UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Representaciones del grupo simétrico en el lenguaje de las álgebras de Hopf

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A:

Luis Alberto Gómez Telésforo

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Daniel Labardini Fragoso
2015

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Alumno
   Gómez
   Telésforo
   Luis Alberto
   5527462061
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   105001380
2. Tutor
   Doctor
   Daniel
   Labardini
   Fragoso
3. Sinodal 1
   Doctor
   Francisco
   Marmolejo
   Rivas
4. Sinodal 2
   Doctor
   Christof
   Geiss
   Hahn
5. Sinodal 3
   Doctor
   Ernesto
   Vallejo
   Ruiz
6. Sinodal 4
   Doctor
   Valente
   Santiago
   Vargas
7. Datos del trabajo escrito
   Las representaciones del grupo simétrico en el lenguaje de las álgebras de Hopf
   68p
   2015

A todos los que me han impulsado a hacer bien las cosas, en especial a mis padres, mi hermano, Laura Itzel, Tomás Silva, Francisco Marmolejo y Daniel Labardini.

Índice general

Introducción

En la teoría de representaciones de grupos, los funtores de inducción y restricción son de gran utilidad. Con respecto a ellos, el Teorema de Reciprocidad de Frobenius y la Fórmula de Restricción de Mackey tienen mucha importancia. El Teorema de Reciprocidad de Frobenius dice que los funtores mencionados son adjuntos, mientras que la Fórmula de Restricción de Mackey permite descomponer una representación restringida en una suma directa de representaciones inducidas. Andrei Zelevinsky en *Representations of finite classical groups: A Hopf algebra approach* tradujo estos resultados al lenguaje de las álgebras de Hopf.

En 1941 se publicaron tres artículos de Heinz Hopf y Hans Samelson (en topología y grupos) de los que se desprendió de forma paulatina la teoría de las álgebras de Hopf. Pronto, matemáticos como Armand Borel y Jean Dieudonné utilizaron algunas ideas de los primeros y nacieron las primeras nociones de álgebra de Hopf. Estas nociones fueron enriqueciéndose rápidamente y la teoría desarrollada a su alrededor tuvo un gran impulso con el artículo *On the structure of Hopf algebras* de John Milnor y John Moore, en el cual se define un álgebra de Hopf sobre un anillo conmutativo con uno R, como un R-módulo graduado H que es tanto R-álgebra como R-coálgebra graduada y cuya comultiplicación es morfismo de álgebras. Sin embargo, esta definición no fue la definitiva. En la actualidad, un álgebra de Hopf es lo que en *Groups over* $\mathbb{Z}$ Bertram Kostant llamó álgebra de Hopf con antípoda.

Zelevinsky en la obra citada trabajó con un álgebra de Hopf relacionada con el grupo de Grothendieck. En esa álgebra la multiplicación está dada a través del funtor de inducción y la comultiplicación se define utilizando el funtor de restricción. Aunque la definición de álgebra de Hopf que utiliza Zelevinsky es la definición de álgebra de Hopf que proporcionaron Milnor y Moore y ésta es más general que la utilizada hoy en día, en este trabajo se demostrará que el álgebra $R(S)$ con la que trabajó Zelevinsky es un álgebra de Hopf en el sentido actual. Veremos algunos de los teoremas más importantes de representaciones de grupos finitos que Zelevinsky tradujo, de manera elegante, en algunas de las características de $R(S)$ como álgebra de Hopf. Debido a la naturaleza de las operaciones en $R(S)$, para demostrar que es un álgebra de Hopf necesitaremos muchos resultados de la teoría de representaciones de grupos finitos.

En el Capítulo 1 daremos una introducción, desde lo más elemental, a la teoría de representaciones de grupos finitos que terminará con el Lema de Schur, la descomposición en componentes isotípicas y el estudio del caracter de una representación. En el Capítulo 2 demostraremos el Teorema de Reciprocidad de Frobenius y la Fórmula de Restricción de Mackey. En el Capítulo 3 estudiaremos las representaciones irreducibles del grupo simétrico utilizando diagramas (Tablas de Young). En el Capítulo 4 definiremos álgebra de Hopf, álgebra de Zelevinsky y grupo de Grothendieck, y demostraremos todo lo que, con respecto a estos conceptos, en el Capítulo 5 será necesario para mostrar que $R(S)$ es un álgebra de Hopf.

Capítulo 1

Introducción a la teoría de representaciones de grupos finitos

En este primer capítulo daremos una introducción a la teoría de representaciones de grupos finitos. Seguiremos principalmente [**8**] excepto en lo que se refiere a caracteres donde seguiremos [**9**]. Comenzaremos de manera general y al final nos centraremos sólo en las representaciones complejas de grupos finitos.

1.1. Representaciones

Si tenemos un grupo G, un conjunto X y una acción izquierda $\alpha : G \times X \to X$ de G en X, entonces podemos observar que, como α preserva la operación del grupo y $\alpha(g, \_) : X \to X$ es invertible para cada $g \in G$, α puede considerarse un morfismo de grupos $\bar{\alpha} : G \to S_X$. De hecho tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Si G es un grupo, X es un conjunto y denotamos con $A_G(X)$ al conjunto de acciones de G sobre X, entonces cada $\alpha \in A_G(X)$ define, biunívocamente, un morfismo de grupos $\bar{\alpha} : G \to S_X$.*

Demostración. Sea $\alpha \in A_G(X)$. Para cada $g \in G$, definimos la función $\bar{\alpha}(g) : X \to X$ mediante la regla $\bar{\alpha}(g)(x) = \alpha(g, x)$. Un cálculo rutinario demuestra que $\bar{\alpha}(g)$ es biyectiva con inversa $\bar{\alpha}\left(g^{-1}\right)$:

$$\bar{\alpha}(g) \circ \bar{\alpha}\left(g^{-1}\right)(x) = \bar{\alpha}(g)\left(\alpha\left(g^{-1}, x\right)\right) = \left(\alpha(g, \alpha\left(g^{-1}, x\right))\right) = x.$$

Análogamente se prueba que $\bar{\alpha}\left(g^{-1}\right) \circ \bar{\alpha}(g)(x) = x$. Resta demostrar que $\bar{\alpha}$ es morfismo de grupos. Tomemos $g, h \in G$, entonces

$$\bar{\alpha}(gh)(x) = \alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x)) = \bar{\alpha}(g) \circ \bar{\alpha}(h)(x),$$

así que $\bar{\alpha}(gh) = \bar{\alpha}(g) \circ \bar{\alpha}(h)$, es decir, $\bar{\alpha}$ es morfismo de grupos. Para la inversa tomemos $f \in \mathrm{Hom}(G, S_X)$ y definamos $\hat{f} : G \times X \to X$ mediante la correspondencia $\hat{f}(g, x) = f(g)(x)$. Veamos que $\hat{f} \in A_G(X)$. Si $g, h \in G$ y $x \in X$, entonces

$$\hat{f}\left(g, \hat{f}(h, x)\right) = \hat{f}(g, f(h)(x)) = f(g)(f(h)(x)) = f(g) \circ f(h)(x) = f(gh)(x) = \hat{f}(gh, x),$$

además, si $e \in G$ es el neutro, entonces $\hat{f}(e, x) = x$, pues $f(e) = Id_X$. Concluimos que $\hat{f} \in A_G(X)$. Para terminar, mostremos que $\hat{\bar{\alpha}} = \alpha$ y $\bar{\hat{f}} = f$. Sean $g \in G$ y $x \in X$, entonces

$$\hat{\bar{\alpha}}(g, x) = \bar{\alpha}(g)(x) = \alpha(g, x) \text{ y } \bar{\hat{f}}(g)(x) = \hat{f}(g, x) = f(g)(x),$$

por lo tanto, $\alpha = \hat{\bar{\alpha}}$ y para cada $g \in G$ sucede que $\bar{\hat{f}}(g) = f(g)$, que es lo que buscábamos. □

Debido a la Proposición 1.1 nos es posible pensar una acción como un morfismo de grupos y en adelante lo haremos sin hacer distinción.

Definición 1.2. Sean G un grupo y k un campo. Una *representación* de G sobre k es una pareja (V, ρ) que consiste de un k-espacio vectorial V y de una acción ρ de G en V tal que $\bar{\rho}(g)$ es lineal para todo $g \in G$. La *dimensión* o el *grado* de una representación (V, ρ) es la dimensión de V sobre k.

Ejemplo 1.3. Sea V un k-espacio vectorial. Si $\iota : \mathrm{GL}(V) \to S_V$ es la inclusión, entonces (V, ι) es una representación de $\mathrm{GL}(V)$, pues $\mathrm{GL}(V) \subseteq \mathrm{End}_k(V)$.

En vista de la Proposición 1.1 y de la Definición 1.2, tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.4. *Si G es un grupo, V es un espacio vectorial sobre un campo k y denotamos con $R_V(G)$ al conjunto de representaciones de G en V, entonces cada $\rho \in R_V(G)$ define un morfismo de grupos $\bar{\rho} \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{GL}(V))$ de forma biunívoca.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.1 y la Definición 1.2, la asignación $\rho \mapsto \bar{\rho}$ es inyectiva y $\bar{\rho} \in \operatorname{Hom}(G, GL(V))$ para cualquier $\rho \in R_V(G)$. Sea $\gamma \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{GL}(V))$. Definamos $\hat{\gamma} : G \times V \to V$ como en la Proposición 1.1. Entonces $\hat{\gamma} \in A_G(V)$ y para cada $g \in G$ tenemos que $\bar{\hat{\gamma}}(g) = \gamma(g) \in \operatorname{GL}(V)$, es decir, $\hat{\gamma} \in R_V(G)$ y $\bar{\hat{\gamma}} = \gamma$. Por tanto, la función $\bar{\cdot} : R_V(G) \to \operatorname{Hom}(G, GL(V))$ es biyectiva. □

DEFINICIÓN 1.5. Sean (V, ρ) y (W, κ) dos representaciones de un grupo G sobre un campo k. Un morfismo $\phi \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$ es *G-lineal* o es *morfismo de representaciones* si para toda $g \in G$ se tiene que $\phi \circ \rho(g) = \kappa(g) \circ \phi$. Denotaremos con $\operatorname{Hom}_k^G(V, W)$ al conjunto de morfismos G-lineales entre las representaciones (V, ρ) y (W, κ).

OBSERVACIÓN 1.6. La composición de morfismos G-lineales es la composición usual de morfismos lineales y un morfismo $\phi \in \operatorname{Hom}_k^G(V, W)$ es un *isomorfismo G-lineal* si como transformación lineal es isomorfismo.

Si k es un campo y $\rho, \kappa \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{GL}(n, k))$, decimos que ρ está relacionado con κ ($\rho \sim k$) si existe $\phi \in \operatorname{GL}(n, k)$ tal que $\phi \circ \rho(g) \circ \phi^{-1} = \kappa(g)$ para todo $g \in G$. Es claro que esta relación es de equivalencia.

PROPOSICIÓN 1.7. *El conjunto de clases de isomorfismo de representaciones de dimensión n de G sobre un campo k está en biyección con el cociente* $\operatorname{Hom}(G, \operatorname{GL}(n,k)) / \sim$.

DEMOSTRACIÓN. Si (V, ρ) es una representación de dimensión n, entonces existe un isomorfismo lineal $\phi : V \to k^n$ y éste induce un morfismo $\rho_\phi \in \operatorname{Hom}(G, \operatorname{GL}(n, k))$ dado por la regla $\rho_\phi(g) := \phi \circ \rho(g) \circ \phi^{-1}$. Si escogemos otro isomorfismo $\varphi : V \to k^n$, y definimos $\rho_\varphi(g) := \varphi \circ \rho_V(g) \circ \varphi^{-1}$ para toda $g \in G$, entonces $\rho_\varphi(g) = \varphi \circ \phi^{-1} \circ \rho_\phi(g) \circ \phi \circ \varphi^{-1}$, pues $\rho(g) = \phi^{-1} \circ \rho_\phi(g) \circ \phi$. Así, $\rho_\phi \sim \rho_\varphi$. Es claro que la demostración de que $\rho_\phi \sim \rho_\varphi$ muestra también que si $\alpha : (W, \pi) \to (V, \rho)$ es un isomorfismo de representaciones, entonces $\pi_{\phi \circ \alpha} \sim \rho_\phi$, es decir, la función $f : \left\{[(V, \rho)]_\cong \mid \dim_k(V) = n\right\} \to \operatorname{Hom}(G, GL(n,k)) / \sim$ definida mediante $f([(V, \rho)]) = [\rho_\phi]$ está bien definida. Dado que para cada morfismo $\rho \in \operatorname{Hom}(G, GL(n,k))$, se satisface que (k^n, ρ) es una representación de dimensión n, entonces $f([(k^n, \rho)]) = [\rho]$; así que f es suprayectiva. Nótese que para cualquier representación (V, ρ) de dimensión n, la pareja (k^n, ρ_ϕ) es una representación de dimensión n isomorfa a (V, ρ), pues $\rho_\phi(g) \circ \phi = \phi \circ \rho(g)$. Lo anterior implica que cualquier clase de isomorfismo de representaciones de dimensión n tiene un representante tal que el espacio de la representación es k^n. Así, si $f([(k^n, \rho)]) = [\rho] = [\pi] = f([(k^n, \pi)])$, entonces existe una transformación lineal $\eta \in \operatorname{GL}(n, k)$ tal que $\eta^{-1} \circ \rho(g) \circ \eta = \pi(g)$ para todo $g \in G$; de este modo η es un isomorfismo de representaciones. Concluimos que $[(k^n, \rho)] = [(k^n, \pi)]$, lo que implica que f es inyectiva. □

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.8. Analicemos las representaciones de $\mathbb{Z}$ de dimensión n sobre un campo algebraicamente cerrado k, es decir, las representaciones de $\mathbb{Z}$ en k^n. Como $\mathbb{Z}$ es libre con base $\{1\}$, para cada $A \in \operatorname{GL}(n, k)$, la asignación $1 \mapsto A$ define una acción ρ_A de $\mathbb{Z}$ en k^n dada por $\rho_A(m) = A^m$ (entendemos que $T^0 = Id_V$ para cualquier endomorfismo $T \in \operatorname{End}(V)$). Así, de la proposición anterior se sigue que las clases de isomorfismo de representaciones de $\mathbb{Z}$ están en biyección con las clases de conjugación de $\operatorname{GL}(n, k)$. Dicho de otro modo, las clases de isomorfismo están en biyección con las formas normales de Jordan; por consiguiente, para obtener una representación es suficiente establecer el tamaño de los bloques de Jordan y el valor propio de cada bloque asociados a alguna forma normal.

Ejemplo 1.9. Si C_n es un grupo cíclico de orden n y g es un generador de C_n, entonces cualquier representación (V, ρ) de C_n sobre un campo algebraicamente cerrado k satisface que $\rho(g^m) = \rho(g)^m$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Fijemos una representación (V, ρ) de C_n y escojamos una base β de V tal que $[\rho(g)]_\beta$ se encuentre en su forma normal de Jordan; así, podemos escribir $[\rho(g)]_\beta = \operatorname{diag}[J_i]$ donde cada J_i es un bloque de Jordan cuyo valor propio asociado es λ_i.

Como $\rho(g)^n = Id_V$, es necesario que $J_i^n = Id$ para toda i. Fijemos una i. Si J es el bloque de Jordan del mismo tamaño que J_i y cuyo valor propio es 0, entonces $J_i = \lambda_i Id_V + J$. Concluimos que

$$J_i^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} J^j,$$

pero $\left[J^j\right]_{kl} = 1$ si $l = k + j$ y $\left[J^j\right]_{kl} = 0$ en otro caso, por lo que $J_i^n = Id$ si y sólo si $J_i = \lambda_i Id_V$ y $\lambda_i^n = 1$. Por lo tanto, J_i es diagonal para cada i, lo que implica que $[\rho(g)]_\beta$ es diagonal y sus valores propios son raíces n-ésimas de 1. Así, las representaciones de dimensión finita de C_n están clasificadas por la dimensión de V y el conjunto de valores propios de la matriz $[\rho(g)]_\beta$.

Un objetivo del estudio de las representaciones es conseguir clasificarlas. En los Ejemplos 1.8 y 1.9 hemos parametrizado las representaciones de $\mathbb{Z}$ y de C_n. Sin embargo, conseguir una clasificación para las representaciones de un grupo en general no es tan sencillo.

Haciendo un abuso de notación, si (V, ρ) es una representación de un grupo G, denotaremos la acción de $g \in G$ como $gv := \rho(g)v$ para cada $v \in V$ y diremos que V es una representación de G. Recurriremos a la notación ρ o ρ_V para referirnos a la acción cuando sea necesario hacer énfasis en ella.

1.2. Representaciones irreducibles

Importantes en el estudio de las representaciones son las representaciones irreducibles de dimensión finita, pues, cuando la característica del campo no divide al orden del grupo, permiten obtener todas las representaciones de dimensión finita de un grupo finito.

Definición 1.10. Sea V una representación de G. Una *subrepresentación* o *un subespacio G-invariante* de V es un subespacio W de V tal que para todo $w \in W$ y toda $g \in G$ sucede que $gw \in W$.

Observación 1.11. Si W es una subrepresentación de V, entonces V/W es una representación de G. Para $g \in G$ definimos $g(v + W) := gv + W$. La acción de $g \in G$ en V/W está bien definida, pues si $v - u \in W$, entonces $gv - gu \in W$. Esta representación se conoce como la *representación cociente* de V sobre W. Observemos que si V y W son representaciones de G y $\phi \in \operatorname{Hom}_k^G(V, W)$, entonces $\operatorname{im}(\phi)$ y $\operatorname{nuc}(\phi)$ son subrepresentaciones de W y de V respectivamente, pues $\rho_W(g) \circ \phi = \phi \circ \rho_V(g)$ para cada $g \in G$.

Definición 1.12. La *suma directa* de dos representaciones V y W es el espacio $V \oplus W$ con la acción de G definida como $g(v + w) := gv + gw$ para $g \in G$, $v \in V$ y $w \in W$.

Definición 1.13. Una representación es *irreducible* si es distinta de cero y no tiene subrepresentaciones propias no triviales; y es *completamente reducible* si se puede descomponer como suma directa de irreducibles.

Observación 1.14. Si V es una representación de G de dimensión uno, entonces es irreducible. Del análisis de las representaciones de C_n se concluye que cada representación de C_n es suma directa de representaciones irreducibles de dimensión uno, y cualquier generador g de C_n actúa en ellas mediante la multiplicación por alguna raíz n-ésima de 1.

Si G es un grupo finito, las representaciones irreducibles de dimensión finita sobre un campo cuya característica no divida al orden del grupo permiten obtener todas sus representaciones de dimensión finita, ya que bajo estas hipótesis toda representación es completamente reducible. Para demostrar esto, necesitamos el siguiente lema:

LEMA 1.15. *Si V es una representación de dimensión finita de un grupo finito G sobre un campo k cuya característica no divide al orden de G, entonces toda subrepresentación de V tiene un complemento G-invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Si W es una subrepresentación de V, podemos elegir un complemento lineal W' de W. Consideremos la proyección $P : W \oplus W' \to W$. Definamos $P' : V \to W$ como

$$P' = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho\left(g^{-1}\right);$$

dado que W es G-invariante y $P(V) = W$, tenemos que, en efecto, $P'(V) \subseteq W$. Si tomamos $w \in W$, entonces

$$P'(w) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho\left(g^{-1}\right)(w) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g g^{-1}(w) = w.$$

Concluimos que $P'(V) = W$ y que $P' \downharpoonright_W = Id_W$, por lo que P' es una proyección de V en W y $\operatorname{nuc}(P')$ es un complemento lineal de W. Notemos que para cualquier $h \in G$

$$\rho(h) \circ P' \circ \rho\left(h^{-1}\right) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ P \circ \rho\left(g^{-1}h^{-1}\right) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho\left(g^{-1}\right) = P',$$

es decir, $P' \in \operatorname{Hom}_k^G(V, W)$. La Observación 1.11 asegura que $\operatorname{nuc}(P')$ es G-invariante. □

TEOREMA 1.16. *Toda representación V de dimensión finita de un grupo finito G sobre un campo cuya característica no divida al orden del grupo es completamente reducible.*

DEMOSTRACIÓN. Si V contiene una subrepresentación propia no trivial W, por el Lema 1.15, W tiene un complemento G-invariante. Dado que la dimensión de V es finita, podemos continuar este proceso sobre las subrepresentaciones de V hasta descomponerlo como suma directa de irreducibles en un número finito de pasos. □

Notemos que en el Lema 1.15 tuvimos que elegir un complemento lineal de la subrepresentación dada para poder encontrar un complemento G-lineal, así que no nos es posible asegurar que cualquier descomposición obtenida por este medio es independiente de tal elección. De hecho, si G actúa trivialmente en k^n con $n > 1$, podemos descomponer a k^n de muchas formas distintas.

1.3. Lema de Schur y la descomposición en componentes isotípicas

En esta sección obtendremos una descomposición de cualquier representación de dimensión finita de un grupo G sobre un campo cuya característica no divida al orden del grupo, conocida como la descomposición en componentes isotípicas, que no depende de la elección de complementos lineales.

DEFINICIÓN 1.17. Sea R un anillo conmutativo con uno. Una *R-álgebra* A es un anillo con uno junto con un morfismo unitario de anillos $u : R \to A$ tales que $u(R) \subseteq \operatorname{Cen}(A)$, donde $\operatorname{Cen}(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ para cada } b \in A\}$. Si A es un anillo con división, entonces se dice que A es una *R-álgebra con división*.

OBSERVACIÓN 1.18. Notemos que a una R-álgebra A se le puede asignar estructura de R-módulo de la siguiente manera: para cada $r \in R$ y $a \in A$ definamos $r \cdot a := u(r)a$. Como A es anillo, este producto es distributivo y asociativo. Además $1 \cdot a = a$ para cada $a \in A$, pues $u(1) = 1_A$. Por lo tanto $A \in R$-mód. Cuando R es campo, la dimensión de A es su dimensión como R-espacio vectorial. También observemos que si R es campo, cualquier morfismo unitario de anillos $u : R \to A$ es inyectivo.

PROPOSICIÓN 1.19. *Si k es un campo, G es un grupo y V es una representación de G, entonces $\mathrm{End}_k^G(V) = \mathrm{Hom}_k^G(V, V)$ es una k-álgebra. Y si $\dim(V) < \infty$, entonces $\mathrm{End}_k^G(V)$ es de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\phi, \varphi \in \mathrm{End}_k^G(V)$. Definamos $\phi + \varphi$ y $\phi \cdot \varphi$ como

$$(\phi + \varphi)(v) = \phi(v) + \varphi(v) \qquad \text{y} \qquad \phi \cdot \varphi = \phi \circ \varphi.$$

Veamos que $\phi + \varphi$ es morfismo de representaciones. Si $v \in V$ y $g \in G$, entonces

$$(\phi + \varphi)(gv) = \phi(gv) + \varphi(gv) = g\phi(v) + g\varphi(v) = g(\phi + \varphi)(v).$$

Es claro que con estas operaciones $\mathrm{End}_k^G(V)$ es un subanillo de $\mathrm{End}_k(V)$. Definamos un morfismo unitario de anillos $u : k \to \mathrm{End}_k^G(V)$ mediante $u(\lambda) = \lambda Id_V$. De esta manera,

$$(\phi \cdot \lambda Id_V)(v) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) = (\lambda Id_V \cdot \phi)(v)$$

para cada $v \in V$, es decir, $u(k) \subseteq \mathrm{Cen}\left(\mathrm{End}_k^G(V)\right)$. Así, $\mathrm{End}_k^G(V)$ es una k-álgebra.

Si V es de dimensión finita, como $\mathrm{End}_k^G(V)$ es un subespacio de $\mathrm{End}_k(V)$, obtenemos lo deseado. □

TEOREMA 1.20 (Lema de Schur). *Si V y W son representaciones irreducibles (no necesariamente de dimensión finita) de un grupo G sobre un campo k, entonces cualquier morfismo $\phi : V \to W$ es cero o invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\phi \neq 0$, entonces $0 \neq \mathrm{im}(\phi) \leq W$ y $0 \leq \mathrm{nuc}(\phi) \nleq V$, de manera que $\mathrm{im}(\phi) = W$ y $\mathrm{nuc}(\phi) = 0$, pues W y V son irreducibles. Por tanto, ϕ es invertible. □

Tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 1.21. *Si V es una representación irreducible (no necesariamente de dimensión finita) de G sobre k, entonces $\mathrm{End}_k^G(V)$ es una k-álgebra con división.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\phi \in \mathrm{End}_k^G(V)$ y $\phi \neq 0$, el Lema de Schur implica que ϕ es isomorfismo. Por lo tanto, $\mathrm{End}_k^G(V)$ es un álgebra con división. □

En el caso complejo tenemos:

PROPOSICIÓN 1.22. *Cualquier $\mathbb{C}$-álgebra con división de dimensión finita es isomorfa a $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra con el morfismo unitario $u : \mathbb{C} \to A$. Si $a \in A$ y $a \neq 0$, entonces $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ es linealmente dependiente, pues $\dim(A) < \infty$; así, existe $P \in (u(\mathbb{C}))[x]$ tal que $P \neq 0$ y $P(a) = 0$. Como anillos $u(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, así que $u(\mathbb{C})$ es algebraicamente cerrado. Supongamos que P se descompone como $P(x) = \prod_k (x - u(\lambda_k))$, con $\lambda_k \in \mathbb{C}$ para cada k. Entonces $a = u(\lambda_k)$ para alguna k, pues A es álgebra con división. Por lo tanto, $A = u(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. □

Consecuencia de los tres resultados anteriores son los siguientes corolarios:

COROLARIO 1.23. *Si V y W son representaciones complejas de dimensión finita e irreducibles de un grupo G, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V, W) = 0$ si como representaciones $V \ncong W$, mientras que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^G(V, W) \cong \mathbb{C}$ si como representaciones $V \cong W$.*

Demostración. Si $W \ncong V$, el Lema de Schur implica lo deseado. Si $W \cong V$, basta observar que, como espacios vectoriales, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{G}(V, W)$ $\square$

Corolario 1.24. *Si G es un grupo abeliano finito y (V, ρ) es una representación irreducible de G que tiene dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, entonces V es de dimensión uno.*

Demostración. Sean $g, h \in G$. Como G es abeliano, $gh = hg$, es decir, para cada elemento $g \in G$, la función $\rho(g)$ es un isomorfismo de representaciones. Dado que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}^{G}(V) \cong \mathbb{C}$, entonces para toda $g \in G$ existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $gv = av$ para cualquier $v \in V$. Por lo tanto, para cada $v \in V$, el subespacio $\langle v \rangle$ es una subrepresentación de V. En particular, para cualquier $v \neq 0$, concluimos que $V = \langle v \rangle$, ya que V es irreducible. Por lo tanto, V es de dimensión uno. $\square$

Hemos demostrado que toda representación de dimensión finita de un grupo finito G sobre un campo cuya característica no divida al orden del grupo es completamente reducible. Entonces, si tomamos una representación V de un grupo G bajo estas condiciones, podemos escribir $V = \bigoplus_i V_i$, donde cada $V_i \cong W_i^{n_i}$ con W_i irreducible y $W_i \ncong W_j$ si $i \neq j$. A cada V_i se le llama *componente isotípica* de V. Se mencionó que no es posible asegurar que la descomposición en irreducibles fuese única; sin embargo, el Lema de Schur y el siguiente resultado son lo suficiente para mostrar que la descomposición en componentes isotípicas de una representación V no depende de la elección hecha para descomponer a V en irreducibles.

Lema 1.25. *Si $\bigoplus_i V_i$ y $\bigoplus V_i'$ son representaciones de G tales que $V_i = W_i^{n_i}$ y $V_i' = W_i^{m_i}$ con W_i irreducible para cada i y $W_i \ncong W_j$ si $i \neq j$; entonces, para cada morfismo G-lineal $\phi : \bigoplus_i V_i \to \bigoplus V_i'$ se tiene que $\phi(V_i) \subseteq V_i'$.*

Demostración. Si $\pi_j : \bigoplus V_i' \to V_j'$ es la proyección y $\phi_k = \phi \downharpoonleft_{V_k}$, es suficiente demostrar que $\pi_j \circ \phi_k = 0$ si $j \neq k$. Notemos que cada V_i y V_i' son subrepresentaciones de $\bigoplus_i V_i$ y $\bigoplus_i V_i'$, respectivamente. Por lo tanto, para cualesquiera $g \in G$ y $v_i \in V_i$ sucede que

$$g^{-1}\pi_j g\left(\sum_i v_i\right) = g^{-1}\pi_j \sum_i g v_i = g^{-1} g v_j = \pi_j \left(\sum_i v_i\right),$$

por lo que $\pi_j \in \mathrm{Hom}_k^G\left(\bigoplus_i V_i', V_j'\right)$ y por tanto, $\pi_j \circ \phi_k \in \mathrm{Hom}_k^G\left(V_k, V_j'\right)$. Por último, si p_h es la proyección de $W_j^{m_j}$ sobre la h-ésima coordenada, el argumento anterior implica que $p_h \circ (\pi_j \circ \phi_k) \downharpoonleft_{W_k} \in \mathrm{Hom}_k^G(W_k, W_j)$. Si $k \neq j$, obtenemos que $p_h \circ (\pi_j \circ \phi_k) \downharpoonleft_{W_k} = 0$ para cada h, pues $\mathrm{Hom}_k^G(W_k, W_j) = 0$. Por lo tanto, $\pi_j \circ \phi_k = 0$ si $k \neq j$. $\square$

Teorema 1.26. *Si V es una representación de dimensión finita de G sobre un campo cuya característica no divida al orden del grupo, entonces la descomposición en componentes isotípicas no depende de la elección hecha para encontrar una descomposición en irreducibles de V.*

Demostración. Sea $\bigoplus_i V_i$ una descomposición de V en componentes isotípicas, donde $V_i \cong W_i^{n_i}$. Para cada j, si W es una subrepresentación irreducible de V tal que $W \cong W_j$, el lema anterior asegura que la inclusión $\iota : W \to V$ mapea W en V_j, es decir, cualquier subrepresentación de V isomorfa a W_j se encuentra contenida en V_j. Por tanto, $\sum W \subseteq V_j$, donde la suma corre sobre las subrepresentaciones irreducibles de V isomorfas a W_j. Como la contención $V_j \subseteq \sum W$ se sigue de la definición de V_j, sin importar la descomposición en irreducibles que demos para V, podemos describir cada V_j como la suma de todas las subrepresentaciones de V isomorfas a W_j. $\square$

1.4. Productos tensoriales y representaciones duales

Sea G un grupo. Denotaremos con Rep$G$ a la categoría de sus representaciones complejas y con rep$G$ a la categoría de sus representaciones complejas de dimensión finita. Hasta este momento, las únicas operaciones de representaciones con que contamos son la suma y el cociente; a continuación agregaremos dos más. Si $V, W \in \text{Rep}G$, entonces $V \otimes_{\mathbb{C}} W$, $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \in \text{Rep}G$ con las siguientes acciones: si $g \in G$, $v \otimes w \in V \otimes_{\mathbb{C}} W$ y $T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, definimos

$$g \cdot (v \otimes w) := gv \otimes gw$$

y

$$g \cdot T := \rho_W(g) \circ T \circ \rho_V\left(g^{-1}\right).$$

Es claro que la última es acción debido a la asociatividad de la composición de funciones y la primera se extiende a todo $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ linealmente mediante la propiedad universal del producto tensorial, pues g actúa linealmente en V y en W. En particular, cuando $W = \mathbb{C}$ y G actúa trivialmente en W se tiene que $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) = V^*$, representación que recibe el nombre de *representación dual* de V.

Observación 1.27. Recordemos que para cualesquiera $\mathbb{C}$-espacios vectoriales V y W y cualquier transformación lineal $\phi : V \to W$, definimos $\phi^t : W^* \to V^*$ como $\phi^t(T) = T \circ \phi$. Si V y W son de dimensión finita y $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ son bases ordenadas, entonces $[\phi^t]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \left([\phi]_{\beta}^{\gamma}\right)^t$. Notemos que la acción dual para $g \in G$ es precisamente $\left(\rho\left(g^{-1}\right)\right)^t$ y como vimos antes, si G es finito, $g \in G$ es de orden m y V es una representación compleja de G, entonces $\rho(g)$ es diagonalizable y sus valores propios son raíces m-ésimas de 1, por lo que los valores propios de su inversa son los conjugados de los valores propios de $\rho(g)$.

Demostraremos dos resultados acerca de estos espacios que nos serán de utilidad.

Proposición 1.28. *Si $V, W \in \text{rep}G$, entonces $V^* \otimes_{\mathbb{C}} W \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ en rep$G$.*

Demostración. Definamos $\hat{\phi} : V^* \times W \to \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ como sigue: $\hat{\phi}(T, w)(v) = T(v)\, w$ para cada $v \in V$, $w \in W$ y $T \in V^*$. Es claro que $\hat{\phi}(T, w) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, pues T es lineal. Notemos que $\hat{\phi}$ es bilineal porque los escalares distribuyen sobre los vectores y viceversa. Por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo lineal $\phi : V^* \otimes_{\mathbb{C}} W \to \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ tal que $\phi(T \otimes w) = \hat{\phi}(T, w)$. Veamos que ϕ es isomorfismo Ahora mostraremos que existe una base α de $V^* \otimes_{\mathbb{C}} W$, tal que $\phi(\alpha)$ es base de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, para concluir que ϕ es isomorfismo. Sean $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ bases ordenadas. Si β^* es la base dual de V^* asociada a β, entonces $\alpha = \{v^* \otimes w \mid w \in \gamma\, y\, v^* \in \beta^*\}$ es una base de $V^* \otimes_{\mathbb{C}} W$ y para cualquier $v^* \otimes w \in \alpha$ se satisface que

$$\phi(v^* \otimes w)(v) = v^*(v)\, w = w$$

y

$$\phi(v^* \otimes w)(v') = v^*(v')\, w = 0$$

si $v' \neq v$. Así, en las bases β y γ, la representación matricial de $\phi(v^* \otimes w)$ es $[\phi(v^* \otimes w)]_{\beta}^{\gamma} = [a_{w'v'}]$ con $w' \in \gamma$, $v' \in \beta$ y $a_{w'v'} = \delta_{(w',v')(w,v)}$. Concluimos que ϕ es un isomorfismo lineal, ya que el conjunto $\left\{[\phi(v^* \otimes w)]_{\beta}^{\gamma} \mid w \in \gamma\, y\, v^* \in \beta^*\right\}$ es base para $\mathbb{C}^{n\times m}$, donde $n = \dim(W)$ y $m = \dim(V)$, y como espacios vectoriales $\mathbb{C}^{n\times m} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$. Resta mostrar que ϕ es morfismo de representaciones. Sea $g \in G$, entonces

$$\phi(g(T \otimes w))(v) = \phi(g \cdot (T) \otimes \rho_W(g)(w))(v) = \left(T \circ \rho_V\left(g^{-1}\right)(v)\right)\rho_W(g)(w)$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} g\cdot(\phi(T\otimes w))(v) &= \rho_W(g)\circ\phi(T\otimes w)\circ\rho_V\left(g^{-1}\right)(v) \\ &= \rho_W(g)\left(\left(T\circ\rho_V\left(g^{-1}\right)\right)(v)\,w\right) \\ &= T\circ\rho_V\left(g^{-1}\right)(v)\,\rho_W(g)(w); \end{aligned}$$

la última igualdad se debe a que $T\circ\rho_V\left(g^{-1}\right)(v)\in\mathbb{C}$. Por lo tanto, $\phi(g(T\otimes w))=g(\phi(T\otimes w))$ para cualquier tensor elemental $T\otimes w$ y por tanto ϕ es morfismo de representaciones. □

Recordemos que si R es un anillo con uno, U y V son R-módulos derechos, W y X son R-módulos izquierdos, $f:U\to V$ es un morfismo de R-módulos derechos y $g:W\to X$ es uno de R-módulos izquierdos; por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo de grupos abelianos $f\otimes g:U\otimes_R W\to V\otimes_R X$ tal que $(f\otimes g)(u\otimes w)=f(u)\otimes g(w)$ para cada $u\in U$ y $w\in W$.

Consideremos un campo k, un k-espacio vectorial V y un operador lineal ϕ de V. Por simplicidad y debido a que la traza de una matriz es invariante bajo conjugación, escribimos simplemente $\operatorname{Tr}(\phi)$ para denotar la traza de cualquier matriz que represente al operador ϕ.

Proposición 1.29. *Si V y W son k-espacios vectoriales de dimensión finita, $f\in\operatorname{End}_k(V)$ y $g\in\operatorname{End}_k(W)$, entonces $\operatorname{Tr}(f\otimes g)=\operatorname{Tr}(f)\operatorname{Tr}(g)$.*

Demostración. Supongamos que $n=\dim(V)$ y $m=\dim(W)$. Si $\beta=\{v_i\mid 1\le i\le n\}\subseteq V$ y $\gamma=\{w_l\mid 1\le l\le m\}\subseteq W$ son bases ordenadas, entonces $\alpha=\{v_i\otimes w_l\mid 1\le i\le n,\,1\le l\le m\}$ es base (ordenada lexicográficamente) de $V\otimes W$. Si $A=[f]_\beta$, $B=[g]_\gamma$ y $C=[f\otimes g]_\alpha$, entonces

$$C_{(i,l)(j,k)}=(C(v_j\otimes w_k))_{(i,l)}=(Av_j\otimes Bw_k)_{(i,l)}=(Av_j)_i(Bw_k)_l=A_{ij}B_{lk}.$$

Así,

$$\operatorname{Tr}(f\otimes g)=\operatorname{Tr}(C)=\sum_{(i,l)}C_{(i,l)(i,l)}=\sum_{(i,l)}A_{ii}B_{ll}=\sum_i A_{ii}\sum_l B_{ll}=\operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)=\operatorname{Tr}(f)\operatorname{Tr}(g).$$

□

1.5. Álgebra de grupo

Estudiaremos el álgebra de grupo, un anillo de gran utilidad para el estudio de las representaciones de un grupo finito como veremos poco a poco.

En adelante G siempre denotará un grupo finito. Consideremos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}[G]$ con base G; es decir, $\mathbb{C}[G]=\left\{\sum_{g\in G}a_g g\mid a_g\in\mathbb{C}\right\}$. Debido a la estructura de G, el espacio $\mathbb{C}[G]$ es un anillo con la multiplicación dada por lo siguiente: si $g,h\in G$, definimos $g\cdot h:=gh\in\mathbb{C}[G]$ y extendemos bilinealmente. De este modo, para $\sum_{g\in G}a_g g$, $\sum_{g\in G}b_g g\in\mathbb{C}[G]$, tenemos que

$$\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G}b_g g\right)=\sum_{k,h\in G}a_h b_k hk=\sum_{g\in G}\sum_{hk=g}a_h b_k g.$$

La asociatividad del producto se sigue de la asociatividad de la operación de G, así que no la demostraremos. Veamos la distributividad por la izquierda:

$$\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)\cdot\left(\left(\sum_{g\in G}b_g g\right)+\left(\sum_{g\in G}c_g g\right)\right)=\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G}(b_g+c_g)\,g\right)=\sum_{g\in G}\sum_{hk=g}a_h(b_k+c_k)\,g$$

y por otro lado

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)+\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} c_g g\right)=\sum_{g\in G}\sum_{hk=g} a_h b_k g+\sum_{g\in G}\sum_{hk=g} a_h c_k g=\sum_{g\in G}\sum_{hk=g} a_h\left(b_k+c_k\right)g.$$

Análogamente puede probarse la distributividad por la derecha. Es claro que la identidad del anillo es la identidad del grupo.

Consideremos el morfismo unitario de anillos $u:\mathbb{C}\to\mathbb{C}[G]$ dado por: $u(a)=ae$, donde e es la identidad de G. Notemos que si $\sum_{g\in G} b_g g\in\mathbb{C}[G]$ y $a\in\mathbb{C}$, entonces

$$(ae)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G} ab_g eg=\sum_{g\in G} b_g age=\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)\cdot(ae)$$

Con esto tenemos que $\mathbb{C}[G]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra.

Definición 1.30. El *álgebra de grupo* de G sobre $\mathbb{C}$ es el espacio $\mathbb{C}[G]$ con la estructura definida en los párrafos anteriores.

Observación 1.31. La multiplicación por $g\in G$ a la izquierda da a $\mathbb{C}[G]$ estructura de representación. A $\mathbb{C}[G]$ con esta acción se le conoce como *representación regular*.

Proseguiremos con un teorema que nos dará más herramientas al ver las representaciones de G como módulos izquierdos sobre $\mathbb{C}[G]$.

Teorema 1.32. *Las categorias* $\mathrm{Rep}G$ *y* $\mathbb{C}[G]$-mód *son isomorfas. Más aún los* $\mathbb{C}[G]$ *módulos irreducibles son representaciones irreducibles de* G *y viceversa.*

Demostración. Definamos un funtor $\mathrm{F}:\mathbb{C}[G]\text{-mód}\to\mathrm{Rep}G$. Sea $(V,\cdot)\in\mathbb{C}[G]$-mód donde $\cdot:\mathbb{C}[G]\times V\to V$ es el producto por escalares en V. Dotemos a V de estructura de espacio vectorial complejo. Para $a\in\mathbb{C}$ y $v\in V$ definamos $av:=ae\cdot v$. Esta definición convierte a V en espacio vectorial complejo, pues $\mathbb{C}e$ es un subanillo de $\mathbb{C}[G]$. Consideremos la función $\rho_\cdot:G\to\mathrm{GL}(V)$ cuya regla de correspondencia está dada por $\rho_\cdot(g)(v)=g\cdot v$ para todo $g\in G$ y todo $v\in V$. Veamos que $\rho_\cdot(g)$ es en efecto lineal para cualquier $g\in G$: si $a\in\mathbb{C}$, $v,w\in V$, entonces

$$\rho_\cdot(g)(v+aw)=g\cdot(v+aew)=g\cdot v+gae\cdot w=\rho_\cdot(g)v+aeg\cdot w=\rho_\cdot(g)v+a\rho_\cdot(g)w.$$

La función $\rho_\cdot$ es morfismo de grupos, pues $gh\cdot v=g\cdot(h\cdot v)$. Defínase $\mathrm{F}(V,\cdot)=(V,\rho_\cdot)$; es claro que $\mathrm{F}(V,\cdot)\in\mathrm{Rep}G$.

Si $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)$, se define $\mathrm{F}(f)=f$. Dada la asignación de F en los objetos, se sigue que $\mathrm{F}(f)$ es morfismo de representaciones

En la otra dirección tomemos $(V,\rho)\in\mathrm{Rep}G$. Como $\rho(g)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ para cada $g\in G$, podemos extender ρ a una transformación lineal $\bar{\rho}:\mathbb{C}[G]\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Para $v\in V$ y $r\in\mathbb{C}[G]$ definamos $r\cdot_\rho v:=\bar{\rho}(r)v$. Esta asignación es un producto en V por elementos de $\mathbb{C}[G]$ que es distributivo, pues $\bar{\rho}(r)$ es lineal para cada $r\in\mathbb{C}[G]$ y $\bar{\rho}(e)(v)=v$ para todo $v\in V$. Para ver que es asociativo es suficiente notar que $\bar{\rho}(rs)=\bar{\rho}(r)\circ\bar{\rho}(s)$, pues ρ es morfismo de grupos, lo que implica que la extensión preserva el producto que definimos en $\mathbb{C}[G]$. Definamos $\mathrm{E}:\mathrm{Rep}G\to\mathbb{C}[G]$-mód en los objetos con la regla $\mathrm{E}(V,\rho)=(V,\cdot_\rho)$ y en los morfismos $\mathrm{E}(f)=f$ con $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{G}(V,W)$.

Si $(V,\cdot) \in \mathbb{C}[G]$-mód, entonces $g \cdot_{\rho_{\cdot}} v = \rho_{\cdot}(g)(v) = g \cdot v$, así $\mathrm{E} \circ \mathrm{F}(V,\cdot) = (V \cdot)$. Si $(V,\rho) \in \mathrm{Rep}G$, entonces $\rho_{\cdot_\rho}(g)(v) = g \cdot_\rho v = \rho(g)(v)$, por lo tanto $\mathrm{F} \circ \mathrm{E}(V,\rho) = (V,\rho)$. Debido a que en los morfismos ambos funtores son la identidad, tenemos demostrado que F y E son inversos uno del otro.

Para demostrar la segunda parte del teorema notemos que si $V \in \mathbb{C}[G]$-mód y W es un submódulo de V, entonces W es invariante bajo los elementos de G y $\mathbb{C}$, de manera que, dada la estructura que dimos para V como representación de G, el submódulo W debe ser una subrepresentación de V. Si $V \in \mathrm{Rep}G$ y W es una subrepresentación de V, entonces es invariante bajo los elementos de G y los de $\mathbb{C}$, por tanto, bajo todo $\mathbb{C}[G]$. □

En vista de este teorema, en adelante hablaremos indistintamente de representaciones de G y de módulos izquierdos sobre $\mathbb{C}[G]$. Para $V \in \mathrm{Rep}G$ y $r \in \mathbb{C}[G]$ denotaremos simplemente con $\rho(r)$ al morfismo $\bar{\rho}(r)$ definido en la prueba del Teorema 1.32.

Para continuar consideremos G no trivial. Definamos $s := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{C}[G]$ y notemos que

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(|G|^{-1} \sum_{g \in G} g\right)^2 \\ &= |G|^{-2} \left(\sum_{h \in G} \sum_{k \in G} hk\right) \\ &= |G|^{-2} \sum_{h \in G} \left(\sum_{k \in G} hk\right) \\ &= |G|^{-2} \left(\sum_{h \in G} \sum_{g \in G} g\right) \\ &= |G|^{-2} |G| \sum_{g \in G} g \\ &= s; \end{aligned}$$

es decir, s es un idempotente de $\mathbb{C}[G]$.

Proposición 1.33. *Si $V \in \mathbb{C}[G]$-mód y definimos $V^G := \{v \in V \mid gv = v \text{ para cada } g \in G\}$, entonces $sV = V^G$.*

Demostración. Es claro que $sV \subseteq V^G$, pues para cada $g \in G$ tenemos que $gs = s$. Para probar la contención $V^G \subseteq sV$ observemos que si $v \in V^G$, entonces $sv = |G|^{-1} \sum_{g \in G} gv = |G|^{-1} \sum_{g \in G} v = v$ por lo que $V^G \subseteq sV$. □

Corolario 1.34. *Si $V \in \mathrm{rep}G$, entonces $\rho(s)$ es una proyección en $\mathrm{rep}G$ de V en V^G y $\dim_{\mathbb{C}} V^G = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(\rho(g))$.*

Demostración. Mostremos que V^G es una subrepresentación de V. Para cualesquiera $g \in G$ y $v \in V^G$, sucede que $gv = v \in V^G$, por tanto, V^G es subrepresentación de V. La Proposición 1.33 y el hecho de que s es idempotente implican que s es una proyección lineal de V en V^G y

$$\dim_{\mathbb{C}} V^G = \mathrm{Tr}(1_{V^G}) = \mathrm{Tr}(\rho(s)) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(\rho(g)).$$

Para ver que $\rho(s)$ es morfismo de representaciones observemos que

$$\rho(s) \circ \rho(h) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \rho(h) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(gh) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \rho(g) = \rho(s)$$

para toda $h \in G$ y análogamente

$$\rho(h) \circ \rho(s) = \rho(s),$$

es decir, $\rho(s) \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \rho(s)$. $\square$

1.6. Caracteres

Definiremos el caracter de una representación, el cual resulta un invariante total, es decir, dos representaciones son isomorfas si y sólo si sus caracteres son iguales.

DEFINICIÓN 1.35. Sea $V \in \mathrm{rep}G$; definimos el *caracter* χ_V de V como la función $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ dada por $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$.

PROPOSICIÓN 1.36. *Si $V, W \in \mathrm{rep}G$, entonces:*

1. *Para $g, h \in G$, $\chi_V\left(hgh^{-1}\right) = \chi_V(g)$;*
2. $\chi_V(e) = \dim_{\mathbb{C}} V$;
3. $\chi_V\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_V(g)}$;
4. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$;
5. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$.

DEMOSTRACIÓN. La propiedades 1 y 2 se siguen de la definición de caracter; la propiedad 3 se sigue de la Observación 1.27; la propiedad 4 se sigue del hecho de que la traza es aditiva y la propiedad 5 se sigue de la Proposición 1.29. $\square$

En la proposición anterior, la parte 1 implica que los caracteres son constantes en las clases de conjugación. A las funciones de un grupo G en un conjunto C que son constantes en las clases de conjugación se les llama *funciones de clase* de G en C. Denotaremos con $Cl_{\mathbb{C}}(G)$ al espacio vectorial complejo de funciones de clase de G en $\mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 1.37. *La función $\langle \_ , \_ \rangle : Cl_{\mathbb{C}}(G) \times Cl_{\mathbb{C}}(G) \to \mathbb{C}$ definida mediante la regla: $\langle \varphi, \psi \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$ es un producto interior.*[1]

DEMOSTRACIÓN. Sean $\varphi, \psi, \gamma \in Cl_{\mathbb{C}}(G)$ y $a \in \mathbb{C}$. Primero veamos que la función dada es lineal en la primera entrada.

$$\begin{aligned}
\langle \varphi + a\gamma, \psi \rangle &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi + a\gamma)(g) \overline{\psi(g)} \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\varphi(g) \overline{\psi(g)} + (a\gamma)(g) \overline{\psi(g)} \right) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)} + a \left(|G|^{-1} \sum_{g \in G} \gamma(g) \overline{\psi(g)} \right) \\
&= \langle \varphi, \psi \rangle + a \langle \gamma, \psi \rangle .
\end{aligned}$$

[1] La Proposición 1.37 es cierta sobre cualquier campo si escribimos $\langle \varphi, \psi \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi\left(g^{-1}\right)$; sin embargo la enunciamos de esta manera porque estamos trabajando en $\mathbb{C}$ y el producto interior usual en $\mathbb{C}$ utiliza conjugados.

Continuemos demostrando que la función es hermitiana.

$$\begin{aligned}\overline{\langle\varphi,\psi\rangle} &= \overline{|G|^{-1}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)\overline{\psi(g)}}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)\\ &= \langle\psi,\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Para terminar veamos que es positiva. Si $\varphi\in Cl_{\mathbb{C}}(G)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\varphi\rangle &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\varphi(g)}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\|\varphi(g)\|^{2}\geq 0\end{aligned}$$

y es cero si sólo si $\varphi=0$. □

Observación 1.38. Utilizando el Teorema 1.32, las Proposiciones 1.28 y 1.29 y el Corolario 1.34, vamos a notar lo siguiente: Si $V,W\in \mathrm{rep}G$ y escribimos $U:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ y $Z:=V^{*}\otimes W$, entonces

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)\right) &= \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{G}(V,W)\right) && \text{Teorema 1.32}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left(\rho_{U}(g)\right) && \text{Corolario 1.34}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left(\rho_{Z}(g)\right) && \text{Proposición 1.28}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left(\rho_{V^{*}}(g)\right)\mathrm{Tr}\left(\rho_{W}(g)\right) && \text{Proposición 1.29}\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left(\rho_{W}(g)\right)\mathrm{Tr}\left(\rho_{V}\left(g^{-1}\right)\right)\\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left(\rho_{W}(g)\right)\overline{\mathrm{Tr}\left(\rho_{V}(g)\right)};\end{aligned}$$

es decir,

$$\langle\chi_{V},\chi_{W}\rangle=\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)\right).$$

En adelante, para $V,W\in \mathrm{rep}G$, denotaremos el producto interior de sus caracteres de esta forma $\langle V,W\rangle:=\langle\chi_{V},\chi_{W}\rangle$.

Observación 1.39. Para $V,W\in\mathrm{rep}G$ tenemos que $\langle V,W\rangle=\langle W,V\rangle$, pues $\langle W,V\rangle$ es un natural y así, $\langle W,V\rangle=\overline{\langle W,V\rangle}$.

El siguiente teorema tiene muchas consecuencias importantes.

Teorema 1.40 (Ortogonalidad de caracteres). *Si $V,W\in\mathrm{rep}G$ son irreducibles, entonces*

$$\langle V,W\rangle=\begin{cases}0 & si\ W\ncong V;\\ 1 & si\ W\cong V.\end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema de Schur

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)\cong\begin{cases}0 & \text{si } V\ncong W;\\ \mathbb{C} & \text{si } V\cong W.\end{cases}$$

□

Tenemos los siguientes resultados.

COROLARIO 1.41. *Sean* $V,W\in\operatorname{rep}G$. *Si* V *es irreducible, tomamos* $W=\bigoplus_i V_i$ *la descomposición de* W *en componentes isotípicas con* $V_i\cong W_i^{n_i}$ *y* $V\cong W_j$, *entonces* $\langle V,W\rangle=n_j$.

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 1.36 y el teorema anterior implican que

$$\langle V,W\rangle=\sum_i n_i\langle V,W_i\rangle=n_j.$$

□

Bajo las condiciones del corolario anterior, llamamos *multiplicidad* de V en W al número $\langle V,W\rangle$.

COROLARIO 1.42. *Si* $V,W\in\operatorname{rep}G$, *entonces* $W\cong V$ *en* $\operatorname{rep}G$ *si y sólo si* $\chi_V=\chi_W$.

DEMOSTRACIÓN. Si $W\cong V$, la definición de caracter nos da lo deseado. En la otra dirección, supongamos $\chi_V=\chi_W$. Si U es una subrepresentación irreducible de V y n es la multiplicidad de U en V, entonces

$$\langle U,W\rangle=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\chi_U(g)\overline{\chi_W(g)}=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\chi_U(g)\overline{\chi_V(g)}=n$$

(donde la última igualdad es debida al corolario anterior). Concluimos que la multiplicidad de U en W es la misma que en V y por el Teorema 1.26, $W\cong V$. □

COROLARIO 1.43. *Si* $V\in\operatorname{rep}G$, *entonces* $\langle V,V\rangle=1$ *si y sólo si* V *es irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 1.40 implica que si V es irreducible, entonces $\langle V,V\rangle=1$. Supongamos que $\langle V,V\rangle=1$ y que la descomposición en componentes isotípicas de V es $V=\bigoplus_i V_i$ con $V_i\cong W_i^{n_i}$, es decir,

$$1=\sum_i n_i\langle V,W_i\rangle=\sum_i n_i^2\langle W_i,W_i\rangle=\sum_i n_i^2.$$

Como cada n_i es un natural, todos, excepto un n_i, son 0 y aquel que no se anula debe ser 1; así, el Corolario 1.41 junto con el Teorema 1.40 implican que V es irreducible. □

Estudiaremos algunas propiedades de la representación regular y los caracteres.

LEMA 1.44. *El caracter de la representación regular está dado por:*

$$\chi_{\mathbb{C}[G]}(g)=\begin{cases}0 & si\ g\neq e;\\ |G| & si\ g=e.\end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que cualquier $g\in G$ actúa permutando los elementos de la base G de $\mathbb{C}[G]$ y para $h\in G$ sucede que $gh=h$ si y sólo si $g=e$, por lo que

$$\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}[G]}(\rho(g))=\begin{cases}0 & \text{si } g\neq e;\\ |G| & \text{si } g=e.\end{cases}$$

. □

Teorema 1.45. *Sea* $W \in \mathrm{rep}G$ *irreducible. La multiplicidad de* W *en la representación regular es* $\dim_{\mathbb{C}}(W)$.

Demostración. Realizando el cálculo y utilizando el Lema anterior y el Corolario 1.41:

$$\langle W, \mathbb{C}[G]\rangle = |G|^{-1}\sum_{g\in G}\chi_W(g)\overline{\chi_{\mathbb{C}[G]}(g)} = |G|^{-1}\chi_W(e)\overline{\chi_{\mathbb{C}[G]}(e)} = \chi_W(e) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$$

□

Definición 1.46. Un *sistema de representantes de representaciones irreducibles* de G es un conjunto $\mathcal{A}$ de representaciones irreducibles de G, tal que cualquier clase de isomorfismo de representaciones irreducibles tiene un único representante en $\mathcal{A}$.

Es claro que el teorema anterior implica el siguiente corolario.

Corolario 1.47. *Si* $\mathcal{A}$ *es un sistema de representantes de representaciones irreducibles de* G*, entonces* $\mathcal{A}$ *es finito.*

Ahora procederemos a demostrar que de hecho el cardinal de $\mathcal{A}$ es el número de clases de conjugación de G. Necesitamos algunos resultados.

Lema 1.48. *Si* $\varphi \in Cl_{\mathbb{C}}(G)$ *y* $V \in \mathrm{rep}G$ *es irreducible de dimensión* n*, entonces* $\frac{|G|}{n}\langle\varphi, \overline{\chi_V}\rangle Id_V = \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho(g)$

Demostración. Si $r = \sum_{g\in G}\varphi(g)g \in \mathbb{C}[G]$ y $h \in G$, entonces

$$\begin{aligned} hrh^{-1} &= h\sum_{g\in G}\varphi(g)gh \\ &= \sum_{g\in G}\varphi(g)hgh^{-1} \\ &= \sum_{g\in G}\varphi\left(hgh^{-1}\right)hgh^{-1} \\ &= \sum_{g\in G}\varphi(g)g \\ &= r; \end{aligned}$$

por lo que, $\rho(r) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V)$. El Lema de Schur asegura que $\rho(r) = aId_V$ para algún $a\in\mathbb{C}$ y

$$an = a\mathrm{Tr}(Id_V) = Tr(\rho(r)) = \sum_{g\in G}\varphi(g)\chi_V(g) = |G|\langle\varphi, \overline{\chi_V}\rangle,$$

de este modo $\rho(r) = \frac{|G|}{n}\langle\varphi, \overline{\chi_V}\rangle Id_V$. □

Teorema 1.49. *Si* $\mathcal{A}$ *es un sistema de representantes de representaciones irreducibles de* G*, entonces* $\{\chi_V \mid V \in \mathcal{A}\}$ *es una base ortonormal de* $Cl_{\mathbb{C}}(G)$.

Demostración. En el Teorema 1.40 hemos probado que $\mathcal{A}$ es ortonormal y, por lo tanto, linealmente independiente. Si $\varphi \in Cl_{\mathbb{C}}(G)$ es ortogonal a cada χ_V, con $V \in \mathcal{A}$, entonces $0 = \langle\varphi, \chi_V\rangle = \overline{\langle\overline{\varphi}, \overline{\chi_V}\rangle}$; el lema anterior implica que $0 = \overline{\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)\rho_V(g)}} = \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho_V(g)$ para cada $V \in \mathcal{A}$. Debido a que $\mathbb{C}[G]$ es completamente reducible, concluimos que $\sum_{g\in G}\varphi(g)\rho_{\mathbb{C}[G]}(g) = 0$. Entonces $0 = \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho_{\mathbb{C}[G]}(g)(e) =$

$\sum_{g \in G} \varphi(g)\, g$, de manera que la independencia lineal de G en $\mathbb{C}[G]$ implica que $\varphi = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es base de $Cl_{\mathbb{C}}(G)$, pues el espacio ortogonal a $\langle \mathcal{A} \rangle$ es trivial. $\square$

Notemos que $\varphi \in Cl_{\mathbb{C}}(G)$ queda determinada por sus valores en las clases de conjugación de G. Si $\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las clases de conjugación de G entonces $\{\varphi_C \in Cl_{\mathbb{C}}(G) \mid C \in \mathcal{C}\}$, donde

$$\varphi_C(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin C; \\ 1 & \text{si } g \in C, \end{cases}$$

es una base de $Cl_{\mathbb{C}}(G)$. Concluimos que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{C}|$. Hemos demostrado el siguiente corolario.

Corolario 1.50. *El número de representaciones irreducibles salvo isomorfismo de G es el número de clases de conjugación de G.*

Con este resultado damos por terminado este capítulo en el que introdujimos las nociones básicas de representaciones de grupos finitos. En el siguiente capítulo estudiaremos las representaciones inducidas y restringidas.

Capítulo 2

Cambio de grupo

En este capítulo trabajaremos con un grupo finito G y un subgrupo H de G. Desarrollaremos una manera de obtener por cada representación de uno una representación del otro, es decir, funtores entre las categorías de representaciones de ambos grupos. En la primera sección estudiaremos el funtor de inducción. Éste, como su nombre nos dice, induce una representación de G a partir de una de H. Después estudiaremos el funtor de restricción que actúa en la dirección inversa y terminaremos demostrando una relación entre ellos: el Teorema de Reciprocidad de Frobenius que dice que los funtores de restricción e inducción son adjuntos. En la segunda sección demostraremos el Teorema de Mackey que nos da como corolario otra relación entre inducción y restricción conocida como la Fórmula de Restricción de Mackey y un criterio de irreducibilidad. Nuestra referencia principal será [**10**]; para el final de la Sección 2.2 volveremos a utilizar [**8**]. La notación utilizada en la Fórmula (2.1.1) fue sugerida por Francisco Marmolejo a quien agradezco sus observaciones.

2.1. Reciprocidad de Frobenius

En adelante, H siempre denotará un subgrupo de un grupo finito G y con R denotaremos un sistema de representantes de las clases laterales izquierdas de H en G tal que $e \in R$.

Notemos que R es un G-conjunto si definimos $g * r$ como el único elemento de R que satisface que $gr \in (g * r) H$. De este modo existe un único $h(g,r) \in H$ tal que $gr = (g * r) h(g,r)$.

Observación 2.1. Si $g, k \in G$ y $r \in R$, entonces

$$kr = (k * r) h(k,r)$$

multiplicando por g obtenemos

$$\begin{aligned} g(kr) &= (g(k * r)) h(k,r) \\ &= (g \cdot (k * r) h(g, k * r)) h(k,r). \end{aligned}$$

Dado que $(gk) * r = g * (k * r)$, podemos concluir que

$$gkr = (gk * r)(h(g, k * r) h(k,r))$$

mientras que

$$(gk) r = (gk * r) h(gk, r);$$

Por tanto

$$h(g, k * r) h(k,r) = h(gk, r).$$

Para cualquier $W \in \mathrm{Rep} H$, consideremos el espacio vectorial $\bigoplus_{r \in R} W$ y para cualesquiera $g \in G$ y $(w_r)_{r \in R} \in \bigoplus_{r \in R} W$ definamos

$$g(w_r)_{r \in R} = \sum_{r \in R} \iota_{g * r} h(g,r) w_r, \tag{2.1.1}$$

donde $\iota_{g*r} : W \to \bigoplus_{s \in R} W$ es la inclusión en la coordenada $g * r$.

OBSERVACIÓN 2.2. Nótese que la Observación 2.1 implica que

$$\begin{aligned} gk\left(w_r\right)_{r\in R} &= \sum_{r\in R} \iota_{gk*r} h\left(gk, r\right) w_r \\ &= \sum_{r\in R} \iota_{gk*r} h\left(g, k*r\right) h\left(k, r\right) w_r \\ &= \sum_{r\in R} \iota_{g*(k*r)} h\left(g, k*r\right) \pi_{k*r} \iota_{k*r} h\left(k, r\right) w_r \\ &= g\left(\sum_{r\in R} i_{k*r} h\left(k, r\right) w_r\right) \\ &= g\left(k\left(w_r\right)_{r\in R}\right). \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.3. *Para cada $W \in \mathrm{Rep}H$, el espacio $\bigoplus_{r\in R} W$ con la acción de G definida por (2.1.1) es una representación de G.*

DEMOSTRACIÓN. La Observación 2.2 asegura que la fórmula (2.1.1) define una acción de G en $\bigoplus_{r\in R} W$ (es claro que el neutro de G actúa como la identidad de $\bigoplus_{r\in R} W$). Dado que H actúa linealmente en W y para cualesquiera $g \in G$ y $r \in R$, la inclusión ι_{g*r} es lineal, G actúa linealmente en $\bigoplus_{r\in R} W$. □

Notemos que $\mathbb{C}[H]$ es un subanillo de $\mathbb{C}[G]$, por lo que $\mathbb{C}[G]$ es un $\mathbb{C}[G]$-$\mathbb{C}[H]$-bimódulo con la multiplicación por escalares definida a través de la multiplicación en $\mathbb{C}[G]$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Como $\mathbb{C}[G]$-módulos, $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \cong \bigoplus_{r\in R} W$.*

DEMOSTRACIÓN. Para toda $r \in R$, definamos $f_r : \mathbb{C}[G] \times W \to W$ mediante la regla

$$f_r\left(\sum_{g\in G} a_g g, w\right) = \sum_{g\in rH} a_g h\left(g, e\right) w.$$

Veamos que f_r es $\mathbb{C}[H]$-balanceada[1]. Es claro que f_r es morfismo de grupos abelianos en cada entrada, por lo que resta demostrar que para cualesquiera $k \in H$, $t = \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$ y $w \in W$ se satisface que $f_r(tk, w) = f_r(t, kw)$, ya que la multiplicación en $\mathbb{C}[H]$ está definida a través de la base H. Si realizamos el cálculo utilizando que $k = ke = (k*e)\,h(k,e) = e\,(h(k,e))$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_r\left(tk, w\right) &= \sum_{gk\in rH} a_g h\left(gk, e\right) w \\ &= \sum_{g\in rH} a_g h\left(g, k*e\right) h\left(k, e\right) w \\ &= \sum_{g\in rH} a_g h\left(g, e\right) kw \\ &= f\left(t, kw\right). \end{aligned}$$

Así, por la propiedad universal del producto tensorial y por el hecho de que $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{Cen}\mathbb{C}[H]$, existe un morfismo lineal $\hat{f}_r : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \to rW$, tal que $\hat{f}_r(t \otimes w) = f_r(t, w)$. Utilizando la propiedad universal del producto

[1] Si R es un anillo, W es un R-módulo derecho, V es un R-módulo izquierdo, U es un grupo abeliano y $f : W \times V \to U$, decimos que f es R-balanceada si f es morfismo de grupos en cada entrada y $f(w, rv) = f(wr, v)$ para cualesquiera $w \in W$, $v \in V$ y $r \in R$.

directo (R es finito) con los morfismos $\left\{\hat{f}_r \mid r \in R\right\}$, obtenemos un morfismo lineal $f : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \to \bigoplus_{r\in R} rW$ tal que $f(t \otimes w) = \left(\hat{f}_r(t \otimes w)\right)_{r\in R}$. Para cualesquiera $k \in G$, $t \in \mathbb{C}[G]$ y $w \in W$ sucede que

$$\begin{aligned}
f(kt \otimes w) &= \left(\hat{f}_r(kt \otimes w)\right)_{r\in R} \\
&= \left(\sum_{kg\in rH} a_g h(kg, e)\, w\right)_{r\in R} \\
&= \left(\sum_{g\in k^{-1}rH} a_g h(k, g * e)\, h(g, e)\, w\right)_{r\in R} \\
&= \sum_{r\in R} \iota_r \left(\sum_{g\in k^{-1}*rH} a_g h\left(k, k^{-1} * r\right)(h(g, e)\, w)\right) \\
&= \sum_{r\in R} \iota_{k*r} \left(\sum_{g\in rH} a_g h(k, r)(h(g, e)\, w)\right) \\
&= \sum_{r\in R} \iota_{k*r} h(k, r) \left(\sum_{g\in rH} a_g h(g, e)\, w\right) \\
&= k\left(\sum_{g\in rH} a_g h(g, e)\, w\right)_{r\in R} \\
&= k\left(\hat{f}_r(t \otimes w)\right)_{r\in R} \\
&= kf(t \otimes w)\,.
\end{aligned}$$

Por linealidad, tenemos que f es morfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos. Exhibamos el inverso de f para mostrar que es isomorfismo. Definamos $\phi : \bigoplus_{r\in R} rW \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ a través de la regla $\phi\left((w_r)_{r\in R}\right) = \sum_{r\in R} r \otimes w_r$. Así, para cada $(w_r)_{r\in R} \in \bigoplus_{r\in R} rW$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f\left(\phi\left((w_r)_{r\in R}\right)\right) &= f\left(\sum_{r\in R} r \otimes w_r\right) \\
&= \sum_{r\in R} f(r \otimes w_r) \\
&= \sum_{r\in R} \left(\hat{f}_s(r \otimes w_r)\right)_{s\in R} \\
&= (h(r, e)\, w_r)_{r\in R} \\
&= (w_r)_{r\in R}\,;
\end{aligned}$$

la última iguldad se debe a que $re = r(h(r, e))$. Para mostrar que la composición en el otro sentido es la identidad, es suficiente mostrarlo para cualquier tensor elemental. Si $t \otimes w \in \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$, con t como antes, entonces

$$\begin{aligned}
\phi\left(f\left(t\otimes w\right)\right) &= \phi\left(\left(\hat{f}_r\left(t\otimes w\right)\right)_{r\in R}\right)\\
&= \sum_{r\in R} r\otimes\left(\hat{f}_r\left(t\otimes w\right)\right)\\
&= \sum_{r\in R} r\otimes\left(\sum_{g\in rH} a_g h\left(g,e\right)w\right)\\
&= \sum_{r\in R}\sum_{g\in rH} a_g r\otimes h\left(g,e\right)w\\
&= \sum_{r\in R}\sum_{g\in rH} a_g r h\left(g,e\right)\otimes w\\
&= \sum_{r\in R}\sum_{g\in rH} a_g g\otimes w\\
&= t\otimes w.
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es isomorfismo. □

DEFINICIÓN 2.5. Si $W\in\mathbb{C}\left[H\right]$-mód, definimos y denotamos la *representación inducida* por W en G como $\operatorname{Ind}_H^G\left(W\right):=\mathbb{C}\left[G\right]\otimes_{\mathbb{C}[H]}W$.

OBSERVACIÓN 2.6. Dado que $\operatorname{Ind}_H^G:\mathbb{C}\left[H\right]$-mód $\to\mathbb{C}\left[G\right]$-mód está definido en términos de un producto tensorial, en los morfismos se comporta de la siguiente manera: si $\phi\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[H]}\left(W,V\right)$, entonces $\operatorname{Ind}_H^G\left(\phi\right)=Id_{\mathbb{C}[G]}\otimes\phi$. Es claro que $\operatorname{Ind}_H^G:\mathbb{C}\left[H\right]$-mód $\to\mathbb{C}\left[G\right]$-mód es un funtor covariante.

Por la Proposición 2.4 $\operatorname{Ind}_H^G\left(W\right)$ es isomorfa a $\bigoplus\limits_{r\in R}W$.

Ahora calcularemos el caracter de una representación inducida.

PROPOSICIÓN 2.7. *Sean $W\in\operatorname{rep}H$ y $V=\bigoplus\limits_{r\in R}W\cong\operatorname{Ind}_H^G\left(W\right)$. Si definimos $\hat{\chi}_W:G\to\mathbb{C}$ como*

$$\hat{\chi}_W\left(g\right)=\begin{cases}0 & si\ g\notin H;\\ \chi_W\left(g\right) & si\ g\in H;\end{cases}$$

entonces $\chi_V\left(g\right)=\sum\limits_{r\in R}\hat{\chi}_W\left(r^{-1}gr\right)$ para cada $g\in G$.

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula (2.1.1) se sigue que cada $g\in G$ actúa en $\left\{\iota_r\left(W\right)\mid r\in R\right\}$ de la siguiente manera $g\left(\iota_r\left(W\right)\right)=\iota_{g*r}\left(W\right)$. Observemos que si $g\left(\iota_r\left(W\right)\right)\neq\iota_r\left(W\right)$, entonces $g\left(\iota_r\left(W\right)\right)\cap\iota_r\left(W\right)=0$, por lo tanto, para cualquier base ordenada β de $\iota_r\left(W\right)$ se satisface que $\left[\rho\left(g\right)\mid_{\iota_r(W)}\right]_\beta^\beta=0$, por lo que sólo pondremos nuestra atención en los sumandos que g mantiene fijos. Si $r\in R$ es tal que $g\left(\iota_r\left(W\right)\right)=\iota_r\left(W\right)$, entonces $g*r=r$, por lo que $r^{-1}gr=h\left(g,r\right)$ y, $Tr\left(\rho\left(g\right)\mid_{\iota_r(W)}\right)=\chi_W\left(h\right)$. Si sumamos sobre $r\in R$, tenemos que $\chi_V\left(g\right)=\sum\limits_r\hat{\chi}_W\left(r^{-1}gr\right)$. □

Las siguientes proposiciones se verifican fácilmente.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si $W,U\in\mathbb{C}\left[H\right]$-mód, entonces $\operatorname{Ind}_H^G\left(W\oplus U\right)=\operatorname{Ind}_H^G\left(W\right)\oplus\operatorname{Ind}_H^G\left(U\right)$.*

PROPOSICIÓN 2.9. *Si K es un subgrupo de G, H es un subgrupo de K y $W\in\mathbb{C}\left[H\right]$-mód, entonces $\operatorname{Ind}_H^G\left(W\right)\cong\operatorname{Ind}_K^G\left(\operatorname{Ind}_H^K\left(W\right)\right)$ como $\mathbb{C}\left[G\right]$-módulos.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_K^G\left(\operatorname{Ind}_H^K(W)\right) &= \operatorname{Ind}_K^G\left(\mathbb{C}[K]\otimes_{\mathbb{C}[H]}W\right)\\ &\cong \mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[K]}\left(\mathbb{C}[K]\otimes_{\mathbb{C}[H]}W\right)\\ &\cong \left(\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[K]}\mathbb{C}[K]\right)\otimes_{\mathbb{C}[H]}W\\ &\cong \mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[H]}W\\ &= \operatorname{Ind}_H^G(W). \end{aligned}$$

□

Estudiaremos ahora el funtor de restricción. Dado $W \in \mathbb{C}[G]$-mód si restringimos el producto por escalares a $\mathbb{C}[H]$, entonces $W \in \mathbb{C}[H]$-mód.

Definición 2.10. Si $W \in \mathbb{C}[G]$-mód, definimos y denotamos la *representación restringida* por W de G a H como $\operatorname{Res}_H^G(W) := W$. En los morfismos, Res_H^G se comporta como la identidad.

La Definición 2.10 implica claramente lo siguiente:

Proposición 2.11. *Si $W, V \in \mathbb{C}[G]$-mód, K es un subgrupo de G, H es un subgrupo de K, entonces $\operatorname{Res}_H^G(W\oplus V) = \operatorname{Res}_H^G(W)\oplus\operatorname{Res}_H^G(V)$ y $\operatorname{Res}_H^G(W)\cong\operatorname{Res}_H^K\left(\operatorname{Res}_K^G(W)\right)$.*

Para continuar con el Teorema de Reciprocidad de Frobenius, necesitamos algunos teoremas de teoría de módulos.

Proposición 2.12. *Si A y B son anillos con uno, W es un B-A-bimódulo y V es un B-módulo izquierdo, entonces $\operatorname{Hom}_B(W,V)$ es un A-módulo izquierdo.*

Demostración. Sabemos que $\operatorname{Hom}_B(W,V)$ es un grupo abeliano con la suma definida puntualmente. Para $a \in A$ y $f \in \operatorname{Hom}_B(W,V)$ definimos af mediante la regla $(af)(w) = f(wa)$ para cada $w \in W$. Notemos que $af \in \operatorname{Hom}_B(W,V)$, pues $(w+w')a = wa + w'a$ para cualesquiera $w, w' \in W$ y $f \in \operatorname{Hom}_B(W,V)$. Además,

$$((ab)f)(w) = f(w(ab)) = f((wa)b) = (bf)(wa) = (a(bf))(w)$$

$$(a(f+g))(w) = (f+g)(wa) = (af)(w) + (ag)(w)$$

y

$$((a+b)f)(w) = f(w(a+b)) = f(wa+wb) = (af)(w) + (bf)(w),$$

para $a, b \in A$ y $f, g \in \operatorname{Hom}_B(W,V)$; es decir, el producto por escalares es asociativo y distributivo. Es claro que $1_A f = f$. Por lo tanto, $\operatorname{Hom}_B(W,V)$ es un A-módulo izquierdo. □

Teorema 2.13. *Si A, B y C son anillos con uno, U es un B-A-bimódulo, V es un C-B-bimódulo y W es un C-módulo izquierdo, entonces $\operatorname{Hom}_B(U,\operatorname{Hom}_C(V,W)) \cong \operatorname{Hom}_C(V\otimes_B U, W)$ como A-módulos izquierdos, es decir, $(V\otimes_B \_, \operatorname{Hom}_C(V,\_))$ es un par de funtores adjuntos.*

Demostración. Definamos $\eta : \operatorname{Hom}_B(U,\operatorname{Hom}_C(V,W)) \to \operatorname{Hom}_C(V\otimes_B U, W)$ a través de la regla $\eta(f)(v\otimes u) = f(u)(v)$ para cada $f \in \operatorname{Hom}_B(U,\operatorname{Hom}_C(V,W))$, $v \in V$ y $u \in U$. Debido a que f y $f(u)$ son morfismos de módulos para cada $u \in U$ (recordemos que definimos $(b(f(u)))(v) = f(u)(vb)$), sucede que $\eta(f)$ es B-balanceada en los tensores elementales, por lo que se extiende como morfismo de grupos abelianos y la extensión es morfismo de C-módulos. Mostraremos que η es morfismo de A módulos. Si $a \in A$,

$f, g \in \mathrm{Hom}_B(U, \mathrm{Hom}_C(V, W))$, $v \in V$ y $u \in U$, entonces

$$\begin{aligned} \eta(af+g)(v\otimes u) &= (af+g)(u)(v) = (f(ua)+g(u))(v) = \eta(f)(v\otimes ua)+\eta(g)(v\otimes u) \\ &= \eta(f)((v\otimes u)a)+\eta(g)(v\otimes u) = (a(\eta(f)))(v\otimes u)+\eta(g)(v\otimes u), \end{aligned}$$

por lo que η es morfismo de A-módulos izquierdos. Para mostrar que η es isomorfismo construiremos su inversa. Definamos $\mu : \mathrm{Hom}_C(V \otimes_B U, W) \to \mathrm{Hom}_B(U, \mathrm{Hom}_C(V, W))$ mediante $(\mu(g)(u))(v) = g(v\otimes u)$ para cada $g \in \mathrm{Hom}_C(V \otimes_B U, W)$, $v \in V$ y $u \in U$. Dado que g es morfismo de C-módulos y la asignación $(v, u) \mapsto v \otimes w$ es B-balanceada, la función $\mu(g)(u)$ es morfismo de C-módulos y la función $\mu(g)$ es morfismo de B-módulos. Resta demostrar que μ y η son inversas. Sean $g \in \mathrm{Hom}_C(V \otimes_B U, W)$, $f \in \mathrm{Hom}_B(U, \mathrm{Hom}_C(V, W))$, $u \in U$ y $v \in V$. Entonces $(\mu(\eta(f))(u))(v) = \eta(f)(v\otimes u) = f(u)(v)$ y $(\eta(\mu(g)))(v\otimes u) = (\mu(g)(u))(v) = g(v\otimes u)$; es decir $\mu(\eta(f)) = f$ y $\eta(\mu(g)) = g$. Esto demuestra lo que buscábamos. □

Proposición 2.14. *Si A es un anillo con uno y M es un A-módulo izquierdo, entonces* $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$ *como A-módulos izquierdos.*

Demostración. Sea $f : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$ dada por $f(h) = h(1)$ para cada $h \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$. Dada la estructura de A-módulo de $\mathrm{Hom}_A(A, M)$, la función f es morfismo de A-módulos izquierdos. Si $h \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ es tal que $h(1) = 0$, entonces $h(a) = ah(1) = 0$ para toda $a \in A$, es decir, $h = 0$. Por tanto, f es mono. Si $m \in M$, entonces $h_m : A \to M$ definida como $h_m(a) = am$ es un morfismo de A-módulos tal que $f(h_m) = m$. Así, f es isomorfismo. □

Esto es lo necesario para demostrar el teorema de Reciprocidad de Frobenius.

Teorema 2.15 (Reciprocidad de Frobenius). *Los funtores Ind_H^G y Res_H^G son adjuntos.*

Demostración. De los resultados anteriores tenemos que, como espacios vectoriales complejos,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\mathrm{Ind}_H^G(W), V\right) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W, V\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}\left(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], V)\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, V) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}\left(W, \mathrm{Res}_H^G(V)\right). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.16. *Si $W \in \mathrm{rep}H$ y $V \in \mathrm{rep}G$, entonces* $\left\langle \mathrm{Ind}_H^G(W), V\right\rangle = \left\langle W, \mathrm{Res}_H^G(V)\right\rangle$.

Demostración. El Teorema de Reciprocidad de Fobenius implica que

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(\mathrm{Ind}_H^G(W), V\right) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(W, \mathrm{Res}_H^G(V)\right),$$

de manera que

$$\left\langle \mathrm{Ind}_H^G(W), V\right\rangle = \left\langle W, \mathrm{Res}_H^G(V)\right\rangle$$

. □

Tenemos como resultado inmediato el siguiente corolario.

Corolario 2.17. *Si $V \in \mathrm{rep}G$ y $W \in \mathrm{rep}H$ son irreducibles, entonces la multiplicidad de V en $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ es la multiplicidad de W en $\mathrm{Res}_H^G(V)$.*

2.2. El teorema de Mackey

Para continuar consideraremos, además de H como subgrupo de G, un segundo subgrupo K de G y la acción de $K \times H$ en G dada por lo siguiente: para $(k, h) \in K \times H$ y $g \in G$ definimos $(k, h)\, g := kgh^{-1}$. Con S denotaremos a un sistema de representantes de las órbitas de esta acción, es decir $S \subseteq G$ y cualquier órbita tiene un único representante en S. Para cada $g \in G$ escribiremos H_g para referirnos al grupo $gHg^{-1} \cap K$.

Observación 2.18. Para cada $s \in S$ existe un monomorfismo de grupos $f_s : H_s \to H$, definido mediante $f_s(k) = s^{-1}ks$, que induce un isomorfismo $\bar{f}_s$ de $\mathbb{C}$-álgebras entre $\mathbb{C}[H_s]$ y $\mathbb{C}[f_s(H_s)]$. Considérese el monomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\iota \circ \bar{f}_s : \mathbb{C}[H_s] \to \mathbb{C}[H]$, donde $\iota : \mathbb{C}[f_s(H_s)] \to \mathbb{C}[H]$ es la inclusión. De este modo es posible dar a $\mathbb{C}[H]$ estructura de $\mathbb{C}[H_s]$-módulo izquierdo a través de $\iota \circ \bar{f}_s$, es decir, para $a \in \mathbb{C}[H]$ y $r \in \mathbb{C}[H_s]$, se define $r \cdot a = \left(\left(\iota \circ \bar{f}_s\right)(r)\right) a$.

Teorema 2.19 (Mackey). *Como $\mathbb{C}[K]$-$\mathbb{C}[H]$-bimódulos,* $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H]$.

Demostración. Si $g \in G$, entonces existen $s \in S$, $k \in K$ y $h \in H$ tales que $ksh = g$ y s es único. Consideremos los morfismos lineales $\mu_s : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H]$, definidos en G mediante la regla

$$\mu_s(g) = \begin{cases} k \otimes h & \text{si } g = ksh; \\ 0 & \text{si } g \neq ksh \text{ para cualesquiera } k \in K \text{ y } h \in H. \end{cases}$$

si existen $k' \in K$ y $h' \in H$ tales que $k'sh' = g$, entonces $k = k'sh'h^{-1}s^{-1}$, lo que implica que

$$\begin{aligned} k \otimes h &= k'sh'h^{-1}s^{-1} \otimes h \\ &= k' \otimes \left(sh'h^{-1}s^{-1}\right) \cdot h \\ &= k' \otimes f_s\left(sh'h^{-1}s^{-1}\right) h \\ &= k' \otimes h'; \end{aligned}$$

Es decir, μ_s está bien definido para cada $s \in S$. Demostraremos que la transformación lineal $\mu : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H]$, que se obtiene de la propiedad universal del producto (S finito) y los morfismos $\{\mu_s \mid s \in S\}$, es un isomorfismo de $\mathbb{C}[K]$-$\mathbb{C}[H]$-módulos. Para cualesquiera $g \in G$, $k \in K$ y $h \in H$, tenemos que $\mu(kgh) = k\mu(g)\, h$, pues si $kgh = k'sh'$, entonces $\mu(kgh) = k' \otimes h'$ y $\mu(g) = k^{-1}k' \otimes h'h^{-1}$. Por la linealidad de μ y la definición del producto en $\mathbb{C}[G]$, conlcuimos que μ es morfismo de $\mathbb{C}[K]$-$\mathbb{C}[H]$-bimódulos. Para demostrar que μ es isomorfismo exhibiremos su inverso. Para cada $s \in S$ sea $\eta_s : \mathbb{C}[K] \times \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ definida como:

$$\eta_s\left(\sum_{k\in K} a_k k, \sum_{h\in H} a_h h\right) = \sum_{k,h} a_k a_h ksh.$$

Veamos que η_s es $\mathbb{C}[H_s]$-balanceada. Si $\sum_{k\in K} a_k k$, $\sum_{k\in K} b_k k \in \mathbb{C}[K]$, $\sum_{h\in H} a_h h$, $\sum_{h\in H} b_h h \in \mathbb{C}[H]$ y $\sum_{p\in H_s} a_p p \in \mathbb{C}[H_s]$, entonces

$$\begin{aligned} \eta_s\left(\sum_{k\in K} a_k k, \sum_{h\in H} a_h h + \sum_{h\in H} b_h h\right) &= \eta_s\left(\sum_{k\in K} a_k k, \sum_{h\in H} (a_h + b_h)\, h\right) \\ &= \sum_{k,h} a_k (a_h + b_h)\, ksh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,h} a_k a_h ksh + \sum_{k,h} a_k b_h ksh \\
&= \eta_s\left(\sum_{k\in K} a_k k, \sum_{h\in H} a_h h\right) + \eta_s\left(\sum_{k\in K} a_k k, \sum_{h\in H} b_h h\right);
\end{aligned}$$

es decir, η_s es morfismo de grupos abelianos en la segunda entrada; análogamente se demuestra que lo es en la primera entrada. En cuanto a los escalares

$$\begin{aligned}
\eta_s\left(\left(\sum_{k\in K} a_k k\right)\left(\sum_{p\in H_s} a_p p\right), \sum_{h\in H} a_h h\right) &= \eta_s\left(\sum_{k,p} a_k a_p kp, \sum_{h\in H} a_h h\right) \\
&= \sum_{k,h,p} (a_k a_p) a_h kpsh \\
&= \sum_{k,h,p} a_k (a_p a_h) kss^{-1}psh \\
&= \sum_{k,h,p} a_k (a_p a_h) ksf_s(p) h \\
&= \sum_{k,h,p} a_k (a_p a_h) ks (p \cdot h) \\
&= \eta_s\left(\sum_{k} a_k k, \sum_{h,p} a_h a_p p \cdot h\right) \\
&= \eta_s\left(\sum_{k\in K} a_k k, \left(\sum_{p\in H_s} a_p p\right) \cdot \left(\sum_{h\in H} a_h h\right)\right).
\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que η_s es $\mathbb{C}[H_s]$-balanceada. Por la propiedad universal del producto tensorial, para cada $s \in S$ existe un único morfismo de grupos abelianos $\bar{\eta}_s : \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ tal que $\bar{\eta}_s\left(\left(\sum\limits_{k\in K} a_k k\right) \otimes \left(\sum\limits_{h\in H} a_h h\right)\right) = \eta_s\left(\sum\limits_{k\in K} a_k k, \sum\limits_{h\in H} a_h h\right)$. Es claro que de hecho $\bar{\eta}_s$ es $\mathbb{C}$-lineal. Usando la propiedad universal de la suma directa y los morfismos $\{\bar{\eta}_s \mid s \in S\}$ tenemos un único morfismo lineal $\eta : \bigoplus\limits_{s\in S} \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ que extiende a cada $\bar{\eta}_s$. Afirmamos que η es el inverso de μ. Si $g \in G$, por la observación hecha al inicio de la demostración, $\eta(\mu(g)) = \eta(k \otimes h) = ksh = g$. Por otro lado, $\mu(\bar{\eta}_s(k \otimes h)) = \mu(ksh) = k \otimes h$ para cada tensor elemental $k \otimes h \in \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H]$ y $s \in S$, por lo tanto $\mu \circ \eta = Id$. Concluimos de esta forma la prueba. □

Cuando establecimos S no impusimos ninguna condición sobre él, sin embargo, la construcción de $\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H]$ depende de la elección de S. Demostraremos que, a pesar de esto, la descomposición que obtuvimos en el teorema anterior es independiente de la elección de los representantes.

PROPOSICIÓN 2.20. *Si s y s' están el la misma órbita de G bajo la acción de $K \times H$, entonces $\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H] \cong \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_{s'}]} \mathbb{C}[H]$ como $\mathbb{C}[K]$-$\mathbb{C}[H]$-bimódulos.*

DEMOSTRACIÓN. En la demostración del teorema anterior obtuvimos que $\bar{\eta}_s$ es un isomorfismo sobre su imagen para cada $s \in S$. Con una construcción análoga, para cada $s' \in G$ obtenemos un morfismo $\bar{\eta}_{s'} : \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_{s'}]} \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ tal que sobre su imagen es ismorfismo de $\mathbb{C}[K]$-$\mathbb{C}[H]$-bimódulos; además, podemos observar que si s y s' están en la misma órbita, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\bar{\eta}_s) &= \left\{\sum_{g\in\mathcal{O}(s)} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C} \text{ para cada } g \in \mathcal{O}(s)\right\} \\ &= \left\{\sum_{g\in\mathcal{O}(s')} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C} \text{ para cada } g \in \mathcal{O}(s')\right\} \\ &= \operatorname{im}(\bar{\eta}_{s'}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H] \cong \operatorname{im}(\bar{\eta}_s) \cong \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_{s'}]} \mathbb{C}[H].$$

□

En la Observación 2.18 mencionamos que $f_s : H_s \to H$ es un monomorfismo. De hecho, $f_s(H_s) = s^{-1}H_s s \leq H$.

Observación 2.21. Podemos considerar $\operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s} : \mathbb{C}[H]\text{-mód} \to \mathbb{C}\left[s^{-1}H_s s\right]\text{-mód}$. Además, es posible dotar a cualquier $\mathbb{C}\left[s^{-1}H_s s\right]$-módulo de una estructura de $\mathbb{C}[H_s]$-módulo a través del isomorfismo $\bar{f}_s : \mathbb{C}[H_s] \to \mathbb{C}[f_s(H_s)]$ como hicimos en la Observación 2.18 para $\mathbb{C}[H]$. Por lo tanto, para cada $s \in S$ existe un funtor $\mathrm{F}_s : \mathbb{C}\left[s^{-1}H_s s\right]\text{-mód} \to \mathbb{C}[H_s]\text{-mód}$ que sólo cambia el producto por escalares y deja los espacios y morfismos fijos. Así, cualquier $\mathbb{C}[H]$-módulo tiene estructura de $\mathbb{C}[H_s]$-módulo a través del funtor $\mathrm{F}_s \circ \operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s}$.

Proposición 2.22 (Fórmula de Restricción de Mackey). *Si* $W \in \operatorname{Rep}H$, *entonces* $\operatorname{Res}^G_K \circ \operatorname{Ind}^G_H(W) \cong \bigoplus_{s\in S} \operatorname{Ind}^K_{H_s} \circ \mathrm{F}_s \circ \operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s}(W)$.

Demostración. El isomorfismo del teorema de Mackey es un isomorfismo de $\mathbb{C}[K]$-$\mathbb{C}[H]$-bimódulos, así que

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}^G_H(W) &= \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \\ &\cong \left(\bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H]\right) \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \\ &\cong \bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \\ &\cong \bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H_s]} \left(\mathrm{F}_s \circ \operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s}(W)\right) \\ &= \bigoplus_{s\in S} \operatorname{Ind}^K_{H_s} \circ \mathrm{F}_s \circ \operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s}(W).\end{aligned}$$

□

Para concluir este capítulo demostraremos un criterio de irreducibilidad aplicable en el caso particular en que $K = H$. En tal caso, cualquier representación W de H induce representaciones de H_s: $\mathrm{F}_s \circ \operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s}(W)$ y $\operatorname{Res}^H_{H_s}(W)$.

Teorema 2.23 (Criterio de irreducibilidad de Mackey). *Sea* $W \in \mathbb{C}[H]\text{-mód}$. *El* $\mathbb{C}[G]$*-módulo* $\operatorname{Ind}^G_H(W)$ *es irreducible si y sólo si para cada* $s \in S \setminus H$ *las representaciones* $\mathrm{F}_s \circ \operatorname{Res}^H_{s^{-1}H_s s}(W)$ *y* $\operatorname{Res}^H_{H_s}(W)$ *no comparten componentes irreducibles y* W *es irreducible.*

Demostración. Calculemos el caracter de $\mathrm{Ind}_H^G(W)$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{Ind}_H^G(W), \mathrm{Ind}_H^G(W)\right\rangle &= \left\langle W, \mathrm{Res}_H^G\left(\mathrm{Ind}_H^G(W)\right)\right\rangle && \text{(Reciprocidad de Frobenius)}\\
&= \left\langle W, \bigoplus_{s\in S} \mathrm{Ind}_{H_s}^H \circ \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W)\right\rangle && \text{(Fórmula de Restricción de Mackey)}\\
&= \sum_{s\in S}\left\langle W, \mathrm{Ind}_{H_s}^H \circ \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W)\right\rangle\\
&= \sum_{s\in S}\left\langle \mathrm{Ind}_{H_s}^H \circ \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W), W\right\rangle && \text{(Observación 1.39)}\\
&= \sum_{s\in S}\left\langle \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W), \mathrm{Res}_{H_s}^H(W)\right\rangle. && \text{(Reciprocidad de Frobenius)}
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Si Ind_H^G es irreducible,

$$\sum_{s\in S}\left\langle \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W), \mathrm{Res}_{H_s}^H(W)\right\rangle = 1.$$

Por la Proposición 2.20 podemos suponer que $e \in S$; por tanto $H_e = H$, es decir,

$$\mathrm{Res}_{H_e}^H(W) = W = \mathrm{F}_e \circ \mathrm{Res}_{H_e}^H(W),$$

lo que implica que

$$\langle W, W\rangle + \sum_{s\neq e}\left\langle \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W), \mathrm{Res}_{H_s}^H(W)\right\rangle = 1. \tag{2.2.2}$$

Podemos concluir que W es irreducible y que $\mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W)$ y $\mathrm{Res}_{H_s}^H(W)$ no comparten componentes irreducibles si $s \in S\setminus H$ (si $s \in S\cap H$ entonces $s = \left(ss^{-1}\right)e(s)$ y de este modo $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(e)$, es decir $e = s$). En la otra dirección, las Ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) nos dan lo deseado. $\square$

Capítulo 3

Las representaciones irreducibles del grupo simétrico

En este capítulo daremos una biyección canónica entre las clases de conjugación del grupo simétrico S_n y sus representaciones irreducibles. Las demostraciones están basadas en [**2**], aunque la notación y las definiciones están basadas en [**7**]. Comenzaremos con algunas definiciones.

Definición 3.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una *partición* $\boldsymbol{\lambda}$ de n es una sucesión $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ tal que $\lambda_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{N}^+$ y $\sum\limits_i \lambda_i = n$ y $\lambda_i \leq \lambda_{i'}$ si $i \geq i'$.

Si $\boldsymbol{\lambda}$ es una partición de n, entonces existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que para cada $i > k$ se tiene que $\lambda_i = 0$. Así que, escribiremos $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Observación 3.2. Si $\boldsymbol{\lambda}$ es una partición de n, entonces podemos asociarle una clase de conjugación de S_n y viceversa. Si $\sigma, \tau \in S_n$ están en la misma clase de conjugación, entonces tienen la misma estructura cíclica y la suma de las longitudes de los ciclos de σ es n; asociamos a cada clase de conjugación la partición que se obtiene de la estructura cíclica de la clase y asociamos a cada partición la clase de conjugación cuya estructura cíclica está dada por los elementos de la partición.

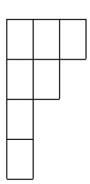
Definición 3.3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $[1, n] := \{i \in \mathbb{N}^+ \mid i \leq n\}$.

Nota: Aunque comúnmente se denota con $[1, n]$ al intervalo real, debido a que no utilizaremos intervalos reales, no habrá confusión entre la Definición 3.3 y el intervalo real $[1, n]$.

Definición 3.4. Sea $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ una partición de n. El *diagrama* de $\boldsymbol{\lambda}$ es el conjunto de parejas ordenadas $\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \in [1, k], j \in [1, \lambda_i]\}$. A la primera coordenada le llamamos *renglón* y a la segunda, *columna*.

Como apoyo a esta definición podemos visualizar el diagrama de $\boldsymbol{\lambda}$ como una cuadrícula.

Ejemplo 3.5. Sea $n = 7$. Consideremos una partición de 7. Tenemos que $7 = 1 + 1 + 2 + 3$, es decir, $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 1, 1)$ es una partición de 7. El diagrama de esta partición se puede visualizar como sigue


$\leftarrow$ renglón 1
$\leftarrow$ renglón 2
$\leftarrow$ renglón 3
$\leftarrow$ renglón 4

Definición 3.6. Sea $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ una partición de n. Una *tabla* de $\boldsymbol{\lambda}$ es una función biyectiva D entre el diagrama de la partición y $[1, n]$, es decir, $D : \{(i, j) \mid i \in [1, k], j \in [1, \lambda_i]\} \to [1, n]$. Decimos que $a \in [1, n]$ está en la entrada (i, j) de la tabla D si $a = D(i, j)$.

Al igual que a un diagrama, podemos visualizar una tabla escribiendo en el recuadro correspondiente al renglón i y la columna j del diagrama, el número $D(i, j)$.

EJEMPLO 3.7. Usando el Ejemplo 3.5, tenemos las siguientes tablas:

$$D: \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{1-2} 7 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad D': \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

DEFINICIÓN 3.8. Sean $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ una partición de n y D una tabla de ella. Decimos que una permutación $p \in S_n$ *preserva los renglones* de D si para cada (i, j), se cumple que $p(D(i,j)) = D(i, j')$ para alguna $j' \in [1, \lambda_i]$. Análogamente, decimos que p *preserva las columnas* de D si para cualquier (i, j) tenemos que $p(D(i,j)) = D(i', j)$ para alguna $i' \in [1, k]$.

Usaremos la siguiente notación: $R(D) := \{p \in S_n \mid p$ preserva los renglones de $D\}$ y $C(D) := \{q \in S_n \mid$ q preserva las columnas de $D\}$.

OBSERVACIÓN 3.9. Es claro que si (1) es la permutación identdad, entonces$\{(1)\} = R(D) \cap C(D)$, pues si $p \in R(D) \cap C(D)$, entonces $p(D(i,j)) = D(i,j)$ para toda (i,j).

En adelante, D denotará una tabla para la partición $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de n.

PROPOSICIÓN 3.10. *Los conjuntos $R(D)$ y $C(D)$ son subgrupos de S_n.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo demostraremos que $R(D)$ es subgrupo de S_n, la otra demostración es totalmente análoga. Sean $p, p_0 \in R(D)$. Entonces, para cada (i,j) existen $j', j'' \in [1, \lambda_i]$ tales que $pp_0(D(i,j)) = p(D(i,j')) = D(i,j'')$. Resta mostrar que $p^{-1} \in R(D)$. Observemos que para toda $i \in [1,k]$ la función $p(D(i, \_)) : [1, \lambda_i] \to \{D(i,j) \mid j \in [1, \lambda_i]\}$ es biyectiva, pues si $p(D(i,j)) = p(D(i,j_0))$, entonces $D(i,j) = D(i,j_0)$ y la biyectividad de D implica que $j = j_0$ ($p(D(i, \_))$ está bien definida pues $p \in R(D)$). Por lo tanto, para cualquier (i,j) existe $j' \in [1, \lambda_i]$ tal que $D(i,j) = p(D(i,j'))$, es decir, $p^{-1}(D(i,j)) = D(i,j')$. Con esto terminamos la prueba. $\square$

El siguiente corolario es claro por la Observación 3.9.

COROLARIO 3.11. *Si $p, p_0 \in R(D)$ y $q, q_0 \in C(D)$, entonces $pq = p_0 q_0$ si y sólo si $p = p_0$ y $q = q_0$.*

Para cada tabla D y cada $\sigma \in S_n$ definimos, sobre el mismo diagrama, la tabla σD dada por $(\sigma D)(i,j) = \sigma(D(i,j))$.

PROPOSICIÓN 3.12. *Si $\sigma \in S_n$, entonces $R(\sigma D) = \sigma R(D) \sigma^{-1}$ y $C(\sigma D) = \sigma C(D) \sigma^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in S_n$. Entonces para cada (i,j) existe (i', j') tal que $p(D(i,j)) = D(i', j')$ y así, $(\sigma p \sigma^{-1})(\sigma D(i,j)) = \sigma D(i', j')$. Si $p \in R(D)$, es decir, si $i = i'$ para toda i, concluimos que $\sigma p \sigma^{-1} \in R(\sigma D)$; por lo tanto, $\sigma R(D) \sigma^{-1} \subseteq R(\sigma D)$. Si $p \notin R(D)$, entonces existe i tal que $i \neq i'$ y así, $\sigma p \sigma^{-1} \notin R(\sigma D)$, por lo que $R(\sigma D) \subseteq \sigma R(D) \sigma^{-1}$. Análogamente se demuestra la igualdad $C(\sigma D) = \sigma C(D) \sigma^{-1}$. $\square$

LEMA 3.13. *Si D es una tabla y $\sigma \in S_n$ es tal que cualesquiera dos números en D que sean distintos y que se encuentren en el mismo renglón, se encuentran en diferentes columnas de σD, entonces para cada $p \in R(D)$, la permutacion $p\sigma$ satisface la propiedad descrita para σ.*

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que la propiedad que tiene σ es que si $D(i, j_1) = \sigma D(i', j'_1)$ y $D(i, j_0) = \sigma D(i'_0, j'_0)$ con $j_1 \neq j_0$, entonces $j'_1 \neq j'_0$. Si $D(i, j_1) = p\sigma D(i', j'_1)$ y $D(i, j_0) = p\sigma D(i'_0, j'_0)$ con $j_1 \neq j_0$, dado que $p \in R(D)$, entonces $D(i, l_1) = p_1^{-1} D(i, j_1) = \sigma D(i', j'_1)$ y $D(i, l_0) = p^{-1} D(i, j_0) = \sigma D(i'_0, j'_0)$ con $l_1 \neq l_0$, pues p es inyectiva, lo que implica que $j'_1 \neq j'_0$, es decir, $p\sigma$ tiene la propiedad mencionada. $\square$

PROPOSICIÓN 3.14. *Para cada tabla D y cada $\sigma \in S_n$ tenemos que $\sigma = pq$, con $p \in R(D)$ y $q \in C(D)$, si y sólo si cualesquiera dos números en D que sean distintos y que se encuentren en el mismo renglón, se encuentran en diferentes columnas de σD.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\sigma = pq$, con $p \in R(D)$ y $q \in C(D)$. Sean i y $j_1, j_0 \in [1, \lambda_i]$ tales que $j_1 \neq j_0$. Por la biyectividad de σ y D existen i_1', i_0', j_1' y j_0' tales que $D(i, j_1) = \sigma D(i_1', j_1')$ y $D(i, j_0) = \sigma D(i_0', j_0')$. Por la Proposición 3.12 tenemos que $\sigma p^{-1} = pqp^{-1} \in C(pD)$, por lo que

$$D(i, j_1) = \sigma D(i_1', j_1') = \sigma p^{-1} pD(i_1', j_1') = pD(i_1'', j_1')$$

y

$$D(i, j_0) = \sigma D(i_0', j_0') = \sigma p^{-1} pD(i_0', j_0') = pD(i_0'', j_0'),$$

por lo tanto, $D(i, j_0) = pD(i_0'', j_0')$ y $D(i, j_1) = pD(i_1'', j_1')$. Las últimas ecuaciones implican que $i = i_1'' = i_0''$ y $j' \neq j_0'$.

Para la implicación en el otro sentido notemos que la hipótesis es equivalente a que cualesquiera dos números que sean distintos y que se encuentren en la misma columna de σD se encuentran en diferentes renglones de D. Así, para cada i existen $\gamma_1(i)$ y $\varphi_1(i)$ tales que, $\sigma D(i, 1) = D(\gamma_1(i), \varphi_1(i))$ y si $i \neq i'$, $\gamma_1(i) \neq \gamma_1(i')$, por lo que $\gamma_1 : [1, k] \to [1, k]$ es biyectiva. Sea $p_1 : [1, n] \to [1, n]$ tal que

$$p_1(D(\gamma_1(i), l)) = \begin{cases} D(\gamma_1(i), 1) & \text{si } l = \varphi_1(i); \\ D(\gamma_1(i), \varphi_1(i)) & \text{si } l = 1; \\ D(\gamma_1(i), l) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $p_1 \in R(D)$ (p_1 es biyectiva pues es suprayectiva).

Por el Lema anterior, cualesquiera dos números en D que sean distintos y que se encuentren en el mismo renglón se encuentran en diferentes columnas de $p_1 \sigma D$, es decir, para cada i y cualesquiera $j_1, j_0 \in [1, \lambda_i]$ tales que $j_1 \neq j_0$, $p_1 \sigma D(i', j_1') = D(i, j_1)$ y $p_1 \sigma D(i_0', j_0') = D(i, j_0)$, se tiene que $j_1' \neq j_0'$. De manera que si $j > 1$ e $i_j := \text{máx}\{i \mid j \in [1, \lambda_i]\}$ (i_j es el último renglón que tiene j columnas) entonces, por la afirmación anterior, para cada $i \geq i_j$ existen $\gamma_j(i)$ y $\varphi_j(i)$ tales que $\prod_{r=1}^{j-1} p_r \sigma D(i, j) = D(\gamma_j(i), \varphi_j(i))$ con γ_j biyectiva en $\{i \mid j \in [1, \lambda_i]\}$ (en adelante, si escribimos $\gamma_j(i)$ o $\varphi_j(i)$ estamos suponiendo que $j \leq \lambda_i$). Definamos $p_j \in S_n$ como

$$p_j(D(k, l)) = \begin{cases} D(\gamma_j(i), j) & \text{si } k = \gamma_j(i) \text{ y } l = \varphi_j(i); \\ D(\gamma_j(i), \varphi_j(i)) & \text{si } k = \gamma_j(i) \text{ y } l = j; \\ D(k, l) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que para cada j, $p_j \in R(D)$.

Notemos que si $\varphi_j(i) \geq j$ para cada i, entonces $p_j D(k, l) = D(k, l)$ para cada $l < j$, pues si suponemos que $\varphi_j(i) \geq j$ para cada i y $l < j$, entonces $l \neq \varphi_j(i)$, por lo tanto, $p_j D(k, l) = D(k, l)$. Motivados por esto, demostraremos por inducción sobre j que $\varphi_j(i) \geq j$ para cualesquiera i y j. Para $j = 1$ es trivial. Supongamos que para toda $j < j'$ y cada i, se tiene que $\varphi_j(i) \geq j$; así, $p_j D(k, l) = D(k, l)$ para toda l y toda j tales que $l < j < j'$, lo que implica que

$$\prod_{r=1}^{j'-1} p_r \sigma D(i, j) = \prod_{r=j}^{j'-1} p_r \prod_{r=1}^{j-1} p_r \sigma D(i, j) = \prod_{r=j}^{j'-1} p_r D(\gamma_j(i), \varphi_j(i)) = \prod_{r=j+1}^{j'-1} p_r D(\gamma_j(i), j) = D(\gamma_j(i), j)$$

para cada $j < j'$. Si existe i tal que $l = \varphi_{j'}(i) < j'$, entonces $l \leq \lambda_{i'}$, donde $i' = \gamma_{j'}(i)$; así que $i' \leq i_l$ y existe k tal que $i' = \gamma_l(k)$. Por lo tanto,

$$p_{j'}D(\gamma_{j'}(i), \varphi_{j'}(i)) = p_{j'}D(\gamma_l(k), l) = p_{j'}\prod_{r=1}^{j'-1} p_r\sigma D(k, l)$$

mientras que

$$p_{j'}D(\gamma_{j'}(i), \varphi_{j'}(i)) = p_{j'}\prod_{r=1}^{j'-1} p_r\sigma D(i, j').$$

Concluimos que $\prod_{r=1}^{j'-1} p_r\sigma D(k, l) = \prod_{r=1}^{j'-1} p_r\sigma D(i, j')$, lo que implica que $l = j'$. Lo último es una contradicción que provino de suponer $\varphi_{j'}(i) < j'$, por lo que $\varphi_{j'}(i) \geq j'$para cada i.

Sea $p = \prod_{r=1}^{n_1} p_r$. Por lo anterior para cada j e $i \leq i_j$, tenemos que

$$p\sigma D(i, j) = \prod_{r=j}^{n_1} p_r \prod_{r=1}^{j-1} p_r\sigma D(i, j) = \prod_{r=j+1}^{n_1} p_r p_j D(\gamma_j(i), \varphi_j(i)) = \prod_{r=j+1}^{n_1} p_r D(\gamma_j(i), j) = D(\gamma_j(i), j).$$

Para terminar definamos $q_j \in S_n$ para cada j como:

$$q_j(D(k, l)) = \begin{cases} D(i, j) & \text{si } k = \gamma_j(i) \text{ y } j = l; \\ D(k, l) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es claro que $q_j \in C(D)$. Sea $q = \prod_{r=1}^{n_1} q_r$. Para cualesquiera i y j sucede que

$$qp\sigma D(i, j) = qD(\gamma_j(i), j) = D(i, j),$$

por lo tanto, $\sigma = p^{-1}q^{-1}$, que es lo que buscábamos. □

Para toda tabla D definamos

$$e(D) = \sum_{\substack{p \in R(D) \\ q \in C(D)}} sgn(q)\, pq.$$

En el resto del capítulo nos encargaremos de demostrar que el ideal izquierdo generado por $e(D)$ en $\mathbb{C}[S_n]$ es una representación irreducible de S_n y que si D y D' son tablas, entonces $\mathbb{C}[S_n]\, e(D) \cong \mathbb{C}[S_n]\, e(D')$, como representaciones de S_n, si y sólo si D y D' tienen el mismo diagrama, es decir, si el dominio de D es el mismo que el de D'. Para demostrar esto estudiaremos las propiedades de $e(D)$ y de los subgrupos $R(D)$ y $C(D)$.

Comenzaremos con una sencilla observación: si $p' \in R(D)$ y $q' \in C(D)$, entonces

$$\begin{aligned} p'e(D)\, q' &= p'\left(\sum_{\substack{p \in R(D) \\ q \in C(D)}} sgn(q)\, pq\right) q' \\ &= \sum_{\substack{p \in R(D) \\ q \in C(D)}} sgn(q)\, p'pqq' \\ &= sgn(q') \sum_{\substack{p \in R(D) \\ q \in C(D)}} sgn(qq')\, pqq' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= sgn\,(q') \sum_{\substack{p\in R(D)\\ q\in C(D)}} sgn\,(q)\,pq \\ &= sgn\,(q')\,e\,(D)\,. \end{aligned}$$

Como veremos a continuación esta característica de $e\,(D)$ es exclusiva de sus múltiplos escalares.

Proposición 3.15. *Si $f \in \mathbb{C}\,[S_n]$ es tal que para cada $p \in R\,(D)$ y $q \in C\,(D)$ se tiene que $pfq = sgn\,(q)\,f$, entonces existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f = ae\,(D)$.*

Demostración. Sea $f = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma \sigma$. Entonces $\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma = sgn\,(q) \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma p\sigma q$, ya que $\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma p\sigma q = sgn\,(q) \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma$ para cualesquiera $p \in R\,(D)$ y $q \in R\,(D)$. De esta igualdad, para cada $\tau = p\sigma q$, se sigue que $a_\tau = sgn\,(q)\,a_\sigma$ ($p\sigma q = p\gamma q$ si y sólo si $\sigma = \gamma$); en particular, si $\tau = pq$, entonces $a_{pq} = sgn\,(q)\,a_{(1)}$. Si $\gamma \in S_n$ es tal que $\gamma \neq pq$ para cualesquiera p y q, entonces la proposición anterior asegura que existen dos números que están en la misma columna de γD y que se encuentran en el mismo renglón de D, es decir, existen i_0, i_1, i_2, $j_1' \in [1, \lambda_i]$ ($i = mín\,\{i_2, i_1\}$) y $j_1, j_0 \in [1, \lambda_{i_0}]$ tales que $j_1 \neq j_0$ y $\gamma D\,(i_2, j_1') = D\,(i_0, j_1)$ y $\gamma D\,(i_1, j_1') = D\,(i_0, j_0)$. Por lo tanto, si considermos la trasposición $(D\,(i_0, j_0)\,D\,(i_0, j_1)) \in S_n$ (intercambia $D\,(i_0, j_0)$ con $D\,(i_0, j_1)$), entonces $p' \in R\,(D) \cap C\,(\gamma D)$. Por la Proposición 3.12, existe $q \in C\,(D)$ tal que $p' = \gamma q \gamma^{-1}$. Como p' y q son conjugadas, $sgn\,(q) = sgn\,(p') = -1$, lo que implica que $a_\gamma = a_{p'\gamma q^{-1}} = sgn\left(q^{-1}\right) a_\gamma = -a_\gamma$, así que $a_\gamma = 0$. Como esto pasa para toda $\gamma \notin \{pq \mid p \in R\,(D)\,,\, q \in C\,(D)\}$, concluimos que $f = a_{(1)} \left(\sum_{\substack{p\in R(D)\\ q\in C(D)}} sgn\,(q)\,pq \right) = a_{(1)} e\,(D)$. □

Proposición 3.16. *Para cada D existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $e\,(D)^2 = ae\,(D)$ y $a \neq 0$.*

Demostración. Sean $p \in R\,(D)$ y $q \in R\,(D)$, entonces

$$\begin{aligned} pe\,(D)^2\,q &= pe\,(D)\,e\,(D)\,q \\ &= (pe\,(D)\,(1))\,((1)\,e\,(D)\,q) \\ &= e\,(D)\,sgn\,(q)\,e\,(D) \\ &= sgn\,(q)\,e\,(D)^2\,. \end{aligned}$$

La proposición anterior asegura que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $e\,(D)^2 = ae\,(D)$. Resta demostrar que $a \neq 0$. Consideremos $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,(\mathbb{C}\,[S_n])$ tal que $T\,(r) = re\,(D)$. Tomemos como base ordenada de $\mathbb{C}\,[S_n]$ a S_n y observemos que $\sigma e\,(D) = \sigma \left((1) + \sum_{pq\neq(1)} sgn\,(q)\,pq \right) = \sigma + \sum_{pq\neq(1)} sgn\,(q)\,\sigma pq$ para toda $\sigma \in S_n$; más aún, $\sigma = \sigma pq$ si y sólo si $pq = (1)$. Concluimos que $\mathrm{Tr}\,(T) = n!$. Antes de continuar, notemos que el Corolario 3.11 asegura que cada sumando de $e\,(D)$ es distinto a los demás, por lo que $e\,(D) \neq 0$ y, por eso, si $d = \dim_{\mathbb{C}}\,(\mathbb{C}\,[S_n]\,e\,(D))$, entonces $d \neq 0$. Podemos considerar una base ordenada $\{r_i e\,(D) \mid r_i \in \mathbb{C}\,[S_n]\,, i \in [1, d]\}$ de $\mathbb{C}\,[S_n]\,e\,(D)$ como espacio vectorial y extenderla a una base $\{b_i \in \mathbb{C}\,[S_n] \mid i \in [1, n!]\}$ de $\mathbb{C}\,[S_n]$ tal que $b_i = r_i e\,(D)$ si $i \in [1, d]$. Notemos que para $i \in [1, d]$ tenemos que $T\,(b_i) = r_i e\,(D)^2 = ar_i e\,(D) = ab_i$ y si $d < i$, entonces $T\,(b_i) = b_i e\,(D) \in \mathbb{C}\,[S_n]\,e\,(D)$. Por lo tanto, existen $a_j \in \mathbb{C}$ tales que $T\,(b_i) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j$ y así, $a \neq 0$, pues $n! = \mathrm{Tr}\,(T) = ad$. □

Observación 3.17. De las Proposiciones 3.16 y 3.15 se sigue que si $e\,(D)^2 = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma$, entonces $\dim_{\mathbb{C}}\,(\mathbb{C}\,[S_n]\,e\,(D)) = \frac{n!}{a_{(1)}}$.

Ordenaremos las particiones de n de manera lexicográfica, es decir, si $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ son particiones de n, decimos que $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\mu}$ si existe s tal que $\lambda_s < \mu_s$ y $\lambda_i = \mu_i$ para cada $i < s$.

PROPOSICIÓN 3.18. *Sean $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ particiones de n tales que $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\mu}$. Si D es una tabla para $\boldsymbol{\lambda}$ y D' es una tabla para $\boldsymbol{\mu}$, entonces $e(D)\, e(D') = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que existen $D'(i_1, j_1)$, $D'(i_1, j_0)$, $D(i_1', j_1')$ y $D(i_0', j_0')$ tales que $j_1 \neq j_1'$, $D(i_1', j_1') = D'(i_1, j_1)$, $D(i_0', j_0') = D'(i_1, j_0)$ y $j_1' = j_0'$, de lo contrario para cualquier $j \in [1, \mu_1]$ tendríamos que existen $\gamma_1(j)$ y $\varphi_1(j)$ tales que $D'(1, j) = D(\gamma_1(j), \varphi_1(j))$ con φ_1 inyectiva y por tanto biyectiva entre $[1, \mu_1]$ y $\{\varphi_1(j) \mid j \in [1, \mu_1]\}$. Como $\varphi_1(j) \leq \lambda_1$ (pues λ_1 es el máximo de $\{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$) y $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\mu}$ concluimos que $\mu_1 = \lambda_1$. Procediendo de manera análoga a la demostración de la Proposición 3.14, podemos construir $q_1 \in C(D)$ tal que $q_1 D'(1, j) = q_1 D(\gamma_1(j), \varphi_1(j)) = D(1, \varphi_1(j))$. Los argumentos hechos en la Proposición 3.14 también muestran que podemos continuar con este procedimiento y mostrar que para cada i se tiene que $\lambda_i = \mu_i$, contradiciendo la hipótesis. Así, hemos demostrado nuestra afirmación. Si $\tau = (D(i_1', j_1')\, D(i_0', j_1'))$, entonces $\tau \in C(D) \cap R(D')$ y $e(D)\, e(D') = e(D)\, \tau\tau e(D') = -e(D)\, e(D')$, por lo que $e(D)\, e(D') = 0$. $\square$

Para continuar necesitamos demostrar algunas propiedades de anillos semisimples.

DEFINICIÓN 3.19. Un anillo R es *semisimple* si para todo $M \in R$-*mód* se tiene que $M = \bigoplus_i M_i$ donde cada M_i es un submódulo irreducible de M.

PROPOSICIÓN 3.20. *Si R es un anillo semisimple, entonces cualquier ideal izquierdo de R es un sumando directo de R.*

DEMOSTRACIÓN. El que R sea semisimple implica la existencia de un conjunto $\mathcal{A}$ de ideales izquierdos (submódulos) irreducibles de R tal que $R = \bigoplus_{J \in \mathcal{A}} J$. Consideremos un ideal izquierdo I de R e $\mathcal{I} = \left\{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \mid \left(\sum_{J \in \mathcal{B}} J\right) + I \text{ es directa}\right\}$. Notemos que $\emptyset \in \mathcal{I}$ y que la contención induce un orden parcial en $\mathcal{I}$. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ una cadena según este orden. Entonces para cada $C \in \mathcal{C}$ sucede que $C \subseteq \cup\mathcal{C}$.

Veamos que $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{I}$. Si $i \in I \cap \sum_{J \in \cup\mathcal{C}} J$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $i = \sum_{k=1}^{n} j_k$, donde $j_k \in J_k$ y $J_k \in \cup\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $J_k \in C$ para cada k, por lo que $i \in I \cap \sum_{J \in C} J$ y $0 = I \cap \sum_{J \in C} J$, pues $C \in \mathcal{I}$. Resta ver que $J_0 \cap \left(I + \sum_{J \in (\cup\mathcal{C}) \setminus \{J_0\}} J\right) = 0$ para cada $J_0 \in \cup\mathcal{C}$. Si $j \in J_0 \cap \left(I + \sum_{J \in (\cup\mathcal{C}) \setminus \{J_0\}} J\right)$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I$ tales que $j = i + \sum_{k=1}^{n} j_k$, con $j_k \in J_k$ y $J_k \in \cup\mathcal{C}$. Por el mismo argumento de antes, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $J_0, J_k \in C$ para cada k, por lo tanto, $j \in J_0 \cap \left(I + \sum_{J \in C \setminus \{J_0\}} J\right)$ y $J_0 \cap \left(I + \sum_{J \in C \setminus \{J_0\}} J\right) = 0$. Deducimos que $I + \sum_{J \in \cup\mathcal{C}} J$ es directa. Así, $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{I}$ y es cota superior de $\mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn existe $\mathcal{B} \in \mathcal{I}$ máximo.

Demostraremos que $I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J = R$. Sea $J' \in \mathcal{A}$, entonces $J' \cap \left(I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J\right)$ es un submódulo de J', lo que implica que $J' \cap \left(I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J\right) = 0$ o $J' \cap \left(I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J\right) = J'$, ya que J' es irreducible. Si $J' \cap \left(I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J\right) = 0$, entonces $\left(I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J\right) + J'$ es directa, así que $\mathcal{B} \cup \{J'\} \in \mathcal{I}$. Lo anterior contradice el hecho de que B es máximo en $\mathcal{I}$. Por lo tanto, $J' \subseteq I + \sum_{J \in \mathcal{B}} J$ para cada $J' \in \mathcal{A}$ y así, $I \oplus \sum_{J \in \mathcal{B}} J = R$. $\square$

La proposición anterior nos permite demostrar los siguientes corolarios.

COROLARIO 3.21. *Si R es un anillo semisimple e I es un ideal izquierdo de R, entonces existe un idempotente $e \in R$ tal que $I = Re$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior existe un ideal izquierdo J de R tal que $I \oplus J = R$, por lo que existen únicos $e \in I$ y $j \in J$ tales que $1 = e + j$. Así, $e + 0 = e = e^2 + ej$. Como $e^2 \in I$ y $ej \in J$, concluimos que $e^2 = e$ y $ej = 0$. Veamos que $I \subseteq Re$. Sea $i \in I$, entonces $i + 0 = i = ie + ij$, lo que implica que $i = ie \in Re$. Por lo tanto, $I = Re$. □

COROLARIO 3.22. *Si R es un anillo semisimple, entonces cualesquiera ideales izquierdos irreducibles I e I' son isomorfos (como R-módulos) si y sólo si existe $a \in I$ tal que $I = I'a$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $I = I'a$, entonces $f : I' \to I$ definida a través de la regla: $f(i') = i'a$; es morfismo no trivial de R-módulos izquierdos y debido a que I e I' son irreducibles f es un isomorfismo. En la otra dirección supongamos que en R-mód los ideales I' e I son isomorfos. Tomemos $f : I' \to I$ isomorfismo. Por el corolario anterior existe un idempotente $e \in R$ tal que $I' = Re$, por lo tanto, para cada $re \in I'$, tenemos que $f(re) = f\left(re^2\right) = ref(e)$. Como $I = f(I')$ e I es irreducible, concluimos que $I = I'f(e)$. □

PROPOSICIÓN 3.23. *Si R un anillo semisimple y $e \in R$ es idempotente, entonces Re es un ideal izquierdo irreducible si y sólo si eRe es un anillo con división.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Re es un ideal izquierdo irreducible y que I es un ideal izquierdo no cero de eRe. Entonces $RI \subseteq ReRe \subseteq Re$, lo que implica que $RI = Re$, pues $I \neq 0$. Como e es la unidad de eRe, tenemos que $eRe = eRI = eR(eI) = (eRe)I \subseteq I$, por lo tanto, $eRe = I$. Así, eRe es un anillo con división.

Para demostrar la implicación en el otro sentido, supongamos que Re no es irreducible. Como R es semisimple, tenemos que existen submóduos irreducibles I' e I de Re tales que $Re = I \oplus I'$. Por lo tanto, existen únicos $ie \in I$ e $i'e \in I'$ tales que $e = ie + i'e$. Dado que e es idempotente, $e = e^2 = eie + ei'e$ y por lo anterior, $eie = ie$ y $ei'e = i'e$. Notemos que $ie = eie = eie(e) = (eie)^2 + eie(ei'e)$, donde $(eie)^2 = (ie)^2 \in I$ y $eie(ei'e) = ie(i'e) \in I'$. Luego, por la unicidad de la expresión lineal, $ie = (ie)^2$ y $eie(ei'e) = 0$. Debido a que $eie, ei'e \in eRe \setminus \{0\}$ y $eie(ei'e) = 0$, deducimos que eRe no puede ser un anillo con división. □

En el Capítulo 1, Observación 1.31, demostramos que el álgebra de grupo de cualquier grupo finito es semisimple. Utilizaremos los resultados anteriores para demostrar lo siguiente:

TEOREMA 3.24. *Para cualquier tabla D, el $\mathbb{C}[S_n]$-módulo $\mathbb{C}[S_n]e(D)$ es irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.16, usando la misma notación, tenemos que

$$\left(a^{-1}e(D)\right)^2 = a^{-2}e(D)^2 = a^{-2}ae(D) = a^{-1}e(D).$$

Así, por la Proposición 3.23 es suficiente probar que

$$e(D)\,\mathbb{C}[S_n]\,e(D) = e(D)\,a^{-1}\mathbb{C}[S_n]\,a^{-1}e(D)$$

es un anillo con división. Si $e := a^{-1}e(D)$ y $r \in e\mathbb{C}[S_n]e$, entonces existe $s \in \mathbb{C}[S_n]$ tal que $r = e(D)se(D)$. Para cada $p \in R(D)$ y $q \in C(D)$ tenemos que $prq = pe(D)ae(D)q = sgn(q)r$. La Proposición 3.15 implica que existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $r = \mu e(D)$. Por lo tanto, $e\mathbb{C}[S_n]e \subseteq \mathbb{C}e$. Como la otra contención es clara, tenemos que $e\mathbb{C}[S_n]e \cong \mathbb{C}$ (el isomorfismo es como anillos), es decir, $e\mathbb{C}[S_n]e$ es un campo. □

Recordemos que una tabla D de una partición $\boldsymbol{\lambda}$ es una biyección entre el conjunto $[1,n]$ y el diagrama $\{(i,j) \mid i \in [1,k], j \in [1,\lambda_i]\}$ de $\boldsymbol{\lambda}$. El Teorema anterior nos dice que todas la representaciones $\mathbb{C}[S_n]e(D)$ con D una tabla para alguna partición de n son irreducibles, mientras que el siguiente nos dice cuándo son isomorfas.

Teorema 3.25. *Dos tablas D y D' tienen el mismo diagrama si y sólo si* $\mathbb{C}[S_n]e(D) \cong \mathbb{C}[S_n]e(D')$.

Demostración. Supongamos que D y D' tienen el mismo diagrama. Entonces $D' = \sigma D$ para alguna $\sigma \in S_n$. La Proposición 3.12 asegura que

$$\sigma e(D)\sigma^{-1} = \sigma\left(\sum_{\substack{p\in R(D)\\ q\in C(D)}} sgn(q)\,pq\right)\sigma^{-1} = \sum_{\substack{p\in R(D)\\ q\in C(D)}} sgn\left(\sigma q\sigma^{-1}\right)\sigma p\sigma^{-1}\sigma q\sigma^{-1} = e(\sigma D).$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}[S_n]e(D') = \mathbb{C}[S_n]\sigma e(D)\sigma^{-1} = \mathbb{C}[S_n]e(D)\sigma^{-1}$. Además, la multiplicación por σ^{-1} a la derecha es un isomorfismo de $\mathbb{C}[S_n]$ módulos izquierdos.

Procedamos a probar la implicación sentido contrario. Supongamos que $\mathbb{C}[S_n]e(D) \cong \mathbb{C}[S_n]e(D')$. Por el Corolario 3.22, existe $a \in \mathbb{C}[S_n]$ tal que $\mathbb{C}[S_n]e(D) = \mathbb{C}[S_n]e(D')ae(D)$. Entonces existe $b \in \mathbb{C}[S_n]$ tal que $e(D) = be(D')ae(D)$. De la prueba del teorema anterior, tenemos que existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $e(D')be(D') = \mu eD'$, así que

$$e(D')e(D) = (e(D')be(D'))ae(D) = \mu e(D')ae(D),$$

por lo que

$$\mathbb{C}[S_n]e(D) = \mathbb{C}[S_n]e(D')ae(D) = \mathbb{C}[S_n]e(D')e(D). \tag{3.0.3}$$

La Ecuación (3.0.3) y la Proposición 3.18 implican que D y D' tienen el mismo diagrama. □

Recordemos que el número de clases de conjugación de un grupo finito está en biyección con las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de dimensión finita. Vemos así, que cada clase de conjugación C de S_n determina, y es determinada por, una partición de n, mediante la consideración de la estructura cíclica de C. Vemos también, que a cada partición $\boldsymbol{\lambda}$ de n corresponde biunívocamente una clase de isomorfismo de representaciones irreducibles de S_n, definida como la clase de isomorfismo del ideal izquierdo de $\mathbb{C}[S_n]$ generado por cierto elemento asociado a una tabla D de $\boldsymbol{\lambda}$.

Capítulo 4

Álgebras de Hopf, álgebras de Zelevinsky y el grupo de Grothendieck

Antes de continuar con el grupo simétrico, necesitamos diversas definiciones que, para hacer más fácil ubicarlas, agruparemos en este capítulo. Para la Sección 4.1 se seguirá [**3**], aunque en esa obra sólo se estudian álgebras de Hopf sobre algún campo y aquí se trabajará con álgebras sobre un anillo conmutativo con uno. En la Sección 4.2 se utilizará [**11**] adecuando las definiciones que Andrei Zelevinsky usó a las definiciones (actuales) dadas en la Sección 4.1. En la Sección 4.3 la principal referencia es [**6**].

4.1. Álgebras de Hopf

Trabajaremos con un anillo conmutativo con uno R, por lo que cualquier R-módulo izquierdo A será considerado un R-módulo derecho con la acción de $r \in R$ definida en $a \in A$ de la siguiente forma: $a \cdot r := ra$ y viceversa. A menos que digamos otra cosa los productos tensoriales serán sobre R.

En la Definición 1.17 introdujimos la noción de R-álgebra. En este capítulo daremos una definición equivalente que podemos dualizar.

Definición 4.1. Una *R-álgebra* es una terna (A, μ, η) consitente de $A \in R$-mód, $\mu \in \mathrm{Hom}_R(A \otimes A, A)$, $\eta \in \mathrm{Hom}_R(R, A)$, tales que

i) $\mu \circ (Id_A \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes Id_A)$ y

ii) $\mu \circ (\eta \otimes Id_A) = \phi_A$ y $\varphi_A = \mu \circ (Id_A \otimes \eta)$, donde $\phi_A : R \otimes A \to A$ y $\varphi_A : A \otimes R \to A$ son los isomorfismos canónicos;

es decir, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "Id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes Id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
R \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes Id_A"] \arrow[dr, "\phi_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes R \arrow[l, "Id_A \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\varphi_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.2. *Las Definiciones* 1.17 *y* 4.1 *son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una R-álgebra A según la Definición 1.17, es decir, A es un anillo con uno y existe $u : R \to A$ morfismo de anillos unitario tal que $R \subseteq Cen(A)$. Seguido a la Definición 1.17 está probado que A tiene estructura de R-módulo. Notemos que $u \in \mathrm{Hom}_R(R, A)$, pues si $r, s \in R$ entonces $u(rs) = u(r)\, u(s) = r \cdot u(s)$. Si definimos $\bar{\mu} : A \times A \to A$ como $\bar{\mu}(a, b) = ab$, por la estructura de anillo y de R-módulo de A, la función μ es R-bilineal, así que existe un morfismo de grupos abelianos $\mu : A \otimes A \to A$ tal que $\mu(a \otimes b) = \bar{\mu}(a, b)$ para cualesquiera $a, b \in A$. Es claro que $\mu \in \mathrm{Hom}_R(A \otimes A, A)$. Demostraremos que (A, μ, u) es una R-álgebra según la Definición 4.1, es decir que $\mu \circ (Id_A \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes Id_A)$, $\mu \circ (u \otimes Id_A) = \phi_A$ y $\varphi_A = \mu \circ (Id_A \otimes u)$. Si $a, b, c \in A$ y $r \in R$, entonces en los tensores elementales

$$\mu \circ (Id_A \otimes \mu)(a \otimes b \otimes c) = \mu(a \otimes \mu(b \otimes c)) = \mu(a \otimes bc) = a(bc)$$

$$= (ab)c = \mu(ab \otimes c) = \mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) = \mu \circ (\mu \otimes Id_A)(a \otimes b \otimes c)$$

y

$$\mu \circ (u \otimes Id_A)(r \otimes a) = \mu(u(r) \otimes a) = u(r)\, a = au(r) = \mu(a \otimes u(r)) = \mu \circ (Id_A \otimes u)(a \otimes r),$$

por linealidad (A, μ, u) es una R-álgebra según la Definición 4.1.

En la dirección contraria consideremos una R-álgebra (A, μ, η) con respecto a la Definición 4.1. Definamos un producto en A de la siguiente manera $a \cdot b := \mu(a \otimes b)$ para $a, b \in A$. Como $\mu \circ (Id_A \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes Id_A)$, la asignación $(a, b) \mapsto a \otimes b$ es R-bilineal y $\mu \in \mathrm{Hom}_R(A \otimes A, A)$, tenemos que este producto es asociativo y distributivo. Notemos que $\eta(1) \cdot a = \mu(\eta(1) \otimes a) = a = \mu(a \otimes \eta(1)) = a \cdot \eta(1)$ para cada $a \in A$, es decir $\eta(1)$ es neutro para el producto en A. De todo esto concluimos que A es un anillo con uno. Si demostramos que η es morfismo de anillos y $\eta(R) \subseteq Cen(A)$, habremos terminado. Que $\eta(R) \subseteq Cen(A)$ es claro, y si $r, s \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta(rs) &= \eta(rs) \cdot \eta(1) \\
&= \mu(\eta(rs) \otimes \eta(1)) \\
&= \mu(\eta(r)\, s \otimes \eta(1)) \\
&= \mu(\eta(r) \otimes s\eta(1)) \\
&= \mu(\eta(r) \otimes \eta(s)) \\
&= \eta(r) \cdot \eta(s)
\end{aligned}$$

por la conmutatividad del diagrama triangular en la Definición 4.1. □

En adelante utilizaremos ambas definiciones sin hacer distinción, si (A, μ, η) es una R-álgebra, en un abuso de notación, la denotaremos con A. A los morfismos μ y η los llamaremos *multiplicación* y *unidad*, respectivamente, y nos referiremos a la conmutatividad del primer diagrama en la Definición 4.1 como *asociatividad* y a la del segundo como *propiedad unitaria*. Si $a, b \in A$ denotaremos el producto de a con b de manera clásica como ab o como $\mu(a \otimes b)$. Cuando trabajemos con más de una R-álgebra, para diferenciar la multiplicación y la unidad de cada una, les escribiremos en subíndice el álgebra a la que correspondan.

Para $M, N \in R$-mód, consideraremos el isomorfismo $T = T_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$ definido en los generadores como $T(m \otimes n) = n \otimes m$. Aunque T depende de los módulos M y N, no haremos explícita esta dependencia a menos que pueda haber confusión.

DEFINICIÓN 4.3. Una R-álgebra A es *conmutativa* si $\mu \circ T = \mu$.

Si tenemos dos R-álgebras A y B, entonces $A \otimes B$ es una R-álgebra con multiplicación definida como $\mu_{A \otimes B} := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes T \otimes Id_B)$ y unidad definida en 1 como $\eta_{A \otimes B}(1) = \eta_A(1) \otimes \eta_B(1)$. En efecto, si

$a, c, e \in A$, $b, d, f \in B$ y $r \in R$, entonces, en los tensores elementales

$$\begin{aligned}\mu_{A\otimes B} \circ (Id \otimes \mu_{A\otimes B})(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f) &= \mu_{A\otimes B}(a \otimes b \otimes (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes T \otimes Id_B)(c \otimes d \otimes e \otimes f)) \\ &= \mu_{A\otimes B}(a \otimes b \otimes \mu_A(c \otimes e) \otimes \mu_B(d \otimes f)) \\ &= (\mu_A \otimes \mu_B)(a \otimes \mu_A(c \otimes e) \otimes b \otimes \mu_B(d \otimes f)) \\ &= \mu_A(a \otimes \mu_A(c \otimes e)) \otimes \mu_B(b \otimes \mu_B(d \otimes f)),\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mu_{A\otimes B} \circ (\mu_{A\otimes B} \otimes Id)(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f) &= \mu_{A\otimes B}((\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes T \otimes Id_B)(a \otimes b \otimes c \otimes d) \otimes e \otimes f) \\ &= \mu_{A\otimes B}(\mu_A(a \otimes c) \otimes \mu_B(b \otimes d) \otimes e \otimes f) \\ &= (\mu_A \otimes \mu_B)(\mu_A(a \otimes c) \otimes e \otimes \mu_B(b \otimes d) \otimes f) \\ &= \mu_A(\mu_A(a \otimes c) \otimes e) \otimes \mu_B(\mu_B(b \otimes d) \otimes f).\end{aligned}$$

Debido a que $\mu_A(a \otimes \mu_A(c \otimes e)) = \mu_A(\mu_A(a \otimes c) \otimes e)$ y $\mu_B(b \otimes \mu_B(d \otimes f)) = \mu_B(\mu_B(b \otimes d) \otimes f)$ deducimos que

$$\mu_{A\otimes B} \circ (Id \otimes \mu_{A\otimes B}) = \mu_{A\otimes B} \circ (\mu_{A\otimes B} \otimes Id).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mu_{A\otimes B}(\eta_{A\otimes B}(r) \otimes a \otimes b) &= \mu_{A\otimes B}(r\eta_A(1) \otimes \eta_B(1) \otimes a \otimes b) \\ &= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes T \otimes Id_B)(\eta_A(r) \otimes \eta_B(1) \otimes a \otimes b) \\ &= (\mu_A \otimes \mu_B)(\eta_A(r) \otimes a \otimes \eta_B(1) \otimes b) \\ &= \mu_A(\eta_A(r) \otimes a) \otimes \mu_B(\eta_B(1) \otimes b) \\ &= ra \otimes b.\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a la propiedad unitaria de A y B. La igualdad $\mu_{A\otimes B}(a \otimes b \otimes \eta_{A\otimes B}(r)) = a \otimes br$ se demuestra análogamente.

Notemos que si $a\otimes b, c\otimes d \in A\otimes B$, en la notación clásica para la multiplicación se tiene que $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$

Definición 4.4. Sean A y B dos R-álgebras y $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$. Decimos que f es un *morfismo de R-álgebras* si $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$ y $f \circ \eta_A = \eta_B$, es decir, si los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & R \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Dualizamos ahora la Definición 4.1.

Definición 4.5. Una *R-coálgebra* es una terna (C, Δ, ε) tal que $C \in R$-mód, $\Delta \in \mathrm{Hom}_R(C, C \otimes C)$, $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(C, R)$ y los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\Delta\otimes\ Id_C"'] \\
C\otimes C \arrow[u, "Id_C\otimes\Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C\otimes R & C\otimes C \arrow[l, "Id_C\otimes\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes\ Id_C"] & R\otimes C \\
& C \arrow[ul, "\varphi_C^{-1}"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\phi_C^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

A los morfismos Δ y ε los llamaremos *comultiplicación* y *counidad* respectivamente, y nos referiremos a la conmutatividad del primer diagrama como *coasociatividad* y a la del segundo como la *propiedad counitaria.*

Notemos que podemos escribir la propiedad counitaria como $Id_C = \phi_C\circ(\varepsilon\otimes Id_C)\circ\Delta = \varphi_C\circ(Id_C\otimes\varepsilon)\circ\Delta$. De manera análoga, si A es una R-álgebra, podemos escribir la propiedad unitaria como $\mu\circ(\eta\otimes Id_A)\circ\phi_A^{-1} = \mu\circ(Id_A\otimes\eta)\circ\varphi_A^{-1} = Id_A$.

DEFINICIÓN 4.6. Una R-coálgebra C es *coconmutativa* si $T\circ\Delta = \Delta$.

EJEMPLO 4.7. Consideremos un grupo G y el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$. Si definimos $\Delta : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]$ y $\varepsilon : \mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}$ mediante $\Delta(g) = g\otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$ para cada $g\in G$, entonces $(\mathbb{C}[G], \Delta, \varepsilon)$ es una $\mathbb{C}$ coálgebra, ya que para cada $g\in G$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\circ Id_{\mathbb{C}[G]}\right)\circ\Delta(g) &= \left(\Delta\circ Id_{\mathbb{C}[G]}\right)(g\otimes g)\\
&= g\otimes g\otimes g\\
&= \left(Id_{\mathbb{C}[G]}\circ\Delta\right)(g\otimes g)\\
&= \left(Id_{\mathbb{C}[G]}\circ\Delta\right)\circ\Delta(g),
\end{aligned}$$

$$\left(\varepsilon\otimes Id_{\mathbb{C}[G]}\right)\circ\Delta(g) = \left(\varepsilon\otimes Id_{\mathbb{C}[G]}\right)(g\otimes g) = 1\otimes g$$

y

$$\left(Id_{\mathbb{C}[G]}\otimes\varepsilon\right)\circ\Delta(g) = \left(Id_{\mathbb{C}[G]}\otimes\varepsilon\right)(g\otimes g) = g\otimes 1.$$

Por linealidad tenemos lo deseado.

Como en el caso de las R-álgebras, si (C, Δ, ε) es una R-coálgebra, la denotaremos con C, y si trabajamos con diversas R-coálgebras, distinguiremos las comultiplicaciones y counidades por medio de subíndices.

En el ejemplo anterior mostramos que existen R-álgebras que también son R-coálgebras. La siguiente definición conjunta estas dos nociones.

DEFINICIÓN 4.8. Una R-***biálgebra*** es una quinteta $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ tal que (H, μ, η) es una R-álgebra, (H, Δ, ε) es una R-coálgebra y $\Delta : H\to H\otimes H$ y $\varepsilon : H\to R$ son morfismos de R-álgebras.

Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una R-biálgebra, la denotaremos simplemente con H.

En la definición anterior, el que Δ y ε sean morfismos de R-álgebras es equivalente a que μ y η sean morfismos de R-coálgebras; sin embargo, y a diferencia del caso de las R-álgebras, no mostramos que el producto tensorial de dos R-coálgebras es una R-coálgebra (las definiciones de la comultiplicación y counidad son totalmente duales), ni definimos los morfismos entre coálgebras. No revisaremos la prueba de estos hechos, pues nuestro fin no es profundizar en la teoría de biálgebras. La demostración de éstos se puede encontrar en [**3**].

Si C es una R-coálgebra y A es una R-álgebra, podemos dar estructura de R-álgebra a $B := \mathrm{Hom}_R(C, A)$ como sigue. Si $f, g \in B$, definimos el producto $f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$. Esta operación se distribuye sobre la suma pues $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$ y $(f + h) \otimes g = f \otimes g + h \otimes g$ para cualesquiera $f, g, h \in B$. Para ver que es asociativa tomemos $f, g, h \in B$. Entonces

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= \mu \circ (f \otimes (\mu \circ (g \otimes h) \circ \Delta)) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (Id_A \otimes \mu) \circ (f \otimes ((g \otimes h) \circ \Delta)) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (Id_A \otimes \mu) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta. \end{aligned}$$

Por la asociatividad de A y la coasociatividad de C,

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= \mu \circ (\mu \otimes Id_A) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta \\ &= \mu \circ ((\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta) \otimes h) \circ \Delta \\ &= (f * g) * h. \end{aligned}$$

Veamos que B es anillo con uno. Obsérvese que $\eta \circ \varepsilon \in B$ y que

$$\begin{aligned} f * (\eta \circ \varepsilon) &= \mu \circ (f \otimes (\eta \circ \varepsilon)) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (Id_A \otimes \eta) \circ (f \otimes Id_R) \circ (Id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta \end{aligned}$$

La propiedad unitaria de A y la propiedad counitaria de C implican que

$$f * (\eta \circ \varepsilon) = \varphi_A \circ (f \otimes Id_R) \circ \varphi_C^{-1}$$

para cada $f \in B$. Evaluando en $c \in C$ podemos observar que

$$\begin{aligned} f * (\eta \circ \varepsilon)(c) &= \varphi_A \circ (f \otimes Id_R) \circ \varphi_C^{-1}(c) \\ &= \varphi_A \circ (f \otimes Id_R)(c \otimes 1) \\ &= \varphi_A \circ (f(c) \otimes 1) \\ &= f(c), \end{aligned}$$

es decir $f * (\eta \circ \varepsilon) = f$. De manera análoga $(\eta \circ \varepsilon) * f = f$ y concluimos que $\eta \circ \varepsilon$ es neutro multiplicativo para B. Para terminar, necesitamos probar que $r(\eta \circ \varepsilon) \in Cen(B)$ para cada $r \in R$. Si $r \in R$ y $f \in B$, entonces

$$\begin{aligned} f * (r(\eta \circ \varepsilon)) &= \mu \circ (f \otimes r(\eta \circ \varepsilon)) \circ \Delta \\ &= r(\mu \circ (f \otimes (\eta \circ \varepsilon)) \circ \Delta) \\ &= r(f) \\ &= r(\mu \circ ((\eta \circ \varepsilon) \otimes f) \circ \Delta) \\ &= \mu \circ (r(\eta \circ \varepsilon) \otimes f) \circ \Delta \\ &= (r(\eta \circ \varepsilon)) * f. \end{aligned}$$

A la operación $*$ de B se le conoce como convolución.

Observación 4.9. Si A es conmutativa y C coconmutativa, la convolución en $\mathrm{Hom}_R(C, A)$ es conmutativa: si $c \in C$ y $f, g \in \mathrm{Hom}_R(C, A)$, entonces

$$\begin{aligned} f * g(c) &= \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c) \\ &= \mu \circ (f \otimes g)\left(\sum_{i=0}^{n} c_{1,i} \otimes c_{2,i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mu\left(f\left(c_{1,i}\right) \otimes g\left(c_{2,i}\right)\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g * f(c) &= \mu \circ (g \otimes f) \circ \Delta(c) \\ &= \mu \circ T \circ (g \otimes f) \circ T \circ \Delta(c) \\ &= \mu \circ T \circ (g \otimes f)\left(\sum_{i=0}^{n} c_{1,i} \otimes c_{2,i}\right) \\ &= \mu \circ T\left(\sum_{i=0}^{n} g\left(c_{1,i}\right) \otimes f\left(c_{2,i}\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mu\left(f\left(c_{1,i}\right) \otimes g\left(c_{2,i}\right)\right). \end{aligned}$$

En vista de la construcción anterior, si H es una R-biálgebra, entonces $\mathrm{Hom}_R(H, H)$ es una R-álgebra si consideramos a H como R-coálgebra en la primera entrada y como R-álgebra en la segunda.

Definición 4.10. Sea H una R-biálgebra. Una *antípoda* para H es un morfismo $S \in \mathrm{Hom}_R(H, H)$ tal que $Id_H * S = S * Id_H = \eta \circ \varepsilon$, es decir, tal que S es un inverso de Id_H con respecto a la convolución en $\mathrm{Hom}_R(H, H)$.

Definición 4.11. Una *R-álgebra de Hopf* es una R-biálgebra con antípoda.

Diremos que una R-álgebra de Hopf o una R-biálgebra es (co)conmutativa si como (co)álgebra lo es.

Ejemplo 4.12. Si G es un grupo, ya mostramos que el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ es también una $\mathbb{C}$-coálgebra. Vamos a mostrar que de hecho $\mathbb{C}[G]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf. Primero demostremos que la comultiplicación y counidad de $\mathbb{C}[G]$ son morfismos de $\mathbb{C}$ álgebras. Si $g, h \in G$, entonces

$$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h),$$

$$\varepsilon(gh) = 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h),$$

$$\Delta(\eta(1)) = \eta(1) \otimes \eta(1) = \eta_{\otimes}(1)$$

y

$$\varepsilon(\eta(1)) = 1 = \eta_R(1);$$

por linealidad, estas ecuaciones se preservan para cada $r, s \in \mathbb{C}[G]$ y $a \in \mathbb{C}$. Así, $\mathbb{C}[G]$ es una $\mathbb{C}$-biálgebra. Finalmente, mostremos que $\mathbb{C}[G]$ tiene antípoda. Notemos que $\eta \circ \varepsilon(g) = e$ para cada $g \in G$ y que para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$, tenemos que $f * Id(g) = f(g)g$ para cualquier $g \in G$, por lo que $S * Id = \eta \circ \varepsilon = Id * S$ si y sólo si $S(g) = g^{-1}$ para cada $g \in G$. Si tomamos $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$ definida por la regla $S(g) = g^{-1}$, entonces $\mathbb{C}[G]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf con antípoda S.

Observación 4.13. Del ejemplo anterior se sigue que $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf, pues como anillos $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}[\{e\}]$. Para un grupo finito G, se define el álgebra de grupo $R[G]$ de G sobre R como el R-módulo libre con base G. Realizando una construcción análoga a la hecha en el ejemplo anterior, podemos mostrar que $R[G]$ es una R-álgebra de Hopf.

Con esto terminamos lo que necesitamos acerca de las álgebras de Hopf. Continuaremos con las álgebras de Zelevinsky

4.2. Álgebras de Zelevinsky

Debido a que en **[11]** la definición de álgebra de Hopf no coincide con la Definición 4.11, vamos a definir álgebra de Zelevinsky como lo que Zelevinsky llamó álgebra de Hopf positiva, autoadjunta y conexa.

En adelante nuestro anillo conmutativo será $\mathbb{Z}$ y al escribir álgebra, coálgebra, biálgebra o álgebra de Hopf querremos decir $\mathbb{Z}$-álgebra, $\mathbb{Z}$-coálgebra, $\mathbb{Z}$-biálgebra y $\mathbb{Z}$-álgebra de Hopf respectivamente.

Definición 4.14. Un *grupo con base* es un grupo abeliano libre G con una base distinguida $\Omega(G)$. Llamaremos *irreducibles* a los elementos de $\Omega(G)$.

Si tenemos una familia de grupos con base $\{G_i \mid i \in I\}$, entonces a $\bigoplus_i G_i$ se le puede asociar de manera canónica la base $\Omega\left(\bigoplus_i G_i\right) = \coprod_i \Omega(G_i)$; si I es finito, a $G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} G_n$ le podemos asociar la base $\Omega(G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} G_n) = \{g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \mid g_i \in \Omega(G_i)\}$. Así, consideraremos a $\bigoplus_i G_i$ y a $G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} G_n$ grupos con base utilizando los conjuntos de irreducibles recién descritos. Consideraremos a $\mathbb{Z}$ grupo con base, definiendo $\Omega(\mathbb{Z}) = \{1\}$.

Observación 4.15. Si G es un grupo con base, entonces la extensión bilineal de la asignación $\langle w, x\rangle = \delta_{wx}$ para $w, x \in \Omega(G)$ define un producto interior en G. Notemos que, si $\{G_i \mid i \in I\}$ es una familia de grupos con base, en $\bigoplus_i G_i$ cada sumando es ortogonal a los demás, ya que si $(w,i), (x,j) \in \Omega\left(\bigoplus_i G_i\right)$, entonces $\langle (w,i), (x,j)\rangle = \delta_{(w,i),(x,j)}$.

Aunque trabajaremos con más de un grupo con base a la vez, para simplificar la notación, no diferenciaremos el producto interior en cada grupo y en vista de la observación anterior cuando trabajemos con la suma directa de grupos con base, denotaremos a los irreducibles de ésta de la misma manera con que los denotamos en cada sumando, es decir, omitiremos la notación como parejas ordenadas.

Si G es un grupo con base, definimos $G^+ := \left\{ \sum_{w\in\Omega(G)} a_w w \mid a_w \geq 0 \text{ para todo } w \in \Omega(G) \right\}$.

Definición 4.16. Sean G y H grupos con base. Un morfismo de grupos abelianos $f : G \to H$ es *positivo* si $f(G^+) \subseteq H^+$

Definición 4.17. i) Un álgebra A es *graduada* por $\mathcal{G} = \{A_n \mid A_n \text{ es un subgrupo de } A \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ si como grupos abelianos $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y la multiplicación y unidad de A satisfacen que $\mu(A_n \otimes_{\mathbb{Z}} A_m) \leq A_{n+m}$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y $\eta(\mathbb{Z}) \leq A_0$. Al conjunto $\mathcal{G}$ lo llamamos *graduación*. Si $a \in A_n$ y $a \neq 0$, decimos que a es *homogéneo de grado* n.

ii) Una coálgebra C es *graduada* por $\mathcal{G} = \{C_n \mid C_n \text{ es un subgrupo de } C \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ si C se descompone como $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C_n$ y la comultiplicación y la counidad de C satisfacen que $\Delta(C_n) \leq \bigoplus_{i+k=n} C_i \otimes_{\mathbb{Z}} C_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon(C_n) = 0$ si $n \neq 0$. Análogamente al caso de las álgebras graduadas, el conjunto $\mathcal{G}$ es llamado *graduación*. Si $c \in C_n$ y $c \neq 0$, decimos que c es *homogéneo de grado* n.

iii) Una biálgebra es *graduada* si como álgebra y coálgebra es graduada por la misma graduación.
iv) Un álgebra de Hopf es *graduada* si como biálgebra lo es.

Notemos que cualquier (co)álgebra A es graduada por la graduación $\mathcal{G} = \{A_n \mid A_0 = A \text{ y } A_n = 0 \text{ para cada } n \neq 0\}$. Por supuesto, estaremos interesados en álgebras graduadas no trivialmente. Si A es una (co)álgebra graduada y definimos $(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_n = \bigoplus_{i+k=n} A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_k$, entonces $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ es una (co)álgebra graduada por la graduación $\{(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, pues A es graduada y el producto tensorial se distribuye sobre la suma directa.

En adelante H denotára un grupo abeliano tal que

1. Existen morfismos de grupos abelianos $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H \otimes_{\mathbb{Z}} H, H)$, $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, H)$, $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z})$ y $\Delta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, H \otimes_{\mathbb{Z}} H)$
2. Los morfismos μ y η satisfacen la propiedad unitaria y los morfismos Δ y ε, la counitaria.
3. Se satisface que $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (Id_H \otimes T \otimes Id_H) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ y $\varepsilon \circ \mu = \varepsilon\varepsilon$, donde el producto $\varepsilon\varepsilon$ se defne puntualmente a través del producto en $\mathbb{Z}$.
4. Existen submódulos H_n de H para cada $n \in \mathbb{N}$ tales que $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$, $\eta(\mathbb{Z}) \leq H_0$, $\varepsilon(H_n) = 0$ para toda $n > 0$ y para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\mu(H_m \otimes_{\mathbb{Z}} H_n) \leq H_{m+n}$ y $\Delta(H_m) \leq \bigoplus_{m=i+k} H_i \otimes_{\mathbb{Z}} H_k$.

Consideremos $\eta_0 : \mathbb{Z} \to A_0$ definida mediante $\eta_0(z) = \eta(z)$ y $\varepsilon_0 : C_0 \to \mathbb{Z}$ como la restricción de ε a C_0.

DEFINICIÓN 4.18. El grupo H es *conexo* si η_0 y ε_0 son mutuamente inversos.

DEFINICIÓN 4.19. El grupo H es *positivo* si cada H_n es un grupo con base y los morfismos μ, η, Δ y ε son morfismos positivos.

DEFINICIÓN 4.20. El grupo H es *autoadjunto* si es positivo y (μ, Δ) y (η, ε) son pares de morfismos adjuntos con respecto a los productos interiores definidos en H, $H \otimes_{\mathbb{Z}} H$ y $\mathbb{Z}$ como en la Observación 4.15; es decir, $\langle \mu(h \otimes g), f \rangle = \langle h \otimes g, \Delta(f) \rangle$ y $\langle \eta(z), h \rangle = \langle z, \varepsilon(h) \rangle$ para cualesquiera $h, g, f \in H$ y $z \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 4.21. Decimos que H es una *casi-álgebra de Zelevinsky* si es positivo, autoadjunto y conexo.

DEFINICIÓN 4.22. Un *álgebra de Zelevinsky* es una biálgebra graduada positiva, autoadjunta y conexa.

Es claro que cualquier álgebra de Zelevinsky es una casi-álgebra de Zelevinsky. Demostraremos que cualquier casi-álgebra de Zelevinsky es de hecho un álgebra de Zelevinsky, es decir, que en un álgebra de Zelevinsky la asociatividad y coasociatividad se demuestran a partir de las demás propiedades del álgebra. Para esto necesitamos algunos resultados que enunciaremos para el grupo H utilizando las propiedades 1-4 y trataremos al morfismo μ como multiplicación aunque no sea asociativa.

PROPOSICIÓN 4.23. *Si H es positivo y conexo, entonces $\Omega(H_0) = \{\eta(1)\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser positivo y dado que $\Omega(\mathbb{Z}) = \{1\}$, se tiene que $\eta(1) \in \Omega(H_0)$ y de la conexidad se sigue que $|\Omega(H_0)| = 1$. □

La proposición anterior nos dice que el único elemento homogéneo irreducible de grado 0 en una biálgebra conexa y positiva es el uno.

PROPOSICIÓN 4.24. *Si H es conexo, escribimos $I := \bigoplus_{n>0} H_n$ y $h \in I$, entonces $\Delta(h) = h \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes h + \Delta^+(h)$ donde $\Delta^+(h) \in I \otimes I$.*

Demostración. Por linealidad es suficiente demostrar el enunciado para $h \in H_n$ y $n > 0$. Bajo esta hipótesis, $\Delta(h) = \sum_{i+k=n} \sum_{j=0}^{m_{i,k}} h'_{i,j} \otimes h_{k,j}$ con $h_{k,j} \in H_k$ y $h'_{i,j} \in H_i$ por la propiedad 4 de H. De la propiedad counitaria, obtenemos que

$$h \otimes 1 = (Id_H \otimes \varepsilon)(\Delta(h)) = (Id_H \otimes \varepsilon)\left(\sum_{i+k=n} \sum_{j=0}^{m_{i,k}} h'_{i,j} \otimes h_{k,j}\right).$$

De 4 se sigue que $\varepsilon(h_{k,j}) = 0$ para cada $k \neq 0$; así que

$$h \otimes 1 = (Id_H \otimes \varepsilon)\left(\sum_{j=0}^{m_{n,0}} h'_{n,j} \otimes h_{0,j}\right) = (Id_H \otimes \varepsilon_0)\left(\sum_{j=0}^{m_{n,0}} h'_{n,j} \otimes h_{0,j}\right). \tag{4.2.1}$$

De la Ecuación (4.2.1), de 4 y la conexidad de H, concluimos que

$$h \otimes \eta(1) = (Id_H \otimes \eta_0)(h \otimes 1) = (Id_H \otimes \eta_0) \circ (Id_H \otimes \varepsilon_0)\left(\sum_{j=0}^{m_{n,0}} h'_{n,j} \otimes h_{0,j}\right) = \sum_{j=0}^{m_{n,0}} h'_{n,j} \otimes h_{0,j}.$$

Análogamente es posible demostrar que

$$\eta(1) \otimes h = \sum_{j=0}^{m_{0,n}} h'_{0,j} \otimes h_{n,j}$$

y así,

$$\Delta(h) = h \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes h + \Delta^+(h)$$

con $\Delta^+(h) = \sum_{\substack{i,k \neq n \\ i+k=n}} \sum_{j=0}^{m_{i,k}} h_{i,j} \otimes h_{k,j}$. □

Definición 4.25. Si H es conexo, decimos que $h \in I$ es *primitivo* si $\Delta^+(h) = 0$. Denotaremos con P al subgrupo formado por todos los elementos primitivos de H.

Lema 4.26. *Si H es conexo y $P \cap \mu(I \otimes I) = 0$, entonces H es asociativa y conmutativa.*

Demostración. Demostraremos solamente que H es asociativa; la conmutatividad se demuestra de manera análoga. Por linealidad es suficiente probar que $a(bc) - (ab)c = 0$ para cualesquiera elementos homogéneos $a \in H_i$, $b \in H_j$ y $c \in H_k$. Tenemos 2 casos:

1) Existe $l \in \{i, j, k\}$ tal que $l = 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i = 0$, por la conexidad y la propiedad unitaria existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $a = \eta(z)$ y así $a(bc) - (ab)c = \eta(z)(bc) - (\eta(z)b)c = z(bc) - (zb)c = 0$.

2) Si $0 \notin \{i, j, k\}$. De 4 se sigue que $a(bc) - (ab)c \in H_l$, donde $l = i + j + k > 0$ y por tanto $a, b, c, a(bc) - (ab)c \in I$. Por la proposición anterior tenemos que

$$\Delta(a(bc) - (ab)c) = (a(bc) - (ab)c) \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes (a(bc) - (ab)c) + \Delta^+(a(bc) - (ab)c) \tag{4.2.2}$$

Mientras que la propiedad 3 implica que

$$\Delta(a(bc) - (ab)c) = \Delta(a)\Delta(bc) - \Delta(ab)\Delta(c) = \Delta(a)(\Delta(b)\Delta(c)) - (\Delta(a)\Delta(b))\Delta(c) \tag{4.2.3}$$

Por la proposición anterior, si tomamos el sumando $\Delta(a)(\Delta(b)\Delta(c))$ de la Ecuación (4.2.3), obtenemos que

$$\Delta(a)(\Delta(b)\Delta(c)) = (\Delta(a))\left(\left(b \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes b + \Delta^+(b)\right)\left(c \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes c + \Delta^+(c)\right)\right) =$$

$$= (\Delta(a))\left(bc \otimes \eta(1) + b \otimes c + c \otimes b + \eta(1) \otimes bc + \Delta^+(b)\Delta(c) + (b \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes b)\Delta^+(c)\right).$$

Para continuar denotemos $\delta(b,c) := \Delta^+(b)\Delta(c) + (b\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes b)\Delta^+(c)$. Con esta notación

$$\Delta(a)(\Delta(b)\Delta(c)) = \left(a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a+\Delta^+(a)\right)(bc\otimes\eta(1)+b\otimes c+c\otimes b+\eta(1)\otimes bc+\delta(b,c)) =$$

$$= a(bc)\otimes\eta(1)+f(a,b,c)+\eta(1)\otimes a(bc)+\Delta^+(a)(\Delta(b)\Delta(c))+(a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\delta(b,c),$$

por lo que,

$$\Delta(a)(\Delta(b)\Delta(c)) = a(bc)\otimes\eta(1)+f(a,b,c)+\eta(1)\otimes a(bc)+\Delta^+(a)(\Delta(b)\Delta(c))+(a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\delta(b,c) \tag{4.2.4}$$

Donde $f(a,b,c) = ab\otimes c+ac\otimes b+a\otimes bc+bc\otimes a+b\otimes ac+c\otimes ab$. De manera análoga,

$$(\Delta(a)\Delta(b))\Delta(c) = (ab)c\otimes\eta(1)+f(a,b,c)+\eta(1)\otimes(ab)c+(\Delta(a)\Delta(b))\Delta^+(c)+\delta(a,b)(c\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes c) \tag{4.2.5}$$

Si definimos

$$\gamma(a,b,c) := \Delta^+(a)(\Delta(b)\Delta(c))+(a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\delta(b,c)$$

y

$$\Gamma(a,b,c) := (\Delta(a)\Delta(b))\Delta^+(c)+\delta(a,b)(c\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes c),$$

sustituyendo las Ecuaciones (4.2.4) y (4.2.5) en la Ecuación (4.2.3) obtenemos

$$\Delta(a(bc)-(ab)c) = a(bc)\otimes\eta(1)-(ab)c\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a(bc)-\eta(1)\otimes(ab)c+\gamma(a,b,c)-\Gamma(a,b,c) =$$

$$= (a(bc)-(ab)c)\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes(a(bc)-(ab)c)+\gamma(a,b,c)-\Gamma(a,b,c),$$

por tanto

$$\Delta(a(bc)-(ab)c) = (a(bc)-(ab)c)\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes(a(bc)-(ab)c)+\gamma(a,b,c)-\Gamma(a,b,c). \tag{4.2.6}$$

De las Ecuaciones (4.2.6) y (4.2.2) concluimos que

$$\gamma(a,b,c)-\Gamma(a,b,c) = \Delta^+(a(bc)-(ab)c). \tag{4.2.7}$$

La demostración se concluye mostrando que $a(bc)-(ab)c$ es primitivo, es decir, $a(bc)-(ab)c\in P$, pues $P\cap\mu(I\otimes I)=0$ y $a(bc)-(ab)c\in\mu(I\otimes I)$. Así, por la definición de primitivo y la Ecuación (4.2.7), es suficiente probar que $\gamma(a,b,c)-\Gamma(a,b,c)=0$. Para conseguir esto, definamos $f_2, f_1 : H\to H\otimes H$ mediante $f_1(h) = h\otimes\eta(1)$ y $f_2(h)=\eta(1)\otimes h$. Probaremos por inducción sobre i, j y k que para cualesquiera $a\in H_i$, $b\in H_j$ y $c\in H_k$ y $g_1, g_2\in\{f_1, f_2, \Delta^+\}$, se cumplen las ecuaciones:

$$\Delta^+(a)(g_1(b)g_2(c)) = \left(\Delta^+(a)g_1(b)\right)g_2(c), \tag{4.2.8}$$

$$g_1(a)\left(\Delta^+(b)g_2(c)\right) = \left(g_1(a)\Delta^+(b)\right)g_2(c) \tag{4.2.9}$$

y

$$g_1(a)\left(g_2(b)\Delta^+(c)\right) = (g_1(a)g_2(b))\Delta^+(c). \tag{4.2.10}$$

Antes de comenzar con la inducción, notemos que las ecuaciones anteriores demuestran lo deseado:

$$\begin{aligned}
\gamma(a,b,c) &= \Delta^+(a)(\Delta(b)\Delta(c))+(a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\delta(b,c)\\
&= \left(\Delta^+(a)\Delta(b)\right)\Delta(c)+(a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\left(\Delta^+(b)\Delta(c)+(b\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes b)\Delta^+(c)\right)\\
&= \left(\Delta^+(a)\Delta(b)\right)\Delta(c)+\left((a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\Delta^+(b)\right)\Delta(c)\\
&\quad+((a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)(b\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes b))\Delta^+(c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\Delta^+(a)\,\Delta(b) + (a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\,\Delta^+(b) + (a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\,(b\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes b)\right)\Delta^+(c)\\
&+ \left(\Delta^+(a)\,\Delta(b) + (a\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes a)\,\Delta^+(b)\right)(c\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes c)\\
&= (\Delta(a)\,\Delta(b))\,\Delta^+(c) + \delta(a,b)\,(c\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes c)\\
&= \Gamma(a,b,c)\,.
\end{aligned}
$$

En las segunda y tercera igualdadades se ocupan las Ecuaciones (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.10).

Demos paso a la inducción.

Base inductiva: Si $h \in H_1$, entonces $\Delta^+(h) = 0$, debido a 4, de manera que, si $i = j = k = 1$, las Ecuaciones (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.10) se satisfacen trivialmente.

Hipótesis inductiva sobre i ($j = k = 1$): Las Ecuaciones (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.10) se cumplen para toda $a \in H_l$ con $l < i$ y cada $b, c \in H_1$. Notemos que en vista de lo mostrado antes de comenzar la inducción, $a(bc) = (ab)c$ para cualesquiera $a \in H_l$ con $l < i$ y $b, c \in H_1$.

Paso inductivo sobre i (debido a que $j = k = 1$, sólo necesitamos probar la Ecuación (4.2.8) para $g_1, g_2 \in \{f_1, f_2\}$): Si $a \in H_i$, entonces $\Delta^+(a) = \sum_{r=0}^{n} a_{1,r} \otimes a_{2,r}$ con $a_{s,r} \in H_{l_{s,r}}$ y $l_{s,r} < i$ para cada $s \in \{1,2\}$ y $0 \le r \le n$, pues H satisface 4. Tomemos $b, c \in H_1$ y $g_1, g_2 \in \{f_1, f_2\}$ y supongamos que $g_1(b) = x \otimes y$ y $g_2(c) = z \otimes w$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Delta^+(a)\,(g_1(b)\,g_2(c)) &= \left(\sum_{r=0}^{n} a_{1,r}\otimes a_{2,r}\right)(g_1(b)\,g_2(c))\\
&= \sum_{r=0}^{n} (a_{1,r}\otimes a_{2,r})\,(g_1(b)\,g_2(c))\\
&= \sum_{r=0}^{n} (a_{1,r}\otimes a_{2,r})\,((x\otimes y)\,(z\otimes w))\\
&= \sum_{r=0}^{n} (a_{1,r}(xz)\otimes a_{2,r}(yw))\\
&= \sum_{r=0}^{n} ((a_{1,r}x)\,z\otimes (a_{2,r}y)\,w) \quad \text{Hipótesis inductiva}\\
&= \sum_{r=0}^{n} ((a_{1,r}\otimes a_{2,r})\,g_1(b))\,g_2(c)\\
&= \left(\left(\sum_{r=0}^{n} a_{1,r}\otimes a_{2,r}\right)g_1(b)\right)g_2(c)\\
&= (\Delta^+(a)\,g_1(b))\,g_2(c)\,.
\end{aligned}
$$

Antes de dar paso a la inducción sobre j, nótese que en la inducción sobre i sólo utilizamos que $b, c \in H_1$ para argumentar que las Ecuaciones (4.2.9) y (4.2.10) eran satisfechas trivialmente. Así, se ha demostrado que la Ecuación (4.2.8) es cierta para cualesquiera $i, j, k \in \mathbb{N}$ y $g_1, g_2 \in \{f_1, f_2\}$.

Hipótesis inductiva sobre j ($k = 1$): Las Ecuaciones (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.10) se satisfacen para cualesquiera $a \in H_i$, $b \in H_l$ y $c \in H_1$ con $i \in \mathbb{N}$ y $l < j$.

Paso inductivo sobre j (sólo necesitamos probar la Ecuación (4.2.9) con $g_1 = \Delta^+$ y $g_2 \in \{f_1, f_2\}$, ya que $\Delta^+(c) = 0$ y la Ecuación (4.2.8) se cumple para $g_1, g_2 \in \{f_1, f_2\}$): Sean $a \in H_i$, $b \in H_l$ y $c \in H_1$. Si

$\Delta^{+}(a)=\sum_{r=0}^{n} a_{1,r}\otimes a_{2,r}$ con $a_{s,r}\in H_{l_{s,r}}$ y $l_{s,r}<i$ para cada $s\in\{1,2\}$ y $r\in\{0,1,\dots,n\}$, escribimos $g_2(c)=x\otimes y$ y $\Delta^{+}(b)=\sum_{r'=0}^{m} b_{1,r'}\otimes b_{2,r'}$, donde $b_{s,r'}\in H_{t_{s,r'}}$ y $t_{s,r'}<i$ para toda $s\in\{1,2\}$ y $r'\in\{0,1,\dots,m\}$; entonces

$$\begin{aligned}
\Delta^{+}(a)\left(\Delta^{+}(b)\,g_2(c)\right) &= \left(\sum_{r=0}^{n} a_{1,r}\otimes a_{2,r}\right)\left(\left(\sum_{r'=0}^{m} b_{1,r'}\otimes b_{2,r'}\right)(x\otimes y)\right)\\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{r'=0}^{m}(a_{1,r}\otimes a_{2,r})\left((b_{1,r'}\otimes b_{2,r'})(x\otimes y)\right)\\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{r'=0}^{m}(a_{1,r}\otimes a_{2,r})(b_{1,r'}x\otimes b_{2,r'}y)\\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{r'=0}^{m}(a_{1,r}(b_{1,r'}x)\otimes a_{2,r}(b_{2,r'}y))\\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{r'=0}^{m}((a_{1,r}b_{1,r'})\,x\otimes(a_{2,r}b_{2,r'})\,y) \qquad (4.2.11)\\
&= \left(\Delta^{+}(a)\,\Delta^{+}(b)\right)g_2(c)\,.
\end{aligned}$$

En la Ecuación (4.2.11) se utiliza la hipótesis inductiva. Por lo tanto,

$$\Delta^{+}(a)\left(\Delta^{+}(b)\,g_2(c)\right)=\left(\Delta^{+}(a)\,\Delta^{+}(b)\right)g_2(c)\,. \qquad (4.2.12)$$

Un argumento análogo al que se realizó antes de empezar la inducción sobre j nos permite afirmar que la Ecuación (4.2.12) se satisface para cualesquiera $i,j,k\in\mathbb{N}$ y $g_2\in\{f_1,f_2\}$. Por tanto, al realizar inducción sobre k sólo tendríamos que demostrar que $\Delta^{+}(a)\left(\Delta^{+}(b)\,\Delta^{+}(c)\right)=\left(\Delta^{+}(a)\,\Delta^{+}(b)\right)\Delta^{+}(c)$ para $i,j,k\in\mathbb{N}$, $a\in H_i$, $b\in H_j$ y $c\in H_k$. No realizaremos tal ya que es análoga a las anteriores. Así, concluimos que si $i,j,k\in\mathbb{N}$, $a\in H_i$, $b\in H_j$ y $c\in H_k$, entonces $\gamma(a,b,c)-\Gamma(a,b,c)=0$, y en consecuencia $a(bc)-(ab)c\in P\cap\mu(I\otimes I)=0$. $\square$

Lema 4.27. *Si H es conexo, autoadjunto y $h\in I$, entonces $h\in P$ si y sólo si $h\in(\mu(I\otimes I))^{\perp}$.*

Demostración. Sean $h\in I$ y $a\in I\otimes I$, como H autoadjunto,

$$\langle h,\mu(a)\rangle=\langle\Delta(h),a\rangle=\left\langle h\otimes\eta(1)+\eta(1)\otimes h+\Delta^{+}(h),a\right\rangle.$$

De la Observación 4.15 se concluye que $I\otimes H_0$ y $H_0\otimes I$ son ortogonales a $I\otimes I$ en $H\otimes H$, por lo tanto, $\langle h,\mu(a)\rangle=\langle\Delta^{+}(h),a\rangle$. De esta igualdad podemos deducir que si $h\in P$ y $\mu(a)\in\mu(I\otimes I)$, entonces $h\in(\mu(I\otimes I))^{\perp}$, es decir, $P\subseteq(\mu(I\otimes I))^{\perp}$. Para mostrar la contención $(\mu(I\otimes I))^{\perp}\subseteq P$, supongamos que $h\in I$ es ortogonal a cualquier $\mu(a)\in I\otimes I$. Entonces h es ortogonal a cada $\mu(a)$ con $a\in I\otimes I\cap\Omega(H\otimes H)$. Si $\Delta^{+}(h)=\sum_{i=0}^{n} z_i a_i$ con $a_i\in I\otimes I\cap\Omega(H\otimes H)$ para cada $i\in\{0,1,\dots,n\}$, entonces $0=\langle h,\mu(a_j)\rangle=\langle\Delta^{+}(h),a_j\rangle=\sum_{i=0}^{n} z_i\langle a_i,a_j\rangle=z_j$ para toda $j\in\{0,1,\dots,n\}$. Así, $\Delta^{+}(h)=0$, es decir, $h\in P$. $\square$

Observación 4.28. Notemos que el Lema 4.27 asegura que $P\cap\mu(I\otimes I)=0$ en cualquier casi-álgebra de Zelevinsky, ya que el producto interior es positivo definido.

Tenemos lo necesario para demostrar lo siguiente:

TEOREMA 4.29. *Cualquier casi-álgebra de Zelevinsky es un álgebra de Zelevinsky conmutativa y coconmutativa.*

DEMOSTRACIÓN. La Observación 4.28 y los Lemas 4.26 y 4.27 implican que cualquier casi-álgebra de Zelevinsky es asociativa y conmutativa. Resta mostrar que si H es una casi-álgebra de Zelevinsky, entonces H es coasociativa y coconmutativa. Fijemos $w, x, y, z, u \in \Omega(H)$.

Comencemos con la coasociatividad. Notemos que como H es autoadjunta, la definición del producto interior en $H \otimes H$ implica que $Id_H \otimes \mu$ es adjunto de $Id_H \otimes \Delta$ y $\mu \otimes Id_H$ lo es de $\Delta \otimes Id_H$, pues

$$\langle w \otimes x, y \otimes z \rangle = \delta_{w \otimes x, y \otimes z} = \delta_{wy}\delta_{xz} = \langle w, y \rangle \langle x, z \rangle ;$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \langle Id_H \otimes \mu(w \otimes x \otimes y), z \otimes u \rangle &= \langle w \otimes \mu(x \otimes y), z \otimes u \rangle \\ &= \langle w, z \rangle \langle \mu(x \otimes y), u \rangle \\ &= \langle w, z \rangle \langle x \otimes y, \Delta(u) \rangle \\ &= \langle w \otimes x \otimes y, Id_H \otimes \Delta(z \otimes u) \rangle . \end{aligned}$$

De esto último y de la asociatividad de H concluimos que

$$\begin{aligned} \langle w \otimes x \otimes y, (Id_H \otimes \Delta) \circ \Delta(z) \rangle &= \langle Id_H \otimes \mu(w \otimes x \otimes y), \Delta(z) \rangle \\ &= \langle \mu \circ (Id_H \otimes \mu)(w \otimes x \otimes y), z \rangle \\ &= \langle \mu \circ (\mu \otimes Id_H)(w \otimes x \otimes y), z \rangle \\ &= \langle w \otimes x \otimes y, (\Delta \otimes Id_H) \circ \Delta(z) \rangle . \end{aligned}$$

Lo anterior es cierto para cualesquiera $w, x, y, z \in \Omega(H)$; así que $(\Delta \otimes Id_H) \circ \Delta(z) = (Id_H \otimes \Delta) \circ \Delta(z)$ para cada $z \in \Omega(H)$. Por linealidad tenemos lo deseado.

Para mostrar la coconmutatividad veamos que T es autoadjunto:

$$\langle w \otimes x, T(y \otimes z) \rangle = \langle w \otimes x, z \otimes y \rangle = \langle w, z \rangle \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle \langle w, z \rangle = \langle x \otimes w, y \otimes z \rangle = \langle T(w \otimes x), y \otimes z \rangle .$$

Realizando un cálculo análogo al realizado para mostrar la coasociatividad, utilizando que H es conmutativa ($\mu = \mu \circ T$) se obtiene lo buscado. □

Como cualquier álgebra de Zelevinsky es una casi álgebra de Zelevinsky, tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 4.30. *Toda álgebra de Zelevinsky es conmutativa y coconmutativa.*

4.3. El grupo de Grothendieck asociado a un grupo finito

En el Capítulo 1 demostramos que las clases de isomorfismo de representaciones de dimensión n de un grupo finito G forman un conjunto, lo que justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.31. Sea G un grupo finito. Definimos el *grupo de Grothendieck* $R(G)$ asociado a G, como el cociente F/E del grupo abeliano libre con base las clases de isomorfismo de rep$G$ por el subgrupo generado por el conjunto $\{[V] + [W] - [V \oplus W] \mid V, W \in \text{rep}G\}$, donde $[V]$ denota la clase de isomorfismo de V.[1]

[1]La definición general del grupo de Grothendieck para categorías aditivas hace uso de sucesiones exactas cortas; sin embargo, optamos por la Definición 4.31, pues no introdujimos el concepto de suseción exacta ni el de categoría aditiva, además el hecho de que el álgebra de grupo sobre $\mathbb{C}$ de un grupo finito es semisimple implica que la Definición 4.31 coincide con la definición general de grupo de Grothendieck.

Denotaremos con $\mathcal{A}$ a un sistema de representantes de representaciones irreducibles de dimensión finita de G.

PROPOSICIÓN 4.32. *El grupo de Grothendieck de G es libre con base $\{[W] + E \mid W \in \mathcal{A}\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $R(G)$ es generado por $\{[W] + E \mid W \in \mathcal{A}\}$, ya que toda representación de dimensión finita de G es suma directa de irreducibles.

Para cada $W \in \mathcal{A}$ definamos $f_W : \mathbb{Z} \to R(G)$ como $f_W(1) = [W] + E$, así, por la propiedad universal de la suma directa, existe un único morfismo $f : \mathbb{Z}^{|\mathcal{A}|} \to R(G)$ tal que

$$f\left((a_W)_{W\in\mathcal{A}}\right) = \sum_{W\in\mathcal{A}} a_W [W] + E.$$

Construyamos su inverso. Sea $\sum_j a_j [V_j] + E \in R(G)$. Para cada j consideremos $\bigoplus_{W\in\mathcal{A}} V_{W,j}$ con $V_{W,j} \cong W^{n_{W,j}}$, la descomposición en componentes isotípicas de V_j. Definamos $g : R(G) \to \mathbb{Z}^{|\mathcal{A}|}$ como

$$g\left(\sum_j a_j [V_j] + E\right) = \left(\sum_j a_j n_{W,j}\right)_{W\in\mathcal{A}}.$$

Veamos que g está bien definida. Si $\sum_j a_j [V_j] + E = \sum_j b_j [V_j] + E$ (sin pérdida de generalidad podemos suponer que los sumandos son los mismos aunque algunos coeficientes sean cero), entonces $\sum_j a_j [V_j] - \sum_j b_j [V_j] = \sum_k c_k ([V'_k] + [U_k] - [V'_k \oplus U_k]) \in E$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_j a_j n_{W,j}\right)_{W\in\mathcal{A}} - \left(\sum_j b_j n_{W,j}\right)_{W\in\mathcal{A}} &= g\left(\sum_j (a_j - b_j)[V_j] + E\right) \\
&= g\left(\sum_k c_k ([V'_k] + [U_k] - [V'_k \oplus U_k]) + E\right) \\
&= \left(\sum_k c_k \left(n'_{W,k} + m'_{W,k} - \left(n'_{W,k} + m'_{W,k}\right)\right)\right)_{W\in\mathcal{A}} \qquad (4.3.1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

((4.3.1) se debe a que $g([V'_k \oplus U_k] + E)_W$ es la multiplicidad de W en $V'_k \oplus U_k$, y ésta es la suma de las multiplicidades de W en V'_k y U_k). Así, g está bien definida. Mostremos que f y g son inversos. Si $\sum_j a_j [V_j] + E \in R(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
f \circ g\left(\sum_j a_j [V_j] + E\right) &= f\left(\left(\sum_j a_j n_{i,j}\right)_{W\in\mathcal{A}}\right) \\
&= \sum_{W\in\mathcal{A}} \sum_j a_j n_{W,j} [W] + E \\
&= \sum_{W\in\mathcal{A}} \sum_j a_j [W^{n_{W,j}}] + E \\
&= \sum_j a_j \left[\bigoplus_{W\in\mathcal{A}} W^{n_{W,j}}\right] + E \\
&= \sum_j a_j [V_j] + E;
\end{aligned}$$

si $(a_W)_{W\in\mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{A}|}$, entonces

$$g\circ f\left((a_W)_{W\in\mathcal{A}}\right) = g\left(\sum_{W\in\mathcal{A}} a_W\,[W] + E\right) = (a_W)_{W\in\mathcal{A}}.$$

Concluimos que f es un isomorfismo, lo que implica que $R(G)$ es libre con base $\{[W]+E \mid W\in\mathcal{A}\}$ $\square$

En adelante consideraremos $R(G)$ como el grupo abeliano libre con base las clases de isomorfismo de las representaciones irreducibles de G. Si $V\in repG$ y $V\cong \bigoplus_{W\in\mathcal{A}} W^{n_W}$, la identificaremos con $\sum_{W\in\mathcal{A}} n_W\,[W]\in R(G)$ y en algunos casos, para facilitar la notación, también la denotaremos con $[V]$.

A través del producto tensorial podemos asignar a $R(G)$ estructura de anillo conmutativo con uno. Si $\sum_i b_i\,[W_i]\,,\sum_i a_i\,[W_i]\in R(G)$, definimos $\left(\sum_i b_i\,[W_i]\right)\cdot\left(\sum_i a_i\,[W_i]\right) = \sum_{i,j} b_j a_i\,([W_i\otimes W_j])$. De la conmutatividad y asociatividad del producto tensorial[2] se sigue la conmutatividad y asociatividad de esta operación; es claro que el neutro de esta operación es la representación trivial y la distributividad se sigue de la misma definición.

La Proposición 1.36 implica de forma clara el siguiente resultado.

Corolario 4.33. *Si χ_W es el caracter de W, entonces la función $\chi : R(G)\to Cl_{\mathbb{C}}(G)$ definida en las clases de irreducibles mediante $\chi([W]) = \chi_W$ es un morfismo de anillos.*

Observación 4.34. Si G y H son grupos finitos y $F:\mathrm{rep}G\to\mathrm{rep}H$ es un *funtor aditivo*, es decir, un funtor que satisface que $F(V\oplus W)\cong F(V)\oplus F(W)$ y $F(f+g) = F(f)+F(g)$ para cualesquiera $V,W\in\mathrm{rep}G$ cualesquiera morfismos f y g, entonces F define un morfismo de grupos abelianos de $R(G)$ a $R(H)$, definido en las clases de representaciones irreducibles de la siguiente manera $[V]\mapsto[F(V)]$.

Si tenemos dos grupos G y H , $(\rho,V)\in\mathrm{Rep}G$, $(\pi,W)\in\mathrm{Rep}H$ y definimos $\rho\boxtimes\pi : G\times H\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V\otimes W)$ como $\rho\boxtimes\pi(g,h) = \rho(g)\otimes\pi(h)$, entonces $(\rho\boxtimes\pi, V\otimes W)\in\mathrm{Rep}(G\times H)$. Denotaremos a esta representación de $G\times H$ con $V\boxtimes W$.

Nota: Esta notación se adopta para evitar confundir $V\boxtimes W$ con la representación $V\otimes W$, donde V y W son representaciones del mismo grupo.

Proposición 4.35. *Si $V\in\mathrm{rep}G$ y $W\in\mathrm{rep}H$ son irreducibles entonces $V\boxtimes W$ es irreducible.*

Demostración. Sean χ_V y χ_W los caracteres de V y W respectivamente. Por la Proposición 1.29, si χ es el caracter de $V\boxtimes W$, entonces $\chi(g,h) = \chi_V(g)\,\chi_W(h)$ para cada $(g,h)\in G\times H$. Como V y W son irreducibles, satisfacen que $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\chi_V(g))^2 = 1 = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}(\chi_W(h))^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\chi_V(g))^2\right)\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}(\chi_W(h))^2\\
&= \frac{1}{|H|\,|G|}\sum_{h\in H}\sum_{g\in G}(\chi_W(h))^2(\chi_V(g))^2\\
&= \frac{1}{|G\times H|}\sum_{(g,h)\in G\times H}(\chi(g,h))^2,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. $\square$

[2]Aunque no demostramos que el producto tensorial sobre $\mathbb{C}$ satisface las propiedades mencionadas al pensar a los espacios como representaciones, no es difícil verificarlas utilizando caracteres.

PROPOSICIÓN 4.36. *Si* $\{\chi_i \mid i \in [1,n]\}$ *y* $\{\chi_j \mid j \in [1,m]\}$ *son los caracteres irreducibles de* G *y de* H *respectivamente, y denotamos con* $\chi_{i,j}$ *a la función de clase de* $G \times H$ *en* $\mathbb{C}$ *tal que* $\chi_{i,j}(g,h) = \chi_i(g)\chi_j(h)$ *para cada* $(g,h) \in G \times H$, *entonces* $\{\chi_{i,j} \mid i \in [1,n] \text{ y } j \in [1,m]\}$ *es base ortonormal de* $Cl_{\mathbb{C}}(G \times H)$.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior basta demostrar que $\{\chi_{i,j} \mid i \in [1,n] \text{ y } j \in [1,m]\}$ es base de $Cl_{\mathbb{C}}(G \times H)$ y para eso procederemos de manera análoga a la demostración del Teorema 1.49 y haremos uso de él. Sea $\chi \in Cl_{\mathbb{C}}(G \times H)$ tal que $\langle \chi, \chi_{i,j} \rangle = 0$ para cualesquiera $i \in [1,n]$ y $j \in [1,m]$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \chi(g,h) \overline{\chi_{i,j}(g,h)} \\ &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \chi(g,h) \overline{\chi_i(g)\chi_j(h)} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g,h) \overline{\chi_i(g)} \right) \overline{\chi_j(h)} \end{aligned}$$

para cada i. Obsérvese que $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g,\cdot)\overline{\chi_i(g)} \in Cl_{\mathbb{C}}(H)$, pues $\left(g, h_0 h h_0^{-1}\right) = (e_G, h_0)(g,h)(e_G,h_0)^{-1}$. El Teorema 1.49 implica que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g,h) \overline{\chi_i(g)} = 0 \tag{4.3.2}$$

para toda $h \in H$ y toda i. De un argumento análogo al anterior, aplicado a la Ecuación (4.3.2), concluimos que $\chi(g,h) = 0$ para cualesquiera $h \in H$ y $g \in G$. □

Son inmediatos los siguientes resultados con los que terminamos este capítulo.

COROLARIO 4.37. *Si* $U \in \mathrm{rep}(G \times H)$ *es irreducible, entonces existen* $V \in \mathrm{rep}G$ *y* $W \in \mathrm{rep}H$ *irreducibles tales que* $U \cong V \boxtimes W$ *en* $\mathrm{rep}(G \times H)$.

COROLARIO 4.38. *Las funciones* $\Gamma : R(G \times H) \to R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} R(H)$ *y* $\Theta : R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} R(H) \to R(G \times H)$ *definidas en las clases de irreducibles mediante* $\Gamma([U]) = [V] \otimes [W]$ *y* $\Theta([V] \otimes [W]) = [V \boxtimes W]$, *donde* $U \cong V \boxtimes W$, *son isomorfismos de grupos abelianos mutuamente inversos.*

Capítulo 5

El anillo $R(S)$

Terminamos con este capítulo en el que estudiaremos un anillo particular relacionado con el grupo simétrico. La referencia para este capítulo será [**11**]. Comenzamos con una sencilla observación:

Sean $n \in \mathbb{N}$ y S_n el grupo de permutaciones de n elementos. Para $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $k + l = n$ definamos $\iota : S_k \times S_l \to S_n$ mediante la regla

$$\iota(\sigma, \tau)(a) = \begin{cases} \sigma(a) & \text{si } a \leq k; \\ k + \tau(a-k) & \text{si } k < a. \end{cases}$$

para cada $\sigma \in S_k$ y $\tau \in S_l$. Es claro que para cada $\sigma \in S_k$ y $\tau \in S_l$, $\iota(\sigma, \tau) \in S_n$. Más aún. ι es monomorfismo de grupos: la inyectividad es clara, y si $\sigma, \gamma \in S_k$ y $\tau, \pi \in S_l$, entonces

$$\iota(\sigma\gamma, \tau\pi)(a) = \sigma\gamma(a) = \iota(\sigma, \tau)\, \iota(\gamma, \pi)(a)$$

para $a \leq k$, mientras que

$$\iota(\sigma, \tau)\, \iota(\gamma, \pi)(a) = \iota(\sigma, \tau)(k + \pi(a-k)) = k + \tau\pi(a-k) = \iota(\sigma\gamma, \tau\pi)(a)$$

para $a > k$. De este modo, la función ι es un isomorfismo de grupos sobre su imagen. Escribiremos $S_k \times S_l := \iota(S_k \times S_l)$ y $(\sigma, \tau) := \iota(\sigma, \tau)$. Con esta convención, los funtores

$$\mathrm{Ind}_{S_k \times S_l}^{S_n} : \mathrm{rep}(S_k \times S_l) \to \mathrm{rep} S_n$$

y

$$\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} : \mathrm{rep} S_n \to \mathrm{rep}(S_k \times S_l)$$

están bien definidos. Como mostramos en la Sección 2.1, estos funtores son aditivos y, por los Corolarios 4.37 y 4.38 tenemos morfismos de grupos abelianos

$$I_{k,l}^n : R(S_k) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_l) \to R(S_n)$$

y

$$R_{k,l}^n : R(S_n) \to R(S_k) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_l)$$

definidos en las clases de irreducibles a través de la regla

$$I_{k,l}^n([V] \otimes [W]) = \left[\mathrm{Ind}_{S_k \times S_l}^{S_n}(\Theta([V] \otimes [W]))\right] = \left[\mathrm{Ind}_{S_k \times S_l}^{S_n}(V \boxtimes W)\right]$$

y

$$R_{k,l}^n([V]) = \Gamma\left(\left[\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n}(V)\right]\right).$$

Consideraremos el grupo abeliano $R(S) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R(S_n)$. En la Sección 4.3 dotamos a cada grupo de Grothendieck $R(S_n)$ de estructura de anillo utilizando el producto tensorial de representaciones por lo que $R(S)$ es un anillo con la suma y el producto defnidos coordenada a coordenada. Sin embargo, no consideraremos esta estructura.

Como para cada $n,k,l\in\mathbb{N}$ tales que $n=k+l$ están definido los morfismos $I^n_{k,l}$ y $R^n_{k,l}$, por la propiedad universal de la suma, existen morfismos $\mu : R(S)\otimes R(S)\to R(S)$ y $\Delta : R(S)\to R(S)\otimes R(S)$ tales que

$$\mu\downharpoonright_{R(S_k)\otimes R(S_l)}=I^{k+l}_{k,l}$$

y

$$\Delta\downharpoonright_{R(S_n)}=\sum_{k+l=n}R^n_{k,l}.$$

Nótese que $R(S_0)\cong\mathbb{Z}$, ya que S_0 es el grupo de permutaciones del vacío, es decir, S_0 es trivial; además, si $[\mathbb{C}_0]$ denota a la clase de la representación trivial de S_0, entonces $R(S_0)$ es libre con base $\{[\mathbb{C}_0]\}$. Denotemos con η_0 al isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y $R(S_0)$ definido mediante $1\longmapsto[\mathbb{C}_0]$, con ε_0 a su inverso, con ι_0 a la inclusión de $R(S_0)$ en $R(S)$ y con π_0 a la proyección del último en el primero. Definamos

$$\eta:\mathbb{Z}\to R(S)$$

y

$$\varepsilon : R(S)\to\mathbb{Z}$$

como las composiciones $\eta=\eta_0\circ\iota_0$ y $\varepsilon=\pi_0\circ\varepsilon_0$.

Demostraremos que $(R(S),\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ es un álgebra de Zelevinsky y que de hecho tiene antípoda; es decir, que es un álgebra de Hopf. Por el Teorema 4.29, para mostrar que es un álgebra de Zelevinsky es suficiente mostrar que es una casi-álgebra de Zelevinsky.

Hagamos algunas observaciones:

Observación 5.1. Por la manera en que definimos μ, Δ, ε y η, se cumple:

$$\mu(R(S_n)\otimes_{\mathbb{Z}}R(S_m))\subseteq R(S_{n+m}),$$
$$\eta(\mathbb{Z})\subseteq R(S_0),$$
$$\Delta(R(S_n))\subseteq\bigoplus_{k+l=n}R(S_k)\otimes R(S_l),$$
$$\varepsilon(R(S_n))=0$$

para cada $n>0$, y ε_0 y η_0 son inversos uno del otro.

Observación 5.2. Si consideramos cada $R(S_n)$ un grupo con base, definiendo $\Omega(R(S_n))$ como el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de dimensión finita de S_n, entonces $(R(S_n))^+$ es el conjunto de clases de isomorfismo de repS_n. Lo anterior implica que

$$I^n_{k,l}([V]\otimes[W])=\left[\mathrm{Ind}^{S_n}_{S_k\times S_l}(V\boxtimes W)\right]\in(R(S_n))^+$$

y

$$R^n_{k,l}([U])=\Gamma\left(\left[\mathrm{Res}^{S_n}_{S_k\times S_l}(U)\right]\right)\in(R(S_k)\otimes_{\mathbb{Z}}R(S_l))^+$$

para cualesquiera $k,l,n\in\mathbb{N}$ tales que $k+l=n$, $[V]\otimes[W]\in(R(S_k)\otimes_{\mathbb{Z}}R(S_l))^+$ y $[U]\in(R(S_n))^+$. Además, si $\sum_{i=0}^{n}z_ir_i\in(R(S))^+$, donde $r_i\in R(S_i)$, entonces es claro que $r_i\in(R(S_i))^+$; de manera análoga, si $\sum_{i,j}z_{i,j}r_{i,j}\in(R(S)\otimes R(S))^+$ con $r_{i,j}\in R(S_i)\otimes R(S_j)$, entonces $r_{i,j}\in(R(S_i)\otimes R(S_j))^+$. De todo esto podemos concluir que μ, Δ, ε y η son morfismos positivos, ya que

$$\mu\left(\sum_{i,j}z_{i,j}r_{i,j}\right)=\sum_{i,j}z_{i,j}\mu(r_{i,j})=\sum_{i,j}z_{i,j}I^{i+j}_{i,j}(r_{i,j}),$$

$$\Delta\left(\sum_{i=0}^{n} z_i r_i\right) = \sum_{i=0}^{n} z_i \Delta(r_i) = \sum_{i=0}^{n} z_i \sum_{k+l=i} R^i_{k,l}(r_i),$$
$$\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{n} z_i r_i\right) = \sum_{i=0}^{n} z_i \varepsilon(r_i) = z_0 n_0,$$

donde $r_0 = n_0[\mathbb{C}_0]$, y para cada $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\eta(n) = n[\mathbb{C}_0].$$

Observación 5.3. Para $[W],[U] \in \Omega(R(S_n))$, por el Lema de Schur, el producto interior (en $R(S_n)$) de $[W]$ con $[U]$ coincide con el producto interior de caracteres definido en la Sección 1.6, es decir, $\langle [W],[U]\rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[S_n]}(W,U)$. Por tanto, Reciprocidad de Frobenius significa (por linealidad) que μ y Δ son adjuntos respecto al producto interior de $R(S)$ y $R(S) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S)$ como grupos con base. También ε y η son adjuntos con respecto al producto interior de $R(S)$ y $\mathbb{Z}$, ya que $\langle 1, \varepsilon([\mathbb{C}_0])\rangle = \langle 1,1\rangle = \langle [\mathbb{C}_0],[\mathbb{C}_0]\rangle = \langle \eta(1),[\mathbb{C}_0]\rangle$.

Observación 5.4. De la Observación 5.1 podemos deducir que si $[W] \in \Omega(R(S_n))$, $[V] \in \Omega(R(S_m))$ y $n+m \neq 0$, entonces $(\varepsilon\circ\mu)([W]\otimes[V]) = 0 = \varepsilon([W])\varepsilon([V])$. Si $n=m=0$, es decir, si $[W]=[V]=[\mathbb{C}_0]$, entonces $(\varepsilon\circ\mu)([W]\otimes[V]) = \varepsilon\left(\left[\mathrm{Ind}_{S_0}^{S_0}(W \boxtimes V)\right]\right) = \varepsilon([\mathbb{C}_0]) = \varepsilon([\mathbb{C}_0])\varepsilon([\mathbb{C}_0])$. Por tanto

$$\varepsilon\circ\mu = \varepsilon\varepsilon.$$

Además

$$(\Delta\circ\eta)(1) = \Delta([\mathbb{C}_0]) = \Gamma\left(\left[\mathrm{Res}_{S_0}^{S_0}(\mathbb{C}_0)\right]\right) = [\mathbb{C}_0]\otimes[\mathbb{C}_0] = \eta(1)\otimes\eta(1)$$

y

$$\varepsilon\circ\eta(1) = 1 = \eta_{\mathbb{Z}}(1).$$

En vista de las Observaciones 5.1-5.4, si demostramos que $\Delta\circ\mu = (\mu\otimes\mu)\circ(Id\otimes T\otimes Id)\circ(\Delta\otimes\Delta)$, entonces tendremos que $R(S)$ es una casi-álgebra de Zelevinsky.

Notemos que si $[W] \in \Omega(R(S_{k'})\otimes R(S_{l'}))$, entonces

$$\Delta(\mu([W])) = \sum_{k+l=k'+l'} \Gamma\left[\mathrm{Res}_{S_k\times S_l}^{S_{k'+l'}}\left(\mathrm{Ind}_{S_{k'}\times S_{l'}}^{S_{k'+l'}}(W)\right)\right],$$

por lo que es de esperarse que la Fórmula de Restricción de Mackey juegue un papel muy importante para mostrar que $\Delta\circ\mu = (\mu\otimes\mu)\circ(Id\otimes T\otimes Id)\circ(\Delta\otimes\Delta)$.

Para mostrar que Δ es morfismo de álgebras necesitamos diversos resultados.

Definición 5.5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una *composición débil* $\boldsymbol{c}$ de n es una sucesión $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ tal que $c_i \in \mathbb{N}$ y $\sum_i c_i = n$

En la Definición 3.1 se introdujo el concepto de partición. Éste difiere del concepto de composición débil, pues la Definición 5.8 no pide que la sucesión $\boldsymbol{c}$ esté ordenada.

Si $\boldsymbol{c}$ es una composición débil de n entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $c_i = 0$ para cada $i > r$, pues $\sum_i c_i = n$. Así, escribiremos $\boldsymbol{c} = (c_1,\ldots,c_r)$.

Definición 5.6. Sea $\boldsymbol{c} = (c_1,\ldots,c_r)$ una composición débil de n. El *diagrama débil* d de $\boldsymbol{c}$ es el conjunto de parejas $d = \{(i,l) \mid i\in[1,r] \text{ y } l\in[1,c_i]\}$.

Definición 5.7. Sea $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_r)$ una composición débil de n. Una *tabla débil* γ de $\boldsymbol{c}$ es una función biyectiva $\gamma : d \to [1, n]$, donde d es el diagrama débil de $\boldsymbol{c}$.[1]

Como en el Capítulo 3, si $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_r)$ es una composición débil de n y γ una tabla débil de $\boldsymbol{c}$, definimos $R(\gamma) = \{p \in S_n \mid p(\gamma(i,l)) = \gamma(i,l') \text{ para cada } i \in [1,r]\}$.

Teorema 5.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ son composiciones débiles de n y α y β tablas débiles de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ respectivamente, tales que $\alpha(k,l) = l + \sum_{i<k} a_i$ y $\beta(k,l) = l + \sum_{j<k} b_j$, entonces las órbitas de S_n bajo la acción de $R(\beta) \times R(\alpha)$ están parametrizadas por matrices $M = [M_{ij}]$ con $i[1,r]$, $j \in [1,s]$ y $M_{ij} \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=1}^{r} M_{ij} = b_j$ y $\sum_{j=1}^{s} M_{ij} = a_i$: definimos la órbita asociada a M como*

$$\mathcal{O}_M := \{\sigma \in S_n \mid \text{ para } M_{ij}, \text{ tenemos que } M_{ij} = |\sigma(A_i) \cap B_j|\},$$

donde $A_i = \{\alpha(i,l) \mid l \in [1, a_i]\}$ y $B_j = \{\beta(j,l) \mid l \in [1, b_j]\}$.

Demostración. Si $\sigma \in S_n$ y $(\rho, \gamma) \in R(\beta) \times R(\alpha)$, entonces para cada i y j tenemos que

$$(\rho,\gamma)\,\sigma(A_i) \cap B_j = \rho\sigma\gamma^{-1}(A_i) \cap B_j = \rho\sigma(A_i) \cap B_j = \rho\left(\sigma(A_i) \cap \rho^{-1}B_j\right) = \rho\left(\sigma(A_i) \cap B_j\right),$$

ya que A_i y B_j son los renglones i y j de α y β respectivamente. Por lo tanto, $|(\rho,\gamma)\,\sigma(A_i) \cap B_j| = |\rho(\sigma(A_i) \cap B_j)| = |\sigma(A_i) \cap B_j|$, es decir, $\mathcal{O}(\sigma) \subseteq \mathcal{O}_M$ si definimos $M_{ij} = |\sigma(A_i) \cap B_j|$ (de la definición de A_i y B_j y la biyectividad de σ se sigue que $\sum_{i=1}^{r} M_{ij} = b_j$ y $\sum_{j=1}^{s} M_{ij} = a_i$). Para mostrar la contención $\mathcal{O}_M \subseteq \mathcal{O}(\sigma)$ es suficiente probar que si $\sigma, \tau \in S_n$ satisfacen que $|\sigma(A_i) \cap B_j| = |\tau(A_i) \cap B_j|$ para toda i y toda j, entonces $\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}(\tau)$. Supongamos que $\sigma, \tau \in S_n$ cumplen que $|\sigma(A_i) \cap B_j| = |\tau(A_i) \cap B_j|$ para cualesquiera i y j. Entonces $|\{l \mid \sigma(\alpha(i,l)) \in B_j\}| = |\{l \mid \tau(\alpha(i,l)) \in B_j\}|$, de manera que existe una biyección $\varphi_{ij} : \{l \mid \sigma(\alpha(i,l)) \in B_j\} \to \{l \mid \tau(\alpha(i,l)) \in B_j\}$ tal que $\varphi_{ij}(l) = l$ para cada $l \in \{l \mid \sigma(\alpha(i,l)) \in B_j\} \cap \{l \mid \tau(\alpha(i,l)) \in B_j\}$. Definamos $p_{ij} \in S_n$ mediante

$$p_{ij}(\alpha(k,l)) = \begin{cases} \alpha(i, \varphi_{ij}(l)) & \text{si } k = i \text{ y } \sigma(\alpha(i,l)) \in B_j; \\ \alpha(k,l) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $p_{ij} \in R(\alpha)$. Como $|\sigma(A_i) \cap B_j| = |\tau(A_i) \cap B_j|$, entonces existe $\psi_{ij} : \{l \mid \beta(j,l) \in \tau(A_i)\} \to \{l \mid \beta(j,l) \in \sigma(A_i)\}$ biyectiva tal que $\beta(j, \psi_{ij}(l_0)) = \sigma(\alpha(i,l))$ si $\beta(j,l_0) = \tau(\alpha(i, \varphi_{ij}(l)))$. Definamos $\pi_{ij} \in S_n$ a través de la regla

$$\pi_{ij}(\beta(k,l_0)) = \begin{cases} \beta(j, \psi_{ij}(l_0)) & \text{si } k = i \text{ y } \beta(j,l_0) \in \tau(A_i); \\ \beta(k,l_0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $\pi_{ij} \in R(\beta)$. Hemos definido p_{ij} yπ_{ij} para cada i y cada j, así que

$$\left(\prod_{i,j}\pi_{ij}\right)\tau\left(\prod_{i,j}p_{ij}\right)(\alpha(k,l)) = \left(\prod_{i,j}\pi_{ij}\right)\tau\left(p_{kj_0}(\alpha(k,l))\right) = \left(\prod_{i,j}\pi_{ij}\right)\tau\left(\alpha(k, \varphi_{k,j_0}(l))\right) =$$

$$= \pi_{kj_0}\left(\tau\left(\alpha(k, \varphi_{k,j_0}(l))\right)\right) = \sigma(\alpha(k,l)),$$

es decir $\left(\prod_{i,j}\pi_{ij}\right)\tau\left(\prod_{i,j}p_{ij}\right) = \sigma$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}(\tau)$. $\square$

[1]En [**7**] Richard Stanley define composición débil como se hizo aquí; sin embargo no utiliza las nociones de diagrama débil ni tabla débil. Introdujimos las Definiciones 5.6 y 5.7 sólo para diferenciarlas de las correspondientes para particiones que Stanley utiliza para referirse a *Diagrama de Young* y *Tabla estándar*.

Gracias a este resultado podemos elegir de forma conveniente un conjunto completo de representantes de las órbitas de S_n bajo la acción de $R(\beta) \times R(\alpha)$. Bajo las hipótesis del Teorema 5.8, tomemos $M = [M_{ij}]$ y notemos que si fijamos i_0, para cada $l \in [1, a_{i_0}]$ existen únicos b y j_o tales que $b \in [1, M_{i_0 j_0}]$ y $l = \sum_{j<j_0} M_{i_0 j} + b$, ya que $a_{i_0} = \sum_{j=1}^{s} M_{i_0 j}$. Por esto, podemos escribir $\alpha(i_o, l) = \sum_{i<i_o} a_i + \sum_{j<j_0} M_{i_0 j} + b$. Definamos $\sigma_M \in S_n$ como

$$\sigma_M(\alpha(i_0, l)) = \sum_{j<j_0} b_j + \sum_{i<i_0} M_{ij_0} + b.$$

Es claro que $\sum_{i<i_0} M_{ij_0} + b \in [1, b_{j_0}]$, por lo que $\sigma_M(\alpha(i_0, l)) = \beta\left(j_0, \sum_{i<i_0} M_{ij_0} + b\right)$; como trabajaremos con el inverso de σ_M, para ver que $\sigma_M \in S_n$, mostraremos que σ_M es suprayectiva. Para cada j_0 y $l \in [1, b_{j_0}]$ existen únicos b e i_0 tales que $b \in [1, M_{i_0 j_0}]$ y $l = \sum_{i<i_0} M_{ij_0} + b$, por lo tanto, $\beta(j_0, l) = \sum_{j<j_0} b_j + \sum_{i<i_0} M_{ij_0} + b$ y $\sigma_M\left(\alpha\left(i_0, \sum_{j<j_0} M_{i_0 j} + b\right)\right) = \beta(j_0, l)$, es decir, $\sigma_M^{-1}(\beta(j_0, l)) = \sum_{i<i_o} a_i + \sum_{j<j_0} M_{i_0 j} + b$. Notemos que $\sigma_M \in \mathcal{O}_M$, pues $\sigma_M(\alpha(i_0, l)) \in B_{j_0}$ si y sólo si existe b tal que $b \in [1, M_{i_0 j_0}]$ y $l = \sum_{j<j_0} M_{i_0 j} + b$, es decir $|\sigma_M(A_{i_0}) \cap B_{j_0}| = M_{i_0 j_0}$ para cualesquiera i_0 y j_0.

En vista de lo anterior, como representante de cada órbita $\mathcal{O}_M$ de S_n elegiremos a σ_M. Queremos calcular $\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_{k'+l'}} \circ \mathrm{Ind}_{S_{k'} \times S_{l'}}^{S_{k'+l'}}$, así que estudiaremos los subgrupos y funtores necesarios en la Fórmula de Restricción de Mackey en este caso. Consideremos $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) = (k, l)$ y $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) = (k', l')$ composiciones débiles de n, α y β tablas débiles de ellas como en el Teorema 5.8.

Proposición 5.9. *Se cumplen las igualdades:* $R(\alpha) = S_{k'} \times S_{l'}$ *y* $R(\beta) = S_k \times S_l$.

Demostración. Si $p \in R(\beta)$, entonces la definición de α implica que $p(a) \leq k$ si y sólo si $a \leq k$. Por tanto podemos definir $p_2 \in S_l$ a través de la regla $p_2(a) = p(a+k) - k$ y $p_1 \in S_k$ mediante $p_1(a) = p(a)$. De este modo, $p = (p_1, p_2) \in S_k \times S_l$, es decir, $R(\beta) \subseteq S_k \times S_l$. La contención $S_k \times S_l \subseteq R(\beta)$ es clara y análogamente se demuestra la igualdad $R(\alpha) = S_{k'} \times S_{l'}$. □

De acuerdo con el Teorema 5.8, las órbitas de S_n bajo la acción de $(S_k \times S_l) \times (S_{k'} \times S_{l'})$ están parametrizadas por matrices $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ tales que $M_{ij} \in \mathbb{N}$, $k = M_{11} + M_{21}$, $l = M_{12} + M_{22}$, $k' = M_{11} + M_{12}$ y $l' = M_{21} + M_{22}$. Además

$$\sigma_M(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq M_{11}; \\ k + b & \text{si } a = M_{11} + b \text{ y } b \in [1, M_{12}]; \\ M_{11} + b & \text{si } a = k' + b \text{ y } b \in [1, M_{21;}] \\ k + M_{12} + b = a & \text{si } a = k' + M_{21} + b \text{ y } b \in [1, M_{22}]; \end{cases}$$

y

$$\sigma_M^{-1}(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq M_{11}; \\ k' + b & \text{si } a = M_{11} + b \text{ y } b \in [1, M_{21}]; \\ M_{11} + b & \text{si } a = k + b \text{ y } b \in [1, M_{12}]; \\ k' + M_{21} + b = a & \text{si } a = k + M_{12} + b \text{ y } b \in [1, M_{22}]. \end{cases}$$

En adelante, M denotará alguna de estas matrices.

Lema 5.10. *Para cada* M *se satisface que* $R(\alpha) \cap \sigma_M^{-1} R(\beta) \sigma_M = S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}$.

Demostración. Debido a que $k' = M_{11} + M_{12}$ y $l' = M_{21} + M_{22}$, el producto $S_{M_{11}} \times S_{M_{12}}$ es un subgrupo de $S_{k'}$ y $S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}$ lo es de $S_{l'}$. Por la Proposición 5.9, tenemos que

$$S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}} \subseteq R(\alpha).$$

Para mostrar que

$$S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}} \subseteq R(\alpha) \cap \sigma_M^{-1} R(\beta) \sigma_M,$$

probaremos que

$$S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}} \subseteq \sigma_M^{-1} R(\beta) \sigma_M.$$

Sean $\sigma \in S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}$ y $a \in [1, n]$.

Si $a \leq M_{11}$, entonces $\sigma_M^{-1}(a) = a$, pues $M_{11} \leq k = M_{11} + M_{21}$; por tanto, $\sigma\sigma_M^{-1}(a) = \sigma(a) \leq M_{11}$, así $\sigma_M \sigma(a) = \sigma(a)$, lo que implica que

$$\sigma_M \sigma \sigma_M^{-1}(a) = \sigma(a) \leq M_{11} \leq k.$$

Si $M_{11} < a = M_{11} + b$ con $b \in [1, M_{21}]$, entonces $\sigma_M^{-1}(a) = k' + b$ y $k' < \sigma_M^{-1}(a) \leq k' + M_{21}$. Ya que, $k' < \sigma\sigma_M^{-1}(a) \leq k' + M_{21}$, concluimos que

$$\sigma_M \sigma \sigma_M^{-1}(a) \leq k.$$

En suma, si $a \in [1, k]$, entonces $\sigma_M \sigma \sigma_M^{-1}(a) \leq k$ y, dado que $\sigma_M \sigma \sigma_M^{-1}$ es biyectiva, deducimos que $\sigma_M \sigma \sigma_M^{-1}(a) > k$ si $a > k$. Por lo tanto, $\sigma_M \sigma \sigma_M^{-1} \in R(\beta)$, es decir, $\sigma \in \sigma_M R(\beta) \sigma_M^{-1}$. Hemos probado que $S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}} \subseteq \sigma_M^{-1} R(\beta) \sigma_M$.

Veamos la contención $R(\alpha) \cap \sigma_M^{-1} R(\beta) \sigma_M \subseteq S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}$.

Considérese $\sigma \in R(\alpha) \cap \sigma_M^{-1} R(\beta) \sigma_M$ y $a \in [1, n]$. Por la Proposición 5.9 existen $(\rho', \tau') \in S_{k'} \times S_{l'}$ y $(\rho, \tau) \in S_k \times S_l$ tales que

$$\sigma = (\rho', \tau') = \sigma_M^{-1}(\rho, \tau) \sigma_M.$$

Si $a \leq M_{11}$, entonces $\sigma_M(a) = a \leq M_{11}$ y por tanto

$$\sigma(a) = \rho'(a) = \sigma_M^{-1} \rho(a).$$

Supongamos que $\sigma(a) > M_{11}$, entonces existe $b \in [1, M_{12}]$ tal que $M_{11} < \sigma(a) = M_{11} + b$, pues $\sigma(a) = \rho'(a)$. Por tanto,

$$k \geq \rho(a) = \sigma_M \sigma(a) = k + b > k,$$

lo que es un absurdo; así que

$$\sigma(a) \leq M_{11}.$$

Si $M_{11} < a \leq M_{11} + M_{12} = k'$, por lo anterior y la biyectividad de σ, concluimos que $M_{11} < \sigma(a)$. Además, $\sigma(a) = \rho'(a) \leq k'$, lo que implica que $M_{11} < \sigma(a) \leq M_{11} + M_{12}$.

Si $M_{11} + M_{12} + M_{21} < a$, entonces, por la biyectividad de σ, se satisface que

$$k' < \sigma(a)$$

y

$$\sigma(a) = \sigma_M^{-1}(\tau(a - k) + k),$$

pues $M_{11} + M_{12} + M_{21} = k + M_{12}$ y $\sigma_M(a) = a$. Supongamos que $\sigma(a) = k' + b$ con $b \in [1, M_{21}]$. Entonces

$$k < \tau(a - k) + k = \sigma_M \sigma(a) = M_{11} + b \leq k,$$

por tanto

$$M_{11}+M_{12}+M_{21}<\sigma(a).$$

De la biyectividad de σ se sigue que si

$$M_{11}+M_{12}<a\leq M_{11}+M_{12}+M_{21},$$

entonces

$$M_{11}+M_{12}<\sigma(a)\leq M_{11}+M_{12}+M_{21}.$$

Por lo tanto, $\sigma\in S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}$ y así,

$$R(\alpha)\cap\sigma_M^{-1}R(\beta)\sigma_M=S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}$$

. □

LEMA 5.11. *Para cada M, se satisface la igualdad*

$$\sigma_M\left(S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}\right)\sigma_M^{-1}=S_{M_{11}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{22}}.$$

Más aún, si $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}$, *entonces* $\sigma_M(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\sigma_M^{-1}=(\alpha,\gamma,\beta,\delta)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $a\leq M_{11}$ o $M_{11}+M_{12}+M_{21}<a$, la definición de σ_M asegura que

$$a=\sigma_M^{-1}(a)=\sigma_M(a);$$

así que, para cada $\sigma\in S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}$ se cumple que si $a\leq M_{11}$, entonces $\sigma_M\sigma\sigma_M^{-1}(a)\leq M_{11}$ y si $M_{11}+M_{12}+M_{21}<a$, entonces $M_{11}+M_{12}+M_{21}<\sigma_M\sigma\sigma_M^{-1}(a)$. Así, por la biyectividad de σ_M, resta demostrar que si $M_{11}<a=M_{11}+b$ con $b\in[1,M_{21}]$, entonces $M_{11}<\sigma_M\sigma\sigma_M^{-1}(a)\leq M_{11}+M_{21}$ para toda $\sigma\in S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}$. Supongamos que $M_{11}<a=M_{11}+b$ con $b\in[1,M_{21}]$. Entonces

$$M_{11}+M_{12}<\sigma_M^{-1}(a)=k'+b\leq k'+M_{21},$$

por lo que

$$M_{11}+M_{12}<\sigma\sigma_M^{-1}(a)=k'+b'\leq k'+M_{21}$$

y, por último,

$$M_{11}<\sigma_M\sigma\sigma_M^{-1}(a)=M_{11}+b'\leq M_{11}+M_{21}.$$

Por tanto,

$$\sigma_M\left(S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}\right)\sigma_M^{-1}\subseteq S_{M_{11}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{22}}.$$

De manera análoga se demuestra que

$$S_{M_{11}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{22}}\subseteq\sigma_M\left(S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}\right)\sigma_M^{-1}.$$

Para mostrar la segunda afirmación del lema notemos que si $b\in[1,M_{21}]$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma_M(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\sigma_M^{-1}(M_{11}+b) &= \sigma_M(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(k'+b)\\ &= \sigma_M(\gamma(k'+b-k')+k')\\ &= M_{11}+\gamma(b)\end{aligned}$$

y

$$(\alpha,\gamma,\beta,\delta)(M_{11}+b)=\gamma(b)+M_{11}.$$

De forma similar se demuestra que para cada $b \in [1, M_{12}]$ se tiene que

$$\sigma_M(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\sigma_M^{-1}(k+b) = (\alpha,\gamma,\beta,\delta)(k+b).$$

$\square$

Siguiendo la notación de la Sección 2.2, la Fórmula de Restricción de Mackey asegura que

$$\operatorname{Res}^{S_{k'+l'}}_{S_k\times S_l}\circ\operatorname{Ind}^{S_{k'+l'}}_{S_{k'}\times S_{l'}}(W) = \bigoplus_M \operatorname{Ind}^{S_k\times S_l}_{(S_{k'}\times S_{l'})_{\sigma_M}}\circ \mathrm{F}_{\sigma_M}\circ\operatorname{Res}^{S_{k'}\times S_{l'}}_{\sigma_M^{-1}(S_{k'}\times S_{l'})_{\sigma_M}\sigma_M}(W) \tag{5.0.3}$$

para cualquier $W \in \operatorname{Rep}(S_{k'}\times S_{l'})$, donde para cada matriz M el funtor

$$\mathrm{F}_{\sigma_M}:\mathbb{C}\left[\sigma_M^{-1}(S_{k'}\times S_{l'})_{\sigma_M}\sigma_M\right]\text{-mód}\to\mathbb{C}\left[S_{k'}\times S_{l'}\right]\text{-mód}$$

está definido a través del isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\bar{f}_M:\mathbb{C}\left[S_{k'}\times S_{l'}\right]\to\mathbb{C}\left[\sigma_M^{-1}(S_{k'}\times S_{l'})_{\sigma_M}\sigma_M\right]$$

inducido por el isomorfismo de grupos

$$f_M: S_{k'}\times S_{l'}\to\sigma_M^{-1}(S_{k'}\times S_{l'})_{\sigma_M}\sigma_M,$$

dado por $f_M(\sigma) = \sigma_M^{-1}k\sigma_M$.

Gracias a los Lemas 5.11 y 5.10 podemos reescribir la Ecuación (5.0.3) como

$$\operatorname{Res}^{S_{k'+l'}}_{S_k\times S_l}\circ\operatorname{Ind}^{S_{k'+l'}}_{S_{k'}\times S_{l'}}(W) = \bigoplus_M \operatorname{Ind}^{S_k\times S_l}_{S_{M_{11}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{22}}}\circ \mathrm{F}_{\sigma_M}\circ\operatorname{Res}^{S_{k'}\times S_{l'}}_{S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}}(W).$$

En vista de esto, analizaremos los funtores $\operatorname{Ind}^{S_k\times S_l}_{S_{M_{11}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{22}}}$, F_{σ_M} y $\operatorname{Res}^{S_{k'}\times S_{l'}}_{S_{M_{11}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{22}}}$.

Se analizará primero $\operatorname{Ind}^{S_k\times S_l}_{S_{M_{11}}\times S_{M_{21}}\times S_{M_{12}}\times S_{M_{22}}}$. Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 5.12. *Si T es un anillo conmutativo, R y S son T-álgebras B es un R-R-bimódulo, A es un S-S-bimódulo, C es un R-módulo izquierdo y D es un S-módulo izquierdo; entonces*

$$(B\boxtimes_T A)\otimes_{R\otimes_T S}(C\boxtimes_T D)\cong(B\otimes_R C)\boxtimes_T(A\otimes_S D)$$

como $R\otimes_T S$-módulos izquierdos. Donde $B\boxtimes_T A$ denota a $B\otimes_T A$ con la acción de $R\otimes_T S$ definida de la misma manera en que lo hicimos para representaciones de grupos.

Demostración. Definamos

$$f_0:(B\times A)\times(C\times D)\to(B\otimes_R C)\boxtimes_T(A\otimes_S D)$$

mediante

$$f_0(b,a,c,d) = (b\otimes c)\otimes(a\otimes d).$$

Para cualesquiera $b,b'\in B$, $a,a'\in A$, $c\in C$, $d\in D$ y $t\in T$ se cumple que

$$\begin{aligned} f_0(b,ta,c,d) &= (b\otimes c)\otimes(ta\otimes d)\\ &= (b\otimes c)\otimes t(a\otimes d)\\ &= (b\otimes c)t\otimes(a\otimes d)\\ &= (tb\otimes c)\otimes(a\otimes d)\\ &= f_0(bt,a,c,d),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(b+b',a,c,d) &= (b+b'\otimes c)\otimes(a\otimes d) \\ &= ((b\otimes c)+(b'\otimes c))\otimes(a\otimes d) \\ &= (b\otimes c)\otimes(a\otimes d)+(b'\otimes c)\otimes(a\otimes d) \\ &= f_0(b,a,c,d)+f_0(b',a,c,d) \end{aligned}$$

y de manera análoga puede probarse que

$$f_0(b,a+a',c,d)=f_0(b,a,c,d)+f_0(b,a',c,d).$$

Así, existe una función $\bar{f}_0 : (B\boxtimes_T A)\times(C\times D)\to(B\otimes_R C)\boxtimes_T(A\otimes_S D)$ que es morfismo de grupos abelianos en la primera entrada y $\bar{f}_0((b\otimes a),c,d)=f_0(b,a,c,d)$. De manera análoga podemos mostrar que existe una única función

$$f_1 : (B\boxtimes_T A)\times(C\boxtimes_T D)\to(B\otimes_R C)\boxtimes_T(A\otimes_S D)$$

que es morfismo de grupos abelianos en cada entrada y

$$f_1((b\otimes a),(c\otimes d))=\bar{f}_0((b\otimes a),c,d).$$

En los tensores elementales de $B\otimes_T A$, $C\otimes_T D$ y $R\otimes_T S$ la función f_1 satisface que

$$\begin{aligned} f_1((b\otimes a)(r\otimes s),c\otimes d) &= f_1(br\otimes as,c\otimes d) \\ &= (br\otimes c)\otimes(as\otimes d) \\ &= (b\otimes rc)\otimes(a\otimes sd) \\ &= f_1(b\otimes a,rc\otimes sd) \\ &= f_1(b\otimes a,(r\otimes s)(c\otimes d)). \end{aligned}$$

Así que existe un único morfismo de grupos abelianos

$$f : (B\boxtimes_T A)\otimes_{R\otimes_T S}(C\boxtimes_T D)\to(B\otimes_R C)\boxtimes_T(A\otimes_S D)$$

tal que

$$f(b\otimes a\otimes c\otimes d)=f_1((b\otimes a),(c\otimes d))=\bar{f}_0((b\otimes a),c,d)=f_0(b,a,c,d).$$

Demostremos que f es el isomorfismo buscado demostrando que es invertible y que su inverso es morfimso de $R\otimes_T S$-módulos izquierdos. Definamos

$$g_0 : (B\times C)\times(A\times D)\to(B\boxtimes_T A)\otimes_{R\otimes_T S}(C\boxtimes_T D)$$

a través de la regla

$$g_0(b,c,a,d)=(b\otimes a)\otimes(c\otimes d).$$

Para $a\in A$, $d\in D$, $b,b'\in B$, $c,c'\in C$ y $r\in R$ tenemos que

$$\begin{aligned} g_0(br,c,a,d) &= (br\otimes a)\otimes(c\otimes d) \\ &= ((b\otimes a)(r\otimes 1_S))\otimes(c\otimes d) \\ &= (b\otimes a)\otimes((r\otimes 1_S)(c\otimes d)) \\ &= (b\otimes a)\otimes(rc\otimes d) \\ &= g_0(b,rc,a,d), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_0(b+b',c,a,d) &= (b+b'\otimes a)\otimes(c\otimes d)\\
&= ((b\otimes a)+(b'\otimes a))\otimes(c\otimes d)\\
&= (b\otimes a)\otimes(c\otimes d)+(b'\otimes a)\otimes(c\otimes d)\\
&= g_0(b,c,a,d)+g_0(b',c,a,d).
\end{aligned}
$$

De manera similar,

$$g_0(b,c+c',a,d)=g_0(b,c,a,d)+g_0(b,c+c',a,d).$$

La propiedad universal del producto tensorial asegura la existencia de una única función

$$\bar{g}_0:(B\otimes_R C)\times(A\times D)\to(B\boxtimes_T A)\otimes_{R\otimes_T S}(C\boxtimes_T D)$$

tal que $\bar{g}_0((b\otimes c),a,d)=g_0(b,c,a,d)$ y en la primera coordenada es morfismo de grupos abelianos. Análogamente obtenemos una función

$$g_1:(B\otimes_R C)\times(A\otimes_S D)\to(B\boxtimes_T A)\otimes_{R\otimes_T S}(C\boxtimes_T D)$$

que es morfismo de grupos en cada entrada y

$$g_1((b\otimes c),(a\otimes d))=g_0(b,c,a,d).$$

Además, en los tensores elementales de $B\otimes_R C$, $A\otimes_S D$ y para $t\in T$, la función g_1 se comporta de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
g_1((b\otimes c)t,a\otimes d) &= g_1(b\otimes ct,a\otimes d)\\
&= b\otimes a\otimes ct\otimes d\\
&= b\otimes a\otimes c\otimes td\\
&= b\otimes a\otimes c\otimes d\\
&= g_1(b\otimes c,a\otimes td)\\
&= g_1(b\otimes c,t(a\otimes d)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, existe un morfismo de grupos abelianos

$$g:(B\otimes_R C)\otimes_T(A\otimes_S D)\to(B\boxtimes_T A)\otimes_{R\otimes_T S}(C\boxtimes_T D)$$

tal que

$$g(b\otimes c\otimes a\otimes d)=g_1((b\otimes c),(a\otimes d))=g_0(b,c,a,d).$$

Es claro que f y g son inversos uno del otro por lo que resta mostrar que g es morfismo de $R\otimes_T S$-módulos. Si $b\otimes c\in B\otimes_R C$, $a\otimes d\in A\otimes_S D$ y $r\otimes s\in R\otimes_T S$, entonces

$$
\begin{aligned}
g((r\otimes s)((b\otimes c)\otimes(a\otimes d))) &= g((rb\otimes c)\otimes(sa\otimes d))\\
&= rb\otimes sa\otimes c\otimes d\\
&= (r\otimes s)(b\otimes a)\otimes(c\otimes d)\\
&= (r\otimes s)((b\otimes a)\otimes(c\otimes d))\\
&= (r\otimes s)\,g((b\otimes c)\otimes(a\otimes d)).
\end{aligned}
$$

Debido a que g se obtuvo por la propiedad universaldel tensor, concluimos que g es morfismo de $R\otimes_T S$-módulos izquierdos. $\square$

Observación 5.13. Notemos que si G y H son grupos, entonces $\phi : \mathbb{C}[G \times H] \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[H]$ definido en $G \times H$ mediante la regla $\phi(g,h) = g \otimes h$ es un morfismo de álgebras ya que $\phi(gg', hh') = gg' \otimes hh' = (g \otimes h)(g' \otimes h') = \phi(g,h)\phi(g',h')$. De hecho, ϕ es invertible y su inversa es también morfismo de álgebras, así que $\mathbb{C}[G \times H] \cong \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[H]$.

Para cualesquiera matriz $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ y $[U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X] \in \Omega(R(S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}))$ si escribimos $R = \mathbb{C}[S_{M_{11}} \times S_{M_{21}}]$, $S = \mathbb{C}[S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}]$ y $A = \mathbb{C}[S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}]$, entonces la definición de representación inducida nos dice que

$$\left[\mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_k \times S_l}(U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X)\right] = [\mathbb{C}[S_k \times S_l] \otimes_A (U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X)].$$

Por la Observación 5.13, podemos escribir

$$\left[\mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_k \times S_l}(U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X)\right] = [(\mathbb{C}[S_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_k]) \otimes_{R \otimes_{\mathbb{C}} S} ((U \boxtimes V) \boxtimes (W \boxtimes X))].$$

El Lema 5.12 asegura que

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_k \times S_l}(U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X)\right] &= [(\mathbb{C}[S_k] \otimes_R (U \boxtimes V)) \boxtimes (\mathbb{C}[S_l] \otimes_S (W \boxtimes X))] \\ &= \left[\left(\mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}}}^{S_k}(U \boxtimes V)\right) \boxtimes \left(\mathrm{Ind}_{S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_l}(W \boxtimes X)\right)\right].\end{aligned}$$

Hemos demostrado el siguiente corolario:

Corolario 5.14. *Para cada matriz M y cada $[U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X] \in \Omega(R(S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}))$, en $R(S)$ se tiene que*

$$\left[Ind_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_k \times S_l}(U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X)\right] = I_{M_{11},M_{21}}^{k}([U \boxtimes V]) \otimes I_{M_{12},M_{22}}^{l}([W \boxtimes X]).$$

Falta estudiar los funtores $\mathrm{Res}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}}^{S_{k'} \times S_{l'}}$ y F_{σ_M}. Como es claro que para todo $V \boxtimes W \in \Omega(R(S_{k'} \times S_{l'}))$ se satisface que

$$\left[\mathrm{Res}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}}^{S_{k'} \times S_{l'}}(V \boxtimes W)\right] = R_{M_{11},M_{12}}^{k'}([V]) \otimes R_{M_{21},M_{22}}^{l'}([W]),$$

comenzaremos a estudiar F_{σ_M}.

Proposición 5.15. *Para cada M, si $U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X \in \mathrm{rep}(S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}})$, entonces $F_{\sigma_M}(U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X) \cong U \boxtimes W \boxtimes V \boxtimes X$ en $\mathrm{rep}(S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}})$.*

Demostración. Dado que el espacio de la representación $F_{\sigma_M}(U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X)$ es $U \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} W \otimes_{\mathbb{C}} X$, basta demostrar que el isomorfismo canónico $\phi : U \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} W \otimes_{\mathbb{C}} X \to U \otimes_{\mathbb{C}} W \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} X$ definido mediante $\phi(u \otimes v \otimes w \otimes x) = u \otimes w \otimes v \otimes x$ es isomorfismo de representaciones. Por el Lema 5.11, para cada $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}$ y $u \otimes v \otimes w \otimes x \in U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X$, se cumple que

$$\begin{aligned}\phi((\alpha,\beta,\gamma,\delta) \cdot (u \otimes v \otimes w \otimes x)) &= \phi\left(\sigma_M^{-1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\sigma_M(u \otimes v \otimes w \otimes x)\right) \\ &= \phi((\alpha,\gamma,\beta,\delta)((u \otimes v \otimes w \otimes x))) \\ &= \phi(\alpha u \otimes \gamma v \otimes \beta w \otimes \delta x) \\ &= \alpha u \otimes \beta w \otimes \gamma v \otimes \delta x \\ &= (\alpha,\beta,\gamma,\delta)(u \otimes w \otimes v \otimes x) \\ &= (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\phi(u \otimes v \otimes w \otimes x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es isomorfismo de representaciones. $\square$

El siguiente corolario es inmediato.

Corolario 5.16. *Si*

$$F_M : R(S_{M_{11}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_{M_{12}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_{M_{21}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_{M_{22}}) \to R(S_{M_{11}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_{M_{21}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_{M_{12}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(S_{M_{22}})$$

denota al morfismo de grupos abelianos que define F_{σ_M}*, entonces*

$$F_M([U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X]) = \left(Id_{R(S)} \otimes T \otimes Id_{R(S)}\right)([U] \otimes [V] \otimes [W] \otimes [X])$$

para cada $[U \boxtimes V \boxtimes W \boxtimes X] \in \Omega(R(S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}))$.

Con todo lo realizado podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.17. *En* $R(S)$ *se satisface que* $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \left(Id_{R(S)} \otimes T \otimes Id_{R(S)}\right) \circ (\Delta \otimes \Delta)$.

Demostración. Por linealidad es suficiente mostrar que la igualdad se satisface para cualesquiera $[V], [W] \in \Omega(R(S))$. Para $[V], [W] \in \Omega(R(S))$ existen $k', l' \in \mathbb{N}$ tales que $[V] \in \Omega(R(S_{k'}))$ y $[W] \in \Omega(R(S_{l'}))$; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta(\mu([V] \otimes [W])) &= \Delta\left(I^{k'+l'}_{k',l'}([V] \otimes [W])\right) \\
&= \sum_{k+l=k'+l'} R^{k'+l'}_{k,l}\left(I^{k'+l'}_{k',l'}([V] \otimes [W])\right) \\
&= \sum_{k+l=k'+l'} \Gamma\left[\mathrm{Res}^{S_{k'+l'}}_{S_k \times S_l} \circ \mathrm{Ind}^{S_{k'+l'}}_{S_{k'} \times S_{l'}}(V \boxtimes W)\right] \\
&= \sum_{k+l=k'+l'} \left[\bigoplus_M \mathrm{Ind}^{S_k \times S_l}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}} \circ \mathrm{F}_{\sigma_M} \circ \mathrm{Res}^{S_{k'} \times S_{l'}}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}}(V \boxtimes W)\right] \\
&= \sum_{k+l=k'+l'} \sum_M \left(I^k_{M_{11},M_{21}} \otimes I^l_{M_{12},M_{22}}\right) \circ F_M \circ \left(R^{k'}_{M_{11},M_{12}} \otimes R^{l'}_{M_{21},M_{22}}\right)([V] \otimes [W]).
\end{aligned}$$

No hacemos explícito en la notación que cada M depende de k y l, podemos escribir la última suma como

$$\sum_{\substack{M_{11}+M_{12}=k' \\ M_{21}+M_{22}=l'}} \left(I^{M_{11}+M_{21}}_{M_{11},M_{21}} \otimes I^{M_{12}+M_{22}}_{M_{12},M_{22}}\right) \circ F_M \circ \left(R^{k'}_{M_{11},M_{12}} \otimes R^{l'}_{M_{21},M_{22}}\right)([V] \otimes [W]);$$

así que

$$\begin{aligned}
\Delta(\mu([V] \otimes [W])) &= \sum_{\substack{M_{11}+M_{12}=k' \\ M_{21}+M_{22}=l'}} \left(I^{M_{11}+M_{21}}_{M_{11},M_{21}} \otimes I^{M_{12}+M_{22}}_{M_{12},M_{22}}\right) \circ F_M \circ \left(R^{k'}_{M_{11},M_{12}} \otimes R^{l'}_{M_{21},M_{22}}\right)([V] \otimes [W]) \\
&= (\mu \otimes \mu) \circ \left(Id_{R(S)} \otimes T \otimes Id_{R(S)}\right)\left(\sum_{\substack{M_{11}+M_{12}=k' \\ M_{21}+M_{22}=l'}} R^{k'}_{M_{11},M_{12}} \otimes R^{l'}_{M_{21},M_{22}}\right)([V] \otimes [W]) \\
&= (\mu \otimes \mu) \circ \left(Id_{R(S)} \otimes T \otimes Id_{R(S)}\right) \circ (\Delta \otimes \Delta)([V] \otimes [W]).
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del Teorema 5.17. □

Tenemos en suma:

Teorema 5.18. $(R(S), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *es un álgebra de Zelevinsky.*

A continuación, construiremos una antípoda para $R(S)$, probando así, que $R(S)$ es un álgebra de Hopf.

Primero notemos que por la Proposición 4.24, para cada $[W] \in \Omega(R(S_n))$ con $n \neq 0$ se cumple que

$$\Delta([W]) = [W] \otimes [\mathbb{C}_0] + [\mathbb{C}_0] \otimes [W] + \Delta^+([W])$$

y además

$$\Delta^+([W]) = \sum_{\substack{i \neq 0,n \\ i+j=n}} r_{ij}$$

con $r_{ij} \in R(S_i) \otimes R(S_j)$. Por tanto, si $r_{ij} = \sum_{l=0}^{m_{ij}} a_l [W_{l,i}] \otimes [W_{l,j}]$ con $[W_{l,j}] \in \Omega(R(S_j))$ y $[W_{l,j}] \in \Omega(R(S_j))$, entonces $[W_{l,i}] \notin \Omega(R(S_n))$. De manera que, con respecto a la convolución en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R(S), R(S))$,

$$\begin{aligned} f * Id([W]) &= \mu(f([W]) \otimes [\mathbb{C}_0]) + \mu(f([\mathbb{C}_0]) \otimes [W]) + \mu(f \otimes Id)\left(\Delta^+([W])\right) \\ &= f([W]) + \mu(f([\mathbb{C}_0]) \otimes [W]) + \mu(f \otimes Id)\left(\Delta^+([W])\right) \end{aligned}$$

y $f([W])$ sólo aparece una vez. Recordemos que la conmutatividad y coconmutatividad de $R(S)$ aseguran que la convolución es conmutativa. Así, podemos definir $\mathcal{S} : R(S) \to R(S)$ en $\Omega(R(S))$ recursivamente mediante la regla

$$\mathcal{S}([W]) = \begin{cases} [\mathbb{C}_0] & [W] = [\mathbb{C}_0]; \\ -[W] - \mu(\mathcal{S} \otimes Id)(\Delta^+([W])) & [W] \in \Omega(R(S_n)) \text{ y } n > 0. \end{cases}$$

Teorema 5.19. *La función $\mathcal{S} : R(S) \to R(S)$ es antípoda para $R(S)$.*

Demostración. Sea $[W] \in \Omega(R(S))$. Si $[W] = [\mathbb{C}_0]$, entonces

$$\mathcal{S} * Id([\mathbb{C}_0]) = \mu \circ (\mathcal{S} \otimes Id) \circ \Delta([\mathbb{C}_0]) = \mu(\mathcal{S}([\mathbb{C}_0]) \otimes [\mathbb{C}_0]) = [\mathbb{C}_0]$$

y si $[W] \neq [\mathbb{C}_0]$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{S} * Id([W]) &= \mathcal{S}([W]) + \mu(\mathcal{S}([\mathbb{C}_0]) \otimes [W]) + \mu(\mathcal{S} \otimes Id)\left(\Delta^+([W])\right) \\ &= \mathcal{S}([W]) + \mu([\mathbb{C}_0] \otimes [W]) + \mu(\mathcal{S} \otimes Id)\left(\Delta^+([W])\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon([W]) = 0$ si $[W] \neq [\mathbb{C}_0]$ y $\eta \circ \varepsilon([\mathbb{C}_0]) = [\mathbb{C}_0]$, deducimos que $S * Id = \eta \circ \varepsilon$. $\square$

Corolario 5.20. *$R(S)$ es un álgebra de Hopf.*

Terminamos este trabajo con la siguiente tabla:

Representaciones de S_n	$R(S)$ como álgebra de Zelevinsky
Inducción	Multiplicación
Restricción	Comultiplicación
$\mathbb{C}_0$ (representación irreducible de S_n)	Unidad
Fórmula de Restricción de Mackey	La comultiplicación es morfismo de álgebras
Lema de Schur	$\Omega(R(S))$ es base ortonormal de $R(S)$
Reciprocidad de Frobenius	La multiplicación y comultiplicación son adjuntas

Podemos observar cómo se traducen algunas propiedades de las representaciones de S_n al lenguaje de las álgebras de Hopf.

Bibliografía

[1] ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás y Walter Ferrer Santos. *The beginnings of the theory of Hopf algebras* [digitalizado]. – p.3-17. – *En Acta Applicandae Mathematicae.* – Vol.108, no. 1 (oct. 2009) DOI: 10.1007/S10440-008-9393-1, disponible en http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10440-008-9393-1

[2] CURTIS, Charles W. e Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* New York : John Wiley & Sons, Inc., c1962. – xiv, 689 p. – (Interscience publishers)

[3] DASCALESCU, Sorin *et al. Hopf algebra : An introduction.* – New York : Marcel Dekker, c2001. – ix, 401 p. – (Pure an applied mathematics ; no. 235)

[4] FULTON, William y Joe Harris. *Representation theory : A first course.* – New York : Springer-Verlag, c1991. – xv, 551 p. : il. –

[5] MILNOR, John y John Moore. *On the structure of Hopf algebras* [digitalizado]. – p. 211-264. – *En Annals of Mathematics, Second Series.* – Vol. 81, no. 2 (mar. 1965) DOI: 10.2307/1970615, disponible en http://www.jstor.org/stable/1970615

[6] SERRE, Jean-Pierre. *Linear representations of finite groups.* / tr. Leonard L. Scott. – New York : Springer-Verlag, c1977. – x, 170 p. – (Graduate text in mathematics ; no. 42) Traducción de *Représentations linéaires des groupes finis*: 2a ed.

[7] STANLEY, Richard P. *Enumerative combinatorics.* – Cambridge : Cambridge Universty Press, 2002. – Vol. 1 – 1997 p.

[8] TELEMAN, Constantin. *Representation theory* [notas digitales]. – https://math.berkeley.edu/~teleman/math/RepThry.pdf

[9] THOMAS, Charles B. *Representations of finite and Lie groups.* – Covent Garden : Imperial College Press, c2004. – x, 146 p.

[10] WEINTRAUB, Steven H. *Representations theory of finite groups: algebra and arithmetic.* – Rhode Island : American Mathematical Society, 2003. – ix, 212 p. – (Graduate studies in mathemathics, ISSN 1056-7339 ; v. 59)

[11] ZELEVINSKY, Andrei V.. *Representations of finite classical groups : A Hopf algebra approach.* – Alemania : Springer-Verlag, c1981. –184 p. – (Lecture notes in mathematics, no. 869)