



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

CENTRO DE CIENCIAS DE LA ATMÓSFERA

MODELACIÓN DE SISTEMAS TERRESTRES

**“ONDAS ARMÓNICAS SOBRE UNA ESFERA
EN ROTACIÓN Y SU ESTABILIDAD”**

TESIS

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA: DANIEL PEÑA MACIEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. IOURI N. SKIBA
CENTRO DE CIENCIAS DE LA ATMÓSFERA

MÉXICO D.F., MAYO DE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa Vero, mi familia y mis amigos, porque sin su apoyo y cariño no hubiera podido lograr llegar hasta aquí, ni poder seguir en la batalla.

A mi querida Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma máter, porque ha sido y será siempre, una fuente inagotable de nuevas experiencias, emociones y conocimiento en mi vida.

A mi tutor: Dr. Iouri N. Skiba, investigador del Centro de Ciencias de la Atmósfera, por el invaluable tiempo dedicado a mi formación académica durante esta etapa de mi vida.

A los miembros del jurado de examen de grado: Dr. Tomás Morales Acoltzi, Dr. Ernesto Rubio Acosta, Dr. Antonio Carrillo Ledesma y el Dr. David Parra Guevara, porque con sus valiosas observaciones y sugerencias este trabajo se vio enriquecido, pero más que nada por su apoyo profesional y su sabio consejo durante la duración de mis estudios de maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por otorgarme la beca para realizar mis estudios de maestría.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS.....	II
ÍNDICE	III
LISTA DE FIGURAS	V
LISTA DE TABLAS.....	VI
RESUMEN.....	VII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) autónomas	2
1.2. Equilibrio de una EDO.....	3
1.3. Estabilidad de una EDO	4
1.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	4
1.5. La estabilidad de acuerdo a Lyapunov.....	5
1.6. Método de linealización de Lyapunov	8
1.7. Objetivos de la tesis	10
2. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA	12
2.1. Flujo básico, perturbaciones y el problema de linealización.....	12
2.2. Estabilidad lineal respecto a perturbaciones infinitesimales: Método de Modos Normales (MMN)	14
2.3. Flujos paralelos en un fluido homogéneo sobre un plano y el MMN.....	17
2.4. Ecuación de Orr-Sommerfeld y criterios de estabilidad para flujos planos paralelos.....	21
3. ECUACIÓN DE VORTICIDAD BAROTRÓPICA NO LINEAL.....	24
3.1. Obtención de la EVB.....	24
3.2. La Ecuación de Vorticidad Barotrópica en la Geometría esférica	28
4. POLINOMIOS ESFÉRICOS Y SOLUCIONES EXACTAS DE LA EVB	34
4.1. Ecuaciones para obtener los Polinomios Esféricos	34
4.2. Armónicos Esféricos.....	38
4.3. Soluciones (flujos) exactas de la EVB.....	42
4.4. Soluciones estacionarias exactas de la EVB	44

4.5. Soluciones zonales exactas de la EVB.....	45
5. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES EXACTAS DE LA EVB	46
5.1. Flujo básico, perturbaciones y EVB linealizada.....	46
5.2. Método de Modos Normales aplicado a la EVB linealizada	49
5.3. Problema espectral para ondas R-H estacionarias (bidimensionales)	49
5.4. Problema espectral para flujos zonales LP	49
5.5. Ecuación y condición de estabilidad de Rayleigh-Kuo para flujos zonales LP	50
5.6. Leyes de conservación para la EVB.....	53
5.7. Inestabilidad de un flujo en la forma de un PL y una onda R-H estacionaria usando el MMN.....	55
5.8. Condición de inestabilidad para una onda R-H estacionaria y tasa máxima de crecimiento de sus modos inestables	58
5.9. Condición de inestabilidad para un flujo en forma de PL y tasa máxima de crecimiento de sus modos inestables	60
5.10. Ortogonalidad de modos inestables y el flujo básico.....	61
5.11. Inestabilidad de Lyapunov de una onda R-H no zonal.....	62
5.12. Método espectral para analizar la inestabilidad de modos normales	65
5.13. Condiciones de inestabilidad para flujos	67
5.14. Estabilidad lineal de flujos zonales.....	69
5.15. Estabilidad lineal de ondas R-H.....	70
6. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	71
6.1. Estabilidad lineal de flujos zonales	71
6.2. Estabilidad lineal de ondas R-H	81
7. COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES	85
7.1. Conclusiones generales	85
7.2. Trabajo futuro	89
8. APÉNDICE.....	90
8.1. Principales tipos de flujos medios	90
8.2. Polinomios de Legendre	91

8.3. Funciones asociadas de Legendre	93
8.4 Energía cinética y enstrofía en un fluido	96
9. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS	98

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 [Elaborada con Word 2010]. Ejemplos de estabilidad para una pelota al ser perturbada y moverse sobre varias superficies.....	1
Figura 2 [Adaptada de Wiggins, 2003; elaborada con Word 2010]. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.....	7
Figura 3 [Adaptada de Wiggins, 2003; elaborada con Word 2010]. Estabilidad asintótica.....	8
Figura 4 [Adaptada de Drazin, 2002; elaborada con Word 2010]. Configuración del flujo básico.....	18
Figura 5 [Adaptada de Drazin, 2002; Drazin & Reid, 2004; elaborada con Word 2010]. Configuraciones de algunos flujos básicos gobernadas por las condiciones necesarias de inestabilidad de Rayleigh-Fjörtoft.....	23
Figura 6 [Elaborada con Word 2010]. Sistema de coordenadas esféricas en ciencias de la atmósfera.....	29
Figura 7 [Adaptado de Skiba, 2010; elaborado con Matlab 2012]. Números de onda (m, n) de los armónicos esféricos Y_n^m	42
Figura 8 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de la velocidad de un flujo en la forma de un PL (254) con $n = 3$ y $a = 0.08$ (a), y contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ de los dos modos más inestables correspondientes a los valores de $\omega_r = 0.2073$ (b) y $\omega_r = 0.1576$ (c).....	73
Figura 9 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad del flujo PL (254) con $n = 4$ y $a = 0.06$ (a), y los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ de los 4 modos más inestables correspondientes a $\omega_r = 0.2604$ (b), $\omega_r = 0.2373$ (c), $\omega_r = 0.1924$ (d) y $\omega_r = 0.1485$ (e).....	75
Figura 10 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad del flujo PL (254) con $n = 5$ y $a = -0.06$ (a), y contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ del modo más inestable correspondiente a $\omega_r = 0.4922$ (b).....	76
Figura 11 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad de la onda R-H zonal (255) con $n = 5$ y $a = 0.0052$ (a), y los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu, t)$ del modo más inestable ($\omega_r = 0.0268$) con $t = 0$ (b), $t = T/8$ (c) y $t = T/4$ (d).....	79

Figura 12 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad de la onda R-H zonal (255) $n = 7$ y $\alpha = -0.004$ (a) y los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ del modo más inestable correspondientes a $\omega_r = 0.0515$ (b).	80
Figura 13 [Adaptada de Skiba & Pérez-García, 2005]. Isolíneas de la onda R-H básica no zonal (258), para diferentes amplitudes: a) $\alpha = 0.013$, b) $\alpha = 0.014$, c) $\alpha = 0.015$ y d) $\alpha = 0.023$	83
Figura 14 [Adaptada de Skiba & Pérez-García, 2005]. Contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ del primer modo normal estable, a) $\omega_r = 3.36 \times 10^{-7}$ y el más inestable b) $\omega_r = 0.000782$, c) $\omega_r = 0.00428$ y d) $\omega_r = 0.0307$ correspondientes a la amplitud de la onda R-H no zonal.	84
Figura 15. [Adaptadas de Kundu & Cohen, 2008; elaborada con Word 2010]. Ejemplos de flujos paralelos en canales.	90
Figura 16 [Elaborada con Matlab 2012]. Primeros ocho polinomios de Legendre.	92
Figura 17 [Elaborada con Matlab 2012]. Funciones Asociadas de Legendre, de orden $n = 4$, y grados $m = 1, \dots, 4$	94
Figura 18 [Elaborada con Matlab 2012]. Funciones Asociadas de Legendre, de orden $n = 7$, y grados $m = 1, \dots, 7$	94

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal (254) con $n = 3$ y $\alpha = 0.08$	73
Tabla 2 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal PL (254) con $n = 4$ y $\alpha = 0.06$	74
Tabla 3 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo PL (254) con ahora $n = 5$ y $\alpha = -0.06$	76
Tabla 4 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo PL zonal (254), cuando $n = 6$ y $\alpha = 0.03$	77
Tabla 5 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal de una onda R-H (255) con $n = 5$ y $\alpha = 0.0052$	78
Tabla 6 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal de una onda R-H (255) con $n = 7$ y $\alpha = -0.004$	80
Tabla 7 [Adaptada de Skiba & Pérez-García, 2005]. Modos más inestables de la onda R-H no zonal (258), $N = 21$, $n = 3$	82

RESUMEN

Este trabajo se dedica al estudio de la estabilidad de flujos atmosféricos, en la forma de un polinomio de Legendre (**PL**) y una onda de Rossby-Haurwitz (**onda R-H**) estacionaria, perteneciente al espacio $H_1 \oplus H_n$ (H_n es el subespacio de los polinomios esféricos homogéneos de orden n). Dichos flujos son de gran importancia matemática y meteorológica, dado que son soluciones exactas de la ecuación de vorticidad barotrópica (**EV B**) no lineal, la cual describe tanto la dinámica de un flujo ideal sobre una esfera en rotación, como la dinámica barotrópica de procesos atmosféricos a gran escala.

El objetivo de este trabajo, corresponde a mostrar de forma sistemática y detallada, las bases de una metodología que se aplica al estudio de la estabilidad de una solución básica, así como las consideraciones bajo las que se aplica y los criterios de estabilidad. Esto tanto para el modelo más general de un sistema hidrodinámico: las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de conservación de masa, como para el modelo de vorticidad barotrópica sobre la esfera. Los métodos fundamentales usados, corresponden a la linealización del modelo, y a la posterior aplicación del método de modos normales, es decir, expresar las perturbaciones infinitesimales del flujo básico en forma de una superposición de modos normales.

Se mostró que la inestabilidad exponencial de un **PL** y una **onda R-H**, puede ser estudiada mediante dichos métodos de manera casi idéntica, ya que se obtienen formulaciones muy similares. Así, se obtuvo una ley de conservación para perturbaciones, la cual se utilizó para formular una nueva condición, necesaria para la existencia de inestabilidad exponencial (Skiba, 2000) para ambos tipos de flujos básicos. Dicha condición, establece que el modo normal de la **onda R-H** estacionaria o un **PL**, puede ser inestable sólo si el número espectral promedio de Fjörtoft (1953) de la amplitud del modo, es igual a $\sqrt{n(n+1)}$.

Para flujos zonales (**ondas R-H** y **PLs**), la condición recién mencionada complementa las condiciones de Rayleigh-Kuo (Rayleigh 1880; Kuo 1949) y de Fjörtoft (1950), ya que mientras las últimas están relacionadas con la estructura del flujo básico, la primera caracteriza la estructura de una perturbación creciente; en el caso de una **onda R-H**, cualquier modo cuya amplitud no satisface dicha condición es neutral, además, ésta también caracteriza la estructura espacial (geométrica) creciente de las perturbaciones asociadas a ella. Cabe enfatizar que dicha condición teórica, es muy valiosa en el estudio de las **ondas R-H**, dado que es la única condición de inestabilidad hasta ahora conocida para dichos flujos bidimensionales.

La nueva condición de inestabilidad, localiza perturbaciones inestables en el espacio y es útil para probar algoritmos numéricos, por lo que se mostró su uso y la importancia de contar con dicho criterio, al estudiar la estabilidad exponencial de flujos arbitrarios sobre una esfera de forma numérica. La comparación de resultados numéricos y teóricos, muestra que el método de estudio sobre la estabilidad numérica, trabaja muy bien en el caso de soluciones suaves, tales como los flujos zonales y las **ondas R-H**.

1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo nos concierne el concepto de estabilidad, el cual tiene una importancia predominante en aplicaciones a cualquier rama del conocimiento.

De manera intuitiva, la estabilidad puede definirse como la capacidad que tiene un sistema para volver a un estado de equilibrio después de haber sido perturbado, es decir, que un agente (interno o externo) al sistema, ha ocasionado una alteración en éste, y sin embargo, el sistema ha podido regresar al estado (de equilibrio) que tenía antes de haber interactuado con dicho agente.

Para ilustrar lo anterior, usemos el siguiente ejemplo: consideremos una pequeña pelota que se encuentra en un estado de equilibrio estático¹, y que al moverse, lo hace bajo la acción de la gravedad sobre diferentes superficies como las mostradas en la figura 1.

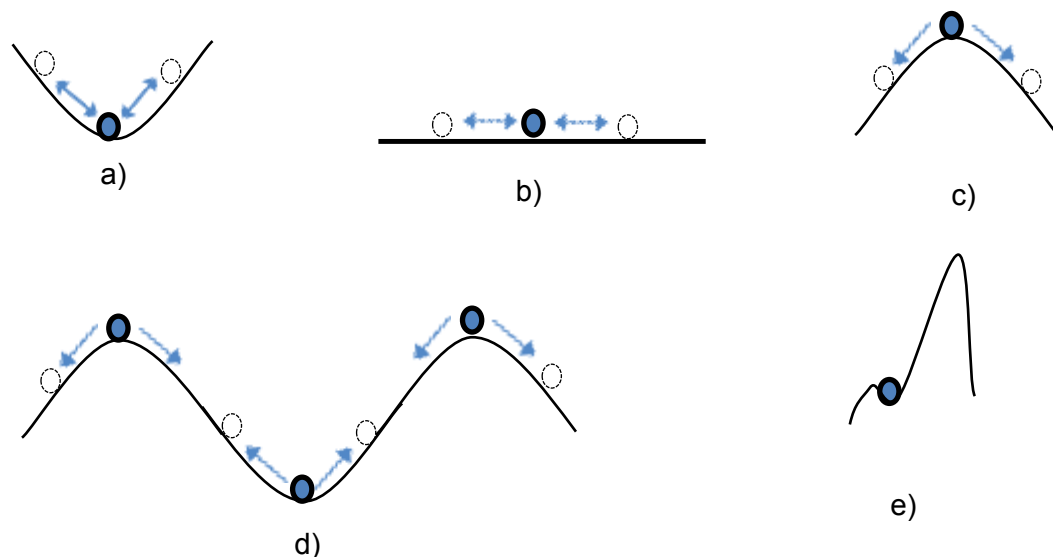


Figura 1 [Elaborada con Word 2010]. Ejemplos de estabilidad para una pelota al ser perturbada y moverse sobre varias superficies: a) asintóticamente estable; b) estable, c) inestable, d) y e) estables para perturbaciones infinitesimales e inestables para perturbaciones finitas.

En todos los casos, la pelota se encuentra en una posición de equilibrio, pero es de interés saber si en cada caso, el equilibrio es estable respecto a perturbaciones (movimientos) infinitesimales, las cuales invariablemente existen en cualquier sistema real. Así entonces, si sacamos la pelota “un poco” de su

¹ Es decir, que las fuerzas que actúan sobre dicha pelota, tienen magnitudes iguales en todas las direcciones de acción, por lo que la pelota no se mueve.

estado de equilibrio y la soltamos, estamos perturbando el sistema, obteniendo los siguientes resultados:

En los casos a) y b) la pelota se mantendrá “cerca” de su posición de equilibrio, oscilando alrededor de ésta; en el primer caso, debido a la fricción, la pelota tenderá a ocupar dicha posición de equilibrio nuevamente, entonces se dice que el equilibrio es asintóticamente estable; mientras que en el segundo caso, para cualquier “perturbación” pequeña de la pelota, ésta permanecerá “cerca” de la posición de equilibrio pero no tenderá a acercarse a dicha posición, por lo que se tiene estabilidad (no asintótica).

Por otra parte, en el caso c), cualquier “perturbación” aplicada a la pelota por pequeña que ésta sea, hará que se aleje de su posición de equilibrio; por lo que el equilibrio es inestable.

Por último, para los casos d) y e), si la perturbación introducida es infinitesimal (**inestabilidad lineal**), la pelota tenderá a ocupar su posición de equilibrio, mientras que si la perturbación es finita (**inestabilidad no lineal**), el equilibrio será inestable, ya que la pelota no será capaz de regresar a su posición de equilibrio o bien mantenerse “cerca” de ésta, como en el caso c).

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) autónomas

Para iniciar la discusión matemática sobre la estabilidad, se introduce el siguiente sistema conformado por una ecuación diferencial ordinaria (**EDO**):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1)$$

Dicha ecuación se denomina no autónoma, ya que la función de forzamiento $f(x, t)$ depende explícitamente del tiempo t ; además, una solución de ésta es una función que satisface la **EDO** para todos los valores de t de interés (Campbell & Haberman, 2008; Nagle et al., 2012):

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t); \text{ para todo } t.$$

La ecuación (1) junto con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, forman lo que se conoce como problema de valor inicial, ya que si t_0 es el instante de tiempo inicial,

$x(t_0) = x_0$ representa la posición inicial de un objeto y $\dot{x}(t_0)$ ² proporciona la velocidad inicial.

Existen muchos sistemas físicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDOs**), las cuales tienen la propiedad de que la tasa de cambio $\frac{dx}{dt}$, depende sólo del valor de la solución desconocida x y no del tiempo t , por lo que reciben el nombre de **EDOs autónomas**. Así, en dichas ecuaciones, el tiempo no aparece de forma explícita en la función de forzamiento f :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad . \quad (2)$$

1.2. Equilibrio de una EDO

Se dice que un sistema físico está en equilibrio si su estado no cambia con el tiempo. Esto implica que si dicho sistema es modelado mediante la ecuación (2), un estado de equilibrio de éste, corresponde a una solución constante de dicha ecuación diferencial, y a la inversa.

Una solución específica de una ecuación diferencial autónoma (ecuación 2), se llama una solución de equilibrio o de estado estacionario³, si ésta es **constante** en el tiempo (no depende de t): $x(t) = a = Cte$.

Para que una constante sea una solución de equilibrio, debe satisfacer la **EDO**, ya que $x = a$ no depende del tiempo, $\frac{da}{dt} = 0$; así, al sustituir $x = a$ en (2), se obtiene: $0 = f(a)$, entonces: $x = a$ es una solución de equilibrio de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ precisamente cuando $0 = f(a)$. Por lo tanto, todos los ceros (o raíces)⁴ de la función $f(x)$ son soluciones de equilibrio. El equilibrio $x = a$ se determina a partir de $f(a) = 0$ (Campbell & Haberman, 2008).

Si se considera que la **EDO** $\frac{dx}{dt} = f(x)$ es el modelo de un proceso físico, y que se tiene un estado de equilibrio dado por $x = a$, es decir, $x(t_0) = a$; entonces, $\frac{dx}{dt} = 0$ indica que en dicho proceso, todo se encuentra en perfecto balance (las

² Nota: se usará indistintamente $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$, al igual que $\ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

³ Otros términos usados como sinónimo de "solución de equilibrio" son: "punto fijo", "punto estacionario", "punto de descanso", "singularidad", "punto crítico", o "estado estacionario".

⁴ La búsqueda de las raíces (puntos de equilibrio) de una ecuación puede ser una tarea difícil, a menudo se requieren técnicas sofisticadas de álgebra, análisis, y análisis numérico.

fuerzas, las presiones, etc.), y el proceso $x(t)$ permanece en $x = a$, por lo que se dice que $x = a$ es una solución de equilibrio (Campbell & Haberman, 2008).

Una solución constante implica en particular que \dot{x} y \ddot{x} deben ser simultáneamente cero. Hay que tener en cuenta que la situación cuando la “condición” $\dot{x} = 0$ por sí sola no es suficiente para el equilibrio: un péndulo oscilante está instantáneamente en reposo en su desplazamiento angular máximo, pero esto no es obviamente, un estado de equilibrio.

1.3. Estabilidad de una EDO

Un sistema físico en perfecto equilibrio puede ser muy difícil de lograr (un lápiz apoyado sobre su punta es inestable) o fácil de mantener (una pelota en la parte inferior de un recipiente es estable, como en la figura 1).

Una solución de equilibrio puede ser estable o inestable; así, al variar las condiciones iniciales en una pequeña cantidad a partir del estado de equilibrio, la solución de la ecuación diferencial puede permanecer cerca de dicho estado, o bien alejarse de él. Entonces, la estabilidad de un punto de equilibrio puede definirse de manera informal como sigue (Campbell & Haberman, 2008):

“Un punto de equilibrio $x = a$ es estable si todas las soluciones que empiezan cerca de $x = a$ permanecen cerca, además, cuanto más cerca comience la solución de $x = a$, más cercana a dicho punto se mantendrá”.

De otra forma, el punto de equilibrio $x = a$ será inestable. Para que sea estable la solución, ésta debe permanecer cerca del punto de equilibrio para todas las condiciones iniciales cercanas.

También, es útil definir un sentido más fuerte de la estabilidad. Un punto de equilibrio $x = a$ es asintóticamente estable:

Si $x = a$ es estable y la solución se aproxima al punto de equilibrio para todas las condiciones iniciales cercanas, es decir, $x(t) \rightarrow a$ cuando $t \rightarrow \infty$.

1.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

El concepto de estabilidad es uno de los más importantes en el estudio de la teoría de sistemas dinámicos ⁵ y la teoría de control. A grandes rasgos, la teoría de la estabilidad trata sobre el comportamiento de las trayectorias de un sistema dinámico, cuando el estado inicial del sistema está cerca de un estado de equilibrio.

La teoría general de un sistema de **EDOs** con n ecuaciones lineales de primer orden, comparte muchas semejanzas con la teoría general de una sola **EDO** lineal de enésimo orden (Edwards & Penney, 2009). Por esta razón, se introduce ahora el sistema de **EDOs** no autónomo no lineal:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad \text{donde } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

así como su contraparte autónoma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}); \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n . \quad (4)$$

Y sea $\vec{x} = \vec{a}$ una solución de equilibrio de (4), tal que $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$, es decir, una solución que no cambia en el tiempo.

De acuerdo a la teoría de sistemas dinámicos, es común utilizar el término “flujo” para hacer referencia a un conjunto de soluciones de un sistema de **EDOs**, ya que éstas pueden visualizarse como trayectorias que “fluyen” a través de un espacio n -dimensional con coordenadas (x_0, \dots, x_n) ⁶, además de que dichas trayectorias pueden considerarse originadas de condiciones iniciales contiguas.

Ahora, interesa estudiar la estabilidad del sistema de ecuaciones recién introducido (4), respecto a pequeñas perturbaciones, lo cual hace necesario, introducir formalmente los conceptos de perturbación y estabilidad.

1.5. La estabilidad de acuerdo a Lyapunov

Se denomina **perturbación**, a cualquier desviación del estado de equilibrio (Eckhaus, 1965). Considerando a $\vec{x}(t) = \vec{a}$ como una solución de equilibrio para un cierto intervalo de tiempo, la introducción de una perturbación en un flujo,

⁵ Sistemas de **EDOs**, con el tiempo t como variable independiente.

⁶ Denominado espacio de fase, dichas coordenadas corresponden a las variables dependientes que describen el estado o evolución del sistema, además de representar los grados de libertad dinámicos del sistema (posición y velocidad, por ejemplo).

puede interpretarse matemáticamente de varias formas (Slotine et al., 1991; Khalil, 2002; Wiggins, 2003; Drazin & Reid, 2004):

a) Problema de valor inicial: el estudio de la evolución de una perturbación, equivale al estudio de un problema de valor inicial, ya que al variar las condiciones iniciales en una pequeña cantidad a partir del estado de equilibrio, la solución de una ecuación diferencial puede permanecer cerca de dicho estado, o bien alejarse de él.

b) Una traslación o desplazamiento del estado de equilibrio al origen: Sin pérdida de generalidad, es posible considerar que $\vec{a} = \vec{0}$, es decir, que cualquier punto de equilibrio \vec{a} , puede trasladarse al origen del espacio de fase. Por lo que la estabilidad de cada punto de equilibrio puede estudiarse en el origen $\vec{0}$.

c) El comportamiento de un flujo perturbado a partir de un flujo básico o en equilibrio: Si se considera a un flujo como la suma de un flujo básico y una perturbación de éste: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{x}'$ ⁷, al despejar la perturbación, se obtiene: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$.

Usando el cambio de variable planteado en **c)**, puede realizarse la linealización de \vec{f} en la ecuación (4), transformando el sistema de **EDOs** autónomo no lineal, en un sistema de **EDOs** autónomo lineal de coeficientes constantes (como se mostrará en la sección 1.6.). De esta forma, es posible estudiar la estabilidad de pequeñas perturbaciones, usando el método general del valor característico.

A pesar de que lo descrito en los 3 incisos anteriores comprende un mismo problema, vale la pena mencionar cada uno por separado para enfatizar las interpretaciones que pueden darse al mismo.

A continuación, se proporcionan las definiciones formales de estabilidad (adaptadas de: Liapunov 1966; Elsgoltz, 1969; Strogatz, 2000; Wiggins, 2003; Charru, 2011) para un flujo básico, el cual satisface las ecuaciones que describen el problema. Dicho flujo básico es estable en el sentido de Lyapunov, si una pequeña perturbación permanece pequeña conforme transcurre el tiempo, es decir, si el flujo (o estado) perturbado permanece cercano al flujo básico:

Definición 1. Se dice para la ecuación (4), que un flujo básico \vec{a} es estable⁸ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $|\vec{x}(t_0) - \vec{a}| \leq \delta$, entonces, $|\vec{x}(t) - \vec{a}| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ (donde $|\cdot|$ es una norma en el espacio físico \mathbb{R}^n).

⁷ Se hace énfasis en que el apóstrofo (') denota a una perturbación y no, a una primera derivada ordinaria.

⁸ O estable en el sentido de Lyapunov.

Se debe enfatizar el hecho de que una solución que no es estable, se denomina entonces inestable. Además, si un flujo que es estable en el sentido de Lyapunov, alcanza nuevamente su estado básico, se denomina estable asintóticamente.

Definición 2. (Estabilidad asintótica). Se dice para la ecuación (4) que \vec{a} es asintóticamente estable, si es estable en el sentido de Lyapunov y, existe una constante $b > 0$ tal que si $|\vec{x}(t_0) - \vec{a}| < b$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t) - \vec{a}| = 0$. En otras palabras, cualquier trayectoria que comience a una distancia b de \vec{a} , convergerá eventualmente a \vec{a} .

Cabe mencionar que, una solución de equilibrio que es estable en el sentido de la definición 1, pero que no es asintóticamente estable (definición 2), se denomina **marginalmente** estable.

Las figuras 2 y 3 muestran la interpretación geométrica de las definiciones 1 y 2 respectivamente. Por otra parte, se debe notar que ambas, implican que se tiene información de la existencia en tiempo infinito de las soluciones de (4). Esto es evidente para soluciones de equilibrio, pero no necesariamente cierto para soluciones cercanas.

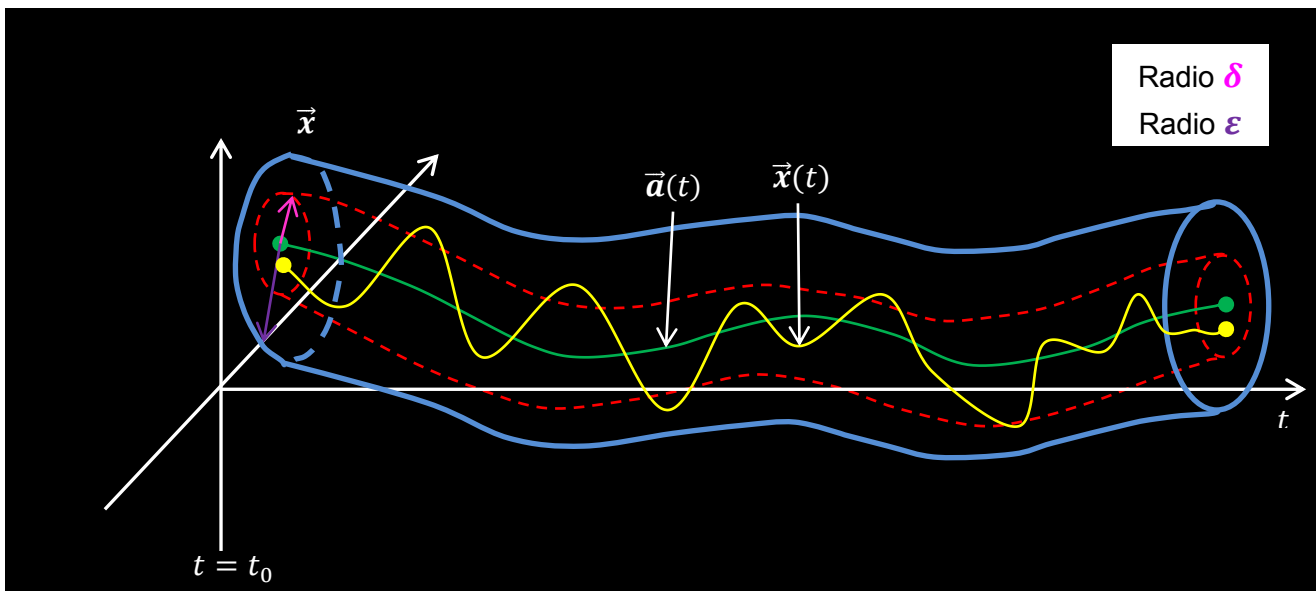


Figura 2 [Adaptada de Wiggins, 2003; elaborada con Word 2010]. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

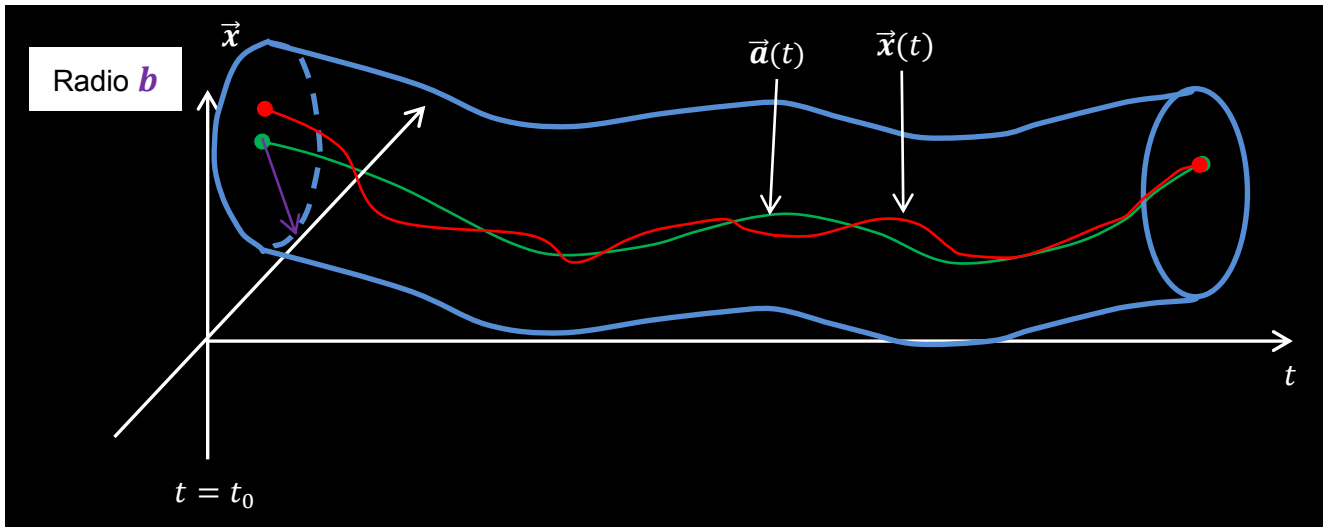


Figura 3 [Adaptada de Wiggins, 2003; elaborada con Word 2010]. Estabilidad asintótica.

1.6. Método de linealización de Lyapunov

Considerando la definición de estabilidad antes dada, es posible determinar si una solución de equilibrio de un sistema no lineal, es localmente estable, simplemente examinando la estabilidad de la aproximación lineal a la dinámica alrededor de los puntos de equilibrio. Este enfoque es conocido como método de linealización (o método indirecto) de Lyapunov (Slotine et al., 1991; Khalil, 2002).

La idea detrás de este enfoque es intuitiva: dentro de una región del espacio de fase cerca del punto de equilibrio, la diferencia entre el comportamiento del sistema no lineal y el de su dinámica linealizada es pequeña, puesto que el error en la aproximación lineal es pequeño para los estados cercanos al punto de equilibrio.

La linealización del sistema (4): $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$; $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$, se obtiene a partir de la expansión en series de Taylor de \vec{f} alrededor del punto de equilibrio $\vec{x} = \vec{a}$. De esta forma, siempre que $\vec{f}(\vec{x})$ sea continuamente diferenciable se tiene que (Slotine et al., 1991; Vidyasagar, 1993):

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \vec{f}(\vec{a}) + A\vec{x}' + \vec{g}, \quad (5)$$

Donde la perturbación está en función de la solución de equilibrio \vec{a} y cualquier otra solución \vec{x} , entonces: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$; ya que \vec{a} es una solución de equilibrio, $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$; A es la matriz Jacobiana que resulta de la expansión, valuada en $\vec{x} = \vec{a}$ (Slotine et al., 1991; Vidyasagar, 1993):

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right]_{\vec{x}=\vec{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}=\vec{a}} \quad (6)$$

Y $\vec{g} = \mathcal{O}(|\vec{x}'|^2)$, corresponde a la suma de términos de mayor orden ⁹, y que por el teorema de Taylor satisface

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \frac{|\vec{g}(\vec{x})|_2}{|\vec{x}|_2} = 0 \quad (7), \quad \forall t \geq 0.$$

Así, al despreciar los términos de mayor orden, se obtiene la linealización de (5) alrededor de $\vec{x} = \vec{a}$:

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}'. \quad (8)$$

El cambio de variable usado al introducir la perturbación, corresponde a una traslación del punto de equilibrio \vec{a} , al origen, por lo que ahora el punto de equilibrio o solución cuya estabilidad interesa estudiar es: $\vec{x}' = \vec{0}$.

Por otra parte, como la matriz \mathbf{A} se compone por escalares, el sistema lineal homogéneo de **EDOs** resultante, tiene coeficientes constantes, por lo que su solución puede calcularse de forma explícita como (Edwards & Penney, 2009; Charru 2011):

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}' \implies \vec{x}'(t) = (e^{st})\vec{x}'(t_0) \quad (9)$$

Así, bajo las consideraciones mencionadas, el problema de la estabilidad de la aproximación lineal obtenida, se reduce al problema algebraico de encontrar los valores propios s de \mathbf{A} (Charru, 2011):

$$s\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}' \quad (10)$$

De esta manera, la estabilidad se determina a partir de dichos valores propios de \mathbf{A} , de acuerdo a la siguiente proposición (Elsoltz, 1969; Slotine et al., 1991; Khalil, 2002; Drazin, 2002; Charru, 2011):

⁹ Términos no lineales.

¹⁰ Donde $|\cdot|_2$ denota la norma euclidiana.

Teorema 1. (Método de linealización de Lyapunov). Para el sistema no lineal (4), supongamos que \vec{f} es continuamente diferenciable y definamos A como en (6). Entonces:

- $\vec{x}' = \vec{0}$ es una solución de equilibrio asintóticamente estable de (4), si todos los valores propios de A tienen partes reales negativas.
- $\vec{x}' = \vec{0}$ es una solución de equilibrio inestable de (4), si A tiene al menos un valor propio con parte real positiva.
- $\vec{x}' = \vec{0}$ es una solución de equilibrio **marginalmente** estable, si todos los valores propios de A , están en el semiplano complejo izquierdo, pero al menos uno de ellos está sobre el eje imaginario (su parte real es igual a cero).

Observación 1:

1. El enfoque de linealización tiene que ver con la estabilidad local (más que con estabilidad global).

2. Si la dinámica linealizada es **marginalmente** estable, entonces el equilibrio del sistema no lineal original podría ser estable o inestable. No es posible establecer conclusiones acerca de la estabilidad del sistema no lineal a partir de la linealización, **sólo** en este caso, ya que la estabilidad local del equilibrio podría ser determinada por los términos de orden superior que son despreciados en la aproximación lineal.

Así, en este caso, también es recomendable tomar en cuenta la multiplicidad de los valores característicos [para más detalles a este respecto, véase Elsgoltz (1969)].

1.7. Objetivos de la tesis

Tomando como referencia lo abordado en las seis secciones anteriores, es posible afirmar que el objetivo de este trabajo, corresponde a la aplicación sistemática y detallada de los conceptos de la teoría de la estabilidad para ecuaciones diferenciales, al estudio de la estabilidad de un flujo básico para un modelo hidrodinámico (la ecuación de vorticidad barotrópica sobre la esfera), en otras palabras, se aplica un método de estudio para perturbaciones infinitesimales de una solución básica de la ecuación de vorticidad barotrópica en coordenadas esféricas.

Objetivos generales:

Mostrar las bases de una metodología que se aplica al estudio de la estabilidad de una solución básica, para el modelo más general de un sistema hidrodinámico: las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de conservación de masa.

Mostrar las consideraciones bajo las que se aplica esta metodología, así como algunas de las complicaciones que pueden presentarse en la práctica.

Mostrar los criterios de estabilidad más usuales para flujos planos paralelos, al usar dicha metodología.

Objetivos particulares:

Mostrar cómo obtener del modelo de vorticidad barotrópica en la geometría esférica, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes; así como sus propiedades más importantes.

Mostrar cómo se obtienen ciertas funciones especiales (armónicos esféricos), las cuales permiten construir las soluciones analíticas del modelo de vorticidad barotrópica sobre una esfera en rotación; así como algunas de sus propiedades más importantes.

Mostrar la forma de aplicar la metodología, al estudio de la estabilidad de flujos atmosféricos ideales sobre una esfera en rotación, tanto zonales como bidimensionales, cuyas formas analíticas corresponden en esencia, a un polinomio de Legendre (**PL**) y una onda de Rossby-Haurwitz (**onda R-H**) estacionaria.

Mostrar los criterios de estabilidad aplicables a dichos flujos atmosféricos; así como el uso y la importancia de dichos criterios en experimentos numéricos.

2. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA

En el capítulo anterior, se introdujo de manera no formal, la teoría de la estabilidad desde el punto de vista matemático de los sistemas de **EDOs**.

No obstante, el propósito de la presente tesis es estudiar las propiedades de la estabilidad de ondas armónicas, en la forma de polinomios de Legendre (**PLs**) y una onda de Rossby-Haurwitz (**onda R-H**) estacionaria, ya que son de gran interés para un estudio profundo de la variabilidad de las bajas frecuencias en la atmósfera (Simmons et al., 1983; Crommelin, 2003), así como para desarrollar métodos de asimilación de datos iniciales (Shutyaev, 1997, 2002).

Ambos flujos representan una de las características importantes del campo meteorológico. Además, tanto un **PL** como una **onda R-H**, son soluciones analíticas de la **ecuación de vorticidad barotrópica (EVB)**, obtenida en el capítulo 3), y describen la dinámica de un flujo ideal sobre una esfera en rotación, así como la dinámica barotrópica de procesos atmosféricos a gran escala en la atmósfera.

De esta forma, en el presente capítulo se abordan algunos conceptos (flujo básico, perturbaciones, estabilidad) y métodos fundamentales (linealización, modos normales) de la teoría de la estabilidad hidrodinámica (especialmente la teoría lineal), con el objeto de aplicarlos a las soluciones (**PLs** y una **onda R-H**) de la **EVB**.

2.1. Flujo básico, perturbaciones y el problema de linealización

En general, el tratamiento matemático del problema en estabilidad hidrodinámica, es muy semejante en su primera etapa, a lo presentado en las secciones **1.5.** y **1.6.**, y posteriormente, hay que hacer uso de diversos conceptos y herramientas para seguir con el análisis, de acuerdo a como se muestra en las secciones siguientes.

Primero, se elige un **flujo básico** o **inicial** de interés (el cual en general, es preferible que represente un estado estacionario del sistema), es decir, una solución de las ecuaciones de movimiento (de acuerdo a lo discutido en la sección **1.5.**) cuya estabilidad desea estudiarse¹¹.

¹¹ Un flujo que está en equilibrio no necesariamente debe ser independiente del tiempo, pero el sistema ya no es acelerado, debido al equilibrio de todas las fuerzas. Además, dicha solución o flujo, puede conocerse explícitamente en términos analíticos o bien, sólo numéricamente.

En la actualidad, se acepta universalmente que los campos de velocidad y presión en cualquier flujo de fluido, ya sea laminar o turbulento, son soluciones de las ecuaciones de la mecánica de fluidos (ecuaciones de Navier-Stokes) que satisfacen condiciones iniciales y de contorno dadas (Yaglom, 2012).

Considerando entonces que para cada instante t y cada punto $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en un dominio \mathcal{V} (conjunto abierto y conexo) con frontera $\partial\mathcal{V}$, los campos de velocidad $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u_1, u_2, u_3, t)$ y presión $p(\vec{x}, t)$, son una solución de la ecuación vectorial adimensional¹² de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible, la ecuación de conservación de masa, así como sus condiciones, inicial y de frontera, respectivamente son ¹³:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + R^{-1} \Delta \vec{u} + \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (12)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}) \quad (13)$$

$$\vec{u}|_{\partial\mathcal{V}} = \vec{h} \quad (14)$$

Análogamente, si $\vec{U}(\vec{x}, t)$ y $P(\vec{x}, t)$ definen un **flujo básico** para el mismo problema:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla P + R^{-1} \Delta \vec{U} + \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (16)$$

$$\vec{U}(\vec{x}, 0) = \vec{U}_0(\vec{x}) \quad (17)$$

$$\vec{U}|_{\partial\mathcal{V}} = \vec{h} \quad (18)$$

Y suponiendo que en el momento inicial dicho flujo básico está sometido a una perturbación arbitraria \vec{u}'_0, p'_0 . Lo anterior provoca una perturbación \vec{u}', p' para todo instante $t > 0$, de tal forma que para las mismas fuerzas de cuerpo \vec{F} y

¹² El único parámetro físico que aparece es el número de Reynolds $R = \frac{UL}{\nu}$, donde ν es el coeficiente de viscosidad del fluido. Usualmente, en cada problema, se escogen "escalas características": temporal, $t_c = \frac{L}{U}$; espacial $\vec{x}_c = \frac{\vec{x}}{L}$; de velocidad $\vec{u}_c = \frac{\vec{u}}{U}$; así como de presión $p_c = \frac{p}{\rho U^2}$. Posteriormente, se omiten los subíndices "c".

¹³ El problema definido por las ecuaciones (11)-(14), puede modificarse si se admiten variaciones en las condiciones tanto iniciales como de frontera, así como en las fuerzas de cuerpo $\vec{F}(\vec{x}, t)$, por lo que supondremos que sólo pueden variar las condiciones iniciales, lo cual reduce el problema de estabilidad al estudio de perturbaciones que actúan sólo en el momento inicial (aunque en realidad lo hagan todo el tiempo).

condiciones de frontera \vec{h} , se tiene el flujo perturbado \vec{u}, p , el cual corresponde a la condición inicial $\vec{u}_0 = \vec{U}_0 + \vec{u}'_0$, donde $\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}'$; $p = P + p'$.

Ahora, restando las ecuaciones (15)-(18) de (11)- (14), se encuentra que \vec{u}' y p' son una solución del problema de valor inicial:

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{u}' + \vec{u}' \cdot \nabla \vec{U} + \vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}' = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \vec{u}' \quad (19)$$

$$\vec{u}'(\vec{x}, 0) = \vec{u}'_0(\vec{x}) \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (21)$$

$$\vec{u}'_0|_{\partial V} = \vec{0} \quad (22)$$

Con lo que la solución \vec{u}', p' del problema no lineal (19)-(22), corresponde a la solución nula de dicho sistema. Considerando ahora que la perturbación \vec{u}', p' es infinitesimal, el problema en cuestión se linealiza despreciando todos los productos y potencias (mayores que la primera) de las perturbaciones, conservando sólo los términos que son lineales, obteniendo entonces el problema lineal:

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{u}' + \vec{u}' \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \vec{u}' \quad (23)$$

$$\vec{u}'(\vec{x}, 0) = \vec{u}'_0(\vec{x}) \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (25)$$

$$\vec{u}'_0|_{\partial V} = \vec{0} \quad (26)$$

La teoría deducida sobre la base de tales ecuaciones linealizadas, se denomina **teoría lineal de la estabilidad hidrodinámica** (Chandrasekhar, 1961).

2.2. Estabilidad lineal respecto a perturbaciones infinitesimales: Método de Modos Normales (MMN)

Debido a la naturaleza lineal que presenta el último problema obtenido en la sección anterior [(23)-(26)], y ya que el flujo básico es estacionario (\vec{U} es independiente de t , entonces el problema linealizado tiene coeficientes también independientes de t), para cada variable perturbada $\varphi'(\vec{x}, t)$, es posible separar las variables espaciales de la temporal como $\varphi'(\vec{x}, t) = G(t)\hat{\varphi}(\vec{x})$.

Además, se puede suponer que el comportamiento temporal de las perturbaciones tiene una forma particular (comportamiento exponencial): $G(t) = e^{-\omega t}$, es decir que, la solución general del problema de valor inicial (23)-(26), es una superposición lineal de modos, cada uno de la forma:

$$\bar{\mathbf{u}}'(\vec{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{u}}'_0(\vec{\mathbf{x}})(e^{-\omega t}) \quad (27)$$

$$p'(\vec{\mathbf{x}}, t) = p'_0(\vec{\mathbf{x}})(e^{-\omega t}) \quad (28)$$

llamados modos normales, en los que el número complejo ω ¹⁴ es un valor propio y $\bar{\mathbf{u}}'_0$ y $p'_0(\vec{\mathbf{x}})$ son una función propia del problema obtenido de la siguiente forma:

Derivando parcialmente (27) respecto a t se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}'}{\partial t} = -\omega \bar{\mathbf{u}}'_0(\vec{\mathbf{x}})(e^{-\omega t}) \quad (29)$$

Sustituyendo (27), (28) y (29) en (23) y (25) y simplificando los términos y la notación se llega a:

$$-\omega \bar{\mathbf{u}}'_0(\vec{\mathbf{x}})(e^{-\omega t}) = \{-\vec{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}'_0 - \bar{\mathbf{u}}'_0 \cdot \nabla \vec{\mathbf{U}} - \nabla p'_0 + R^{-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}'_0\} e^{-\omega t};$$

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}'_0) e^{-\omega t} = 0; e^{-\omega t} \neq 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}'_0 = 0$$

Así, los valores admisibles de la frecuencia característica ω y las correspondientes amplitudes $\bar{\mathbf{u}}'_0(\vec{\mathbf{x}})$, $p'_0(\vec{\mathbf{x}})$, se determinan a partir del problema de valor propio (o problema espectral) para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales (Yaglom, 2012):

$$-\omega \bar{\mathbf{u}}'_0(\vec{\mathbf{x}}) = -\vec{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}'_0 - \bar{\mathbf{u}}'_0 \cdot \nabla \vec{\mathbf{U}} - \nabla p'_0 + R^{-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}'_0 \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{u}}'_0|_{\partial \nu} = \vec{\mathbf{0}} \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}'_0 = \mathbf{0} \quad (32)$$

¹⁴ Se debe notar que al utilizar funciones complejas para describir las características de un flujo real, éstas son representadas por las partes reales de las funciones complejas consideradas. Esto es permisible porque los valores propios de un sistema real, se presentan en pares complejos conjugados, y las partes real e imaginaria de la solución de un sistema real linealizado, satisfacen el sistema por separado:

$$\exp[Re(\omega)t + iIm(\omega)t] = \exp[Re(\omega)t] \times \{\cos[Im(\omega)t] + i\sin[Im(\omega)t]\}.$$

De esta forma, se llega a un problema análogo al de la ecuación (10), entonces, se dice que (Georgescu, 1985):

Definición 3. Un flujo \vec{U} se denomina asintóticamente estable en el sentido lineal, si el problema (30)-(32) no tiene algún valor propio con parte real negativa. Se llama inestable asintóticamente si existe al menos un valor propio con parte real negativa, y es neutral o marginalmente estable si existe al menos un valor propio con parte real igual a cero, teniendo los valores propios restantes partes reales positivas o nulas.

Si \vec{U} , P son independientes de una o más coordenadas espaciales, por ejemplo, cuando dicho flujo básico es invariante bajo traslación o rotación, el número de variables independientes en el sistema puede ser reducido, al suponer que la dependencia de las amplitudes $\vec{u}'_0(\vec{x})$ y $p'_0(\vec{x})$ sobre las coordenadas correspondientes, también será exponencial, con un dado “número de onda” ¹⁵.

Por lo tanto, si \vec{U} y P son independientes de x_1 y t (el flujo básico depende esencialmente de las coordenadas x_2 y x_3), podemos considerar modos normales de la forma:

$$\vec{u}'(\vec{x}, t) = \vec{u}'_0(x_2, x_3)(e^{ik_1x_1 - \omega t}) \quad (33)$$

$$p'(\vec{x}, t) = p'_0(x_2, x_3)(e^{ik_1x_1 - \omega t}) \quad (34)$$

donde k_1 es el número de onda en la dirección x_1 . O bien, si el flujo básico depende sólo de la coordenada x_3 :

$$\vec{u}'(\vec{x}, t) = \vec{u}'_0(x_3)e^{i(k_1x_1 + k_2x_2) - \omega t} \quad (35)$$

$$p'(\vec{x}, t) = p'_0(x_3)e^{i(k_1x_1 + k_2x_2) - \omega t} \quad (36)$$

En (35) y (36), la frecuencia característica $\omega = \omega(k_1, k_2)$ y las amplitudes $\vec{u}'_0(x_3)$ y $p'_0(x_3)$, se determinan a partir del problema de valor propio para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual incluye los parámetros k_1 y k_2 (Drazin, 2002; Yaglom, 2012).

Con esto, se obtiene un problema matemático más fácil de resolver, ya que se busca encontrar las características de estabilidad del flujo básico. Es por esta razón matemática, más que alguna razón física, que los flujos estacionarios

¹⁵ Es decir, la escala espacial de la perturbación se prescribe en las direcciones de los ejes de coordenadas, a lo largo de los cuales el flujo no perturbado es homogéneo; además, la separación de las variables espaciales puede justificarse por el uso de la transformada de Fourier, o Fourier generalizada (Drazin, 2002; Yaglom, 2012).

simétricos simples son estudiados con tanta frecuencia en tratados sobre estabilidad hidrodinámica (Drazin, 2002).

Casi todas las perturbaciones de un flujo básico inestable, estacionario o periódico en el tiempo observadas, en la práctica son no lineales. Sin embargo, el criterio para la estabilidad de un flujo básico dado por la teoría lineal de los modos normales, es válida en la práctica (Drazin, 2002).

Al estudiar el problema de la estabilidad lineal para un fluido, aplicando el enfoque aportado por la teoría lineal de la estabilidad hidrodinámica [ecuaciones (23)-(26)], el siguiente paso sería resolver el problema de valor inicial implicado, sin embargo, dicha resolución puede dificultarse rápidamente, incluso para flujos básicos cuya forma es muy simple.

Una de las prioridades en un estudio de estabilidad de flujos no viscosos, es tener criterios generales para decidir si un flujo básico particular es estable o no, por lo que es deseable evadir la resolución detallada de dicho problema de valor inicial, lo cual puede realizarse parcialmente al analizar las ecuaciones (23) y (25) mediante el **MMN** (Drazin & Reid, 2004).

Ambos enfoques son equivalentes si puede demostrarse que los modos normales son completos y que una perturbación inicial arbitraria puede expandirse en términos de éstos últimos (Drazin & Reid, 2004).

2.3. Flujos paralelos en un fluido homogéneo sobre un plano y el MMN

Aunque el problema de estabilidad puede ser establecido para cualquier configuración de flujo, los estudios sobre la estabilidad hidrodinámica comprenden principalmente las siguientes clases (Criminale et al., 2003; Georgescu, 1985): flujos planos paralelos en canales, flujo plano de Couette y el flujo de Hagen-Poiseuille (en los que los flujos están confinados o limitados por dos fronteras sólidas), flujo de Couette entre cilindros giratorios, flujos casi paralelos ¹⁶.

En dichas clases de flujos, sólo existe una componente de la velocidad media y es función de la coordenada que define las ubicaciones de las fronteras. Cabe entonces notar que los flujos planos paralelos, son por definición aquellos cuyas características no dependen de una de las coordenadas espaciales, por ejemplo x_3 , lo que implica que la componente de la velocidad en dicha dirección es nula.

¹⁶ Una breve descripción de éstos puede encontrarse en el apéndice 8.1.

El objetivo de esta sección, consiste en mostrar el uso del **MMN**, posteriormente se obtiene la ecuación que gobierna la estabilidad de flujos planos paralelos, para un fluido viscoso homogéneo. Por conveniencia, ahora cada punto $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en el dominio \mathcal{V} con frontera $\partial\mathcal{V}$, se denotará como $\vec{x} = (x, y, z)$, mientras que para el campo de velocidad se usará $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u, v, w, t)$, en lugar de $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u_1, u_2, u_3, t)$.

Suponiendo entonces, un flujo básico que satisface las ecuaciones (15)-(18), en el que la dirección del flujo primario coincide con el eje x y que varía en la dirección z (es función de una $U(z)$ arbitraria; ver figura 4); y en el que la frontera $\partial\mathcal{V}$ (llamada en este caso, canal) corresponde a los planos paralelos $z = z_1$ y $z = z_2$; además, se cumplen condiciones de frontera que indican que el flujo no penetra a través de las paredes sólidas en z_1 y z_2 . Entonces, dicho flujo es tal que (Drazin, 2002):

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = U(z)\hat{i}; P(\vec{x}, t) = P = cte \quad (\nabla P = 0) \quad (37)$$

$$z_1 \leq z \leq z_2 \quad (38)$$

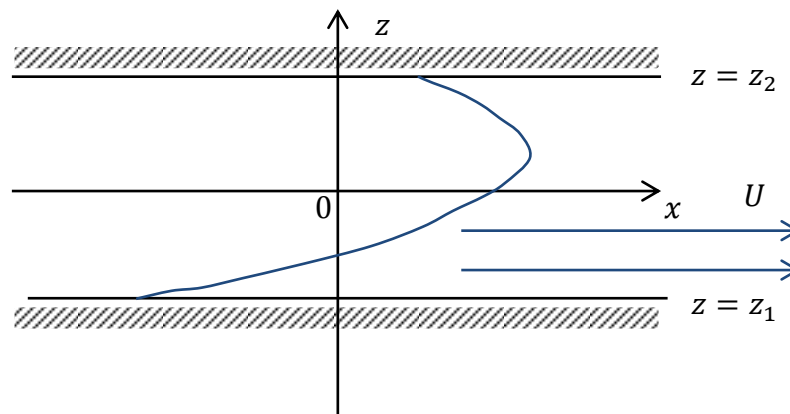


Figura 4 [Adaptada de Drazin, 2002; elaborada con Word 2010]. Configuración del flujo básico.

Por lo que para estudiar la estabilidad de (37)-(38), se establece que el siguiente flujo total tiene la forma del flujo básico más una perturbación:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = U(z)\hat{i} + \vec{u}'(\vec{x}, t); p(\vec{x}, t) = P + p'(\vec{x}, t) \quad (39)$$

$$\vec{u}'(\vec{x}, t) = u'\hat{i} + v'\hat{j} + w'\hat{k}$$

Sustituyendo entonces, (37) en las ecuaciones generales ya linealizadas (23) y (25), se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + [U(z) \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x} & \frac{\partial v'}{\partial x} & \frac{\partial w'}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial y} & \frac{\partial v'}{\partial y} & \frac{\partial w'}{\partial y} \\ \frac{\partial u'}{\partial z} & \frac{\partial v'}{\partial z} & \frac{\partial w'}{\partial z} \end{bmatrix} + [u' \quad v' \quad w'] \begin{bmatrix} \frac{\partial U(z)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial U(z)}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial U(z)}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \vec{u}'$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} \right] \vec{u}' + w' \frac{dU(z)}{dz} \hat{i} = -\nabla p' + R^{-1} \Delta \vec{u}' \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (41)$$

$$w'(\vec{x}, t) = 0 \text{ en } z = z_1 \text{ y } z = z_2 \quad (42)$$

Ahora, dado que los coeficientes en (40) y (41) dependen sólo de z , admiten las siguientes soluciones con forma de modos normales que dependen exponencialmente de x , y y t (Drazin, 2002; Kundu & Cohen, 2008):

$$\vec{u}'(\vec{x}, t) = \vec{u}'_0(z) e^{i(k_1 x + k_2 y - c k_1 t)} \quad (43)$$

$$p'(\vec{x}, t) = p'_0(z) e^{i(k_1 x + k_2 y - c k_1 t)} \quad (44)$$

Donde $\omega = c k_1$; dichas soluciones deben permanecer acotadas conforme $x, y \rightarrow \pm\infty$, lo que implica que los números de onda k_1 y k_2 deben ser reales y sin perder generalidad pueden considerarse sólo valores positivos, además, la rapidez de onda $c = c_r + i c_i$ puede ser compleja.

Así, los modos normales (43) y (44), representan ondas que se mueven oblicuamente al flujo básico, cuyo número de onda tiene magnitud $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ y cuyas amplitudes varían con el tiempo como $\exp(k_1 c_i t)$. Entonces dichas ondas viajan en la dirección $(k_1, k_2, 0)$ y tienen una rapidez de fase $k_1 c_r / (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$. Por lo tanto, dichas soluciones son estables si $c_i < 0$, inestables si $c_i > 0$ y neutralmente estables si $c_i = 0$ (Drazin, 2002; Kundu & Cohen, 2008).

Sustituyendo entonces, (43) y (44) en (40) y (41), se llega a

$$\left\{ i k_1 \vec{u}'_0(z) [U(z) - c] + w'_0(z) \frac{dU(z)}{dz} \hat{i} \right\} (e^\theta) = \left\{ - \begin{bmatrix} i k_1 p'_0(z) \\ i k_2 p'_0(z) \\ \frac{dp'_0(z)}{dz} \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d^2 u'_0(z)}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2) u'_0(z) \\ \frac{d^2 v'_0(z)}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2) v'_0(z) \\ \frac{d^2 w'_0(z)}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2) w'_0(z) \end{bmatrix} \right\} (e^\theta)$$

$$\left[ik_1 u'_0(z) + ik_2 v'_0(z) + \frac{dw'_0(z)}{dz} \right] (e^\theta) = 0$$

Con $\theta = i(k_1 x + k_2 y - ck_1 t)$; simplificando la notación mediante el uso del operador $L = \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2) - iRk_1(U - c) \right\}$ y reescribiendo de forma escalar las expresiones anteriores, se obtiene el sistema de **EDOs**:

$$Lu'_0 = R w'_0 \frac{dU}{dz} + iRk_1 p'_0 \quad (45)$$

$$Lv'_0 = iRk_2 p'_0 \quad (46)$$

$$Lw'_0 = R \frac{dp'_0}{dz} \quad (47)$$

$$i(k_1 u'_0 + k_2 v'_0) + \frac{dw'_0}{dz} = 0 \quad (48)$$

Cuyas condiciones de frontera son:

$$w'_0 = 0 \text{ en } z = z_1 \text{ y } z = z_2 \quad (49)$$

Las expresiones (45)-(48) y las condiciones de frontera (49), plantean un problema de valores propios para determinar todas las funciones propias \bar{u}'_0, p'_0 correspondientes a los valores propios c , dados U, z_1, z_2, k_1, k_2 (Drazin, 2002). Además, los modos normales considerados en la obtención de dichas ecuaciones, corresponden a perturbaciones tridimensionales generales.

No obstante, el presente problema puede ser reducido a un problema de dos dimensiones equivalente. Para este propósito, a continuación se aplica la transformación usada por Squire (1933), quien demostró que a cada perturbación tridimensional inestable, le corresponde una perturbación bidimensional más inestable. Introduciendo entonces dicha transformación:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}; \quad \tilde{\omega} = (\tilde{k}/k_1)\omega; \quad \tilde{k}\tilde{u}_0 = k_1 u'_0 + k_2 v'_0 \\ \frac{\tilde{p}}{\tilde{k}} &= \frac{p'_0}{k_1}; \quad \tilde{w} = w'_0; \quad \tilde{k}\tilde{R} = k_1 R; \quad \tilde{c} = \tilde{\omega}/\tilde{k} = \omega/k_1 = c \end{aligned} \quad (50)$$

Ahora, se multiplica (45) y (46) por k_1 y k_2 respectivamente, y posteriormente se suman ambos resultados; obteniendo

$$L\{k_1 u'_0 + k_2 v'_0\} = k_1 R w'_0 \frac{dU}{dz} + iR[k_1^2 + k_2^2]p'_0 \quad (51)$$

Después, utilizando la transformación (50) en (47), (48) y (51) se llega a

$$\tilde{L}\{\tilde{u}_0\} = \tilde{R} \frac{dU}{dz} \tilde{w} + i\tilde{k}\tilde{R}\tilde{p} \quad (52)$$

$$\tilde{L}\tilde{w}_0 = \tilde{R} \frac{d\tilde{p}}{dz} \quad (53)$$

$$i \tilde{k}\tilde{u}_0 + \frac{d\tilde{w}_0}{dz} = 0 \quad (54)$$

Con las condiciones de frontera

$$\tilde{u}_0 = \tilde{w}_0 = 0 \text{ en } z = z_1 \text{ y } z = z_2 \quad (55)$$

Y donde la transformación aplicada también modificó a L en el operador $\tilde{L} = \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (\tilde{k})^2 - i\tilde{k}\tilde{R}(U - c) \right\}$, las ecuaciones obtenidas tienen la misma estructura matemática que (45)-(49), con la diferencia de que $k_2 = v'_0 = 0$.

La transformada de Squire (50) muestra que el problema bidimensional equivalente (52)-(55), está asociado con un número de Reynolds más bajo, ya que $\tilde{k} > k_1$. De aquí, se deduce que el número de Reynolds crítico bajo el cual la inestabilidad comienza, es más bajo para perturbaciones bidimensionales.

Entonces, puede decirse que las perturbaciones bidimensionales son más inestables, por lo que si busca determinarse el número más pequeño de Reynolds, bajo el cual la inestabilidad da inicio, debe considerarse una perturbación bidimensional.

2.4. Ecuación de Orr-Sommerfeld y criterios de estabilidad para flujos planos paralelos

Como se mostró en la sección anterior, a cada problema tridimensional le corresponde un problema bidimensional equivalente, por lo que ahora es conveniente considerar las expresiones (45)-(48) y (49) cuando $k_2 = v'_0 = 0$; de esta forma, se introduce una función de corriente para el campo de perturbaciones mediante las siguientes ecuaciones (Drazin, 2002; Kundu & Cohen, 2008):

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial z}; \quad v' = 0; \quad w' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad (56)$$

además de considerar los modos normales con $\theta_1 = ik_1(x - ct)$ de la forma

$$\psi'(x, z, t) = \phi(z)e^{\theta_1}. \quad (57)$$

De acuerdo a (56) se tienen

$$u' = \frac{d\phi(z)}{dz} e^{\theta_1}; \quad w' = -ik_1\phi(z)e^{\theta_1}; \quad p'(\vec{x}, t) = p'_0(z)e^{\theta_1} \quad (58)$$

Por lo que usando las últimas relaciones en (40)-(42), se llega a una sola expresión, la cual gobierna la estabilidad de flujos paralelos viscosos, por ejemplo, en un canal recto o en una capa límite, llamada ecuación de Orr-Sommerfeld (Kundu & Cohen, 2008):

$$(ik_1 R)^{-1} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - k_1^2 \right\}^2 \phi(z) = [U(z) - c] \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - k_1^2 \right\} \phi(z) - \frac{d^2 U(z)}{dz^2} \phi(z). \quad (59)$$

Dicha ecuación tiene 4 condiciones de frontera:

$$k_1 \phi(z) = \frac{d\phi(z)}{dz} = 0 \text{ en } z = z_1 \text{ y } z = z_2. \quad (60)$$

La ecuación (59) es esencialmente una ecuación de vorticidad para la perturbación, ya que la presión ha sido eliminada; por otro lado, es difícil obtener soluciones de dicha ecuación, aún cuando se estudien flujos muy simples. En la presente tesis es de interés el estudio de un fluido ideal (no viscoso, es decir, que $R^{-1} = 0$), entonces, simplificando el sistema (59)-(60), así como la notación:

$$[U - c](\phi_{zz} - k_1^2 \phi) - U_{zz} \phi = 0 \quad (61)$$

Con condiciones de frontera:

$$\phi(z) = 0 \text{ en } z = z_1 \text{ y } z = z_2. \quad (62)$$

Bajo estas consideraciones, se llega a la ecuación de Rayleigh, la cual gobierna la estabilidad de flujos paralelos no viscosos. Además, aunque las ecuaciones (59) y (61) se obtuvieron suponiendo que el flujo básico es estrictamente paralelo, en el análisis de ciertas propiedades de éstas, es conveniente suponer de manera más general que $U(z)$ es una función analítica de la variable compleja z (Drazin, 2002; Kundu & Cohen, 2008).

Así, el sistema (61)-(62), constituye un problema el valor propio $c(k)$, siendo ϕ su función propia. Como la ecuación (61) no incluye la unidad imaginaria, si se le aplica la operación complejo conjugado, puede mostrarse que si $\{c, \phi\}$ es una solución, entonces $\{c^*, \phi^*\}$, también es otra solución. En otras palabras, para cada modo que crece ($c_i > 0$) existe un modo correspondiente que decrece ($c_i < 0$). Por lo tanto, soluciones estables sólo pueden tener un c real y la existencia de un valor propio con ($c_i \neq 0$) garantiza la inestabilidad (Drazin, 2002; Kundu & Cohen, 2008).

Cabe notar que, a diferencia del caso de un fluido ideal, el término viscoso en la ecuación de Orr-Sommerfeld (59) involucra la unidad imaginaria, por lo que la

conclusión antes mencionada ya no es válida. A continuación se abordan los criterios de estabilidad para un flujo plano paralelo.

Teorema 2. (Criterio del punto de inflexión de Rayleigh). Una condición necesaria (pero no suficiente) para que exista inestabilidad en un flujo paralelo no viscoso con $c_i > 0$, es que el flujo básico $U(z)$, presente un punto de inflexión, es decir que $U_{zz} = 0$ para algún valor de z en el intervalo $[z_1, z_2]$ (Drazin, 2002; Vallis, 2006; Kundu & Cohen, 2008).

Esta condición no puede usarse para mostrar que cualquier flujo particular es inestable, pero puede ser utilizada para mostrar fácilmente que algunos flujos son estables. Una forma más fuerte de dicha condición fue obtenida posteriormente por Fjörtoft (1950):

Teorema 3. (Criterio de Fjörtoft). Una condición necesaria (pero no suficiente) para que exista inestabilidad en un flujo paralelo no viscoso, es que en algún lugar en el campo del flujo, se cumpla que $U_{zz}[U - U_I] < 0$, donde z_I es un punto de inflexión (en el que $U_{zz}(z_I) = 0$) y $U_I = U(z_I)$ (Drazin, 2002; Vallis, 2006; Kundu & Cohen, 2008). Las implicaciones de las condiciones de Rayleigh y de Fjörtoft se ilustran en la figura 5.

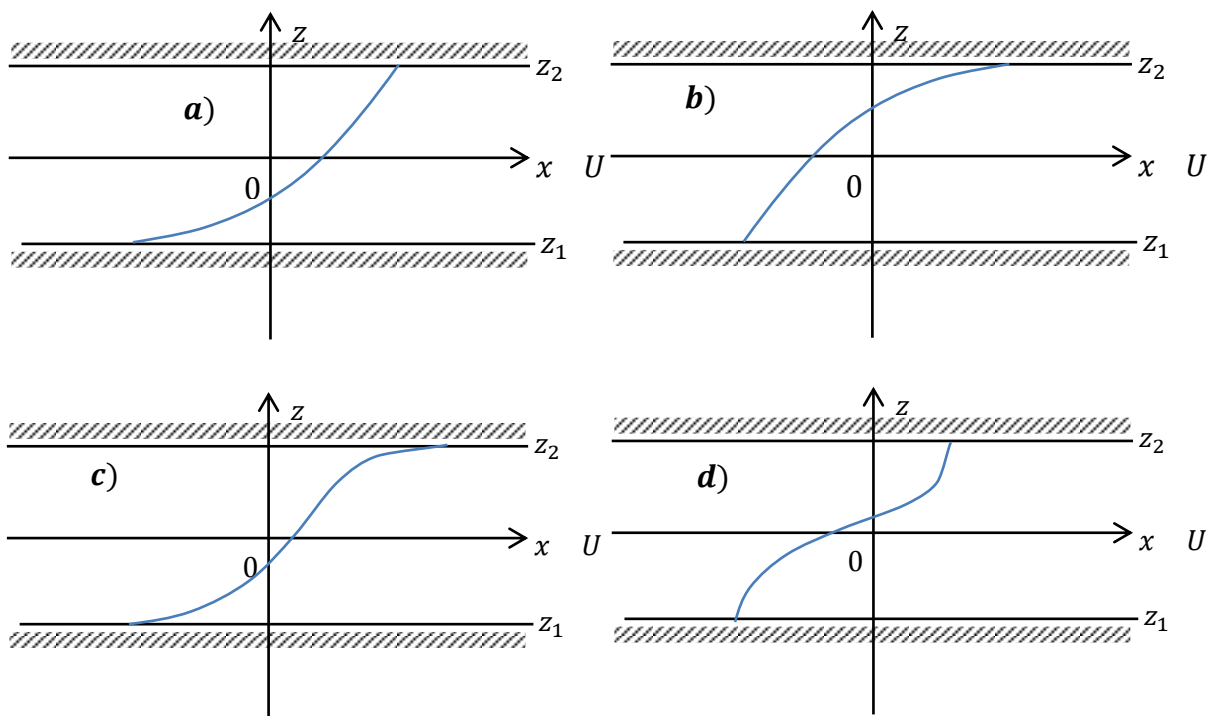


Figura 5 [Adaptada de Drazin, 2002; Drazin & Reid, 2004; elaborada con Word 2010]. Configuraciones de algunos flujos básicos gobernadas por las condiciones necesarias de inestabilidad de Rayleigh-Fjörtoft: a) y b) Estables, ya que $U_{zz} < 0$ en dondequiera. c) Estable, ya que $U_{zz}(z_I) = 0$, aunque $U_{zz}[U - U_I] \geq 0$. d) Posiblemente inestable, ya que $U_{zz}(z_I) = 0$ y $U_{zz}[U - U_I] \leq 0$.

3. ECUACIÓN DE VORTICIDAD BAROTRÓPICA NO LINEAL

En principio, las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes son suficientes para resolver cualquier problema particular en mecánica de fluidos, toda la información requerida está contenida en la masa, el momento, y las ecuaciones termodinámicas. Sin embargo, se sabe bien que dichas ecuaciones pueden resolverse exactamente sólo para sistemas reales de interés muy particular.

Por esta razón, se deben buscar formas de resolver dichas ecuaciones de tal manera que el modelo adoptado represente lo más fielmente posible al sistema físico de interés, sin complicar su resolución y ahorrando recursos de cómputo.

En el estudio de la atmósfera y el océano especialmente, existe particular interés en la rotación de los fluidos, ya que cada elemento de éstos, se encuentra girando con el planeta. Se puede desarrollar un conjunto de modelos matemáticos que describen la dinámica de un fluido, los cuales difieren entre sí por el nivel de complejidad, entre ellos, la ecuación de vorticidad barotrópica (**EVB**) ocupa un lugar especial.

Dicho modelo es uno de los más simples que describen el movimiento de un vórtice bidimensional en un fluido incompresible. Al mismo tiempo, la **EVB** resulta ser aún bastante complicada, ya que corresponde a una ecuación diferencial parcial no lineal, la cual en su forma más general, toma en cuenta los procesos de advección, rotación del fluido, difusión turbulenta y el forzamiento externo y, por lo tanto, sus soluciones pueden mostrar un comportamiento muy complejo, hasta caótico.

En la siguiente sección se obtiene dicho modelo, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes.

3.1. Obtención de la EVB

Retomando la ecuación adimensional de momento de Navier-Stokes para un flujo [ver ecuación (11)], se tiene lo siguiente:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + R^{-1}\Delta\vec{u} + \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (63)$$

donde $\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\vec{u}$ es la derivada material, $\vec{F}(\vec{x}, t)$ es la fuerza externa (por ejemplo, la de gravedad, $\vec{F} = \vec{g}$) que actúa sobre el flujo.

Para simplificar dicho modelo, a veces se considera el estudio de un fluido no viscoso, en el que $R^{-1} = 0$, así, se obtiene la ecuación de Euler:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \vec{g} \quad (64)$$

De acuerdo a Skiba (2009), la **EVB** se obtiene aplicando el operador rotacional a la ecuación de Euler bidimensional, tomando esto en consideración, ahora se aplica el operador rotacional (rot) a la ecuación (64):

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] + \nabla \times [\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}] + \nabla \times [\nabla p] = \nabla \times \vec{g} \quad (65)$$

(A) (B) (C) (D)

Dado que el rotacional de un gradiente es el vector cero, se tiene para el término (C) que: $\nabla \times [\nabla p] = 0$.

Para el término (D), ya que la fuerza gravitacional es potencial $\vec{g} = \nabla G$ (Landau et al., 1987), su rotacional es cero, $\nabla \times \vec{g} = 0$.

En (A), puede intercambiarse el orden de los operadores (Landau et al., 1987):

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{u}] = \frac{\partial}{\partial t} \vec{w}, \text{ donde } \vec{w} = \nabla \times \vec{u} \text{ es la vorticidad en el fluido.}$$

Entonces,

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{u} = \hat{i} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \hat{j} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (66)$$

Si ahora se considera que el flujo es bidimensional (plano), es decir, que el vector velocidad: $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + 0\hat{k} = u\hat{i} + v\hat{j}$, se obtiene:

$$\nabla \times \vec{u} = \hat{i} \left[\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \hat{j} \left[\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

es decir,

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{u} = \hat{k} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (67)$$

$$\text{Así, el término (A) queda: } \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \hat{k} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\}. \quad (68)$$

Para modificar el término (\mathbf{B}) , $\nabla \times [\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]$, tomamos en cuenta la identidad (Landau et al., 1987; Skiba, 2009): $\frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 = \vec{u} \times [\nabla \times \vec{u}] + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$. Entonces, se tiene

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left[\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right] - \vec{u} \times [\nabla \times \vec{u}] \quad (69)$$

Por lo que sustituyendo (69) y $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ en (\mathbf{B}) : $\nabla \times \left\{ \frac{1}{2} \nabla [|\vec{u}|^2] - \vec{u} \times \vec{w} \right\}$ se obtienen:

$$\frac{1}{2} \nabla \times \{ \nabla [|\vec{u}|^2] \} = \text{rot}(\text{grad}(\cdot)) = 0 \quad \text{y} \quad -\nabla \times \{ \vec{u} \times \vec{w} \}.$$

Usando la identidad $\nabla \times [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot \nabla \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \vec{b} + \vec{a} \nabla \cdot \vec{b} - \vec{b} \nabla \cdot \vec{a}$ (Vallis, 2006) y conmutando los vectores \vec{u} y \vec{w} , se obtiene:

$$\nabla \times [\vec{w} \times \vec{u}] = \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} - \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{w} \nabla \cdot \vec{u} - \vec{u} \nabla \cdot \vec{w} \quad (70)$$

La expresión (70) se simplifica, ya que \vec{w} es perpendicular a la superficie en la que \vec{u} varía y, por tanto, $\vec{w} \cdot \nabla \vec{u} = 0$. Además, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ si se trata de un flujo incompresible, y por último, de identidades vectoriales, se sabe que $\nabla \cdot \vec{w} = \text{div}(\vec{w}) = 0$. Así, se llega a

$$\nabla \times [\vec{w} \times \vec{u}] = \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} \Rightarrow \nabla \times [\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}] = \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} \quad (71)$$

Sustituyendo entonces (68) y (71) en lugar de (\mathbf{A}) y (\mathbf{B}) en (65), se obtiene la ecuación bidimensional de vorticidad, para un fluido ideal (no viscoso):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} = 0 \quad . \quad (72)$$

Sin el término de rotación en (63), \vec{w} en la ecuación (66) es la vorticidad local del flujo (vorticidad relativa) \vec{w}_r . Al tomar en cuenta la rotación total en el fluido, \vec{w} es la vorticidad absoluta que ya consiste de dos partes: $\vec{w} = \vec{w}_r + 2\vec{\Omega}$ donde $2\vec{\Omega}$ refiere la vorticidad terrestre o planetaria. Ambas partes de la vorticidad absoluta sólo tienen componente vertical. Por lo que, si

$$\vec{w}_r = \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{f} = f \hat{k} \quad (73)$$

donde $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ es la vorticidad relativa y $f = 2 \Omega \sin \phi$ (llamado parámetro de Coriolis). Por lo tanto, (72) se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \Omega \sin \phi \right) \hat{k} \cdot \hat{k} \right] + \vec{u} \cdot \nabla \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \Omega \sin \phi \right) \hat{k} \cdot \hat{k} \right] = 0 \quad (74)$$

A partir de (74) se obtiene la ecuación no lineal

$$\frac{\partial(\zeta+f)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\zeta + f) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial(\zeta+f)}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla(\zeta + f) \quad (75)$$

la cual se denomina ecuación de vorticidad barotrópica (**EVB**). Para mayor referencia en la deducción de esta ecuación, véase Vallis (2006).

Además, en el caso de un fluido bidimensional incompresible, las componentes de la velocidad (u, v) , pueden expresarse en términos de una función de corriente ψ (Landau et al., 1987; Ferziger & Peric, 2002; Drazin & Riley, 2006; Vallis, 2006; Potter et al., 2012):

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} ; \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (76)$$

Sustituyendo dichas componentes en la vorticidad relativa ζ se obtiene

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nabla^2\psi = \Delta\psi \quad (77)$$

Y usando este nuevo resultado en (75):

$$\frac{\partial(\Delta\psi+f)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + f) = 0 \quad (78)$$

Ahora bien, el operador de advección se puede escribir como un Jacobiano (Arakawa, 1966; Krishnamurti et al., 2006), es decir:

$$\vec{u} \cdot \nabla A = u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} = J(\psi, A) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (79)$$

Entonces, trabajando con el término advectivo en (78), a partir de (79):

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + f) &= u \frac{\partial}{\partial x} [\Delta\psi + f] + v \frac{\partial}{\partial y} [\Delta\psi + f] = \\ &= \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} [\Delta\psi + f] + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} [\Delta\psi + f] \\ \vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + f) &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} [\Delta\psi + f] - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} [\Delta\psi + f] \end{aligned} \quad (80)$$

Notemos que

$$J(\psi, \Delta\psi + f) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial[\Delta\psi+f]}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial[\Delta\psi+f]}{\partial x} \quad (81)$$

Sustituyendo entonces, el término del lado izquierdo de la expresión (81) en (78), se obtiene la **EV** en términos de la función de corriente ψ y en coordenadas cartesianas ¹⁷:

$$\frac{\partial(\Delta\psi+f)}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi + f) = 0 \quad (82)$$

Para mayores detalles sobre la deducción de la ecuación (82), véase Vallis (2006). Por otra parte, como interesa estudiar dicha ecuación así como sus soluciones sobre una esfera en rotación, en la siguiente sección se abordan los conceptos necesarios para tal fin.

3.2. La Ecuación de Vorticidad Barotrópica en la Geometría esférica

Ahora se obtiene la **EV** en coordenadas esféricas, introduciendo las transformaciones geométricas correspondientes, así como el espacio geométrico de interés para estudiar dicha ecuación (la superficie de una esfera unitaria).

En coordenadas cartesianas, sea $\vec{q} = (x, y, z)$ un punto en el espacio y sea la transformación entre la geometría cartesiana y la esférica dada por (Estrada et al., 2003; Krishnamurti et al., 2006; Weir et al., 2010):

$$x = r \cos \lambda \sin \varphi; \quad y = r \sin \lambda \sin \varphi; \quad z = r \cos \varphi \quad (83)$$

donde r es el radio de la esfera, λ la longitud y φ la colatitud ¹⁸. De igual forma, los factores de escala este sistema coordenado están dados por (Estrada et al., 2003):

$$h_r = 1; \quad h_\lambda = r \sin \varphi; \quad h_\varphi = r \quad . \quad (84)$$

En el caso de modelos de la atmósfera, se usa la latitud, $\phi = 2\pi - \text{colatitud}$, en lugar de la colatitud como una de las coordenadas espaciales. Por esto, en adelante, ϕ denotará a la latitud, además, recordando que $\sin(\text{colatitud}) = \cos(\text{latitud})$ [Krishnamurti et al., 2006]. Entonces, (83) se escribe como (ver Figura 6):

¹⁷ Nota: Como el parámetro de Coriolis f sólo depende de y (de la latitud) y no de t ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), la ecuación puede aún reducirse a $\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + f) = 0$.

¹⁸ Cada variable varía de: $0 < r \leq 1$, $0 \leq \lambda < 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$, respectivamente.

$$x = r \cos \lambda \cos \phi; \quad y = r \sin \lambda \cos \phi; \quad z = r \sin \phi \quad . \quad (85)$$

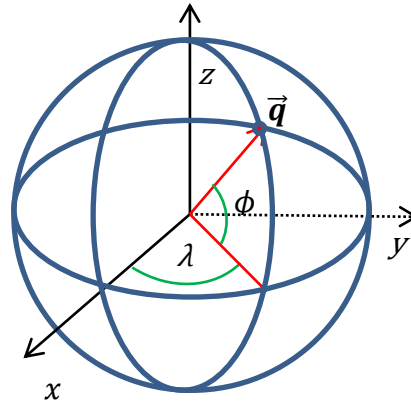


Figura 6 [Elaborada con Word 2010]. Sistema de coordenadas esféricas en ciencias de la atmósfera.

Considerando lo anterior, los factores de escala en este sistema coordenado, están dados por:

$$h_r = 1; \quad h_\lambda = r \cos \phi; \quad h_\phi = r \quad . \quad (86)$$

Por otra parte, sea $S = \{\vec{x} \in R^3: |\vec{x}| = 1\}$ una esfera unitaria tridimensional con centro en el origen del espacio Euclidiano; y denotemos a $C^\infty(S)$ como un espacio de funciones infinitamente diferenciable sobre S , en el que se definen un producto vectorial escalar y una norma como (Skiba, 2010b):

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(\vec{x}) \bar{g}(\vec{x}) dS = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f \bar{g} dS \quad ^{19} \quad (87)$$

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad . \quad (88)$$

Donde bajo la transformación de coordenadas **(85)**, $\vec{x} = (\lambda, \mu)$ es un punto sobre la superficie de la esfera; $dS = d\lambda d\mu$ denota al elemento de área sobre S ; $\mu = \sin \phi$, $\mu \in [-1, 1]$ es la latitud, mientras que $\lambda \in [0, 2\pi]$ es la longitud y \bar{g} es el conjugado complejo de la función g .

Ahora es posible transformar la **EV B** a coordenadas esféricas; partiendo de la ecuación (75),

¹⁹ Aquí, f representa una función, y no el parámetro de Coriolis. En lo subsecuente se aclarará el uso de dicho símbolo en caso de ser necesario, para evitar posibles confusiones.

$$\frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\zeta + f) = 0$$

(E) (F)

Considerando el segundo término (F) se tiene:

Sea $\vec{u} = (u_r, u_\lambda, u_\phi)$ el vector velocidad en coordenadas esféricas, del flujo sobre la superficie de la esfera, cuyas componentes corresponden a las direcciones radial, longitudinal y latitudinal, respectivamente. Además,

$$\vec{u} = \left(u_r = 0, u_\lambda = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, u_\phi = -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \quad (89)$$

De acuerdo a (85) y (86), el operador gradiente en dichas coordenadas aplicado a (F) es

$$\nabla(\zeta + f) = \frac{\hat{e}_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial \lambda} + \frac{\hat{e}_\phi}{r} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial \phi} \quad (90)$$

Entonces, la advección de la vorticidad absoluta en coordenadas esféricas queda:

$$\vec{u} \cdot \nabla(\zeta + f) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{u_\lambda}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + u_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} (\zeta + f) \quad (91)$$

Ahora, transformando la vorticidad a coordenadas esféricas:

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{u} = \frac{1}{r \cos \phi} \left\{ \hat{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (u_\lambda \cos \phi) - \frac{\partial}{\partial \lambda} (u_\phi) \right] - \hat{e}_\phi \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cos \phi) (u_\lambda) \right] + (\cos \phi) \hat{e}_\lambda \frac{\partial}{\partial r} (r u_\phi) \right\} \quad (92)$$

Ya que el espacio geométrico introducido antes es la esfera unitaria S , entonces, $r = |\vec{x}| = 1$:

$$\vec{w} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \hat{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (u_\lambda \cos \phi) - \frac{\partial}{\partial \lambda} (u_\phi) \right] \right\} \quad (93)$$

$$\zeta = \hat{e}_r \cdot \vec{w} = \frac{1}{\cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \right] \quad (94)$$

El operador Laplaciano bidimensional en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \right] \quad (95)$$

Por lo que su análogo sobre la superficie de la esfera unitaria (ϕ, λ) es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\cos\phi} \left[\frac{\partial}{\partial\phi} \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \right) \right] \quad (96)$$

Entonces, el Laplaciano de la función de corriente queda:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\cos\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \right) \right\} \psi \quad (97)$$

Dado que (94) puede escribirse como (97):

$$\zeta = \nabla^2\psi = \Delta\psi \quad (98)$$

(E) adquiere la forma $\frac{\partial(\Delta\psi+f)}{\partial t}$, sustituyendo entonces, (98) en (91):

$$\vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + f) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{u_\lambda}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} + u_\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right\} (\Delta\psi + f) \quad (99)$$

Pero, $u_\lambda = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}$, $u_\phi = \frac{1}{r\cos\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ y $r = 1$, por lo que:

$$\vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + f) = \left\{ \frac{1}{\cos\phi} \left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \right] \right\} (\Delta\psi + f) \quad (100)$$

Dicha ecuación, puede reescribirse como el Jacobiano en coordenadas esféricas:

$$J(a, b) = \frac{1}{\cos\phi} \left\{ \frac{\partial a}{\partial\lambda} \frac{\partial b}{\partial\phi} - \frac{\partial a}{\partial\phi} \frac{\partial b}{\partial\lambda} \right\}$$

por lo que,

$$\vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + f) = J(\psi, \Delta\psi + f) \quad (101)$$

Además, si $f = 2\Omega \sin\phi$ y $\mu = \sin\phi$:

$$\vec{u} \cdot \nabla(\Delta\psi + 2\Omega\mu) = J(\psi, \Delta\psi + 2\Omega\mu) \quad (102)$$

Entonces, (75) puede escribirse en coordenadas esféricas y en su forma adimensional como:

$$\frac{\partial(\Delta\psi+f)}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi + 2\mu) = 0 .$$

Por último, se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\psi) + J(\psi, \Delta\psi + 2\mu) = 0 . \quad (103)$$

La ecuación (103) describe la dinámica de un fluido barotrópico ideal e incompresible sobre una esfera unitaria rotatoria S (Rossby, 1939; Haurwitz, 1940).

En dicha ecuación, $\psi(\lambda, \mu, t)$ es la función de corriente; $\mu = \text{sen } \phi$, ϕ y λ denotan la latitud y longitud de un punto sobre S ; $\Delta\psi$ es la vorticidad relativa, $\Delta\psi + 2\mu$ es la vorticidad absoluta y $J(\psi, h)$ es el Jacobiano (término no lineal) expresado como (Skiba, 2009; Skiba, 2010b):

$$J(\psi, h) = (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla\psi) \cdot \nabla h = \psi_\lambda h_\mu - \psi_\mu h_\lambda \quad ^{20} . \quad (104)$$

El término $J(\psi, \Delta\psi)$ describe las interacciones no lineales entre diferentes escalas y el término lineal $J(\psi, 2\mu) = 2\psi_\lambda$ describe la rotación de la esfera alrededor de su eje polar (Skiba, 2009; Skiba, 2010b). El gradiente de la función $\psi(\lambda, \mu)$ es

$$\nabla\psi = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \psi_\lambda, \sqrt{1-\mu^2} \psi_\mu \right). \quad (105)$$

Mientras que la velocidad del flujo está dada por $\vec{u} = \hat{\mathbf{n}} \times \nabla\psi$ y cuyas componentes son

$$u = u_\lambda = -\sqrt{1-\mu^2} \psi_\mu; \quad v = u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \psi_\lambda \quad (106)$$

Además de que satisfacen la ecuación $\nabla \cdot \vec{u} = 0$.

Por otra parte, la ecuación (103), es un modelo bidimensional que tiene importancia matemática y meteorológica, ya que describe la dinámica de los procesos atmosféricos barotrópicos de escalas grandes (Kuo, 1949; Fjörtoft, 1953; Pedlosky, 1987; Gill, 1982; Andrews, 2000; Houghton, 2002; Holton, 2004; Skiba, 2009).

Dicho modelo se compone por una sola ecuación, y puede ser caracterizado como un límite del modelo de aguas someras cuando el radio de deformación de Rossby \sqrt{gH}/f tiende al infinito (H es la profundidad del fluido, f es el parámetro de Coriolis). El flujo en el modelo es estrictamente bidimensional, es

²⁰ Dicho resultado puede obtenerse usando $\frac{\partial}{\partial\phi} = \phi \frac{\partial}{\partial\mu}$ (cuya deducción se explica más adelante en el capítulo 4) en la ecuación (100); con lo que el jacobiano queda expresado en términos de λ y μ como: $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial\lambda} \frac{\partial b}{\partial\mu} - \frac{\partial a}{\partial\mu} \frac{\partial b}{\partial\lambda}$. Además, $\hat{\mathbf{n}}$ corresponde al vector unitario normal a la esfera S .

decir, la vorticidad es un campo escalar y **las condiciones de frontera** en la **superficie libre** y en el **fondo son eliminadas ignorando las oscilaciones** de la **superficie libre** (la cual es fija). Esto corresponde a la hipótesis sobre la profundidad infinita del fluido (Skiba, 2009).

Así, en cierto sentido, el modelo gobierna la dinámica de un fluido rotatorio de profundidad infinita, y es más simple que el modelo de aguas someras, donde se ponen las condiciones adicionales en la tapa y el fondo del fluido. Como resultado, en este modelo el fluido es no divergente, mientras que el fluido en el modelo de aguas someras es divergente (Skiba, 2009).

4. POLINOMIOS ESFÉRICOS Y SOLUCIONES EXACTAS DE LA EVB

En este capítulo, se introducen ciertas funciones especiales (**PLs**, funciones asociadas de Legendre y armónicos esféricos) que permiten construir las soluciones analíticas de la ecuación **(103)** sobre una esfera en rotación; además, se describen algunas características útiles de dichas funciones.

4.1. Ecuaciones para obtener los Polinomios Esféricos

Considerando la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (107)$$

Donde la función $\Phi(x, y, z)$ es una solución de la ecuación **(107)** y el operador de Laplace $\nabla^2 = \Delta$, describe un proceso difusivo, o bien, uno de conducción de calor en un medio, por ejemplo. La ecuación de Laplace y sus soluciones, las cuales son funciones armónicas, son de importancia fundamental en el estudio de la dinámica de fluidos (Krishnamurti et al., 2006).

Por otra parte, usando **(85)** y **(86)** en **(107)**, la ecuación de Laplace en el sistema de coordenadas (r, λ, ϕ) adquiere la forma:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} \right] = 0 \quad (108)$$

O escrita de forma que la singularidad en r no sea “explícita”:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (109)$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace en un sistema de coordenadas esférico, son los armónicos esféricos, y se obtienen por el método de separación de variables (Krishnamurti et al., 2006).

Entonces, para resolver la ecuación **(109)**, se usa el método de separación de variables: la forma de la solución $\Phi(r, \lambda, \phi)$, se supone como un producto de las funciones arbitrarias R , L , y P , donde cada factor es función de una sola coordenada espacial sobre la esfera, es decir que, cada una depende sólo una de las variables r , λ y ϕ respectivamente:

$$\Phi(r, \lambda, \phi) = R(r)L(\lambda)P(\phi)^{21}. \quad (110)$$

Sustituyendo (110) en (109), simplificando la notación y considerando la derivación parcial correspondiente para cada variable dependiente e independiente, se obtiene una ecuación formada por derivadas que dependen de una sola variable:

$$LP \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{RL}{\cos\phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos\phi \frac{dP}{d\phi} \right) + \frac{RP}{\cos^2\phi} \frac{d^2L}{d\lambda^2} = 0 \quad (111)$$

La ecuación (111) se divide por RLP , y se busca dejar uno de los lados de la igualdad en función de una sola de las variables, con el fin de realizar la separación:

$$\frac{1}{P \cos\phi} \left(\cos\phi \frac{dP}{d\phi} \right) + \frac{1}{L \cos^2\phi} \frac{d^2L}{d\lambda^2} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right). \quad (112)$$

Así, en (112), el lado derecho sólo es función de r , por otra parte, el lado izquierdo es función de ϕ y λ , al derivar ambos lados de forma cruzada, se obtiene cero, por lo que ambos deben ser iguales a una constante arbitraria k .

$$\frac{1}{P \cos\phi} \left(\cos\phi \frac{dP}{d\phi} \right) + \frac{1}{L \cos^2\phi} \frac{d^2L}{d\lambda^2} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = k. \quad (113)$$

Considerando la última igualdad en la ecuación (113): $-\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = k$, se obtiene la **EDO**:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + kR = 0 \quad (114)$$

La expresión (114) es semejante a la **EDO** de Cauchy-Euler (Campbell & Haberman, 2008; Nagle et al., 2012), por lo que admite soluciones de la forma:

$$R = c_1 r^n \quad (115)$$

donde n es un valor entero, si éste es positivo, al sustituir dicha solución en (114), se obtiene:

$$c_1 \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dr^n}{dr} \right) + c_1 r^n k = 0; \quad c_1 \frac{d}{dr} (r^2 n r^{n-1}) + c_1 r^n k = 0;$$

$$nc_1 \frac{d}{dr} r^{n+1} + r^n c_1 k = 0; \quad n(n+1)c_1 r^n + r^n c_1 k = 0;$$

²¹ Donde la variable P , **no** representa a la presión de un flujo básico, como en la **sección 2** del presente trabajo.

$$[n(n+1) + k]c_1 r^n = 0 \Rightarrow c_1 \neq 0$$

$$\therefore k = -n(n+1) . \quad (116)$$

Se observa que si se reemplaza n por $-n-1$, el valor de k no se altera, por lo tanto, $c_2 r^{n-1}$ es también solución de (114), para la cual $k = -n(n-1)$. Entonces k es de la forma $-n(n+1)$, y n es un entero positivo incluyendo el cero (Krishnamurti et al., 2006). De esta manera la (12), se escribe como:

$$\frac{1}{P \cos \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{dP}{d\phi} \right) + \frac{1}{L \cos^2 \phi} \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = -n(n+1) \quad (117)$$

Multiplicando (117) por $\cos^2 \phi$ y reescribiendo la ecuación de manera que ambos lados queden en función de una sola variable cada uno, con el objeto de aplicar nuevamente el criterio de separación antes usado:

$$\frac{\cos \phi}{P} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{dP}{d\phi} \right) + n(n+1) \cos^2 \phi = -\frac{1}{L} \frac{d^2 L}{d\lambda^2} . \quad (118)$$

Repitiendo el procedimiento de igualar a una constante, la cual por conveniencia se escoge como positiva, por ejemplo, m^2

$$\frac{\cos \phi}{P} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{dP}{d\phi} \right) + n(n+1) \cos^2 \phi = -\frac{1}{L} \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = m^2 . \quad (119)$$

Entonces, se resuelve la **EDO** que corresponde a $L(\lambda)$: $-\frac{1}{L} \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = m^2$;

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + m^2 L = 0 \quad (120)$$

Cuyas soluciones tienen la forma (King et al., 2003):

$$L(\lambda) = c_3 \operatorname{sen}(m\lambda) + c_4 \operatorname{cos}(m\lambda); \quad m = 0,1,2,3, \dots \quad (121)$$

o escribiendo (121) en su forma compleja (Krishnamurti et al., 2006):

$$L(\lambda) = c e^{\pm im\lambda} \quad (122)$$

Ahora, de (119) se tiene:

$$\frac{\cos \phi}{P} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{dP}{d\phi} \right) + n(n+1) \cos^2 \phi = m^2 \quad (123)$$

Al multiplicar (123) por $\frac{P}{\cos^2 \phi}$, se llega a:

$$\frac{1}{\cos\phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos\phi \frac{dP}{d\phi} \right) + n(n+1)P = \frac{m^2 P}{\cos^2\phi}$$

$$\frac{1}{\cos\phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos\phi \frac{dP}{d\phi} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\cos^2\phi} \right) P = 0 \quad (124)$$

Recordando que en la sección 3.2 se introdujo el cambio de variable para la latitud como $\mu = \text{sen } \phi$ [$-1 \leq \mu \leq 1$; además, $\cos\phi = \sqrt{1 - \mu^2}$], entonces si $\frac{d\mu}{d\phi} = \cos\phi$, por regla de la cadena $\frac{dP}{d\phi} = \frac{dP}{d\mu} \frac{d\mu}{d\phi}$, además, $\frac{dP}{d\phi} = \frac{dP}{d\mu} \cos\phi$, por lo que,

$$\frac{d}{d\phi} = \cos\phi \frac{d}{d\mu} . \quad (125)$$

Sustituyendo (125) en (124):

$$\frac{d}{d\mu} \left(\cos^2\phi \frac{dP}{d\phi} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\cos^2\phi} \right) P = 0 \quad (126)$$

y recordando que $\cos^2\phi = 1 - \text{sen}^2\phi$ y como $\mu^2 = \text{sen}^2\phi$, la ecuación (126) puede expresarse de la forma:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P = 0 \quad (127)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] = - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P . \quad (128)$$

Cualquiera de las ecuaciones (127) o (128)²², se conoce como la ecuación asociada de Legendre, y es aplicable a cualquier número de onda m (King et al., 2003; Krishnamurti et al., 2006). Las soluciones de dicha ecuación, son esenciales en la “construcción” de los armónicos esféricos mencionados en la sección 4.1, y se obtienen usando la fórmula de Rodrigues (Krishnamurti et al., 2006):

$$P_n^m(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n; \quad |\mu| \leq 1 \quad (129)$$

Dichas soluciones, se conocen como funciones asociadas de Legendre de primera clase, de orden m y grado n (King et al., 2003; Haberman, 2005; Krishnamurti et al., 2006). Como se observa, involucran dos parámetros, n puede ser cualquier entero ($n \geq 0$) y m , un entero tal que $|m| \leq n$. En el

²² Esta ecuación está escrita en forma de un problema espectral: $\lambda A = \lambda \vec{x}$.

apéndice 8.3, se muestran las características más importantes y de interés sobre ellas.

Por otro lado, si $m = 0$, la ecuación (128) se convierte en la denominada ecuación de Legendre:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] = -n(n + 1)P \quad (130)$$

Para un determinado número entero n , la solución $P_n^0 = P_n(\mu)$ de (130), se denomina polinomio de Legendre de grado n . Dicha solución, puede ser obtenida mediante la fórmula de Rodrigues (Brown & Churchill, 1993; Krishnamurti et al., 2006):

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, |\mu| \leq 1 \quad (131)$$

En el apéndice 8.2, se muestran algunos ejemplos y propiedades importantes sobre los polinomios de Legendre.

4.2. Armónicos Esféricos

De acuerdo a las ecuaciones (114), (122) y (129), la solución (110) de la ecuación (109), tendría la forma:

$$\Phi(r, \lambda, \phi) = R(r)L(\lambda)P(\phi) = [c_1 r^n] [c_2 e^{\pm im\lambda}] [c_3 P_n^m(\text{sen } \phi)] \quad (132)$$

Como puede notarse, la separación de las variables y la construcción de la solución [expresión (132)] para la ecuación (109), se realizó de forma general, sin embargo, aún es necesario obtener las funciones adecuadas (armónicos esféricos) que permitan construir las soluciones de (103), sobre la esfera unitaria S antes introducida.

Para tal fin, se retoma de la ecuación (109), el operador esférico de Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (133)$$

Es conveniente que: los términos que describen las variaciones tanto en latitud como en longitud en (133), estén separados de la coordenada radial; al efectuar dicha separación del operador, se formule el operador Laplaciano en términos de μ , por lo que usando la notación Δ_S se tiene:

$$\Delta_S = \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \quad (134)$$

Entonces, considerando de nueva cuenta: $\mu = \text{sen } \phi$, $\mu^2 = \text{sen}^2\phi$, $\cos^2\phi = 1 - \text{sen}^2\phi$ y la expresión (125) en (134) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \frac{1}{\cos\phi} \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\mu} \right) \left[\cos\phi \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\mu} \right) \right] + \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial\mu} \left[(1 - \text{sen}^2\phi) \frac{\partial}{\partial\mu} \right] + \frac{1}{1 - \text{sen}^2\phi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \end{aligned}$$

Se llega al operador buscado, ya que está en términos de la longitud λ y la latitud μ :

$$\Delta_S = \frac{\partial}{\partial\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial\mu} \right] + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \quad (135)$$

Por lo que (133) puede escribirse como:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_S \quad (136)$$

Ahora, aplicando (136) a una función $\Phi(r, \lambda, \mu)$, se obtiene la ecuación de Laplace en el sistema de coordenadas (r, λ, μ) :

$$\Delta\Phi(r, \lambda, \mu) = 0 \quad (137)$$

Para resolver la última expresión, se usará un procedimiento muy similar al empleado en la sección 4.1.; es decir, proponiendo la solución de la forma:

$$\Phi(r, \lambda, \mu) = R(r)Y(\lambda, \mu) \quad (138)$$

Ya que como apunta Hassani (2013): casi en todas las aplicaciones, la parte angular de las variables esféricas puede separarse y ser estudiada de forma muy general. Esto se debe a que la parte angular del Laplaciano, en el sistema de coordenadas esféricas, está muy relacionado con la operación de rotación y el momento angular, los cuales, son independientes de cualquier situación particular.

Sustituyendo $\Phi(r, \lambda, \mu)$ en (137), simplificando la notación y multiplicando por RY^{-1} , se obtiene:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \Delta_S\Phi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial[R(r)Y(\lambda, \mu)]}{\partial r} \right) + \Delta_S[R(r)Y(\lambda, \mu)]$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= Y \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + R \Delta_S Y = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y} \Delta_S Y &= 0 \\ \frac{1}{Y} \Delta_S Y &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) \quad . \quad (139)\end{aligned}$$

Como se observa, **(139)** es un problema análogo a **(112)**; por lo que es válido usar ciertos resultados previos para resolver el problema actual. Entonces, se reemplaza el lado derecho de **(139)** por $k = -n(n+1)$, con n siendo un entero positivo

$$\frac{1}{Y} \Delta_S Y = -n(n+1) \quad . \quad (140)$$

Por lo que se obtiene el problema de valores propios (problema espectral) para el operador de Laplace sobre la esfera unitaria S , escrito como:

$$-\Delta_S Y = n(n+1)Y \quad ^{23} \quad . \quad (141)$$

Con el objeto de resolver dicho problema, se retoma **(135)** para reescribir **(141)**:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial Y}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0 \quad . \quad (142)$$

Proponiendo la solución de la ecuación anterior de la forma $Y(\lambda, \mu) = L(\lambda)P(\mu)$ ²⁴ y sustituyendo dicha expresión en **(142)**, se realiza entonces el proceso de separación de las variables como anteriormente, con lo que se obtiene:

$$\frac{(1-\mu^2)}{P} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial P}{\partial \mu} \right] + n(n+1)(1-\mu^2) = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \quad (143)$$

Es sencillo notar que, ambos miembros de la ecuación **(143)** son análogos a los de la expresión **(119)**, por lo que aprovechando los resultados previos, se tiene que las soluciones correspondientes para cada lado de **(143)**, están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}L(\lambda) &= c e^{im\lambda} \\ P(\mu) = P_n^m(\mu) &= \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n; \quad |\mu| \leq 1\end{aligned}$$

²³ En donde dicho operador es simétrico y positivo definido sobre S (Skiba, 1994). El primer término quiere decir que todos sus valores propios son reales, mientras que el segundo indica que $\langle -\Delta_S Y, Y \rangle > 0$.

²⁴ Donde nuevamente se usan las variables L y P .

Así, la solución de la ecuación de Laplace sobre la esfera unitaria S (141), se construye como $Y(\lambda, \mu) = L(\lambda)P(\mu) = c(e^{im\lambda})[P_n^m(\mu)]$; aunque el armónico esférico normalizado se escribe como

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = c_{nm}P_n^m(\mu)e^{im\lambda}; \quad c_{nm} = \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \quad (144)$$

La función Y_n^m se conoce como **armónico esférico** ²⁶ de grado m y orden n ; representa la variación espacial del conjunto ortogonal de soluciones de la ecuación de Laplace, cuando la solución se expresa en coordenadas esféricas.

De esta forma sobre la esfera, la estructura zonal está dada por una combinación de funciones trigonométricas (seno y coseno), mientras que las funciones asociadas de Legendre representan la estructura meridional.

Un número de propiedades de estas funciones necesitan ser entendidas para la formulación de un modelo espectral. Los armónicos esféricos se consideran como una base ortonormal en el espacio $C^\infty(S)$, $\langle Y_n^m, Y_l^k \rangle = \delta_{mk} \cdot \delta_{nl}$; donde para cada número entero $n \geq 0$, cada valor propio

$$\chi_n = n(n+1) \quad (145)$$

tiene $2n+1$ multiplicidades y un espacio propio H_n , el cual se denomina subespacio lineal de los polinomios esféricos homogéneos de grado n y está definido como:

$$H_n = \{p(\lambda, \mu) : -\Delta_S p = \chi_n p\} \quad (146)$$

En donde H_n tiene dimensión (dim) igual a $2n+1$; y puede notarse que cada polinomio p es una función propia del operador esférico de Laplace $-\Delta_S$ ²⁷, cuyo valor propio correspondiente es χ_n . Así, los $2n+1$ armónicos esféricos $Y_n^m(\lambda, \mu)$ ($-n \leq m \leq n$), forman una base ortogonal en el espacio H_n .

En el plano de los números de onda (m, n) mostrados en la figura 7, los números de onda de los armónicos esféricos de diferentes subespacios H_n , se encuentran en las diferentes líneas paralelas. Los símbolos azules (rojos) corresponden a los números de onda de los armónicos esféricos simétricos (antisimétricos) respecto del ecuador ($\mu = 0$).

²⁵ En aplicaciones físicas, se acostumbra usar la constante de normalización c_{nm} , definida como en (144), además de que la magnitud de la norma es igual a 1.

²⁶ Ya que satisface la ecuación de Laplace.

²⁷ Definido mediante la ecuación (135).

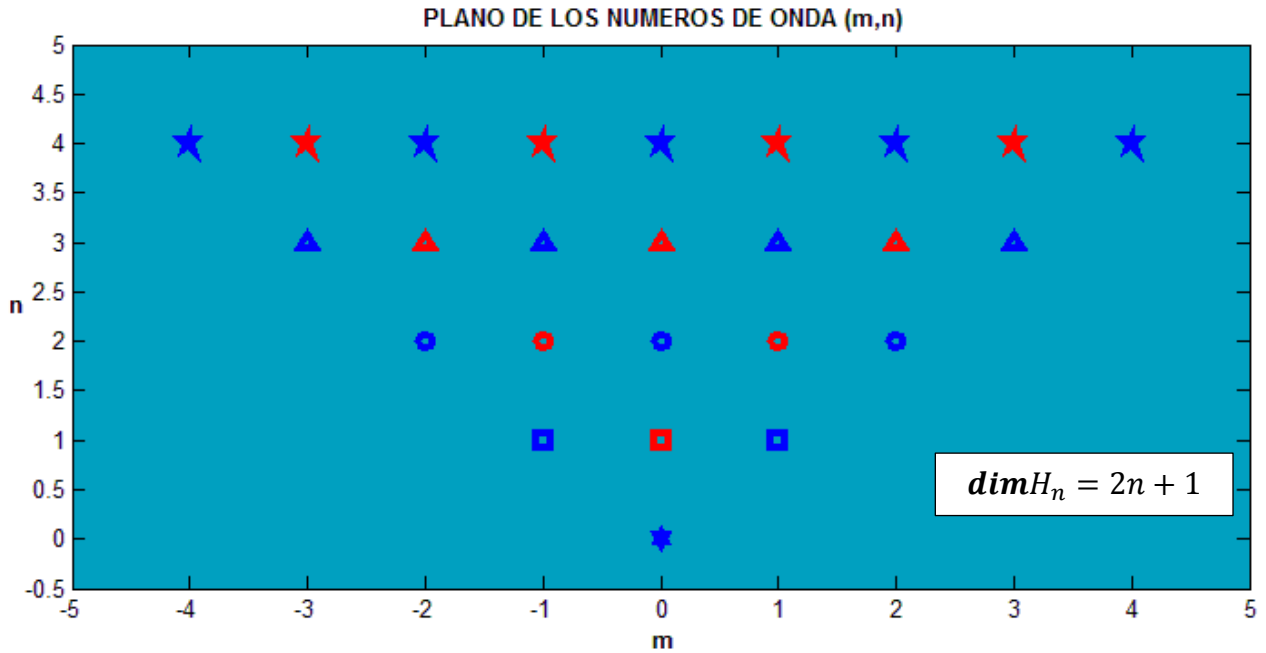


Figura 7 [Adaptado de Skiba, 2010; elaborada con Matlab 2012]. Números de onda (m, n) de los armónicos esféricos $Y_n^m(\lambda, \mu)$ en el espacio $C^\infty(S)$, para los subespacios desde H_0 hasta H_4 .

Algunas propiedades matemáticas útiles de $Y_n^m(\lambda, \mu)$, son (Krishnamurti et al., 2006):

- (a). $Y_n^m(\lambda, \mu) = 0$; para $n < m$.
- (b). $[Y_n^m]^*(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} =;$ para $0 < m \leq n$ ²⁸.
- (c). $Y_n^{-m}(\lambda, \mu) = P_n^{-m}(\mu) e^{-im\lambda} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$; para $0 < m \leq n$.
- (d). $\Delta Y_n^m(\lambda, \mu) = -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m(\lambda, \mu)$.

4.3 Soluciones (flujos) exactas de la EVB

Hasta ahora, se conocen cuatro tipos de soluciones exactas de la **EVB (103)**: los flujos zonales (como el caso particular de los **PLs**) y las **ondas R-H**, conforman soluciones infinitamente suaves; mientras que la onda Wu-Werkley y los

²⁸ $[Y_n^m]^*(\lambda, \mu)$ es el complejo conjugado de Y_n^m .

modones representan soluciones débiles (generalizadas) de la **EVB** (Skiba, 2008).

El presente trabajo, se enfoca principalmente al estudio de flujos zonales en la forma de polinomios de Legendre (**PLs**) y una **onda R-H** estacionaria.

Sea $n \geq 2$. En general, la **onda R-H** no estacionaria tiene la forma (Skiba, 2008; Skiba, 2009):

$$\psi(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m(\lambda - C_n t, \mu), \quad (147)$$

donde ω es la velocidad angular de súper-rotación (μ es el **PL** de grado uno: $P_1(\mu) = \mu = \text{sen}\phi$), C_n es la velocidad de la onda, a_m son amplitudes constantes y $Y_n^m(\lambda, \mu)$ es el armónico esférico de grado n y número zonal m ; de acuerdo a lo expuesto en la sección **4.2**.

El primer término en (147) representa una rotación rígida de la esfera alrededor del eje central, mientras que el segundo es un polinomio esférico homogéneo de orden n , es decir, la **onda R-H** pertenece al subespacio $H_1 \oplus H_n$.

Es bien conocido que la **onda R-H (147)** es una solución exacta de la **EVB (103)**, si

$$C_n = \omega - \frac{2(\omega+1)}{\chi_n}, \quad n \geq 2, \quad \chi_n = n(n+1) \quad (148)$$

(Haurwitz 1940; Skiba 1989, 1993; Pérez-García, 2001; Skiba, 2004).

Las amplitudes a_m son arbitrarias (pueden ser incluso coeficientes complejos), sin embargo, $a_{-m} = (-1)^m \overline{a_m}$ para una **onda R-H** real. En efecto,

$$a_{-m} = (-1)^m \overline{a_m}; \quad Y_n^{-m}(\lambda, \mu) = (-1)^m \overline{Y_n^m(\lambda, \mu)}$$

$$a_{-m} Y_n^{-m}(\lambda, \mu) = (-1)^{2m} \overline{a_m \overline{Y_n^m(\lambda, \mu)}} = \overline{a_m Y_n^m}$$

Por lo que:

$$a_m Y_n^m + a_{-m} Y_n^{-m} = a_m Y_n^m + \overline{a_m Y_n^m} = 2\text{Re}(a_m Y_n^m)$$

La última fórmula garantiza que la **onda R-H (147)** es una función real.

Además, hay que notar que la vorticidad absoluta, expresada como (Skiba, 1993; Skiba, 2004):

$$\Delta\psi + 2\mu = -\chi_n\psi - \chi_n C_n \mu \quad (149)$$

también pertenece al subespacio $H_1 \oplus H_n$ (Skiba, 2004), y de igual forma que, el Jacobiano (Skiba, 1993):

$$J(\Delta\psi, \psi) = (\chi_n C_n + 2) \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \quad (150)$$

es un término lineal para cualquier **onda R-H** (147), (148).

Las ondas de Rossby-Haurwitz, son las características principales de los mapas meteorológicos diarios a latitudes medias, por lo tanto el estudio de su inestabilidad es de importancia especial en meteorología (Skiba, 2008).

En el caso particular cuando $\omega = 0$ y $n \geq 2$, el polinomio esférico homogéneo

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m(\lambda - C_n t, \mu) = \psi_n \in H_n \quad (151)$$

es también una solución exacta (**onda R-H**) de la ecuación (103) si

$$C_n = -\frac{2}{\chi_n} . \quad (152)$$

4.4. Soluciones estacionarias exactas de la EVB

En el caso particular cuando $C_n = 0$, la **onda R-H**

$$\psi(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \psi_n = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m(\lambda, \mu) ; \quad n \geq 2 \quad (153)$$

es estacionaria. Por lo tanto, dicha onda es una solución exacta de la **EVB** si $\omega = \frac{2}{\chi_n - 2}$. En este caso, la vorticidad absoluta $\Delta\psi + 2\mu$ pertenece al subespacio H_n , ya que (Skiba, 2004):

$$\Delta\psi + 2\mu = -\chi_n\psi_n \in H_n . \quad (154)$$

4.5. Soluciones zonales exactas de la EVB

Evidentemente, cualquier flujo zonal $\psi(\mu)$ es una solución exacta de la **EVB**. En particular, una **onda R-H** zonal (sólo tiene componente latitudinal), es una solución exacta de **(103)**, y tiene la forma:

$$\psi(\mu) = -\omega\mu + a_n P_n^0(\mu) \quad (155)$$

Con las constantes reales arbitrarias (amplitudes) $a_n \neq 0$, ω , $n > 1$. Dicho flujo, es un caso particular (zonal) de la expresión **(153)**.

Por otra parte, un único **PL** de grado $n \geq 1$, y una amplitud real a_n , también constituye una solución exacta de **(103)**, por lo que se denomina flujo zonal en forma de **PL**, y tiene la forma:

$$\psi(\mu) = a_n P_n^0(\mu) \quad (156)$$

5. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES EXACTAS DE LA EVB

En este capítulo, se aplican los conceptos de la teoría de la estabilidad presentados en el capítulo 2 de la presente tesis, al estudio de la estabilidad de las soluciones estacionarias de la **EVB**.

5.1. Flujo básico, perturbaciones y EVB linealizada

En lo subsecuente, se usarán de forma genérica $\psi(\lambda, \mu, t)$, $\Psi(\lambda, \mu, t)$ y $\psi'(\lambda, \mu, t)$ para denotar: un flujo total, un flujo básico y una perturbación del flujo básico (respectivamente) para la **EVB** (103), así, ψ se expresa como

$$\psi = \Psi + \psi' \quad . \quad (157)$$

Entonces el flujo perturbado tiene la forma

$$\psi' = \psi - \Psi \quad (158)$$

tanto el flujo básico Ψ como el flujo total ψ son soluciones de la ecuación (103), por lo que Ψ satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\Psi) + J(\Psi, \Delta\Psi + 2\mu) = 0 \quad . \quad (159)$$

Así, restando (159) de (103) se tiene

$$[\Delta(\psi - \Psi)]_t + J(\psi, \Delta\psi + 2\mu) - J(\Psi, \Delta\Psi + 2\mu) = 0$$

Usando la relación (158) y denotando **derivación parcial** mediante el uso de **subíndices**, para el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene:

$$[\Delta\psi']_t + \psi_\lambda[\Delta\psi + 2\mu]_\mu - \psi_\mu[\Delta\psi + 2\mu]_\lambda - \Psi_\lambda[\Delta\Psi + 2\mu]_\mu + \Psi_\mu[\Delta\Psi + 2\mu]_\lambda = 0$$

Desarrollando, simplificando los términos y utilizando la relación (157) en la expresión anterior, se llega a la **EVB** no lineal para perturbaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi') + J(\psi', \Delta\Psi + 2\mu) + J(\psi', \Delta\psi') = 0 \quad (160)$$

Cuya condición inicial es

$$\psi'(\lambda, \mu, 0) = \psi(\lambda, \mu, 0) - \Psi(\lambda, \mu, 0) = \psi'_0(\lambda, \mu) \quad (161)$$

De esta manera, el problema de la estabilidad de la solución $\Psi(\lambda, \mu, t)$ se reduce al estudio de la estabilidad de la solución nula de la ecuación (160).

En el caso particular cuando la perturbación ψ' es infinitesimal, (160) se linealiza despreciando el cuarto término no lineal, quedando:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi') + J(\psi', \Delta\Psi + 2\mu) = 0; \quad \psi'(\lambda, \mu, 0) = \psi'_0(\lambda, \mu) \quad (162)$$

Además, tanto (160) como (162), pueden ser reescritas dependiendo del tipo de flujo básico considerado. En este trabajo, los flujos de interés son la **onda R-H** estacionaria (153) y el flujo zonal en forma de **PL** (156).

En las ecuaciones (147), (151) y (153), es posible expresar el término $\sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m$ ²⁹ como: $\sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m$, considerando que

$$\psi_n = \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m \quad (163)$$

donde

$$\psi_n^m = \langle \psi, Y_n^m \rangle \quad (164)$$

es la componente de la serie de Fourier-Laplace expresada a través del producto escalar (87).

De esta forma, (147), (151) y (153) quedan reescritas como:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \psi_n(\lambda - C_n t, \mu) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m(\lambda - C_n t, \mu) \quad (165)$$

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \psi_n(\lambda - C_n t, \mu) = \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m(\lambda - C_n t, \mu) \quad (166)$$

$$\psi(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \psi_n(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (167)$$

Ahora se busca reescribir (160) y (162), dependiendo de si el flujo básico es una **onda R-H** estacionaria (167) o el flujo zonal en forma de **PL** (156).

Si la solución básica Ψ es una **onda** (167), considerando la ecuación (149), la vorticidad absoluta $\Delta\Psi + 2\mu$, se expresa como

$$\Delta\Psi + 2\mu = -\chi_n \Psi - \chi_n C_n \mu \quad (168)$$

²⁹ Considerando en cada caso la respectiva dependencia de las variables λ, μ y t ; así como de C_n .

Mientras que si Ψ corresponde a la **onda R-H** estacionaria (167) ($C_n = 0$), $\Delta\Psi + 2\mu$ se representa de la forma

$$\Delta\Psi + 2\mu = -\chi_n\Psi \quad . \quad (169)$$

Tomando en cuenta lo anterior, al sustituir (168) en (160) se obtiene

$$\begin{aligned} & [\Delta\psi']_t + \Psi_\lambda[\Delta\psi' + \chi_n\psi']_\mu - \Psi_\mu[\Delta\psi' + \chi_n\psi']_\lambda + \psi'_\lambda[\Delta\psi' - \chi_n C_n \mu]_\mu \\ & - \psi'_\mu[\Delta\psi' - \chi_n C_n \mu]_\lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi' + \chi_n\psi') + J(\psi', \Delta\psi' - \chi_n C_n \mu) = 0 \quad . \quad (170)$$

Por otra parte, al realizar el mismo procedimiento para la **EVb** linealizada (162), se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi' + \chi_n\psi') - \chi_n C_n J(\psi', \mu) = 0 \quad . \quad (171)$$

Además, si la **onda R-H** es estacionaria ($C_n = 0$), al sustituir (168) en (160), o bien aplicando dicha condición en (171), se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi' + \chi_n\psi') = 0 \quad . \quad (172)$$

De manera análoga, si la solución básica Ψ corresponde al flujo zonal (156), considerando la ecuación (146) se tiene que

$$\Delta\Psi = -\chi_n\Psi \quad . \quad (173)$$

Así, sustituyendo (173) en (160) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi' + \chi_n\psi') + J(\psi', \Delta\psi' + 2\mu) = 0 \quad . \quad (174)$$

Al realizar el mismo procedimiento para la **EVb** linealizada (162), se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi') + J(\Psi, \Delta\psi' + \chi_n\psi') + 2J(\psi', \mu) = 0 \quad . \quad (175)$$

Ahora, para estudiar la estabilidad lineal de una solución básica Ψ de la **EVb**, debe proponerse la forma de la perturbación ψ' como un modo normal, de acuerdo a lo que se muestra en las dos secciones siguientes.

5.2. Método de Modos Normales aplicado a la EVB linealizada

Suponiendo ahora que la perturbación infinitesimal ψ' tiene la forma especial de un modo normal (separando las variables):

$$\psi'(\vec{x}, t) = \psi'(\lambda, \mu, t) = G(t)H(\vec{x}) = e^{\omega t}H(\lambda, \mu) \quad (176)$$

Sustituyendo (176) en la **EVB** linealizada (162), desarrollando y reagrupando los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega G\Delta H &= -G\{\Psi_\lambda[\Delta H]_\mu - \Psi_\mu[\Delta H]_\lambda\} - G\{H_\lambda[\Delta\Psi + 2\mu]_\mu - H_\mu[\Delta\Psi + 2\mu]_\lambda\} \\ \omega G\Delta H &= -G\{J(\Psi, \Delta H) + J(H, \Delta\Psi + 2\mu)\} \\ -\omega\Delta H &= J(\Psi, \Delta H) + J(H, \Delta\Psi + 2\mu) \end{aligned} \quad (177)$$

La ecuación (177) representa el problema espectral general correspondiente a la **EVB** para perturbaciones (162). A partir de (177), pueden obtenerse los problemas de valor propio cuando el flujo básico Ψ es un **PL** (156) o una **onda R-H** estacionaria (153).

5.3. Problema espectral para ondas R-H estacionarias (bidimensionales)

Si el flujo básico Ψ corresponde a la **onda R-H** estacionaria (167), se usa la expresión (169) en la ecuación (17):

$$\begin{aligned} -\omega\Delta H &= \Psi_\lambda[\Delta H]_\mu - \Psi_\mu[\Delta H]_\lambda - \chi_n H_\lambda \Psi_\mu + \chi_n H_\mu \Psi_\lambda \\ -\omega\Delta H &= \Psi_\lambda[\Delta H + \chi_n H]_\mu - [\Delta H + \chi_n H]_\lambda \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene el problema espectral para dicha onda:

$$-\omega\Delta H = J(\Psi, \Delta H + \chi_n H) \quad (178)$$

5.4. Problema espectral para flujos zonales LP

Cuando el flujo básico Ψ es un flujo zonal en la forma del **PL** (156), se sustituye la ecuación (173) en (177):

$$\begin{aligned}
-\omega\Delta H &= \Psi_\lambda[\Delta H]_\mu - \Psi_\mu[\Delta H]_\lambda + H_\lambda[-\chi_n\Psi + 2\mu]_\mu - H_\mu[-\chi_n\Psi + 2\mu]_\lambda \\
-\omega\Delta H &= \Psi_\lambda[\Delta H + \chi_n H]_\mu - [\Delta H + \chi_n H]_\lambda + H_\lambda[2\mu]_\mu - H_\mu[2\mu]_\lambda .
\end{aligned}$$

Obteniendo así, el correspondiente problema de valor propio para flujos zonales LP:

$$-\omega\Delta H = J(\Psi, \Delta H + \chi_n H) - 2J(\mu, H) . \quad (179)$$

5.5. Ecuación y condición de estabilidad de Rayleigh-Kuo para flujos zonales LP

Es posible obtener una ecuación análoga a la expresión (61) para el caso de flujos zonales (unidimensionales) sobre la esfera (Kuo, 1949), denominada ecuación de Rayleigh-Kuo, una forma de deducirla es a partir del problema (177) como se muestra a continuación:

Primero, como se trata de un flujo zonal, debe de considerarse adicionalmente en el modo normal (176) planteado para ψ' , que

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = G(t)H(\lambda, \mu) = Q(\mu)e^{im\lambda}e^{\omega t} . \quad (180)$$

Desarrollando ahora el Laplaciano esférico (135) sobre H y Ψ , se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\Delta H(\lambda, \mu) &= \Delta[e^{im\lambda}Q(\mu)] = \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial[e^{im\lambda}Q(\mu)]}{\partial\mu} \right]_\mu + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2[e^{im\lambda}Q(\mu)]}{\partial\lambda^2} \\
&= (e^{im\lambda})B
\end{aligned}$$

$$\Delta H(\lambda, \mu) = (e^{im\lambda})B \quad (181)$$

$$\Delta\Psi(\mu) = \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial[\Psi(\mu)]}{\partial\mu} \right]_\mu + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2[\Psi(\mu)]}{\partial\lambda^2} = \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial[\Psi(\mu)]}{\partial\mu} \right]_\mu$$

$$\Delta\Psi(\mu) = [(1 - \mu^2)\Psi_\mu]_\mu \quad (182)$$

y donde

$$B = \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial Q(\mu)}{\partial \mu} \right]_{\mu} - \frac{m^2}{1 - \mu^2} Q(\mu) . \quad (183)$$

Entonces, el lado izquierdo de (177) toma la forma

$$-\omega \Delta H = -\omega (e^{im\lambda}) B, \quad (184)$$

mientras que los términos del lado derecho de (177) quedan expresados como

$$J(\Psi, \Delta H) = -\Psi_{\mu} (ime^{im\lambda}) B \quad (185)$$

$$J(H, \Delta \Psi + 2\mu) = im([\Delta \Psi]_{\mu} + 2\mu) (e^{im\lambda}) Q(\mu) . \quad (186)$$

De esta forma, el problema espectral (177) se transforma en

$$-\omega (e^{im\lambda}) B = \{([\Delta \Psi]_{\mu} + 2) Q(\mu) - \Psi_{\mu} B\} (ime^{im\lambda}) , \quad (187)$$

además, tomando en cuenta que ω puede expresarse como

$$\omega = -imc , \quad (188)$$

el modo normal considerado en (176) tiene la forma $e^{-\omega t}$, ya que de acuerdo a (188), $-\omega = imc$. Por lo que usando (183) y (188) en (187) se obtiene:

$$cB = ([\Delta \Psi]_{\mu} + 2) Q(\mu) - \Psi_{\mu} B$$

$$B = \frac{([\Delta \Psi]_{\mu} + 2)}{\Psi_{\mu} + c} Q(\mu)$$

$$\left[(1 - \mu^2) \frac{\partial Q(\mu)}{\partial \mu} \right]_{\mu} - \left\{ \frac{m^2}{1 - \mu^2} + \frac{([\Delta \Psi]_{\mu} + 2)}{\Psi_{\mu} + c} \right\} Q(\mu) = 0 . \quad (189)$$

Por último, proponiendo el cambio de variable:

$$U = -(1 - \mu^2) \Psi_{\mu} , \quad (190)$$

la ecuación (189) se convierte en el problema espectral para la amplitud $Q(\mu)$:

$$\left[(1 - \mu^2) Q_{\mu} \right]_{\mu} - \left\{ \frac{m^2}{1 - \mu^2} - \frac{U_{\mu\mu-2}}{\Psi_{\mu} + c} \right\} Q = 0 . \quad (191)$$

De igual forma, se puede obtener una condición análoga a la presentada en el **Teorema 2** de la sección 2.4, a la que se llega de la siguiente manera (Skiba, 2009):

A partir de la ecuación (191), se debe considerar que $m \neq 0$, ya que si $m = 0$, la perturbación (180), tiene la forma de un flujo básico $a_n P_n^0(\mu)$ [ecuación (156)], para el cual, si $n = 1$ (Baines, 1976) y $n = 2$ (Baines, 1976; Skiba 1989), éste es linealmente estable para cualquier amplitud a ; lo cual pone de manifiesto que para el estudio de flujos polinomiales se debe suponer que $n \geq 3$.

Puesto que la función $Q(\mu)$ es una combinación lineal de los **PLs**, las condiciones de frontera debido a (131), tienen la forma $Q(-1) = Q(1) = 0$, y para un modo inestable $c_i > 0$; usando la siguiente notación

$$Q = Q^r + iQ^i;$$

$$-\frac{1}{\psi_\mu + c} = g_r + i g_i; g_r = -\frac{\psi_\mu + c_r}{(\psi_\mu + c_r)^2 + c_i^2}; g_i = -\frac{c_i}{(\psi_\mu + c_r)^2 + c_i^2} > 0$$

y separando las partes real e imaginaria del problema espectral (191), obtenemos

$$[(1 - \mu^2)Q_\mu^r]_\mu - \left\{ \frac{m^2}{1 - \mu^2} - g_r(U_{\mu\mu} - 2) \right\} Q^r = (2 - U_{\mu\mu})g_i Q^i \quad (192)$$

$$[(1 - \mu^2)Q_\mu^i]_\mu - \left\{ \frac{m^2}{1 - \mu^2} - g_r(U_{\mu\mu} - 2) \right\} Q^i = (2 - U_{\mu\mu})g_i Q^r . \quad (193)$$

Multiplicando la ecuación (192) por Q^i y (193) por Q^r , y restando los resultados se llega a

$$(1 - \mu^2)(Q_\mu^r Q^i - Q^r Q_\mu^i)_\mu = (2 - U_{\mu\mu})g_i |Q|^2, \quad (194)$$

integrando ahora de $\mu = -1$ a $\mu = 1$ y usando las condiciones $Q(-1) = Q(1) = 0$, se tiene:

$$\int_{-1}^1 (2 - U_{\mu\mu})g_i |Q|^2 d\mu = \int_{-1}^1 \tilde{\Omega}_\mu g_i |Q|^2 d\mu = 0 \quad (195)$$

donde la cantidad $\tilde{\Omega}_\mu = (\Delta\Psi + 2\mu)_\mu = 2 - U_{\mu\mu} = 2 - a\chi_n \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$ representa la derivada de la vorticidad absoluta del flujo básico.

Teorema 4 (Rayleigh-Kuo). Ya que $g_i|Q|^2 > 0$ para un modo inestable, la condición necesaria de Rayleigh-Kuo para la inestabilidad requiere que $\tilde{\Omega}_\mu = 2 - U_{\mu\mu}$ cambie de signo por lo menos en un punto (de inflexión) del intervalo de $-1 < \mu < 1$ (Kuo, 1949; Skiba & Adem, 1998; Pérez-García, 2001; Skiba, 2009).

La existencia de un punto de inflexión no es suficiente para la inestabilidad de un flujo zonal sobre la esfera; por ejemplo, para el **PL** de segundo orden, $\tilde{\Omega}_\mu(\mu) = 2(1 - 9a\mu)$, y por lo tanto, $\mu = 1/9a$ es el punto de inflexión si la amplitud a es bastante grande, $a > 1/9$. Sin embargo como se mencionó antes, el flujo $aP_2(\mu)$ es estable para cualquier amplitud a .

Al igual que en la sección 2.4 (**Teorema 3**), existe la siguiente condición de inestabilidad para flujos zonales sobre la esfera:

Teorema 5 (criterio de Fjørtoft). Para que exista inestabilidad en un flujo zonal, el producto $-(U - U_I)\tilde{\Omega}_\mu$ debe ser negativo en algún punto de tal flujo, donde U_I es el valor de velocidad básica $U(\mu)$ en el punto de inflexión (Skiba, 2009).

5.6. Leyes de conservación para la EVB

Cada sistema físico puede poseer una o varias leyes de conservación, cada una de las cuales impone una restricción en el comportamiento de las soluciones del modelo. Existen dos tipos de leyes de conservación: locales, en las que para cada partícula del fluido, se conserva una característica física en el tiempo, y las globales, en las que una magnitud media de algún campo físico se conserva conforme transcurre el tiempo.

En el caso de la **EVB**, los invariantes del movimiento corresponden a la energía cinética K y la enstrofía η (Skiba, 2009)³⁰:

$$K = \frac{1}{2} \int_S |\nabla\psi|^2 dS = \sum_{n=0}^{\infty} K_n = Cte \quad (196)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \int_S |\Delta\psi|^2 dS = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n = Cte \quad (197)$$

Debido a las ecuaciones (87), (88), (163) y a que los armónicos esféricos constituyen una base ortonormal sobre S , $\langle Y_n^m, Y_l^k \rangle = \delta_{mk} \cdot \delta_{nl}$, la identidad de Parseval sobre la esfera está dada por (Skiba, 2009):

³⁰ Ver el apéndice 8.4.

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |f_n^m|^2 \quad . \quad (198)$$

Con lo que de acuerdo a (198), las partes de la energía cinética y de la enstrofia concentradas en el espacio propio H_n (en otras palabras, en la escala geométrica con el número de onda n), están dadas por

$$K_n = \frac{1}{2} \int_S |\nabla \psi_n|^2 dS = \frac{1}{2} \|\nabla \psi_n\|^2 \quad y \quad (199)$$

$$\eta_n = \frac{1}{2} \int_S |\Delta \psi_n|^2 dS = \frac{1}{2} \|\Delta \psi_n\|^2 \quad . \quad (200)$$

Los invariantes (209) y (197) implican que también se conserva el número espectral medio

$$\chi(t) = \chi(\psi(\vec{x}, t)) = \sqrt{\eta(t)/K(t)} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n / \sum_{n=0}^{\infty} K_n} = Cte \quad (201)$$

(Fjørtoft, 1953; Skiba, 2009). En particular, si el flujo ψ es un polinomio homogéneo de grado n (es decir, pertenece al espacio propio H_n), entonces $K = K_n$, $\eta = \eta_n$ y $\chi = \sqrt{n(n+1)}$. Así, el número espectral medio χ , representa la escala geométrica del flujo sobre S .

La ley de conservación (197) significa que la energía de la solución, no puede acumularse en el tiempo sólo en las cascadas grandes, o sólo en las cascadas pequeñas, por lo tanto, el término no lineal $J(\psi, \Delta \psi)$ en la ecuación (103), distribuye la energía cinética entre diferentes escalas de tal manera que número el espectral medio no cambia (Skiba, 1989; Skiba, 2009).

Todo lo anterior, permite introducir el siguiente procedimiento para encontrar una ley de conservación para perturbaciones: aplicando el producto interno (87) a cada una de las ecuaciones (172) y (175) junto con la expresión $\Delta \psi' + \chi_n \psi'$, y usando las fórmulas relacionadas con el jacobiano (Skiba, 1989; Skiba, 2009):

$$\langle J(\Psi, f), \bar{f} \rangle = 0; \quad Re \langle J(\Psi, f), f \rangle = 0 \quad (202)$$

$$y \quad Re \langle J(\Psi, \mu), \Delta \Psi \rangle = 0 \quad (203)$$

se obtiene la siguiente ley de conservación, la cual como apunta Skiba (1993, 2000), fue establecida para perturbaciones infinitesimales de: a) una onda planetaria de Rossby estacionaria en el plano beta β por Gill (1974), y b) un flujo **PL** por Karunin (1970). Además, dicha ley no es más que la conservación de la pseudoenergía (Shepherd, 1990), y corresponde a Skiba (1993, 2000):

$$\frac{d}{dt} [\eta(t) - \chi_n K(t)] = 0 \quad (204)$$

para cualquier perturbación infinitesimal compleja; así como para cualquier perturbación finita real del flujo zonal en forma de **PL** (156) y la **onda R-H** estacionaria (167), es decir,

$$\frac{d}{dt} [\eta(t)] = \chi_n \frac{d}{dt} K(t) \quad (205)$$

Donde la energía de la perturbación corresponde a

$$K(t) = \frac{1}{2} \|\nabla\psi'(t)\|^2 = \frac{1}{2} \|\psi'\|_1^2 \quad (206)$$

y la enstrofía de la perturbación está dada por

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \|\Delta\psi'(t)\|^2 = \frac{1}{2} \|\psi'\|_2^2 \quad (207)$$

Mientras que el valor

$$\chi(t) = \chi(\psi(\vec{x}, t)) = \sqrt{\eta(t)/K(t)} = \|\psi'\|_2^2 / \|\psi'\|_1^2 \quad (208)$$

es el número espectral medio de la perturbación ψ' . Así, se obtiene la siguiente afirmación (Skiba, 1989; Skiba, 2000):

Teorema 6. Cualquier perturbación de los flujos: **PL** (156) y la **onda R-H** (167) se desarrolla de manera tal que, su energía cinética $K(t)$ y su enstrofía $\eta(t)$ decrecen, permanecen constantes o crecen simultáneamente, de acuerdo con la relación de proporcionalidad (205) [ley de conservación].

En general, la norma de energía $\|\nabla\psi'(t)\|$, es más débil que la norma de enstrofía $\|\Delta\psi'(t)\|$, y un flujo arbitrario puede ser estable en la primera norma e inestable en la segunda. Sin embargo, de acuerdo a la expresión (205), los flujos (156) y (167) son estables o inestables en las dos normas simultáneamente.

5.7. Inestabilidad de un flujo en la forma de un PL y una onda R-H estacionaria usando el MMN

Es preciso notar que, cualquier resultado exacto sobre la inestabilidad de un flujo, es muy importante para probar algoritmos numéricos y programas

computacionales. Las condiciones de Rayleigh-Kuo y de Fjörtoft se pueden aplicar sólo para flujos zonales (unidimensionales).

Por esta razón, en esta sección se obtiene una condición más para la inestabilidad de un **modo normal** de los flujos (156) y (167), la cual es relativamente reciente (Skiba, 2000). También, es sólo la condición necesaria para la inestabilidad, sin embargo, es la única condición de inestabilidad para los flujos bidimensionales (167) (**ondas R-H**).

Cabe notar que, el procedimiento descrito puede aplicarse para cualquiera de los dos flujos mencionados, ya que en esencia se obtienen los mismos resultados, así, en lo subsecuente, sólo se enfatizan las diferencias entre cada caso de ser pertinente.

De nueva cuenta, si ψ es un flujo básico en forma de **PL** u **onda R-H** estacionaria, un modo normal de dicha solución está dado por

$$\psi' = H(\lambda, \mu)e^{\omega t} \quad (209)$$

donde de acuerdo a la sección 6.4, para un **PL**, H tiene la forma

$$H(\lambda, \mu) = Q(\mu)e^{im\lambda} \quad (210)$$

En (210), i es la unidad imaginaria, mientras que en (209) $\omega = \omega_r + i\omega_i$ y H es la amplitud de modo. La parte real ω_r de ω determina la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la amplitud de modo, mientras que su parte imaginaria ω_i caracteriza la frecuencia de modo. Así, un modo es: inestable si $\omega_r > 0$, amortiguado si $\omega_r < 0$, neutral si $\omega_r = 0$ y estacionario si $\omega_i = 0$; la energía y la enstrofia del modo están dadas por

$$K(t) = K_H e^{2\omega_r t} \quad (211)$$

$$\eta(t) = \eta_H e^{2\omega_r t} \quad (212)$$

En (211) y (212), la energía y la enstrofia de la amplitud de modo $H(\lambda, \mu)$ respectivamente, para una **onda R-H** están dadas por:

$$K_H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \sum_{m=-n}^n |H_n^m|^2 \quad y \quad (213)$$

$$\eta_H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^2 \sum_{m=-n}^n |H_n^m|^2 \quad (214)$$

Mientras que la energía y la enstrofia de la amplitud de modo $Q(\mu)$ respectivamente, para un **PL** tienen la forma:

$$K_H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n |Q_n^m|^2 \quad \text{y} \quad (215)$$

$$\eta_H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^2 |Q_n^m|^2 \quad (216)$$

Debido a (211) y (212), el número espectral $\chi(t) = \eta(t)/K(t)$ de un modo normal no depende del tiempo y coincide con el número espectral de su amplitud:

$$\chi_H = \eta_H/K_H \quad (217)$$

en otras palabras

$$\chi(t) = \chi_H \quad (218)$$

Usando la forma (205) de la ley de conservación (204), y las expresiones (213), (214)³¹ y (217), se obtiene

$$\omega_r(\eta_H - \chi_n K_H) = \omega_r(\chi_H - \chi_n) K_H = 0 \quad (217)$$

En otras palabras, la ecuación (217) es el requerimiento para que la pseudoenergía asociada con el crecimiento o decaimiento de los modos normales se desvanezca, lo cual es necesario para que su conservación y crecimiento exponencial sean simultáneos (Ripa ,1990).

Así, para cualquier modo que crece o decae, $\omega_r \neq 0$; mientras que para un modo inestable $\omega_r > 0$, por lo que (217) conduce a una condición necesaria para la inestabilidad exponencial del modo normal (209)³², es decir, se cumple sólo si

$$\chi_H = \frac{\eta_H}{K_H} = \chi_n = n(n+1) \quad (218)$$

Además, considerando la parte real del producto interno de cada una de las ecuaciones (178) y (179) con la expresión ΔH ³³, y usando las fórmulas (202) y (203), para una **onda R-H** y un **PL** respectivamente, se obtienen las relaciones:

$$\omega_r \|\Delta H\|^2 = -\chi_n \text{Re} \langle J(\Psi, H), \Delta H \rangle \quad (219)$$

³¹ O (215) y (216) para un flujo **PL**.

³² Considerando también la expresión (210) en el caso de un flujo **PL**.

³³ Con H de la forma (210) en el caso de un flujo **PL**.

$$\omega_r \|\Delta H\|^2 = -a\chi_n \operatorname{Re}\langle J(\Psi, H), \Delta H \rangle \quad . \quad (220)$$

Por lo que

$$\operatorname{Re}\langle J(\Psi, H), \Delta H \rangle < 0 \quad \text{y} \quad (221)$$

$$a\operatorname{Re}\langle J(\Psi, H), \Delta H \rangle < 0 \quad (222)$$

son las condiciones necesarias y suficientes para la inestabilidad exponencial de los modos (209) y (210) respectivamente.

En las dos secciones siguientes, se recapitulan los resultados anteriores y se estiman las tasas máximas de crecimiento de modos inestables, para los 2 flujos considerados.

5.8. Condición de inestabilidad para una onda R-H estacionaria y tasa máxima de crecimiento de sus modos inestables

De acuerdo a los resultados de la sección previa, se tiene el siguiente teorema sobre la inestabilidad exponencial de un modo normal de una **onda R-H** estacionaria:

Teorema 7. Sea $n \geq 2$. Un modo normal (209) de la **onda R-H** (167) del espacio $H_1 \oplus H_n$, es inestable si y sólo si se satisface la desigualdad (221). Además, debe cumplirse que el número espectral de Fjørtoft $\sqrt{\chi_H}$ [ver ecuación (217)] de la amplitud $H(\lambda, \mu)$, correspondiente a un modo inestable, sea igual a $\sqrt{n(n+1)}$, es decir, se debe satisfacer la condición (218) (Skiba, 2000).

Observación 2. En la afirmación anterior, se especifica que $n > 1$, para las **ondas R-H**, porque cualquier **onda R-H** de grado uno es linealmente estable (Skiba, 1989). Obviamente, la amplitud de cualquier modo que decae, debe satisfacer la condición (218).

Observación 3. El **Teorema 7** también muestra que en el estudio de la estabilidad lineal de una **onda R-H** (167), las series de Fourier para las perturbaciones, deben ser truncadas por un número $N > n$ (Skiba, 1998). De hecho, si se trunca una perturbación por un número $N \leq n$, entonces ninguno de los modos (209) será inestable.

El conocimiento de la máxima tasa de crecimiento posible de modos inestables, es importante para evaluar el grado de inestabilidad de un flujo. Ahora, se estimará la tasa máxima de crecimiento para modos inestables de la **onda R-H**, entonces:

Estimando el jacobiano $J(\Psi, H)$ con la norma (88) y usando para representar la velocidad del flujo básico la fórmula

$$\vec{U} = \hat{n} \times \nabla \Psi \quad (223)$$

se obtiene la desigualdad

$$\|J(\Psi, H)\| \leq \max_S |\nabla \Psi| \cdot \|\nabla H\| \leq \max_S |\vec{U}| \cdot \|\nabla H\| = C \cdot \|\nabla H\| \quad (224)$$

Donde C es la máxima velocidad del flujo sobre la esfera y está dada por

$$C = \max_S |\nabla \Psi| = \max_S |\vec{U}| \quad (225)$$

Ahora, se aplica desigualdad de Schwartz $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ al producto interno en (219)

$$|\langle J(\Psi, H), \Delta H \rangle| \leq \|J(\Psi, H)\| \cdot \|\Delta H\|$$

$$|\omega_r| \cdot \|\Delta H\|^2 = \chi_n Re \langle J(\Psi, H), \Delta H \rangle \leq \chi_n \|J(\Psi, H)\| \cdot \|\Delta H\| \quad (226)$$

De (226) y considerando la desigualdad (224), se llega a

$$|\omega_r| \leq C \chi_n \frac{\|\nabla H\|}{\|\Delta H\|} = C \chi_n \frac{\|\psi'\|_1^2}{\|\psi'\|_2^2} = C \chi_n \chi_H^{-1/2} = \chi_n^{1/2}. \quad (227)$$

En la última estimación, se usó la condición de inestabilidad (218). Así, queda demostrada la siguiente afirmación:

Teorema 8. La máxima tasa de crecimiento (o decaimiento) de modos inestables de la **onda R-H** (167) está limitada por

$$|\omega_r| \leq \chi_H \max_S |\vec{U}| = \sqrt{n(n+1)} \max_S |\vec{U}| \quad (228)$$

De acuerdo a (228), la tasa de crecimiento decrece con el grado n y la velocidad del flujo básico $|\vec{U}|$, es decir, mientras más grande es la escala del flujo básico, más lenta es la tasa de crecimiento de sus modos inestables (Skiba, 2000).

Observación 4. Notemos que el número espectral $\chi_H = n(n + 1)$, aparece tanto en la condición de inestabilidad (218) como en la estimación del crecimiento de perturbaciones (228). Fjörtoft (1953) introdujo el número espectral $\sqrt{\chi} = \sqrt{\eta/K}$ para caracterizar las cascadas de energía en un fluido bidimensional ideal e incompresible.

Debido a los resultados descritos arriba, puede afirmarse que el número espectral de Fjörtoft, tiene un papel importante en la inestabilidad lineal de flujos sobre la esfera.

Observación 5. La tasa máxima de crecimiento es proporcional a la amplitud de la onda (Baines, 1976). El **Teorema 8** especifica estos resultados, manifestando que la tasa máxima de crecimiento (decaimiento) de un modo decrece directamente con la amplitud (velocidad $\vec{U} = \hat{n} \times \nabla \Psi$) y el grado n de la **onda R-H** (167).

5.9. Condición de inestabilidad para un flujo en forma de PL y tasa máxima de crecimiento de sus modos inestables

En el caso de la inestabilidad exponencial de un modo normal de un flujo en forma de **PL**, se tiene lo siguiente:

Teorema 9. Sea $n \geq 3$ y $m \neq 0$. Un modo normal (209), (210) del flujo **PL** (156), es inestable si y sólo si se satisface la expresión (222) o la desigualdad

$$\int_{-1}^1 (1 - \mu^2) (P_n)_{\mu\mu} (Q_\mu^r Q^i - Q^r Q_\mu^i) d\mu < 0 \quad . \quad (229)$$

Además, debe cumplirse que el número espectral de Fjörtoft $\sqrt{\chi_H}$ [ver ecuación (217)] de la amplitud $Q(\mu) = Q^r(\mu) + iQ^i(\mu)$, correspondiente a un modo inestable, sea igual a $\sqrt{n(n + 1)}$, es decir, se debe satisfacer la condición (218) (Skiba, 2000).

Observación 6. En la afirmación anterior, se especifica para los **PLs** que $n \geq 3$, ya que cualquier **PL** de grado uno o dos es linealmente estable. Además, cualquier modo normal de un flujo **PL** de grado n es estable si $m = 0$ ó $|m| \geq n$ (Skiba, 1989).

La estimación de la tasa máxima de crecimiento (o decaimiento) para modos inestables (que decaen) de un flujo **PL**, se realiza de la misma forma que en la sección anterior (6.8), y se obtiene el siguiente:

Teorema 10. Sea $n \geq 3$ y $m \neq 0$. La máxima tasa de crecimiento (o decaimiento) de modos inestables (209), (210) del flujo **PL** (156), está limitada por

$$|\omega_r| \leq \chi_n^{1/2} \max_S |\vec{U}| = \chi_n^{1/2} a \max_S |\nabla P_n| \quad (230)$$

(Skiba, 2000).

Observación 7. Dado que $|\nabla P_n| \approx n^{3/2}$, $\chi_n^{1/2} a \max_S |\nabla P_n| \approx a n^{5/2}$ [ver fórmula (B.8) en Skiba, 1994].

Así, la tasa de crecimiento (decaimiento) de modos no neutrales (209), (210), decrece directamente con la amplitud a y el grado n del flujo polinomial (156). Notemos que si $\chi_H \geq \chi_n$ para cualquier perturbación del subespacio invariante I_m con $|m| \geq n$, obtenemos que todos los modos de tal subespacio son estables.

La estabilidad algebraica de cualquier perturbación de I_m con $|m| \geq n$ se muestra en Skiba (1989) y en (Skiba & Adem, 1998); de igual forma, su estabilidad en el sentido de Lyapunov se prueba en Skiba (1993).

Observación 8. Notemos que para un flujo **PL** (flujo zonal), la nueva condición (218) complementa la de Rayleigh-Kuo; ya que mientras la última está relacionada con la estructura del flujo **PL**, la condición (218) establece una estricta relación entre el número espectral del modo inestable y el grado del flujo **PL**.

En otras palabras, la escala geométrica de las perturbaciones inestables es proporcional a la escala geométrica del flujo **PL**, o bien, es inversamente proporcional al grado n del flujo (156).

5.10. Ortogonalidad de modos inestables y el flujo básico

En este apartado, se utiliza el producto interno relacionado con la norma de energía:

$$\langle \Psi, h \rangle_K = \langle -\Delta \Psi, h \rangle = \int_S \nabla \Psi \cdot \nabla \bar{h} \, dS \quad (231)$$

Si Ψ es un flujo básico, entonces $\langle \Psi, \Psi \rangle_K = \int_S |\nabla \Psi|^2 dS = 2K$, donde K es la energía cinética del flujo. Ahora se demuestra que cualquier modo inestable del flujo **PL** o la **onda R-H**, es ortogonal a dicho flujo básico en el producto interno (231):

$$\langle H, \Psi \rangle_K = 0 \quad . \quad (232)$$

Aplicando el producto interno (87) a cada una de las ecuaciones (178) y (179) junto con el flujo básico Ψ , y usando nuevamente las relaciones (202) y (203), se obtiene el resultado: $\omega \langle \Delta H, \Psi \rangle = 0$, donde H es la amplitud de modo. Ya que $\omega_r > 0$ para modos inestables, entonces $\langle \Delta H, \Psi \rangle = 0$, y por lo tanto

$$\langle H, \Psi \rangle_K = -\langle \Delta H, \Psi \rangle = 0 \quad (233)$$

para cualquier modo inestable. El significado físico de este resultado, es que el campo de velocidad $\vec{v} = \hat{n} \times \nabla \Psi$ generado por el modo inestable, es ortogonal al campo de velocidad $\vec{U} = \hat{n} \times \nabla \Psi$ del flujo básico:

$$\langle \vec{v}, \vec{U} \rangle = \int_S \vec{v} \cdot \vec{U} dS = \int_S \nabla H \cdot \nabla \Psi dS = -\langle \Delta H, \Psi \rangle = 0. \quad (234)$$

Se debe notar que en el caso de un **PL** (156), la ecuación (233) se reduce a $\langle Q, P_n \rangle = 0$. Así, la componente $Q_n^0 = \langle Q, P_n \rangle$ de la amplitud $Q(\mu)$ es igual a cero para cualquier modo no estacionario, inestable o que decae.

5.11. Inestabilidad de Lyapunov de una onda R-H no zonal

El estudio de la estabilidad lineal, tiene dos restricciones principales: todas las amplitudes de las perturbaciones son infinitesimales, y sólo el estado inicial del proceso de inestabilidad puede ser analizado. De igual forma, si la solución básica no es estacionaria, entonces el análisis de estabilidad lineal se vuelve más complicado.

Desde el punto de vista matemático, la estabilidad de una solución en el sentido de Lyapunov, es el concepto más fuerte y estricto (Liapunov, 1966). La “estabilidad de Lyapunov”, garantiza la ausencia de crecimiento tanto exponencial como algebraico de perturbaciones. Así, una solución puede ser inestable en el sentido de Lyapunov, incluso aunque no exista crecimiento exponencial de sus perturbaciones.

El método de Lyapunov para estudiar la estabilidad, es igualmente aplicable a soluciones básicas estacionarias y no estacionarias. Además, la “estabilidad de

Lyapunov”, caracteriza el comportamiento de perturbaciones sobre el intervalo completo de tiempo (t_0, ∞) , donde t_0 es un instante inicial. Se debe notar también que, el estudio de la “estabilidad de Lyapunov” de cualquier **onda R-H**, sin pérdida de generalidad, puede reducirse al estudio de la estabilidad de la correspondiente solución estacionaria.

Teorema 11. La componente de la súper-rotación $-\omega\mu$ de la **onda R-H** (165), no tiene ninguna influencia sobre su estabilidad en las normas relacionadas con la energía y de enstrofía, es decir, en ambas normas, la **onda R-H** tiene las mismas propiedades de estabilidad que su parte $\psi_n \equiv \psi_n(\lambda - C_n t, \mu)$ del subespacio H_n (Skiba, 2000, 2004).

Del **Teorema 11**, se obtiene el

Corolario 1. Sea $n = 1$, es decir, la **onda R-H** (165) pertenece al subespacio H_1 . La energía cinética (y la enstrofía) de una perturbación arbitraria se conserva con el tiempo (Skiba, 2000, 2004).

De acuerdo con el **Corolario 1**, cualquier **onda R-H** del subespacio H_1 es estable. Consideremos ahora la estabilidad de la **onda R-H** (165) del subespacio $H_1 \oplus H_n$ para $n \geq 2$. Denominaremos a la **onda R-H** no zonal si $\psi_n^m \neq 0$, para al menos una m ($1 \leq |m| \leq n$).

Teorema 12. Sea $n \geq 2$, entonces cualquier **onda R-H** (165) no zonal del subespacio $H_1 \oplus H_n$, es inestable en el sentido de Lyapunov en el conjunto M_-^n , en las normas relacionadas con la energía y la enstrofía (Skiba, 2004).

Demostración. Por el **Teorema 6**, es suficiente demostrar la inestabilidad solamente en la norma relacionada con la energía. Debido al **Teorema 11**, suponemos, sin pérdida general, que $\omega = 0$, y por lo tanto, la **onda R-H** pertenece al subespacio H_n y tiene la forma de la ecuación (166),

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \psi_n(\lambda - C_n t, \mu) = \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m(\lambda - C_n t, \mu)$$

donde $C_n = -2/\chi_n$ [ecuación (152)]; y debido a que la onda (166) es no zonal, $\psi_n^m \neq 0$ para alguna m ($1 \leq m \leq n$). De acuerdo con la definición de estabilidad según Lyapunov (Liapunov, 1966; LaSalle & Lefschetz, 1961; ver también la **Definición 1**, sección 1.5), se toma el valor

$$\varepsilon = \{8\chi_n \sum_{k=1}^n |\psi_n^k|^2\}^{1/2}. \quad (235)$$

De acuerdo a lo planteado, para la onda (166) seleccionamos una perturbación de la forma $\psi'(\lambda, \mu, t) = \psi(\lambda, \mu, t) - \Psi(\lambda, \mu, t)$ [ecuación (158)], de tal manera que $\|\nabla\psi'(0)\| < \delta$, donde $\delta > 0$, es tan pequeña como se requiera. Entonces, se demuestra que independientemente del valor de δ y del momento $t_1 \geq 0$ elegido, hay un momento $\tau > t_1$ tal que $\|\nabla\psi'(\tau)\|$ excede a ε . Para un ε dado por (235) y un δ arbitrariamente pequeño, consideremos la perturbación $\psi' = \psi - \Psi$ generada por una solución más de la **onda R-H**:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = -\frac{\delta}{2}Y_1^0(\mu) + \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m(\lambda - \hat{C}_n t, \mu) \quad (236)$$

también del subespacio $H_1 \oplus H_n$, donde $\hat{C}_n = \delta/2 - (\delta + 2)/\chi_n$, de acuerdo con (148). Entonces la energía de la perturbación [de acuerdo a (206)] será

$$K(t) = \frac{\delta^2}{4} + 2\chi_n \sum_{m=1}^n |\psi_n^m|^2 \{1 - \cos m(\hat{C}_n - C_n)t\} \quad (237)$$

Y $\hat{C}_n - C_n = \delta(\chi_n - 2)/2\chi_n$. Dado que $n \geq 2$, $\chi_n > 2$ y $\hat{C}_n - C_n \neq 0$ y debido a la ecuación (237), $K(0) = \delta^2/4$; por lo tanto, $\|\nabla\psi'(0)\| = \{2K(0)\}^{1/2} < \delta$ en el momento inicial $t_0 = 0$. Sin embargo, si $t = \tau_j = \pi(2j + 1)/(\hat{C}_n - C_n)$ (donde $j = 0, 1, 2, \dots$), entonces $K(\tau_j) \geq \delta^2/4 + \varepsilon^2/2$, y $\|\nabla\psi'(\tau_j)\| = \{2K(\tau_j)\}^{1/2} > \varepsilon$.

Ya que la secuencia $\{\tau_j\}$ tiende al infinito con j , es imposible encontrar un momento $t_1 \geq t_0$, a manera de satisfacer $\|\nabla\psi'(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_1$. Por lo tanto, la onda (166) [y por consiguiente la onda (165)] es inestable en el sentido de Lyapunov. Así, el Teorema 12 queda demostrado.

Se debe notar que, el mecanismo de inestabilidad en el sentido de Lyapunov de la **onda R-H** no zonal descrita anteriormente, no tiene nada en común con la inestabilidad orbital (Poincaré) (Verhulst, 1996). De hecho, la órbita de la solución (236) estará siempre en un "tubo" de radio ε (ver figuras 2 y 3, sección 1.5), el cual cubre la órbita de la **onda R-H** básica. Esto significa que para cualquier instante t_1 , habrá un instante t_2 , tal que la norma de energía de la diferencia $\psi(\lambda, \mu, t_1) - \Psi(\lambda, \mu, t_2)$ no será mayor que ε .

La perturbación $\psi' = \psi - \Psi$ generada por las soluciones (236) y (166), pertenece al subespacio $H_1 \oplus H_n$ y precisamente varía en el subespacio H_n ; además, ψ' no es ortogonal a Ψ .

Introduciendo ahora una norma apropiada para el estudio de la inestabilidad de la **onda R-H** (165),

$$\|\psi'\|_* = \|\Delta\psi' + \chi_n\psi'\| + \|\nabla\psi'\| \quad (238)$$

la cual es la suma de la seminorma $\|\Delta\psi' + \chi_n\psi'\|$ en el espacio $C_0^\infty(S)$ y la norma relacionada con la energía $\|\nabla\psi'\|$; se observa que dicha norma (238) para la perturbación ψ' , se desarrolla de la misma forma que la norma relacionada con la energía $\|\nabla\psi'\|$, puesto que $\Delta\psi' + \chi_n\psi'$ es invariable por pertenecer a H_1 , y la norma $\|\Delta\psi' + \chi_n\psi'\|$ no varía.

Por lo tanto, su mecanismo es idéntico al de una solución periódica de la ecuación del péndulo no lineal (Andronov et al. ,1987), y consiste en oscilaciones asincrónicas de dos **ondas R-H** causadas por un corrimiento $\hat{C}_n - C_n (\neq 0)$ de sus velocidades de fase. Notemos que si $n = 1$ entonces $\hat{C}_1 = C_1$ debido a (166), y por consiguiente, $K(t) = Cte$ de acuerdo con el Corolario 1.

5.12. Método espectral para analizar la inestabilidad de modos normales

De acuerdo a la sección 5.1, la evolución de una perturbación infinitesimal $\psi'(\lambda, \mu, t)$ del flujo básico $\Psi(\lambda, \mu)$ se describe por medio de la ecuación (162), aquí reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta' = \mathcal{L}\zeta' ; \zeta'|_{t=t_0} = \zeta'_0 \quad (239)$$

donde: $\zeta' = \Delta\psi'$ es la perturbación de la vorticidad,

$$\mathcal{L}\zeta' = -J(\Psi, \zeta') - J(\Delta^{-1}\zeta', \tilde{q}) ; \psi' = \Delta^{-1}\zeta' \quad (240)$$

es un operador lineal definido sobre funciones suficientemente suaves valuadas en los complejos, $\tilde{q} = \Delta\Psi + 2\mu$ es la vorticidad absoluta del flujo básico. La matriz que representa al operador \mathcal{L} en el subespacio H_n está dada por (Pérez-García & Skiba, 2001):

$$L_{\alpha\gamma} = -\langle J(\Psi + \chi_\gamma^{-1}\tilde{q}, Y_\gamma), Y_\alpha \rangle \quad (241)$$

con lo que en el subespacio H_n , el problema (239) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \vec{\zeta}' = L\vec{\zeta}' \quad (242)$$

Por otra parte, cada elemento de la matriz (241), puede escribirse como

$$L_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta}^n B_{\beta\alpha\gamma}\tilde{\zeta}'_{\beta} + D_{\alpha\gamma} \quad (243)$$

(Skiba, 1989; Pérez-García & Skiba, 2001) donde $D_{\alpha\gamma} = i2m_\gamma\chi_\gamma^{-1}\delta_{\alpha\gamma}$ es el elemento diagonal imaginario puro de L , ya que $\delta_{n_\alpha n_\gamma}\delta_{m_\alpha m_\gamma}$ es el producto de dos deltas de Kronecker y

$$B_{\beta\alpha\gamma} = i(\chi_\beta^{-1} - \chi_\gamma^{-1}) \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} [m_\beta P_\beta(\mu)H_\gamma(\mu) - m_\gamma P_\gamma(\mu)H_\beta(\mu)] d\mu$$

es el coeficiente de interacción triada no lineal, y la integral se calcula con fórmulas de cuadratura Gaussiana (Machenhauer, 1979; Pérez-García & Skiba, 2001).

Como se mostró en la sección 5.2, al considerar una perturbación infinitesimal ψ' en la forma de un modo normal

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = e^{\omega t} H(\lambda, \mu); \quad \zeta'(\lambda, \mu, t) = \Delta H(\lambda, \mu) e^{\omega t} \quad (244)$$

se llega a el problema espectral dado por la ecuación (177), reescribiendo éste para el operador \mathcal{L} y la correspondiente función característica $E = \Delta H(\lambda, \mu)$, en la forma $\mathcal{L}E = \mathcal{L}\Delta H(\lambda, \mu) = -[J(\Psi, \Delta H) + J(H, \tilde{q})]$, se obtiene el problema espectral diferencial:

$$\omega E = \mathcal{L}E \quad (245)$$

aquí, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ es el valor característico (adimensional). Dado que la amplitud

$$H(\lambda, \mu) e^{\omega t} = H_r(\lambda, \mu) + iH_i(\lambda, \mu) = |H(\lambda, \mu)| e^{i\theta},$$

donde $\theta = \theta(\lambda, \mu) = \text{Arg}H(\lambda, \mu) = \arctan\{H_i(\lambda, \mu)/H_r(\lambda, \mu)\}$ es la fase inicial del modo, la función de corriente de un modo normal (244) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda, \mu, t) &= |H(\lambda, \mu)| e^{\omega_r t} \cos[\text{arg}H(\lambda, \mu) + \omega_i t] \\ &= e^{\omega_r t} [H_r \cos(\omega_i t) + H_i \text{sen}(\omega_i t)] \end{aligned}$$

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = |H(\lambda, \mu)| e^{\omega_r t} e^{i(\theta + \omega_i t)} \quad (246)$$

Por lo tanto, recordando lo mencionado en la sección 5.7, un modo normal (244) es: inestable si $\omega_r > 0$, amortiguado si $\omega_r < 0$, neutral si $\omega_r = 0$ y estacionario si $\omega_i = 0$. Además, para el modo (246), la parte real ω_r determina la razón de crecimiento o decrecimiento exponencial para el umbral temporal dimensional

$\tau_e = \frac{1}{2\pi|\omega_r|}$, mientras que ω_i determina la frecuencia de oscilación con periodo dimensional $T = \frac{1}{|\omega_i|}$, ambos en dimensiones de días ³⁴.

De esta forma, el problema espectral diferencial $\omega E = \mathcal{L}E$ se reduce al problema algebraico

$$\omega \vec{e} = L\vec{e} \quad (247)$$

en el subespacio H_n , donde $\vec{e} = \{e_\gamma\} = \{-\chi_\gamma H_\gamma\}$ es el vector característico cuyas componentes son los coeficientes de Fourier e_γ , de la función característica E con $n_\gamma \leq N$. En todos los experimentos, el problema espectral (247), es resuelto con la factorización QR (Pérez-García & Skiba, 2001).

5.13. Condiciones de inestabilidad para flujos

Se recapitulan a continuación, las condiciones de inestabilidad teóricas usadas para probar un algoritmo numérico de estabilidad de modos normales (Pérez-García & Skiba, 1999), para flujos zonales en forma de **PL** y **ondas R-H** sobre la esfera S :

Caso 1. Sea $\Psi(\mu)$ un flujo zonal básico sobre S . Entonces un modo normal $\psi'(\lambda, \mu, t) = Q(\mu)e^{im\lambda}e^{\omega t}$ [(209), (210)] puede ser inestable sólo si la derivada $\frac{d\tilde{\Omega}}{d\mu}$ de la ecuación de la vorticidad absoluta $\tilde{\Omega} = \Delta\Psi + 2\mu$ del flujo $\Psi(\mu)$, cambia de signo al menos en un punto del intervalo $(-1,1)$ [Kuo, 1949].

Para un flujo **PL** (156), $\tilde{\Omega}_\mu = 2 - a\chi_n \frac{dP_n^0(\mu)}{d\mu}$. Así, existe una amplitud crítica a , para la que se desarrolla inestabilidad, debido a rotación de la esfera.

Caso 2. Cualquier modo $\psi'(\lambda, \mu, t) = Q(\mu)e^{im\lambda}e^{\omega t}$ del flujo **PL** (156) de grado $n = 1$ o $n = 2$ es linealmente estable (Baines, 1976; Skiba, 1989).

Por ejemplo, si $n = 1$, la derivada $\frac{d\tilde{\Omega}}{d\mu} = 2(1 - a)$ tiene el mismo signo en el intervalo $(-1,1)$ para cualquier valor de a , por lo que no se cumple la condición de Rayleigh-Kuo, entonces el flujo es estable y todos los modos son neutrales. Si $n = 2$, entonces $\frac{d\tilde{\Omega}}{d\mu} = 2(1 - 2a\mu)$, $\mu = \frac{1}{2a}$ es el punto de inflexión, sin embargo

³⁴ Cabe mencionar que $\Omega = \frac{\pi}{43200 s}$ y $t = \Omega t^* = \frac{2\pi}{día} t$, donde la dimensión de t^* está dada en segundos.

el flujo $\Psi(\mu) = aP_2^0(\mu)$ es estable para cualquier valor de a (Baines, 1976). Por lo tanto la existencia de puntos de inflexión, es sólo una condición para la inestabilidad.

Caso 3. Sea $n \geq 3$. Entonces cualquier modo $\psi'(\lambda, \mu, t) = Q(\mu)e^{im\lambda}e^{\omega t}$ del flujo **PL** (156) puede ser inestable sólo si el número de onda zonal m del modo satisface la condición $0 < |m| < n$. A pesar de la existencia de esta condición, la inestabilidad para flujos **PL** de la forma $aP_3^0(\mu)$, todavía no se comprende totalmente, en este trabajo, se muestran experimentos numéricos con $n = 1, \dots, 7$. (Skiba & Adem, 1998).

Caso 4. Sea Ψ un **PL** (156) o una **onda R-H** (167), entonces la amplitud H de cada modo inestable o que decae (209), (210), debe satisfacer la condición [ecuación (218)]:

$$\chi_H = \frac{\eta_H}{K_H} = \chi_n = n(n+1) \quad (\text{Skiba, 2000, 2009}).$$

Caso 5. Sea $\Psi(\mu)$ un flujo básico zonal, el cual es una solución exacta de la **EVB**. Entonces, la evolución de la energía cinética total $K(\psi') = \frac{1}{2} \|\nabla\psi'(t)\|^2$ de una perturbación infinitesimal $\psi'(\lambda, \mu, t)$, para un flujo $\Psi(\mu)$ sobre la esfera S satisface la ecuación

$$\frac{dK(t)}{dt} = - \int_S \sqrt{1-\mu^2} \frac{d}{d\mu} U(\mu) \cdot (u'v') dS - \int_S \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} U \cdot (u'v') dS \quad (248)$$

(Pérez-García & Skiba, 2001). Donde de acuerdo a la ecuación (106), las componentes de la velocidad tanto del flujo básico como de la perturbación, están dadas respectivamente por:

$$U = -\sqrt{1-\mu^2} \Psi_\mu \quad (249)$$

$$u' = -\sqrt{1-\mu^2} \psi'_\mu; \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \psi'_\lambda \quad (250)$$

La ecuación (248) es útil en el estudio de la estructura espacial de perturbaciones inestables locales sobre la esfera. Usualmente, las perturbaciones importantes están localizadas en las regiones relacionadas con patrones que distinguen el flujo básico, similares a la ecuación de energía de la perturbación sobre el plano β (Pedlosky, 1987); su análogo esférico (248) tiene una integral más, la cual contiene el producto de la velocidad básica U con $u'v'$ (Pérez-García & Skiba, 2001).

Mientras que la primera integral, domina principalmente en la lateral de las corrientes de chorro básico, localizado en los trópicos y en las latitudes medias (donde, tanto $\frac{d}{d\mu}U(\mu)$ como $\sqrt{1-\mu^2}$ son relativamente grandes), la segunda integral puede ser significativa, en las partes centrales de las corrientes de chorro intenso (zonas donde la velocidad U es grande), y especialmente cuando tales *jets* se localizan en las regiones polares (donde $\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$ es relativamente grande) [Pérez-García & Skiba, 2001].

En la ecuación (248), el signo de $\frac{dK}{dt}$ depende del signo de los productos $\frac{d}{d\mu}U(\mu) \cdot (u'v')$ y $U \cdot (u'v')$ en varias regiones sobre la esfera.

En el caso cuando la primera integral es dominante, se puede afirmar que el crecimiento (o decrecimiento) de la energía de la perturbación, tiene lugar en las regiones donde la inclinación de los contornos de la función de corriente de la perturbación ψ' , es opuesta a (o coincide con) la inclinación del perfil de la velocidad básica $U(\mu)$, es decir, en las regiones donde el producto $\frac{d}{d\mu}U(\mu) \cdot (u'v')$ es positivo (negativo) (Pedlosky, 1987) [Pérez-García & Skiba, 2001].

5.14. Estabilidad lineal de flujos zonales

Este tipo, comprende aquellos flujos perturbados de la forma $\psi(\lambda, \mu, t) = \Psi(\mu) + \psi'(\lambda, \mu, t)$, donde $\Psi(\mu)$ es la función de corriente básica; además, la estructura del modo (244) es

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = Q(\mu)e^{im\lambda}e^{\omega t} = \text{Re}Q(\mu)e^{im(\lambda-ct)} \quad (251)$$

Aquí $c = c_r + ic_i$ es la velocidad de fase compleja, con $c_r = -\frac{\omega_i}{m}$ y $c_i = -\frac{\omega_r}{m}$.

Para comprobar los resultados numéricos del estudio de la estabilidad, éstos se comparan con las características teóricas siguientes (Pérez-García & Skiba, 2001):

- a) Los valores característicos deben aparecer en grupos de 4, localizados simétricamente alrededor del origen del plano complejo (Arnold, 1965).
- b) Cualquier flujo polinomial de grado uno o dos, debe ser estable y tener sólo modos neutrales (Caso 2).
- c) Para un flujo básico **PL** de grado n , el número zonal m de cada modo inestable, debe pertenecer al intervalo $0 < |m| < n$ (Caso 3).

- d) Cualquier flujo **PL** de grado n y también alguna **onda R-H** zonal, pueden tener modos inestables, sólo si se cumple la condición de Rayleigh-Kuo (Caso 1).
- e) Si el grado n de algún flujo **PL** es impar, entonces todos los modos se dividen en dos grupos: los modos simétricos y los modos antisimétricos respecto al ecuador (Skiba ,1989; Skiba & Adem, 1998).
- f) El número espectral de la amplitud de cada modo inestable, debe ser igual a un número específico (Caso 4).
- g) La amplitud de cada modo inestable debe ser ortogonal al flujo básico en el producto interno de la energía (Skiba, 2000).
- h) La razón de crecimiento del modo más inestable, es acotada superiormente por una estimación teórica (Skiba, 2000).
- i) La generación y disipación de la energía de la perturbación puede explicarse con la ayuda de la fórmula (248).

5.15. Estabilidad lineal de ondas R-H

Dichas ondas básicas, tienen la forma [ecuación (167)]:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) &= -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n H_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) & (252) \\ &= -\omega\mu + H_n^m P_n^m(\mu) \cos m\lambda .\end{aligned}$$

Donde $n \geq 2$, $\omega = \frac{2}{\chi_n - 2} \mu$ y $\chi_n = n(n + 1)$ [ecuación (145)]. Una **onda R-H**, está representada por el número de onda zonal m y el número de onda total n [es decir, la pareja (m, n)]. Además, la parte real de la perturbación (244), puede escribirse como

$$\psi_r'(\lambda, \mu, t) = e^{\omega_r t} \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n |H_n^m| P_n^m(\mu) \cos(m\lambda + \text{Arg} H_n^m + \omega_i t) \right\} . \quad (253)$$

6. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Ahora, se muestra la importancia y utilidad de contar con resultados teóricos (como los presentados anteriormente) sobre la estabilidad de modos normales de las soluciones exactas de la **EVB**. Este hecho, implica tener un referente para probar algoritmos numéricos y programas computacionales.

En las secciones siguientes, se muestran experimentos numéricos (distinguidos como **EN#**), recopilados y adaptados de: Pérez-García & Skiba (2001), Pérez-García (2001) y Skiba & Pérez-García (2005), primero para flujos zonales (distinguidos como caso A y caso B), y posteriormente para una **onda R-H**.

6.1. Estabilidad lineal de flujos zonales

Caso A. Flujo Polinomio de Legendre

Para cada **EN**, este flujo está descrito por el único **PL** de grado $n \geq 1$ como:

$$\Psi(\mu) = aP_n^0(\mu) \quad (254)$$

donde a es la amplitud. Para estos flujos, la estructura de la matriz de estabilidad L [ver ecuación (243)], fue analizada analíticamente por Skiba & Adem (1998).

EN # 1. Sea $n = 1$. Para este caso, la matriz L es diagonal, con elementos imaginarios puros $L_{\alpha\alpha}$, así, los valores característicos (**VCs**) coinciden con los elementos diagonales y por lo tanto, $\omega_r = 0$ para cualquier valor característico (**VC**). Por lo tanto, todos los modos son neutrales para cualquier valor de la amplitud a del flujo **PL**.

La amplitud de cada modo coincide con el correspondiente armónico esférico $Y_\alpha(\lambda, \mu)$, y por lo tanto, es simétrico o antisimétrico alrededor del ecuador, dependiendo de que $n - m$ sea par o impar.

EN # 2. Sea $n = 2$. Entonces la matriz L es tridiagonal, los cálculos muestran que $\omega_r = 0$, para todos los **VCs**, es decir, todos los modos son neutrales y por lo tanto, cualquier flujo **PL** de grado uno o dos es exponencialmente estable, lo cual concuerda con el **Caso 2**.

EN # 3. Sea $n = 3$ y $a = 0.08$. Aquí, si n es impar, se cumple la condición **e**), por lo tanto, la amplitud de todos los modos, puede ser de dos tipos: simétrica o antisimétrica alrededor del ecuador $\mu = 0$. El modo (244) más inestable es simétrico alrededor del ecuador, tiene los valores $\omega_r = 0.2073$, $m = 2$ (número de onda zonal) y $\chi_H = 11.999$ (número espectral de su amplitud); además, el valor correspondiente dado por el **Caso 3** es $\chi_3 = 12$.

El segundo modo inestable tiene los valores $\omega_r = 0.1576$, $m = 1$ (antisimétrico alrededor del ecuador), y $\chi_H = 11.999$. Los números espectrales χ_H calculados para cada modo normal, deben ser iguales o aproximarse al valor teórico $\chi_3 = 12 = 3(3 + 1) = n(n + 1)$, debido a que cada modo normal tiene el mismo flujo básico $\Psi(\mu) = aP_n^0(\mu)$.

El perfil de velocidad del flujo básico U se muestra en la figura 8a, las partes reales H_r de la amplitud del primero y segundo modo son más inestables, y se muestran en las figuras 11b y 11c respectivamente.

Todos los perfiles para los flujos básicos Ψ y la parte real de la amplitud H_r presentados, están en su forma adimensional. Por conveniencia y con el propósito de explicar los resultados se usa la formula (248). Las figuras del campo de función de corriente de la amplitud de la perturbación, se muestran en la figura 8b y 8c; así también las posiciones de los *jets* del flujo básico que son las crestas y los valles del campo de velocidades U en la figura 8a.

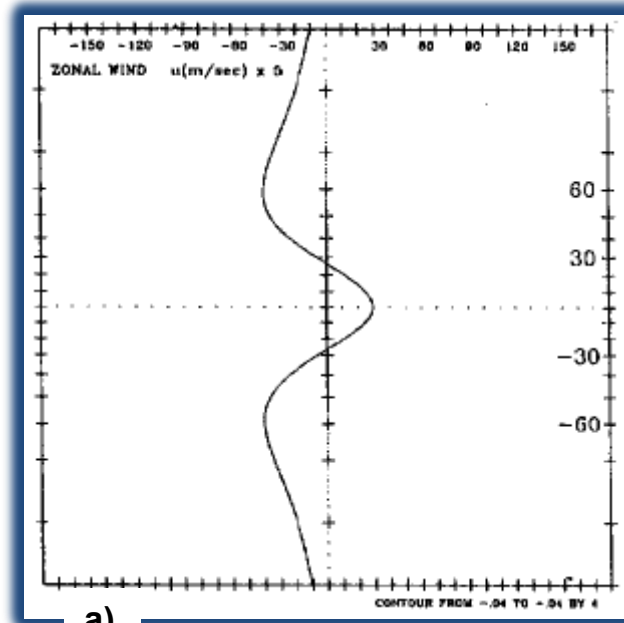
El perfil de la componente U , tiene la misma inclinación dentro de cada región (en el canal) entre las dos líneas vecinas marcadas con símbolos diferentes, y esta inclinación cambia al pasar de una región a otra. Puede notarse que en todos los modos, con valores de la amplitud distintos de cero, están confinadas en la misma banda latitudinal (Tung, 1981).

Un análisis de los campos muestra que ambas integrales de la fórmula (248), contribuyen a la inestabilidad para el modo más inestable (figura 8a), mientras que la primera integral es la que domina en generar la inestabilidad en el segundo modo (figura 8b). Puede notarse también que los valores de $u'v'$ son más pequeños en el segundo caso.

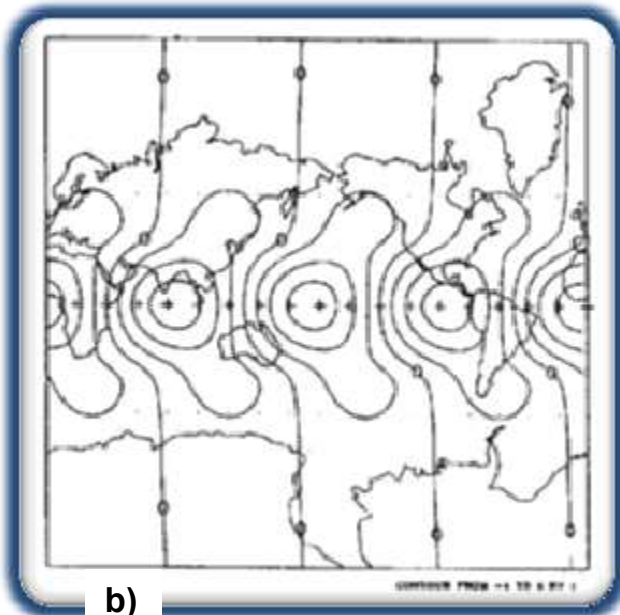
En los experimentos llevados a cabo, la magnitud de $|\omega_r|$ crece con el aumento de la amplitud a del flujo básico. Este hecho concuerda con el requerimiento teórico **h**). Se usa este requerimiento para controlar la razón de crecimiento de los modos más inestables. Los parámetros principales de los modos más inestables se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal (254) con $n = 3$ y $\alpha = 0.08$.

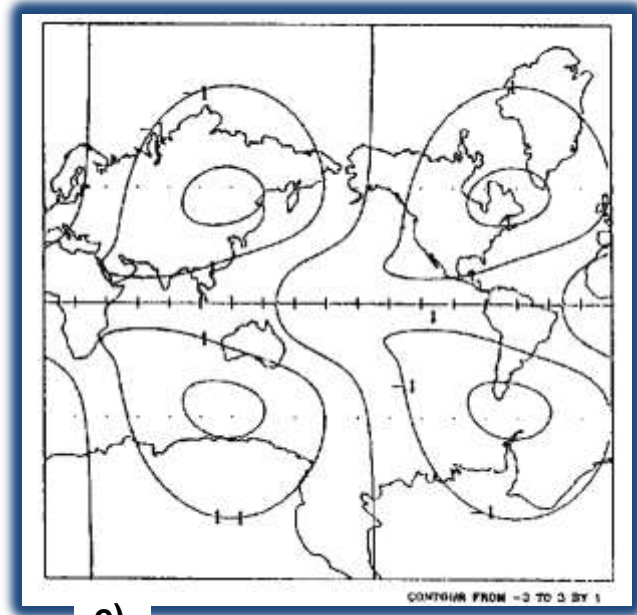
Modos	m	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.2073	-0.7334	11.999	0.76	1.36
2	1	0.1576	0.0670	11.999	1.00	14.90



a)



b)



c)

Figura 8 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de la velocidad $U(\mu)$ de un flujo en la forma de un PL (254) con $n = 3$ y $\alpha = 0.08$ (a), y contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ de los dos modos más inestables correspondientes a los valores de $\omega_r = 0.2073$ (b) y $\omega_r = 0.1576$ (c).

EN # 4. Sea $n = 4$ y $\alpha = 0.06$. El perfil de la velocidad del flujo básico $U(\mu)$ se muestra en la figura 9a, mientras que los contornos de la parte real $H_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los cuatro modos más inestables, se presentan en las figuras 9 (b-e).

Como n es par, la amplitud de todos los modos es asimétrica alrededor del ecuador, en este caso las perturbaciones se localizan básicamente en los dos hemisferios. El número espectral χ_H de su amplitud casi coincide con el valor teórico $\chi_4 = 20$, indicado por el **Caso 3**.

Un análisis de los campos, muestra que ambas integrales de la fórmula (248) contribuyen a la inestabilidad de los primeros tres modos más inestables (figura 9b-9d); para el cuarto modo inestable, la contribución de la primera integral a la generación de inestabilidad es más débil (figura 9e).

Los parámetros de estos modos se proporcionan en la siguiente tabla. Notemos que los requisitos **c), f) - h)** se cumplieron satisfactoriamente.

Tabla 2 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal PL (254) con $n = 4$ y $\alpha = 0.06$.

Modos	m	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.2604	-0.1099	19.9999	0.61	9.09
2	2	0.2373	0.6876	19.9999	0.67	1.45
3	3	0.1924	0.4080	19.9999	0.82	2.45
4	1	0.1485	-0.0578	20.0000	1.07	17.28

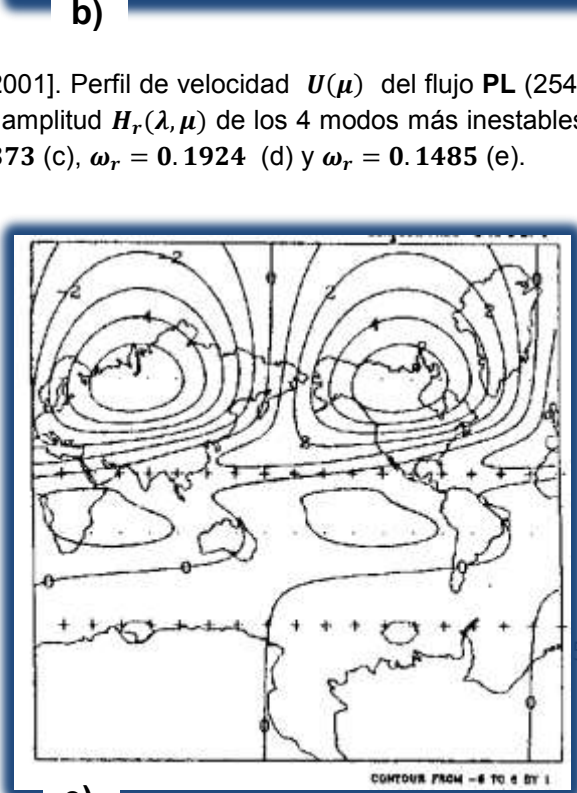
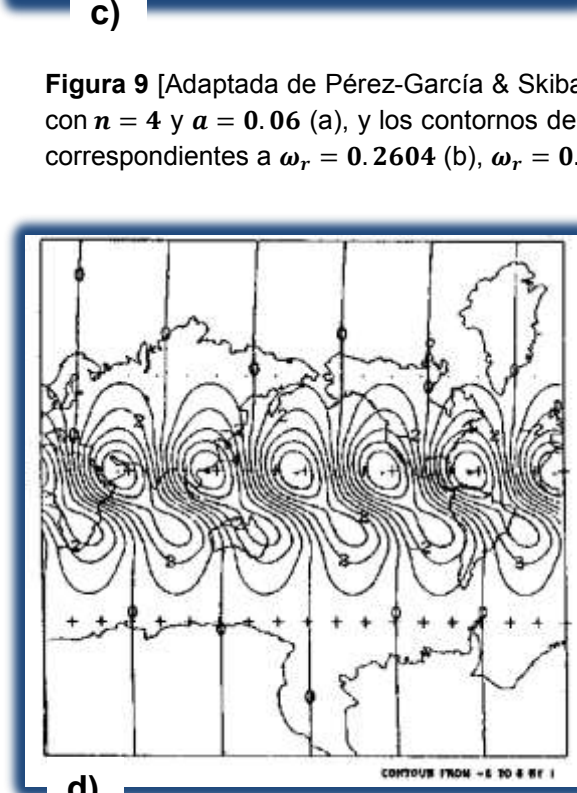
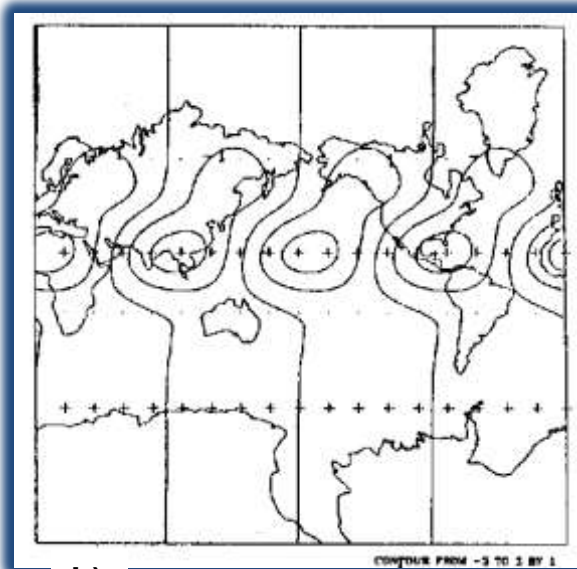
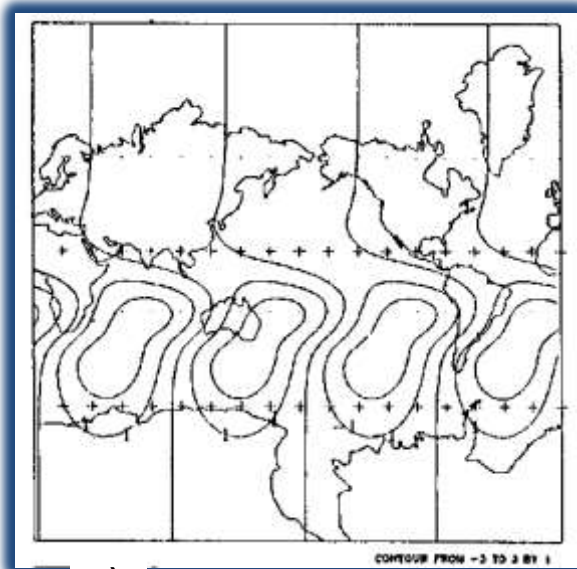
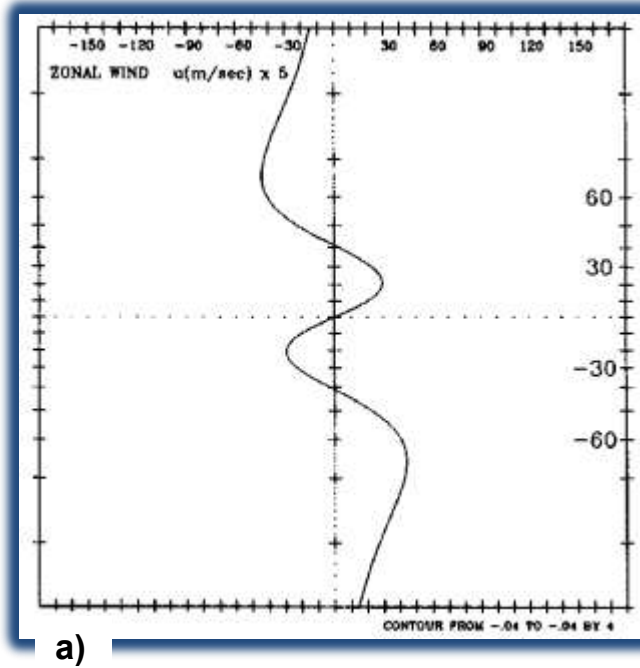


Figura 9 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad $U(\mu)$ del flujo PL (254) con $n = 4$ y $a = 0.06$ (a), y los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ de los 4 modos más inestables correspondientes a $\omega_r = 0.2604$ (b), $\omega_r = 0.2373$ (c), $\omega_r = 0.1924$ (d) y $\omega_r = 0.1485$ (e).

EN # 5. Sea $n = 5$ y $\alpha = -0.06$. El perfil de velocidad del flujo básico $U(\mu)$ se muestra en la figura 10a; los contornos de la parte de real $H_r(\lambda, \mu)$ de los modos más inestables se muestran en la figura 10b. El número de onda zonal del modo es $m = 2$, y la amplitud del modo es simétrica alrededor del ecuador (n es par).

Las perturbaciones se localizan en la vecindad de las dos corrientes de chorro y las dos integrales de la fórmula (248) contribuyen a la inestabilidad, dominando más la primera. Los parámetros principales de los siete modos más inestables se proporcionan en la tabla 3. Los requerimientos **c)**, **f)** - **h)** se satisfacen; el número de onda zonal dominante corresponde a $m = 2$ y $m = 3$.

Tabla 3 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo PL (254) con ahora $n = 5$ y $\alpha = -0.06$.

Modos	m	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.4922	0.0592	29.9999	0.32	16.87
2	2	0.4688	0.1809	30.0000	0.33	5.52
3	4	0.3630	0.4012	29.9999	0.43	2.47
4	3	0.3222	0.0110	30.0000	0.49	90.82
5	3	0.2745	0.3886	29.9999	0.57	2.57
6	2	0.1662	-0.6740	29.9999	0.95	1.48
7	1	0.1421	0.1088	29.9999	1.11	9.18

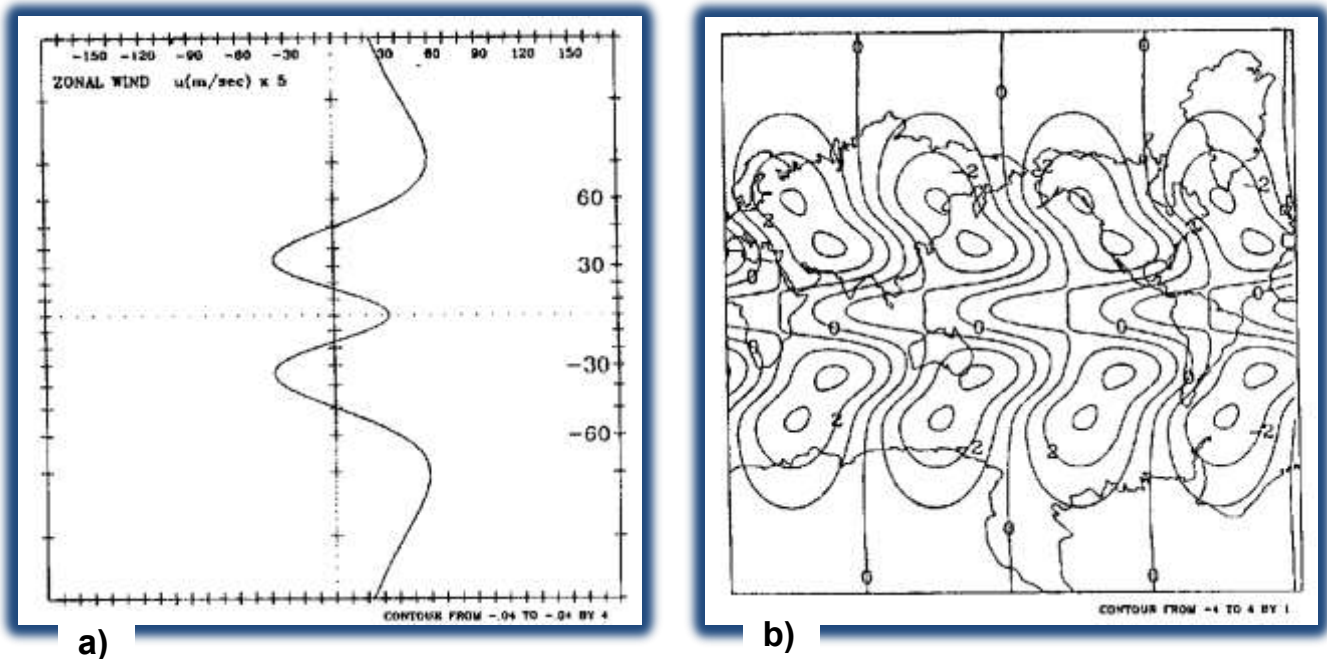


Figura 10 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad $U(\mu)$ del flujo PL (254) con $n = 5$ y $\alpha = -0.06$ (a), y contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ del modo más inestable correspondiente a $\omega_r = 0.4922$ (b).

EN # 6. Sea $n = 6$ y $a = 0.03$. Los parámetros principales de los siete modos más inestables se proporcionan en la tabla 4. Las perturbaciones inestables se localizan en el hemisferio norte (modos 2,3 y 4), en el hemisferio sur (modos 1,6 y 7), y en los trópicos (modo 5). Como se ve en la tabla 4 los requisitos **c), f) - h)** quedan satisfechos.

Tabla 4 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo **PL** zonal (254), cuando $n = 6$ y $a = 0.03$.

Modos	m	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.3471	0.1376	41.9999	0.45	7.26
2	2	0.3435	0.5340	41.9999	0.46	1.87
3	3	0.2700	0.3556	41.9999	0.58	2.81
4	4	0.2463	0.2251	42.0000	0.64	4.44
5	5	0.2137	-0.3101	42.0000	0.74	3.22
6	4	0.1994	0.3646	42.0000	0.79	2.74
7	3	0.1798	0.0786	42.0000	0.88	12.71

Caso B. Flujo en forma de ondas R-H zonales

Estas ondas básicas tienen la forma:

$$\Psi(\mu) = -\frac{2}{\chi_n - 2}\mu + aP_n^0(\mu) \quad (255)$$

Donde $\chi_n = n(n + 1)$, $n > 1$ y $a \neq 0$ es la amplitud de la onda. Éste es un caso particular (zonal) de la **onda R-H** estacionaria (167), la cual es una solución exacta de la **EV B** (103).

EN # 7. Consideremos el caso cuando $n = 5$ y $a = 0.0052$. El perfil de velocidad del flujo básico $U(\mu)$, es simétrico alrededor del ecuador (figura 11a) y tiene un *jet* en latitudes medias. Tenemos cuatro modos inestables diferentes, siendo el primero casi estacionario (ver tabla 5). El número espectral χ_H de la amplitud de estos modos, casi coincide con la estimación teórica $\chi_5 = 30$ indicado por el **Caso 3**.

La parte real del modo (251) puede escribirse también como

$$\psi_r'(\lambda, \mu, t) = |Q(\mu)|e^{\omega_r t} \cos m \left(\lambda + \frac{\theta(\mu)}{m} + \frac{\omega_i}{m} t \right) \quad (256)$$

o bien

$$\psi_r'(\lambda, \mu, t) = e^{\omega_r t} [Q_r(\lambda, \mu) \cos \omega_i t - Q_i(\lambda, \mu) \sin \omega_i t] \quad (257)$$

donde $\frac{\omega_r}{m}$ es la velocidad de fase, y la fase inicial $\frac{\theta(\mu)}{m}$ depende de μ . Para $\frac{\omega_r}{m}$ positivo (o negativo), el modo se mueve al oeste (al este). Los contornos de la parte real (256) del modo más inestable se proporcionan en la figura 11 (b-d), en los instantes $t = 0$, $t = T/8$ y $t = T/4$, respectivamente. El modo se mueve muy lentamente hacia el oeste.

La variación espacial del campo (256) con el tiempo, se debe a la dependencia del valor de μ de la fase inicial $\frac{\theta(\mu)}{m}$. La amplitud del modo más inestable es antisimétrico alrededor del ecuador (n es impar). Un análisis muestra que ambas integrales de la fórmula (248) contribuyen a la inestabilidad. Así, las características **f) - h)** quedan satisfechas.

Tabla 5 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal de una onda R-H (255) con $n = 5$ y $\alpha = 0.0052$.

Modos	m	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	1	0.0368	0.0064	30.0000	5.92	155.15
2	1	0.0151	0.0287	30.0000	10.52	34.74
3	3	0.0142	-0.1255	29.9999	11.16	7.97
4	2	0.0041	-0.2510	30.0000	38.20	3.98

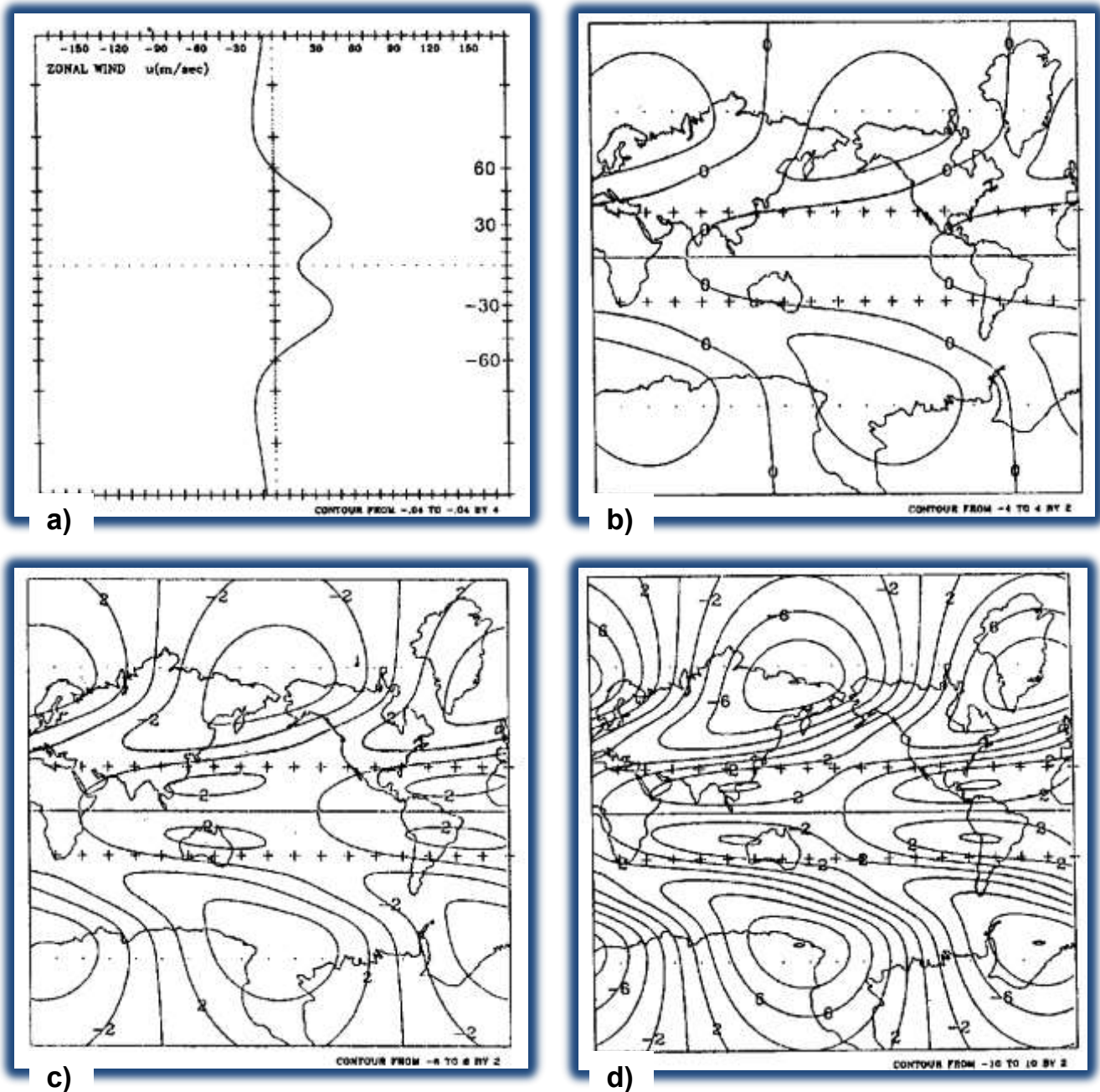


Figura 11 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad $U(\mu)$ de la **onda R-H** zonal (255) con $n = 5$ y $a = 0.0052$ (a), y los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu, t)$ del modo más inestable ($\omega_r = 0.0268$) con $t = 0$ (b), $t = T/8$ (c) y $t = T/4$ (d).

EN # 8. Sea $n = 7$ y $a = -0.004$. El perfil de velocidad del flujo básico $U(\mu)$, es simétrico alrededor del ecuador (figura 12a) y hay cuatro corrientes de chorro. Los parámetros principales de los ocho modos más inestables se dan en la tabla 6. Casi todos ellos son estacionarios.

El número espectral χ_H de la amplitud de estos modos, prácticamente coincide con la estimación teórica $\chi_7 = 56$, indicada por el **Caso 3**. Los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ para el modo más inestable ($\omega_r = 0.0515$) se muestran en la figura 12b.

Tabla 6 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Modos más inestables del flujo zonal de una onda R-H (255) con $n = 7$ y $a = -0.004$.

Modos	m	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.0515	0.0099	56.000	3.08	100.65
2	2	0.0501	-0.0067	56.000	3.17	148.80
3	3	0.0370	0.0044	56.000	4.29	223.45
4	3	0.0362	0.0035	56.000	4.39	279.75
5	4	0.0266	-0.0093	56.000	5.96	106.53
6	5	0.0157	-0.0554	56.000	10.12	18.03
7	1	0.128	-0.0011	55.999	12.36	867.33
8	1	0.0081	0.0089	55.999	19.58	111.73

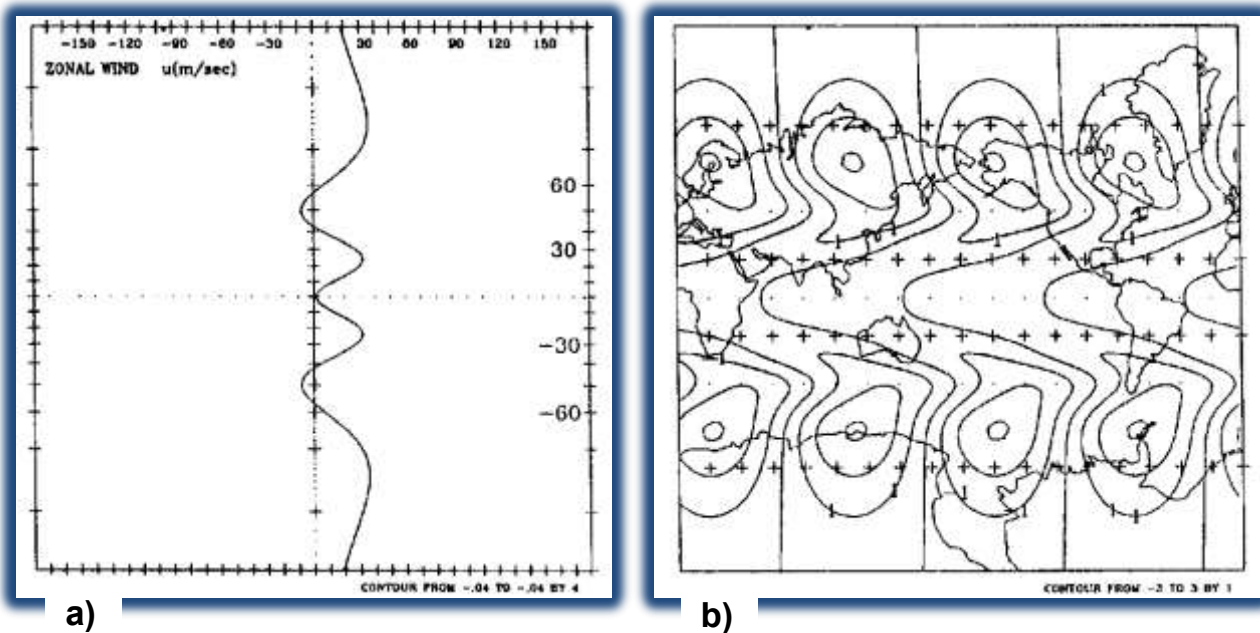


Figura 12 [Adaptada de Pérez-García & Skiba, 2001]. Perfil de velocidad $U(\mu)$ de la onda R-H zonal (255) $n = 7$ y $a = -0.004$ (a) y los contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ del modo más inestable correspondientes a $\omega_r = 0.0515$ (b).

6.2. Estabilidad lineal de ondas R-H

Se muestra ahora un ejemplo sobre la estabilidad de la **onda R-H** (252):

EN # 9. Sea la onda antisimétrica respecto al ecuador (figura 13)

$$\Psi(\lambda, \mu) = -\omega\mu + aP_3^2(\mu) \cos(2\lambda) \quad (258)$$

con $n = 3$ y $\omega = 0.2$. Para encontrar una amplitud crítica numéricamente inestable, consideramos las siguientes amplitudes: $a = 0.013$, $a = 0.014$, $a = 0.015$ y $a = 0.023$.

En el primer experimento ($a = 0.013$) se obtuvieron modos no inestables; mientras que para los tres experimentos con $a = 0.014$, $a = 0.015$ y $a = 0.023$, ha aparecido únicamente un modo inestable. Las partes reales de dichas amplitudes de los modos inestables, se muestran en la figura 14 (a-d) respectivamente.

El modo neutral mostrado en la figura 14a, prácticamente coincide con el armónico esférico $Y_3^2(\lambda, \mu)$. Debido a que todas las funciones antisimétricas (sobre el ecuador) forman subespacios invariantes de perturbaciones para una **onda R-H** antisimétrica, las amplitudes antisimétricas de los modos inestables sobre la esfera, cumplen el requerimiento teórico.

La tabla 7 muestra los principales parámetros de los modos inestables obtenidos. Debido a que la amplitud de un modo $H(\lambda, \mu)$ es una combinación lineal de los armónicos esféricos $Y_n^m(\lambda, \mu)$, es de gran interés conocer cuáles armónicos contribuyen más para estas amplitudes. La primera columna de dicha tabla, muestra el número de onda (m, n) de los armónicos esféricos dominantes (no todos) en orden decreciente, de acuerdo a sus contribuciones a la amplitud del modo inestable $H(\lambda, \mu)$.

De acuerdo a esto, se aprecia que $H(\lambda, \mu)$ tiene la mayor proyección sobre los armónicos esféricos $Y_2^1(\lambda, \mu)$, $Y_2^{-1}(\lambda, \mu)$, $Y_4^1(\lambda, \mu)$ y $Y_4^{-1}(\lambda, \mu)$. Esto explica el hecho que, el número de onda zonal m de todas las amplitudes presentadas en la figura 14 (b-d), son iguales a 1. La interacción triádica no lineal de la onda primaria (2,3) con las perturbaciones (1,2) y (1,4), fue analizada previamente por Haarsma & Opsteegh (1988).

La segunda columna muestra la amplitud a de la **onda R-H**, mientras que las siguientes dos, contienen la parte real ω_r y la imaginaria ω_i del **VC** ω , que caracterizan (en términos de días) el umbral temporal τ_e y el periodo T del modo,

respectivamente (últimas dos columnas de la tabla 7). La parte real ω_r (y en esencia, el umbral temporal τ_e) se incrementa con la amplitud a de la **onda R-H**.

Lo anterior concuerda con lo propuesto por el Teorema 8. Los resultados muestran que el periodo T , no es sensible como umbral temporal τ_e para variaciones en la amplitud de a . Por ejemplo, mientras a incrementa de 0.014 a 0.023 (esto es, acerca de dos tiempos), el modo periódico T incrementa de 5.6 a 6.28, mientras que τ_e decrece (y en esencia, ω_r incrementa) por un factor de cuatro. El último resultado significa que la estimación del valor de ω_r es aproximada.

La quinta columna, muestra los números espectrales (calculados numéricamente) de la amplitud del modo χ_H . Como puede apreciarse, dichos valores son buenas aproximaciones al valor teórico $\chi_H = 12$, estimado a partir del **Caso 3**. De la tabla 7 puede estimarse que el valor de la amplitud crítica a_{cr} está entre 0.013 y 0.014.

Tabla 7 [Adaptada de Skiba & Pérez-García, 2005]. Modos más inestables de la **onda R-H** no zonal (258), $N = 21$, $n = 3$.

Y_n^m dominante en amplitud H	a	ω_r	ω_i	χ_H	τ_e (días)	Periodo T (días)
(-2,3), (2,3)	0.013	0	0	12.07	-----	-----
(1,2), (-1,4), (-3,4)	0.014	0.000782	0.176	11.99	203.5	5.6
(-1,2), (1,4), (3,4)	0.015	0.004282	0.173	12.00	37.17	5.78
(1,2), (-1,4), (-3,4)	0.023	0.0307	0.159	11.99	5.18	6.28

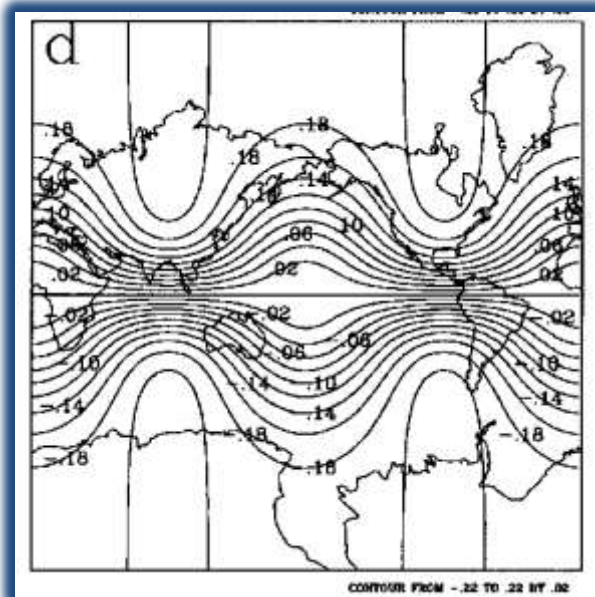
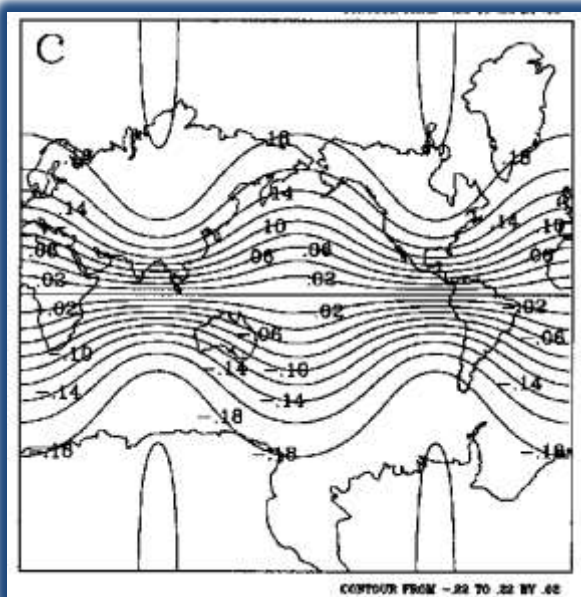
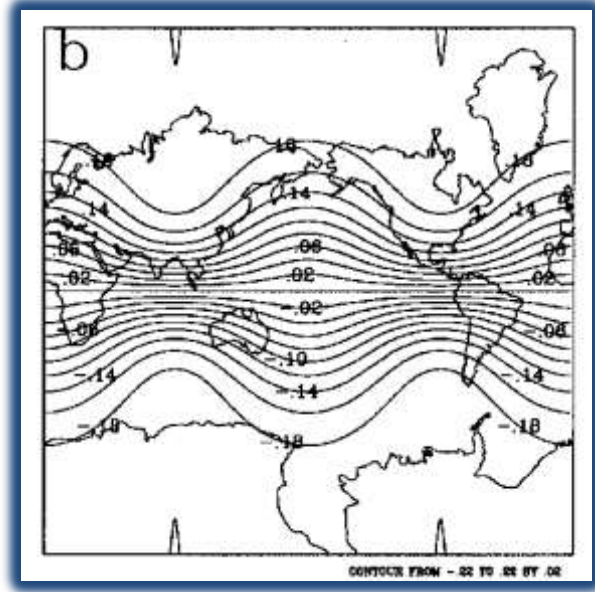
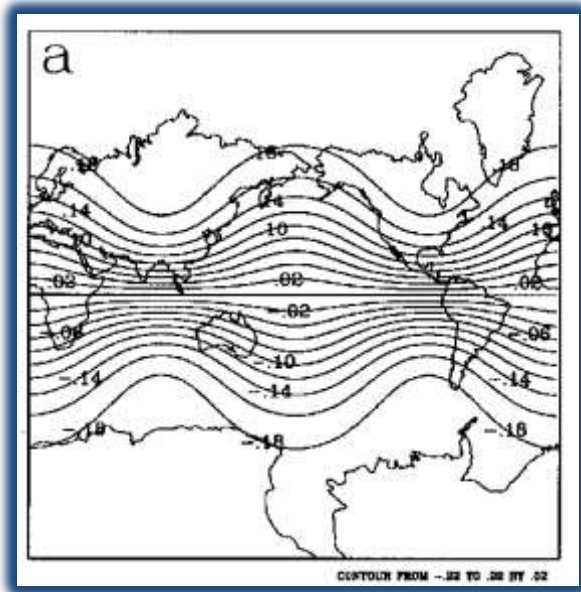


Figura 13 [Adaptada de Skiba & Pérez-García, 2005]. Isolíneas de la **onda R-H** básica no zonal (258), para diferentes amplitudes: a) $a = 0.013$, b) $a = 0.014$, c) $a = 0.015$ y d) $a = 0.023$.

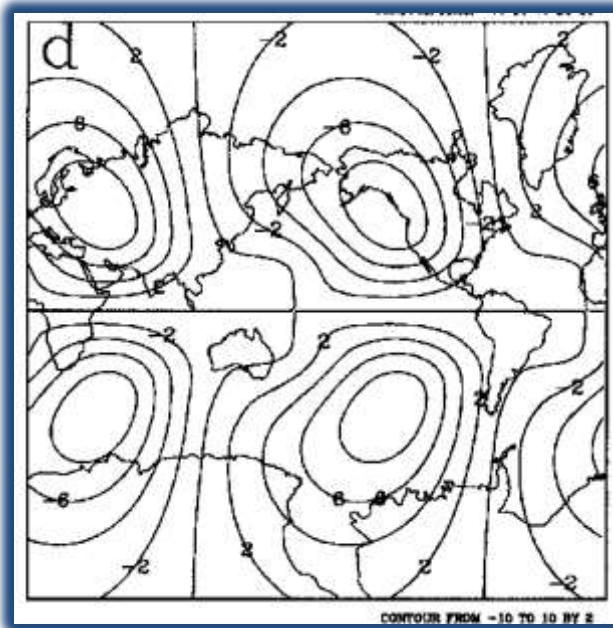
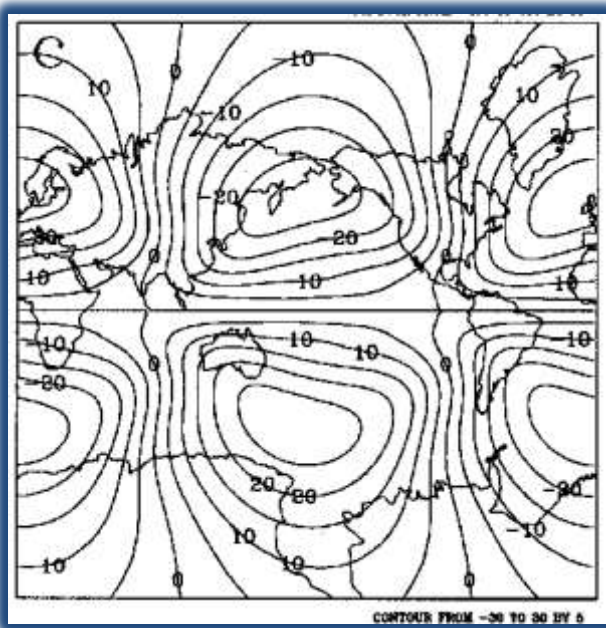
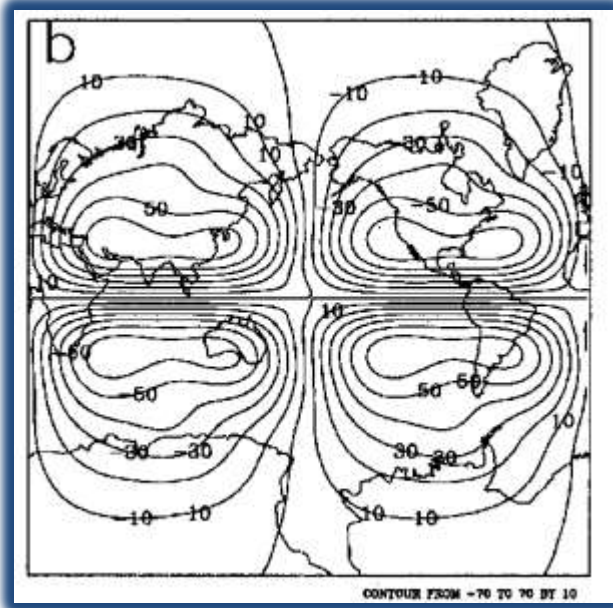
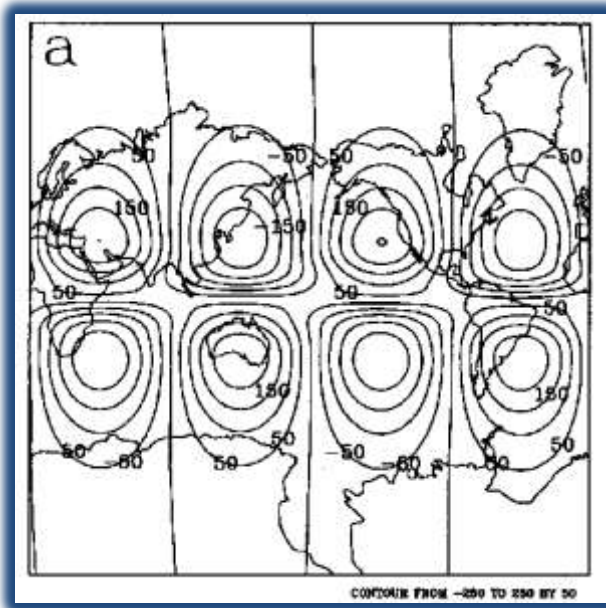


Figura 14 [Adaptada de Skiba & Pérez-García, 2005]. Contornos de la amplitud $H_r(\lambda, \mu)$ del primer modo normal estable, a) $\omega_r = 3.36 \times 10^{-7}$ y el más inestable b) $\omega_r = 0.000782$, c) $\omega_r = 0.00428$ y d) $\omega_r = 0.0307$ correspondientes a la amplitud de la **onda R-H** no zonal.

7. COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

7.1. Conclusiones generales

En el capítulo 1 de este trabajo, se introdujeron los conceptos correspondientes a la teoría de la estabilidad, es decir que, se mostró la forma de aplicar el método de estudio de la estabilidad de una solución de equilibrio, para el caso de un sistema de **EDOs** no lineal autónomo, considerando perturbaciones infinitesimales.

En esencia, dicho método de estudio implica: considerar un flujo total, como la suma de un flujo básico (estacionario) más una perturbación infinitesimal arbitraria (dependiente del tiempo, en el caso más general), mediante la introducción de dicha perturbación, se realiza la linealización del sistema de ecuaciones respecto al flujo básico, con lo que se obtiene la matriz Jacobiana valuada en dicho flujo, $\vec{x} = \vec{a}$. De esta manera, el problema de la estabilidad (local) se reduce al problema de encontrar los valores propios de dicha matriz.

Así, el capítulo 2 se abocó a mostrar cómo aplicar la metodología introducida en el capítulo 1, para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales: la ecuación vectorial adimensional de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible, junto con la ecuación de conservación de masa, así como sus condiciones, inicial y de frontera.

Se mostró la forma de obtener las ecuaciones linealizadas generales para perturbaciones [(23)-(26)], las cuales de acuerdo a Chandrasekhar (1961), constituyen la base de la denominada teoría lineal de la estabilidad hidrodinámica, así, fue posible aplicar el **MMN**: plantear su solución como una superposición lineal de modos (llamados modos normales), con lo que el problema de la estabilidad hidrodinámica, fue reducido a la resolución de un problema de valor propio para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales [ecuaciones (30)-(32)].

De esta forma, se llegó al caso análogo planteado por la ecuación (10) y el teorema 1 (sección 1.6), con lo que se hizo evidente la aplicación de los conceptos del capítulo 1 al estudio de la estabilidad de una solución básica, para el modelo más general de un sistema hidrodinámico: las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de conservación de masa. De igual forma, se mostró la aplicación de este método para el caso de un flujo plano paralelo en un fluido homogéneo (el cual sólo tiene una componente de la velocidad media, función de la coordenada que define las ubicaciones de las fronteras), ilustrando así algunas complicaciones que se presentan al aplicar el método (el hecho de que

se llegue a un problema para perturbaciones tridimensional, y que se trate de un fluido viscoso), así como algunas soluciones de las mismas [reducir el problema a uno de dos dimensiones equivalente mediante la transformación usada por Squire (1933), y considerar en principio un fluido ideal]. Obteniendo por último, la ecuación de Rayleigh, la cual gobierna la estabilidad de flujos paralelos no viscosos, y permite establecer criterios de estabilidad hidrodinámica para dichos flujos: criterio del punto de inflexión de Rayleigh y criterio de Fjörtoft.

En consecuencia, quedó expuesta sistemática y detalladamente, la forma de aplicar los conceptos de la teoría de la estabilidad, en el caso del sistema hidrodinámico mencionado.

Posteriormente, en el capítulo 3 de este trabajo, se obtuvo la **EVV** no lineal en su forma adimensional y en coordenadas esféricas [expresión (103)], a partir de la ecuación vectorial adimensional de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible, ya que aunque dicha formulación es bien conocida y ha sido muy estudiada [Rossby, 1939; Haurwitz, 1940; Kuo, 1949; Fjörtoft, 1953; Pedlosky, 1987; Gill, 1982; Skiba, 1989; Skiba, 1993; Andrews, 2000; Skiba, 2000; Houghton, 2002; Holton, 2004; Skiba, 2010a; etc.], es primordial conocer el origen y las consideraciones bajo las cuales se obtuvo, con el objeto de considerar los alcances y limitaciones de éste respecto al modelo original. La **EVV** es un modelo estrictamente bidimensional (la vorticidad es un campo escalar), compuesto por una sola ecuación, y aunque la formación obtenida aquí sólo toma en cuenta los procesos de advección y rotación del fluido; resulta ser aún bastante complicada, ya que ésta corresponde a una ecuación diferencial parcial no lineal.

A pesar de ser un modelo muy simple que describe el movimiento de un vórtice bidimensional en un fluido incompresible, la **EVV** tiene los componentes principales para emular la dinámica de procesos atmosféricos barotrópicos de gran escala y de bajas frecuencias; por ello, se ha usado con éxito para estudiar el complejo comportamiento de dichos procesos Pérez-García (2001).

Por otra parte, el capítulo 4 se dedicó a mostrar cómo se obtienen los **PLs** y los armónicos esféricos (a partir de resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas), con el fin mostrar que mediante ellos se construyen soluciones analíticas infinitamente suaves (flujos básicos) de la **EVV** (**PLs**, **ondas R-H** zonales y **ondas R-H** estacionarias bidimensionales) sobre la esfera; además, se describieron las principales características de éstas.

Posteriormente, en el capítulo 5 se planteó el análisis de la estabilidad lineal para las soluciones de la **EVV** (introducidas en el capítulo 4), a partir de los conceptos, definiciones y teoremas abordados en los capítulos 1 y 2. En otras

palabras dicho análisis se basó en linealizar la ecuación (103) y después expresar la perturbación de su solución por medio de un modo normal. El Método de Modos Normales, permite analizar la estabilidad de un flujo básico respecto a perturbaciones infinitesimales, así, se mostró que la inestabilidad exponencial de ambos tipos de flujos de interés (**PLs** y **ondas R-H**), puede ser estudiada mediante dicho método de manera casi idéntica, ya que se obtienen formulaciones muy similares.

A este respecto, se obtuvo una ley de conservación para perturbaciones [ecuación (204)], la cual fue utilizada para formular una nueva condición [ecuación (218)] necesaria para la existencia de inestabilidad exponencial (Skiba, 2000) de los flujos básicos estudiados. Dicha condición (recapitulada en los teoremas 7 y 9), establece que el modo normal de la onda **R-H** estacionaria o un flujo **PL**, puede ser inestable sólo si, el número espectral de Fjørtoft de la amplitud del modo, es igual a $\sqrt{n(n+1)}$ [n es el grado del flujo básico]. Además, en el caso del flujo **PL** $aP_n^0(\mu)$, el número de onda zonal m de un modo inestable debe satisfacer la condición $0 < |m| < n$.

Para flujos zonales (ondas **R-H** zonales y **PLs**), la condición recién mencionada complementa la de Rayleigh-Kuo; esto debido a que mientras la segunda está relacionada con la estructura del flujo básico zonal, la primera hace referencia a la estructura de la perturbación en crecimiento; estableciendo así, una estricta relación entre el número espectral del modo inestable y el grado del flujo.

En el caso de una **onda R-H**, cualquier modo cuya amplitud no satisface la nueva condición citada [expresión (218)], es neutral. Dicha condición, también caracteriza la estructura espacial (geométrica) creciente de las perturbaciones asociadas a ésta. Cabe enfatizar también, que dicha condición teórica es muy valiosa en el estudio de las **ondas R-H**, dado que es la única condición de inestabilidad hasta ahora conocida para dichos flujos bidimensionales. Además, esta condición muestra que si se usa el método espectral (ver por ejemplo, Skiba 1998; Pérez-García & Skiba 2001; Pérez-García, 2001) para estudiar la estabilidad lineal de una **onda R-H**, el número de truncación triangular N de la serie de Fourier para perturbaciones, debe considerarse mayor que n , ya que entonces no puede aparecer algún modo inestable si $N \leq n$ (Observación 3).

Por otra parte, ya que la nueva condición sólo depende del grado n del flujo básico, es muy útil para probar programas computacionales desarrollados para estudiar la inestabilidad exponencial de flujos arbitrarios ideales, sin forzamiento y sin disipación sobre la esfera. Adicionalmente, como se indicó anteriormente, el conocimiento de la máxima tasa de crecimiento posible de modos inestables, es importante tanto como para evaluar el grado de inestabilidad de un flujo (de

forma analítica), así también como un elemento de referencia más al realizar experimentos numéricos.

También es importante notar que el número espectral $\chi_H = n(n + 1)$, aparece tanto en la condición de inestabilidad (218) como en la estimación del crecimiento de perturbaciones (228). Fjörtoft (1953) introdujo el número espectral $\sqrt{\chi} = \sqrt{\eta/K}$ para caracterizar las cascadas de energía en un fluido bidimensional ideal e incompresible (Observación 4). Así, puede afirmarse que el número espectral de Fjörtoft, tiene un papel importante en la inestabilidad lineal de flujos sobre la esfera.

De igual forma, se demostró también que la amplitud de cualquier modo inestable de los flujos básicos **PL** o la **onda R-H**, es ortogonal a dichos flujos básicos tanto en el producto interno (87), como en el producto interno de la energía $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ [ecuación (233)].

Por otro lado, los resultados presentados en la sección 5.11, obedecen a que el estudio de la estabilidad lineal, tiene dos restricciones principales: todas las amplitudes de las perturbaciones son infinitesimales, y sólo el estado inicial del proceso de inestabilidad puede ser analizado. Por esta razón, puede decirse que el método de Lyapunov para estudiar la estabilidad es un concepto fuerte y estricto, y complementa el estudio de estabilidad lineal. En este sentido, los resultados sobre la inestabilidad en el sentido de Lyapunov de la **onda R-H**, permiten explicar físicamente situaciones como la que apuntan Skiba & Pérez-García (2005): “estos resultados sobre la inestabilidad, probablemente responden la cuestión del por qué las ondas R-H se observan regularmente en los mapas meteorológicos”.

Por último, respecto a los experimentos numéricos presentados, es posible afirmar que el algoritmo considerado, es capaz de arrojar resultados numéricos que tienen una buena precisión, referentes a la estabilidad de flujos zonales, dado que todos los requerimientos teóricos [a-i)] se satisfacen (Pérez-García & Skiba 2001; Pérez-García, 2001). Por otro lado, en este caso el modo más inestable tuvo número zonal $m = 2$, seguido de los números de onda $m = 3$ y $m = 1$, lo cual concuerda con los resultados previamente obtenidos por Baines (1976).

El caso de la estabilidad de la onda **R-H** es más complicado, sin embargo, los resultados numéricos recopilados (Pérez-García & Skiba 2001; Pérez-García, 2001), muestran que la estimación numérica del número espectral $\chi_H = \eta_H/K_H$ para las distintas amplitudes de las ondas R-H, coincide muy bien con el valor teórico $\chi_H = \eta_H/K_H = \chi_n = n(n + 1)$ de la amplitud del modo normal inestable. De esta forma, se puede afirmar que la comprensión de la estructura espectral

de estos modos analíticos, puede contribuir también a comprender las anomalías persistentes del flujo atmosférico y por lo tanto describir con mayor detalle la variabilidad de baja frecuencia.

Se debe notar, que al disminuir la estabilidad en un sistema, es posible que disminuya la capacidad para predecir en el tiempo el comportamiento de éste (tal y como lo señala Lorenz en el caso de la atmósfera), por lo que el estudio de la estabilidad, permite establecer ciertas consideraciones bajo las cuales una ecuación proporciona resultados confiables en la predicción de un sistema.

En base a todo lo anterior, se concluye que todos los objetivos tanto generales como particulares de este trabajo teórico, se cumplieron satisfactoriamente.

7.2. Trabajo futuro

Dentro de los trabajos futuros sobre lo planteado en este trabajo, pueden considerarse las siguientes sugerencias:

Uso de los modelos numéricos (por ejemplo, el método espectral) para estudiar flujos y sistemas de interés reales, como por ejemplo el efecto de bloqueamiento atmosférico, como lo plantea por ejemplo, Pérez-García (2001).

Como se mencionó al final del apartado anterior, es muy posible que la capacidad para predecir en el tiempo el comportamiento de un sistema, disminuya a la par, con la disminución de la estabilidad en éste, por lo tanto, sería interés, comparar el estudio de la estabilidad de las soluciones de la **EVB** presentadas, con el cálculo de los exponentes de Lyapunov, y comparar el límite temporal proporcionado por el máximo exponente con los resultados analíticos y numéricos descritos, puesto que esto podría ser un complemento poderoso para su aplicación a flujos y casos reales.

Así también, se podría construir un diagrama de bifurcación para las soluciones de la **EVB** presentadas, tomando en cuenta los valores de la amplitud a , ya que la estabilidad de éstas también puede depender de dichos valores.

8. APÉNDICE

8.1. Principales tipos de flujos medios

En esencia, hay tres categorías principales de flujos medios básicos (Criminale et al., 2003):

1) Flujos que son paralelos o casi paralelos. Ejemplos de flujos paralelos son los flujos en canales, tales como el flujo plano de Poiseuille y el flujo plano de Couette, en los que los flujos están confinados o limitados por dos fronteras sólidas. En éstos, **sólo existe** una **componente** de la **velocidad media** y es **función** de la **coordenada** que define las ubicaciones de las fronteras.

Según Kundu & Cohen (2008), el flujo producido por un gradiente de presión, impuesto externamente a través de dos paredes planas inmóviles, se llama flujo plano de Poiseuille (figura 15a).

El flujo producido por el movimiento sólo de la placa superior, sin ningún gradiente de presión impuesto externamente, se llama flujo plano de Couette (Kundu & Cohen, 2008) [ver figura 15b].

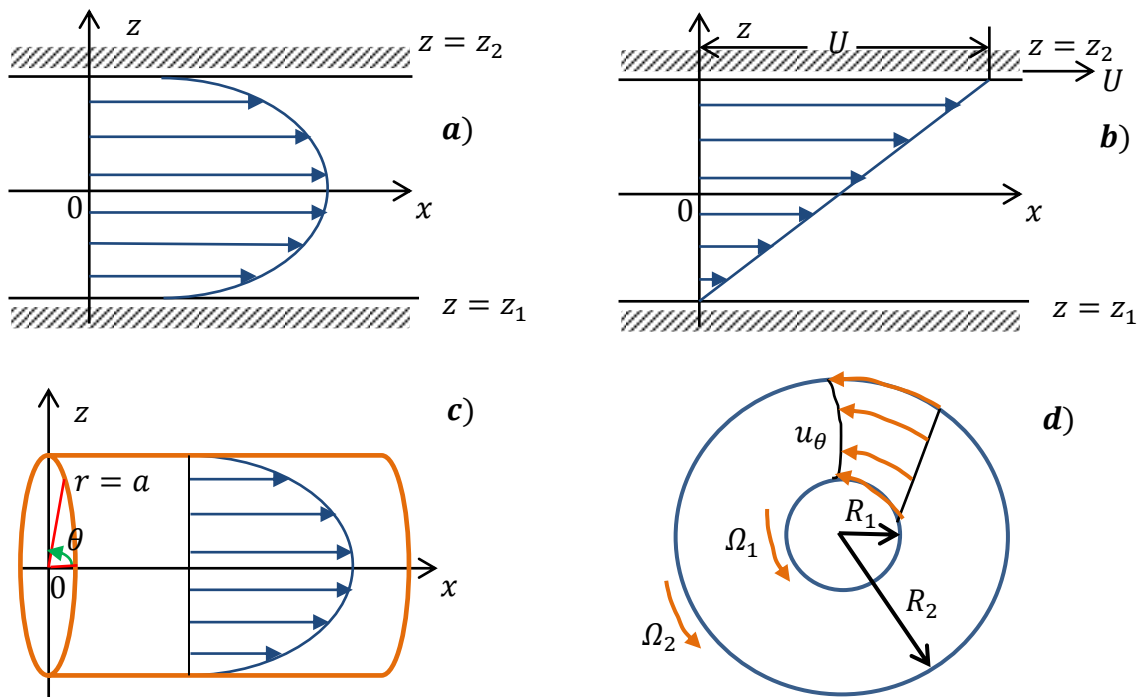


Figura 15. [Adaptadas de Kundu & Cohen, 2008; elaborada con Word 2010]. Ejemplos de flujos paralelos en canales: a) Flujo plano de Poiseuille. b) Flujo plano de Couette. c) Flujo de Hagen-Poiseuille o flujo circular de Poiseuille. d) Flujo circular de Couette.

Por otro lado, en un sistema de coordenadas polares, el flujo en un tubo es otro ejemplo que cabe mencionar (Criminale et al., 2003). El flujo estacionario a través de un tubo cilíndrico de sección transversal arbitraria, se denomina flujo de Hagen-Poiseuille o flujo circular de Poiseuille (Warsi, 1999; Kundu & Cohen, 2008) [figura 15c].

Los flujos casiparalelos abarcan dos categorías principales: (i) los flujos libres de cizalla, tales como el *jet*, la capa de estela y la de mezcla, donde no hay fronteras sólidas en el flujo y (ii) la capa límite de placa plana donde sólo hay una frontera sólida; en estos términos, (i) y (ii) tienen dos componentes para la velocidad media y ambas son funciones tanto de la coordenada en la dirección del flujo, como de la que define la extensión del flujo.

En términos cartesianos, si U y V son las componentes de la velocidad media en las direcciones espaciales x y y , respectivamente, entonces, para los flujos casiparalelos se supone que $V \ll U$, y que la variación de U con respecto a la variable que “va con la corriente” (x), es débil.

2) Flujos con líneas de corriente curvas. Dentro de este grupo se tienen flujos como los que existen entre cilindros circulares concéntricos (problema de Taylor), o flujos sobre paredes cóncavas (problema de Görtler). El ejemplo más representativo este tipo de flujos corresponde al flujo circular de Couette el cual, de acuerdo a Kundu & Cohen (2008), es un flujo estacionario entre dos cilindros giratorios concéntricos (ver figura 15d).

3) Flujos en los que el flujo medio tiene un valor de cero. Estos casos en los que no existe flujo medio (por ejemplo, el problema de Rayleigh, y las células de Bénard) simplemente son casos especiales del panorama más general.

8.2. Polinomios de Legendre

En la sección 4.1, se obtuvo la expresión (127), llamada ecuación asociada de Legendre, la cual tiene como soluciones, las denominadas funciones asociadas de Legendre [expresión (129)] (King et al., 2003; Krishnamurti et al., 2006). Se acostumbra abordar el estudio tanto de dicha ecuación como de sus soluciones, considerando primero el caso cuando $m = 0$ y después, cuando $m > 0$, la razón, se verá a continuación.

Si $m = 0$, la ecuación asociada de Legendre (127) se convierte en una EDO lineal de segundo orden homogénea, llamada ecuación de Legendre:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] = -n(n + 1)P \quad (259)$$

Para un determinado número entero n , la solución $P_n^0 = P_n(\mu)$ de (259), se denomina polinomio de Legendre de grado n . Dicha solución, puede ser obtenida mediante la fórmula de Rodrigues (Brown & Churchill, 1993; Krishnamurti et al., 2006):

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n ; n = 0, 1, 2, 3, \dots, |\mu| \leq 1 \quad (260)$$

O bien usando la fórmula recurrente (Brown & Churchill, 1993):

$$(n + 1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = (2n + 1)\mu P_n(\mu) ; n = 1, 2, \dots \quad (261)$$

Ejemplos de polinomios de Legendre son (ver también figura 16):

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1 & P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3 + 3\mu) \\ P_1(\mu) &= \mu & P_4(\mu) &= \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3) \\ P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) & P_5(\mu) &= \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu) \end{aligned}$$

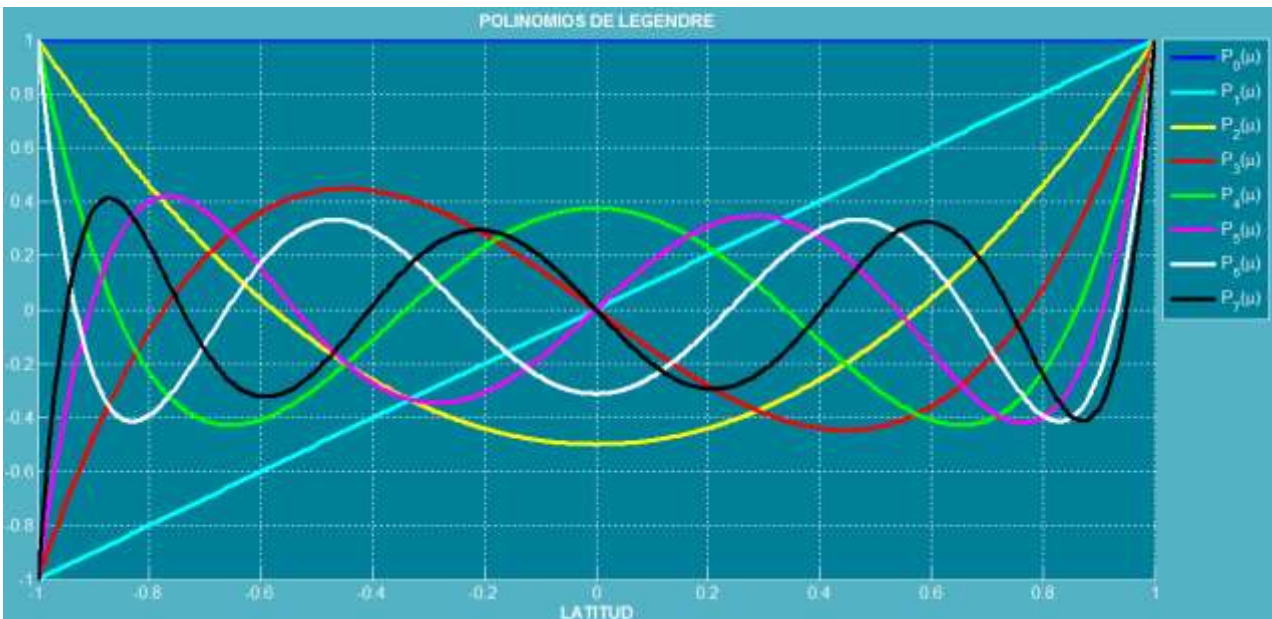


Figura 16 [Elaborada con Matlab 2012]. Primeros ocho polinomios de Legendre.

Para cualquier polinomio de Legendre se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 \text{(a).} \quad & P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu) \\
 \text{(b).} \quad & P_n(1) = 1 \\
 \text{(c).} \quad & P_n(-1) = (-1)^n \\
 \text{(d).} \quad & P_n(0) = 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\
 \text{(e).} \quad & P'_n(0) = 0; \quad n = 0, 2, 4, \dots
 \end{aligned} \tag{262}$$

(f). Ortogonalidad de $P_n(\mu)$:

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \delta_{mn} \frac{2}{2n+1}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & \text{si } m = n \\ 0; & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{263}$$

8.3. Funciones asociadas de Legendre

Como se mencionó en la sección 4.1, caso cuando $m > 0$ en la ecuación asociada de Legendre (127), las soluciones de dicha ecuación se denotan por $P_n^m(\mu)$ y se denominan como funciones asociadas de Legendre de primera clase, de orden m y grado n (King et al., 2003; Haberman, 2005; Krishnamurti et al., 2006). Como se observa, involucran dos parámetros, n puede ser cualquier entero ($n \geq 0$) y m , un entero tal que $|m| \leq n$. Al igual que los **PLs**, dichas funciones también pueden obtenerse usando la fórmula de Rodrigues (Krishnamurti et al., 2006):

$$P_n^m(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n; \quad |\mu| \leq 1 \tag{264}$$

Ejemplos de funciones asociadas de los **PLs** son (considerando que $\mu = \text{sen } \phi$, ver también figuras 17 y 18):

$$\begin{aligned}
 P_1^1(\mu) &= (1 - \mu^2)^{1/2} = \cos\phi \\
 P_2^1(\mu) &= 3\mu(1 - \mu^2)^{1/2} = 3\cos\phi \text{sen}\phi \\
 P_2^2(\mu) &= 3(1 - \mu^2) = 3\cos^2\phi \\
 P_3^1(\mu) &= \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1)(1 - \mu^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\text{sen}^2\phi - 1)\cos\phi
 \end{aligned} \tag{265}$$

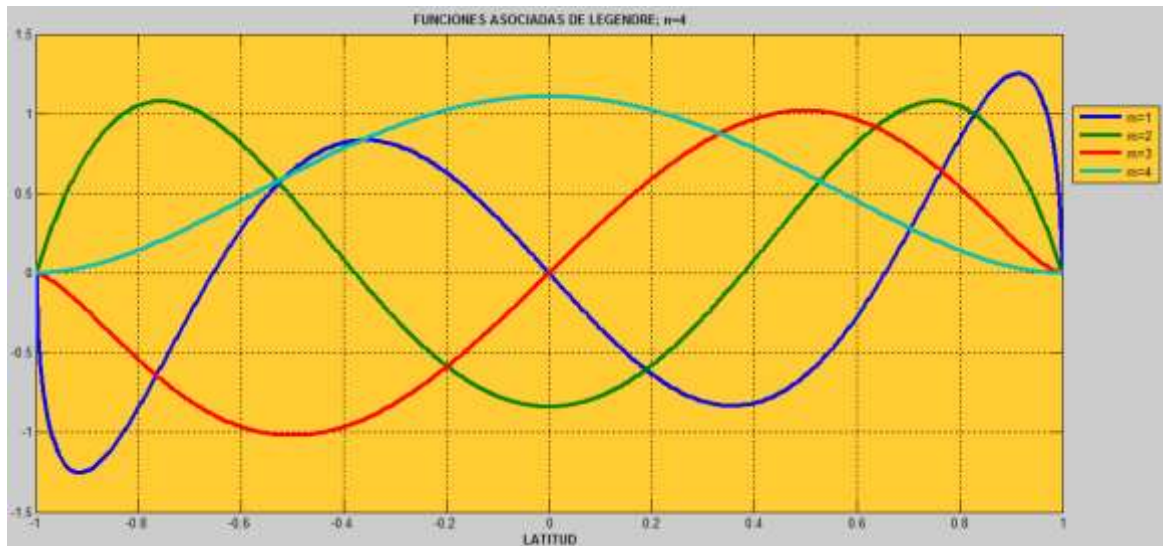


Figura 17 [Elaborada con Matlab 2012]. Funciones Asociadas de Legendre, $P_4^m(\mu)$, de orden $n = 4$, y grados $m = 1, \dots, 4$.

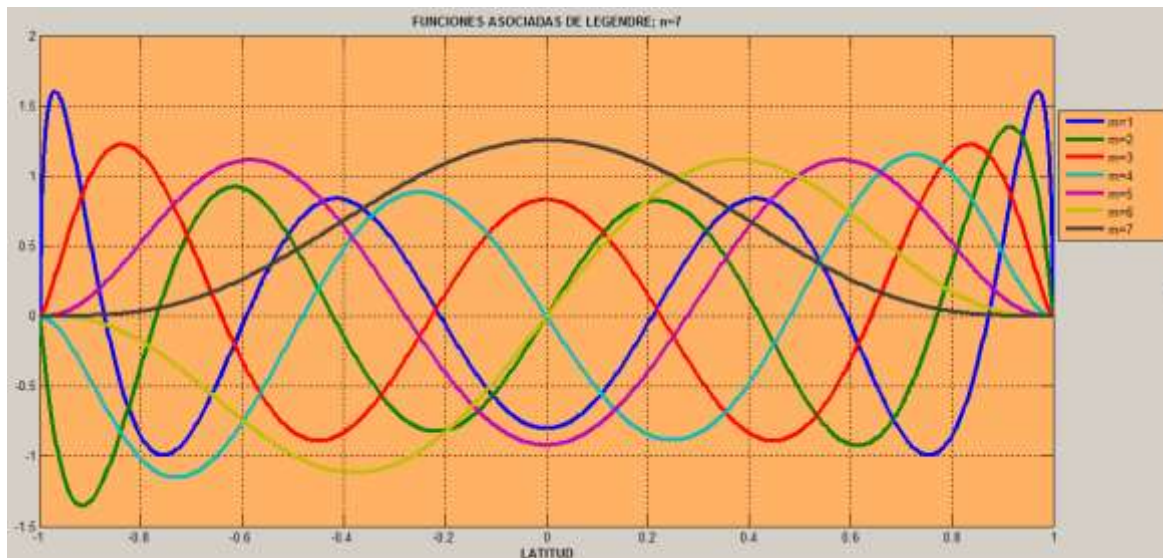


Figura 18 [Elaborada con Matlab 2012]. Funciones Asociadas de Legendre, $P_7^m(\mu)$, de orden $n = 7$, y grados $m = 1, \dots, 7$.

Como $P_n^m(\mu)$ es un polinomio de grado n , tiene n raíces, por lo que éstas pueden obtenerse mediante la ecuación $P_n^m(\mu) = 0$. De la expresión (264), se hace notar que m de dichas raíces está en los polos $\mu \pm 1$, mientras que las raíces de $n - m$ están entre los polos.

Las raíces de $n - m$ entre los polos son llamadas los ceros de las Funciones Asociadas de Legendre $P_n^m(\mu)$. Si $n - m$ es par, entonces $P_n^m(\mu)$ es simétrico con respecto al ecuador. Por el contrario, cuando $n - m$ es impar, $P_n^m(\mu)$ es antisimétrico con respecto al ecuador.

Algunas propiedades básicas de las funciones asociadas de Legendre $P_n^m(\mu)$ más usadas, son las siguientes (Krishnamurti et al., 2006):

$$P_n^0(\mu) = P_n(\mu) \quad (266)$$

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m \frac{(1-m)!}{(1+m)!} P_n^m(\mu); \quad m > 0 \quad (267)$$

$$P_n^m(\mu = 1) = \begin{cases} 1; & m = 0 \\ 0; & m \neq 0 \end{cases} \quad (268)$$

$$P_n^m(\mu = -1) = \begin{cases} (-1)^n; & m = 0 \\ 0; & m \neq 0 \end{cases} \quad (269)$$

$$P_n^m(\mu = 0) = \begin{cases} (-1)^{(1-m)/2} \frac{(n+m-1)!}{(n-m)!}; & n + m \text{ par} \\ 0; & n + m \text{ impar} \end{cases} \quad (270)$$

Paridad de $P_n^m(\mu)$:

$$P_n^m(-\mu) = (-1)^{n+m} P_n^m(\mu) \quad (271)$$

Funciones generatriz de $P_n^m(\mu)$:

$$\frac{(2m)!(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} t^m}{2^m m! (1-2\mu t + t^2)^{\frac{(m+1)}{2}}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(\mu) t^n \quad (272)$$

Fórmulas recurrentes:

$$(n+1-m)P_{n+1}^m(\mu) - (2n+1)\mu P_n^m(\mu) + (n+m)P_{n-1}^m(\mu) = 0$$

$$P_n^{m+2}(\mu) - \frac{2(m+1)\mu}{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} P_n^{m+1}(\mu) + (n-m)(n+m+1)P_n^m(\mu) = 0$$

Ortogonalidad de $P_n^m(\mu)$:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_l^m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mn} \quad (273)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker.

Funciones asociadas de Legendre de segunda clase:

$$Q_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} Q_n(\mu) \quad (274)$$

Donde $Q_n(\mu)$ es la función de Legendre de segunda clase (Brown & Churchill, 1993). Dicha función es linealmente independiente de $P_n(\mu)$, y en esencia, corresponde a una solución en forma de serie, sin embargo, tanto $Q_n(\mu)$ como su derivada $Q'_n(\mu)$, no son continuas en el intervalo $-1 \leq \mu \leq 1$, además de ser no acotada.

Por otra parte, $Q_n^m(\mu)$, también es no acotada en dicho intervalo, por lo que tanto $Q_n(\mu)$ como **(274)**, se descartan como soluciones de **(130)** y **(127)** respectivamente, para el caso de estudio de la presente tesis.

8.4 Energía cinética y enstrofía en un fluido

Como apuntan Kundu & Cohen (2008), puede obtenerse una ecuación para la energía cinética de un fluido cualquiera, aplicando el producto escalar a la ecuación de momento de Navier-Stokes y al campo (vector) de velocidad. Por lo tanto, la ecuación de la energía cinética, no es un principio independiente, y no es la misma que la primera ley de termodinámica.

Además, la fuerza de Coriolis, que es perpendicular al vector de velocidad, no contribuye a dicha ecuación de energía, la cual, para un fluido incompresible, en un dominio \mathcal{V} con frontera $\partial\mathcal{V}$, está dada por (Doering & Gibbon 2004; Vallis, 2006; Skiba, 2009):

$$K = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} |\vec{u}(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x} . \quad (275)$$

Por otra parte, una medida global del contenido de vorticidad en un flujo, es el cuadrado de la norma L^2 de la vorticidad, llamada, enstrofía³⁵ (Doering & Gibbon 2004); y juega un papel particularmente importante porque como la energía, es un invariante cuadrático, y su presencia altera profundamente el comportamiento de un flujo bidimensional y cuasi-geostrófico en comparación con un flujo tridimensional (Vallis, 2006):

$$\eta = \|\vec{w}\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} |\vec{w}|^2 d\vec{x} . \quad (276)$$

Así, con base en (275), puede deducirse que la ecuación de la energía cinética para el modelo (103), se obtiene a partir del campo de velocidad sobre S . Las

³⁵ Según, Doering & Gibbon (2004), la palabra "enstrofía", acuñada por George Nickel, proviene del sustantivo griego *estrofa*, que significa "un giro".

componentes del campo de velocidad sobre la superficie de la esfera, están representadas por la expresión (106), por lo que la norma de \vec{u} , está dada por

$$\|\vec{u}\|^2 = (1 - \mu^2)\psi_\mu^2 + \frac{1}{1-\mu^2}\psi_\lambda^2, \quad (277)$$

además, considerando (105), $\|\nabla\psi\|^2$ puede expresarse como

$$\|\nabla\psi\|^2 = \frac{1}{1-\mu^2}\psi_\lambda^2 + (1 - \mu^2)\psi_\mu^2, \quad (278)$$

de donde se comprueba que $\|\vec{u}\|^2 = \|\nabla\psi\|^2$.

Por otra parte, la ecuación (197) que describe la enstrofía para la **EVB** (103), se obtiene a partir de las ecuaciones que representan a la vorticidad sobre la esfera [(93) y (94)], considerando también que $\mu^2 = \text{sen}^2\phi$, $\cos\phi = \sqrt{1 - \mu^2}$, y que $u_\mu = -\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$. Así, (93) se expresa como

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \left\{ \hat{e}_r \left[\left(\sqrt{1-\mu^2} \right) \frac{\partial}{\partial\mu} (u_\lambda \sqrt{1-\mu^2}) - \frac{\partial}{\partial\lambda} (u_\mu) \right] \right\}, \quad (279)$$

por lo tanto

$$\zeta = \hat{e}_r \cdot \vec{w} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial\mu} \right] + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right\} \psi. \quad (280)$$

Ya que (280) tiene la forma del operador (136) aplicado a ψ , $\zeta = \Delta\psi$, así, al ser la vorticidad una función escalar, su norma es simplemente el valor absoluto de la única componente, entonces

$$\|\vec{w}\|^2 = \zeta^2 = |\Delta\psi|^2, \quad (281)$$

por lo que de acuerdo a (276) y (281), se llega a la expresión siguiente, la cual describe la enstrofía sobre la esfera S :

$$\eta = \frac{1}{2} \int_S |\Delta\psi|^2 dS. \quad (282)$$

Es en base a lo anterior, que la energía cinética y la enstrofía de una perturbación, pueden expresarse mediante las ecuaciones (206) y (207).

9. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Andrews D. G. (2000). An introduction to atmospheric physics. Cambridge University Press.
2. Andronov, A. A., Vitt, A. A., Khaikin, S.E. (1987). Theory of oscillators. New York : Dover.
3. Arakawa, A. (1966). Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. J. Comput. Phys., 1, 119-143.
4. Arnold V. I. (1965). Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid. Sov. Math. Dokl., 6: 773-776 (Dokl. Akad. Nauk SSSR, 162, N 5, 975-978).
5. Baines P. G. (1976). The stability of planetary waves on a sphere. J. Fluid Mech., 73, Part 2: 193-213.
6. Brown, J. W., Churchill, R. V. (1993). Fourier series and boundary value problems, 5th ed. McGraw-Hill, Inc.
7. Campbell, S. L., Haberman, R. (2008). Differential equations with dynamical systems. Princeton University Press.
8. Chandrasekhar, S. (1961). Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University Press.
9. Charru, F. (2011). Hydrodynamic instabilities. Cambridge University Press.
10. Criminale, W. O., Jackson, T. L., Joslin, R. D. (2003). Theory and computation of hydrodynamic stability. Cambridge University Press.
11. Crommelin, D.T. (2003). Regime transitions and heteroclinic connections in a barotropic atmosphere. J. Atmospheric Sci. 60, 229–246.
12. Doering, C.R., Gibbon, J.D. (2004). Applied analysis of the Navier-Stokes equations. Cambridge University Press.
13. Drazin, P. G. (2002). Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge University Press.
14. Drazin, P. G., Reid, W.H. (2004). Hydrodynamic stability, 2nd edn. Cambridge University Press.
15. Drazin, P. G., Riley, N. (2006). The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions. Cambridge University Press.
16. Eckhaus, W. (1965). Studies in non-linear stability theory. Springer-Verlag.
17. Edwards, C. H., Penney, D. E. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, cuarta edición. Pearson Educación, México.
18. Elsgoltz, L. (1969). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Editorial Mir, Moscú.
19. Estrada, O., García-Colomé, P., Monsivais, G. (2003). Cálculo vectorial y aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana.
20. Ferziger, H., G., Peric, M. (2002). Computational methods for fluid dynamics. Springer, third, rev. edition.
21. Fjørtoft R. (1950). Application of integral theorems in deriving criteria of stability of laminar flow and for baroclinic circular vortex. Geophys. Publ. Norske Vid.-Akad. Oslo, 17: 1-52.
22. Fjørtoft R. (1953). On the changes in the spectral distribution of the kinetic energy for two-dimensional nondivergent flow. Tellus 5: 225-230.
23. Georgescu, A. (1985). Hydrodynamic stability theory. Kluwer, Dordrecht.

24. Gill A. E. (1974). The stability of planetary waves on an infinite beta plane. *Geof. Fluid Dyn.*, 6: 29-47.
25. Gill A. E. (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics*, International Geophysics Series, Volume 30. Academic Press an Imprint of Elsevier.
26. Haarsma R. J., Opsteegh J. D. (1988). Barotropic instability of planetary-scale flows. *J. Atmos. Sci.*, 45: 2789-2810.
27. Haberman, R. (2005). *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Fourth edition. Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.
28. Hassani, S. (2013). *Mathematical physics, a modern introduction to its foundations*, second edition. Springer International Publishing Switzerland.
29. Haurwitz B. (1940). The motion of atmospheric disturbances on the spherical earth, *J. Marine Res* 3: 254-267.
30. Holton J. R. (2004). *An introduction to dynamic meteorology*, Fourth Edition. Elsevier, Academic Press.
31. Houghton J. (2002). *The physics of atmosphere*. Cambridge University Press.
32. Karunin A. B. (1970). On Rossby waves in barotropic atmosphere in the presence of zonal flow. *Izv. Atmos. Ocean. Physics* 6: 1091-1100.
33. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
34. King, A. C., Billingham, J., Otto, S. R. (2003). *Differential equations: linear, nonlinear, ordinary, partial*. Cambridge University Press.
35. Krishnamurti, T. N., Bedi, H. S., Hardiker, V. M., Ramaswamy, L. (2006). *An introduction to global spectral modeling*, 2nd revised and enlarged edition. Springer Science+Business Media, Inc.
36. Kundu, P. K., Cohen, I. M. (2008). *Fluid mechanics*, 4th ed. Academic Press.
37. Kuo H. L. (1949). Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in barotropic atmosphere. *J. Meteorol.*, 6: 105-122.
38. Landau, L. D. Lifshitz, E. M. (1987). *Fluid mechanics*. Oxford, Pergamon Press.
39. LaSalle, J. P., Lefschetz, S. (1961). *Stability by Lyapunov's direct method*. Academic Press, New York.
40. Liapunov A. M., 1966. *Stability of motion*. Academic Press, N. Y.
41. Lorenz E. N. (1972). Barotropic instability of Rossby wave motion. *J. Atmos. Sci.*, 29: 258-264.
42. Machenhauer, B. (1979). Spectral methods, in: numerical methods used in atmospheric models, vol. 2, in: GARP Publication Series, vol. 17, WMO/ICSU.
43. Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider D. (2012). *Fundamentals of differential equations*, 8th ed. Pearson Education, Inc.
44. Pedlosky J. (1987). *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, New York.
45. Pérez-García, Ismael, Skiba Yu. N. (1999). Simulation of exact barotropic vorticity equation solutions using a spectral model. *Atmósfera* 12: 223-243.
46. Pérez-García, Ismael, Skiba Yu. N. (2001). Tests of a numerical algorithm for the linear instability study of flows on a sphere. *Atmósfera* 14: 95-112.
47. Pérez-García, Ismael. (2001). *Análisis de la ecuación vorticidad barotrópica atmosférica por medio del método espectral*. Tesis, Dr. en Ciencias (Física de la Atmósfera). Posgrado en Ciencias de la Tierra, UNAM.
48. Potter, M. C., Wiggert, D. C., Ramadan, B., Shih, T. I-P. (2012). *Mechanics of fluids*, fourth edition. Cengage Learning.

49. Rayleigh L. (1880). On the stability or instability of certain fluid motions. Proc. London Math. Soc. 11, 57-70.
50. Ripa P. (1990). Positive, negative and zero wave energy and the flow stability problem in the Eulerian and Lagrangian-Eulerian descriptions. Pure and Applied Geophysics 133: 713-732.
51. Rossby C. G. (1939). Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. J. Marine Res 2: 38-55.
52. Shepherd, T.G. (1990). Symmetries, conservation laws, and hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics, Adv. Geophys. 32, 287–338.
53. Shutyaev, V.P. (1997). Solvability of the data assimilation problem in the scale of Hilbert spaces for quasilinear singularly perturbed evolutionary problems. Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling 12, 53–66.
54. Shutyaev, V.P. (2002). Initial condition reconstruction problem for a viscous barotropic fluid dynamic equation on a sphere. Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling 17, 457–468.
55. Simmons A. J., Wallace J. M., Branstator G. W. (1983). Barotropic wave propagation and instability, and atmospheric teleconnection patterns. J. Atmospheric Sci. 40: 1363-1392.
56. Skiba Yu. N. (1989). Mathematical problems of the dynamics of viscous barotropic fluid on a rotating sphere. Dept. Numer. Math., USSR Academy of Sciences, Moscow (Russian) (English translation – 1990, Indian Inst. Tropical Meteorology, Pune, India).
57. Skiba Yu. N. (1993). Dynamics of perturbations of the Rossby-Haurwitz wave and the Verkley modon. Atmósfera 6: 87-125.
58. Skiba Yu. N. (1994). On the long-time behavior of solutions to the barotropic atmosphere model, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics 78: 143-167.
59. Skiba Yu. N. (1998). Spectral approximation in the numerical stability study of non-divergent viscous flows on a sphere. Numer. Meth. Part. Differ. Equations 14: 143-157.
60. Skiba Yu. N., Adem J. (1998). On the linear stability study of zonal incompressible flows on a sphere. Numer. Meth. Part. Differ. Equations, 14: 649-665.
61. Skiba Yu. N. (2000). On the normal mode instability of harmonics waves on a sphere. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 92: 115-127.
62. Skiba Yu. N. (2004). Instability of the Rossby-Haurwitz wave in invariant sets of perturbations. J. Math. Analys. Appl. 290: 686-701.
63. Skiba Yu. N., Pérez-García I. (2005). On the structure and growth rate of unstable modes to the Rossby-Haurwitz wave. Numer. Meth. Part. Diff. Equations 21: 368-386.
64. Skiba Yu. N. (2008). Nonlinear and linear instability of the Rossby-Haurwitz waves. J. Math. Sciences, 149(6), 1708-1725.
65. Skiba Yu.N. (2009). Introducción a la dinámica de fluidos. Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial, UNAM, México.
66. Skiba Yu. N. (2010a). Liapunov and normal-mode instability of the Rossby-Haurwitz wave. Advances in Mathematics Research, Volume 10, Nova Science Publishers, Inc.
67. Skiba Yu. N. (2010b). Application of Hilbert spaces to the stability study of flows on a sphere, chapter 8, pp. 299-344. Emerging Topics on Differential Geometry and Graph Theory, Nova Science Publishers.
68. Slotine, J., J. , Li, W. (1991). Applied nolinear control. Prentice Hall.

69. Squire, H. B. (1933). On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. *Proc. R. Soc. Lond. A* 142, 621–8.
70. Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Publishing.
71. Tung K. K. (1981). Barotropic instability of zonal flows. *J. Atmos. Sci.* 38: 308-321.
72. Vallis, G. K. (2006). *Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation*. Cambridge University Press.
73. Verhulst, F. (1996). *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer, Berlin.
74. Vidyasagar, M. (1993) .*Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, second edition.
75. Warsi, Z. U. A. (1999). *Fluid dynamics: theoretical and computational approaches*, 2nd ed. CRC Press LLC.
76. Weir, M. D., Hass J., Thomas, G. B. (2010). *Thomas' calculus: early transcendentals*, 12th ed. Addison-Wesley.
77. Wiggins S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2nd ed. Springer-Verlag.
78. Yaglom, A. M. (2012). *Hydrodynamic instability and transition to turbulence*. Springer Science+Business Media Dordrecht.