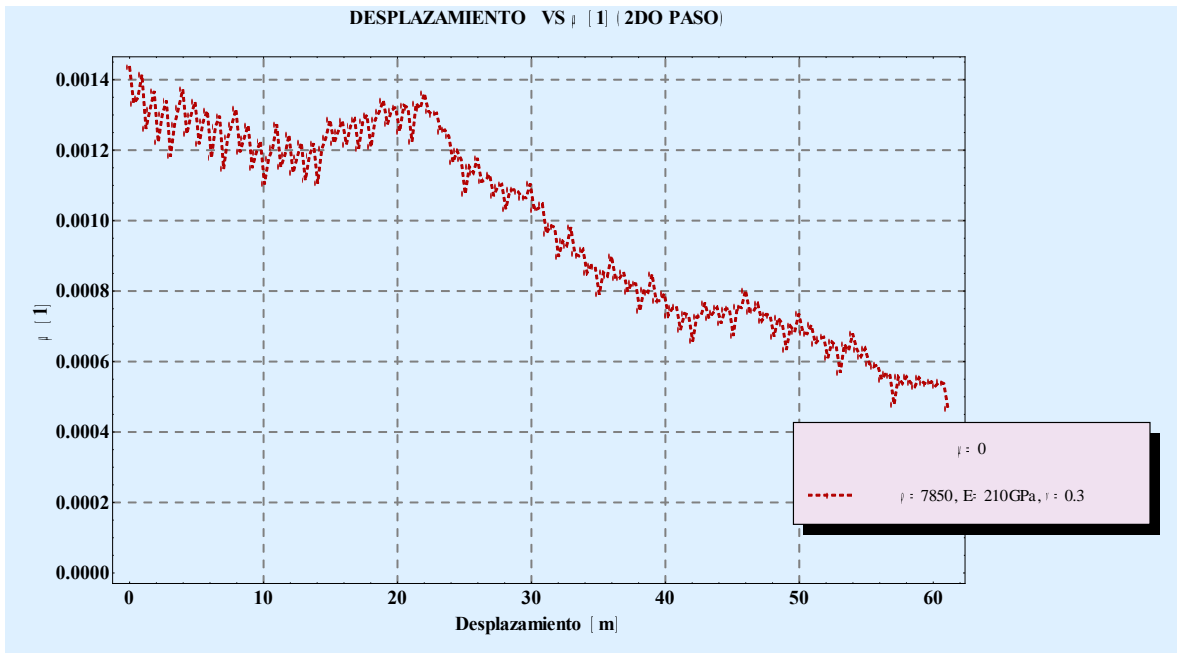


Figura 5.10 Coeficiente de fricción ( $\mu=0.1$ ) para el desplazamiento horizontal (detalle de la figura 4.9).



**Figura 5.11** Coeficiente de fricción ( $\mu=0$ ) para el desplazamiento horizontal (detalle de la figura 4.9).

Lo anterior muestra que los coeficientes de fricción teóricos coinciden con los coeficientes de fricción en el modelo elástico simulado, con excepción del inicio de la simulación, donde hay una transición de estática a dinámica.

A continuación se presentan los resultados concernientes a las simulaciones numéricas del modelo elasto-plástico, en el cual se puede apreciar una diferencia significativa con el modelo elástico en los diferentes parámetros medidos.

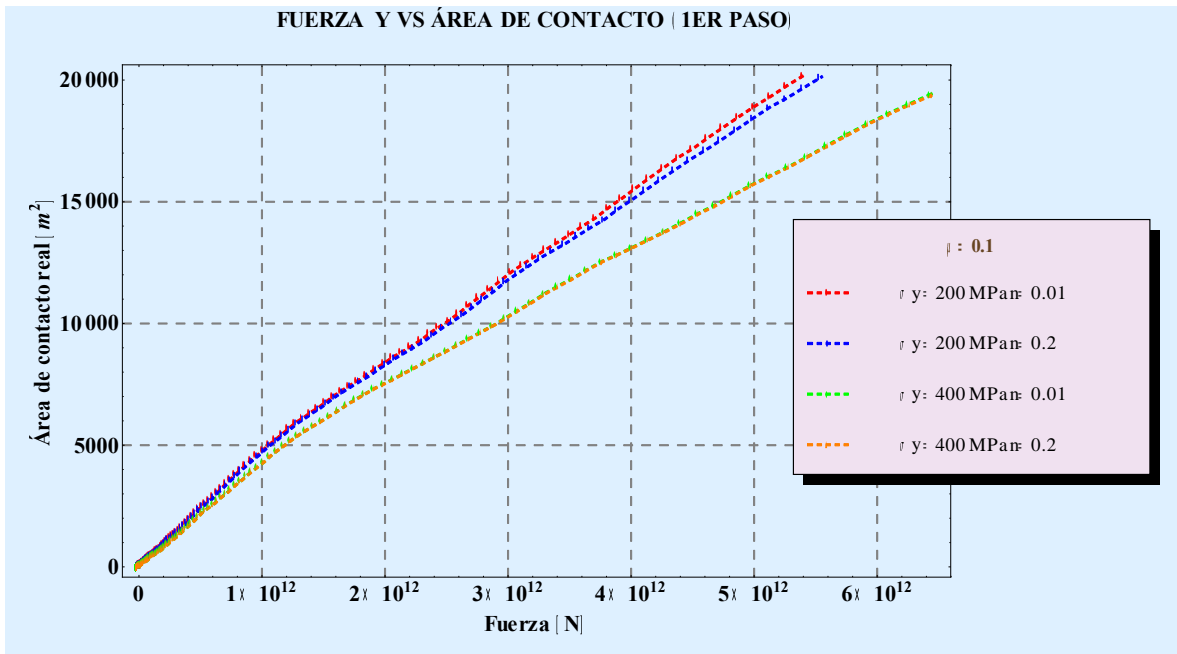
## 5.2 Modelo Elasto-Plástico

### 5.2.1 Área de contacto aparente vs Fuerza en Y (Desplazamiento Vertical)

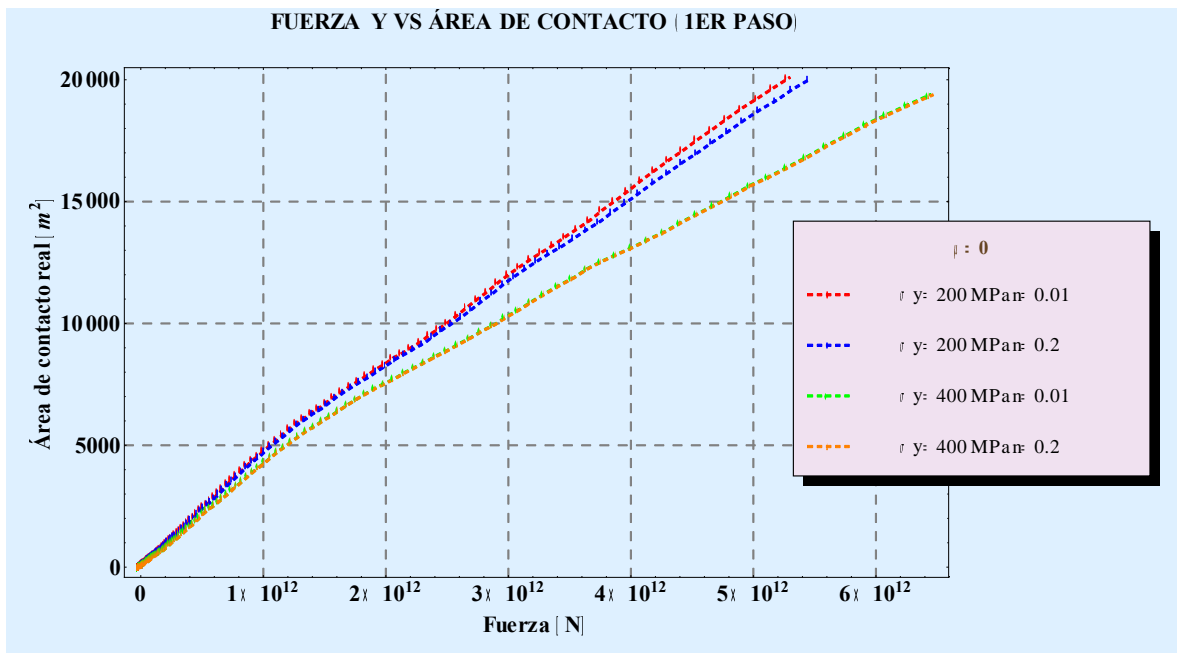
El comportamiento que se puede observar en la figuras (5.12) y (5.13) es muy similar al comportamiento elástico en cuanto al comportamiento lineal de la curva que describe este fenómeno, éste mismo presenta un comportamiento aproximadamente lineal al tener como variable dependiente a la fuerza aplicada en el sentido Y, y como variable dependiente al área de contacto. Otra observación importante que se puede notar en esta misma figura, es que al aumentar el esfuerzo de fluencia y el coeficiente de endurecimiento, la pendiente de dichas curvas disminuye; también se puede observar que el área real de contacto también disminuye.

La figura (5.12) corresponde a las simulaciones realizadas para un coeficiente de fricción  $\mu=0.1$  y la figura (5.13) corresponde a las simulaciones realizadas para un coeficiente de fricción  $\mu=0$ , en dichas gráficas a simple vista no se observan diferencias significativas que

puedan argumentar que existe un profundo efecto del coeficiente de fricción para estos dos modelos simulados.



**Figura 5.12** Comportamiento lineal de la fuerza en Y con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.



**Figura 5.13** Comportamiento lineal de la fuerza en Y con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

Otro importante parámetro que puede determinarse con relación al área de contacto es el desplazamiento, dicho comportamiento se presenta a continuación.

### 5.2.2 Desplazamiento vs Área de Contacto (Desplazamiento vertical)

Al igual que en el modelo elástico el comportamiento que presenta la curva desplazamiento vs área de contacto para el desplazamiento vertical se aproxima a una forma exponencial, figuras (5.14) y (5.15). Estas gráficas no representan una diferencia significativa para las simulaciones realizadas con los coeficientes de fricción  $\mu=0.1$  y  $\mu=0$ , salvo que una vez más se puede notar que para un mayor esfuerzo de fluencia y para un mayor coeficiente de endurecimiento el área de contacto entre las placas móvil y fija es menor debido a que al parecer para los materiales más duros no se llega de manera significativa al rango plástico.

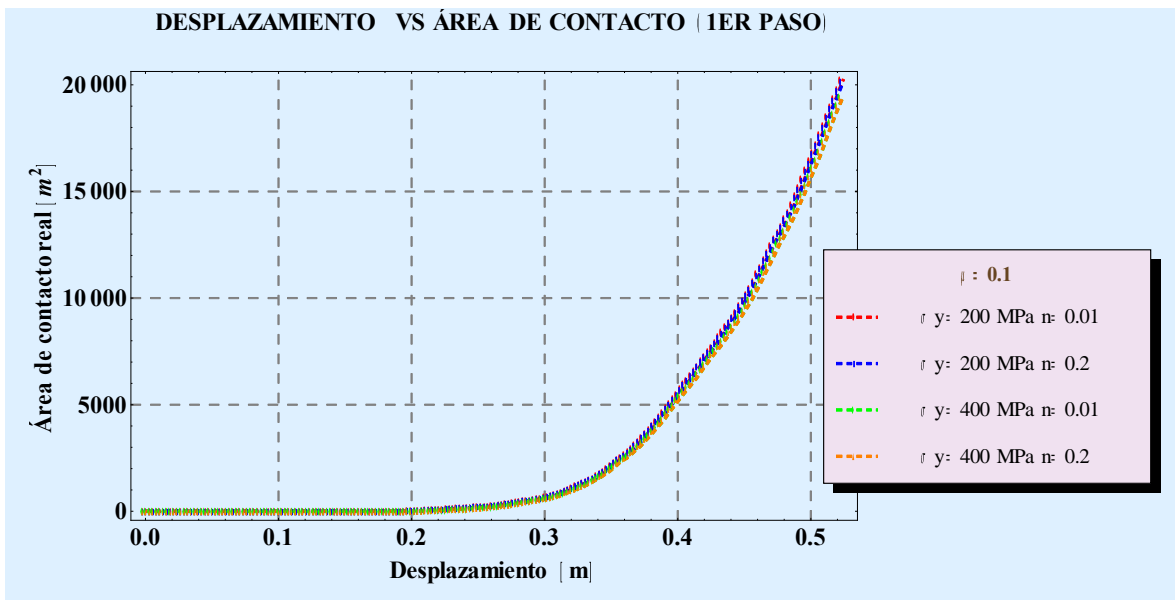
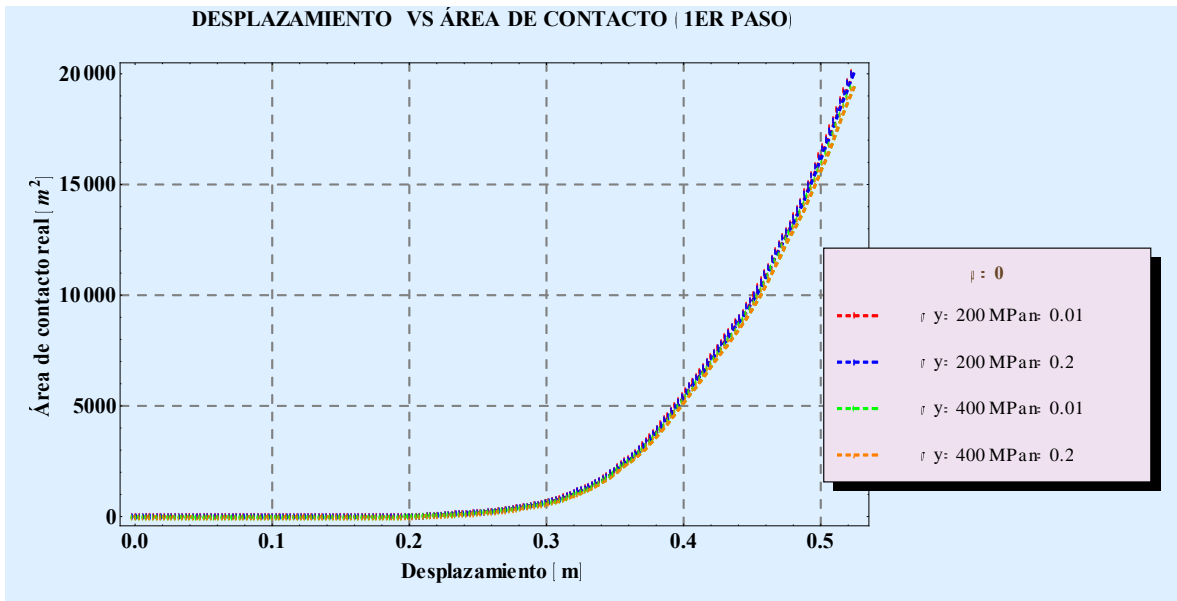


Figura 5.14 Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

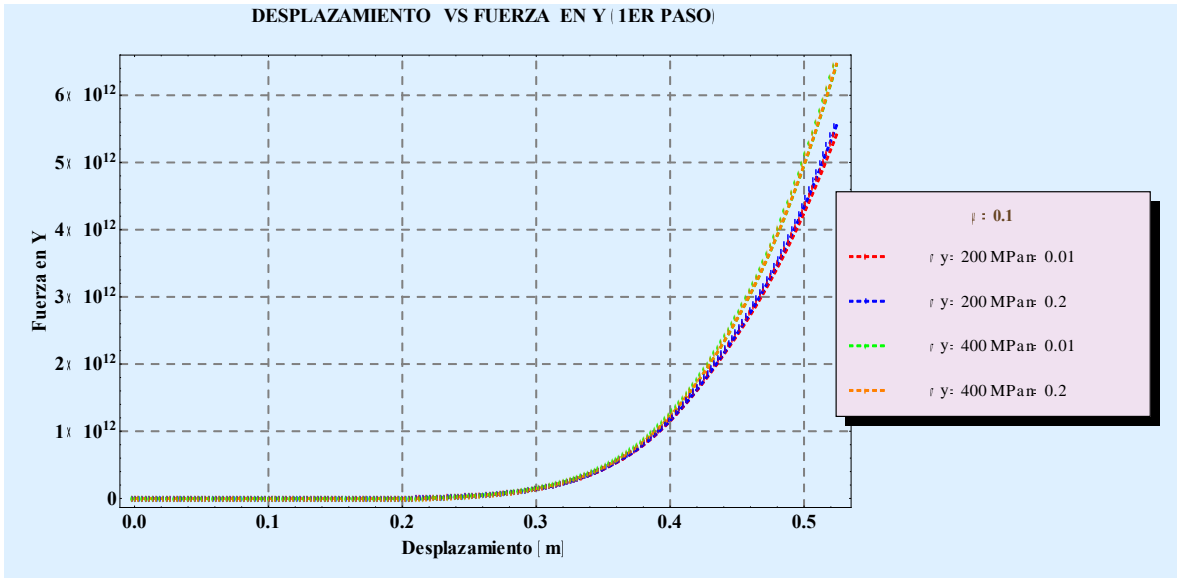


**Figura 5.15** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

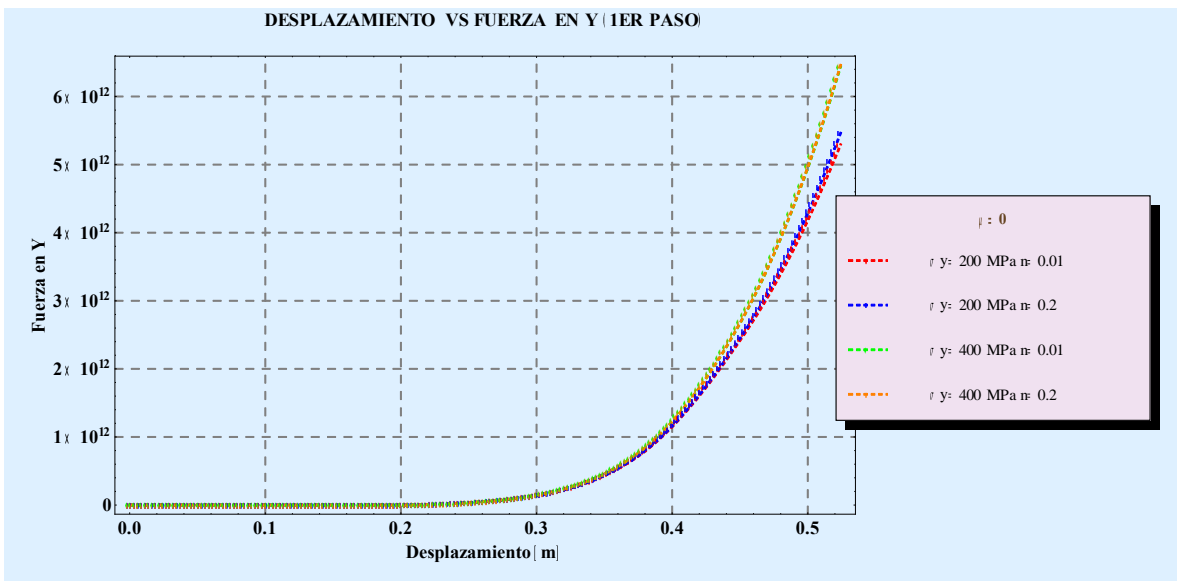
A continuación se presenta la gráfica de desplazamiento vertical vs fuerza aplicada en Y que podría dar respuesta a la pregunta antes planteada.

### 5.2.3 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en Y

En las figuras (5.16) y (5.17) se puede observar que el comportamiento del desplazamiento con respecto a la fuerza en Y, se aproxima a un comportamiento exponencial como en el caso del desplazamiento con respecto al área real de contacto. En estas mismas figuras puede notarse que a mayor esfuerzo de fluencia y mayor coeficiente de endurecimiento para el material se requiere mayor fuerza para poder conseguir la misma interferencia que para aquellos materiales que tienen menor esfuerzo de fluencia y menor coeficiente de endurecimiento.



**Figura 5.16** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en Y de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.



**Figura 5.17** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en Y de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

Para este modelo y propiedades en particular no se aprecia una diferencia significativa en las curvas de desplazamiento con respecto a la fuerza en Y para el desplazamiento vertical al variar al presentar dos diferentes coeficientes de fricción,  $\mu=0.1$  y  $\mu=0$  para las curvas de las figuras (5.16) y (5.17) respectivamente.

Hasta ahora se ha podido observar que el comportamiento del desplazamiento con respecto a las fuerzas en dirección X e Y son similares a excepción del punto en que la

pendiente decae de forma repentina en las figuras concernientes a las fuerzas en dirección X (dirección horizontal). Es muy probable que en un sentido analógico de las fuerzas antes mencionadas, se tenga un comportamiento similar al descrito por la gráfica que corresponde al desplazamiento vertical con respecto a la fuerza en dirección Z (dirección horizontal).

### 5.2.4 Desplazamiento Vertical vs Fuerza en X y en Z (direcciones horizontales)

En las figuras (5.18) y (5.19) se puede observar que al medir el desplazamiento de la placa móvil con respecto a la fuerza en X, éstas en un principio tienen un comportamiento que se asemeja al exponencial pero existe un punto en donde las pendientes de aquellos modelos que presentan un menor esfuerzo de fluencia decaen; este mismo comportamiento se presenta en aquel modelo que tiene tanto coeficiente de fricción  $\mu=0.1$  como para aquel modelo que presenta un coeficiente de fricción nulo ( $\mu=0$ ).

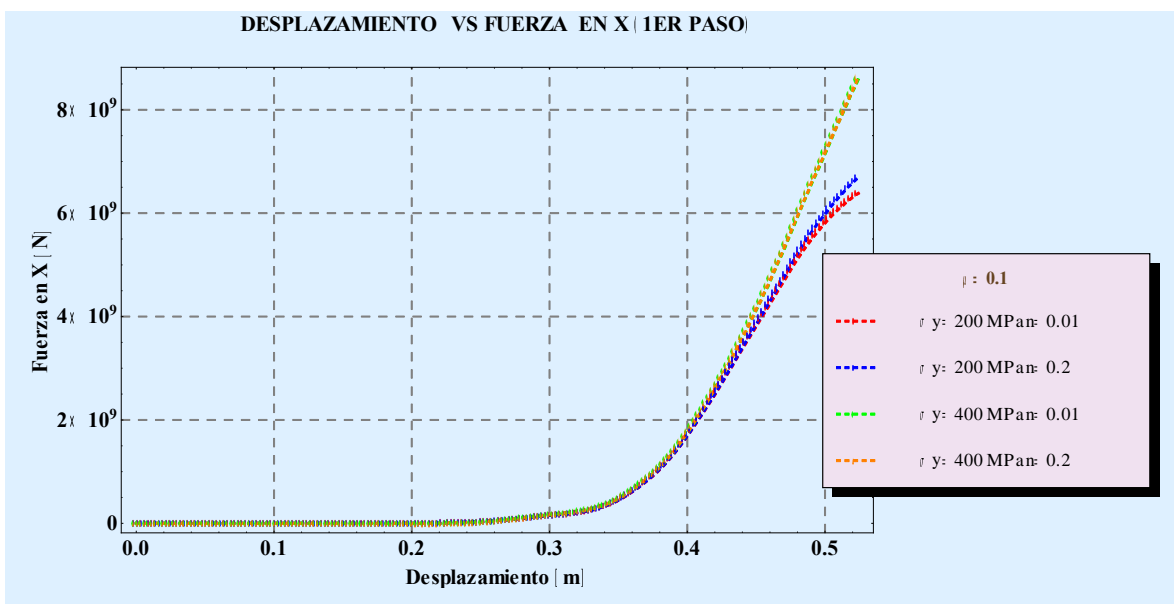
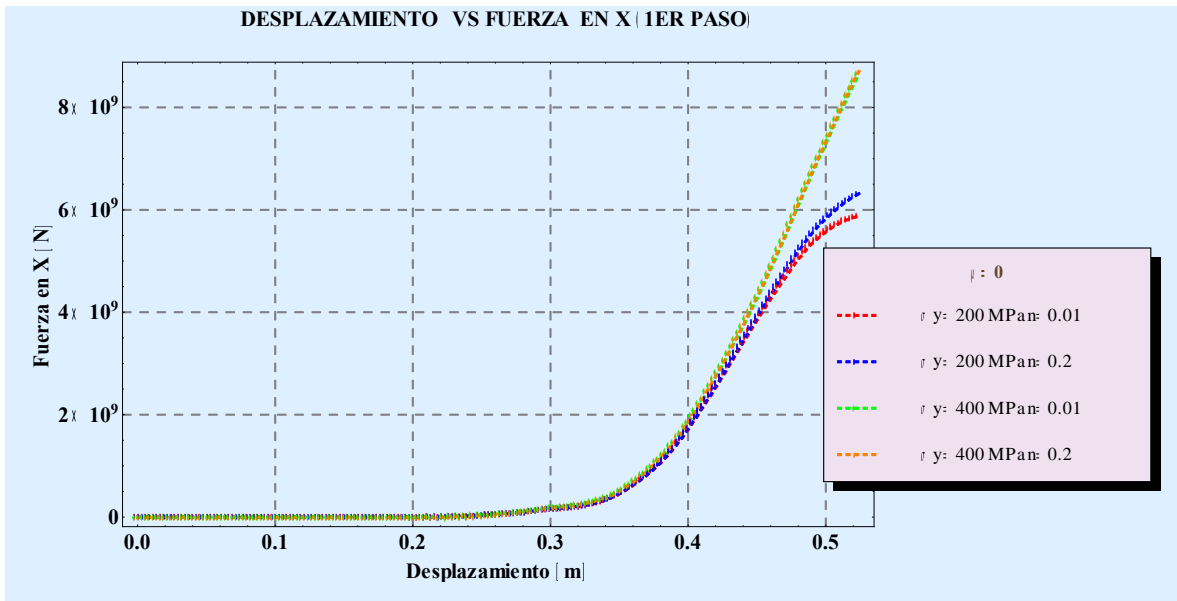


Figura 5.18 Comportamiento tipo exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en X de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.





**Figura 5.19** Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en X de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

Esta es la descripción que corresponde al desplazamiento con respecto a la fuerza en dirección X, de modo que a continuación se presenta el comportamiento que tiene el desplazamiento con respecto a la fuerza en dirección Y en el desplazamiento vertical de la placa móvil, el cual corresponde al primer paso.

En un primer análisis se puede observar que las figuras (5.20) y (5.21) presentan un comportamiento similar a las figuras que describen el desplazamiento con respecto a las fuerza X y Y, este comportamiento también se asemeja o se aproxima (aunque de una manera menos precisa) a un comportamiento exponencial y no existe una diferencia aparente significativa con respecto al coeficiente de fricción para estos modelos. Otra observación importante que se presenta en este análisis es que la fuerza en esta dirección no presenta una diferencia significativa para los diferentes esfuerzos de fluencia y los diferentes coeficientes de endurecimiento.

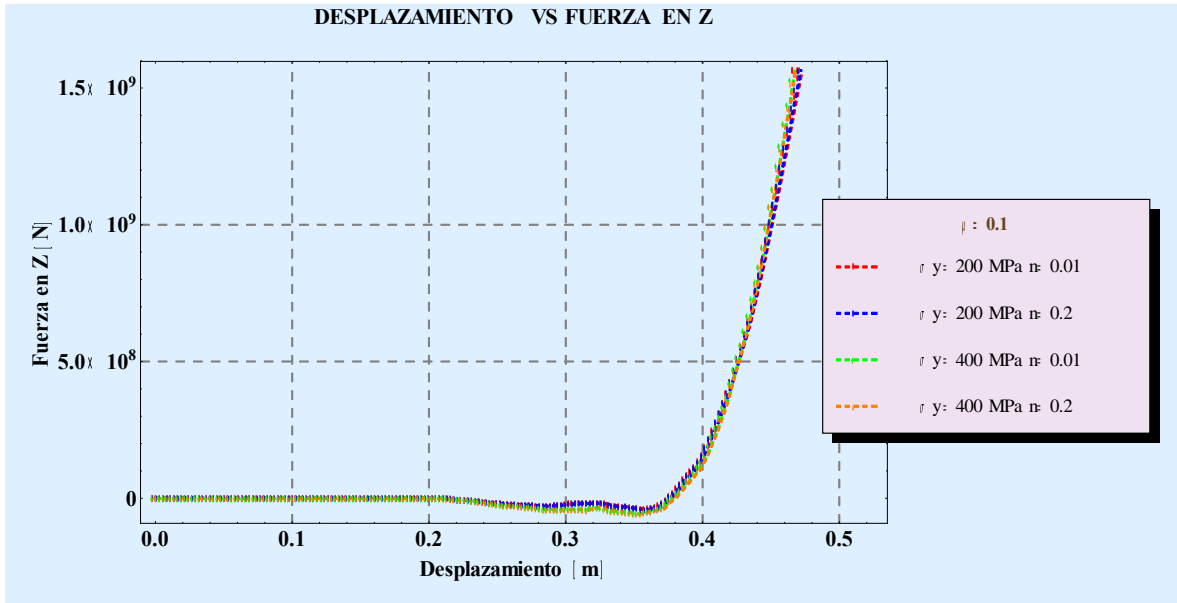


Figura 5.20 Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en Z de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

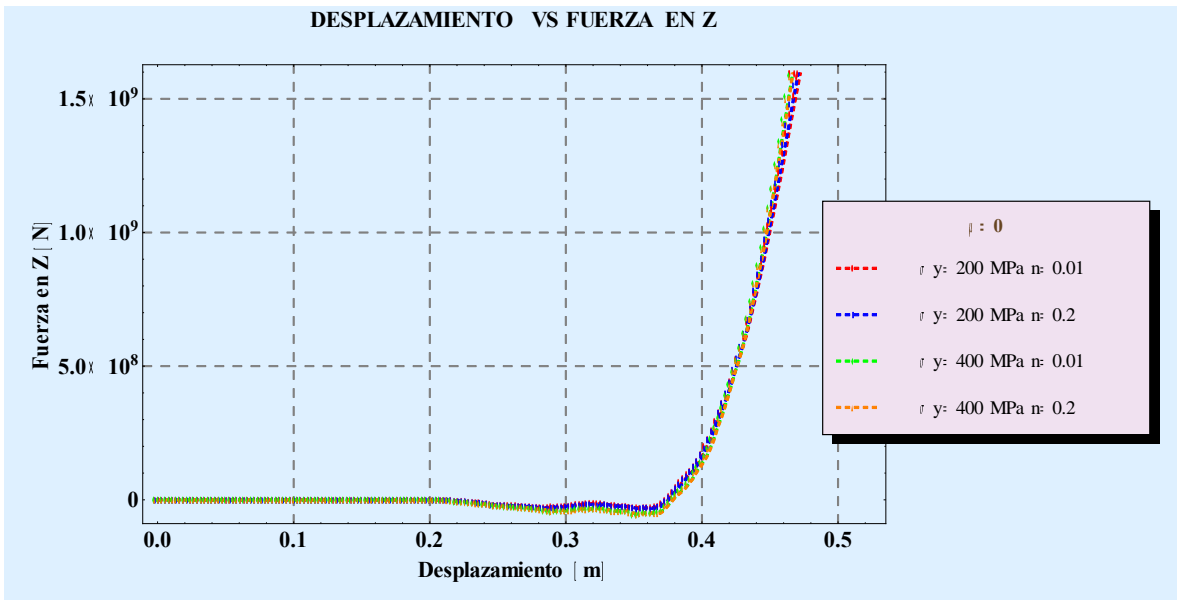


Figura 5.21 Comportamiento exponencial del desplazamiento con respecto a la fuerza en Z de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil.

### 5.2.5 Desplazamiento vs Área Relativa de Contacto (Desplazamiento horizontal)

Al igual que en el modelo elástico es importante para este trabajo tomar en cuenta el desplazamiento con respecto al área relativa de contacto en el desplazamiento horizontal; las figuras (5.22) y (5.23) muestra el área de contacto real para los modelos elasto-

plásticos con diferentes esfuerzos de fluencia y diferentes coeficientes de endurecimiento. Al ser comparados en primera instancia con las curvas de la figura (5.8) del modelo elástico se puede observar que las curvas del modelo elasto-plástico son más uniformes que las del modelo elástico, y sus picos y valles de las curvas del modelo elástico son más pronunciados que las del modelo elasto-plástico (existe para este modelo una menor dispersión en los puntos de la gráfica).

Otra importante observación más enfocada en el modelo elasto-plástico es que a diferentes puntos de fluencia y diferentes coeficientes de endurecimiento, las pendientes de las curvas son también diferentes; se aprecia una tendencia de una mayor pendiente negativa a menores esfuerzos de fluencia y menores coeficientes de endurecimiento. Es importante mencionar que aquellas curvas que corresponden a los materiales con mayor esfuerzo de fluencia tiene un comportamiento muy similar a las curvas de los modelos elásticos, ya que al parecer no en todas las regiones de contacto se rebasa el límite de fluencia del material.

Al comparar las curvas de las figuras (5.22) y (5.23) las cuales presentan diferentes coeficientes de fricción,  $\mu=0.1$  y  $\mu=0$ , respectivamente, se puede observar de manera clara que el área relativa de contacto para los modelos que presentan un esfuerzo de fluencia mayor, es mayor, esto es debido a la geometría aleatoria de las placas; la deformación se da en las zonas más altas de las asperezas y de las elevaciones, lo cual causa, en los modelos más con menor esfuerzo de fluencia una mayor deformación plástica, esto ocasiona que no todas las asperezas y elevaciones de la placa móvil entren en contacto con las de la placa fija. Mientras que en los modelos elásticos y aquellos que tienen un mayor esfuerzo de fluencia mantengan un mayor contacto, debido a que prácticamente no hay deformación permanente permitiendo un máximo contacto.

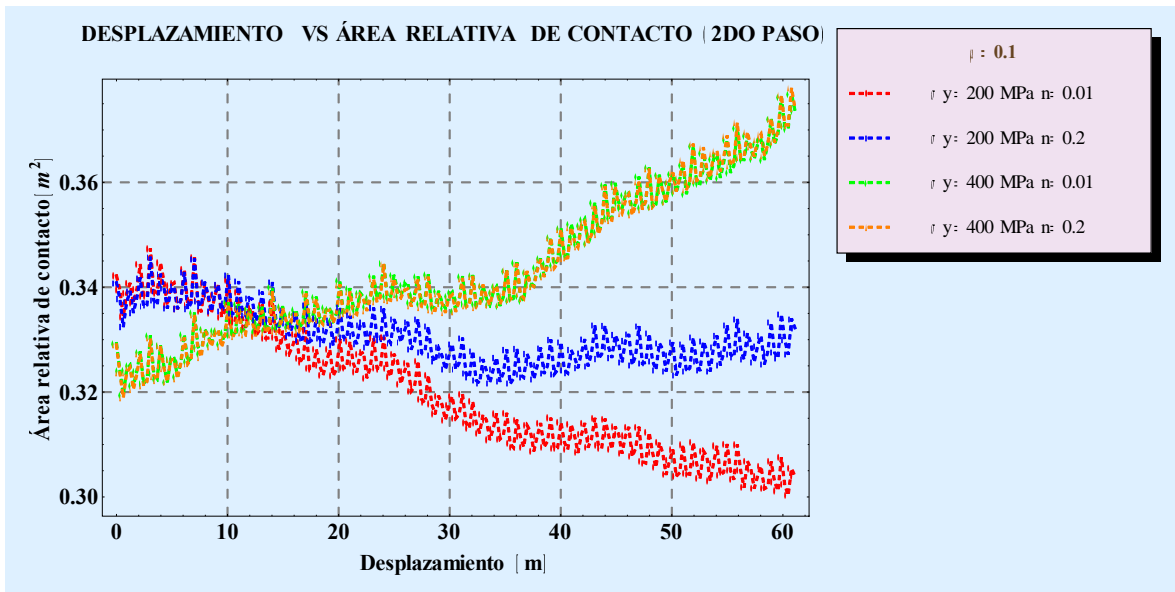


Figura 5.22 Comportamiento del desplazamiento con respecto al área relativa de contacto durante el desplazamiento horizontal de la placa móvil.

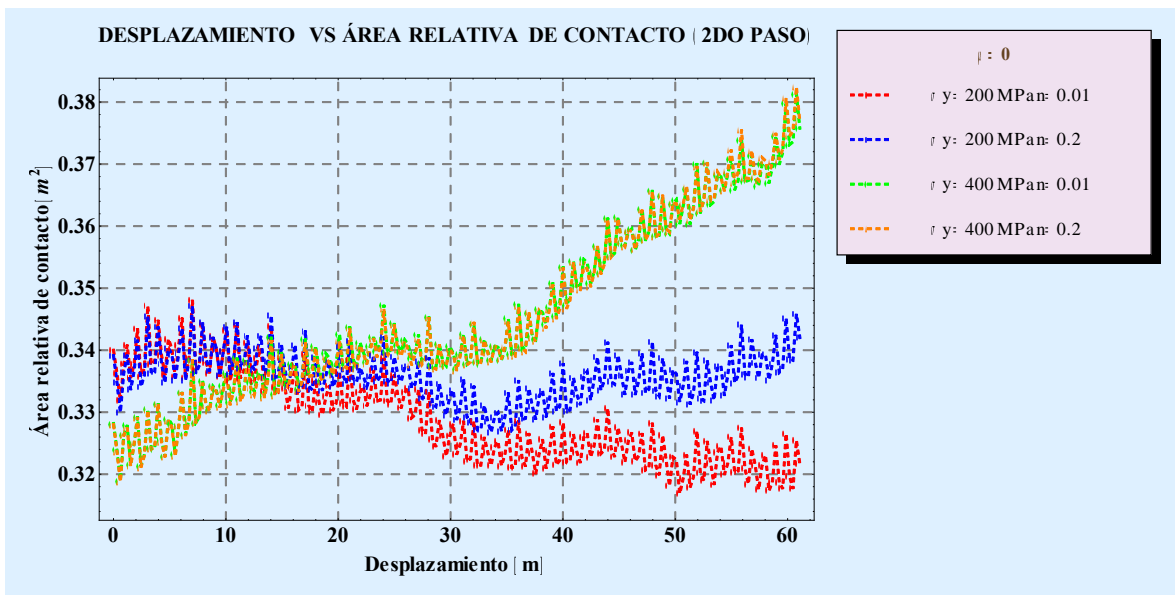


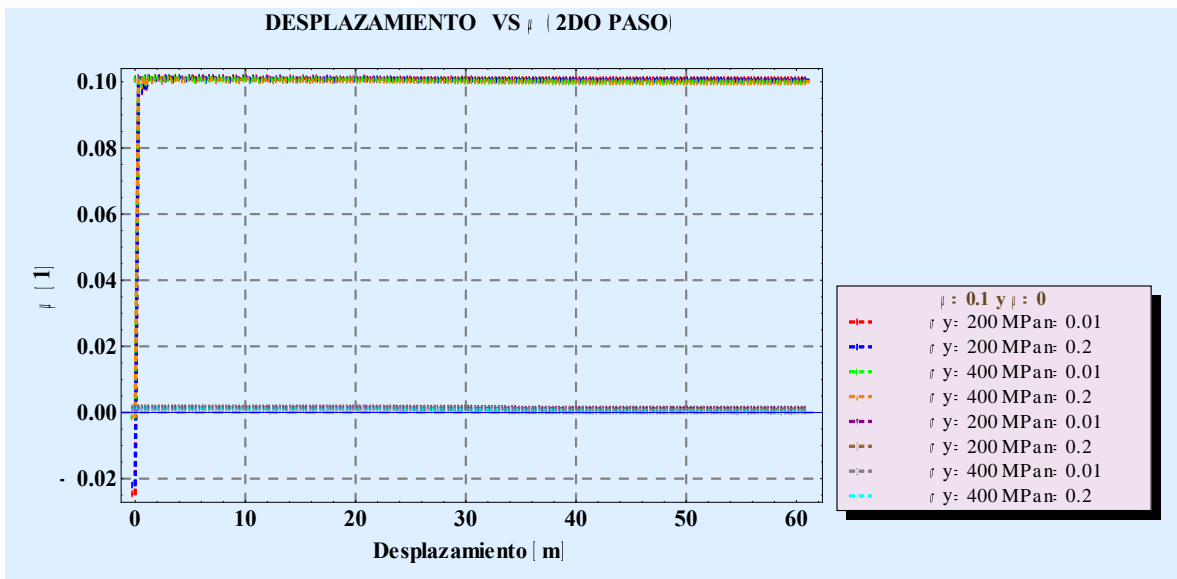
Figura 5.23 Comportamiento del desplazamiento con respecto al área relativa de contacto durante el desplazamiento horizontal de la placa móvil.

### 5.2.6 Coeficientes de Fricción

Los coeficientes de fricción que se utilizaron para el presente trabajo en el modelo elasto-plástico, al ser graficados corresponden a los valores teóricos impuestos en el inicio de las simulaciones; en la figura (5.24) se puede observar que los valores de  $\mu$  son 0 y 0.1 respectivamente. Dentro de un análisis más detallado de los coeficientes de fricción, en

las figuras (5.25) y (5.26) se puede observar que existe una tendencia de disminución de los mismos, esto se debe principalmente a que en un inicio existe fricción del tipo estática, al desplazarse la placa móvil sobre la placa fija, ésta aumenta su velocidad, presentando ahora un coeficiente de fricción dinámico, el cual es bien sabido éste es menor al coeficiente de fricción estático. Lo anterior es un resultado bastante sorprendente debido a que en teoría, el programa CAE de simulación sólo debería reconocer un coeficiente uniforme y constante.

Otra importante observación tanto en el modelo elástico como en el elasto-plástico es que al disminuir el coeficiente de fricción, al inicio del desplazamiento, existe una mayor dispersión para el modelo que posee un coeficiente de fricción  $\mu=0.1$  que aquel que tiene un coeficiente de fricción nulo ( $\mu=0$ ).



**Figura 5.24** Comportamiento del desplazamiento con respecto al coeficiente de fricción durante el desplazamiento horizontal de la placa móvil.

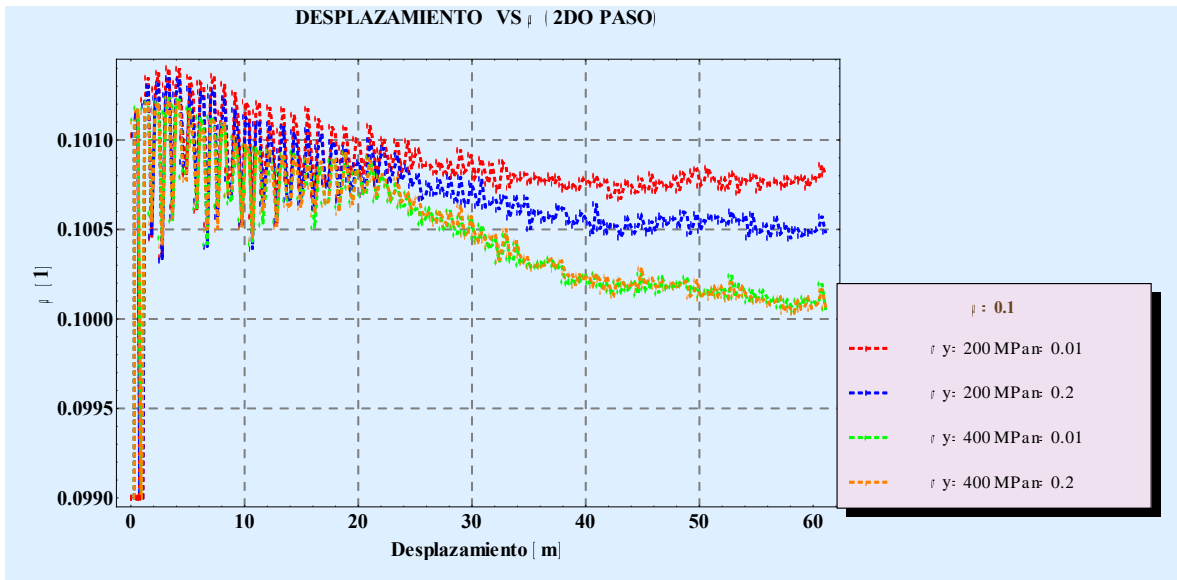


Figura 5.25 Comportamiento del desplazamiento con respecto al coeficiente de fricción durante el desplazamiento horizontal de la placa móvil.

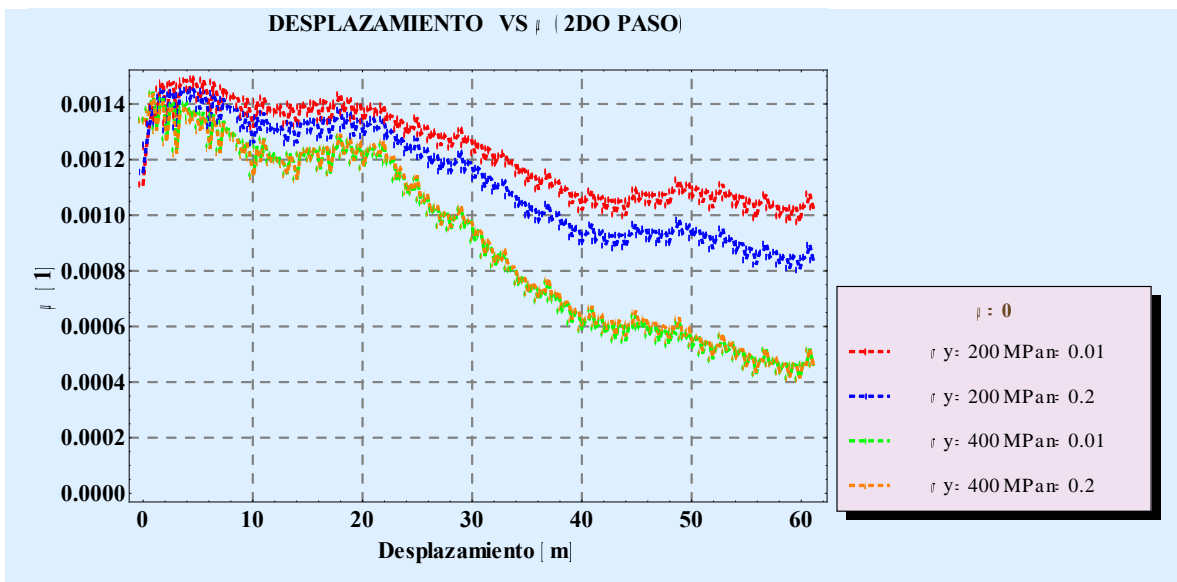


Figura 5.26 Comportamiento del desplazamiento con respecto al coeficiente de fricción durante el desplazamiento horizontal de la placa móvil.

### 5.3 Resumen del Área Real de contacto para los Modelos Elástico y Elasto-plásticos

En la tabla (5.1) se pueden observar las diferentes áreas de contacto de los modelos elástico y elasto-plásticos que corresponden a una interferencia del 40 % entre las asperezas de las placas móvil y fija. En resumen se puede observar que para el modelo elástico existe una ligera diferencia en el porcentaje del área real de contacto, ésta es

ligeramente mayor en aquella en la que la interface de contacto presenta un coeficiente de fricción no nulo, contrario a lo que sucede en las superficies que presentan en la interface un coeficiente de fricción no nulo en los modelos elasto-plásticos.

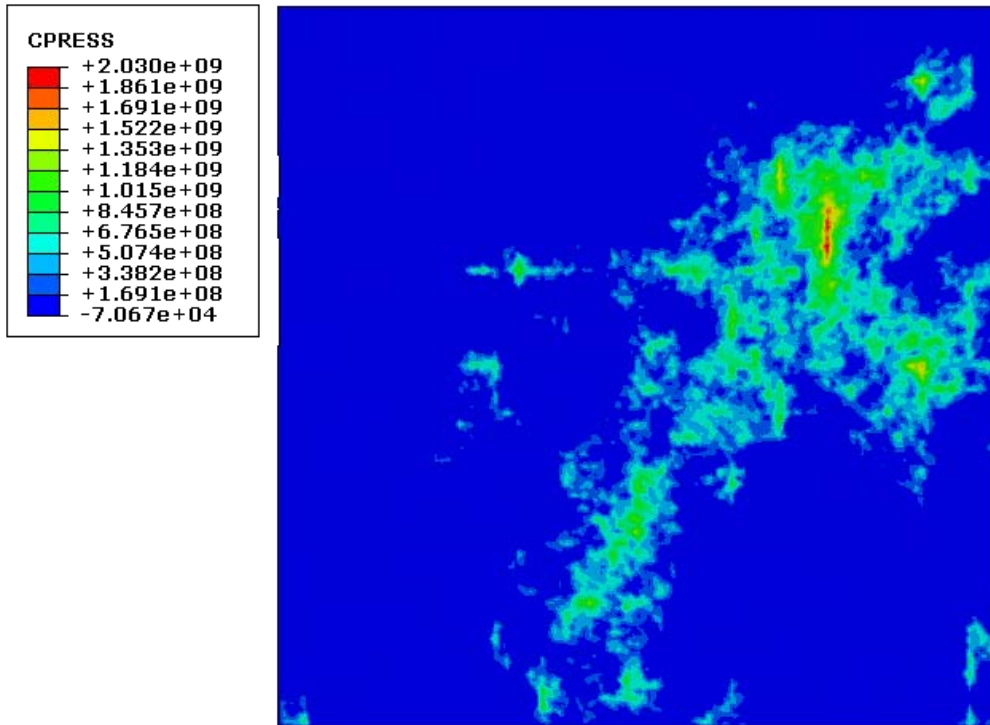
En el caso de los modelos elasto-plásticos existe una diferencia ligeramente mayor del área real de contacto en los modelos que presentan un menor esfuerzo de fluencia y un menor coeficiente de endurecimiento.

INTERFERENCIA= 40 %						
E=210 GPa		v=0.3		Área aparente de contacto=59049 m <sup>2</sup>		
No. de simulación		Propiedades			Área real de contacto [m <sup>2</sup> ]	Área real de contacto [%]
<b>Modelo Elástico</b>	1	$\mu=0$			19155.5	32.440
	2	$\mu=0.1$			19106	32.356
<b>Modelo Elasto-plástico</b>	No. de simulación	$\sigma_y$	n	$\mu$		
	1	200	0.01	0	20076.7	34.000
	2	200	0.2	0	20025.7	33.914
	3	400	0.01	0	19378.6	32.818
	4	400	0.2	0	19367.1	32.798
	5	200	0.01	0.1	20205.1	34.218
	6	200	0.2	0.1	20126.6	34.085
	7	400	0.01	0.1	19441.7	32.925
8	400	0.2	0.1	19417.2	32.883	

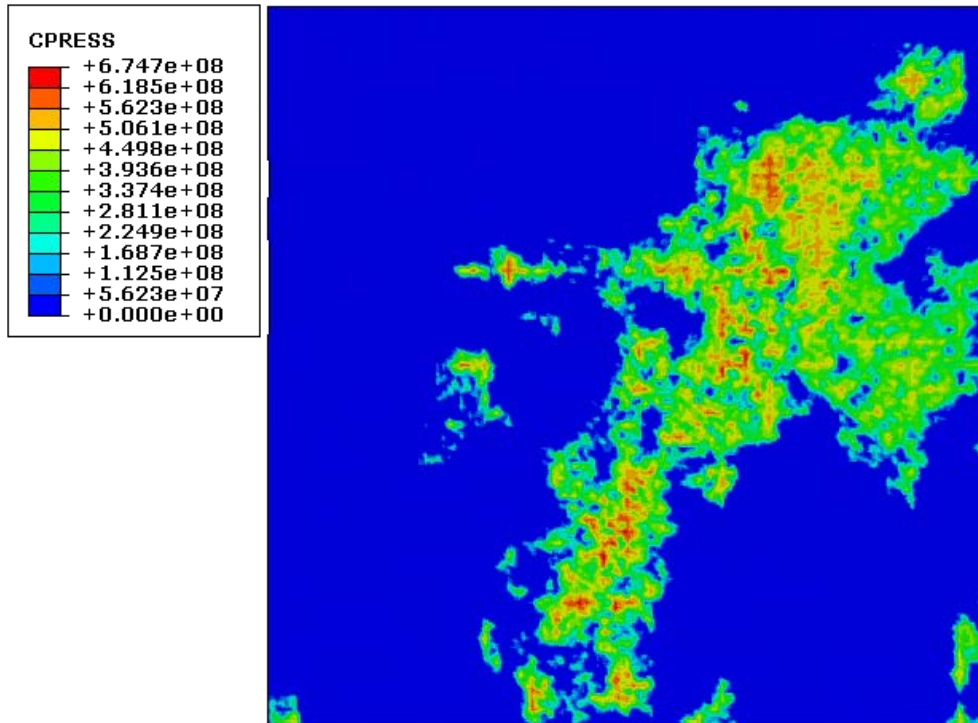
**Tabla 5.1** Valores y porcentajes de las áreas de contacto para los modelos elásticos y elasto-plásticos simulados.

#### 5.4 Visualización de las Zonas de Contacto en la Placa Fija

Las figuras (5.27) y (5.28) muestran las zonas de contacto en la placa fija; la figura (4.23) corresponde a la presión de contacto del modelo elástico con una interferencia del 40 % por la placa móvil. La figura (5.28) corresponde a la presión de contacto del modelo elasto-plástico con una interferencia del 40 % por la placa móvil. Al comparar las dos imágenes se puede observar que el contacto del modelo elasto-plástico presenta regiones de contacto menos dispersas y más grandes que el modelo elástico, el cual al contrario presenta regiones de contacto más dispersas y regiones de contacto más pequeñas. Lo anterior se comprueba con las investigaciones realizadas por L. Pei and et. al. [67]



**Figura 5.27** Distribución de presiones en el modelo elástico debido al contacto de la placa móvil al presentar una interferencia del 40 %.



**Figura 5.28** Distribución de presiones en el modelo elasto-plástico debido al contacto de la placa móvil al presentar una interferencia del 40 %.



## DISCUSIÓN

En la presente tesis se ha llevado a cabo el desarrollo de la metodología para generar superficies rugosas con carácter fractal haciendo uso del Método de Elementos Finitos. Se diseñó un algoritmo capaz de generar superficies rugosas aleatorias, el método programado y que a su vez es de amplio uso por su simplicidad y versatilidad es el llamado Método del Punto Medio de Desplazamiento Aleatorio. Además el código programado para la generación de las superficies se apoya de un software de elemento finito para el estudio entre el contacto de dichas superficies; los resultados obtenidos pueden corroborarse de forma directa con la bibliografía pertinente relacionada con este estudio.

Es conveniente saber que dentro del desarrollo de la metodología e implementación de los modelos se tuvieron que hacer diferentes ajustes a diversos parámetros entre los cuales se encuentran la energía cinética comparada con la energía interna del modelo; ésta primera debe permanecer igual o menor del 5 % de la interna, pues resultaría inconveniente tener efectos de vibración en los modelos, ya que dichos efectos producirían resultados erróneos. El control de la energía cinética resulta directamente de controlar la velocidad con la que la placa móvil se aproxima o en su caso, se desliza sobre la placa fija.

Otro efecto que tuvo que corregirse fue el efecto producido por una excesiva concentración de esfuerzos en los bordes de las placas tanto móvil como fija en la dirección Z; este efecto se corrigió rebajando la fila de nodos extremos de la placa fija en dirección Z de modo que las simulaciones posteriores ya no presentaron este efecto, el cual se traduce de forma sencilla en una aparente deformación excesiva de la malla en los extremos de las placa en donde se encuentran parte de las condiciones de frontera.

En el presente trabajo se obtuvieron las curvas que describen el comportamiento de la fuerza con respecto al área de contacto para un desplazamiento vertical, dicha curva presenta un comportamiento aproximadamente lineal tanto para los modelos elásticos como los elasto-plásticos los cuales ya habían sido descritos por Greenwood-Williamson[66] y L. Pei and et. al. [67]. Otro resultado que se obtuvo de las simulaciones fueron las curvas del desplazamiento con respecto al área de contacto tanto para modelos elásticos y elasto-plásticos, en donde se puede confirmar el comportamiento exponencial que presenta con los resultados obtenidos por L. Pei and et. al. [67].

Es evidente que al existir una mayor interferencia entre las asperezas de las superficies, existe un mayor contacto superficial pero que a su vez el área real de contacto es menor que el área aparente de contacto. Es importante mencionar que en el modelo elasto-plástico al incrementar el esfuerzo de fluencia y el coeficiente de endurecimiento, el área

de contacto tiende a disminuir, esto es muy probable ya que existe una menor deformación de las asperezas lo cual impide que exista una mayor cantidad de asperezas en contacto; como es sabido y se ha mencionado anteriormente en el marco teórico de este trabajo, el contacto entre las asperezas se da entre las asperezas de mayor altura y a su vez en la zona más alta de cada una de ellas. A todo parecer, para el presente estudio y con los valores elegidos para los límites de fluencia, el material con mayor dureza todavía se encuentra en un estado principalmente elástico.

Se obtuvieron las curvas de los desplazamientos con respecto a las fuerzas debido a la presión de contacto en cada uno de los modelos y se puede observar que dichas curvas presentan un comportamiento exponencial tanto para los modelos elásticos como elasto-plásticos; este comportamiento se observa principalmente en aquellas curvas que pertenecen a la fuerza en dirección Y la cual es perpendicular a la interface de contacto en el desplazamiento vertical.

Para el desplazamiento horizontal de la placa móvil se puede observar que el área de contacto no es uniforme, es muy probable que esto resulte de la interacción de las asperezas al dejar de hacer contacto con las asperezas que anteriormente estaban en contacto, al reanudar su contacto con nuevas asperezas, el área de contacto incrementa, resultando en una curva que oscila de manera irregular. Además se puede apreciar que las diferentes gráficas tanto de los modelos elásticos como elasto-plásticos presentan una diferencia significativa, debido a sus propiedades mecánicas; a menor esfuerzo de fluencia en los modelos elasto-plásticos menor es el área relativa de contacto, contrario a los modelos elásticos y modelos elasto-plásticos que presentan un mayor esfuerzo de fluencia.

Otro factor que se tomó en cuenta en los modelos simulados fue la cuantificación del coeficiente de fricción para cada uno de ellos; al graficar las curvas de desplazamiento con respecto a los coeficientes de fricción se pudieron constatar su valor. En las figuras presentadas para este objetivo se puede observar de manera clara que todas las curvas de desplazamiento-coeficiente de fricción de los modelos presentan un valor ligeramente mayor en el inicio del desplazamiento horizontal. Esto corresponde a la diferencia de los efectos de la fricción estática y fricción dinámica que se presenta en las diferentes etapas de este fenómeno. Sin embargo, tal diferencia no fue impuesta de manera artificial en el modelo, es un resultado fundamental de la simulación. En un principio el coeficiente de fricción parece ser mayor, pero conforme la placa móvil se desplaza sobre la placa fija, ésta aumenta de forma pequeña pero gradual su velocidad, sabiendo que de antemano la velocidad de la placa móvil en este desplazamiento debió ser cero y que en todos los modelos ésta se incremento de manera pequeña y gradual; si se toma en cuenta esto, se

puede decir que al inicio del desplazamiento el coeficiente de fricción tuvo que ser ligeramente mayor, pues este pertenece a un coeficiente de fricción tipo estático el cual es mayor que el coeficiente de fricción dinámico.

Otro factor importante que demostró con los modelos simulados fue la existencia de una diferencia entre el contacto elástico y el elasto-plástico en el cual se puede observar de manera clara que las zonas de contacto son más dispersas en el modelo elástico, mientras que en el modelo elasto-plástico las zonas de contacto son menos dispersas y más localizadas.

Es importante tener presente que dentro del código utilizado para generar superficies rugosas fractales se tienen diferentes variables las cuales se pueden ajustar de acuerdo a parámetros que sean fundamentados y designados por el usuario, de tal manera que se tenga la superficie deseada para su estudio. En el presente trabajo, sólo se estudió una superficie aleatoria. Para trabajos a futuro, se tienen que repetir estas simulaciones un gran número de veces, para obtener las propiedades promedias y la dispersión de datos. Sin embargo, los resultados obtenidos en este primer ejemplo de las simulaciones contienen toda la información requerida para un estudio de contacto y son consistentes con lo que se espera con base en lo que se sabe de la literatura.

Finalmente, el uso y ajuste del código y en particular del modelo fractal se puede realizar de manera sencilla conociendo los diferentes parámetros de éste; se le pueden incluir más y diversos parámetros o en su defecto cambiarlos, todo esto sin alterar su programación esencial basada en el Método del Punto Medio de Desplazamiento Aleatorio, el cual se puede decir es el esqueleto del código programado.

## **CONCLUSIONES**

Se ha desarrollado una metodología para de generar y analizar con el método de elementos finitos superficies rugosas fractales, además de la teoría referente al desarrollo de esta metodología que permite la realización de futuras investigaciones en este tema del contacto entre superficies rugosas. Más en particular, como parte de la metodología se elaboró un código de programación basado en el Punto Medio de Desplazamiento Aleatorio para generar de superficies de tipo fractal.

Se ha desarrollado el marco teórico referente a los fractales y su relación que existe con el tema en estudio. Además se presentan los diferentes pasos detallados que fueron implementados para el desarrollo de la metodología para el estudio del contacto entre las superficies rugosas fractales. Mediante este método, se ha generado una herramienta computacional poderosa mediante la cual se pueden ejecutar estudios científicos de mayor impacto en el futuro cercano.

Los resultados de las simulaciones concuerdan por completo, ésto pudo demostrarse mediante las gráficas obtenidas durante las simulaciones al ser comparadas con investigaciones realizadas anteriormente a través de simulaciones numéricas; algunos de los resultados que pudieron corroborarse fue el comportamiento (aproximadamente) lineal de la fuerza aplicada con respecto al área real de contacto durante el desplazamiento vertical de la placa móvil y el comportamiento exponencial que presenta la curva del desplazamiento con respecto al área real de contacto. Se ilustró el hecho bien conocido que el área de contacto real en una superficie rugosa fractal es considerablemente menor al área aparente de contacto. Entre los resultados más destacados son la diferencia entre el coeficiente dinámico y estático de fricción, la cual no se había esperado basado en consideraciones teóricas, el modelado adecuado del incremento del área de contacto en contactos elasto-plásticos bajo condiciones de deslizamiento y la clara presencia de un componente plástico, tanto en la fricción estática como dinámica.

Algunos de los resultados presentados en esta tesis necesitan corroborarse con futuras investigaciones tanto experimentales como teóricas, puesto que actualmente dichos resultados aún no se encuentran reportados en la bibliografía. Un aspecto importante es que las superficies generadas son tan solo una muestra de todas las posibles superficies fractales que tienen los mismos parámetros. Por lo tanto, el siguiente paso en la investigación es la repetición de las simulaciones las veces que sea necesario para demostrar el carácter estadístico de los resultados presentados en este trabajo. Esta etapa de la investigación ya se ha iniciado.

Se puede concluir que la metodología desarrollada tiene una gran utilidad para futuras investigaciones que permite el estudio del contacto entre una gran cantidad de superficies con diferentes morfologías en su interface de contacto. Además que código de programación puede ser ajustado a las necesidades de la morfología permitiendo la modificación de los diferentes parámetros involucrados.

## APÉNDICE A

### A.1 Modelo de fricción de Coulomb en Abaqus®

La formulación de fricción que Abaqus utiliza para todos sus análisis de contacto es una versión extendida del clásico modelo de Coulomb isotrópico.

El modelo de fricción de Coulomb asume que no ocurre movimiento relativo si el estrés de rozamiento equivalente

$$\tau_{eq} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (\text{A.1})$$

Es menos que el estrés crítico,  $\tau_{crit}$ , el cual es proporcional a la presión de contacto,  $p$ ,

$$\tau_{crit} = \mu p \quad (\text{A.2})$$

Donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción que puede ser definido como una función de la presión de contacto  $p$ ; la razón de deslizamiento  $\dot{\gamma}_{eq}$ ; la temperatura promedio de la superficie en el punto de contacto; y el promedio de las variables en el punto de contacto. La razón dependiente de la fricción no puede ser utilizada en un análisis estático de Riks puesto que la velocidad no está definida. En Abaqus es posible poner un límite en el esfuerzo crítico:

$$\tau_{crit} = \min(\mu p, \tau_{max}) \quad (\text{A.3})$$

donde  $\tau_{m\acute{a}x}$  es definido por el usuario. Si el esfuerzo equivalente es igual al esfuerzo crítico ( $\tau_{eq} = \tau_{crit}$ ), el deslizamiento puede ocurrir. Si la fricción es isotrópica la dirección del deslizamiento y el esfuerzo de fricción coinciden, lo cual se expresa como

$$\frac{\tau_i}{\tau_{eq}} = \frac{\dot{\gamma}_i}{\dot{\gamma}_{eq}} \quad (\text{A.4})$$

donde  $\dot{\gamma}_i$  es la razón de deslizamiento en dirección  $i$  y  $\dot{\gamma}_{eq}$  es la magnitud de la velocidad de deslizamiento

$$\dot{\gamma}_{eq} = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2} \quad (\text{A.5})$$

El comportamiento anterior puede ser modelado en Abaqus/Standard en dos diferentes formas. Por default la condición de no movimiento relativo es aproximado al comportamiento elástico rígido. La rigidez es elegida tal que el movimiento relativo de la posición de esfuerzo cortante cero es limitado por un valor  $\gamma_{crit}$ , donde  $\gamma_{crit}$  es referido

como el máximo deslizamiento elástico permisible. El valor de deslizamiento crítico  $\gamma_{crit}$  puede ser especificado por el usuario. Sidicho valor no es especificado por el usuario,  $\gamma_{crit}$  es por default, 0.5 % de la longitud promedio de todos los elementos en contacto en el modelo.

Opcionalmente, el movimiento relativo en ausencia de deslizamiento puede ser reducido a cero con el uso de la formulación de Multiplicadores de Lagrange. Aunque este método parece atractivo a causa de la restricción de adherencia, tiene dos principales desventajas:

- 1.- Los multiplicadores de Lagrange adicionales aumentan el coste del análisis.
- 2.- La presencia de restricciones rígidas tiende a alentar o a veces impedir la convergencia del esquema de la solución de Newton usado en Abaqus / Standard. Esto probablemente ocurre en las zonas donde las condiciones de contacto cambian.

Un caso especial de ficción en Abaqus/Standard es la llamada fricción rugosa, donde se supone que no hay límite en el esfuerzo cortante; es decir, la no existencia de movimiento relativo puede ocurrir a lo largo de las superficies que están en contacto. La fricción rugosa es implementada con el método de multiplicadores de Lagrange.

En Abaqus/Explicit el movimiento relativo en la ausencia de deslizamiento es siempre igual a cero si el algoritmo de contacto cinemático es usado con el comportamiento superficial tangencial fuerte; al final de cada incremento las posiciones de los nodos en la superficie de contacto son ajustadas de tal manera que el movimiento relativo es cero. Con el algoritmo de “penalty contact” en Abaqus/Explicit el movimiento relativo en la ausencia de deslizamiento es igual a la fuerza de fricción dividida por “penalti stiffness”.

## A.2 Formulación de adherencia elástica

En la formulación de adherencia elástica en Abaqus/Standard, el deslizamiento tangencial elástico  $\gamma_i^{el}$  se define como el movimiento tangencial relativo desde el punto de esfuerzo de corte cero. El deslizamiento elástico está relacionado con el esfuerzo cortante con la relación

$$\tau_i = k_s \gamma_i^{el} \quad (A.6)$$

Donde  $k_s$  es la actual rigidez de adherencia, la cual está representada por la relación

$$k_s = \frac{\tau_{crit}}{\gamma_{crit}} \quad (A.7)$$

Ya que  $\tau_{crit}$  puede depender de la presión de contacto, de la tasa de deslizamiento, del promedio de la temperatura superficial en cada punto de contacto y de las variables de

campo,  $k_s$  puede cambiar durante el análisis. El comportamiento elástico se mantiene siempre y cuando el esfuerzo equivalente no exceda al esfuerzo crítico; Por lo tanto,

$$\gamma_i^{el}(t + \Delta t) = \gamma_i^{el}(t) + \Delta\gamma_i \quad (\text{A.8})$$

La linearización consistente de esta expresión es

$$d\tau_i = k_s d\gamma_i \quad \text{si} \quad \tau_{crit} = \tau_{m\acute{a}x} \quad (\text{A.9})$$

$$d\tau_i = k_s d\gamma_i + \frac{\tau_i}{\tau_{crit}} \left( \mu + p \frac{\partial u}{\partial p} \right) \partial p \quad (\text{A.10})$$

Las distribuciones de la presión de contacto no son simétricas para el segundo caso. Dado que la tasa de deslizamiento es cero en la formulación de adhesión elástica, las derivadas con respecto a la velocidad de deslizamiento no son necesarias.

Las expresiones anteriores se cumplen si el esfuerzo de corte equivalente sigue siendo inferior al esfuerzo crítico. Si el esfuerzo equivalente excede al esfuerzo crítico, el deslizamiento debe ser tomado en cuenta tal que la condición  $\tau_{eq} = \tau_{crit}$  se satisfaga. Permite que la situación inicial sea caracterizada por el deslizamiento elástico  $\bar{\gamma}_i^{el}$ . El esfuerzo crítico al final del incremento se deduce de la presión de contacto,  $p$ , y la tasa de deslizamiento,  $\dot{\gamma}_{eq}^{sl}$ .

Permite al deslizamiento elástico (aún desconocido) al final del incremento sea  $\gamma_i^{el}$  y al incremento de deslizamiento sea  $\Delta\gamma_i^{sl}$ . La consistencia requiere que

$$\Delta\gamma_i = \gamma_i^{el} - \bar{\gamma}_i^{el} + \Delta\gamma_i^{sl} \quad (\text{A.11})$$

Y el esfuerzo de corte al final del incremento se deduce de la relación de elasticidad

$$\tau_i = k_s \gamma_i^{el} = \frac{\tau_{crit}}{\gamma_{crit}} \gamma_i^{el} \quad (\text{A.12})$$

El incremento de deslizamiento está relacionado con el esfuerzo al final del incremento con el enfoque de diferencia tardía

$$\Delta\gamma_i^{sl} = \frac{\tau_i}{\tau_{crit}} \Delta\gamma_{eq}^{sl} \quad (\text{A.13})$$

Con estas ecuaciones y la igualdad de esfuerzo crítico  $\tau_{eq} = \tau_{crit}$ , es posible resolver para  $\gamma_i^{el}$ ,  $\gamma_i^{sl}$ , y  $\tau_i$ . La eliminación de  $\gamma_i^{el}$  y  $\Delta\gamma_i^{sl}$  de las ecuaciones anteriores

$$\Delta\gamma_i = \frac{\tau_i}{\tau_{crit}} \gamma_{crit} - \bar{\gamma}_i^{el} + \frac{\tau_i}{\tau_{crit}} \Delta\gamma_{eq}^{sl} \quad (\text{A.14})$$

0

$$\tau_i = \frac{\bar{\gamma}_i^{el} + \Delta\gamma_i}{\gamma_{crit} + \Delta\gamma_{eq}^{sl}} \tau_{crit} \quad (A.15)$$

Es conveniente definir la “deformación predictora elástica”

$$\gamma_i^{pr} \stackrel{def}{\cong} \bar{\gamma}_i^{el} + \Delta\gamma_i \quad (A.16)$$

La cual simplifica la expresión para el esfuerzo a

$$\tau_i = \frac{\gamma_i^{pr}}{\tau_{crit} + \Delta\gamma_{eq}^{sl}} \tau_{crit} \quad (A.17)$$

La sustitución en el esfuerzo crítico corresponde a

$$\Delta\gamma_{eq}^{sl} = \gamma_{eq}^{pr} - \gamma_{crit} \quad (A.18)$$

Donde

$$\gamma_{eq}^{pr} \stackrel{def}{\cong} \sqrt{(\gamma_1^{pr})^2 + (\gamma_2^{pr})^2} \quad (A.19)$$

La sustitución en la expresión para  $\tau_i$  y la introducción de la dirección de deslizamiento normalizada  $n_i = \gamma_i^{pr} / \gamma_{eq}^{pr}$  proporciona el resultado final

$$\tau_i = n_i \tau_{crit} \quad (A.20)$$

Donde  $\tau_{crit}$  es una función de la razón de desplazamiento, la cual es obtenida con

$$\dot{\gamma}_{eq}^{sl} = \Delta\gamma_{eq}^{sl} / \Delta t \quad (A.21)$$

Donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo en un análisis estático. En caso de un análisis dinámico con el operador de integración en el tiempo de Hilber-Hughes-Taylor,  $\Delta t$  es escalado por los parámetros del operador de integración de tiempo de Hilber-Hughes-Taylor,  $\gamma$  y  $\beta$ .

Para el esquema de solución iterativa esta ecuación debe ser linearizada.

$$d\tau_i = \frac{d\gamma_i^{pr}}{\gamma_{eq}^{pr}} \tau_{crit} - n_i n_j \frac{\tau_{crit}}{\gamma_{eq}^{pr}} d\gamma_j^{pr} + n_i d\tau_{crit} = (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\tau_{crit}}{\gamma_{eq}^{pr}} d\gamma_j^{pr} + n_i \left( \frac{\partial \tau_{crit}}{\partial p} dp + \frac{\partial \tau_{crit}}{\partial \gamma_{eq}^{sl}} d\gamma_{eq}^{sl} \right) \quad (A.22)$$

Con la expresión de deslizamiento equivalente el resultado final es

$$d\tau_i = (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\tau_{crit}}{\gamma_{eq}^{pr}} d\gamma_i \quad (A.23)$$



$$\text{si } \tau_{crit} = \tau_{max}$$

$$d\tau_i = (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\tau_{crit}}{\gamma_{eq}^r} d\gamma_i + n_i \left( \mu + p \frac{\partial u}{\partial p} \right) dp + n_i n_j \frac{p}{\Delta t} \frac{\partial u}{\partial \dot{\gamma}_{eq}} d\gamma_j \quad (\text{A.24})$$

$$\text{si } \tau_{crit} = \mu p$$

En este caso los términos asimétricos pueden afectar de manera considerable la velocidad de convergencia en el esquema de solución de Newton. Por lo tanto, se recomienda el solucionador de ecuaciones no simétricas para el análisis de problemas de rozamiento por deslizamiento que se produce [68].

## REFERENCIA

- [1] <http://www.biblicalarchaeology.org>
- [2] <http://research.me.udel.edu>
- [3] Thomas, T. R. (1999). *Rough Surfaces* (Segunda Edi., p. 278). Singapore: Imperial College Press.
- [4] Pfeiffer, Friedrich, & Wriggers, P. (2006). *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. XXVII (p. 392). The Netherlands: Springer.
- [5] Goryacheva, I. G. (1998). *Contact Mechanics in tribology* (p. 355). Netherlands: KLUWER ACADEMIC PUBLISHER.
- [6] Bhushan, B. (2001). *Modern Tribology Handbook* (p. 765). USA: CRC Press.
- [7] Popov., V. L. (2010). *Contact Mechanics and Friction*. (p. 362). Berlin Germany: Springer Verlag.
- [8] Shigeki Saito, Hideki T.Miyazaki, Tomomasa Sato, and K. T. (2001). Kinematics of Mechanical and adhesional micromanipulation under a scanning electron microscope. *Applied Physics*, pp. 5140–5149.
- [9] C. Peralta, L., Yoselín, M. C., & Quispe Gonzáles, H. S. (2013). *Geometría Euclidiana y Fractal* (p. 31). Cusco Perú.
- [10] <http://www.ideocentro.com/recursos>
- [11] Sinadel, V. W. de. (2003). Geometría fractal y geometría euclidiana. *Vol. XV, No. 35*, pp. 85–91.
- [12] Weisstein, E. W. Dimension.  
<http://mathworld.wolfram.com/Dimension.html>
- [13] Addison, P. S. (1997). *Fractal and Chaos* (p. 306). Napier University, Edinburgh: US Editorial Office: Institute of Physics Publishing.
- [14] Stover, Christopher Weisstein, E. W. (n.d.). Euclidean Space.
- [15] Parra, C. Fractales.  
<http://www.uhu.es/ceferino.parra/Artemate/Fractales.htm>

- [16] Barnsley, M. F. (1993). *Fractals Everywhere* (p. 567). United States of America: Morgan Kaufmann.
- [17] Jirgens, H., Maletsky, E. M., Peitgen, H. O., Perciante, T. H., Saupe, D., & Yunker, L. e. (1991). *Fractals for the Classroom: Part One Introduction to Fractal and Chaos*. (p. 450). New York, USA.: Springer Verlag.
- [18] José Luis Abreu León. Proyecto Arquímedes.  
<http://arquimedes.matem.unam.mx/>
- [19] Álvarez, A. A.-M. (2005). *Matemáticas en la Vida Cotidiana*. (p. 50).
- [20] González, A.  
[http://alfonsogonzalez.es/curiosidades\\_matematicas/fractales/fractales.html](http://alfonsogonzalez.es/curiosidades_matematicas/fractales/fractales.html)
- [21] Ivanova, N. E. (2007). *La Razón feyta d'amor de Lupus de Moros como el canticum amatorium hispánico*. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- [22] Mandelbrot, Benoît. (1997). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. (S. A. Tusquets Editores, Ed.) (1ra. ed., p. 662). Barcelona, España.: MATEMAS 49.
- [23] Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science (New York, N.Y.)*, 156(3775), 636–8.  
doi:10.1126/science.156.3775.636
- [24] <http://laantiguabiblos.blogspot.mx>
- [25] Giorgio Franceschetti, D. R. (2007). *Scattering, Natural surfaces and fractals* (1ra. ed., p. 307). USA.: Academic Press.
- [26] <http://www.nosabesnada.com/>
- [27] Ibáñez, J. J. (2009).  
<http://www.madrimasd.org/blogs/universo>
- [28] Francisco A. Sandoval N. (2010). Clasificación de los fractales.  
<http://fralbe.com/2010/09/15/clasificacion-de-los-fractales/>
- [29] Rivera, M. H., & Melo, M. E. R. (2001). La Rugosidad de las Superficies: Topometría., *IV*, pp. 27–33.
- [30] Barabási, A.-L., & Stanley, H. E. (1995). *Fractal Concepts in Surface Growth* (p. 392). Boston Massachusetts: Press Syndicate of the University of Cambridge.

- [31] Bhushan, B. Editor (2001) Surface Roughness Analysis and Measurement Techniques, in Modern tribology handbook, B. Bhushan, CRC Press: Boca Raton, FL.
- [32] Zhou G, Lam, N.S.N. (2005). A comparison of fractal dimension estimators based on multiple surface generation algorithms Computers & Geosciences 31 1260–1269
- [33] Ausloos, M., & Berman, D. H. (1985). A multivariate Weierstrass-Mandelbrot function. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 400(1819), 331-350.
- [34] Ciavarella, M., Murolo, C., & Demelio, G. (2006). On the elastic contact of rough surfaces: numerical experiments and comparisons with recent theories. Wear, 261(10), 1102-1113.
- [35] Wang, S., Shen, J., & Chan, W. K. (2007). Determination of the fractal scaling parameter from simulated fractal-regular surface profiles based on the weierstrass-mandelbrot function. Journal of Tribology, 129(4), 952-956.
- [36] Anciaux, G., & Molinari, J. F. (2009). Contact mechanics at the nanoscale, a 3D multiscale approach. International journal for numerical methods in engineering, 79(9), 1041-1067.
- [37] Hyun, S., Pei, L., Molinari, J. F., & Robbins, M. O. (2004). Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. Physical Review E, 70(2), 026117.
- [38] Pei, L., Hyun, S., Molinari, J. F., & Robbins, M. O. (2005). Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53(11), 2385-2409.
- [39] Mura, T. (1987). Micromechanics of defects in solids (Vol. 3). Springer Science & Business Media.
- [40] Mindlin, R. D. (1953). Force at a point in the interior of a semi-infinite solid (No. CU-9-53-ONR-266-09-CE). BRITISH COLUMBIA UNIV VANCOUVER DEPT OF CIVIL ENGINEERING.
- [41] Love, A. E. H. (1929). The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 377-420.
- [42] Ciavarella, M. (1998). The generalised Cattaneo Partial Slip Plane Contact Problem. I-Theory International Journal of Solids and Structures, 35. pp.2349-2362.

- [43] Ciavarella, M. (1998) The generalised Cattaneo Partial Slip Plane Contact Problem. II- Examples. *International Journal of Solids and Structures*, 35. pp.2363-2378.
- [44] Nowell, D., Hills, D.A., 1989. Hertzian contact of ground surfaces. *J. Tribol.* 111 (1), 175–179.
- [45] Sellgren, U., Björklund, S., & Andersson, S. (2003). A finite element-based model of normal contact between rough surfaces. *Wear*, 254(11), 1180-1188.
- [46] Sahoo, P., & Ghosh, N. (2007). Finite element contact analysis of fractal surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(14), 4245.
- [47] Studer, C. (2009). *Numerics of Unilateral Contacts and Friction* (p. 181). Zurich, Switzerland: Springer Verlag.
- [48] Sofonea, M., & MATEI, A. (2009). *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems (Advances in Mechanics and Mathematics)* (p. 230). Springer.
- [49] <http://todoingenieriaindustrial.wordpress.com/>
- [50] Bollenl, C. M. L., Lambrechts, P., & Quirynen, M. (1997). Comparison of surface roughness of oral hard materials to the threshold surface roughness for bacterial plaque retention: A review of the literature. *Dental Materials*, 13(4), pp. 258–269. doi:10.1016/S0109-5641(97)80038-3
- [51] Francois., D., Pineau, A., & Zaoui, A. (1993). *Mechanical Behaviour of Materials*. (p. 401). Hermès Paris.: Springer Science.
- [52] Wriggers, P., & Laursen, T. A. (2007). *Computational Contact Mechanics: Courses and Lectures*. (p. 248). Italia: Springer Verlag.
- [53] <http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>
- [54] Goedecke, A. (2013). *Transient Effects in Friction* (p. 197). Munich, Germany.
- [55] Kunio Takahashi, Hideaki Kajihara, Masataka Urago, S. S. (2001). Voltage required to detach an adhered particle by Coulomb interaction for micromanipulation. *Applied Physics*, pp. 432–437.
- [56] Pfeiffer, Friederich, & Wriggers, P. (2011). *Trends in Computational Mechanics*. (p. 354). India: Springer Verlag.

- [57] J.T.M De Hosson, C. A. Brebbia, S.-I. N. (Ed.). (2007). *Computer Methods and Experimental Measurements for Surface Effects and Contact Mechanics* (p. 353). Great Britain.
- [58] Raous, M., Jean, M., & Moreau, J. J. (1994). *Contact Mechanics International Symposium* (p. 470). Carry Le Rouet, France: Springer Science.
- [59] E.S. Gadelmawla, M. M. Koura, T. M. A Maksoud, I.M. Elewa, H. H. Soliman. Roughness Parameters. *Journal of Materials Processing Technology* 123 (2002), pp. 133-145.. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717798001393>
- [60] Wriggers, P. (2006). *Computational Contact Mechanics* (Second Edi., p. 518). The Netherlands: Springer Verlag.
- [61] Zahouani, H., Vargiolu, R., & Loubet, J.-L. (1998). Fractal models of surface topography and contact mechanics. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4), pp. 517–534. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717798001393>
- [62] Brown, J. (2013). <http://www.somethinghitme.com/>
- [63] <http://www.lighthouse3d.com>
- [64] Jilesen, J., Kuo, J., & Lien, F.-S. (2012). Three-dimensional midpoint displacement algorithm for the generation of fractal porous media. *Computers & Geosciences*, pp. 46, 164–173. doi:10.1016/j.cageo.2011.12.002
- [65] Beard, D. (2010). <http://danielbeard.wordpress.com>
- [66] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson (1966). Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-990)*, pp. 300-319.
- [67] L. Pei, S. Hyun, J. F. Molinari, Mark O. Robbins, Finite Element Modeling of Elasto-Plastic Contact Between Rough Surfaces, *ELSEVIER Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (2005), pp. 2385-2409.
- [68] Abaqus Analysis User's Manual. 5.2.3. Coulumb Friction.
- [69] J.-F.M. Gouyet, M. Rosso, E. al. (1991). "Fractal Surfaces and Interfaces." *Fractals and Disordered Systems*. (pp. 229–262). Berlin: Springer Verlag.
- [70] P. Pfeifer, M. O. (1989). "Fractals: Basic Concepts and Terminology." *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*. (pp. 11–44). New York: John Wiley and Sons.
- [71] Russ, C. J. (1994). *Fractal Surfaces* (1st ed., p. 313). New York: Springer Science.