



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE QUÍMICA**

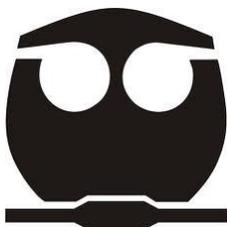
**MODELADO MATEMÁTICO DEL FLUJO DE FLUIDOS Y  
TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN DISPOSITIVO TIPO  
VÓRTICE**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERA QUÍMICA METALÚRGICA**

**PRESENTA**

**ARIANA ORDÓÑEZ HERNÁNDEZ**



**MÉXICO, D.F.**

**2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE: Profesor: Eusebio Cándido Atlatenco Tlapanco**

**VOCAL: Profesor: Carlos González Rivera**

**SECRETARIO: Profesor: Marco Aurelio Ramírez Argáez**

**1er. SUPLENTE: Profesor: Adrián Manuel Amaro Villeda**

**2° SUPLENTE: Profesor: Agustín Gerardo Ruiz Tamayo**

**SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:**

**LABORATORIO 203 DE SOLIDIFICACIÓN Y SIMULACIÓN MATEMÁTICA**

**EDIFICIO D, FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM**

**ASESOR DEL TEMA:**

---

**Dr. Marco Aurelio Ramírez Argáez**

**SUSTENTANTE:**

---

**Ariana Ordóñez Hernández**

## Tabla de contenido

Capítulo I .....	1
1.1 Antecedentes <sup>[14]</sup> .....	1
1.2 Marco teórico <sup>[1, 2, 5]</sup> .....	5
Capítulo II. Modelado Matemático .....	24
2.1 Planteamiento del problema .....	24
2.2 Hipótesis .....	24
2.3. Objetivos .....	25
2.4. Modelo Matemático <sup>[9, 10]</sup> .....	25
2.4.3.1. Ecuación de conservación de materia. ....	27
2.4.3.5 Ecuación de conservación de movimiento para el fluido (fase continua). ....	28
2.4.3.7, 8 Ecuaciones para el modelo de Turbulencia k-epsilon estándar <sup>[11]</sup> . ....	29
2.4.4.0 Ecuación de conservación de Energía <sup>[9,10]</sup> .....	32
2.4.4.1 Ecuación para la fase discreta ( <i>DiscretePhaseModel</i> , DPM) <sup>[9]</sup> . ....	33
2.4.4.1 Condiciones iniciales para la fluidinámica del sistema, a ( $t=0s$ ): .....	35
2.4.4.2 Condiciones iniciales para la fase discreta, a $t = 40s$ : .....	35
2.5 Propiedades termofísicas .....	42
2.6 Metodología .....	43
2.6.1. AnsysFluent® 14.5 como herramienta de trabajo. ....	43
2.6.2 Sensibilidad de la malla. ....	44
2.7 Diseño experimental .....	48
Capítulo III. Resultados y Análisis .....	50
3.1 Mapas vectoriales de velocidad. ....	51
3.1.1 Cortes transversales. ....	51
3.1.2 Cortes axiales. ....	54
3.1.3 Superficie libre y formación transitoria del vórtice. ....	57
3.2 Contornos de viscosidad de Eddy .....	62
3.3 Contornos de temperatura. ....	65
3.3.1 Dominio de la aleación líquida y el aire .....	65
3.3.2 Dominio del refractario. ....	67
3.3.3 Dominio del acero. ....	69

3.4 Efecto de las variables de proceso con la caída de temperatura $\Delta T$ .....	71
3.4.1 Efecto del diámetro de entrada (A) con la caída de temperatura $\Delta T$ .....	72
3.4.2 Efecto de la temperatura de entrada (B) con la caída de temperatura $\Delta T$ .....	74
3.4.3 Efecto del espesor del refractario (C) con la caída de temperatura $\Delta T$ .....	76
3.5 Solución óptima para la caída de temperatura $\Delta T$ .....	78
3.6 Evaluación de la trayectoria y el tiempo de residencia de las partículas, mediante DPM ( <i>DiscretePhaseModel</i> ). .....	80
Capítulo IV. Conclusiones.....	86
Capítulo V. Bibliografía Consultada .....	87
Lista de símbolos.....	89
Lista de figuras.....	91
Lista de tablas.....	92
Apéndice A. <i>Design Modeler</i> (DM).....	914
Apéndice B. <i>Meshing</i> .....	97
Apéndice C. <i>Set up Fluent</i> .....	102

### 1.1 Antecedentes <sup>[14]</sup>.

Nuestra civilización está basada en la habilidad que tenemos de transformar sustancias y aprovechar sus resultados, realmente pocas actividades en nuestra sociedad escapan a la influencia de la química moderna.

La ingeniería química surgió como consecuencia del desarrollo de la industria química, contribuyó decisivamente a su impulso y se ha mantenido constantemente vinculada a ésta. La industria química puede definirse como la aplicación a escala industrial de transformaciones físicas y químicas, y persigue una utilización eficaz de las materias primas mediante procesos concebidos, desarrollados y ejecutados de modo económicamente aceptable para la producción de bienes susceptibles a la comercialización. Esta industria se ha definido también como el sector caracterizado por la fabricación de nuevos productos y materiales que se integran con los naturales y parcialmente los sustituyen mediante el empleo de tecnologías innovadoras que sustituyen a las aplicadas en la actualidad.

Con lo anterior expuesto es permisible darse cuenta que la química es parte fundamental en la mayoría de los procesos que involucran la transformación de una gran variedad de materias primas. Así como en la industria farmacéutica y alimenticia existen procesos encargados en la elaboración de disoluciones y mezclas a partir de materias primas como plantas medicinales, concentrado de frutas, endulzantes, colorantes etcétera, con el fin de obtener productos terminales tales como emulsiones, jarabes, refrescos, sólo por mencionar algunos. De un modo similar, la ingeniería química metalúrgica implementa procesos para conseguir disoluciones y mezclas de metales, llamadas aleaciones, donde cabe mencionar que estos procesos se llevan a cabo a temperaturas muy elevadas.

Los procesos de mezclado que operan en la industria metalúrgica, normalmente se basan en el uso de dispositivos mecánicos para agitar el baño metálico, tales como hornos con agitadores de hélice, rotores y ejes de grafito, sistemas de engranajes, etcétera. Estos sistemas mecánicos están diseñados a base de materiales altamente resistentes a la abrasión y desgaste, al impacto, a la corrosión y por supuesto tienen una gran resistencia a altas temperaturas, sin embargo, la adquisición de dichos materiales resulta en su mayoría muy costosa.

Otra forma de agitación en metales fundidos muy ampliamente empleada en la industria metalúrgica es mediante el burbujeo de gases a través de tapones porosos, lanzas toberas y otros dispositivos inyectores dispersores de burbujas. Las burbujas que se inyectan en la profundidad de los fundidos ascienden a través del fundido por la enorme fuerza boyante que sienten y durante su ascenso arrastran al líquido generando movimiento convectivo en éste o agitación. Sin embargo. La agitación mediante la inyección de gases, conocida como agitación neumática es también costosa y requiere de fuertes inversiones de instalación.

La ingeniería de procesos propone una forma de agitación alterna la tecnología de mezclado conocida, la cual es mediante la generación de un vórtice, sin necesidad de un sistema mecánico externo de agitación y sin necesidad de agitación neumática con inyección de gases.

Un claro ejemplo de su aplicación en la química metalúrgica es en la industria fundidora. Podría creerse que la tecnología que usa la industria de la fundición es simple, sólo se funde el metal, se vacía en un molde permanente o de arena y se deja solidificar dentro del mismo, sin embargo, existen muchos factores y variables que se deben de considerar para lograr una operación exitosa de fundición. Uno de esos factores es la incorporación homogénea con buen rendimiento de elementos aleantes (partículas sólidas) al baño metálico. Así mismo, es trascendental que el baño metálico se encuentre dentro un rango de temperatura adecuada, lo que coadyuvará a la disolución de estas partículas.

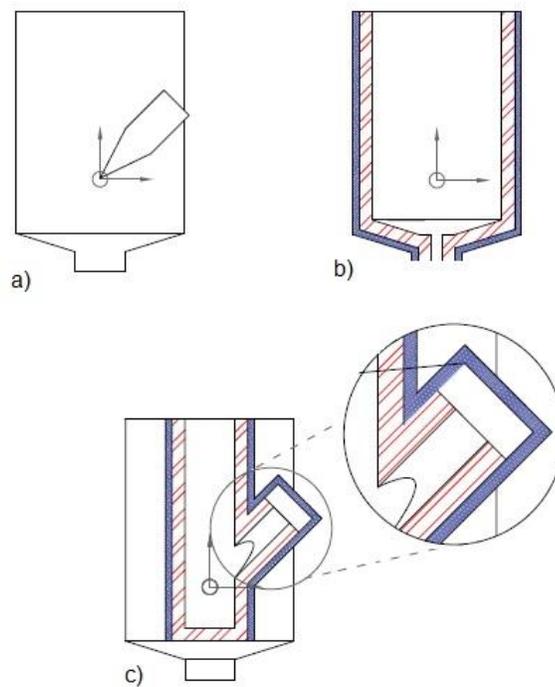
Es importante enfatizar que no sólo es suficiente que las partículas sean disueltas, sino que es de vital importancia su incorporación total, homogénea y eficiente en todo el baño metálico, alcanzando finalmente una composición homogénea del mismo.

Aplicando la ingeniería de procesos es posible conseguir resultados confiables para la obtención de productos terminales que satisfagan los estrictos controles de calidad que existen en la industria, obteniendo así mejores propiedades mecánicas intrínsecas a la función que deberán cumplir.

Durante la etapa en la que el metal se encuentra en estado líquido los parámetros que intervienen en dicho proceso de mezclado de solutos sólidos incorporados a baños metálicos calientes, involucran un estudio de la fluidinámica del sistema. Existen trabajos previos, que se centraron en el estudio del modelado físico y matemático de dispositivos mezcladores, evaluando la capacidad máxima de mezclado, que a su vez implicó el análisis de la intensidad turbulenta generada en el baño metálico, con la finalidad de la incorporación total de las partículas sólidas. De la mano con el estudio de patentes, el

diseño del dispositivo que mezcla con la formación del vórtice, a la que llamaremos "dispositivo tipo vórtice", consiste en un cuerpo cilíndrico refractario que tiene una cámara de mezcla en forma de embudo con una entrada tangencial de corriente de un metal o aleación líquida y un cilindro posicionado en la parte inferior de la base troncocónica para descargar la aleación líquida de la cámara por gravedad.

Inicialmente, la aleación líquida golpea la base troncocónica y con la entrada continua de metal líquido, la cámara de mezclado ayuda a la formación de un remolino o vórtice lo que causa un flujo completamente turbulento dentro de la cámara con el fin de promover el mezclado y la salida de la aleación líquida a determinada rapidez. Ver Figura 1.



**Figura 1. Ilustración del dispositivo tipo vórtice, a) vista lateral, b) corte transversal y c) vista interior de la entrada.**

Este dispositivo tipo vórtice será muy útil en la industria fundidora, donde de sobra se conoce la reactividad de ciertos elementos aleantes, ya que las partículas que son incorporadas al baño metálico, son arrastradas al vórtice donde la turbulencia en el mezclado coadyuvará a una incorporación eficiente aumentando el rendimiento de dichas especies o con mínima pérdida de éstas. De esta manera, la

velocidad que adquiere el vórtice impide que las partículas adicionadas reaccionen con las paredes del dispositivo, evitando así una acumulación de productos de reacción.

En una etapa anterior a este trabajo<sup>[16-17-18]</sup> se realizó un análisis del proceso en donde se analizó el efecto de 5 de las principales variables de diseño del dispositivo tipo vórtice ya señalado, así como el efecto de la principal variable de operación que es el flujo de la aleación líquida, sobre el comportamiento de mezclado de la cámara. Se estudió el efecto del diámetro de la cámara, el ángulo de entrada, el ángulo de la sección troncocónica, la presencia o ausencia de una barrera en la cámara y de la posición de entrada de la aleación líquida a la cámara. Este análisis se hizo mediante los cálculos de flujo de fluidos en software CFD ya referidos (dinámica de fluidos computacional por sus siglas en inglés) y también a través de modelado físico usando agua en lugar de una aleación líquida, obteniendo curvas C para estimar el comportamiento del mezclado. De esos estudios se obtuvo un diseño óptimo del dispositivo tipo vórtice, maximizando los tiempos de residencia de las partículas aleantes y el mezclado de la cámara. Una vez optimizado el diseño del dispositivo para asegurar un máximo mezclado, surgió la incertidumbre lógica en cuanto a una posible caída drástica de temperatura (ya que los estudios previos, tanto de CFD como de modelado físico, se asumieron como sistemas isotérmicos) que pudiera sufrir la aleación líquida, implicando una posible obstrucción en la descarga de la aleación líquida, imposibilitando el uso de este dispositivo a nivel industrial.

Por lo que, una vez identificados los parámetros de diseño y operación óptimos en este tipo de dispositivo, en esta tesis se procedió a efectuar un estudio basado en la modelación matemática de la transferencia de energía del flujo de fluidos en el dispositivo mezclador, empleando software CFD, enfocado en establecer la caída térmica que sufriría una aleación metálica a altas temperaturas en este mezclador que usa el método del vórtice, desde que la aleación entra a la cámara hasta que la abandona.

Para cumplir el objetivo de la presente tesis, se hizo un nuevo análisis del proceso usando simulaciones numéricas CFD, con las que se evaluó el efecto de las principales variables de diseño y de proceso que influyen la caída térmica ( $\Delta T$ ), tales como la temperatura inicial del chorro metálico alimentado al dispositivo, el espesor de las carcasas que forman la cámara y recubren al dispositivo y finalmente el flujo volumétrico de la aleación líquida que alimenta el dispositivo, es decir el diámetro a la entrada; obteniéndose el efecto de estas variables sobre la caída de temperatura sufrida por la aleación desde su entrada al dispositivo tipo vórtice hasta el momento de abandonar el mismo. Además, en base a un

análisis estadístico de diseño de experimentos junto con rutinas formales de optimización de procesos, se proponen las condiciones de operación óptimas que minimizan las caídas térmicas para obtener el mejor desempeño del dispositivo tipo vórtice.

## **1.2 Marco teórico [1, 2, 5].**

Del estudio de la termodinámica se aprendió que la energía se puede transferir mediante las interacciones de un sistema con su alrededor con la posibilidad de conocer la cantidad transferida por medio de balances globales. Siendo que estos representan un método técnico satisfactorio para resolver problemas prácticos, existen muchas otras situaciones reales en las que se requiere información más detallada que la proporcionada mediante balances globales o macroscópicos. Los ejemplos típicos de tales casos incluyen: el conocimiento del campo de velocidades, patrones de flujos turbulentos, perfiles de velocidad y de temperatura que ahora son dependientes del tiempo y de la posición.

A razón de esto, es necesario ampliar el análisis termodinámico haciendo necesario el estudio de los mecanismos físicos de la transferencia de calor, con la formulación de ecuaciones diferenciales parciales que describen los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía. La resolución de estos balances microscópicos nos proporcionará una aproximación de la cantidad de flujo de materia, cantidad de movimiento, así como las pérdidas de energía por la transferencia de calor del dispositivo tipo vórtice con sus alrededores.

A continuación se describirán brevemente las ecuaciones gobernantes que se necesitan para evaluar los fenómenos de transporte asociados a la fluidinámica del dispositivo tipo vórtice.

### **1.2.1 Ecuación de continuidad o de conservación de materia.**

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia en un elemento de fluido; para un fluido compresible la ecuación (1.2.1), se describe como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - (\nabla \cdot \rho \vec{v}) \quad (1.2.1)$$

Esta es la ecuación de continuidad, la cual describe un balance de la diferencia de masa para un fluido compresible en movimiento. El término  $\nabla \cdot \rho \bar{v}$  se denomina divergencia de flujo de materia, que representa las entradas netas de materia por unidad de volumen en un elemento diferencial de volumen.

Para un fluido incompresible, la ecuación de conservación de materia está dada por la ecuación (1.2.2):

$$(\nabla \cdot \bar{v}) = 0 \quad (1.2.2)$$

La ecuación (1.2.2), sólo es válida cuando la densidad  $\rho$ , del fluido es constante (condición que se da para un fluido incompresible y que aplica para la mayoría de líquidos).

### 1.2.2 Ecuación de conservación de movimiento.

De forma rigurosa, un fluido es una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo cortante. Los fluidos pueden ser newtonianos o no newtonianos, siendo considerado un fluido newtoniano aquel cuya viscosidad puede considerarse constante en el tiempo, esta consideración hace que los fluidos newtonianos puedan ser descritos fácilmente, puesto que la relación entre el esfuerzo de corte y la velocidad de deformación es una función lineal denominada la ley de viscosidad de Newton (ver ecuación 1.2.3).

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (1.2.3)$$

De la ecuación (1.2.3),  $\tau_{xy}$  es la tensión tangencial o esfuerzo de corte ejercida en un punto del fluido,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y finalmente la derivada  $\frac{dv_x}{dy}$  es el gradiente de la velocidad perpendicular a la dirección del plano en la que se está calculando la tensión tangencial o se puede definir también como la velocidad de deformación.

Para un fluido newtoniano, la viscosidad sólo depende de la temperatura, por lo que es importante resaltar que para líquidos fundidos, la viscosidad es una función que se representa mediante el modelo de Arrhenius, (ver ecuación 1.2.4):

$$\mu = \mu_o e^{\left(\frac{E_\mu}{RT}\right)} \quad (1.2.4)$$

Aquí,  $\mu_o$  es la viscosidad del fluido a la temperatura de referencia y la cantidad  $E_\mu$  es la energía de activación del flujo viscoso. La ecuación (1.2.4), indica que a medida que la temperatura  $T$  de un fluido líquido aumenta, la viscosidad disminuye.

Tanto la cantidad de movimiento como las fuerzas que actúan sobre el elemento del fluido son cantidades vectoriales. La cantidad de movimiento es transferida debido al movimiento volumínico del fluido, mecanismo denominado como la transferencia convectiva de la cantidad de movimiento.

Así, la cantidad de movimiento a lo largo de  $x$ , es decir, la cantidad de  $(\rho v_x)$ , que posee las dimensiones de cantidad de movimiento por unidad de volumen, puede ser transferida al elemento, debido a los componentes de velocidad  $(v_x, v_y, v_z)$ , dando lugar a términos como  $(\rho v_x)v_x$ ,  $(\rho v_x)v_y$ , y  $(\rho v_x)v_z$ . En este sentido  $(\rho v_x)$  se considera como la concentración de la cantidad de movimiento a lo largo de  $x$ .

Al considerar al fluido en un volumen de control infinitesimal, las fuerzas que actúan sobre el sistema pueden dividirse en dos categorías, fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales. Las fuerzas de cuerpo son causadas por los campos gravitacionales o electromagnéticos y actúan en el seno del fluido, estas se representan como fuerza por unidad de masa del elemento. Las fuerzas de superficie, representan la acción del fluido que circunda al elemento del fluido en cuestión, estas fuerzas se representan como fuerza por unidad de área del elemento, por ejemplo la presión.

La cantidad de movimiento puede también ser transferida por los componentes del tensor de tensión que actúan sobre el elemento.

La tensión o esfuerzo de corte es una fuerza de superficie, que se identifica tanto por la dirección de la fuerza como por la orientación del área sobre la que esta fuerza actúa. Para un análisis en tres dimensiones (3D), la tensión es un tensor de segundo orden, por lo que se obtendrán nueve componentes como se muestra en la ecuación (1.2.5). Al observar que la tensión es una fuerza por unidad de área, los componentes del tensor se interpretan como las tensiones normales y cortantes que actúan sobre el elemento de fluido, es decir son las densidades de flujo de la cantidad de movimiento.

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

Al combinar los términos convectivos, difusivos y las fuerzas de cuerpo y de superficie, la ecuación de conservación de movimiento en notación vectorial (o el balance de fuerzas), se describe como sigue (ecuación 1.2.6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{v} = -\nabla \cdot \rho \bar{v} \bar{v} - \nabla P - \nabla \cdot \tau + \rho F_b \quad (1.2.6)$$

De izquierda a derecha, el primer término es la rapidez de acumulación de la cantidad de movimiento por unidad de volumen, del lado derecho de la igualdad, la rapidez de ganancia de cantidad de movimiento por convección por unidad de volumen, el gradiente del campo escalar de la presión, el gradiente del campo de las fuerzas de viscosidad y finalmente la fuerzas de cuerpo que actúan sobre el elemento, respectivamente.

Cuando la viscosidad es constante y la gravedad es la única fuerza de cuerpo que será considerada, la ecuación (1.2.6) se reduce a la ecuación (1.2.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{v} = \mu_{eff} \nabla^2 \bar{v} - \nabla \cdot \rho \bar{v} \bar{v} - \nabla P + \rho g \quad (1.2.7)$$

Que es bien conocida como la ecuación de Navier-Stokes, donde la viscosidad molecular ya referida ha sido sustituida en el término viscoso por la viscosidad efectiva  $\mu_{eff}$ , la cual toma en cuenta el aumento en la viscosidad debido a la turbulencia, donde es necesario emplear un modelo de turbulencia que describa esta viscosidad turbulenta, como se verá más adelante.

### 1.2.3 Ecuación general de conservación de energía.

Para determinar la dependencia temporal de la distribución de temperaturas dentro de un elemento de fluido durante un proceso transitorio, la ecuación de conservación de energía se describe como sigue (ver ecuación 1.2.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) = - \left( \nabla \cdot \rho \bar{v} \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right) - (\nabla \cdot \bar{q}) + \rho (\bar{v} \cdot \bar{g}) - (\nabla \cdot P \bar{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{v}]) \quad (1.2.8)$$

La ecuación (1.2.8), es una generalización puesto que incluye los efectos del trabajo (en términos de fuerzas de cuerpo y de superficie) y a la energía cinética.

Del lado izquierdo de la igualdad, corresponde al término de la rapidez de acumulación de energía interna  $\hat{U}$  y cinética en el interior del elemento de fluido. Del lado derecho de la igualdad, el primer término corresponde al transporte convectivo, definido como la rapidez neta de energía interna y cinética en el elemento por el movimiento del fluido, seguido de la divergencia de la densidad de flujo de calor por conducción, la rapidez de trabajo debido a la fuerza gravitacional comunicado al fluido, la rapidez de trabajo debido a las fuerzas de presión y finalmente la rapidez de trabajo por unidad de volumen debido a las fuerzas viscosas.

El trabajo realizado por el elemento de fluido contra los alrededores consta de dos partes, el trabajo contra las fuerzas de cuerpo, como la gravedad y el trabajo contra las fuerzas de superficie, como las fuerzas viscosas y de presión.

En un medio isotrópico en el que la temperatura varía en las tres direcciones del espacio, el término que corresponde a la divergencia de la densidad de flujo de calor por conducción, en la ecuación (1.2.8), puede reescribirse en tres ecuaciones, puesto que corresponden a los componentes de la ecuación vectorial de la ley de Fourier. (Ver ecuaciones 1.2.9 - 1.3.0)

$$-(\nabla \cdot \bar{q}) = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad (1.2.9)$$

De la ley de Fourier,

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.3.0)$$

Estas tres ecuaciones establecen que el vector de densidad de flujo  $q$ , es directamente proporcional al gradiente de temperatura y de sentido contrario, por lo tanto en un medio isótropo, el calor fluye por conducción en la dirección en que el descenso de temperatura es más pronunciado.

Para un fluido en movimiento,  $q$  representa la densidad de flujo de energía calorífica relativa a la velocidad local del fluido. Siendo así, existe una semejanza entre la ecuación de la ley viscosa de Newton y la ley de Fourier (ecuaciones 1.2.3 y 1.2.9). En ambos casos la densidad de flujo es proporcional al gradiente negativo de una variable macroscópica y los coeficientes de proporcionalidad son propiedades físicas que dependen de la sustancia y de los valores locales de presión y temperatura.

La viscosidad  $\mu$  y la conductividad térmica  $k$ , básicamente se definen como propiedades de transporte, puesto que proporcionan una indicación de la habilidad de la materia para transferir cantidad de movimiento y la habilidad del fluido para transmitir energía térmica por el mecanismo de conducción, respectivamente.

En el análisis de transferencia de calor, la denominada difusividad térmica  $\alpha$ , es una cantidad importante que tiene unidades de  $m^2/s$  (ver ecuación 1.3.1).

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p} \quad (1.3.1)$$

La difusividad térmica mide la capacidad de un material para conducir energía térmica en relación con su capacidad para almacenar energía térmica. Los materiales que tienen un valor alto de difusividad térmica responderán rápidamente a los cambios térmicos, mientras que los materiales con un valor de difusividad térmica baja, responden lentamente.

Para la mayor parte de las aplicaciones ingenieriles, es conveniente expresar la ecuación de energía en función de la temperatura y del calor específico del fluido en vez de la energía interna o de la entalpía, de la misma manera que las disipaciones de energía por fuerzas viscosas no sean tomadas en cuenta, donde la fricción es poca o el fluido no es tan viscoso, por lo que en la mayoría de casos se desprecia este término. Así la ecuación (1.2.8) puede reducirse a la ecuación (1.3.2), como sigue:

$$\nabla \cdot k_{eff} \nabla T - \nabla \cdot (\rho \bar{v} C_p T) + \dot{Q} = \frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} \quad (1.3.2)$$

En donde  $k_{eff}$  se define como la conductividad térmica efectiva, siendo la suma de la conductividad térmica promedio  $k$  y la conductividad turbulenta  $k_t$ , ésta última es el aumento en el transporte de energía por mecanismos turbulentos y es calculada con las ecuaciones que resuelven los fenómenos de turbulencia. Los términos siguientes cuantifican las contribuciones del transporte convectivo, la rapidez de generación de calor por unidad de volumen (transformaciones de otras formas de energía a energía térmica como reacciones químicas, efecto Joule, etcétera) y el término transitorio de acumulación de energía.

En la formulación de los problemas de transferencia de calor por convección, hay que reconocer que generalmente en un fluido en movimiento la energía térmica es transferida tanto por conducción como por movimiento del fluido mismo. En la convección libre, el movimiento del fluido se debe principalmente a las fuerzas de empuje dentro de este, mientras que la convección forzada se impone de forma externa. Dicho empuje se debe a la presencia combinada de un gradiente de presión que actúa sobre el fluido y de una fuerza de cuerpo que es proporcional a la densidad, la fuerza de gravedad.

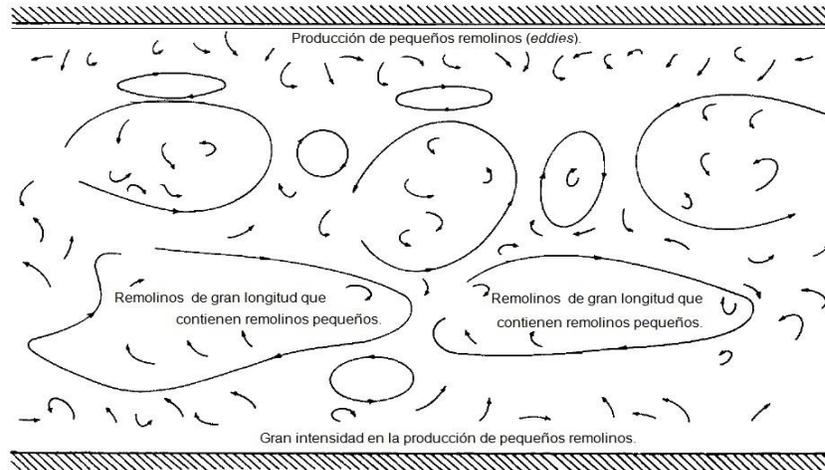
#### **1.2.4 Transporte turbulento.**

En cuanto a flujos turbulentos, el tratamiento de las fluctuaciones de variables, tales como velocidad, presión y temperatura asociadas inherentemente con la turbulencia, son fenómenos de transporte en estado no estacionario. Estas fluctuaciones turbulentas juegan un papel crucial en la determinación del comportamiento de los sistemas bajo este régimen.

En esta breve descripción de la turbulencia, se tratará principalmente de la rapidez con la cual la cantidad de movimiento y la densidad de flujo de energía pueden transferirse en un flujo turbulento.

Una característica fundamental de los flujos turbulentos, es la existencia de elementos de fluido en los que ocurre un flujo rápido y circundante. Estos elementos formados y destruidos continuamente se denominan remolinos (*eddies*). Bajo el esquema que se presenta en la Figura 2, se aprecia que a cierta distancia de la pared, existen remolinos grandes y que mucha de la energía cinética del fluido se encuentra asociada con los remolinos grandes y de mediano tamaño. En el movimiento de los remolinos grandes, la disipación viscosa es despreciable, de esta forma, la degradación de energía ocurre cuando

los remolinos grandes transfieren su energía a los más pequeños en los que la energía cinética se consume por disipación viscosa.



**Figura 2. Esquema que muestra la distribución de remolinos (eddies) en una tubería, indicando que los remolinos más largos se ubican en el centro de la corriente del fluido, mientras que los remolinos más pequeños son producidos en las cercanías de las paredes.**

En estudios experimentales, se ha encontrado que la frecuencia de las fluctuaciones es inversamente proporcional al tamaño de los remolinos, así como la mayor parte de la energía se debe a las fluctuaciones de velocidad que se encuentran intrínsecamente asociada a los grandes remolinos. Asimismo, la disipación de energía debida a las fluctuaciones turbulentas ocurre en los remolinos más pequeños, en donde predominan las fuerzas viscosas.

A razón de lo anteriormente descrito, es conveniente utilizar un modelo en el que el sistema esté subdividido en tres regiones definidas, el núcleo turbulento, la zona de transición y la película laminar próxima a la pared, ver Figura 3.

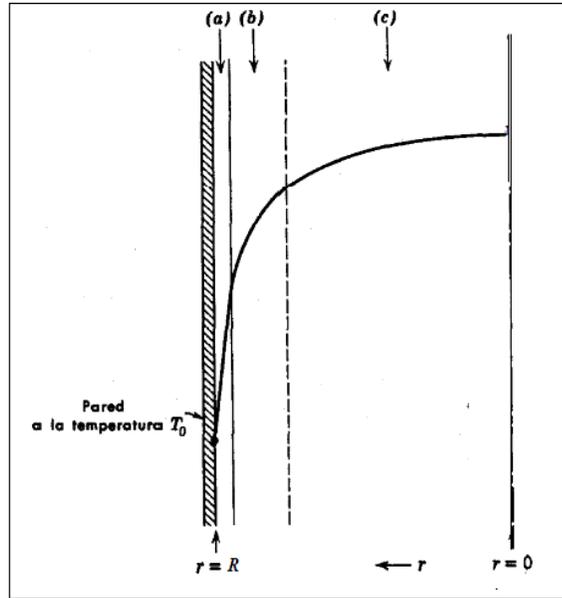


Figura 3. Perfil de temperatura para flujo turbulento en un tubo. Las regiones, a) la película laminar, b) la zona de transición y c) el núcleo turbulento

En el núcleo turbulento la energía calorífica y la densidad de flujo de cantidad de movimiento se transportan muy rápidamente de un lugar a otro debido a la vigorosa actividad de los remolinos. Por otra parte, la actividad de los remolinos junto a la pared es despreciable y es conveniente utilizar una región laminar en la que la energía se transporta por conducción, que es un proceso lento en comparación con el transporte de remolinos. Por tanto, es de esperar que se produzca una gran caída térmica de temperatura a través de la delgada capa laminar. En la zona de transición se prevé una situación intermedia entre la del flujo turbulento y la de la capa laminar, siendo importante en esta región el transporte de energía por conducción como por los remolinos.

Aunque el modelo descrito es idealizado, resulta útil para el desarrollo de la teoría de transferencia turbulenta de cantidad de movimiento y calor, dando lugar a modelos de dos ecuaciones de turbulencia que simulan la energía cinética debida a las fluctuaciones turbulentas en la velocidad  $k$ , y la energía turbulenta generada por la tasa de disipación  $\varepsilon$ , considerando que la turbulencia es isotrópica.

Es apreciable, que la tarea de cálculo es complicada, puesto que las ecuaciones a resolver son ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acopladas entre sí mediante la viscosidad turbulenta  $\mu_t$  (ver sección [2.4.3.7- 8] del capítulo 2, donde se explican los modelos de turbulencia empleados). La viscosidad turbulenta o la viscosidad de remolino  $\mu_t$ , depende principalmente de la posición, por lo que

uno esperaría que en el núcleo turbulento, la viscosidad turbulenta sea mucho mayor que la viscosidad promedio  $\mu_t \gg \mu$ , y que cercano a la pared ocurra lo contrario.

Se ha propuesto un gran número de expresiones empíricas y semiempíricas para relacionar la viscosidad turbulenta (de remolino) con las propiedades macroscópicamente medibles de un sistema. Si se desea estimar la magnitud del mezclado turbulento, se requiere una mejor definición del patrón de disipación turbulenta. La elección del modelo de turbulencia dependerá de consideraciones tales como, la física del fluido, el nivel de precisión, los recursos computacionales disponibles y la cantidad de tiempo disponible para la simulación.

Para el desarrollo de este trabajo se ha elegido utilizar el modelo de turbulencia k-épsilon estándar. Este modelo ha probado ser eficaz en simular la turbulencia de muchos sistemas continuos como el que se presenta en este trabajo y es por eso que se propone como una primera opción para representar la turbulencia de la aleación líquida en el dispositivo tipo vórtice.

Aunque este trabajo está fundamentado en la simulación de flujo de fluidos y transferencia de calor del dispositivo tipo vórtice, se ha hecho un análisis que intentó dilucidar el efecto de las principales variables del proceso sobre la caída de temperatura en el sistema, así como el diseño óptimo del proceso; para esto fue necesario emplear conceptos de diseño de experimentos factoriales como de optimización de procesos, los cuales se discutirán enseguida.

### **1.2.5 Fundamentos de Optimización con MATLAB® [7].**

El uso de la palabra optimización implica decir “el mejor resultado bajo ciertas condiciones”. Habitualmente, la optimización se ha convertido en una parte necesaria en el proceso de diseño de un sistema, producto o en la logística de un servicio. La motivación para obtener productos o servicios que sean económicamente rentables, de alta calidad y competitivos en el mercado, lo ha incorporado el proceso de optimización. La industria aeroespacial es una muestra evidente, puesto que para lograr minimizar el peso de las estructuras de los vehículos espaciales fue necesario optimizar el diseño del vehículo de la mano con la física del sistema. Sin embargo, el proceso de optimización no es exclusivo de las distintas disciplinas ingenieriles, puede aplicarse también en la vida cotidiana. Es posible optimizar

un viaje turístico si se estudia las mejores rutas de viaje para disminuir el tiempo de llegada, otro ejemplo es la optimización en los gastos del día a día, eligiendo las tiendas y los días adecuados para la compra de víveres, implicando una considerable disminución de flujo de dinero.

La sinergia que ha resultado de implementar métodos de optimización con recursos de cómputo de bajo costo en las herramientas de producción y de diseño de un producto y/o proceso, ha demostrado que programas como MATLAB® son adscritos en el desarrollo de las innovaciones ingenieriles. Desde el punto de vista didáctico, MATLAB® presenta diferentes virtudes, además de incluir una herramienta específica de optimización (*optimization toolbox*) permite representar las gráficas y curvas de nivel de funciones de una o dos variables. Incluso en ausencia de un producto tangible, las ideas de optimización proporcionan la capacidad de definir y explorar las posibles fallas técnicas, centrándose en el estudio de las mejores soluciones bajo determinadas variables de operación.

La ingeniería de procesos se encuentra muy ligada a la relación que existe entre el diseño de un sistema y su optimización. De forma cuantitativa, el resultado de aplicar la optimización al diseño del sistema, deberá arrojar valores numéricos que definirán la solución, en otras palabras valores que caracterizarán al sistema, en particular.

El método de optimización presupone que el usuario tiene el conocimiento de las características numéricas que definen al sistema, estas corresponden a las variables de diseño, los parámetros del sistema y finalmente, las funciones que se definen como expresiones matemáticas que representan el comportamiento del sistema evaluadas por las variables y los parámetros del mismo.

Estas funciones, se diferencian de dos maneras: *objective function* (funciones objetivo) y *constraint function* (funciones restrictivas). Las funciones objetivo, como su nombre lo indica, serán aquellas funciones que impulsarán la búsqueda del diseño óptimo del sistema. La razón de estas funciones es maximizar o minimizar alguna cantidad numérica que dependa de forma explícita e implícita, de las variables de diseño.

Las funciones restrictivas son evaluadas por las variables de diseño, es decir que la solución de estas funciones requiere de ser verificada con un valor numérico límite que establezca las imposiciones del sistema. Los valores límite de las funciones se mantienen como parámetros constantes durante la optimización del sistema. Usualmente, las restricciones son calculadas mediante tres operadores

matemáticos:  $=$ ,  $\leq$  y  $\geq$ . El problema de optimización siempre será considerado en el formato de minimizar con restricciones expresadas en términos de desigualdades en el sentido de  $\leq$ .

Otro tipo de funciones son las *side constraint* o funciones con intervalo de restricción, que delimitan los rangos para las variables del sistema. Cada variable debe ser impuesta bajo sus límites superior e inferior.

Las restricciones son necesarias puesto que su cumplimiento determinará los valores numéricos de las variables que deben de cumplirse para establecer el diseño requerido para el sistema. De esta forma, un diseño operable es aquel en el que todas las restricciones impuestas son satisfechas y una solución óptima es aquella que ha cumplido con el mejor objetivo de diseño para el sistema de estudio.

Las definiciones anteriores nos permiten expresar el modelo matemático general del proceso de optimización, como sigue:

$$\text{Minimizar: } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.3.3)$$

$$\text{Objetivos: } h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (1.3.4)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.3.5)$$

$$x_i^{low} \leq x_i \leq x_i^{up} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.6)$$

De manera coloquial, el modelo matemático presentado quiere decir, minimizar la función objetivo  $f$  (1.3.3) que queda sujeta a las restricciones de igualdad  $l$  (1.3.4) y desigualdad  $m$  (1.3.5), con las  $n$  variables de diseño del sistema que se encuentran en los límites inferior y superior (1.3.6).

A continuación se muestra un ejemplo de la optimización expuesta.

Ejemplo 1. Una investigación sobre el consumo de refresco indicó que la gente bebe cerca de 0.5 litros en promedio, durante el verano. El costo de fabricación de la lata, es proporcional al área de ésta, la cual se estima en 1.00 dólar por metro cuadrado del material utilizado para su fabricación. De acuerdo a la presentación estética del sistema de estudio, la altura debe ser al menos dos veces el diámetro. Ciertos estudios realizados demostraron que el valor numérico del diámetro debe fluctuar entre 6 y 9 cm. La Figura 4 muestra un bosquejo de la lata.

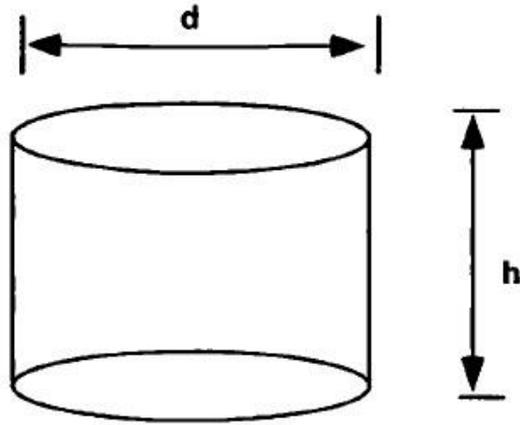


Figura 4. Ejemplo 1 de optimización para un nuevo diseño de la lata para bebidas.

Para aplicar el modelo matemático es conveniente hacer ciertas consideraciones:

1. Para el cálculo del volumen, el espesor de la lata  $t$ , será despreciada por considerarse muy pequeña.
2. El material requerido, será solamente para el cuerpo cilíndrico, sin considerar las tapas ni el seguro.
3. Las variables de diseño son el diámetro  $d$ , y la altura  $h$ .
4. Parámetro  $C$ . Se considera a  $C$  como el costo por unidad de área,  $1\text{¢}/\text{cm}^2$ . Durante la optimización del problema el costo  $C$ , se mantiene constante.

Las funciones del diseño, corresponderán al volumen  $\left(\pi d^2 \frac{h}{4}\right)$  y al área superficial del sistema  $(\pi dh)$ , así como la restricción de diseño  $(h \geq 2d)$ .

Explícitamente, el modelo matemático que representa al problema de minimizar el costo de producción de latas es gobernado por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Minimizar } f(d, h, t): C\pi dh \quad (1.3.7)$$

$$\text{Sujeto a } h_1(d, h, t): \pi d^2 \frac{h}{4} - 500 = 0 \quad (1.3.8)$$

$$g_1(d, h, t): 2d - h \leq 0 \quad (1.3.9)$$

$$6 \leq d \leq 9; \quad 5 \leq h \leq 20 \quad 0.001 \leq t \leq 0.01 \quad (1.4.0)$$

La variación del espesor  $t$ , no afecta al diseño de la lata, únicamente el parámetro  $C$ , se ve influido por esta variable. Si este ejemplo hubiera sido un problema de la evaluación de la resistencia del material, entonces el espesor definitivamente sería una variable crítica y no podría despreciarse.

Expresando a  $[d, h]$  como  $[x_1, x_2]$ , entonces:

$$\text{Función Objetivo} \quad f(x_1, x_2): \quad C\pi x_1 x_2 \quad (1.4.1)$$

$$\text{Restricción de igualdad} \quad h_1(x_1, x_2): \quad \pi x_1^2 \frac{x_2}{4} - 500 = 0 \quad (1.4.2)$$

$$g_1(x_1, x_2): \quad 2x_1 - x_2 \leq 0 \quad (1.4.3)$$

$$6 \leq x_1 \leq 9; \quad 5 \leq x_2 \leq 20 \quad (1.4.4)$$

La solución del ejemplo 1, se ilustra en la Figura 5.

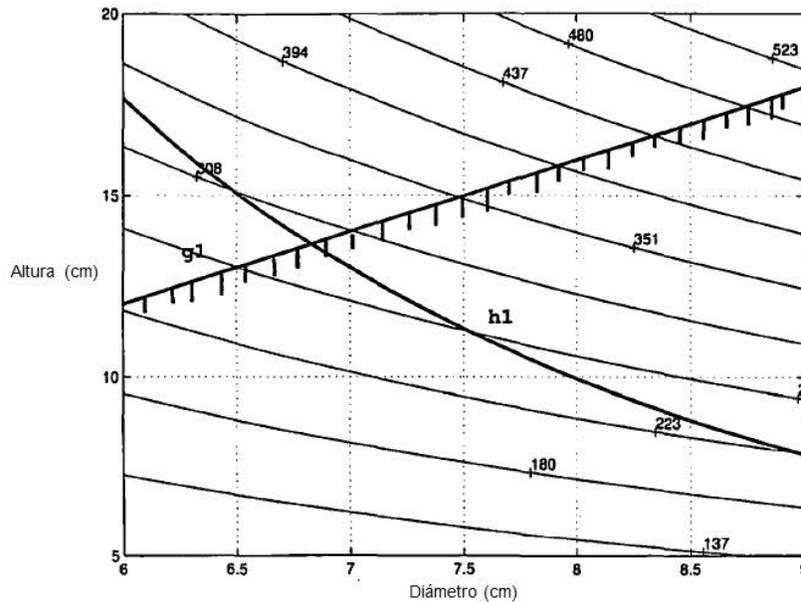


Figura 5. Gráfico que muestra los contornos de diseño para el ejemplo 1.

En la Figura 5, la restricción de igualdad es marcada como  $h_1$ , cualquier valor de esta función tomará un volumen de  $500 \text{ cm}^3$ . La restricción de desigualdad se muestra como  $g_1$ , los valores de esta función caen dentro de la restricción de diseño requerida. La función objetivo se representa a escala a través de varios contornos. Además, cada contorno se asocia con un valor fijo de la función objetivo.

El problema representado en la Figura 5, ofrece una oportunidad para identificar la solución gráfica. Muestra un intervalo de soluciones factibles para el diseño de la lata, sin embargo la optimización del problema radica en reducir ese número de soluciones a la mejor. En la Figura 5, el menor valor de la función objetivo  $f$ , es apenas menor que el contorno con valor de 308, y que se encuentra en la intersección de las dos funciones de restricción ( $h_1$  y  $g_1$ ). Cuando  $f$  es calculada, los valores óptimos de las variables de diseño, son leídas de la Figura 5, arrojando un valor para el diámetro y la altura de 6.75 cm y 13.5cm, respectivamente.

Así pues, el objetivo fundamental de este trabajo es demostrar que con las herramientas analíticas y computacionales que proporciona MATLAB® para la búsqueda de máximos o mínimos de una determinada función objetivo dentro del conjunto de soluciones factibles, el llamado *conjunto factible*, es posible determinar un conjunto de soluciones a sistemas de ecuaciones e inecuaciones, que imponen las restricciones del problema.

### 1.2.6 Diseño factorial a dos niveles o experimentos factoriales $2^k$ [6].

Se llaman experimentos factoriales a aquellos experimentos en los que se estudia simultáneamente dos o más factores (variables) y donde los tratamientos se forman por la combinación de los diferentes niveles de cada uno de los factores.

Los factores pueden ser cualitativos o cuantitativos. Así, los dos niveles de una variable cuantitativa pueden ser dos temperaturas diferentes y una variable cualitativa puede ser la presencia o ausencia de dos tipos de catalizadores, por ejemplo. Es importante aclarar, que cuando los factores son cuantitativos, aunque no sea posible explorar completamente el espacio del factor, a menudo determinan una dirección prometedora hacia dónde dirigir una posterior investigación.

Concretamente, un diseño factorial  $2^k$ , permite el estudio de  $k$  variables (factores) eligiendo dos niveles para cada factor que se estudie. Este diseño es conveniente debido a que permite que con el menor

número de experimentos efectuados se obtenga la información de los efectos de cada una de las variables estudiadas, así como todas las interacciones que podrían presentarse entre las mismas.

Para el estudio del modelado matemático de la fluidinámica y la transferencia de energía del dispositivo tipo vórtice, mediante el código CFD Ansys Fluent® 14.5, se trabajó en un diseño factorial a dos niveles  $2^k$ , para determinar cómo se ve afectada la temperatura de salida del dispositivo, cuando se modifican ciertas variables de proceso. Los tres factores estudiados son el diámetro de entrada **A**, la temperatura de entrada de la aleación líquida **B**, y el espesor del refractario que recubre al dispositivo **C**. Cada uno de los tres factores se estudió a dos niveles, de forma que el conjunto de experimentos es  $2 \times 2 \times 2$ , o diseño  $2^3$  factorial. En la tabla que aparece del lado izquierdo de la Figura 6 se muestran las ocho formulaciones con los niveles de los factores codificados mediante los signos menos y más.

Por ejemplo, un experimento en el que se utiliza el valor más grande de diámetro de entrada A, el valor menor de temperatura de entrada B y el valor más grande de espesor del refractario C, se encuentra codificado como + - + (experimento 6). También se muestra en la Figura 6, que estas ocho combinaciones se pueden representar geoméricamente de forma adecuada, como los vértices de un cubo.

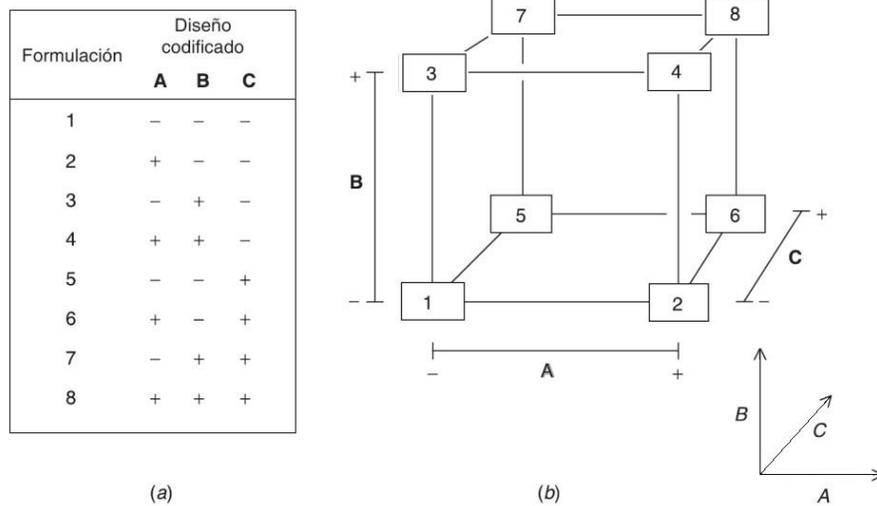


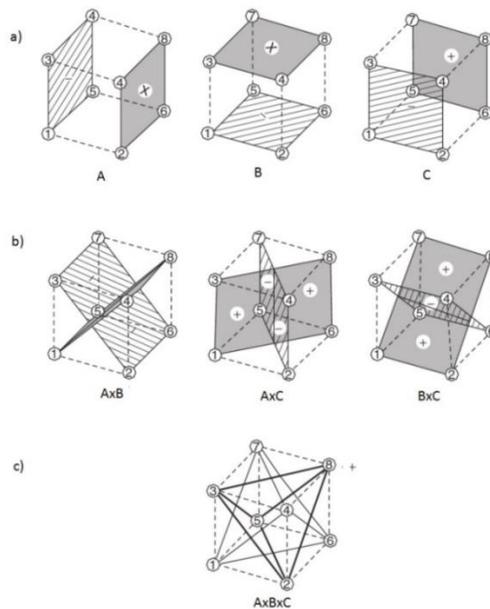
Figura 6. Diseño  $2^3$  factorial, a) codificado en el orden estándar, b) esquema de la dimensionalidad de los tres factores: diámetro a la entrada A, temperatura a la entrada B y espesor del refractario C.

Por ende, para dar una solución cuantitativa del comportamiento del sistema es muy importante determinar *qué* factores hacen *qué* a *qué* respuestas. Los diseños factoriales proporcionan este tipo de información.

En la Figura 6b, es posible observar que existen cuatro combinaciones que determinan el efecto del diámetro de entrada A, una para cada una de las cuatro combinaciones de la temperatura de entrada B y el espesor del refractario C. La media de estos cuatro valores se denomina *efecto principal* del diámetro de entrada.

La simetría general del diseño tridimensional, asegura que existe un conjunto similar de cuatro medidas para el efecto de la temperatura de entrada B, y así en cada una de ellas, los niveles de los factores A y C se mantendrán constantes, lo que numéricamente proporcionará el efecto principal de cada uno de los factores.

Cuando existe una interacción doble, como un efecto principal, el efecto de una interacción es una diferencia entre dos medias, la mitad de los ocho resultados se incluyen en una media y la otra mitad en la otra. Igual que los efectos principales se pueden representar gráficamente como un contraste de las observaciones en caras paralelas del cubo (ver Figura 7a), la interacción AxC es un contraste entre dos planos diagonales, tal como se muestra en la Figura 7b. Las interacciones AxB y BxC pueden considerarse de forma similar.



**Figura 7. Representación geométrica de los contrastes que corresponden a los efectos principales y a las interacciones, a) efectos principales, b) interacción de dos factores y c) la interacción de los tres factores.**

La estimación de una interacción triple, es de nuevo, el promedio de las interacciones dobles. Si los puntos experimentales, que contribuyen a las dos medias son aisladas, comprenderán los tetraedros formados en la Figura 7c, que en conjunto comprenden el cubo.

Las ecuaciones siguientes, compilan algebraicamente los párrafos anteriores. Para cuantificar el efecto de una variable ver ecuación (1.4.5), la interacción doble viene dada por la ecuación (1.4.6) y finalmente, la ecuación (1.4.7) estima la interacción triple.

$$\text{Efecto de la variable } A = \frac{[(y_2+y_4+y_6+y_8)-(y_1+y_3+y_5+y_7)]}{4} \quad (1.4.5)$$

$$\text{Interacción } AB = \frac{[(y_4-y_3+y_8-y_7)-(y_2-y_1+y_6-y_5)]}{2} \quad (1.4.6)$$

$$\text{Interacción } ABC = \frac{[(y_8-y_7)-(y_6-y_5)-(y_4-y_3)-(y_2-y_1)]}{4} \quad (1.4.7)$$

Donde,  $y_i$  es el valor de la variable respuesta en el  $i$ -ésimo experimento ( $i = 1, 2, 3 \dots 8$ ).

La etapa clave, consiste en determinar los errores asociados con el efecto de cada variable y cada interacción, para que pueda determinarse la relevancia de cada uno de ellos. Así, es preciso asignar errores estándar. Esto puede llevarse a cabo, repitiendo los experimentos, pero también puede utilizarse para estimar el error estándar. Los efectos calculados que presenten un valor elevado comparado con el valor estándar, pueden considerarse importantes, mientras que los efectos que presentan un valor pequeño, en comparación con el valor estándar, pueden considerarse debido a las variaciones aleatorias y no son importantes.

El experimento factorial se planifica con la intención ex profesa de medir la interacción y evaluarla, a razón de esto se utilizó en este trabajo el software estadístico Minitab 17® para calcular los efectos medios de las variables de proceso y cuantificar el efecto de cada factor así como sus posibles interacciones en la variable respuesta, es decir, la posible caída térmica  $\Delta T$ , que sufre la aleación líquida en el dispositivo tipo vórtice.

Los resultados del diseño factorial de experimentos arroja no solo el efecto individual y las interacciones de todos los factores, sino también puede emplearse para obtener un modelo de respuesta, conocida como superficie de respuesta, que no es otra cosa que un modelo estadístico que predice el efecto

medido en función de sus variables. Este modelo, al ser matemático y cuantitativo puede ser sujeto a optimización de procesos ya descritos

Se verá en el capítulo de resultados y análisis, la utilidad de optimizar el sistema con estas ecuaciones, ampliando los límites superior e inferior de las tres variables de proceso, el diámetro de entrada A, la temperatura de entrada B y el espesor del refractario, mediante el software matemático MATLAB®.

### 2.1 Planteamiento del problema

En las últimas décadas la simulación numérica ha avanzado de manera significativa en muchas áreas de investigación, en particular con el uso de los códigos CFD por sus siglas en inglés, *Computational Fluid Dynamics*, debido a su versatilidad se han convertido en herramientas poderosas de análisis para problemas que involucran flujo de fluidos en las diversas áreas de ingeniería. Los códigos CFD analizan los sistemas relacionados con el flujo de fluidos, la transferencia de calor y fenómenos asociados a reacciones químicas. La técnica es muy potente y se extiende a una amplia gama de aplicaciones industriales y de investigación.

Este trabajo fue desarrollado mediante el código CFD Ansys Fluent® versión 14.5, para caracterizar de forma aproximada el comportamiento de la fluidinámica y la transferencia de energía de un dispositivo tipo vórtice en tercera dimensión (3D).

Ansys Fluent® 14.5 proporciona capacidades de modelado integral para un amplio rango de problemas de flujo de fluidos. El problema que se tratará es un flujo incompresible, bajo un régimen completamente turbulento, bifásico y en estado transitorio, es decir dependiente con el tiempo. El estudio pretende calcular la caída térmica asociada con el tiempo de residencia que le toma a la aleación líquida salir del dispositivo, puesto que un tiempo de residencia muy alto resultará en una alta caída térmica, lo cual puede afectar la operación del dispositivo por lo que un precalentamiento del sistema, junto con un flujo de calor durante la operación pueden minimizar la caída térmica.

### 2.2 Hipótesis

A través de las ecuaciones gobernantes que describen los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía que gobiernan la fluidinámica y la transferencia de calor en el dispositivo, es posible predecir mediante el modelado matemático y la solución numérica del mismo, las caídas de temperatura en la aleación líquida, desde la entrada hasta la salida del dispositivo tipo vórtice o mezclador de aleaciones.

Los mecanismos de la transferencia de energía de conducción y de convección, junto con el principio de conservación de energía, gobiernan las fluctuaciones de temperatura en la aleación líquida desde el núcleo turbulento del sistema a las paredes, siendo el transporte convectivo turbulento de energía el más rápido debido a la vigorosa actividad del vórtice formado. Las variables de proceso como el diámetro de entrada **A**, la temperatura de entrada de la aleación líquida **B** y el espesor de las carcasas que forman y recubren al dispositivo **C**, permitirán cuantificar las posibles caídas de temperatura de la aleación líquida desde que entra hasta que sale del dispositivo.

### 2.3. Objetivos

- i. Modelar matemáticamente la fluidinámica y la transferencia de energía del dispositivo mezclador y resolver numéricamente mediante el software comercial CFD Ansys Fluent® 14.5.
- ii. Hacer un análisis de proceso modificando ciertas variables de proceso, tales como el diámetro de entrada A, la temperatura de entrada B y el espesor del refractario C, para poder establecer bajo qué condiciones de operación las pérdidas de energía del dispositivo tipo vórtice, sean mínimas.
- iii. Con las ecuaciones obtenidas del modelo factorial  $2^k$ , de regresión lineal múltiple con interacciones, encontrar la solución óptima de la variable respuesta ( $\Delta T$ ), mediante el software matemático MATLAB®.
- iv. Mediante el modelo de la fase discreta (DPM), evaluar la trayectoria y los tiempos de residencia de las partículas en la fase continua (aleación líquida).

### 2.4. Modelo Matemático <sup>[9, 10]</sup>.

#### 2.4.1. Formulación del modelo matemático.

Para poder describir matemáticamente la naturaleza de flujo de fluidos acoplando las pérdidas de energía que podría sufrir el sistema, se requiere de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que definen la conservación de masa, cantidad de movimiento y la

conservación de energía en el fluido en régimen turbulento. Por lo que en este trabajo se usó el modelo de turbulencia k-epsilon estándar que describe la turbulencia del sistema.

A continuación se presenta el modelo matemático usado.

#### 2.4.2. Suposiciones.

Debido a la complejidad de la simulación que predice la forma de la superficie libre o vórtice, es importante establecer suposiciones que permitan simplificar el problema y facilitar su solución. Las suposiciones de este trabajo se enlistan a continuación:

- i. Estado transitorio.
- ii. Propiedades físicas constantes en la fase líquida (aleación líquida) en la fase gaseosa (aire ambiente) y en la fase discreta (partículas esféricas sólidas).
- iii. La fase líquida es un fluido incompresible y newtoniano.
- iv. La fase discreta son partículas sólidas o esferas rígidas y permanecen con un diámetro constante en todo el dominio de cómputo.
- v. Propiedades físicas constantes para los sólidos (refractario, acero).
- vi. Entrada de la fase líquida a velocidad constante. En la práctica es imposible partir bajo una velocidad constante en la boca del tubo que introduce la corriente metálica a la cámara, si no que se ajusta el flujo de metal con una cabeza metalostática que imprime una presión y define la velocidad con la que entra la aleación líquida a la cámara, la cual no debe ser uniforme sino por el contrario se espera que se establezca un patrón de flujo desarrollado tipo parabólico para ductos circulares (ver sección 2.4.5)\*.
- vii. Turbulencia isotrópica representada por el modelo de turbulencia k-epsilon estándar. A falta de mucha información experimental en estos momentos, la mejor práctica para decidir el modelo de turbulencia a emplear es usar el modelo estándar k-epsilon como primera aproximación.
- viii. El vórtice se simulará con el algoritmo numérico conocido como "*Volume Of Fluid*" (VOF), siendo esta técnica numérica la mejor disponible para simular flujos con superficies libres deformables (como lo es el caso del vórtice), siendo un cálculo de flujo de fluidos bifásico, donde las dos fases son: la aleación líquida y el aire (encima del vórtice).
- ix. Condición de no deslizamiento e impermeabilidad en las paredes del dispositivo.

- x. No se tomaron en cuenta las pérdidas de radiación desde el vórtice de la aleación líquida a los alrededores.

### 2.4.3. Ecuaciones Gobernantes <sup>[10]</sup>.

#### 2.4.3.1. Ecuación de conservación de materia.

Mediante el algoritmo *Volume Of Fluid* (VOF), se simuló la fluidinámica de un sistema bifásico (aleación líquida – aire), donde la aleación líquida es la fase continua y turbulenta y la fase dispersa corresponde al aire. El algoritmo VOF fue descrito por *Hirt y Nichols* (1981)<sup>[11]</sup>. El algoritmo utiliza una reconstrucción de la interfase considerando los principios de conservación de masa (ecuación de continuidad) y de conservación de flujo de cantidad de movimiento (Ecuaciones de Navier-Stokes).

La técnica de VOF consiste en considerar al sistema bifásico como una sola fase, al que se le llama marcador ( $\xi$ ). Por lo que la ecuación de conservación de masa del marcador, está dada por la ecuación (2.4.3.1):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\nabla \cdot \xi \vec{v}) = 0 \quad (2.4.3.1)$$

La ecuación de continuidad expresa la conservación de masa en todo el elemento del volumen. De esta manera, en la ecuación (2.4.3.1), el primer y el segundo término corresponden al término transitorio y la convección de  $\xi$ , respectivamente, mientras que  $\vec{v}$  es el vector de velocidad y  $t$  es el tiempo.

El símbolo  $\nabla$ , es un operador diferencial vectorial, denominado nabla y que se define por la ecuación (2.4.3.2):

$$\nabla = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.4.3.2)$$

Donde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  son los vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Debido a que ambas fases llenan completamente el dominio, las fracciones volumen suman la unidad, ver ecuación (2.4.3.3):

$$(\xi_{liq} + \xi_{gas}) = 1 \quad (2.4.3.3)$$

Donde los subíndices “*liq*” y “*gas*” se refieren a las fases líquida y gaseosa respectivamente.

Así, con la técnica VOF las fracciones volumen para cada fluido se determinan en cada celda o volumen de control, en este caso con dos fluidos en el dominio. El valor del marcador  $\xi_{liq}$  es la fracción volumen de la fase líquida, esto implica que la fracción del gas sea  $(1 - \xi_{liq})$ . Si el  $\xi_{gas}$  tiene el valor de uno, quiere decir que solamente hay presencia de gas en el nodo, mientras que un valor de cero indica la presencia de la fase líquida; un valor entre cero y uno define la mezcla de gas y líquido, en consecuencia la presencia de la superficie libre.

Conociendo el valor de  $\xi$  de una de las dos fases en un nodo, es posible determinar las propiedades del fluido como un promedio ponderado de las fracciones volumen en cada fase. Un ejemplo de este promedio ponderado es la densidad, que se puede calcular con la ecuación (2.4.3.4):

$$\rho = \rho_{gas}(1 - \xi_{liq}) + \rho_{liq}(\xi_{liq}) \quad (2.4.3.4)$$

Donde  $\rho$  es la densidad.

De la misma manera, la viscosidad o la conductividad térmica pueden calcularse ponderando las fracciones de volumen de cada fase, similar a la ecuación (2.4.3.4).

#### **2.4.3.5 Ecuación de conservación de movimiento para el fluido (fase continua).**

La ecuación de conservación de movimiento, representa el balance global de los flujos de cantidad de movimiento o balance de fuerzas actuantes en un fluido, donde en un elemento de volumen la rapidez de entrada de la cantidad de movimiento menos la rapidez de salida de cantidad de movimiento, más la suma de fuerzas que actúan sobre el elemento es igual a la rapidez de acumulación de la cantidad de movimiento dentro del elemento.

La ecuación (2.4.3.5), es la forma vectorial de la conservación de la cantidad de movimiento para el fluido, de izquierda a derecha está compuesta por los términos, difusivo o viscoso, convectivo o inercial, los gradientes de presión y la fuerza de gravitación, los cuales están igualados al término transitorio.

$$(\nabla \cdot \mu_{eff} \nabla v) - \nabla \cdot (\rho v v) - \nabla P + \rho g = \frac{\partial \rho v}{\partial t} \quad (2.4.3.5)$$

Donde,  $\mu_{eff}$  es la viscosidad efectiva del fluido que a su vez es la suma de la viscosidad laminar promedio y la viscosidad turbulenta que se obtiene del modelo k-epsilon estándar, (ver ecuación 2.4.3.6), mientras que  $P$  es la presión y  $g$  es la constante gravitacional. Cabe señalar que la ecuación anterior (2.4.3.5) está escrita en notación tensorial, por lo que en realidad son 3 ecuaciones distintas de conservación en 3 dimensiones. En coordenadas cartesianas habría un balance de la componente  $x$  de la fuerza, y otros dos para las componentes  $y$  y  $z$  de las fuerzas, es decir, tres balances de fuerzas o tres ecuaciones, a las cuales para fluidos Newtonianos se les conoce como ecuaciones de Navier- Stokes.

$$\mu_{eff} = (\mu + \mu_t) \quad (2.4.3.6)$$

Donde  $\mu$  y  $\mu_t$  es la viscosidad molecular y turbulenta respectivamente.

La cantidad  $\nabla \cdot \rho v v$ , no es una divergencia simple, pues  $\rho v v$  es un producto diádico de dos vectores, es decir un producto tensorial, lo que nos indica que la cantidad de movimiento es transferida mediante el movimiento volumínico del fluido, que se traduce en la transferencia convectiva de la cantidad de movimiento. Dicho término implica un tensor de segundo orden.

#### 2.4.3.7, 8 Ecuaciones para el modelo de Turbulencia k-epsilon estándar <sup>[11]</sup>.

Los flujos turbulentos son caracterizados por campos de velocidades fluctuantes por ser un fenómeno transitorio o dependiente del tiempo y por ser tridimensional, es decir, las 3 componentes de las velocidades que fluctúan existen y son diferentes de cero. Estas fluctuaciones en las 3 direcciones del espacio promueven el mezclado de las cantidades transportadas tales como momentum, energía y concentración de especies y provocan que las cantidades transportadas también fluctúen. Debido a que

estas fluctuaciones pueden ser de pequeña escala y de alta frecuencia, muchas de las veces implican un alto costo computacional, lo que puede traducirse en días de trabajo para segundos de simulación.

Las ecuaciones que gobiernan el sistema bajo régimen turbulento necesitan adicionar modelos de turbulencia para determinar las variables de interés. En este trabajo se simuló la fluidinámica del sistema mediante el modelo de turbulencia k-épsilon estándar.

El modelo de turbulencia k-épsilon estándar, es un modelo semi - empírico, y la derivación de las ecuaciones del modelo se basa en consideraciones fenomenológicas y de empirismo. Siendo el más robusto de los modelos de turbulencia que maneja el software CFD Ansys Fluent® 14.5, el modelo k-épsilon estándar ha probado ser eficaz en modelar la turbulencia de muchos sistemas continuos como el que se presenta en este trabajo y es por eso que se propone como una primera opción para representar la turbulencia del sistema.

El valor de viscosidad turbulenta ( $\mu_t$ ) de la fase continua (aleación líquida), se estima con el modelo de turbulencia estándar k-épsilon propuesto por *Lauder y Spalding*<sup>[11]</sup> mediante ecuaciones de transporte para la energía cinética debido a las fluctuaciones turbulentas de la velocidad  $k$ , y su rapidez de disipación  $\varepsilon$ , representadas por las ecuaciones 2.4.3.7 y 2.4.3.8, respectivamente.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + (G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k) \quad (2.4.3.7)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (2.4.3.8)$$

De lado izquierdo de la igualdad, las ecuaciones están compuestas por el término transitorio y los transportes convectivos, seguidos del transporte difusivo, de generación y disipación de energía, para  $k$  y  $\varepsilon$  respectivamente.

Donde,  $k$  es la energía cinética turbulenta,  $v_i$  es el componente  $i$ -ésimo de la velocidad del flujo ( $i = 1,2,3$ ),  $\varepsilon$  es la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta,  $\mu_t$  es la viscosidad turbulenta,  $G_k$  es la producción de energía cinética turbulenta debido a los gradientes de velocidad media,  $G_b$  es la producción de energía cinética turbulenta debido a las fuerzas boyantes,  $Y_M$  es la contribución de la dilataciones fluctuantes debido a la turbulencia.

$S_k$  y  $S_\varepsilon$  son términos fuente definidas por el usuario.

Los valores de  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$  y  $C_{3\varepsilon}$  son las constantes empíricas asociadas al modelo de turbulencia, así como  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  son los números de Prandtl para flujo turbulento.

El número de Prandtl turbulento, define el cociente entre viscosidad cinemática turbulenta  $\mu_t$  y difusividad térmica turbulenta  $\alpha_t$ .

En la mayoría de casos donde se carece de experimentos confiables, se asume un número de Prandtl turbulento de 1, lo cual se hizo en este trabajo. Los valores de las constantes empíricas antes mencionadas, se aprecian en la Tabla 1.

**Tabla 1. Constantes empíricas utilizadas en el modelo de turbulencia k-epsilon estándar [9].**

<b>C1ε</b>	<b>C2ε</b>	<b>C3ε</b>	<b>σ<sub>k</sub></b>	<b>σ<sub>ε</sub></b>
1.44	1.92	0.09	1.0	1.3

La viscosidad turbulenta (o viscosidad de eddy)  $\mu_t$ , es calculada en función de  $k$  y  $\varepsilon$ , mediante la ecuación 2.4.3.9:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.4.3.9)$$

Donde,  $C_\mu$  es una constante que vale 0.09.

Es importante aclarar que las ecuaciones de continuidad junto con las ecuaciones de Navier-Stokes y el modelo de turbulencia solo resuelven el dominio de los fluidos y no se resuelven en las carcassas ni en los refractarios sólidos.

#### 2.4.4.0 Ecuación de conservación de Energía [9,10].

Para poder predecir las pérdidas de energía del dispositivo tipo vórtice, Ansys Fluent® 14.5, resuelve la ecuación de conservación de energía como se describe en la ecuación (2.4.4.0):

$$\nabla \cdot \frac{k_{eff}}{c_p} \nabla \bar{H} - \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{H}) + \dot{Q} = \frac{\partial \rho \bar{H}}{\partial t} \quad (2.4.4.0)$$

De izquierda a derecha, el primer término representa la transferencia de energía por conducción, seguido de la transferencia de energía convectiva más la generación de calor, del lado de la igualdad corresponde a la rapidez de acumulación de la energía entálpica.

Donde,  $\rho$  es la densidad,  $t$  el tiempo,  $\bar{v}$  y  $\bar{H}$  son los vectores de velocidad y la entalpía respectivamente.

Dentro de Ecuación 2.4.4.1,  $k_{eff}$  se define como la conductividad térmica efectiva que es la suma de la conductividad térmica promedio  $k$  y la conductividad turbulenta  $k_t$ , la cual se obtiene del modelo de turbulencia k-epsilon estándar. (Ver ecuación 2.4.4.1).

$$k_{eff} = (k + k_t) \quad (2.4.4.1)$$

Para sistemas abiertos, se define a la capacidad calorífica a presión constante para relacionar el cambio en la entalpía debido a las variaciones de temperatura. (Ver ecuación 2.4.4.2).

$$c_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (2.4.4.2)$$

Con la ecuación anterior es posible intercambiar como variable dependiente de la ecuación de conservación de energía térmica tanto  $H$  como  $T$ , aunque en la práctica común en ingeniería es mucho más común resolver el campo de temperaturas que entalpías, lo cual se hizo en este trabajo, por lo que la ecuación de conservación de energía escrita con temperaturas es la siguiente. (Ver ecuación 2.4.4.3).

$$\nabla \cdot k_{eff} \nabla T - \nabla \cdot (\rho \bar{v} c_p T) + \dot{Q} = \frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} \quad (2.4.4.3)$$

Esta ecuación de conservación de energía es muy importante en este trabajo, ya que se resuelve tanto en la zona de los fluidos como en las carcassas del refractario y del acero, sólo que en los sólidos el término convectivo vale cero y en todos los puntos del dominio la generación también es cero.

#### **2.4.4.4. Ecuación para la fase discreta (*Discrete Phase Model, DPM*) [9].**

Los avances en la mecánica de fluidos computacional (CFD) ha proporcionado la base para una mayor comprensión en la dinámica de flujos multifásicos. Actualmente, hay dos enfoques para el cálculo numérico de flujos multifásicos, el enfoque Euler-Euler y Euler-Lagrange.

Básicamente, las descripciones euleriana y lagrangiana son dos formas de ver la mecánica de medios continuos. El enfoque lagrangiano, consiste en hacer un seguimiento del movimiento de las partículas, mientras que la descripción euleriana se enfoca en medir lo que pasa en puntos fijos del espacio. Ambas descripciones son equivalentes y a veces una es más cómoda de usar que la otra.

Como se mencionó en el capítulo I, un volumen de control es un punto fijo en el espacio, por el cual fluye fluido con cantidad de movimiento, masa y energía; este marco de referencia pertenece a un sistema euleriano, por el lado contrario, el marco de referencia lagrangiano, corresponde al estudio de masas de control u objetos físicos donde se estudia la trayectoria de su movimiento.

Ansys Fluent® trata al modelo de la fase discreta (DPM) como un enfoque euler-lagrange, discretizando a la fase del fluido como un proceso continuo, mediante la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras que la fase discreta, el lagrangiano, se resuelve mediante el seguimiento de un número de partículas a través del campo de flujo calculado.

Acoplada a las ecuaciones de transporte para la fase continua (aleación líquida), Ansys Fluent® resuelve la fase discreta como una segunda fase, bajo el marco de referencia lagrangiano. Esta segunda fase consiste en partículas esféricas dispersas en la fase continua. El software calcula las trayectorias de la fase discreta así como las interacciones de transferencia de energía entre las fases.

El cálculo de las trayectorias de la fase discreta se resuelve usando la formulación Lagrangiana, que incluye las fuerzas inerciales, hidrodinámicas y de arrastre para flujos en estado transitorio. Además, predice los efectos de la turbulencia en la dispersión de las partículas debido a los remolinos (*eddies*) presentes en la fase continua (aleación líquida).

La trayectoria de las partículas se resuelve mediante la integración del balance de fuerzas que actúan sobre la partícula, implicando calcular el equilibrio de fuerzas equivalentes a la inercia de la partícula con las fuerzas que actúan sobre ella, como se describe en la ecuación (2.4.4.4)

$$\frac{du_p}{dt} = F_D(\bar{u} - \bar{u}_p) + \frac{g(\rho_p - \rho)}{\rho_p} + \bar{F} \quad (2.4.4.4)$$

Donde,  $\frac{du_p}{dt}$  describe la razón de cambio de la partícula con el tiempo,  $F_D(\bar{u} - \bar{u}_p)$  es la fuerza de arrastre caracterizada por el gradiente de velocidades, la velocidad del fluido  $\bar{u}$  y la velocidad de la partícula  $\bar{u}_p$ ,  $g$  es la fuerza de gravedad,  $\rho_p$  es la densidad de la partícula,  $\rho$  la densidad del fluido y  $\bar{F}$  es la fuerza de aceleración adicional de la partícula.

La fuerza de arrastre se calcula a partir del campo de velocidades del fluido alrededor de la partícula, es una relación que involucra las fuerzas viscosas del fluido con respecto a las fuerzas inerciales de la partícula, como se muestra en la siguiente ecuación (2.4.4.5)

$$F_D = \left( \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \right) \left( \frac{C_D Re}{24} \right) \quad (2.4.4.5)$$

Donde,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $d_p$  es el diámetro de la partícula,  $C_D$  es el coeficiente de arrastre y  $Re$  es el número de Reynolds que se define mediante la siguiente relación en el balance de fuerzas. Ver ecuación (2.4.4.6)

$$Re \equiv \frac{\rho d_p |\bar{u}_p - \bar{u}|}{\mu} \quad (2.4.4.6)$$

El modelo de la fase discreta simula un amplio rango de problemas que involucran partículas como fase discreta, tales como separación, clasificación, dispersión, inyección por *spray*, agitación de líquidos mediante burbujes etcétera; en el presente caso de estudio, la incorporación de este modelo es básicamente, predecir el tiempo de residencia de un flujo de partículas, cuando la fase continua se encuentra en estado cuasi-estable. Una de las razones principales, es el estudio de la disolución de las partículas en cálculos futuros, tomando como base el algoritmo del presente.

#### 2.4.4. Condiciones iniciales y a la frontera.

Para poder obtener una solución particular del problema descrito por 7 ecuaciones diferenciales parciales acopladas y 1 ecuación diferencial ordinaria (1 ecuación de conservación de materia, 3 ecuaciones de cantidad de movimiento, 2 ecuaciones que describen el modelo de turbulencia k-épsilon, la ecuación de conservación de energía y la ecuación del equilibrio de fuerzas para las partículas sólidas), es necesario definir las condiciones iniciales para las derivadas temporales así como las condiciones de frontera para las derivadas espaciales.

##### 2.4.4.1 Condiciones iniciales para la fluidinámica del sistema, a ( $t = 0s$ ):

- i. El sistema se encuentra completamente lleno de aire estático ( $\xi_{gas} = 1$ ).
- ii. En todo el dominio, las componentes de velocidad son iguales a cero ( $\bar{v} = 0$ ).
- iii. Parámetros turbulentos igual a cero.
- iv. El refractario está precalentado inicialmente a  $900^{\circ}C$  y se asume constante en toda la pared.
- v. El acero está precalentado a  $300^{\circ}C$  y se asume constante en toda la pared.

##### 2.4.4.2 Condiciones iniciales para la fase discreta, a ( $t = 40 s$ ):

- i. La inyección ocurre de forma puntual, es decir en una coordenada fija en el dominio de la aleación líquida. (Ver figura 8)
- ii. La geometría de las partículas se considera esférica y rígida ( $d_p = cte$ ).
- iii. Las componentes de velocidad son cero, pues se asume que caen por gravedad ( $u_x, u_y, u_z = 0$ ).
- iv. Flujo de partículas constante durante un segundo.
- v. Propiedades termofísicas de las partículas son las mismas que el fluido (aleación líquida).
- vi. Temperatura de las partículas igual a la temperatura ambiente.
- vii. Trayectoria de las partículas es acoplada al movimiento de la fase continua, es decir que existen interacciones físicas entre las fases.

- viii. *Wall function-reflect*, en la pared refractaria (PR), es decir que si las partículas tienen contacto con la pared refractaria no se cortará la trayectoria, sino que continuará su trayectoria al contacto con la aleación líquida.
- ix. *Wall function-escape* en la superficie abierta a la atmósfera (SA), en la entrada (E) y la salida (S) del dispositivo tipo vórtice.

Las condiciones a la frontera del sistema se enlistan a continuación y se esquematizan en la Figura 8.

- i. Condición de no deslizamiento para las componentes de velocidad paralelas a las paredes del dispositivo.
- ii. Condición de impermeabilidad para las componentes de velocidad perpendiculares a las paredes del dispositivo.
- iii. La aleación líquida entra a una velocidad constante o presión metalostática, es decir a un valor de presión manométrica constante. La diferencia radica en el tipo de simulación (Ver sección 2.4.5)\*.
- iv. La superficie abierta a la atmosfera está a la presión atmosférica.
- v. La salida se encuentra a la presión atmosférica.
- vi. *Wall function* o funciones de pared en la pared refractaria (PR) y en la pared de acero (PA). Estas funciones se usan para extrapolar el perfil de velocidades en el núcleo turbulento con la velocidad cero en dichas paredes.

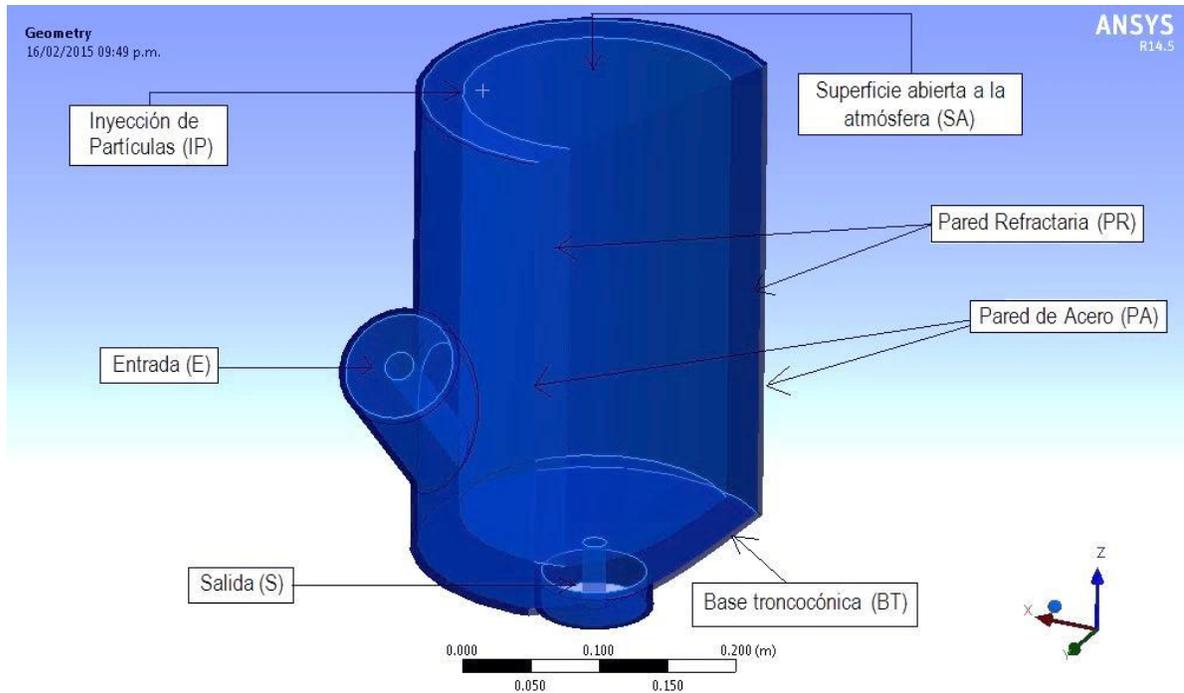


Figura 8. Esquema de las condiciones de frontera del sistema.

Como se ilustra en la Figura 8, la pared que se encuentra en contacto con los alrededores, es la pared de acero (PA), en la cual se asumió que existe un intercambio de calor con los alrededores mediante el mecanismo de transferencia de energía por convección libre o natural entre el aire y la placa de acero, ya que el aire frío denso en contacto con la placa caliente de la pared lateral provocará que el aire se caliente y se haga menos denso por lo que éste subirá al contacto con la placa, creando un movimiento circulatorio provocado naturalmente. De manera explícita, el problema del mecanismo de convección depende de determinar el coeficiente convectivo de transferencia de calor promedio  $\bar{h}$ , que a su vez implica el conocimiento de las propiedades del fluido, el tipo de geometría y las condiciones de flujo.

Establecida la frontera, se calculó el valor del coeficiente convectivo de transferencia de calor promedio  $\bar{h}$  para las paredes verticales del sistema. Los valores de las propiedades físicas del fluido que rodea al sistema (aire), se muestran en la Tabla 2, donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $L$  es la longitud característica de la pared,  $Pr$  es el número de Prandtl,  $k_f$  es la conductividad térmica del aire,  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica,  $T_s$  es la temperatura de la pared de la placa y  $T_\infty$  es la temperatura ambiente del aire.

Tabla 2. Propiedades del aire referenciados a la temperatura del fluido  $T_f$  [1,2].

$T_s$ [K]	$T_\infty$ [K]	$\beta$ [K <sup>-1</sup> ]	$k_f$ [ $\frac{W}{m K}$ ]	$\nu$ [ $\frac{m^2}{s}$ ]	$L$ [m]	$g$ [ $\frac{m}{s^2}$ ]	$Pr$
573.15	298.15	7.272x10 <sup>-3</sup>	0.0138	4.426x10 <sup>-6</sup>	0.3353	9.81	0.758

El resultado de adimensionar las ecuaciones gobernantes, implica la generación de números adimensionales, donde su magnitud adimensional permite describir una característica física del sistema. Es esta forma, en el que mediante el balance de energía en la frontera, aparece el número adimensional de Nusselt ( $Nu$ ). Bien se sabe que el número de Nusselt ( $Nu$ ), es una condición de frontera térmica, así como el coeficiente de fricción ( $C_f$ ), lo es para la parte hidrodinámica. En el balance térmico, se evidencia que el número de Nusselt es el cociente entre la resistencia térmica por conducción y la resistencia térmica por convección y que en términos prácticos incluye al coeficiente de transferencia de calor por convección. La ecuación empírica que describe la transferencia de calor por convección natural entre una pared vertical con una superficie de longitud  $L$  se muestra en la ecuación (2.4.4.7).

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \left(\frac{4}{3}\right) \left[\frac{Gr_L}{4}\right]^{0.25} g(Pr) \quad (2.4.4.7)$$

Calculando el valor del número de Nusselt con las correlaciones empíricas para paredes verticales que se muestran a continuación es posible conocer el coeficiente de transferencia convectivo  $\bar{h}$ , despejándolo de la ecuación (2.4.4.7), donde el número de Grashof ( $Gr_L$ ) y la función  $g(Pr)$  son:

$$g(Pr) = \frac{0.75Pr^{0.5}}{(0.609 + 1.221Pr^{0.5} + 1.238Pr)^{0.25}} \quad (2.4.4.8)$$

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (2.4.4.9)$$

La ecuación (2.4.4.8) es una fórmula de interpolación obtenida del balance de energía en la frontera y como se muestra en la ecuación (2.4.4.7) se admite que el gradiente de temperatura adimensional en la superficie es una función del número de Prandtl  $g(Pr)$ . El número de Prandtl proporciona una medida

del transporte de cantidad de movimiento y de la transferencia de energía por difusión en la capa límite  $\delta$ , donde esencialmente el valor del Prandtl influye fuertemente en el crecimiento relativo de las capas límite, hidrodinámica  $\delta_h$  y térmica  $\delta_t$ .

Dentro del mismo balance térmico, se encuentra la ecuación (2.4.4.9) que es el número de Grashof  $Gr_L$ . Este número adimensional tiene una interpretación física que indica la razón de las fuerzas de empuje con respecto a las fuerzas viscosas del fluido.

El valor numérico del coeficiente de transferencia convectivo promedio  $\bar{h}$ , (ver ecuación 2.4.5.0) se incorporó como parámetro convectivo en las *wall function* o funciones de pared, como condición de frontera térmica en la pared de acero (PA).

$$\bar{h} = 213.493 \frac{k}{L} = 8.787 \left[ \frac{W}{m^2 K} \right] \quad (2.4.5.0)$$

#### 2.4.5 Balance de energía mecánica o ecuación de *Bernoulli* (\*) [1,5].

Las ecuaciones gobernantes que se describieron con anterioridad se obtuvieron al escribir las leyes de conservación sobre un “sistema microscópico”, es decir sobre un elemento diferencial de volumen a través del cual circula fluido. El sistema microscópico no tiene superficies sólidas que lo limiten, puesto que las interacciones del fluido con superficies sólidas en sistemas de flujo específicos, se explican mediante las condiciones de frontera que se establecen sobre las ecuaciones diferenciales.

Los balances macroscópicos, se han utilizado ampliamente en muchas ramas de la ingeniería, puesto que nos proporcionan descripciones globales de grandes sistemas sin entrar mucho en detalle en la dinámica de fluidos dentro de los sistemas. A menudo son útiles para efectuar una apreciación inicial de un problema, como el balance de energía mecánica realizado en este trabajo.

El objetivo de realizar este balance macroscópico, fue determinar la cabeza de presión metalostática que imprime una presión y define la velocidad que adquiere la aleación líquida a la entrada del

dispositivo tipo vórtice, ya que en la práctica es imposible emplear un rotámetro para controlar el gasto de metal y en consecuencia se emplea una cabeza metalostática. Puesto que es imposible asignar una velocidad de entrada de fluido (*velocity inlet*) es necesario derivar esta velocidad aplicando un balance mecánico con la ecuación de Bernoulli. Al tener dos niveles para el diámetro de entrada A, un valor alto y uno bajo, se realizaron dos simulaciones con un valor de *pressure inlet*, como condición de frontera; logrado un estado cuasi-estable en la física del sistema, se obtuvo el valor de velocidad incorporándolo a los subsecuentes casos de simulación bajo las condiciones de operación que tienen en común. Las suposiciones hechas para la resolución de la ecuación de energía mecánica se muestran a continuación.

#### Suposiciones.

1. Estado estacionario.
2. Sistema isotérmico.
3. La aleación metálica es un fluido incompresible.
4. El fluido circula a merced de un gradiente de presión y en dirección a la fuerza de gravedad  $g$ .
5. Propiedades físicas constantes.
6. No hay pérdidas de energía por fricción debido a accesorios (codos y válvulas).
7. Debido a la contracción que sufre la aleación líquida (ver Figura 9), el factor de fricción  $e_f$ , en el balance de energía, no es despreciable.
8. El término de trabajo es igual a cero ya que no se realiza trabajo sobre el fluido.

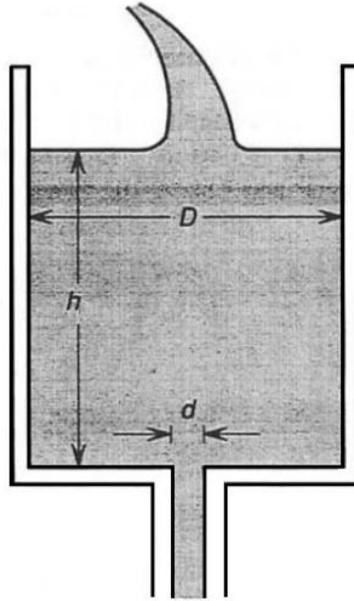


Figura 9. Ilustración del flujo a través de una contracción repentina.

Después de aplicar las suposiciones, el balance de energía mecánica queda como sigue, ver ecuación (2.4.5.1).

$$\Delta \frac{1}{2} v^2 + g\Delta h + \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{1}{\rho}\right) dP + \sum_i \left(\frac{1}{2} v^2 e_f\right)_i = 0 \quad (2.4.5.1)$$

De izquierda a derecha, el primer término corresponde a la energía cinética, seguido de la energía potencial, el gradiente de presiones y finalmente el operador suma que contiene el término de las pérdidas de energía por fricción debido a los obstáculos que presenta el fluido en el sistema de flujo. Dentro de este último,  $v$  es la velocidad media corriente abajo, a partir del  $i$ -ésimo obstáculo. Además, el factor de fricción  $e_f$ , es una función del número de Reynolds y de relaciones geométricas adimensionales.

La mayor parte de los sistemas de flujo contienen varios obstáculos, como accesorios o aparatos para medir el flujo. El sistema de flujo que comunica al dispositivo tipo vórtice, contiene una reducción de área, como se ejemplifica en la Figura 9. El valor del factor de fricción para flujos turbulentos fue establecido mediante la expresión siguiente, ver ecuación (2.4.5.2).

$$e_f = 0.5 \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \quad (2.4.5.2)$$

Donde,  $A_2$  es el área de la sección transversal más pequeña y el  $A_1$  es el área de la sección transversal más grande de la bandeja que recibe a la aleación líquida. (Ver Figura 9).

## 2.5 Propiedades termofísicas.

Las propiedades termofísicas utilizadas en el modelo matemático se detallan en la Tabla 3.

Tabla 3. Propiedades termofísicas de la aleación líquida (fase continua), aire, refractario típico, acero 1010 y partículas sólidas (fase dispersa) [2,20].

Propiedades termofísicas	Aleación Líquida	Aire	Refractario típico	Acero 1010	Partículas sólidas
Densidad, $\rho \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$	6530	1.225	3776.7	7862.17	6530
Capacidad Calorífica, $C_p \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$	609	1006.43	1276.504	535	609
Conductividad térmica, $k \left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$	28.3	0.0242	6.183	49.4	-
Viscosidad dinámica, $\mu \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$	$6.935 \times 10^{-3}$	$1.7894 \times 10^{-5}$	-	-	-
Peso molecular $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{Kg}_{\text{mol}}} \right]$	28.966	28.966	456	55.773	-
Emisividad, e	-	0	0.389	0.473	-
Entalpía estándar, $H^\circ \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg}_{\text{mol}}} \right]$	0	0	-	-	-
Temperatura de referencia, $T_{\text{ref}} [^\circ\text{C}]$	25	25	900	300	25
Díámetro [m]	-	-	-	-	0.0002

## 2.6 Metodología

El modelo presentado consistió en un arreglo matemático que no tiene solución analítica, haciendo necesaria la aplicación de una solución numérica.

Ante este panorama, la solución recae en la mecánica de fluidos computacional o mejor conocida como CFD por sus siglas en inglés, *Computational Fluid Dynamics*. Los códigos CFD manejan métodos numéricos y algoritmos que son utilizados para resolver y analizar problemas que involucran el flujo de fluidos, como lo es Ansys Fluent® 14.5.

### 2.6.1. Ansys Fluent® 14.5 como herramienta de trabajo.

De manera muy general, Ansys Fluent® versión 14.5 utiliza el método numérico de elemento finito para descomponer el sistema en un número finito de volúmenes de control dentro de los cuales, las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden presentadas, son resueltas bajo las condiciones iniciales y de frontera mediante los algoritmos de solución que proporciona el software, resolviendo en cada volumen de control, con lo se genera una serie de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas que se resuelven de manera iterativa y simultánea. Para esto, las variables independientes como son las coordenadas del espacio y el tiempo se discretizan o se dividen. Esta discretización consiste en dividir el dominio del sistema en elementos de volumen sin traslape en función de deltas o intervalos de tiempo.

Para estas tareas, Ansys Fluent® 14.5 maneja cuatro módulos para la simulación del sistema de interés. *Design Modeler*, *Meshing*, *Fluent* y *CFD-Post*.

*Design Modeler* (patrón de diseño), es la plataforma de diseño, donde el usuario puede crear, diseñar y especificar las dimensiones de la geometría/sistema a modelar (Ver Apéndice A para una descripción detallada de la creación de la geometría). Una vez creada la geometría bajo las especificaciones establecidas, se continúa con el segundo módulo de *Meshing* (mallado). En este apartado se discretiza el sistema en un número determinado de volúmenes de control (Ver Apéndice B para una descripción detallada y paso a paso de la creación de la malla). El método de volumen de control o elemento finito, permite la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales y consiste en dividir el volumen total

del dominio de cómputo en un número finito de volúmenes de control sin traslape, formando una malla que debe de ser lo más ortogonal posible para poder converger con facilidad la solución.

En el tercer módulo, *Fluent* (o procesador), es la plataforma en la se declaran los modelos matemáticos del *solver*, se plantean las propiedades físicas y químicas de los subdominios como parámetros, así como las condiciones iniciales y de frontera del sistema, así como algunos parámetros numéricos derivados de correlaciones empíricas. Este módulo es de vital importancia, ya que en él se realiza la solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales que representan los principios de conservación, las cuales se integran en cada volumen de control y con ello dichas ecuaciones pasan a ser sistemas de ecuaciones algebraicas que son resueltas de manera numérica e iterativa, simultáneamente (Ver Apéndice C para una descripción detallada y paso a paso del *set up* del problema).

Una vez terminada la solución o alcanzada la convergencia en donde se han satisfecho los principios de conservación, se prosigue con el módulo de *CFD-Post* (o post-procesamiento), donde es posible visualizar el estado de la simulación mediante la representación gráfica y numérica los patrones de velocidad, contornos de temperatura y presión, imágenes, videoclips, fotografías en tercera dimensión (*3D image viewer*) que pueden ser añadidas a una presentación en *Power Point*, etcétera. Sólo por mencionar algunos tipos de presentación de resultados.

### **2.6.2 Sensibilidad de la malla.**

El objetivo de la sensibilidad de la malla es seleccionar aquella que resuelva el problema con la mayor exactitud en el menor tiempo de cómputo posible, o bien, aquella que combine estas dos cualidades de manera tal que se encuentren en equilibrio.

De manera general, las principales características de las mallas utilizadas para los casos de simulación, se reportan en la Tabla 4.

Tabla 4. Características métricas del mallado.

Características de la malla	Diámetro <sup>(-)</sup> , Espesor <sup>(-)</sup>	Diámetro <sup>(-)</sup> , Espesor <sup>(+)</sup>	Diámetro <sup>(+)</sup> , Espesor <sup>(-)</sup>	Diámetro <sup>(+)</sup> , Espesor <sup>(+)</sup>
Tamaño [m] (mínimo //máximo)	0.00366// 0.00732	0.00286 //0.00572	0.003// 0.0072	0.0015// 0.006
Ortogonalidad (promedio //mínima)	0.9490 //0.2003	0.9448 //0.1851	0.9487 //0.1330	0.9455// 0.1512
Skewness (promedio// máximo)	0.1136// 0.9893	0.1057 //0.9862	0.1137// 0.9957	0.1051 //0.9913
Número de elementos	309,495	477,261	327,525	438,321
Tiempo de cómputo [hrs]	192	240	288	336

En la Tabla 4, se muestran las características de cada una de las mallas generadas, para las variaciones de nivel del factor geométrico. A su vez, muestra el tamaño mínimo y máximo que tienen en promedio cada uno de los volúmenes de control generados. El número de elementos fueron generados mediante el método de mallado *Cut cell*. Este método es uno de los más versátiles que maneja el módulo de *Meshing*, que consiste en generar volúmenes de control hexaédricos, facilitando al usuario la generación de una malla con una mejor ortogonalidad entre cada elemento. La calidad ortogonal es medida en un intervalo de cero a la unidad, ésta métrica se basa en la relación que existe entre el volumen y la longitud del elemento, un valor igual a la unidad responde a que el elemento es un tetraedro perfecto, un valor igual a cero indica que el elemento tiene un volumen cero o negativo. A su vez, la asimetría que pueden presentar los volúmenes de control son medidos por el valor obtenido de *Skewness* (asimetría o deformación). En la generación de la malla, algunos elementos sufren de asimetría, implicando que el ángulo de contacto entre cada elemento ya no sea ortogonal. Los algoritmos que resuelven las ecuaciones gobernantes del sistema, están fuertemente ligadas a la calidad del mallado, puesto que se necesita que exista continuidad en todo el dominio del sistema. En la Tabla 4, se señalan los valores numéricos de la ortogonalidad y *Skewness* de las mallas generadas para los niveles altos y bajos de cada factor geométrico del sistema, estas mallas son el resultado de un gran número de ensayos, con el

fin de optimizar la relación que existe entre exactitud y tiempo de cómputo. Es importante resaltar y considerar que quizá un mallado, mejoraría los valores numéricos presentados en la Tabla 4, sin embargo un mallado más fino implicaría un tiempo de cómputo mayor.

En la Figura 10, se muestra una de las cuatro mallas, que fue ocupada para los cálculos realizados para el dispositivo tipo vórtice, a diferentes vistas.

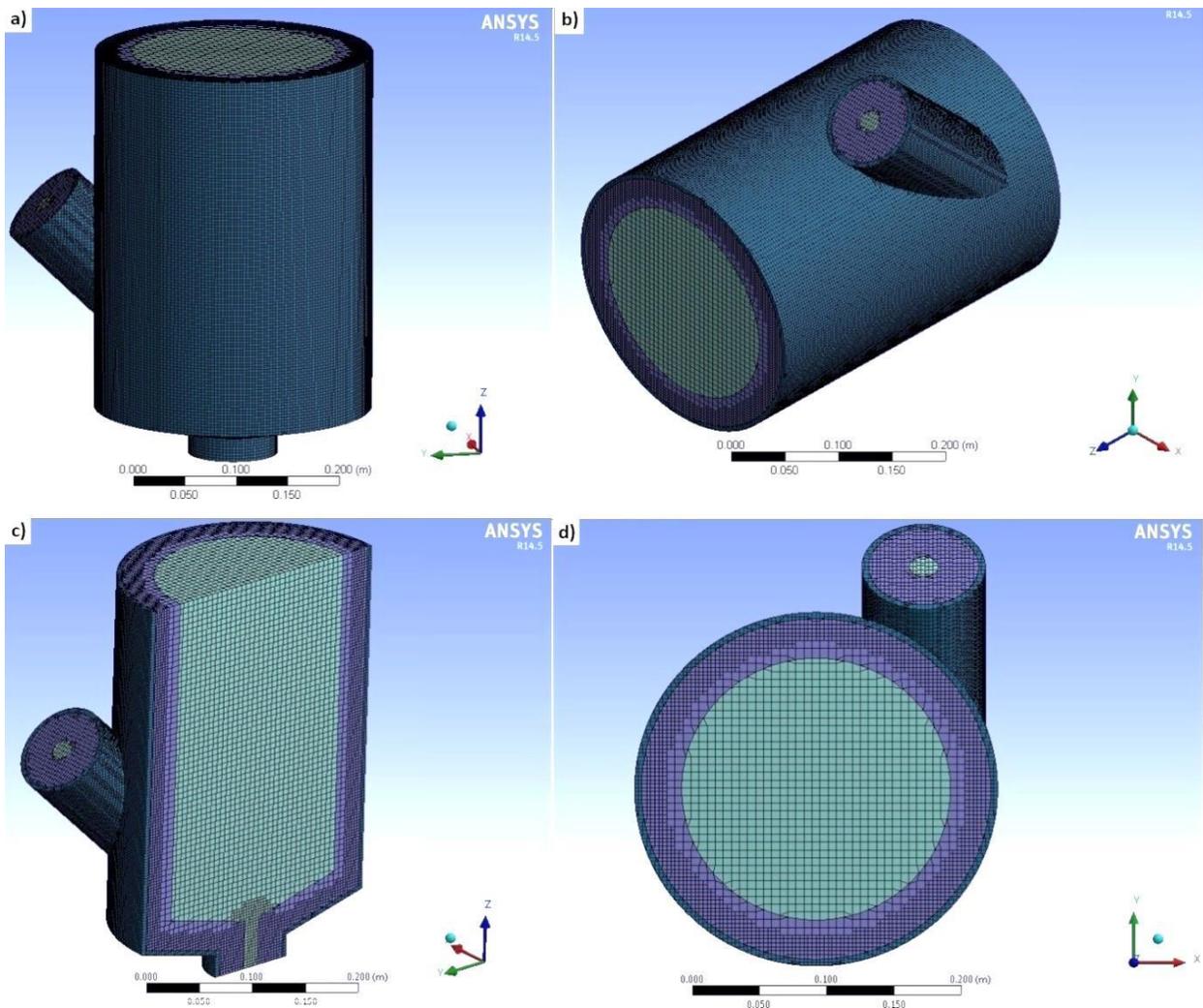


Figura 10. Mallado del sistema, a) vista lateral, b) vista isométrica, c) corte transversal de la vista lateral del dispositivo y d) vista sobre plano yx.

En la Figura 10, se aprecian tres dominios que se distinguen por la diferencia de color, estos corresponden al dominio de la aleación líquida-aire, (por ende la presencia de la superficie libre), le sigue

el dominio del refractario y por último el dominio del acero; en el apéndice B, se mostrarán los pasos utilizados en el mallado para definir la discretización requerida por dominio.

La simulación numérica del modelo matemático con el CFD Ansys Fluent® versión 14.5, fue obtenida en dos estaciones de trabajo, Imac Core™ i7-3770 CPU a 3.4 GHz con una memoria RAM de 8Gb y la HP Zion Intel® Xeon® CPU E31245 a 3.3 GHz y memoria RAM de 8Gb.

La duración de las simulaciones hizo necesario el uso de dos computadoras para disminuir el tiempo de cómputo. Como puede apreciarse en la Tabla 5, donde los segundos de simulación corresponden a horas de trabajo de cómputo considerable para cada simulación, debido a los saltos tan pequeños en el tiempo entre cada iteración y el número de elementos generados.

**Tabla 5. Tiempos de simulación y cómputo.**

Casos	Número de elementos	$\Delta t[s]$	Tiempo de simulación [s]	Tiempo de cómputo [horas]
1	477,261	0.0008	40	240
2	438,321	0.001	40	336
3	477,261	0.001	40	240
4	438,321	0.001	40	336
5	309,495	0.001	40	192
6	327,525	0.001	40	288
7	309,495	0.001	40	192
8	327,525	0.001	40	288
9 (A <sup>+</sup> )	327,525	0.0008	40	288
10 (A <sup>-</sup> )	309,495	0.001	40	192

En la Tabla 5 se muestra el número de elementos generados por cada caso de simulación, así como el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , que realiza cada iteración hasta lograr la convergencia establecida para cada ecuación diferencial. En promedio el tiempo de simulación para cada caso fue de 40 segundos equivalentes a 260 horas promedio, del tiempo de cómputo requerido, es decir casi 11 días por simulación.

## 2.7 Diseño experimental

Para el estudio del modelado matemático de la fluidinámica y la transferencia de energía del dispositivo tipo vórtice, mediante el código CFD Ansys Fluent® 14.5, se trabajó en un diseño factorial a dos niveles  $2^k$ , para determinar cómo se ve afectada la temperatura de salida del dispositivo y la caída térmica ( $\Delta T$ ), cuando se modifican las variables de proceso. Los tres factores o variables de proceso estudiadas son: el diámetro de entrada **A**, la temperatura de entrada de la aleación líquida **B**, y el espesor del refractario que recubre al dispositivo **C**. Cada uno de los tres factores se estudió a dos niveles, de forma que el conjunto de experimentos es  $2 \times 2 \times 2$ , o diseño  $2^3$  factorial.

En la Tabla 6 se presentan los niveles altos y bajos de cada una de las tres variables o factores, mientras que en la Tabla 7 se presentan los ocho experimentos hechos con el software CFD, que representan el diseño factorial completo  $2^3$ .

**Tabla 6. Niveles altos y bajos de cada uno de los factores o variables.**

Factor/Nivel	Nivel bajo (-)	Nivel alto (+)
Diámetro de entrada A [cm]	1.5	2.2
Temperatura de entrada de la aleación líquida B [K]	1723.15	1773.15
Espesor del refractario C [cm]	2	3

**Tabla 7. Diseño factorial completo  $2^3$ , empleado en este trabajo con simulaciones CFD.**

No. Experimento/ Nivel de factor	Diámetro de entrada A [cm]	Temperatura de la aleación líquida B [K]	Espesor de refractario C [cm]
1	1.5	1773.15	3
2	2.2	1773.15	3
3	1.5	1723.15	3
4	2.2	1723.15	3
5	1.5	1773.15	2
6	2.2	1773.15	2
7	1.5	1723.15	2
8	2.2	1723.15	2

Los vectores de velocidad, contornos de temperatura, curvas de enfriamiento, tiempos de residencia de las partículas en la fase continua así como la cronología de la formación del vórtice dentro de la cámara del dispositivo se presentan en el siguiente capítulo.

Finalmente, con la superficie de respuesta obtenida del diseño de experimentos, se mostrarán las condiciones óptimas resultantes del software MATLAB®, con las que se minimizará la caída térmica en el dispositivo, que es uno de los principales objetivos de este trabajo.

### Capítulo III. Resultados y Análisis.

Es muy frecuente utilizar el método de experimentos factoriales en investigaciones comparativas, puesto que con el menor número de experimentos efectuados es posible obtener los efectos de las variables involucradas así como las posibles interacciones entre estas. El estudio de este trabajo se enfocó en establecer el efecto del diámetro de entrada **A**, la temperatura de entrada de la aleación líquida a la cámara del dispositivo **B** y el espesor del refractario que recubre y da forma al dispositivo **C**, sobre la caída de temperatura ( $\Delta T$ ).

Dentro del análisis estadístico, se mostrarán los efectos medios de las 3 variables de diseño y de proceso así como las ecuaciones obtenidas del modelo factorial  $2^3$  de regresión lineal múltiple con interacciones, obtenidas en el software estadístico Minitab 17® y evaluadas en MATLAB®, con la finalidad de calcular los parámetros óptimos que asegurarían la menor caída de temperatura ( $\Delta T$ ) en el dispositivo tipo vórtice.

Finalmente, se expondrá cuantitativamente que una vez formado el vórtice bajo las condiciones de flujo establecidas y en estado cuasi-estable, la inyección de un flujo de partículas al dominio de la fase continua, coadyuvará a evaluar los valores del tiempo de residencia promedio de las partículas en la aleación líquida de la mano con el efecto del diámetro de entrada y la fuerza de arrastre ejercida por la fluidinámica del vórtice, básicamente las fuerzas que determinarán su residencia y trayectoria.

Para hacer más visible la tendencia de los efectos de las variables de operación, previamente se muestra la Tabla 8 que representa la matriz de diseño experimental factorial dividida por bloques con las notaciones establecidas para cada caso de estudio. La presentación de las imágenes será tomada en ese orden.

**Tabla 8. Matriz de experimentos dividida por bloques.**

Bloque	No. Experimento (caso de estudio)	Diámetro de entrada A [ <i>cm</i> ]	Temperatura de la aleación líquida B [ $^{\circ}$ C]	Espesor de refractario C [ <i>cm</i> ]	Notación
I	1	1.5	1500	3	a) I (-,+,+)
	3	1.5	1450	3	b) I (-,-,+)
	5	1.5	1500	2	c) I (-,+,-)
	7	1.5	1450	2	d) I (-,-,-)
II	2	2.2	1500	3	e) II (+,+,+)
	4	2.2	1450	3	f) II (+,-,+)
	6	2.2	1500	2	g) II (+,+,-)
	8	2.2	1450	2	h) II (+,-,-)

### 3.1 Mapas vectoriales de velocidad.

#### 3.1.1 Cortes transversales.

Para conocer la fluidinámica en el dispositivo tipo vórtice y su relación con la transferencia de calor, es importante conocer las trayectorias de flujo que predominan y dan forma al movimiento del fluido (aleación líquida). En la Figura 11 (parte I y parte II) se muestran diferentes cortes transversales dentro del dominio del fluido que resulta en un mapeo de los vectores de velocidad. La Figura 11 está dividida en dos partes, la parte I corresponde a los incisos de la (a) a la (d) y que corresponden al valor bajo del diámetro de entrada ( $A^-$ ), mientras que la parte II son los incisos de la (e) a la (h) y son los casos que toman el valor alto del diámetro de entrada ( $A^+$ ). Bien se sabe que a flujo constante, con diámetros pequeños la velocidad promedio del fluido es mayor que la velocidad a diámetros mayores, tendencia clara en ambas figuras, mostrando que los valores más altos de la magnitud de la velocidad la obtienen los casos del bloque I (Figura 11-parte I), respecto a los del bloque II (Figura 11-parte II), sin embargo, es importante aclarar que los casos de los incisos (a), (c), (e) y (g), tienen 50 grados de temperatura más que los casos de los incisos (b), (d), (f) y (h); si bien, la viscosidad del fluido (aleación líquida) no fue calculada en función de la temperatura, si se tomó en cuenta el efecto del espesor de refractario (C) con el gradiente de temperatura. De manera cualitativa, el efecto del espesor del refractario no afecta significativamente la fluidinámica del fluido, aunque sí interfiere con las pérdidas energéticas que podría sufrir la aleación líquida.

Además, los cortes transversales en la Figura 11 (parte I y parte II) hacen evidente que la trayectoria del fluido es predominantemente angular, esto se debe a la geometría del sistema, como se especificó con anterioridad; la entrada de la aleación líquida a la cámara del dispositivo se lleva a cabo de forma tangencial, cuando golpea la base troncocónica sigue un movimiento angular debido a que el cuerpo del dispositivo es cilíndrico. Enfocándonos en que la diferencia del bloque I con el bloque II es el diámetro de entrada, es posible visualizar que la magnitud de la velocidad es mayor para aquellos casos en los que el diámetro es bajo ( $A^-$ ) esto quiere decir que la cantidad de movimiento del fluido es mayor con velocidades de alrededor de 1 m/s en la parte media baja de la cámara, a diferencia de los casos del bloque II con un diámetro alto ( $A^+$ ), obtienen una cantidad de movimiento menor y una velocidad aproximada de 0.5 m/s, en el mismo nivel de la cámara del dispositivo.

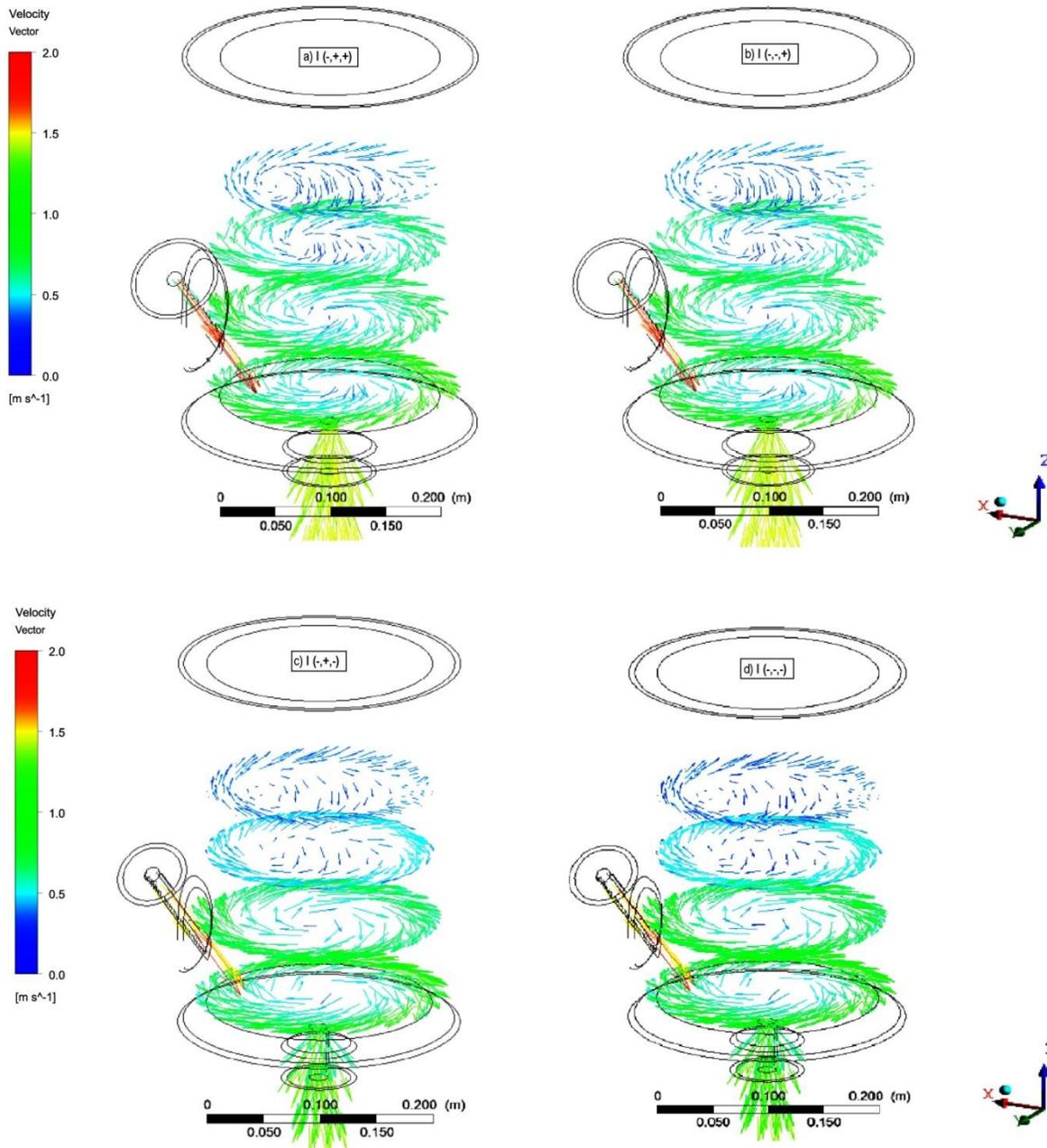


Figura 11 (Parte I). Mapas vectoriales, ubicados sobre el plano xy. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

Como los casos del bloque I (ver Figura 11-Parte I) obtienen magnitudes mayores de velocidad a la entrada, el ímpetu o la inercia que lleva el fluido es mayor haciendo que se repliegue angularmente hacia las paredes del sistema por fuerza centrífuga, por lo que la velocidad a la salida del dispositivo es menor,

con un valor de alrededor de 1 m/s, en contraste con los valores de velocidad a la salida del dispositivo asociada a los casos del bloque II, (ver Figura 11-Parte II) con valores de velocidad que rondan los 1.5 m/s. Esto se debe a que aunque el fluido entre a menores velocidades (con altos diámetros de entrada), el nivel de fluido o altura alcanzada es mayor, tal que este ejerce mayor presión metalostática lo que implica mayor velocidad en la descarga de fluido, respecto a los casos con diámetro pequeño (A-).

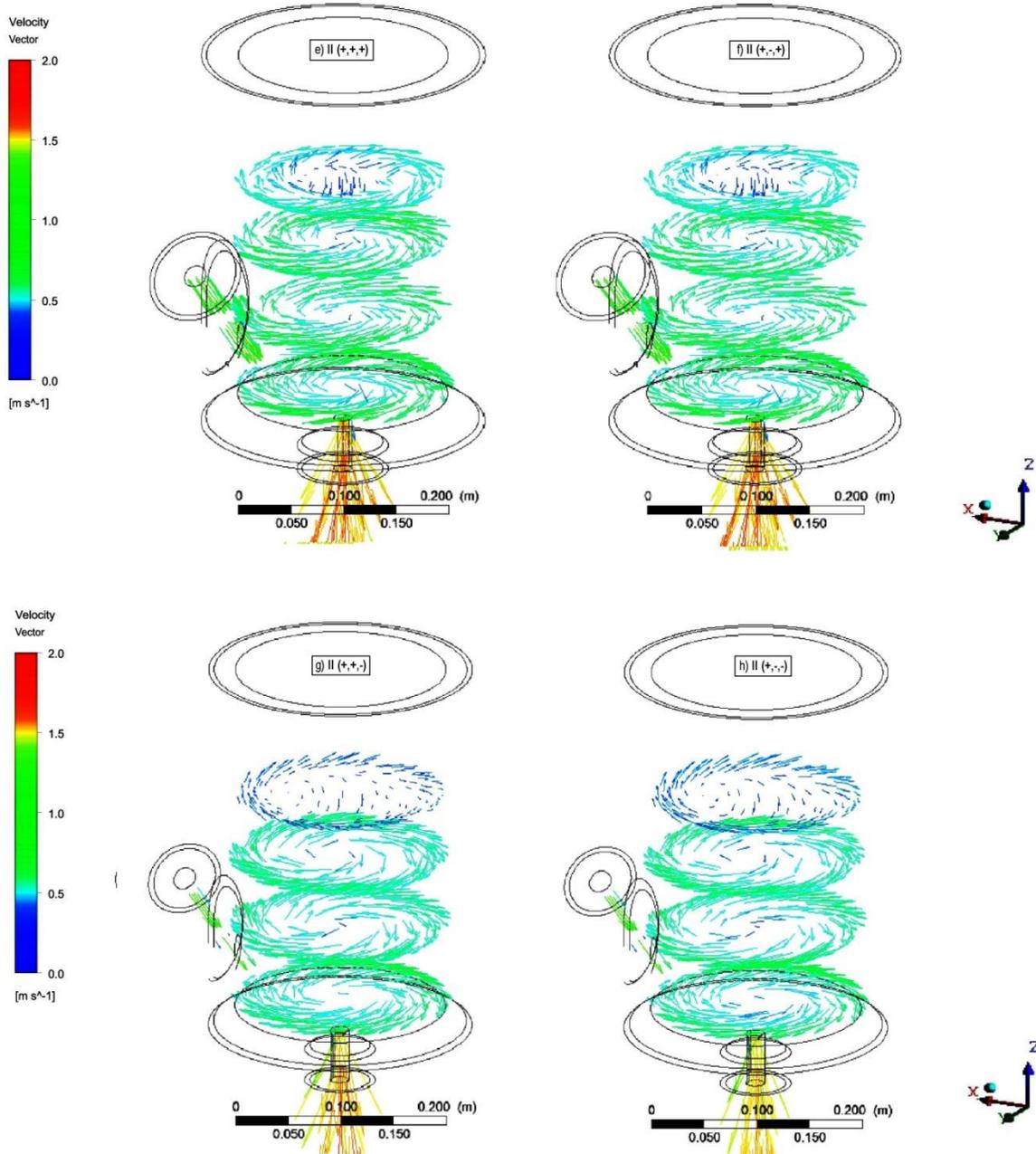


Figura 11 (Parte II). Mapas vectoriales, ubicados sobre el plano xy. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

Se ve con claridad que independientemente de los valores alto y bajo del diámetro de entrada (A), el diseño geométrico intrínseco del dispositivo hace que la cantidad de movimiento que adquiere el fluido predomine en dirección angular, sobre las componentes axiales y radiales de velocidad.

### 3.1.2 Cortes axiales.

El mapa de vectores en cortes axiales que se muestra en la Figura 12 (parte I y parte II), fue formado en el dominio del fluido mediante la creación de un plano  $zx$  en el centro geométrico del dispositivo de aleación rápida. La Figura 12 respalda que el nivel de la aleación líquida es mayor en los casos del bloque II (diámetro  $A^+$ ), con respecto a los del bloque I (diámetro  $A^-$ ). Además, es una muestra clara de que la magnitud de los vectores de velocidad en la salida del dispositivo es mayor en los incisos (e), (f), (g) y (h) casos de alto diámetro de entrada ( $A^+$ ), sobre los incisos (a), (b), (c) y (d) de bajo diámetro de entrada ( $A^-$ ). Ver Figura 12-Parte I y II, respectivamente.

Independientemente del valor alto o bajo del diámetro de entrada, en la Figura 12 (parte I y parte II), es posible apreciar la superficie libre del vórtice formado, que delimita las fases presentes en la cámara del dispositivo (aleación líquida y aire). La magnitud de los vectores de velocidad más bajos corresponden al aire pero esta zona no es importante para el análisis sino la región que ocupa la aleación líquida. Ya se dijo que la componente de velocidad más importante en el fluido es angular, pero en este corte donde se ocultan las componentes angulares, se nota que los valores más altos de velocidad se encuentran cerca de las paredes.

Siendo patrones de flujo complejos, del lado donde se encuentra la bajada de la aleación líquida predominan las componentes axiales dirigidas hacia arriba, mientras que las componentes radiales se dirigen hacia el centro. En ese mismo lado hay una recirculación en sentido contrario a las manecillas del reloj justo en la base de la entrada. Del otro lado, también predominan las componentes axiales, pero estas van dirigidas hacia abajo mientras que las componentes radiales se dirigen hacia el centro del dispositivo. También se nota en general, que en el centro del dispositivo, justo abajo del fondo del vórtice, las velocidades son muy pequeñas y en esta zona es inestable en su rotación como lo muestra su geometría serpenteante desde el punto más bajo del vórtice a la salida del dispositivo.

También puede observarse en la Figura 12 que en los casos del bloque I se generan magnitudes de velocidad más altas descargadas en la base de la entrada que en los casos del bloque II y que si se

observan detenidamente dan una evidencia de la naturaleza turbulenta que existe en el fluido justo a la entrada de la cámara del dispositivo.

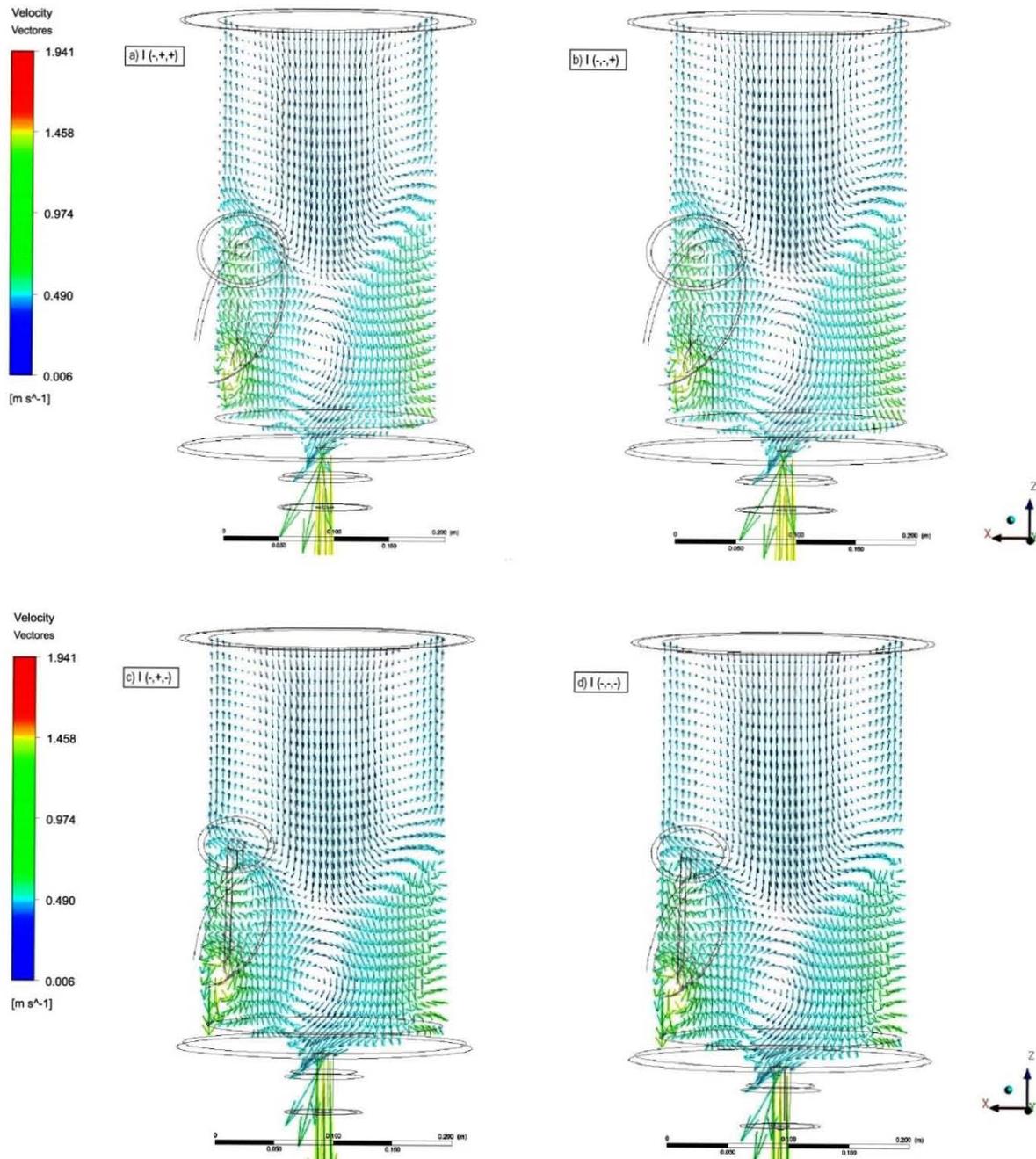


Figura 12 (Parte I). Mapas vectoriales, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

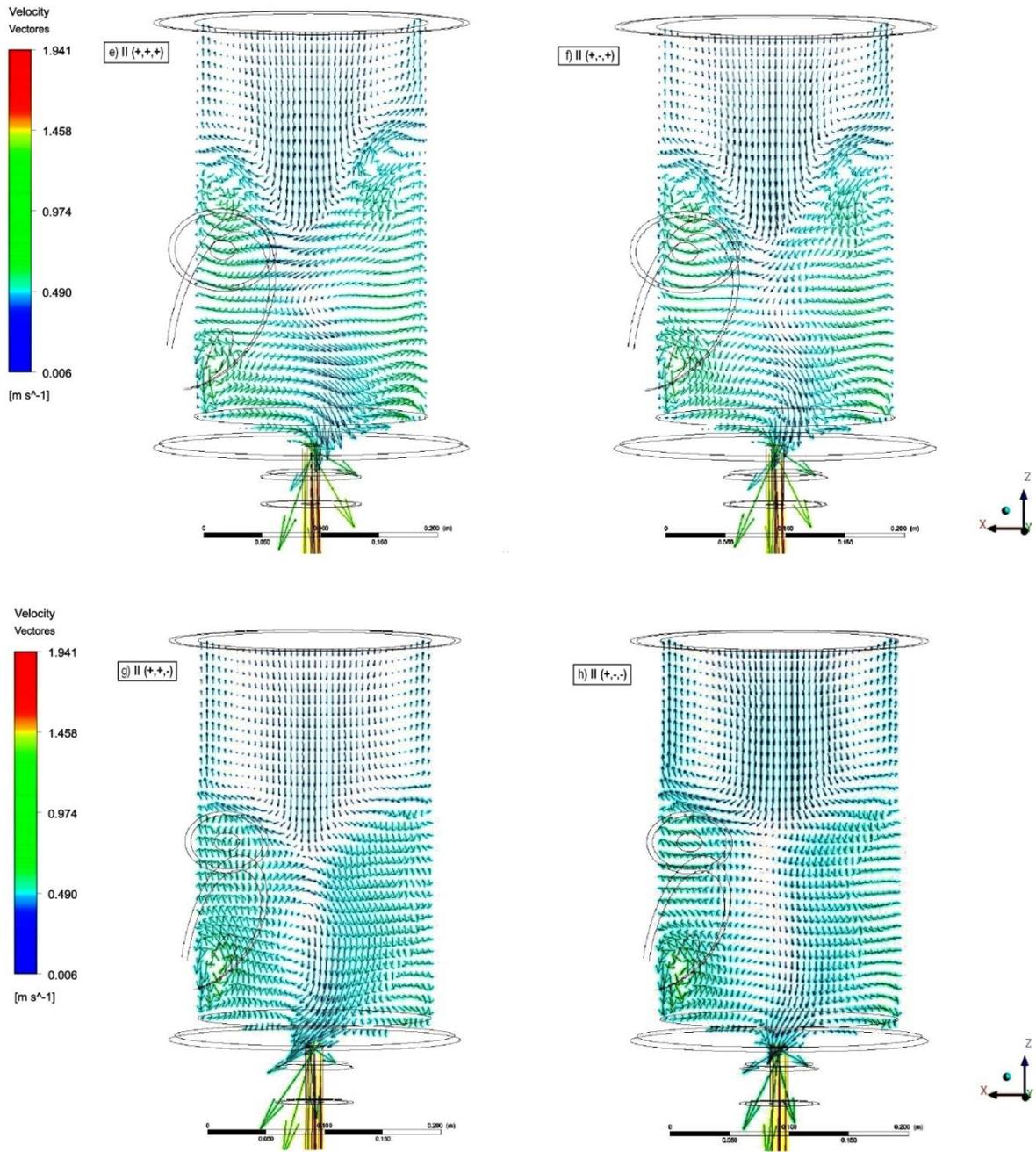


Figura 12 (Parte II). Mapas vectoriales, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

### 3.1.3 Superficie libre y formación transitoria del vórtice.

En trabajos anteriores a la presente tesis, se realizó un análisis de modelado matemático isotérmico [16] evaluando los efectos de cinco variables de diseño del dispositivo tipo vórtice, donde se estudió el efecto del diámetro de entrada, del ángulo de entrada, el ángulo de la sección troncocónica, la presencia o ausencia de una barrera en la cámara de mezclado y la posición de entrada del fluido a la cámara. Como paso posterior a la modelación matemática hecha, se llevaron a cabo pruebas físicas en un prototipo del dispositivo tipo vórtice, que tiene las mismas dimensiones físicas y condiciones térmicas que el modelo matemático presentado en esta tesis.

Las mediciones tomadas del prototipo (diámetro de entrada y de salida, espesor del refractario y del acero que recubren al sistema, altura de la cabeza metalostática en la bandeja que recibe al flujo de metal, así como los datos de temperatura tomadas en las carcasas del dispositivo) fueron las condiciones de frontera del modelo matemático descrito en el capítulo II. Aunque por razones de secrecía industrial con la empresa que financia este proyecto, no se pueden mostrar los resultados obtenidos con metal líquido ni detalles de los experimentos, sí se puede mencionar que los resultados que se muestran en las Figuras 11, 12, 13 y 14 se asemejan al comportamiento de la fluidinámica obtenida en las pruebas realizadas en el prototipo del dispositivo.

En la Figura 13 se muestra el patrón de flujo de la superficie libre que delimita claramente las fases presentes en el dominio del fluido (aleación líquida y aire). En los casos del bloque I (incisos de la (a) a la (d)) se obtienen las magnitudes de velocidad más altas en un rango de 0.6 a 0.8 m/s, con predominancia en la parte alta de la isosuperficie del vórtice formado, por el lado contrario, los casos del bloque II (incisos de la (e) a la (h)) que se encuentran en un rango que oscila entre 0.2 a 0.6 m/s, en ambos casos la velocidad más alta se encuentra ubicada en la parte media de la isosuperficie del vórtice.

El flujo de metal que llega a la entrada del dispositivo era suministrado por un recipiente rectangular, como se mostró en la Figura 9. Considerando constante la altura del metal en el balance de la energía mecánica, se obtuvo un valor de presión metalostática total aplicada a la entrada de la cámara, valor que fue incorporado como condición de frontera en la entrada del dispositivo (*pressure inlet* en el *set up* de Ansys Fluent®).

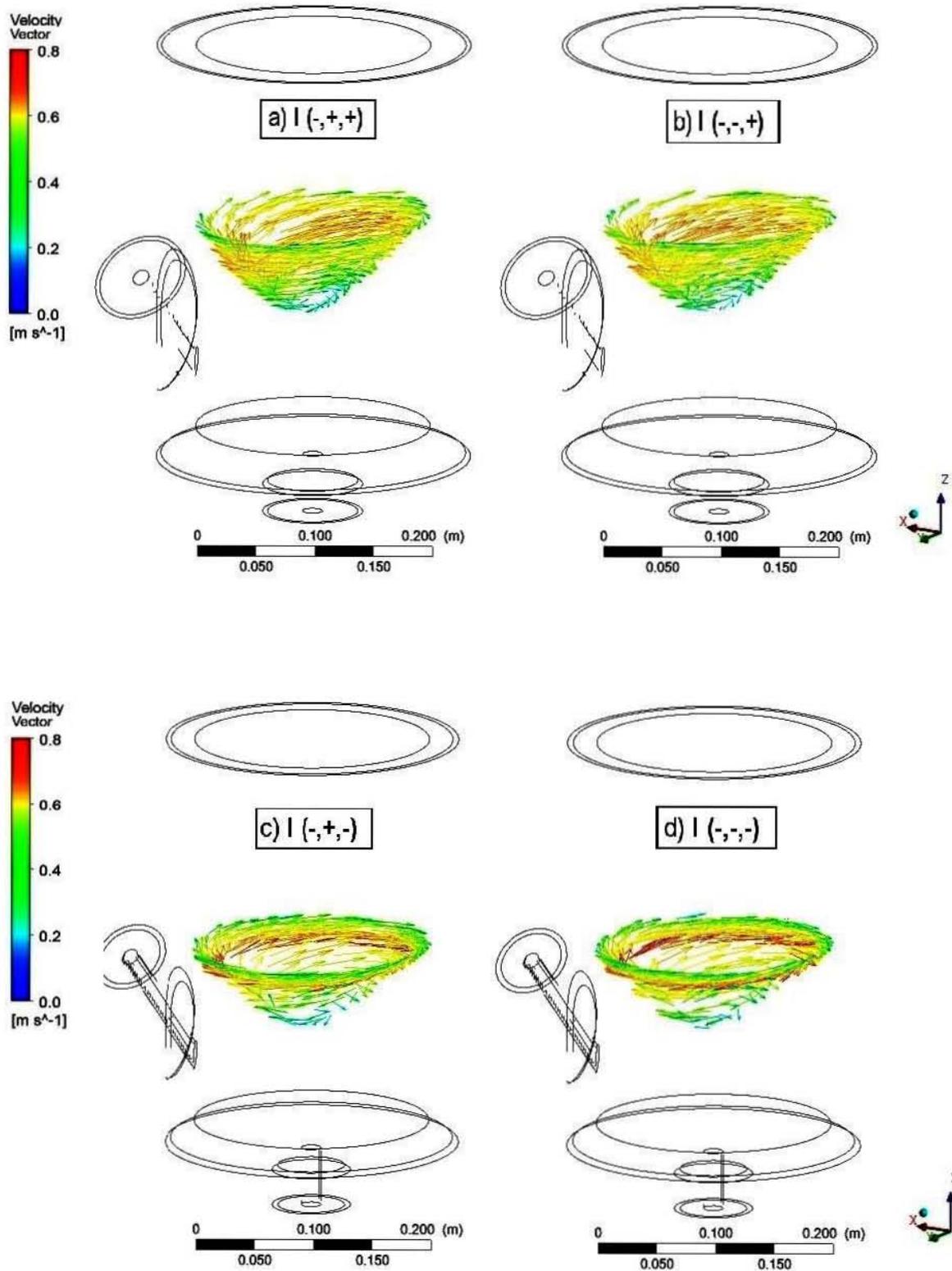


Figura 13 (Parte I). Mapas vectoriales, ubicados sobre la isosuperficie que delimita a la superficie libre. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

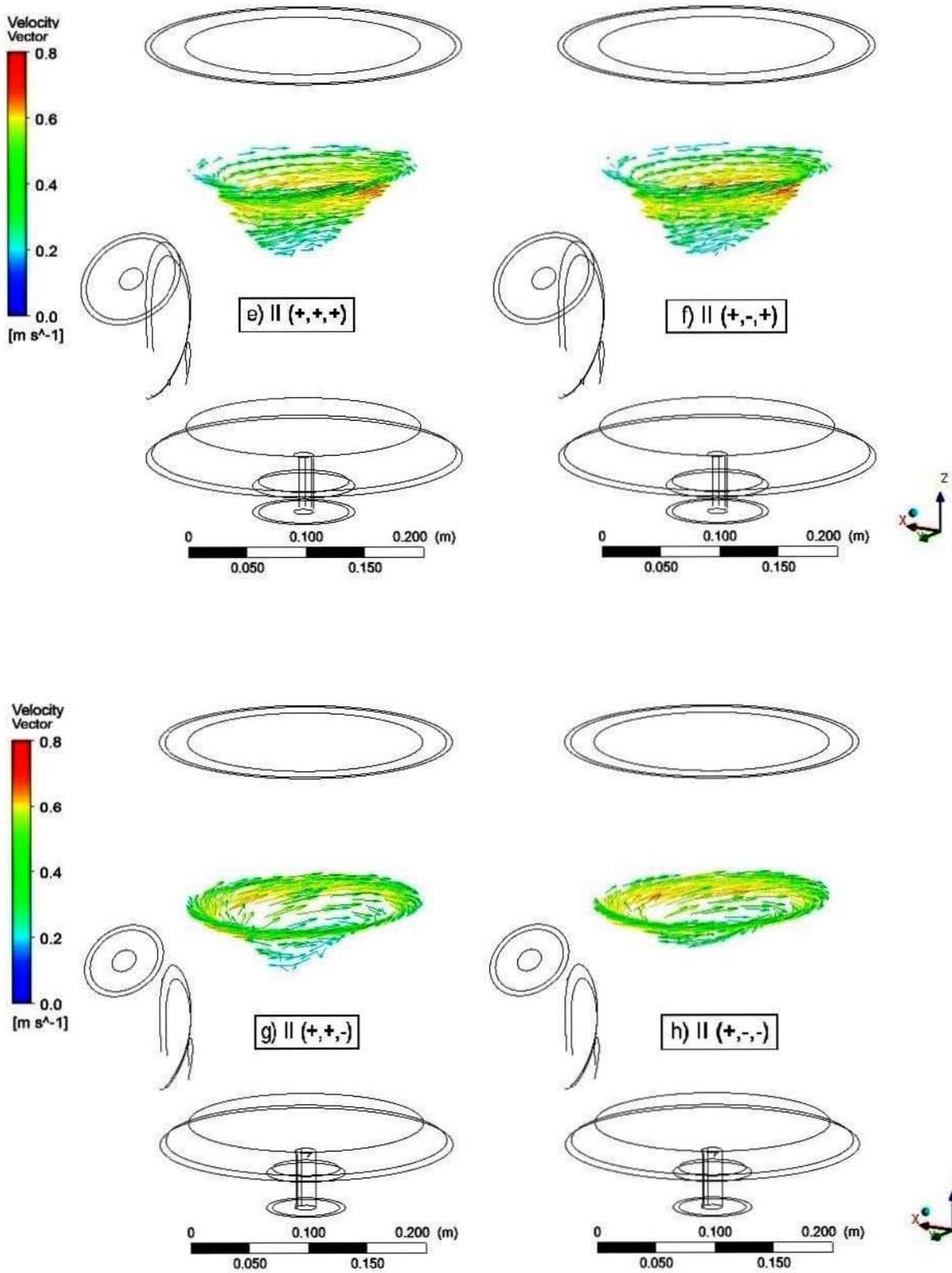


Figura 13 (Parte II). Mapas vectoriales, ubicados sobre la isosuperficie que delimita a la superficie libre. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

Una vez que la simulación llegó a un estado cuasi-estable, el flujo de la aleación y la velocidad en la entrada quedaron determinadas con un valor de flujo volumétrico de 21 L/min, valor que se mantuvo constante para todos los cálculos, siendo las pérdidas energéticas la evaluación de clave en este trabajo.

En la Figura 14 se muestra la historia de la formación del vórtice a un flujo de 21 L/min. Dicha historia o secuencia de formación del vórtice afecta simultánea y estrechamente los cambios energéticos o los enfriamientos y calentamientos que sufren las carcasas del refractario y del acero.

Las carcasas se consideraron precalentadas a una temperatura de 900°C, tal y como se midió experimentalmente después de empapar térmicamente el sistema con quemadores de gas convencionales. Al comienzo de las simulaciones, se partió con esta temperatura por lo que conforme avanza el tiempo de cálculo y la formación del vórtice, se aprecia un calentamiento en los resquicios de las carcasas que recubren al sistema como se aprecia en la Figura 14, específicamente en la unión entre el tubo que conecta a la entrada con la base troncocónica así como en la bajada. Mientras que el nivel de la aleación líquida va incrementando su volumen dentro de la cámara, la transferencia de calor desde el metal líquido hacia la estructura del dispositivo es evidente, tal y como se alcanza a percibir en la Figura 14, en donde se muestran los contornos de temperatura en el cuerpo cilíndrico del dispositivo que se encuentra recubierto con las carcasas del refractario y acero. También se aprecia que las zonas altas del dispositivo que no estuvieron en contacto con el metal líquido se “enfriaron” con el transcurso del tiempo.

Los primeros 10 segundos es una etapa transitoria en la forma del vórtice, desde que inicia la inyección del fluido en el dispositivo vacío hasta que se alcanza la forma final del vórtice. Después de los 10 segundos y hasta los 40 segundos que duró el cálculo, el único cambio se da en la altura o nivel del fluido dentro de la cámara, ya que el vórtice mantiene su forma inalterada y cada vez el cambio de altura es menos grande, lo que significa que el nivel a los 40 segundos ha llegado a un estado estacionario siempre y cuando siga alimentándose metal con el mismo valor de flujo.

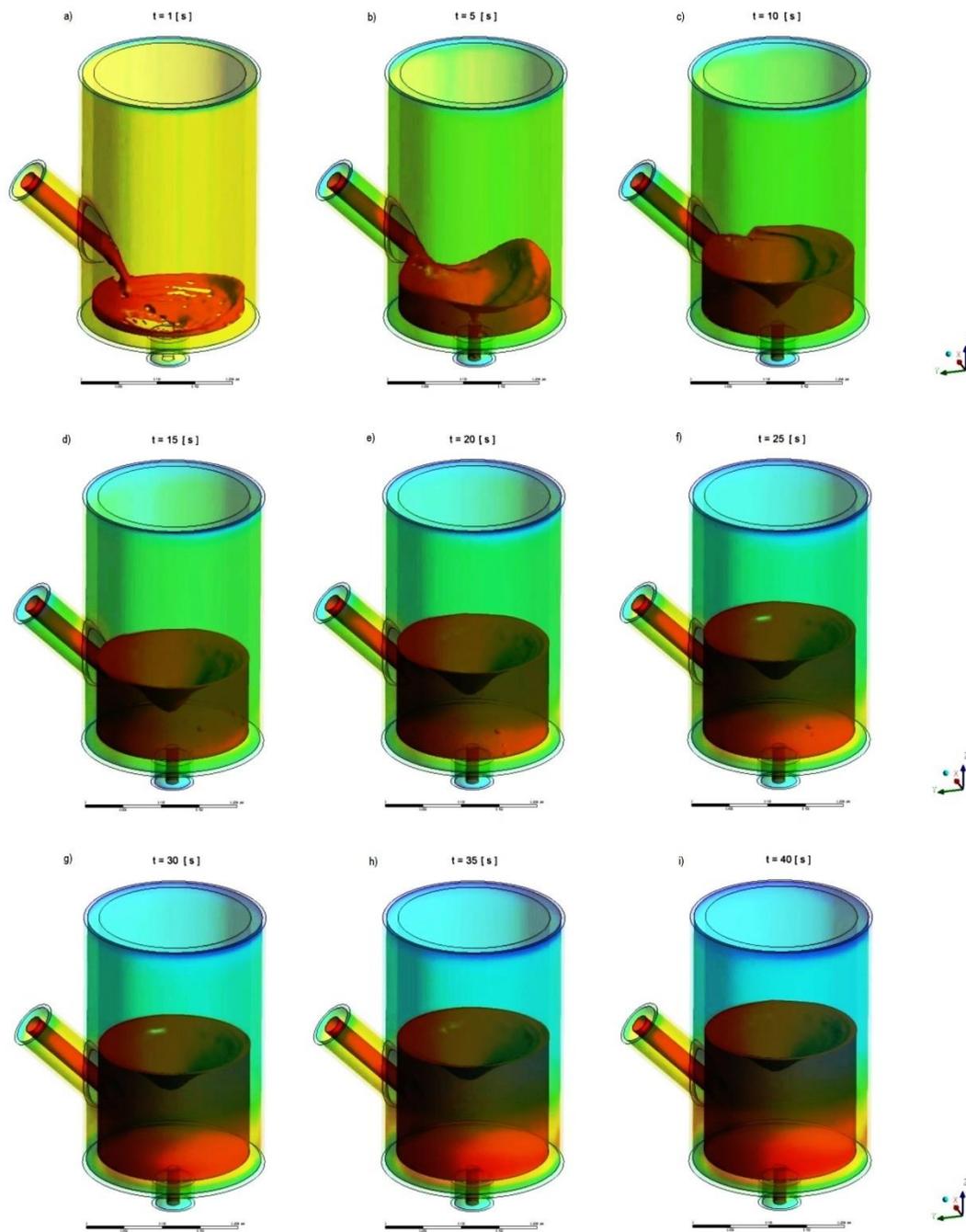


Figura 14. Formación transitoria del vórtice y la variación de temperatura de las carcassas a a)  $t=1$  s, b)  $t=5$  s, c)  $t=10$  s, d)  $t=15$  s, e)  $t=20$  s, f)  $t=25$  s, g)  $t=30$  s, h)  $t=35$  s e i)  $t=40$  s.

### 3.2 Contornos de viscosidad de Eddy.

En el modelo matemático, donde la resolución de las ecuaciones gobernantes se resuelven en estado transitorio y bajo régimen turbulento, fue adicionado el modelo de turbulencia k-épsilon estándar para representar la turbulencia y la naturaleza caótica que existe dentro de la cámara de mezclado del sistema. Este modelo de turbulencia resuelve las ecuaciones de transporte para la energía cinética debido a las fluctuaciones turbulentas de velocidad, es decir ( $k$ ) y a su vez la rapidez con la que esta energía se disipa ( $\varepsilon$ ), ambas ecuaciones de transporte están acopladas mediante la viscosidad turbulenta  $\mu_t$  (o *eddy viscosity*), por lo que una vez calculada se hace una ponderación de la viscosidad del fluido ( $\mu$ ) con la viscosidad turbulenta ( $\mu_t$ ), obteniéndose la viscosidad efectiva ( $\mu_{eff}$ ) (**ver ecuación 2.4.3.6 Cap. II**), variable que a su vez forma parte de las contribuciones difusivas en las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento y energía. Como resultado, vemos en la Figura 15 (Parte I y II) los contornos de la turbulencia generada en un rango de valores de viscosidad de 3.06 a 9.8 Pa s, donde los casos que pertenecen al bloque I, adquieren los valores más altos de turbulencia en el centro del sistema, estableciendo que a menor diámetro, mayor es la velocidad que adquiere el flujo, contribuyendo a una mayor turbulencia y por ende a un mayor mezclado en esa zona. Para los casos del bloque II, donde el valor del diámetro crece ( $A^+$ ) el transporte convectivo prevalece sobre el transporte difusivo en el seno del vórtice.

Como sabemos, el transporte de energía está dada por las contribuciones convectivas y difusivas y para que el mezclado dentro de las cámara sea homogéneo se requiere mayor turbulencia, siendo ejemplo de un buen de mezclado los casos (e) y (f) del bloque II con un diámetro alto ( $A^+$ ) y un espesor alto ( $C^+$ ), combinación que provoca que la viscosidad turbulenta obtenga una distribución homogénea en el seno del vórtice, con valores moderados que van de 3.0 a 4.2 Pa s pero bajo una distribución homogénea.

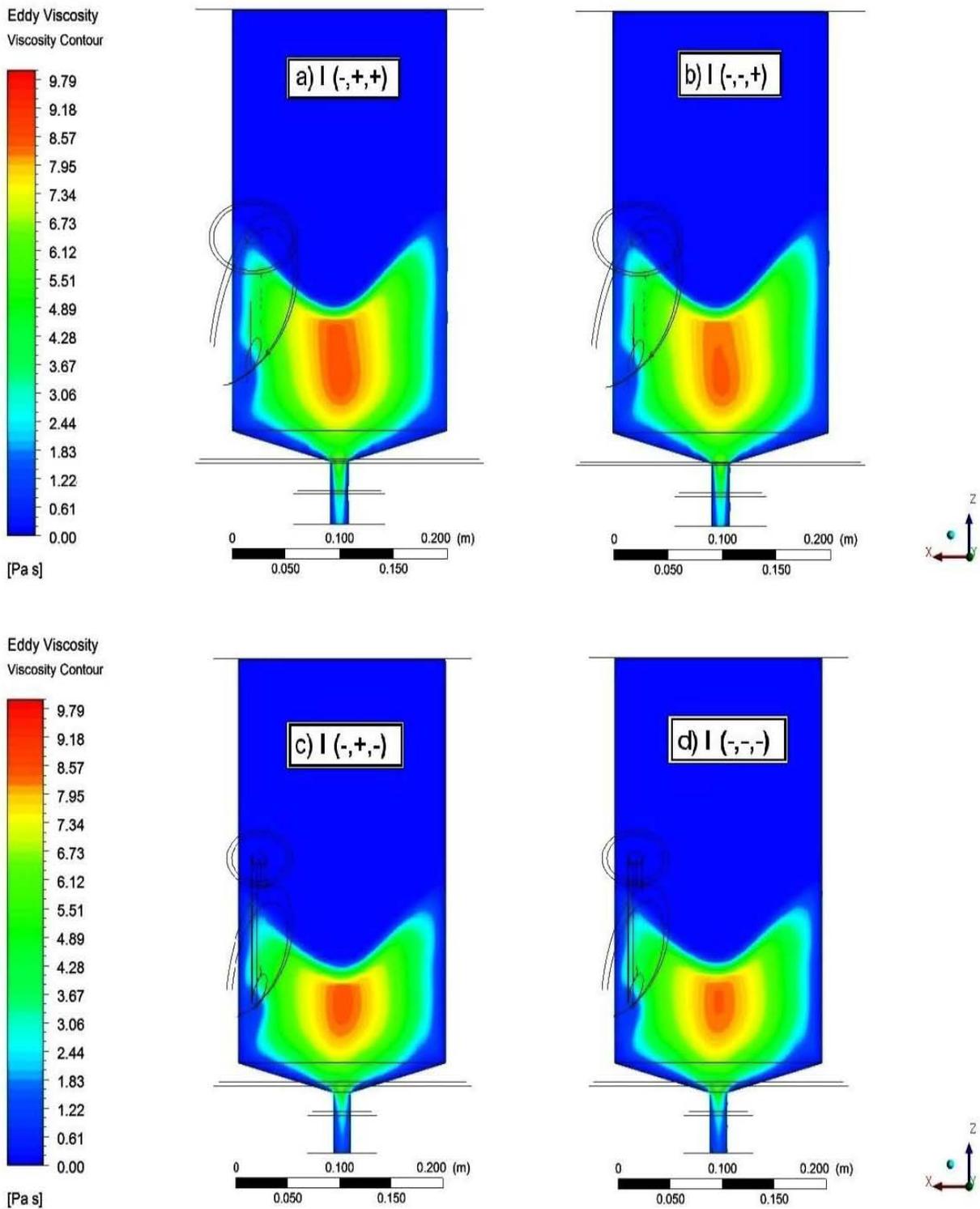


Figura 15 (Parte I) .Contornos de viscosidad turbulenta (eddy viscosity), ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

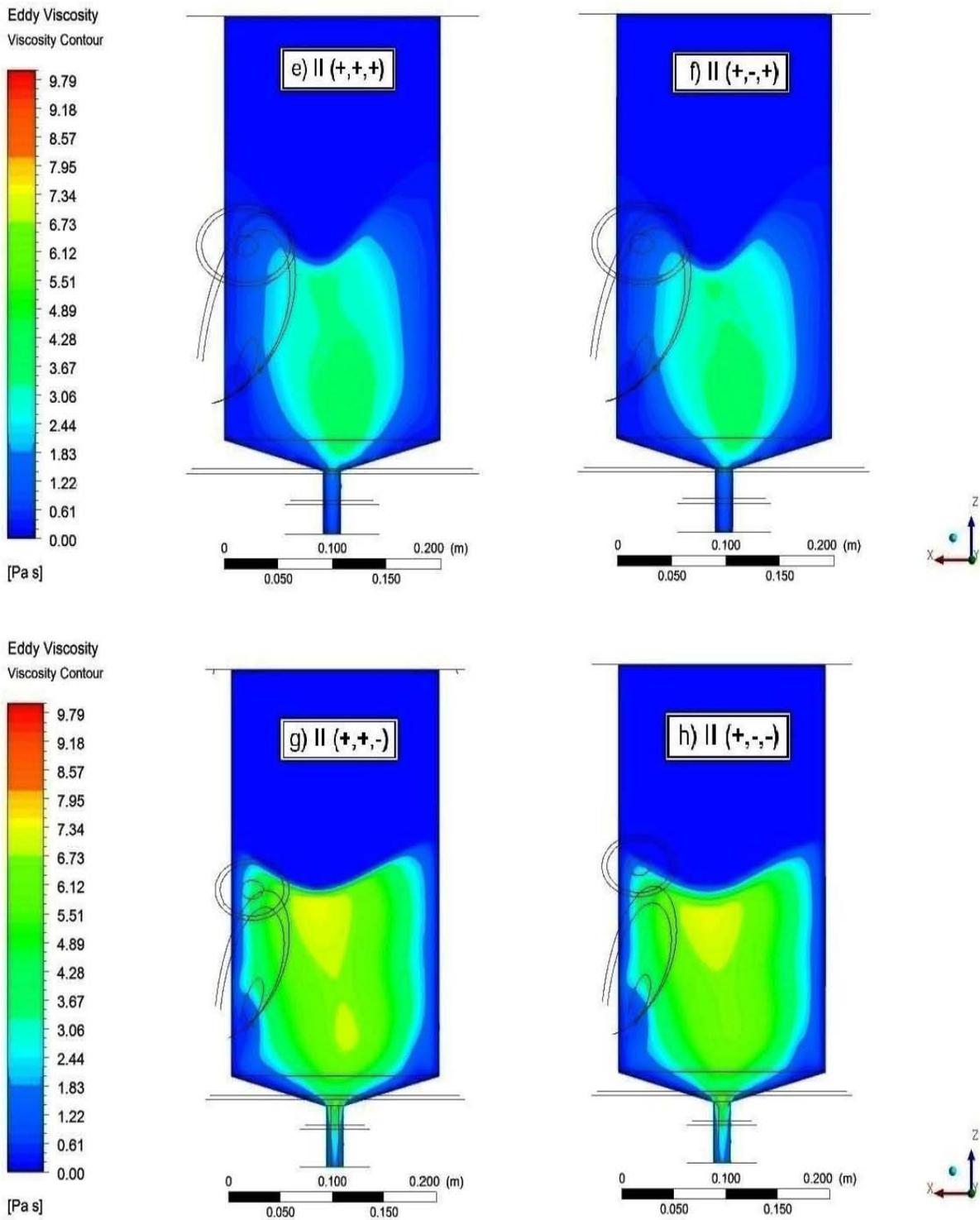


Figura 15 (Parte II). Contornos de viscosidad turbulenta (eddy viscosity), ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

### 3.3 Contornos de temperatura.

El dispositivo tipo vórtice consta de tres dominios: 1) zona de fluidos continuos (aleación líquida y aire), 2) refractario y 3) acero. En las secciones siguientes se mostrarán los contornos de temperatura para cada dominio.

#### 3.3.1 Dominio de la aleación líquida y el aire.

En la Figura 16 (Parte I y II), se muestran los contornos de temperatura correspondientes al dominio de las fases fluidas.

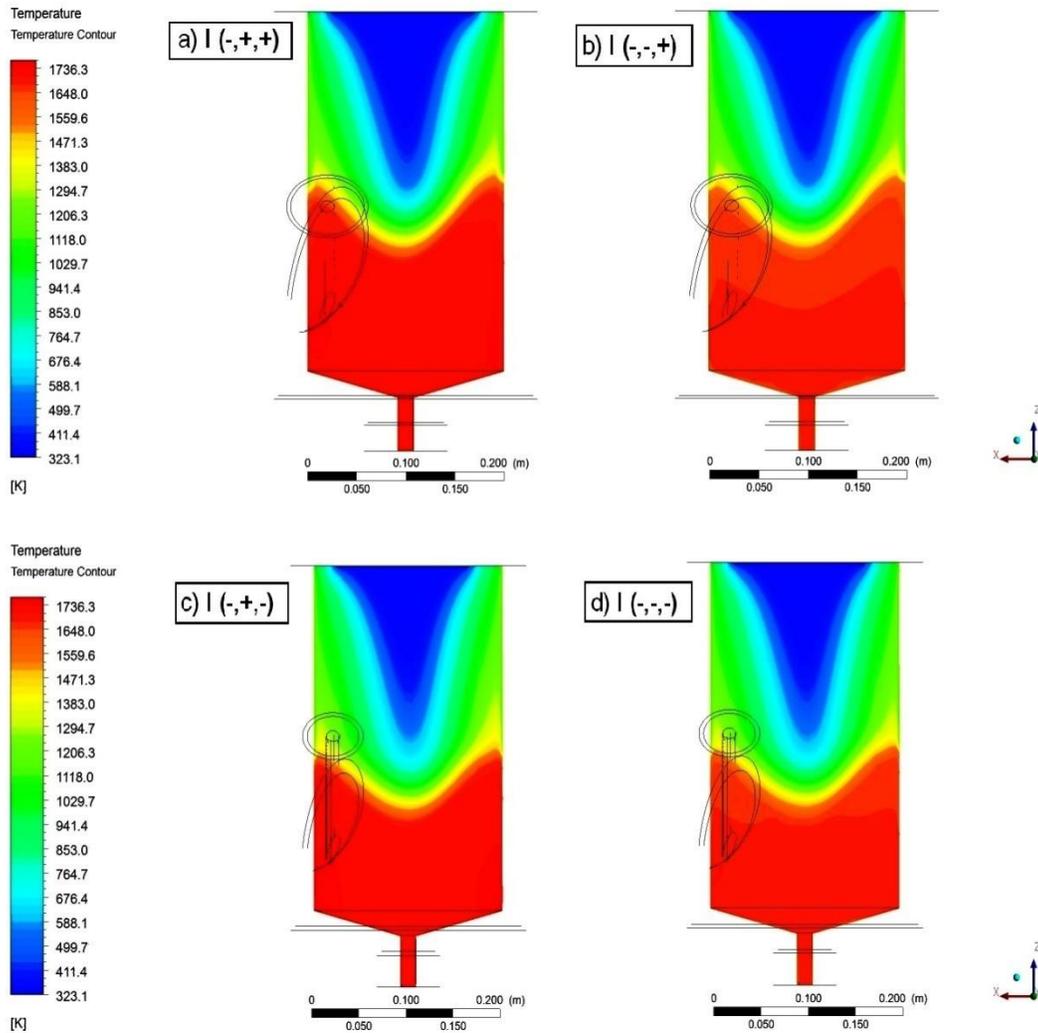
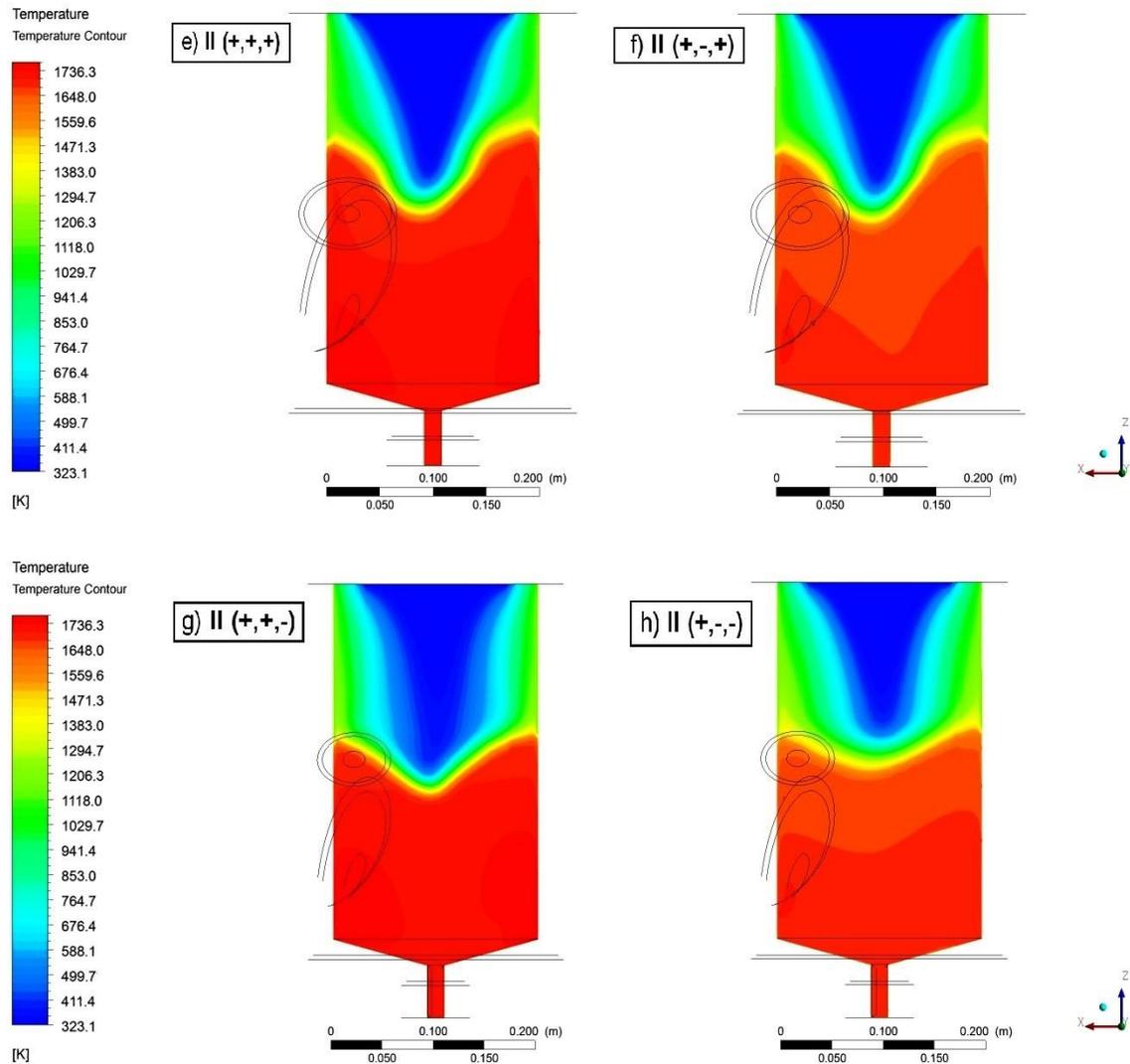


Figura 16 (Parte I). Contornos de temperatura para el dominio de la fase continua, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

Los incisos (a), (c), (e) y (g) pertenecen a los casos donde la temperatura de entrada es de 1773.15 K (1500°C), casos donde se aprecia que en los resquicios de la cámara de mezclado se obtienen temperaturas de 1736.32 K (1463.17°C), en contraste con los incisos (b), (d), (f) y (h), donde la temperatura oscila entre 1648 K (1374 °C) y 1559 K (1286 °C), debido a que la temperatura de la aleación a la entrada fue menor de 1723.15 K (1450 °C).



**Figura 16 (Parte II). Contornos de temperatura para el dominio de la fase continua, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.**

En los incisos (b), (d), (f) y (h) casos en los que la temperatura a la entrada de la aleación líquida es baja (B-), el metal está más estratificado mostrando mayores gradientes de temperatura, que en los casos en

los que el metal entra a mayor temperatura ( $B^+$ ). También un diámetro mayor de entrada aumenta la presencia de gradientes de temperatura.

### 3.3.2 Dominio del refractario.

Una de las condiciones de frontera térmica, fue un precalentamiento de 1173.15 K ( $\sim 900^{\circ}\text{C}$ ) en la carcasa del refractario. En la Figura 17 (Parte I y II), se muestran los contornos de temperatura para el dominio del refractario en el que se hace evidente la transferencia de calor desde la aleación líquida hacia la frontera interna del refractario así como la disipación de la energía hacia la parte externa de éste.

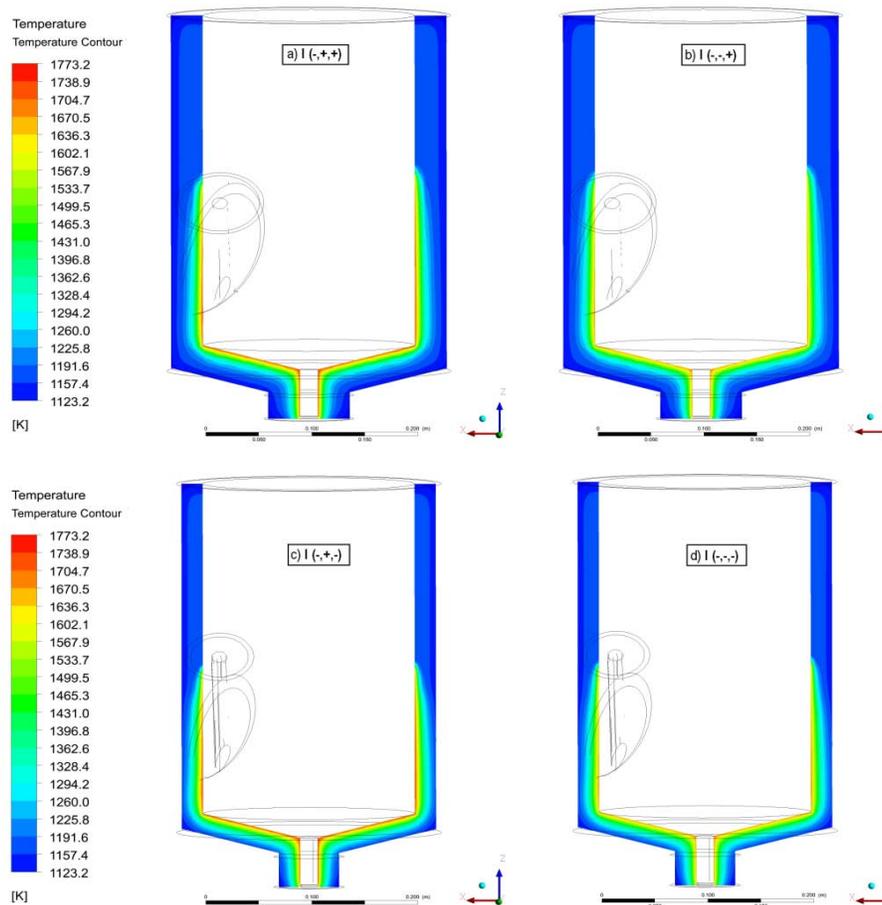
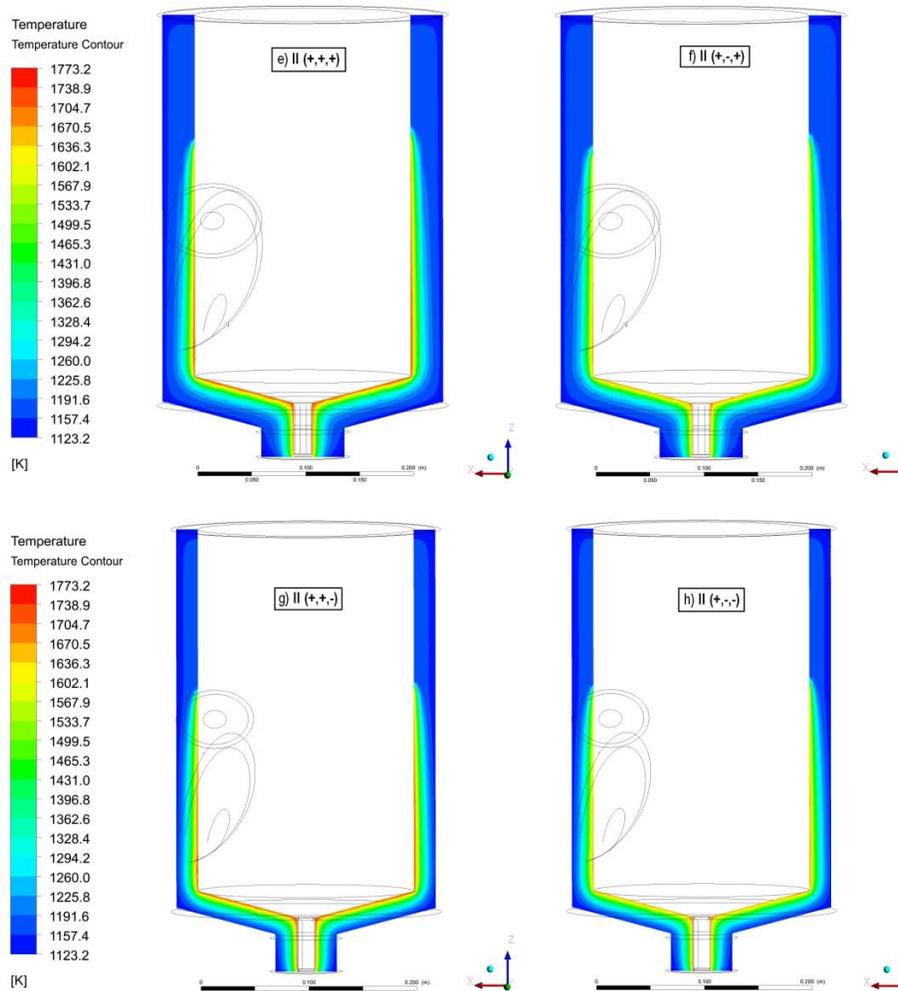


Figura 17 (Parte I). Contornos de temperatura para el dominio del refractario, ubicados sobre el plano  $zx$ . Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.



**Figura 17 (Parte II). Contornos de temperatura para el dominio del refractario, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.**

Se muestra que la temperatura de entrada de la aleación líquida (B) tiene un efecto poco significativo visualmente sobre la temperatura del refractario, tal y como se ve en los casos (a), (c), (e) y (g) (con alta temperatura de entrada), la temperatura máxima que alcanza la frontera interna del refractario en contacto con la aleación líquida oscila alrededor de los 1773K (~1500°C); mientras que en la misma frontera la temperatura que obtiene el refractario para los casos de los incisos (b), (d), (f) y (h) (baja temperatura de entrada) oscila entre los 1670 K (~1400°C).

Asimismo, se ratifica el efecto que tiene el aumento del diámetro de entrada sobre la altura que alcanza el vórtice, ya que los contornos de temperatura altos, asociados al contacto con metal caliente, indican el nivel que alcanza la aleación líquida dentro de la cámara de mezclado, obteniendo mayor altura en los

casos que pertenecen al bloque II sobre el bloque I. La temperatura local que alcanza la carcasa del refractario, en la pared posterior es alrededor de 1191 K (918 °C), evidenciando cualitativamente que las pérdidas energéticas que sufre el sistema en el dominio del refractario son mínimas. A su vez, el incremento de 1cm en el espesor, casos cuyos incisos son (a), (b), (e) y (f) indican una transferencia de calor más evidente producida por una gran resistencia térmica en el refractario.

### 3.3.3 Dominio del acero.

Como frontera térmica se adicionó al dominio del acero una temperatura de 573.15 K (300 °C) en la pared del acero que está en contacto con los alrededores.

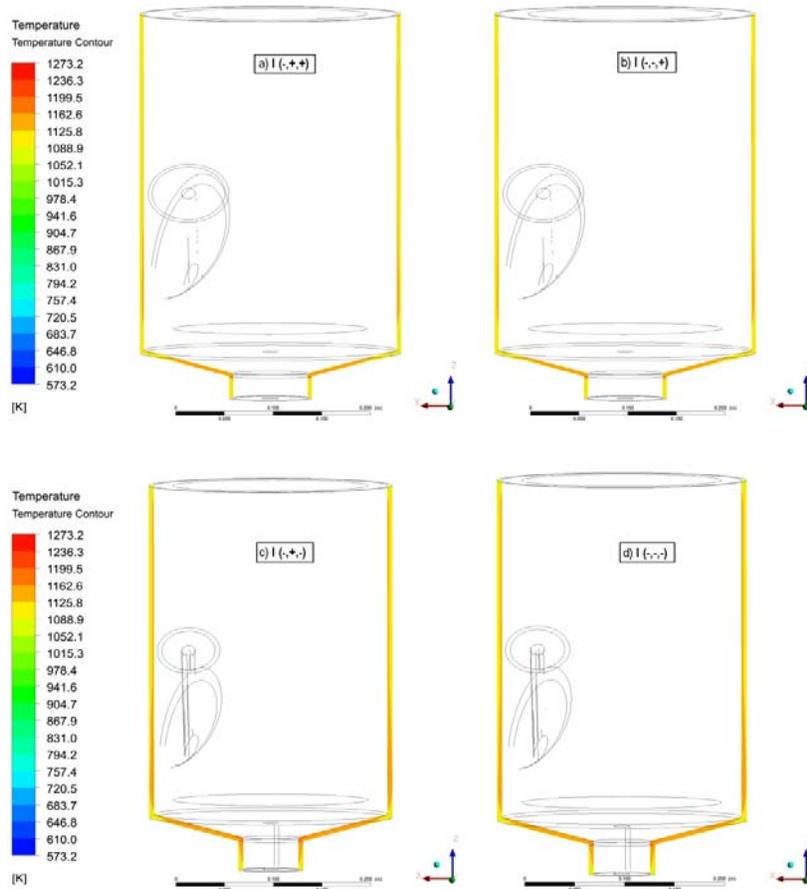
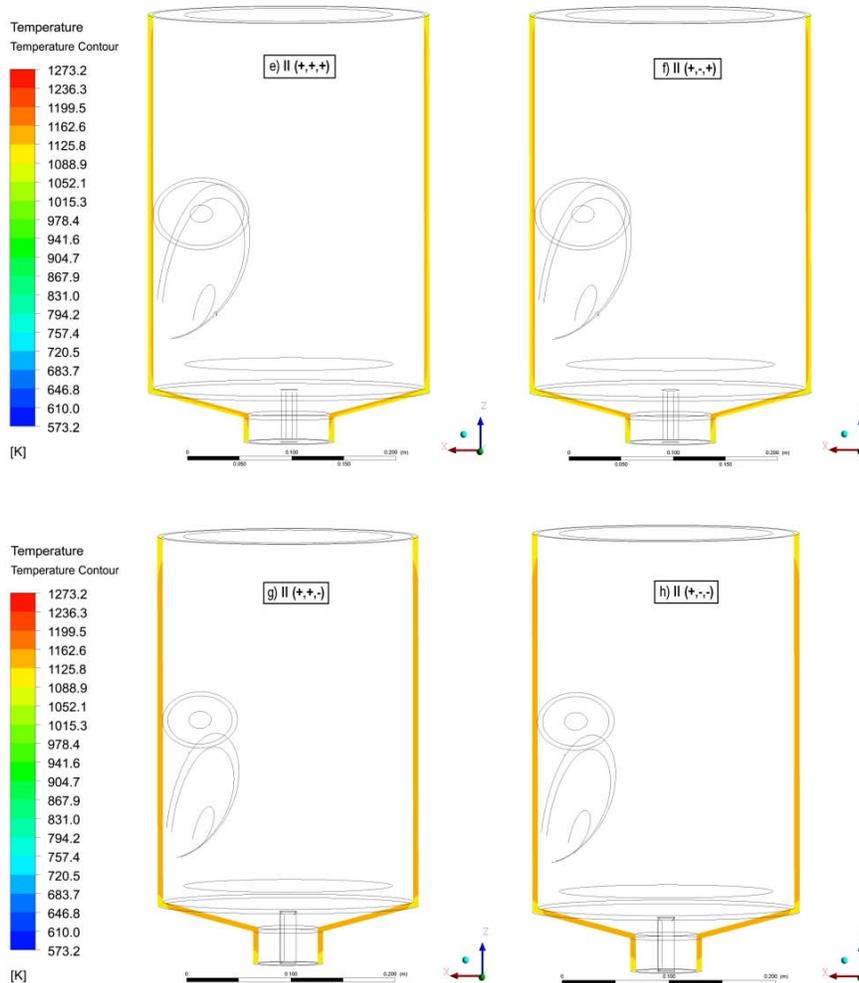


Figura 18 (Parte I)12. Contornos de temperatura para el dominio del acero, ubicados sobre el plano  $zx$ . Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.



**Figura 18 (Parte II). Contornos de temperatura para el dominio del acero, ubicados sobre el plano  $zx$ . Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.**

Esta pared recibe la energía por conducción transferida desde el refractario y a su vez transfiere calor por convección ya que está en contacto con el aire de los alrededores. Las Figura 18 (Parte I y II) muestran los contornos de temperatura para el dominio del acero, donde se aprecia una temperatura aproximada de 1088 K ( $\sim 815$  °C), la cual es muy similar en todos los casos. Los casos cuyos incisos (c), (d), (g) y (h) muestran el efecto del decremento en 1cm en el espesor del refractario, haciendo clara la contribución energética en las paredes verticales y en la base troncocónica por la residencia del fluido, con un valor de temperatura de 1125 K ( $\sim 852$  °C). En el dominio del acero, la pared en contacto con el aire de los alrededores, tiene la condición térmica asociada al mecanismo de convección para la transferencia de energía. El cálculo del coeficiente de transferencia de energía convectivo promedio ( $\bar{h}$ ),

se obtuvo con correlaciones empíricas sólo para la pared vertical del dispositivo, donde se supuso como la zona que se encuentra con mayor exposición al aire de los alrededores. La uniformidad de temperatura de la carcasa de acero se debe a que la conductividad del acero es alta y su resistencia térmica es menor que la del refractario y la de la convección del aire por lo que los gradientes de temperatura en el acero son menores que en las otras dos zonas asumiendo que el flujo de calor radial es predominante en el sistema y que se puede aplicar un circuito análogo térmico a un circuito eléctrico en serie.

### 3.4 Efecto de las variables de proceso con la caída de temperatura ( $\Delta T$ ).

En la Tabla 9 se expone como primera columna, los grados de libertad (G.L), la segunda y tercera columna se exhiben la suma de cuadrados (S.C) y cuadrados medios (CM) respectivamente, y la cuarta columna denota numéricamente el efecto medio de cada uno de los factores (variables de proceso), en el que se basará el análisis cuantitativo. Finalmente la quinta y sexta columnas corresponden a la  $F$  de Fisher y al valor  $P$ , ambas columnas aparecen sin valores numéricos debido a que no se hicieron réplicas para cada uno de los casos de simulación y en consecuencia no existe un error experimental, que en el caso de las simulaciones en computadora con la misma malla no tienen sentido físico.

**Tabla 9. Anova global, que muestra cuantitativamente los efectos principales, así como las dobles y triples interacciones de los factores o variables de proceso, para el diseño factorial  $2^k$ .**

	G. L.	(S. C.)	(C. M.)	Efecto medio	F	P
Modelo	7	52.845	7.5493	---	---	---
<i>Lineal</i>	3	52.4698	17.4899	---	---	----
Diámetro de entrada (A)	1	10.7648	10.7648	-2.32	---	----
Temperatura de entrada (B)	1	22.1112	22.1112	3.325	---	----
Espesor (C)	1	19.5938	19.5938	3.13	---	----
<i>Doble interacción</i>	3	0.3667	0.1222	---	---	----
Diámetro*Temperatura de entrada (A*B)	1	0.0544	0.0544	-0.165	---	----
Diámetro*Espesor (A*C)	1	0.0002	0.002	-0.01	---	----
Temperatura de entrada*Espesor (B*C)	1	0.312	0.312	0.395	---	----
<i>Triple interacción</i>	1	0.0084	0.0084		---	----
Diámetro*Temperatura*Espesor (A*B*C)	1	0.0084	0.0084	0.065	---	----
<i>Error</i>	0	---	---	---	---	----
<i>Total</i>	7	52.845	---	---	---	----

La Tabla 9, es la estructura que recopila estadísticamente los valores numéricos de cada factor evaluados como efecto principal así como las contribuciones de los efectos combinados o interacciones entre variables (dobles y triple interacción), de manera que describe cuantitativamente las pérdidas energéticas que sufre el sistema acoplado a la fluidinámica del mismo.

### 3.4.1 Efecto del diámetro de entrada (A) con la caída de temperatura ( $\Delta T$ ).

Cuando la cantidad de flujo que ingresa al conducto de entrada del dispositivo esta fijo, el efecto de incrementar el diámetro 0.7 cm, no sólo afecta la altura del vórtice que se forma dentro de la cámara sino la fluidinámica y la transferencia de energía de la aleación líquida, como se evidenció en las Figuras 11, 12, 13, 15, y 16 puesto que el efecto medio de incrementar el diámetro de la entrada (A) de 1.5 cm a 2.2 cm, como se muestra en la Tabla 9, hace que la caída de temperatura disminuya en 2.32°C, es decir que incrementar el diámetro a la entrada implica que la magnitud de la velocidad de la aleación líquida disminuya y con ello disminuya la convección como mecanismo de transferencia de energía en el dominio del fluido y del fluido al refractario y al ambiente, haciendo que la temperatura a la salida se incremente en 2.32°C, razón por la que la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) disminuye. Una evidencia gráfica de la disminución de la caída de temperatura se muestra en la Figura 19, donde para cada caso de simulación se especifica el valor de la caída de temperatura, es decir la temperatura de entrada menos la temperatura de salida, ( $T_{entrada} - T_{salida}$ ). El eje de las ordenadas denota el número del caso de simulación, en donde los números impares corresponden al valor bajo de diámetro de entrada (A-) y los números pares a los casos de simulación con diámetro de entrada alto (A+), validando que la caída de temperatura es mayor por el incremento en la magnitud de la velocidad, por ende el aumento en el flujo de calor por convección como mecanismo de transferencia de energía contribuyen a que la temperatura a la salida sea menor y por ende la caída aumente.

La forma estadística de validar el efecto de la interacción doble entre diámetro a la entrada y el espesor del refractario (A\*C), es quitar la ecuación de la interacción triple en el modelo estadístico y analizar los valores de  $F$  de Fisher y el valor  $P$ , que se muestran en la Tabla 10.

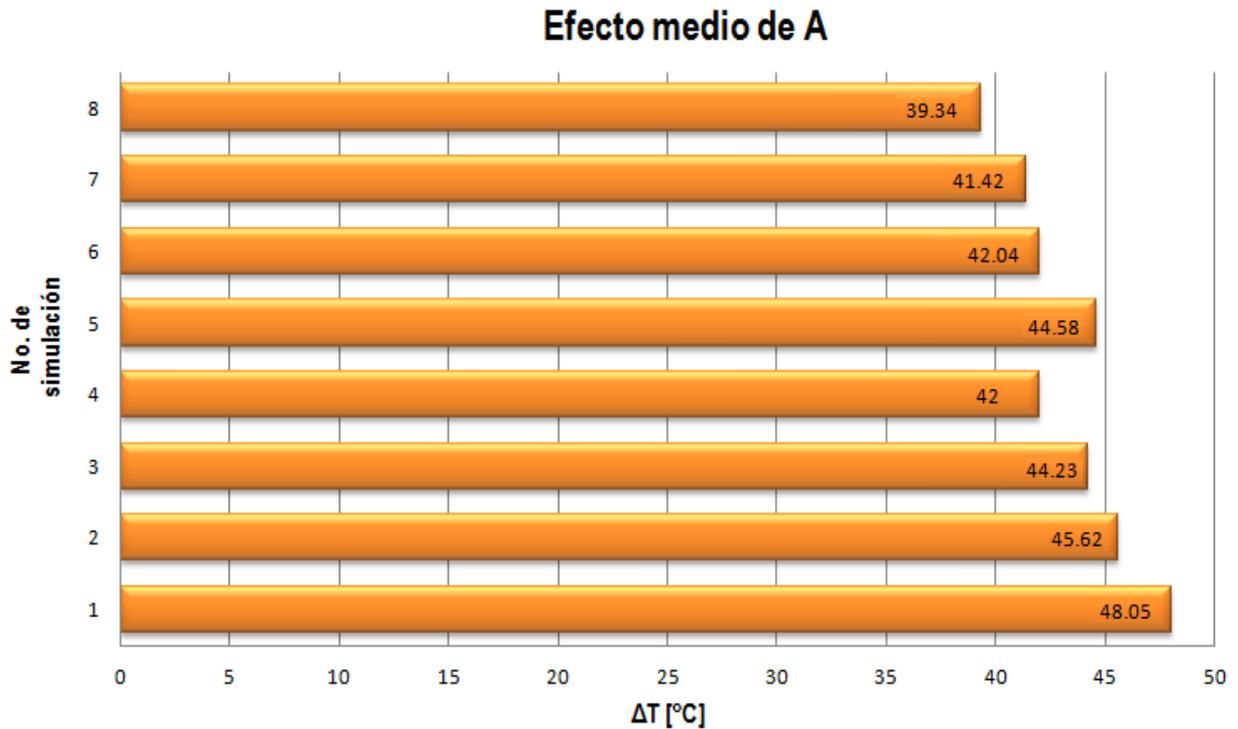


Figura 19. Caída de temperatura ( $\Delta T$ ) para cada caso de simulación.

Tabla 10. Modelo estadístico sin contribución de la triple interacción.

Sin triple interacción						
	G. L.	(S. C.)	(C. M.)	Efecto medio	F	P
Modelo	6	52.8365	8.8061	---	1042.14	0.024
Lineal	3	52.4698	17.4899	---	2069.82	0.016
Diámetro de entrada (A)	1	10.7648	10.7648	-2.32	1273.94	0.018
Temperatura de entrada (B)	1	22.1112	22.1112	3.325	2616.72	0.012
Espesor (C)	1	19.5938	19.5938	3.13	2318.79	0.013
Doble interacción	3	0.3667	0.1222	---	14.47	0.19
Diámetro*Temperatura de entrada (A*B)	1	0.0544	0.0544	-0.165	6.44	0.239
Diámetro*Espesor (A*C)	1	0.0002	0.002	-0.01	0.02	0.903
Temperatura de entrada*Espesor (B*C)	1	0.312	0.312	0.395	36.93	0.104
Error	1	0.0084	0.0084	---	---	---
Total	7	52.845	---	---	---	---

El cálculo de la  $F$  de Fisher se obtiene mediante el cociente de los cuadrados medios del factor (o variable de proceso) entre los cuadrados medios del error, quitando la ecuación de la triple interacción

se obtiene un valor de error, que nos ayuda a discriminar las interacciones importantes en el modelo estadístico global. Básicamente el valor  $P$  es una posición numérica en la curva de distribución  $F$  que corresponde a los grados de libertad del modelo estadístico planteado, por tanto en la última columna de la Tabla 10, sin el modelo de la interacción triple es mucho más fácil dilucidar los efectos de las interacciones dobles, donde el valor más alto de  $P$  es 0.903, correspondiente a la interacción doble (A\*C), de la mano con el valor de ésta interacción en la Tabla 9, se valida numéricamente que quitando dicha interacción, tenemos un 90.3 por ciento de acertar que la decisión de no considerar la contribución de la interacción doble (A\*C) es correcta, y concordar que la interacción doble entre el diámetro de entrada y el espesor (A\*C) en la Tabla 9, es muy pequeña y no obtienen un efecto combinado de considerar en la disminución de la caída de temperatura del dispositivo.

Con este criterio, se puede afirmar que las interacciones entre el diámetro con el espesor del refractario y con la temperatura de entrada tienen un efecto despreciable comparado con el efecto aislado del diámetro de la entrada del dispositivo.

#### **3.4.2 Efecto de la temperatura de entrada (B) con la caída de temperatura ( $\Delta T$ ).**

En las columnas de cuadrados medios (CM) y efectos medios de la Tabla 9, es notorio comprobar que la variable con mayor efecto en la caída de temperatura es la temperatura a la entrada (B). El efecto de aumentar 50°C la temperatura a la entrada del dispositivo (B), implica una pérdida energética de 3.325° C en la caída de temperatura ( $\Delta T$ ), tendencia que se esperaba puesto que al incrementar la temperatura se incrementa la fuerza motriz de la transferencia de calor desde el fluido hacia la estructura del dispositivo y hacia el ambiente, lo que implica mayores pérdidas energéticas al sistema.

Una de las variables que está ligada a las pérdidas energéticas antes mencionadas, es el espesor del refractario. En la columna de cuadrados medios (CM) de la Tabla 10, se observa un valor de 0.312 en los modelos de doble interacción siendo el mayor valor que se obtiene en dicho apartado, de la mano con un valor de  $P$  igual a 0.104, muestra numéricamente que la interacción entre la temperatura de entrada y el espesor (B\*C) es significativa en comparación con la interacción entre el diámetro y la temperatura de entrada (A\*B), así como la interacción entre el diámetro y el espesor (A\*C), aunque no a nivel de los efectos sencillos de las variables.

En la Figura 20, se muestra un gráfico de temperatura del fluido a la salida del dispositivo en función del tiempo de simulación.

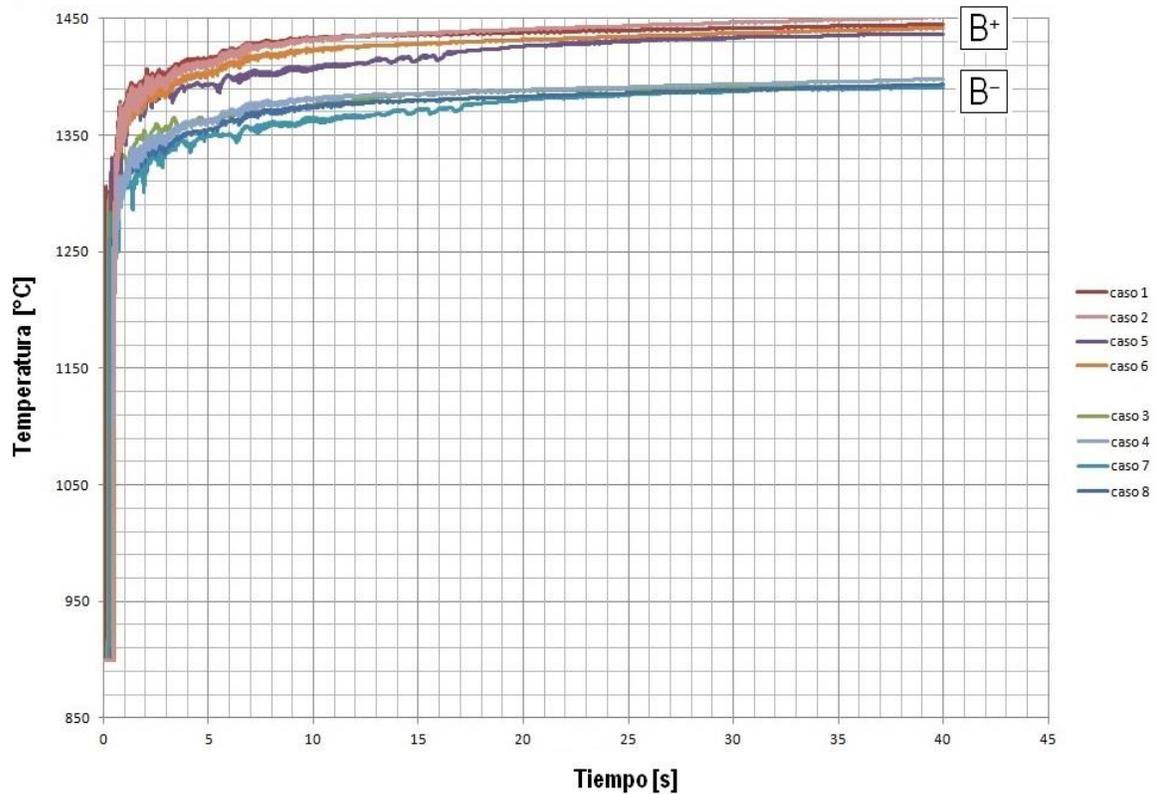


Figura 20. Temperatura del fluido a la salida del dispositivo contra tiempo.

La letra (B<sup>+</sup>) indica el valor alto de temperatura a la entrada, perteneciente a los casos 1, 2, 5 y 6 con un valor de 1500°C grados y las curvas de los casos 3,4,7, y 8 pertenecen al valor bajo de temperatura a la entrada (B<sup>-</sup>), es decir 1450°C grados; la tendencia de incrementar la temperatura a la entrada del dispositivo se puede visualizar en la Figura 20 y corroborarse con los valores de la caída de temperatura ( $\Delta T$ ), mostrados en la Figura 19. Es interesante visualizar que a los 20 segundos de iniciar la operación la temperatura a la salida no cambia significativamente con el tiempo, lo cual implica que se está alcanzando un estado estable en términos de transferencia de calor y que coincide con el establecimiento de la forma final del vórtice analizado en la Figura 14.

### 3.4.3 Efecto del espesor del refractario (C) con la caída de temperatura ( $\Delta T$ ).

En la Tabla 9, el valor del efecto medio del espesor corresponde a  $3.13^{\circ}\text{C}$ , básicamente significa que incrementar el espesor del refractario contribuye al aumento de la caída de temperatura. En este caso, es “difícil” explicar este resultado, ya que se esperaría que un mejor aislamiento (aumentando el espesor del refractario) disminuiría la caída de temperatura, pero lo encontrado es lo opuesto, es decir, incrementar el espesor aumenta la caída térmica. Esto se debe a que el refractario empieza relativamente frío respecto a la temperatura de entrada del fluido, entonces, al aumentar el espesor de material refractario equivale a añadir mayor masa que consume más energía para alcanzar la temperatura de estado estable (empapado térmico), es decir, empapar térmicamente al refractario requiere más energía con un refractario más espeso y por ende aumenta la caída de temperatura. Esto no debe ocurrir si los materiales ya están empapados térmicamente, esperando que se disminuya la caída térmica con un refractario más grueso. Si bien, no se consideró el mecanismo de radiación dentro del modelo matemático, sí se contemplaron las propiedades emisivas de la aleación líquida y del refractario, y su contribución a las disipaciones energéticas del sistema.



Figura 21. Flujos de calor en la intercara aleación líquida-refractario para cada caso de simulación.

En la Figura 21, se muestran los flujos de calor dentro del balance global para el dominio de la pared del refractario en contacto con la aleación líquida, los casos con números 1, 2, 5 y 6 pertenecen al factor con valor alto de temperatura a la entrada (B<sup>+</sup>) y los casos con los números 3, 4, 7 y 8 al valor bajo de temperatura de entrada (B<sup>-</sup>). Evidentemente el flujo de calor que recibe la pared en contacto con la aleación líquida, se incrementa cuando la temperatura se eleva. Es claro que al incrementar la temperatura de entrada (B), el gradiente de temperatura es mayor dentro del dispositivo y consecuentemente el flujo de calor aumenta. De esta forma los 50°C que se incrementan a la temperatura de entrada no los absorbe completamente la aleación líquida, sino que parte de esa energía, la pierde la aleación al salir del dispositivo a través del mecanismo de convección a los dominios más cercanos, siendo la pared del refractario en contacto con la aleación líquida, el dominio principal que recibe un flujo de calor considerable. Incrementar en 1cm el espesor del refractario, el volumen y la masa de éste se incrementan, por ende el flujo de calor que puede absorber es mayor. Como puede notarse en la Figura 22 en la que se establece la tendencia del flujo de calor que puede atravesar la pared del refractario (color naranja) y seguidamente a la pared de acero (color salmón), éste último siendo un

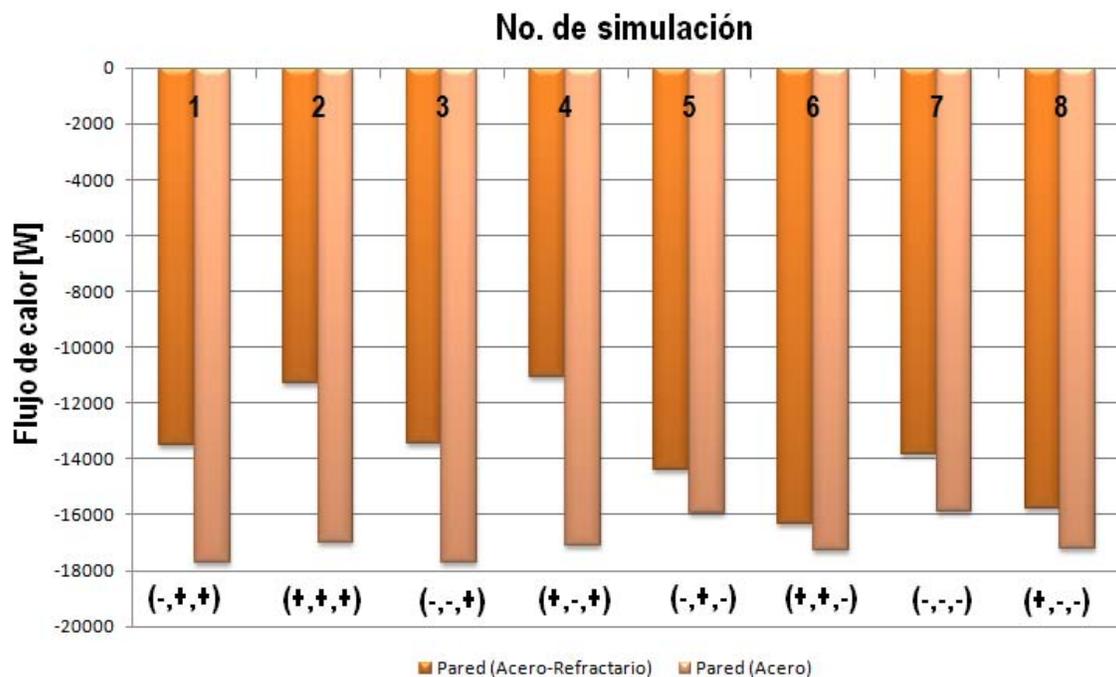


Figura 2213. Gráfico de los flujos de calor en la pared (acero-refractario) y acero, para cada caso de simulación.

material metálico, es evidente que la conducción de flujo de calor sea mayor y lo transporte con mucho mayor velocidad a los alrededores. El efecto del espesor del refractario se ve en el gráfico de la Figura 22, donde se grafica el flujo de calor en la intercara refractario-acero y en donde los primeros cuatro casos de simulación tienen el valor alto de espesor (C<sup>+</sup>); con mayor volumen y masa el gradiente de temperatura se eleva, transfiriendo mayor cantidad de flujo de calor a la pared subsecuente, es decir el acero. En contraste con los casos con valor bajo de espesor (C<sup>-</sup>), el efecto de 1cm menos al valor del espesor del refractario genera, menor caída de temperatura, por lo tanto menor flujo de calor que se conduce a través del dominio de la pared de acero.

### 3.5 Solución óptima para la caída de temperatura ( $\Delta T$ ).

El experimento factorial se planificó con la intención ex profesa de medir los efectos medios de los factores o variables de proceso sobre la caída de temperatura, así como evaluar sus interacciones dobles y triples mediante el software estadístico Minitab 17<sup>®</sup>; con las ecuaciones obtenidas del modelo factorial 2<sup>3</sup>. Los modelos obtenidos de regresión lineal con interacciones doble y triple, así como con solo los efectos principales que son los más importantes junto con la interacción doble BC que aunque poco significativa es la más importante, se muestran en las ecuaciones (2.4.5.3 y 2.4.5.4), respectivamente.

$$\Delta T = (-74.65 + 38.06 A + 0.07880 B + 0.1486 C - 0.02800 AB - 10.99 AC + 0.002057 BC + 0.007429 ABC) \quad (2.4.5.3)$$

$$\Delta T = (1.9 - 3.314 A + 0.0270 B - 20.18 C + 0.01580 BC) \quad (2.4.5.4)$$

Estas ecuaciones algebraicas, rigen el comportamiento de la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) de la aleación líquida en el dominio del dispositivo tipo vórtice, cuantificando la medida de cambio que expresan los efectos adicionales que resultan de la influencia combinada de los factores. Siendo el modelo de respuesta que predice los efectos medidos en función de las variables de proceso, las ecuaciones fueron sometidas al proceso de optimización, mediante el programa matemático MATLAB<sup>®</sup>. Ver ecuaciones (2.4.5.5 y 6).

$$function f = modelocompleto(x)$$

$$f = -74.65 + 38.06 * x(1) + 0.07880 * x(2) + 0.1486 * x(3) - 0.02800 * x(1) * x(2) - 10.99 * x(1) * x(3) + 0.002057 * x(2) * x(3) + 0.007429 * x(1) * x(2) * x(3);$$

(2.4.5.5)

$$function f = modelobc(x)$$

$$f = 1.9 - 3.314 * x(1) + 0.0270 * x(2) - 20.18 * x(3) + 0.01580 * x(2) * x(3);$$

(2.4.5.6)

Donde, los números 1, 2 y 3 corresponden a las variables de proceso, (A, B y C) respectivamente.

Los valores que se muestran en las columnas correspondientes a las variables de proceso (A, B y C) pertenecen a los límites alto y bajo, de acuerdo a valores límite que son permitidos desde el punto de vista físico (por ejemplo, en el caso de temperatura de entrada no es posible usar temperaturas menores a los puntos de fusión del metal), así como el resultado de la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) correspondiente al modelo matemático empleado, se muestran a continuación en la Tabla 11.

**Tabla 11. Resultado de los modelos incorporados a MATLAB®.**

Función	Modelo Completo		
Factor	A	B	C
Valor bajo	1.5	1450	2
Valor alto	2.2	1500	3
Punto final	2.2	1450	2
$\Delta T$ [°C]	39.32552		
Función	Modelo (B*C)		
Factor	A	B	C
Valor bajo	1.25	1400	1.5
Valor alto	2.5	1600	3.5
Valores óptimos	2.5	1400	1.5
$\Delta T$ [°C]	34.32499		
Caso Optimización	Fluent		
	A	B	C
	2.5	1400	1.5
$\Delta T$ [°C]	36.2945		

La ecuación (2.4.5.4) es el modelo de regresión lineal múltiple con interacciones dobles y triples (modelo completo) y de la mano con la Tabla 11, las columnas que corresponden a los factores o variables de proceso a evaluar, se muestran los límites altos y bajos utilizados para dicha función; como resultado MATLAB® proporcionó los parámetros óptimos para que la caída de temperatura sea menor, es decir minimizarlo. El valor calculado que se obtuvo en el modelo completo es un  $\Delta T$  de 39.3°C, de la misma manera para el modelo de regresión lineal con interacción doble, proporciona un  $\Delta T$  igual a 34.3°C; la tendencia que el solver calculó, es que tomando el valor alto de diámetro de entrada (2.5cm) y los valores bajos de temperatura de entrada (1400°C) y espesor del refractario (1.5cm), se obtiene la menor caída de temperatura ( $\Delta T$ ).

La manera en que se validaron dichos parámetros, fue mediante una simulación en Ansys Fluent 14.5, con los valores óptimos que se indican en la Tabla 11, y que demuestra que los parámetros óptimos si predicen un valor mínimo de caída de temperatura. El resultado obtenido en Fluent, fue un gradiente de temperatura de 36.29 °C grados, este valor está dentro del intervalo establecido por los límites altos y bajos incorporados a las funciones evaluadas en MATLAB®, indicando que el modelo matemático que resuelve la transferencia de energía acoplada a la fluidinámica del dispositivo tipo vórtice, es congruente con el análisis estadístico.

### **3.6 Evaluación de la trayectoria y el tiempo de residencia de las partículas, mediante DPM (*Discrete Phase Model*).**

La maximización de mezclado en el dispositivo tipo vórtice no fue el estudio central de esta tesis, sin embargo en esta última sección se verá el efecto del incremento del diámetro a la entrada, y su contribución al tiempo de residencia, la trayectoria y la velocidad de las partículas.

Básicamente, el concepto de tiempo de residencia implica evaluar el tiempo que le toma a un paquete de fluido salir del sistema. Una vez que la fluidinámica de la aleación líquida se consideró cuasi-estable, se inyectó un flujo de partículas de forma esférica, desde la superficie abierta a la atmósfera (SA), sin adición de componentes de velocidad, pues se consideró que caen por efecto de la fuerza de gravedad. Mediante el marco de referencia de Lagrange, a través del módulo de Fluent de fase discreta (DPM), fue posible simular la trayectoria del flujo de partículas, desde el momento de la inyección a la cámara del dispositivo. Las trayectorias en estado transitorio se ilustran en la Figura 23, donde la escala de tiempo

de residencia es “equivalente” al tiempo de simulación establecida (5 segundos). Tomando en cuenta la interacción que existe entre la fase continua (aleación líquida) y la fase discreta (partículas), la distribución de las trayectorias que toman las partículas es predominantemente angular, evidenciando que la fuerza de arrastre que siente cada partícula es ejercida debida a la magnitud de la velocidad angular de la aleación líquida y que esta fuerza de arrastre predomina sobre otras fuerzas que también actúan sobre las partículas, tales como las fuerzas boyantes o las de gravedad..

Es claro en la Figura 23, que el tiempo de simulación (del segundo 40 al segundo 45) no fue suficiente para visualizar el tiempo total que le toma a las partículas salir por completo del dominio de la aleación líquida, sin embargo, fue posible evidenciar el efecto de incrementar el diámetro con sólo 5 segundos de simulación, como lo podemos notar en las Figuras 24 y 25, que corresponden al tiempo de residencia de las partículas y la velocidad de las mismas, respectivamente.

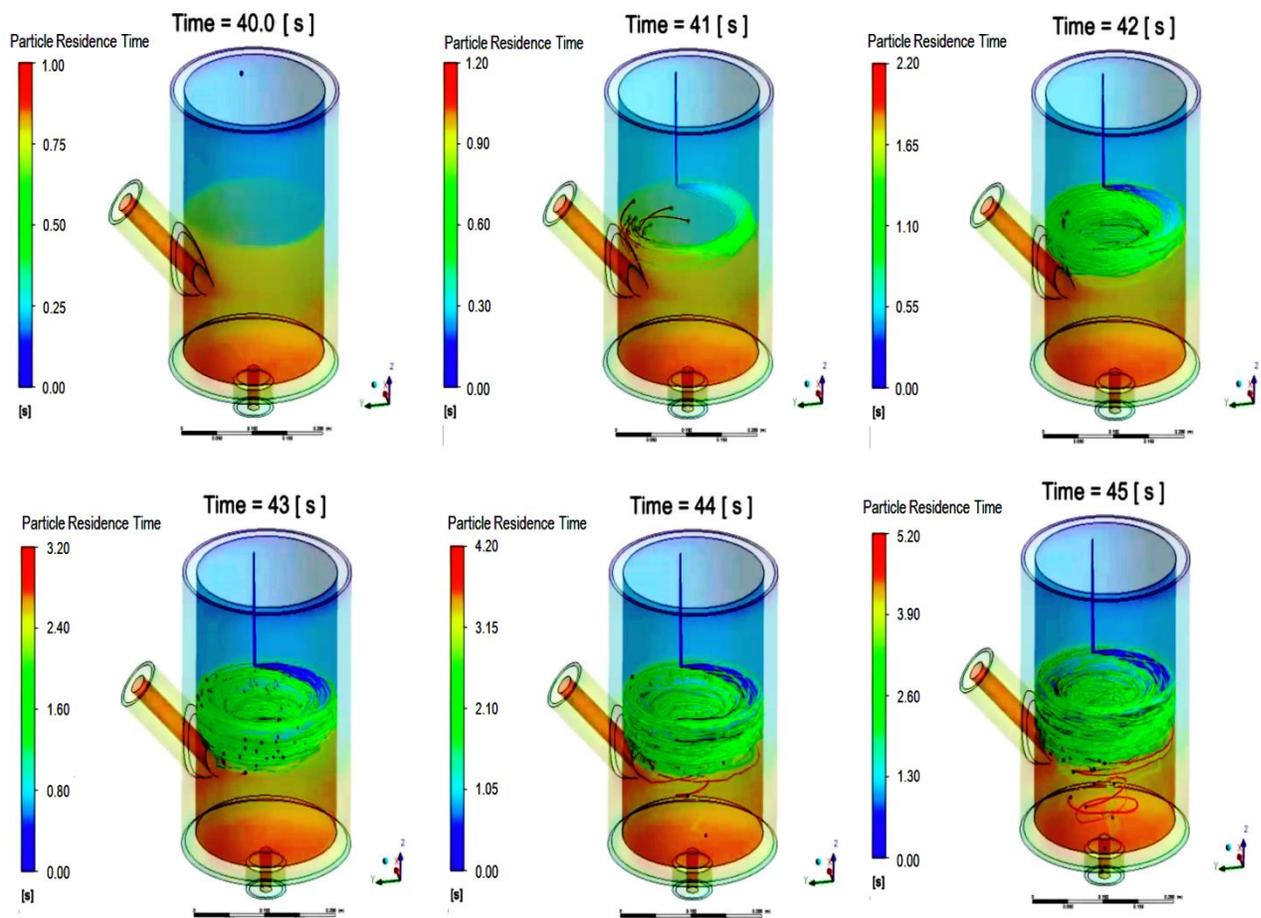
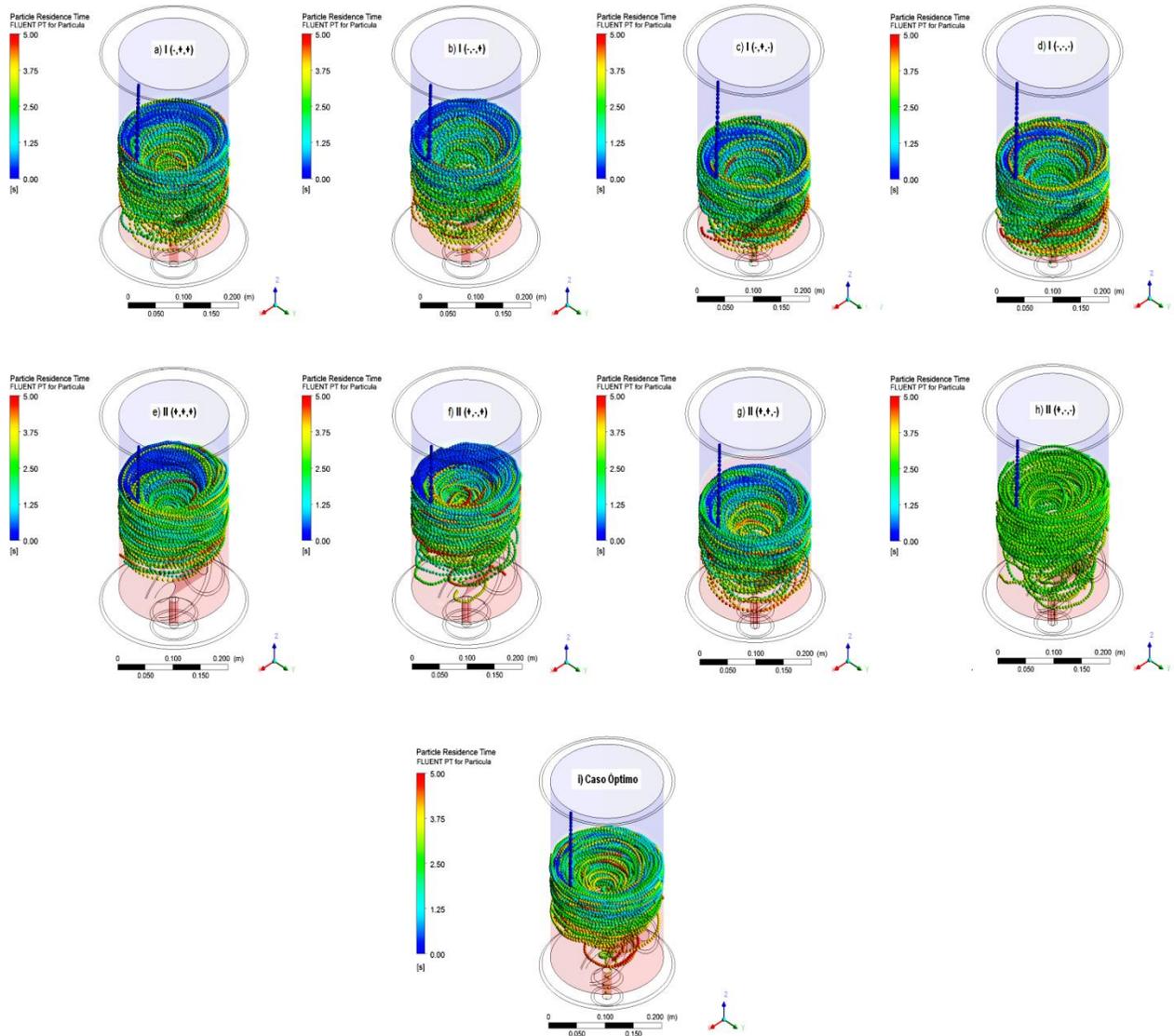


Figura 23. Evolución transitoria de las trayectorias del paquete de flujo de partículas.



**Figura 24. Tiempo de residencia para un paquete de flujo de partículas, vista isométrica ( $z^+$  up). Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.**

En la Figura 24 es aparente la trayectoria angular que toman las partículas debido al movimiento del fluido. Aludiendo a la magnitud de la velocidad adscrita a las condiciones de operación en cada caso de simulación, hace que la magnitud de la velocidad que toman partículas influya en el tiempo de residencia. Es mediante la segunda ley de Newton del movimiento que se resuelve el balance de fuerzas de la Ecuación (2.4.4.4), en donde aparece el término de la fuerza de aceleración que sienten las partículas ( $\bar{F}$ ). Para un movimiento del tipo circular, estas fuerzas corresponden a la centrípeta y centrífuga. Teniendo en mente estas dos fuerzas, es posible explicar el tiempo de residencia de las partículas. Para

los incisos (a), (b), (c) y (d) en cuyos casos se operó con el valor bajo de diámetro a la entrada, la magnitud de la velocidad de las partículas es cercano a 1m/s en la frontera cercana a la pared del refractario (PR), como se muestra en la Figura 25, lo cual se explica en virtud de que la magnitud de la fuerza centrífuga es mayor que la centrípeta con lo que las partículas adquieren mayores revoluciones durante más tiempo (aproximadamente 2.5 a 3.75 s, ver Figura 25). Caso contrario ocurre con los incisos (e), (f), (g) y (h), cuyo valor de magnitud de velocidad de las partículas es de alrededor de 0.5 m/s en la frontera con la pared del refractario (PR), lo que implica que la fuerza centrípeta sea mayor que la centrífuga y que el tiempo de residencia oscile entre 1.25 y 2.5 s. Al ser menor la magnitud de la velocidad de la fase continua, implica que las partículas den menos vueltas y salgan más rápido del dominio de la aleación líquida. El inciso (h) de la Figura 25, es el caso de simulación que visualmente se sale un poco de la tendencia del tiempo de residencia de las partículas. Aunque el tiempo de residencia no fue considerado como un parámetro de operación clave para esta tesis, se pretende que los cálculos hechos en esta última sección sean netamente cualitativos para aproximar y comprender el poder de mezclado del dispositivo.

Finalmente el inciso (i) de la Figura 25 el caso de simulación óptimo, con un valor de diámetro de entrada igual a 2.5cm, implicó que la distribución de las trayectorias de las partículas fuese más uniforme en todo el dominio de la aleación, quizá lo que vale la pena resaltar es el tiempo en el que salen las primeras partículas en la bajada del dispositivo, que corresponden a un tiempo de residencia igual a 3.5 s. A ese mismo tiempo, las partículas en los incisos de la (a) a la (d) de la Figura 25, siguen en la parte media de la cámara de mezclado y para los incisos de la (e) a la (h) las partículas a ese tiempo están distribuidas entre el seno del vórtice y la parte media de la cámara de mezclado. Este resultado es importante porque señala que la minimización de la caída térmica no necesariamente promueve buen mezclado ni altos tiempos de residencia de las partículas. Esto sugiere que es necesario realizar un esfuerzo futuro para acoplar las optimizaciones térmicas con las de mezclado con el fin de obtener una operación óptima minimizando la caída térmica con el máximo mezclado.

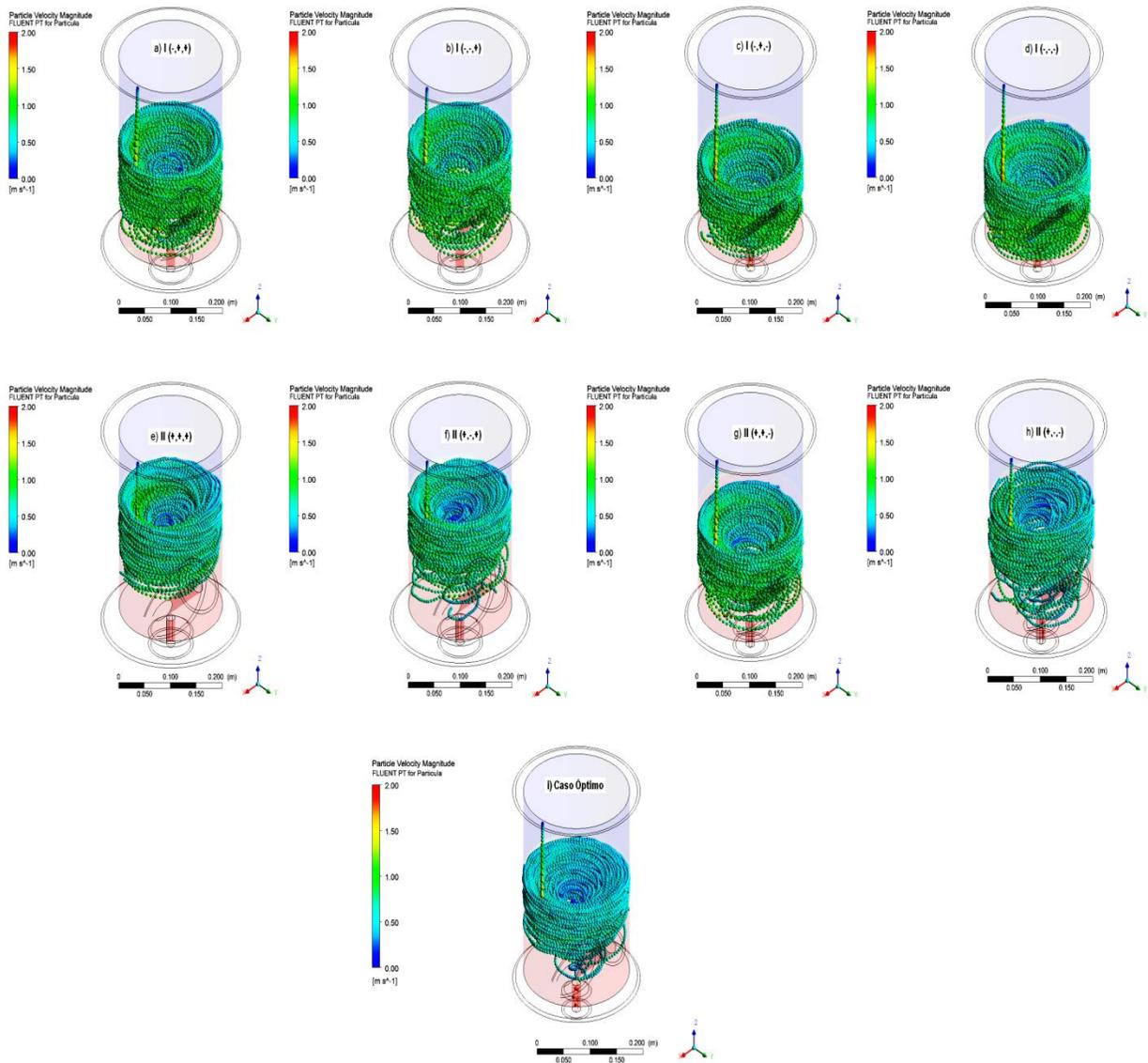


Figura 25. Magnitud de la velocidad para un paquete de flujo de partículas, vista isométrica ( $z^+$  up). Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.

En la Tabla 12, se ilustran los valores de tiempos de residencia *promedio* de las partículas. Como se mencionó en los párrafos anteriores, con un tiempo de cómputo de 5 segundos de simulación, es complicado ver una tendencia clara, sin embargo el efecto de incrementar el diámetro, tiene una clara contribución en la magnitud de la velocidad de la fase discreta y con ello su tiempo de residencia y trayectoria. En la tercera columna, en los casos que cuentan con valor bajo de diámetro (1, 3, 5 y 7) el tiempo de residencia es menor en comparación con los casos cuyo valor de diámetro a la entrada es mayor (2, 4, 6, y 8).

**Tabla 12. Tiempos de residencia promedio, para un tiempo de cómputo de 5 segundos.**

Caso	Valor de Diámetro [cm]	Velocidad promedio [m/s]	Tiempo de residencia <i>promedio</i> [s]
1	1.5	0.816023	1.59161
2	2.2	0.744365	1.83733
3	1.5	0.82535	1.55278
4	2.2	0.70266	1.87517
5	1.5	0.831235	1.60597
6	2.2	0.794345	1.7607
7	1.5	0.816699	1.58872
8	2.2	0.71235	1.9001
Óptimo	2.5	0.592289	1.86332

De esta manera, puede garantizarse que las subsecuentes investigaciones de simulación numérica en las que coexistan la maximización de mezclado y la optimización para minimizar las pérdidas energéticas en el dispositivo coadyuven a obtener la composición deseada de una aleación líquida determinada.

## Capítulo IV. Conclusiones

---

El estudio de la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) como tema central de esta tesis, con acoplamiento a la fluidinámica del dispositivo tipo vórtice, arrojó las siguientes conclusiones que se derivan en base al análisis presentado en el capítulo III y que se enlistan a continuación.

1. El efecto de incrementar el diámetro a la entrada 0.7cm ( $A^- = 1.5cm$ ,  $A^+ = 2.5cm$ ), generó que la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) disminuyera en 2.32 °C.
2. El efecto de incrementar la temperatura a la entrada 50°C ( $B^- = 1450^\circ C$ ,  $B^+ = 1500^\circ C$ ), implicó que la temperatura a la salida disminuyera lo que provocó que la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) se incremente, perdiendo 3.325°C de temperatura.
3. El efecto de incrementar el espesor 1cm ( $C^- = 2cm$ ,  $C^+ = 3cm$ ), provocó un decremento en la temperatura a la salida del dispositivo y por ende un incremento en la caída de temperatura de 3.13°C.
4. Los valores numéricos de los efectos medios de cada factor así como sus interacciones, arrojó que la única interacción significativa, aunque no tanto como el efecto sencillo de los factores, es el efecto que produce la interacción doble entre la temperatura de entrada y el espesor ( $B^*C$ ), puesto que hacen que la caída de temperatura disminuya en 0.165°C.
5. Mediante herramientas de optimización que ofrece MATLAB®, se obtuvieron los valores óptimos para minimizar la caída de temperatura ( $\Delta T$ ) con los factores de diseño y de operación, que son el diámetro y temperatura a la entrada ( $A = 2.5cm$ ) y ( $B = 1400^\circ C$ ), y el espesor ( $C = 1.5cm$ ), resultando un valor mínimo de  $\Delta T = 36.29^\circ C$ .
6. El análisis cualitativo de los tiempos de residencia y la velocidad adquirida desde el momento de la inyección de un flujo de partículas a la cámara del sistema, contribuyó al entendimiento de la fluidinámica del dispositivo tipo vórtice, ilustrando que la magnitud de la velocidad del flujo volumétrico es una de las variables que se deben de tomar en cuenta para maximizar el proceso de mezclado.
7. Se encontró que la minimización de la caída térmica no necesariamente maximiza el mezclado, por lo que se requiere de un esfuerzo adicional de análisis que logre optimizar simultáneamente las pérdidas de energía y el mezclado en este dispositivo.

## Capítulo V. Bibliografía Consultada

---

- [1] R. B. Bird. **Fenómenos de Transporte**. Editorial Reverté, S. A. Barcelona, España 2010.
- [2] Frank P. Incropera, David P. Dewitt. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 7a Edición. John Wiley and Sons. EU 2007.
- [3] David R. Gaskell. **Transport Phenomena in Materials Processing**. 2a Edición. Momentum Press. New York 2013.
- [4] P. Atkins. **Physical Chemistry**. 9ª Edición. W. H. Freeman and Company New York, 2010.
- [5] J. Szekely, **Fluid Flow Phenomena in Metal Processing**, Ed. Academic Press, New York, 1979.
- [6] George E. P. Box, J. Stuart Hunter, **Statistics for experimenters: Design, Innovation and Discovery**. 2a Edición. Wiley Interscience Publication, EU 2005.
- [7] P. Venkataraman, **Applied Optimization with MATLAB Programming**, 2a Edición. Wiley Interscience Publication, EU 2001.
- [8] Yogesh Jaluria, **Design and Optimization of Thermal Systems**. 2a Edición. CRC Press, Taylor and Francis Group. EU 2008.
- [9] **Ansys Help**. Versión 14.5.
- [10] Ansys Fluent Documentation: Fluent Theory Guide, **Chapter 4 Turbulence and Chapter 5 Heat Transfer** (section 5.1 y 5.2).
- [11] B. E. Lauder and D. B. Spalding. **Lectures in Mathematical Models of Turbulence**. Academic Press, London, England 1972.
- [12] ASM Metals Handbook Vol 1. **Properties and Selection Irons Steels and High Performance Alloys**. Edición 2012. Youngstown, Ohio EU.
- [13] ASM Metals Handbook Vol 15. **Casting**. Edición 2012. Youngstown, Ohio EU.
- [14] United States Patent, US 4,034,970. **Method and device for nodularizing cast iron**. Julio 12, 1977.
- [15] Ehrich, Yun Ken Chuang and Klaus Schwerdtfeger Düsseldorf, **The melting of sponge iron spheres in their own melt**, Arch Eisenhüttenwes, Vol 50. No 8, pp. 329-334.
- [16] Delgado Álvarez José Alfredo, **Modelado matemático de un dispositivo mezclador de aleaciones**. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
- [17] Perea Zurita Joel Jovani, **Estudio hidrodinámico y de mezclado de un dispositivo para alear hierros grises asistido por modelado numérico**. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.

[18] Morales Antonio Arturo, **Optimización de un dispositivo de aleación rápida a través de modelado matemático**. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[19] <http://www.alliedmineral.com/products/plastics.html>; (Online), Fecha de consulta enero 2014.

## Lista de símbolos

Símbolo	Significado	Unidades
$C_D$	Coefficiente de arrastre	Adimensional
$C_p$	Calor específico a presión constante	J/kg K
$d$	Diámetro	M
$d_p$	Diámetro de la partícula	M
$e_f$	Factor de fricción para flujos turbulentos	Adimensional
$E_\mu$	Energía de activación	J/mol
$F$	Fuerza de aceleración	Kg m/s <sup>2</sup>
$F_b$	Fuerzas de cuerpo	Kg m/s <sup>2</sup>
$F_D$	Fuerza de arrastre	Kg m/s <sup>2</sup>
$g$	Aceleración debido a la fuerza de gravedad	m/s <sup>2</sup>
$G_b$	Generación de energía turbulenta por fuerzas boyantes	Kg/ms <sup>3</sup>
$G_k$	Generación de energía cinética turbulenta	Kg/ms <sup>3</sup>
$Gr$	Número de Grashof	Adimensional
$h$	Altura	M
$\bar{H}$	Entalpía	J/kg
$\bar{h}$	Coefficiente convectivo de transferencia de calor promedio	W/m <sup>2</sup> K
$k$	Conductividad Térmica	W/m K
$k_{eff}$	Conductividad Térmica Efectiva	W/m K
$k_f$	Conductividad térmica del fluido	W/m K
$k_t$	Conductividad Térmica Turbulenta	W/m K
$L$	Longitud característica	M
$Nu$	Número de Nusselt	Adimensional
$P$	Presión	Pa (N/m <sup>2</sup> )
$Pr$	Número de Prandtl	Adimensional
$q''$	Flux de calor	W/m <sup>2</sup>
$q'$	Flujo de calor	W/m
$\dot{Q}$	Generación de energía	W/m <sup>3</sup>
$R$	Constante universal de los gases	J/kg-mol K
$Re$	Número de Reynolds	Adimensional
$S_\epsilon$	Término fuente para la disipación de energía cinética turbulenta	Kg/ms <sup>3</sup>
$S_k$	Término fuente para la energía cinética turbulenta	Kg/ms <sup>3</sup>
$t$	Tiempo	s
$T$	Temperatura	K
$T_\infty$	Temperatura ambiente del aire	K
$T_s$	Temperatura de la pared de la placa	K
$\bar{U}$	Energía Interna	J
$\bar{u}_p$	velocidad partícula	m/s
$v_x, v_y, v_z$	componentes de la velocidad	m/s
$\bar{v}$	Velocidad	m/s

$\bar{v}_i$	Componente i-ésimo de la velocidad del flujo	m/s
$x_i$	Componente de la velocidad para la fase i	m/s
$x_j$	Componente de la velocidad para la fase j	m/s
$y_i$	Variable respuesta	°C
$Y_M$	Contribución de la dilataciones fluctuantes debido a la turbulencia	Kg/ms <sup>3</sup>

Símbolos Griegos	Significado	Unidades
$\alpha$	Difusividad térmica	m <sup>2</sup> /s
$\beta$	Coefficiente de expansión térmica	K <sup>-1</sup>
$\epsilon$	Rapidez de disipación de energía cinética turbulenta	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$\kappa$	Energía cinética turbulenta	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$\mu$	Viscosidad molecular	Kg/ms
$\mu_{eff}$	Viscosidad efectiva	Kg/ms
$\mu_o$	Viscosidad del fluido a la temperatura de referencia	Kg/ms
$\mu_t$	Viscosidad turbulenta	Kg/ms
$\nu$	Viscosidad cinemática	m <sup>2</sup> /s
$\xi$	Marcador para la fracción volumen	Kg/m <sup>3</sup>
$\xi_{gas}$	Fracción volumen de la fase gaseosa	Adimensional
$\xi_{liq}$	Fracción volumen de la fase líquida	Adimensional
$\pi$	Número Pi	Adimensional
$\rho$	Densidad	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{gas}$	Densidad de la fase gaseosa	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{liq}$	Densidad de la fase líquida	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_p$	Densidad de la partícula	Kg/m <sup>3</sup>
$\tau$	Esfuerzo de corte	N/m <sup>2</sup>

Símbolo	Significado
$\hat{i}$	Vector unitario
$\hat{j}$	Vector unitario
$\hat{k}$	Vector unitario

Subíndices	Significado
i	fase i
j	fase j

## Lista de Figuras.

Figura 1. Ilustración del dispositivo tipo vórtice, a) vista lateral, b) corte transversal y c) vista interior de la entrada.....	3
Figura 2. Esquema que muestra la distribución de remolinos (eddies) en una tubería, indicando que los remolinos más largos se ubican en el centro de la corriente del fluido, mientras que los remolinos más pequeños son producidos en las cercanías de las paredes.....	12
Figura 3. Perfil de temperatura para flujo turbulento en un tubo. Las regiones, a) la película laminar, b) la zona de transición y c) el núcleo turbulento.....	13
Figura 4. Ejemplo 1 de optimización para un nuevo diseño de la lata para bebidas.....	17
Figura 5. Gráfico que muestra los contornos de diseño para el ejemplo 1.....	18
Figura 6. Diseño 23 factorial, a) codificado en el orden estándar, b) esquema de la dimensionalidad de los tres factores: diámetro a la entrada A, temperatura a la entrada B y espesor del refractario C.....	20
Figura 7. Representación geométrica de los contrastes que corresponden a los efectos principales y a las interacciones, a) efectos principales, b) interacción de dos factores y c) la interacción de los tres factores.....	21
Figura 8. Esquema de las condiciones de frontera del sistema. ....	37
Figura 9. Ilustración del flujo a través de una contracción repentina.....	41
Figura 10. Mallado del sistema, a) vista lateral, b) vista isométrica, c) corte transversal de la vista lateral del dispositivo y d) vista sobre plano yx. ....	46
Figura 11 (Parte I y Parte II). Mapas vectoriales, ubicados sobre el plano xy. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	52
Figura 12 (Parte I y Parte II). Mapas vectoriales, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	55
Figura 13 (Parte I y Parte II). Mapas vectoriales, ubicados sobre la isosuperficie que delimita a la superficie libre. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	58
Figura 14. Formación transitoria del vórtice y la variación de temperatura de las carcasas a a) t=1 s, b) t=5 s, c) t=10 s, d) t=15 s, e) t=20 s, f) t=25 s, g) t=30 s, h) t=35 s e i) t=40 s.....	61
Figura 15 (Parte I y Parte II). Contornos de viscosidad turbulenta (eddy viscosity), ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	63

Figura 16 (Parte I y Parte II). Contornos de temperatura para el dominio de la fase continua, ubicados sobre planos perpendiculares al eje y+. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	65
Figura 17 (Parte I y Parte II). Contornos de temperatura para el dominio del refractario, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	67
Figura 18 (Parte I y Parte II). Contornos de temperatura para el dominio del acero, ubicados sobre el plano zx. Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	69
Figura 19. Caída de temperatura ( $\Delta T$ ) para cada caso de simulación.....	73
Figura 20. Temperatura del fluido a la salida del dispositivo contra tiempo.....	75
Figura 21. Flujos de calor en la intercara aleación líquida-refractario para cada caso de simulación.....	76
Figura 22. Gráfico de los flujos de calor en la pared (acero-refractario) y acero, para cada caso de simulación.....	77
Figura 23. Evolución transitoria de las trayectorias del paquete de flujo de partículas.....	81
Figura 24. Tiempo de residencia para un paquete de flujo de partículas, vista isométrica (z+up).Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8.....	82
Figura 25. Magnitud de la velocidad para un paquete de flujo de partículas, vista isométrica (z+up).Cada inciso corresponde a un caso cuya denominación quedó establecida en la Tabla 8 .....	84

### **Lista de tablas.**

Tabla 1. Constantes empíricas utilizadas en el modelo de turbulencia k-épsilon estándar [9].....	31
Tabla 2. Propiedades del aire referenciados a la temperatura del fluido $T_f$ [1,2]. .....	38
Tabla 3. Propiedades termofísicas de la aleación líquida (fase continua), aire, refractario típico, acero 1010 y partículas sólidas (fase dispersa) [2,19]. .....	42
Tabla 4. Características métricas del mallado. ....	45
Tabla 5. Tiempos de simulación y cómputo.....	47
Tabla 6. Niveles altos y bajos de cada uno de los factores o variables. ....	48
Tabla 7. Diseño factorial completo 23, empleado en este trabajo con simulaciones CFD. ....	48

Tabla 8. Matriz de experimentos dividida por bloques. ....	50
Tabla 9. Tabla anova global, que muestra cuantitativamente los efectos principales, así como las dobles y triples interacciones de los factores o variables de proceso, para el diseño factorial 2k. ....	71
Tabla 10. Modelo estadístico sin contribución de la triple interacción.....	73
Tabla 11. Resultado de los modelos incorporados a MATLAB®. ....	79
Tabla 12. Tiempos de residencia promedio, para un tiempo de cómputo de 5 segundos. ....	85

---

## Apéndice A. Design Modeler (DM)

1) Localizar el plano en donde se generará el *Sketch*, en nuestro caso corresponde al plano ZX. Se procede a dibujar las líneas horizontales y verticales, con las especificaciones correspondientes, desplegando el botón de *Sketching*, se encuentran las herramientas de dibujo. Una vez generado el sketch (en 2D) con las dimensiones adecuadas se aplica un *Revolve*, que es una función que se localiza en la barra herramientas, se selecciona el *Sketch* realizado para revolucionar el dibujo y generar un volumen. Ver Figura A-1.

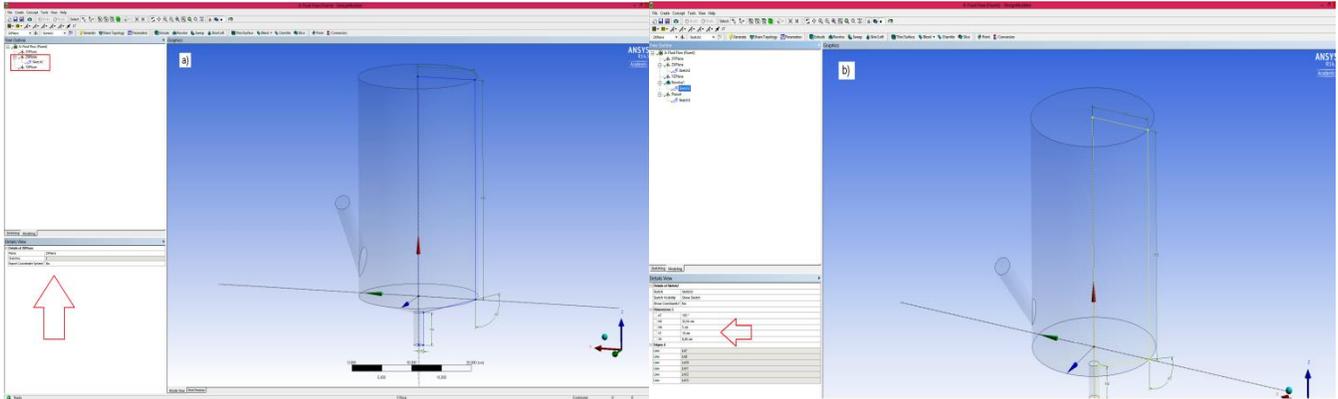


Figura A-1. a) Dibujo del dominio del fluido, b) Ejemplo para la inserción de dimensiones, V1, V5, H2, H4 y A7 corresponden al radio de la superficie abierta a la atmósfera (SA), el radio de la bajada, la altura del dispositivo, la longitud de la bajada, y el ángulo de la base troncocónica, respectivamente.

2) La generación de la entrada se hace creando un *Sketch* en un plano alternativo, en donde se hacen las especificaciones de posición y los ejes de referencia en los cuales se moverá el plano, en este caso se requiere hacer una extrusión del *Sketch* dibujado, por lo que el plano se coloca de manera tangencial y con un ángulo de entrada. En la Figura A-2 se ilustra el árbol de construcción para el plano tangente a la pared del sistema (inciso a), así como la función de *Extrude* y *Add Material* que hará que el nuevo objeto se adhiera al cuerpo cilíndrico, considerándolo como uno solo (inciso b).

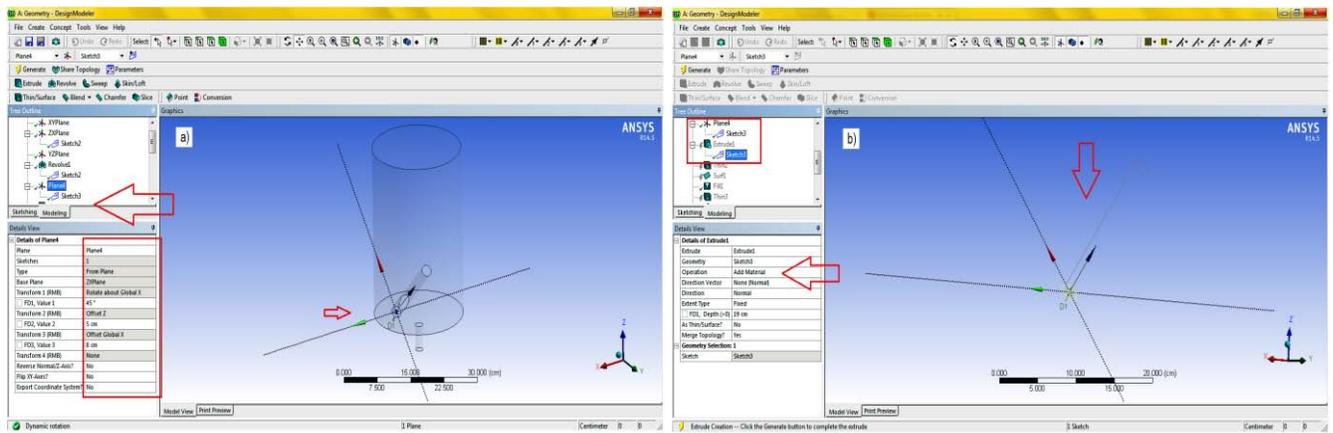


Figura A-2. a) Muestra el plano tangente a la superficie del dispositivo, b) ubica la generación del plano tangente y la función de *extrude* en el árbol de construcción.

En la Figura A-3, se ilustra el dominio final generado para el fluido. En el recuadro de los detalles se pueden visualizar el valor numérico del volumen, el área y el número de caras y lados con los que cuenta el dominio.

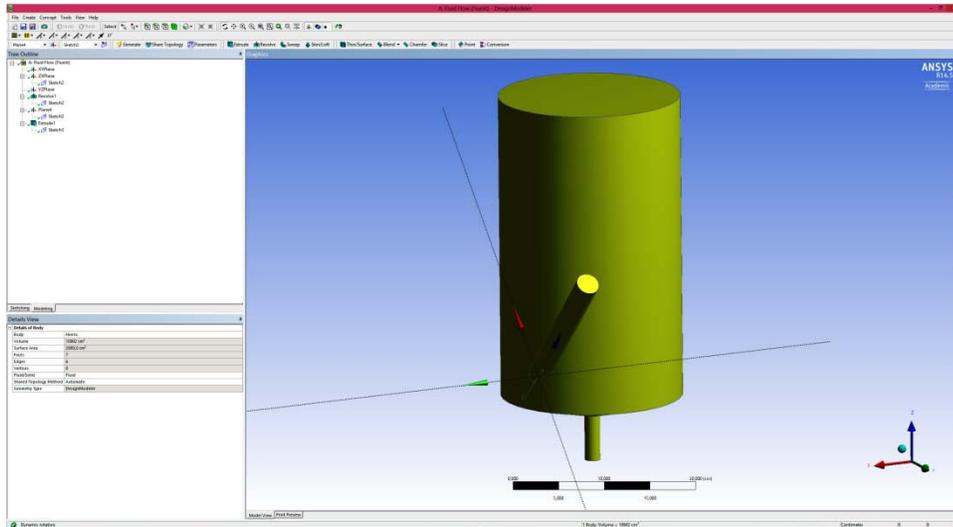


Figura A-2. Dominio del fluido (aleación líquida y aire).

3) La generación de las carcasas que dan forma y recubren al dispositivo (refractario y acero) consiste en aplicar un *Thin* a las caras del dominio del fluido (ver Figura A-2), se especifica el valor del espesor requerido y se aplica *Generate*. Seguidamente, para hacer un acoplamiento entre los dominios generados, es necesario adicionar una superficie entre ellos que haga un reconocimiento, es decir un acoplamiento para que al momento de hacer el mallado halla una interconexión entre los nodos. La función que se ocupa se localiza desplegando el botón de *Concept* y se selecciona *Surfaces From Edges* de la barra de herramientas. Ver Figura A-3.

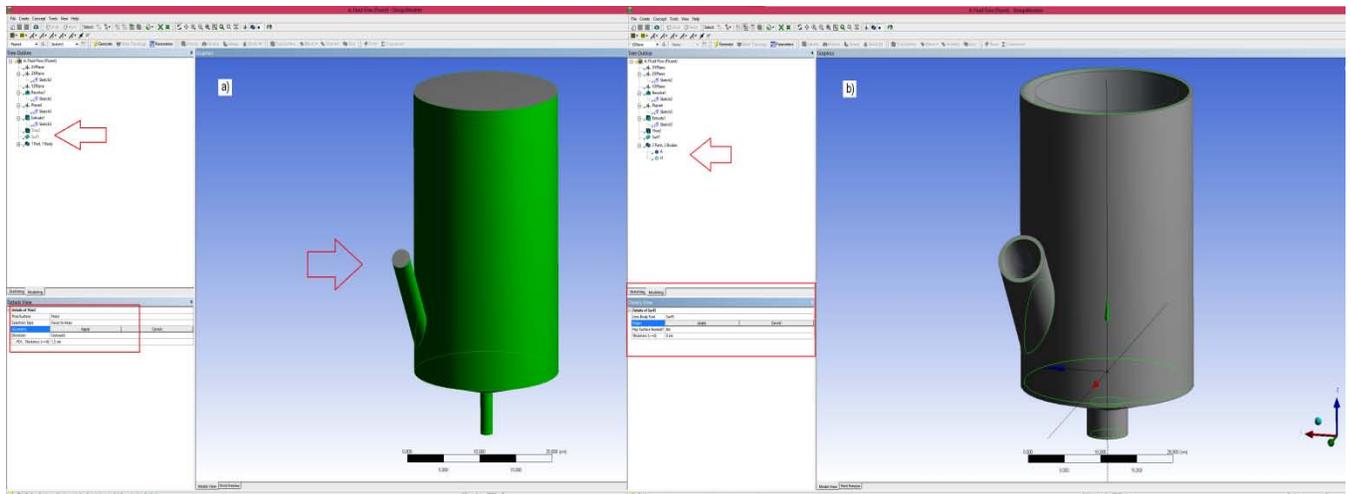


Figura A-3. Generación de carcasas, a) vista de la selección de las caras del dominio del fluido, b) aplicación de la función *Thin* y generación de las carcasas.

4) Una vez que se ha generado las carcasas, para que *Fluent* reconozca al dominio del fluido como un líquido, es necesario utilizar la función *Fill* y seleccionar las caras del primer dominio. Ver Figura A-4.

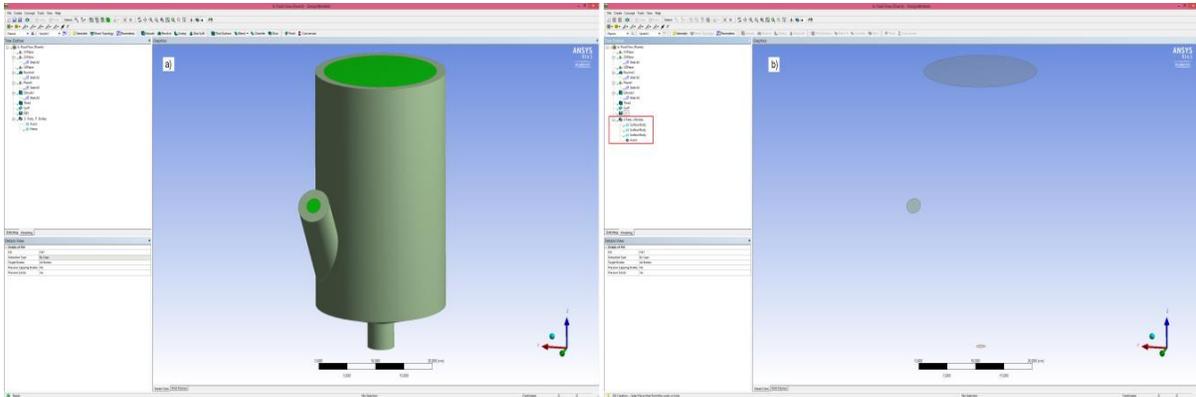


Figura A-4. Función *Fill* para el dominio del fluido, a) selección de las caras externas del dominio del fluido, b) muestra de las fronteras que delimitan la función de llenado (*Fill*).

5) La generación de la última carcasa, se procede de la misma manera que el punto (3), se utiliza la función *Thin* pero ahora seleccionando las paredes externas del refractario. Además de la inserción de la superficie *Surfaces From Edges* para crear el acoplamiento entre superficies y por último un llenado, con la función *Fill* sobre el dominio de la carcasa del refractario. Ver Figura A-5.

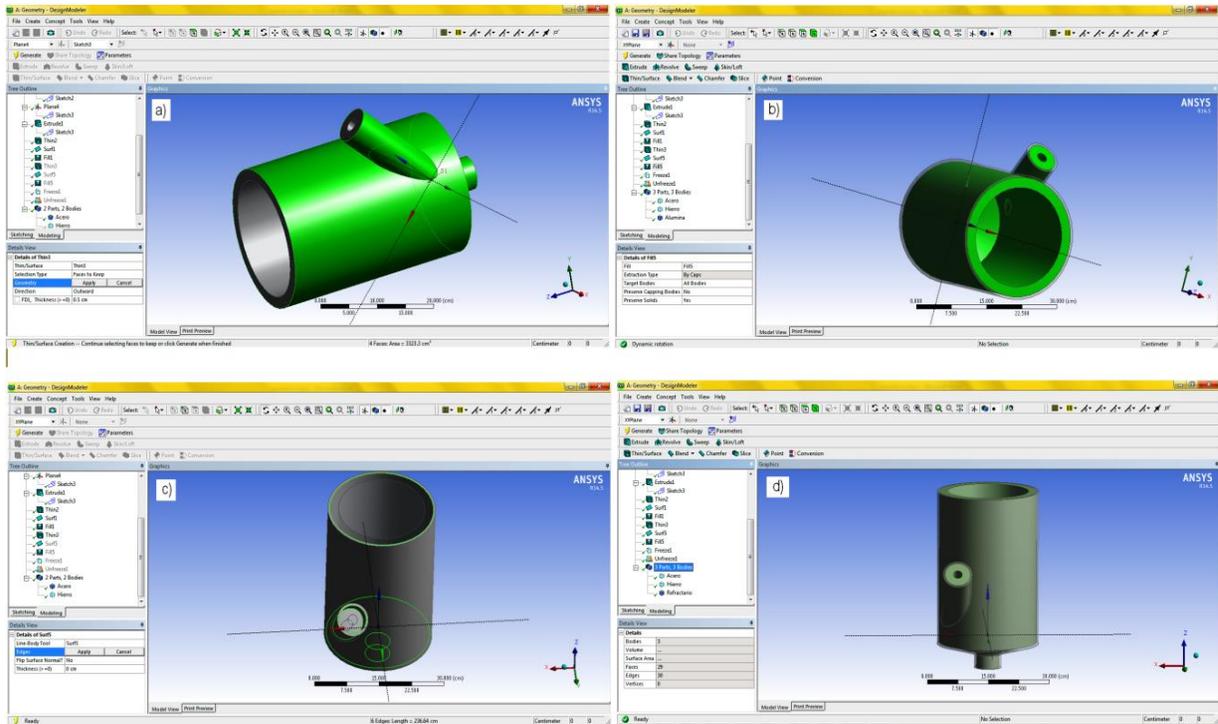


Figura A-5. a) selección de las caras superficiales del dominio del refractario, para generar la función *Thin*; b) selección de la función *Fill* sobre el dominio del refractario; c) selección de los bordes para la función *Surfaces From Edges*; d) dominio global del dispositivo, 3 cuerpos en 3 partes (con ayuda de la función *Freeze and Unfreeze*).

## Apéndice B. Meshing

1) Al cargar la geometría al módulo de *Meshing*, el árbol de construcción se divide en cuatro ramificaciones, como puede verse en la Figura B-1; la primera ramificación corresponde a los detalles de la geometría que es subdividida por los dominios que la conforman, le sigue el sistema de referencia de coordenadas globales, seguido de las conexiones que describe el acoplamiento entre los dominios de la geometría, dentro de esta está la ramificación importante para la generación de los volúmenes de control, *Meshing* (que es el punto central del presente Apéndice B), finalmente la ramificación de *Named Selections*, donde se especifican las condiciones de frontera del sistema.

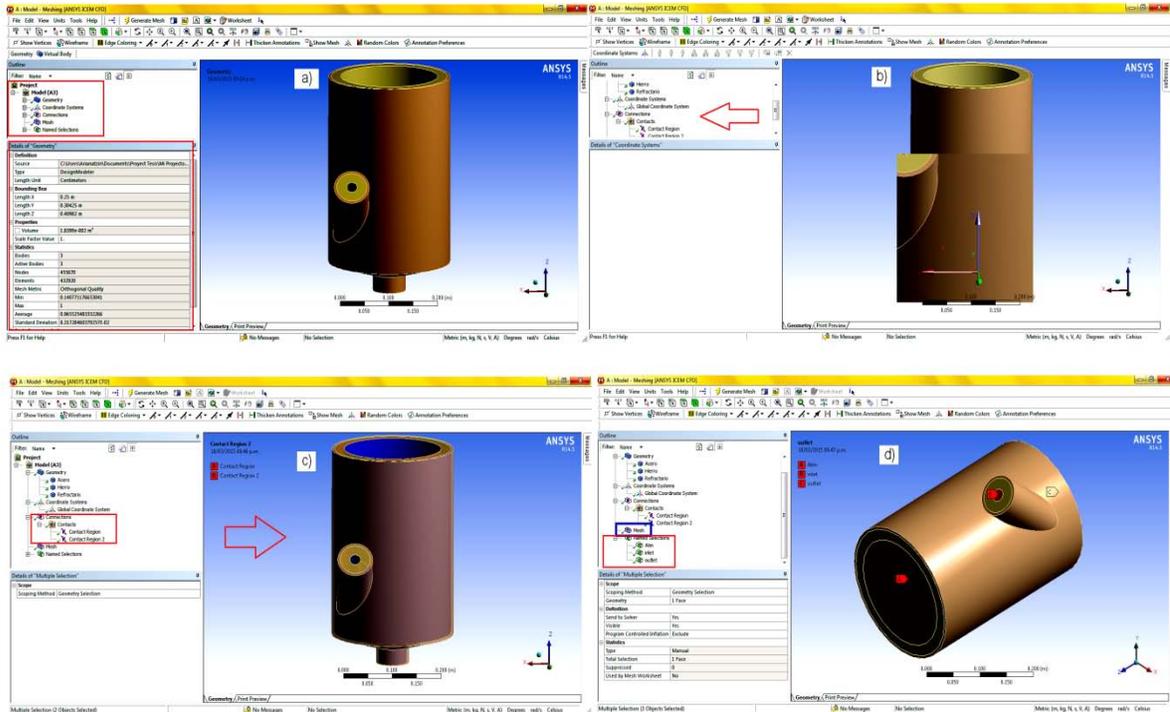


Figura B-1. Árbol de construcción para el módulo de *Meshing*, a) *Geometry*, ramificación que pertenece los detalles geométricos del sistema, b) *Coordinate Systems*, describe el sistema de referencia utilizado, c) *Connections*, describe el acoplamiento de los dominios así como el módulo de *Meshing* y d) *Named Selections* son las condiciones de frontera del sistema.

2) *Meshing* tiene una gran variedad de herramientas para obtener un mallado de excelente calidad. La generación de la malla comienza con la selección de la función de los mecanismos de refinación, se dividen de cuatro maneras *Proximity and Curvature*, *Curvature*, *Proximity* y *Fixed*. Básicamente, se refieren a la forma de refinar el mallado dependiendo del tipo de geometría. En este caso, al tener un cuerpo cilíndrico la función *ad hoc* fue *Curvature*, en la que examina la curvatura de los bordes y caras del sistema, calcula tamaños de elementos (volúmenes de control) sobre esos bordes, de tal manera que el tamaño máximo (*max size*) o el ángulo normal a la curvatura serán ajustados, en base al valor incorporado. Ver Figura B-2.

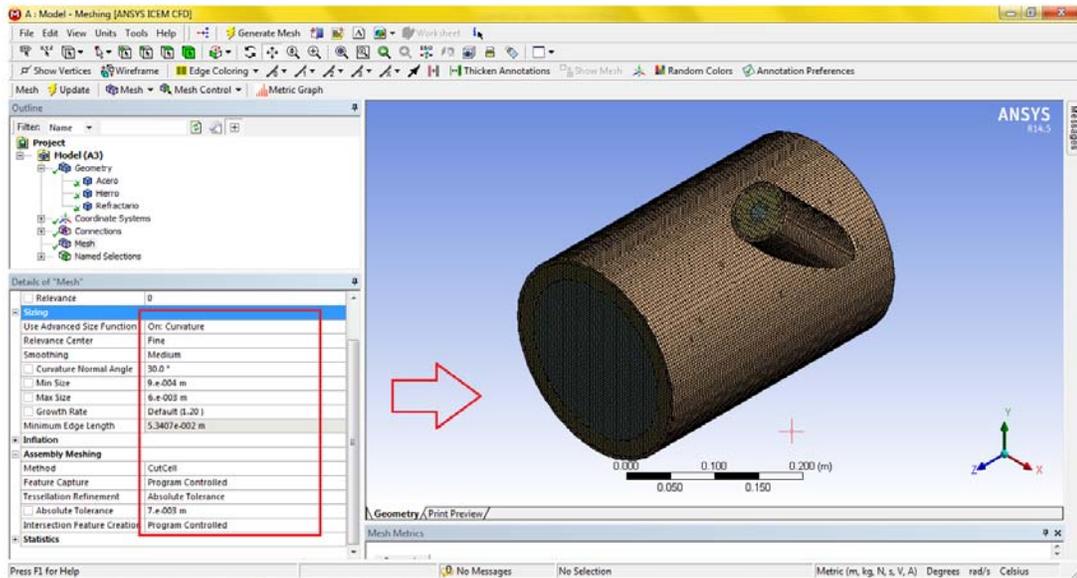


Figura B-2. Ilustración del recuadro de detalles para el tamaño y *sizing function* utilizados para la generación de elementos (volúmenes de control).

3) En el extremo superior izquierdo de la Figura B-2, se muestra el árbol de construcción y los dominios que constituyen al sistema, nombrados como *Acero*, *Hierro* (fluido o fase continua) y *Refractario*. Al ser tres dominios y a conveniencia del usuario, se puede utilizar un *body sizing* para cada dominio. Esta función es muy útil cuando queremos hacer un mallado más fino de un dominio sobre otro o cuando se requiere que en un dominio en particular, las dimensiones de los elementos sean especificadas por el usuario así como declarar cuántos volúmenes queremos que nos genere en un borde o cuerpo. A detalle se muestra la Figura B-3, que ilustra la manera de declarar un *body sizing*.

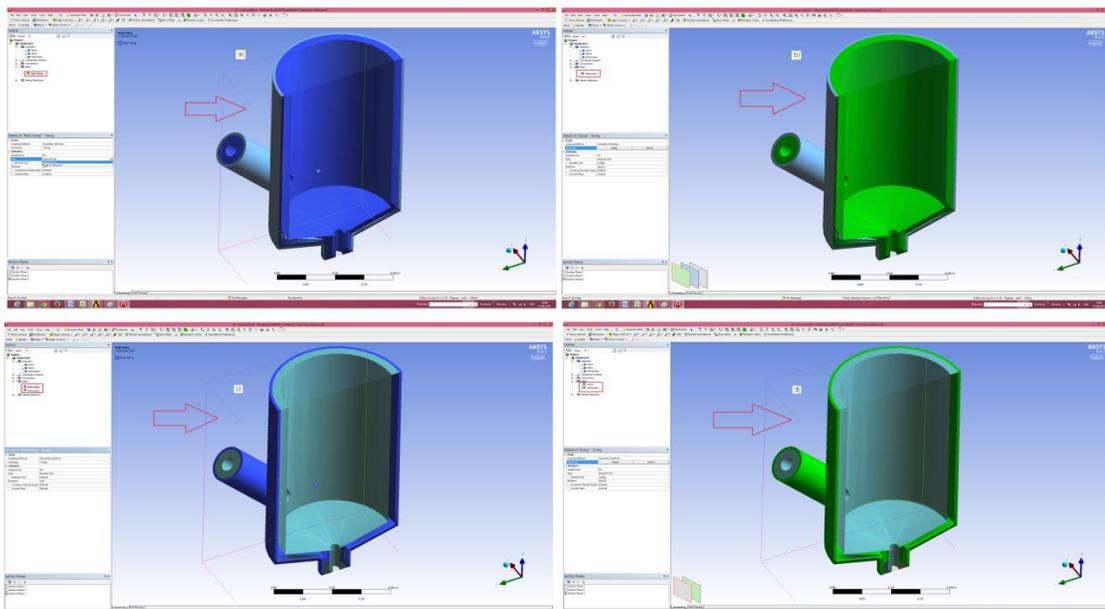


Figura B-3. Ilustración de la función *body sizing*, a) y b) selección de dominio del refractario y adición del valor del tamaño del elemento; c) y d) selección del dominio del acero y adición del valor del tamaño del elemento

4) Para que el *body sizing* se genere es importante tener cuidado con los valores de que declaran para el valor del elemento o volumen de control. En el recuadro de detalles, de la Figura B-2, se aprecia los valores globales del tamaño del elemento, estos son los que Meshing tomará como límites, de este modo al declarar el tamaño del elemento en el dominio elegido mediante la función *body sizing* ver incisos (c) y (d) de la Figura B-3, los valores declarados no rebasan los límites globales.

5) Dar *Generate Mesh*, ver FiguraB-4. El resultado final, es la diferencia en el tamaño de los elementos, por dominio.

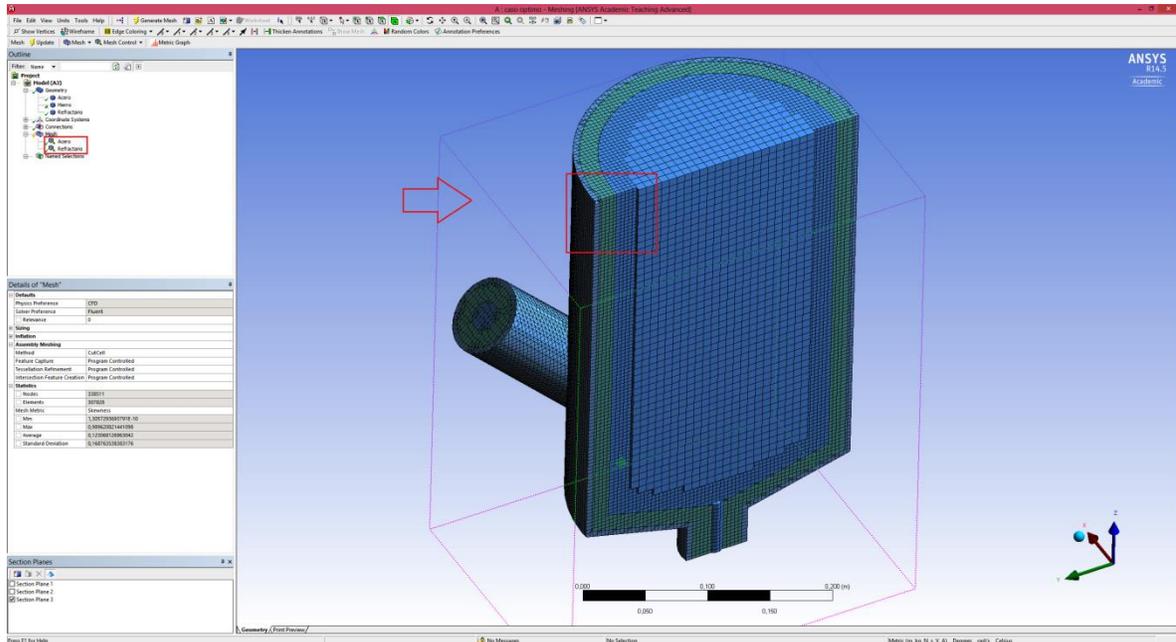


Figura B-4. Resultado final de utilizar la función *body sizing*.

6) Para el generar la malla se utilizó el algoritmo *Cut cell*, este algoritmo es conocido como “*el de batalla*”, pues su versatilidad y facilidad de engranar cuerpos “fluidos” con piezas individuales, así como conjuntos de sólidos inconexos. Este método es adecuado para una amplia gama de aplicaciones y debido a la gran fracción de elementos hexagonales en la malla, a menudo produce mejores resultados que los métodos tetraédricos.

Uno de los pasos más importantes para asegurar la continuidad entre cada elemento es la inspección de la calidad ortogonal del mallado. Ver Figura B-5.

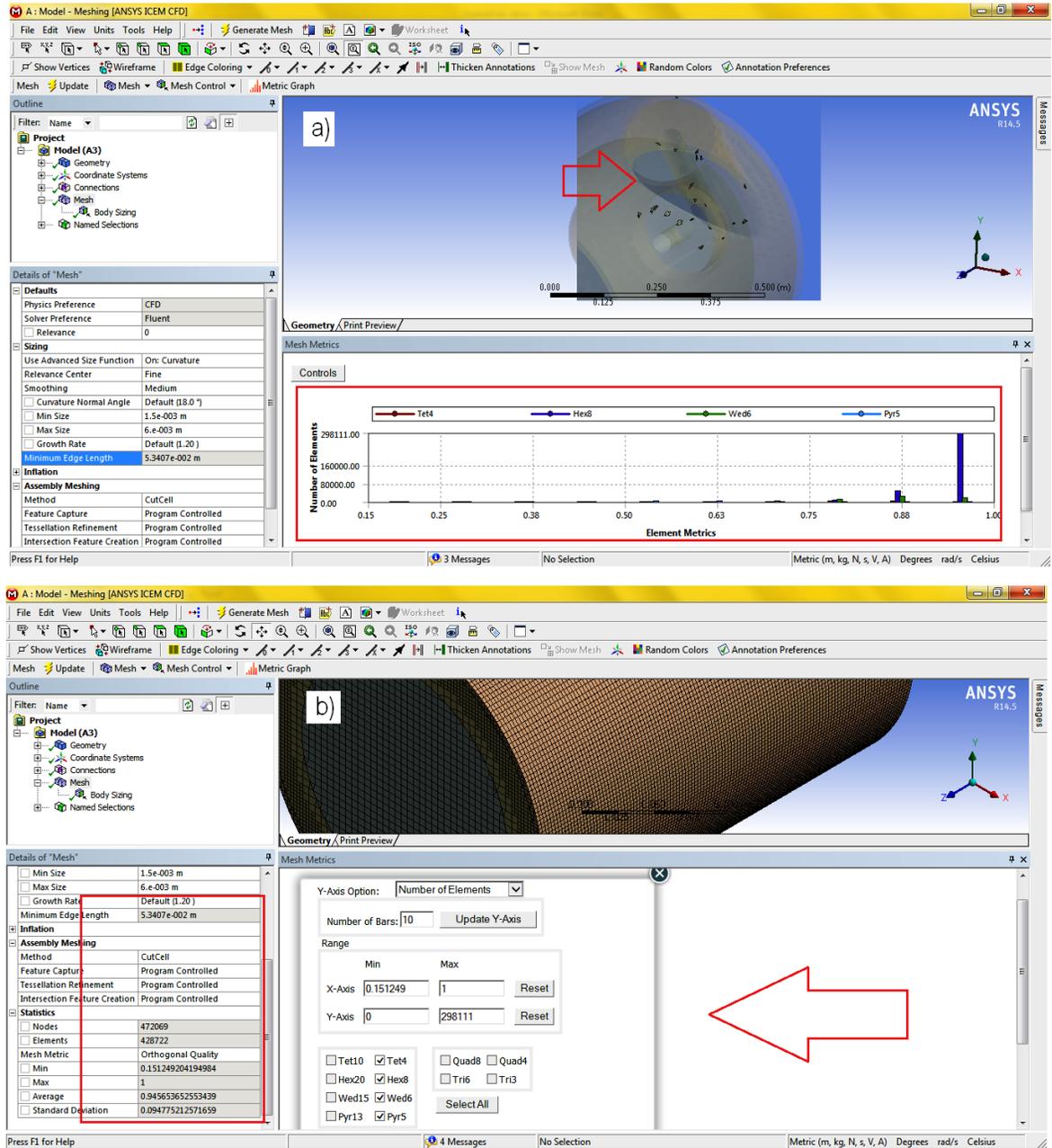


Figura B-5. Ilustración de la calidad ortogonal, a) gráfico que señala la posición del tipo de elemento generado, en función del valor de ortogonalidad y b) *Orthogonal Quality* y edición de los ejes de Número de Elementos versus Métrica por elemento.

7) Finalmente, se nombra las fronteras del sistema, las cuales tomarán como *condiciones a la frontera* y al cargar la malla a *Fluent*, éstas serán reconocidas y podrán ser editadas por *default* a la condición adscrita en el Meshing. Ver Figura B-6.

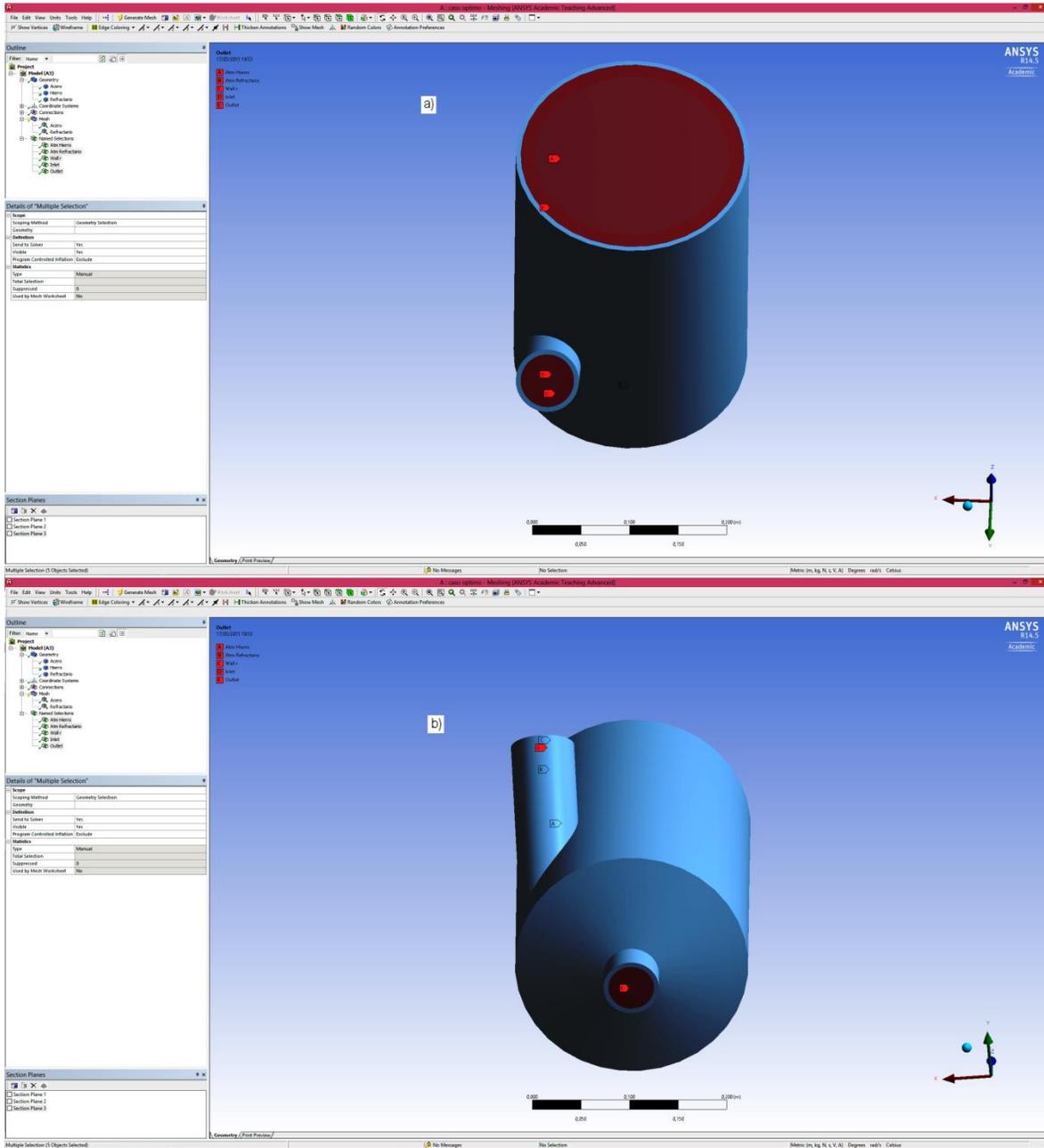


Figura B-6. Declaración de las condiciones a la frontera del sistema.

## Apéndice C. Set up Fluent

1) La plataforma de Fluent, permite declarar los parámetros y las condiciones físicas en las que está impuesta el sistema en la realidad. En la Figura C-1, se muestra la sección de los parámetros generales del sistema, tales son la dirección de la gravedad, el modelo de resolución de las ecuaciones gobernantes y el tipo de cálculo. La constante de la gravedad  $g$ , fue activada con un valor  $dez = -9.81 \text{ m/s}^2$ . Se seleccionó un modelo de solución en base a la presión (*Pressure-Based*) ya que se trabajó con un fluido incompresible y en estado transitorio.

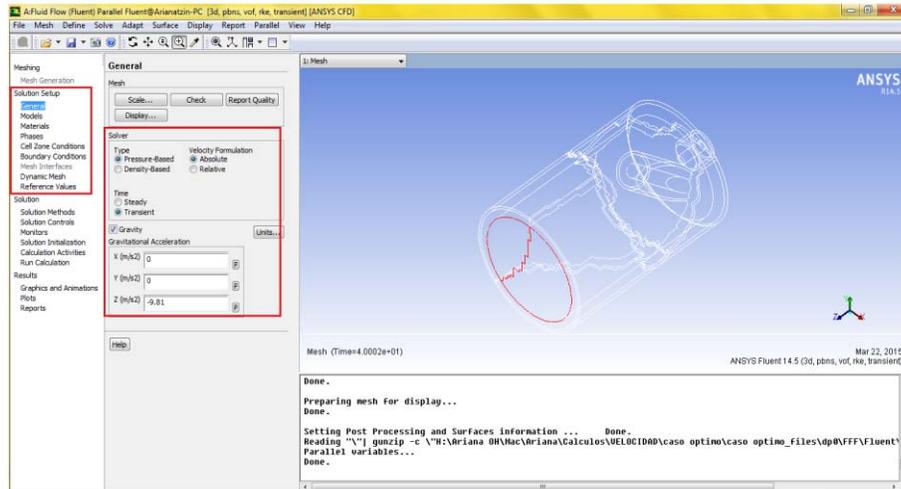


Figura C-1. Esquema general del set up de *Fluent*.

2) La activación de las ecuaciones gobernantes de activan en el apartado de *Models*, como puede verse en la Figura C-2.

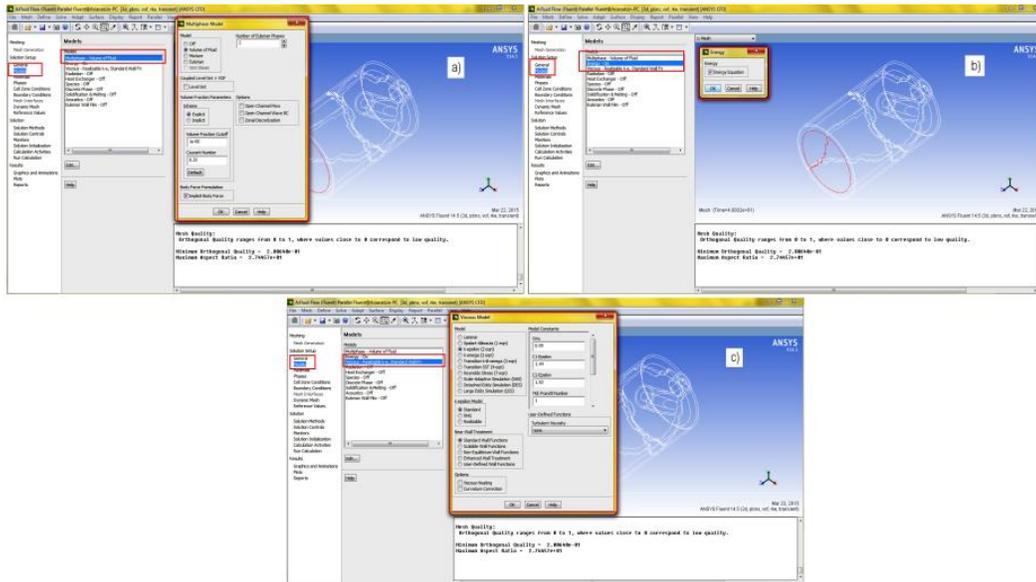


Figura C-2. Esquema de la activación de las ecuaciones gobernantes del sistema, a) ecuación de continuidad bajo el esquema de VOF (*volumen of fluid*), b) ecuación de conservación de energía y c) modelo k-epsilon, ecuaciones de turbulencia.

3) La Figura C-3, ilustra el botón de materiales donde se adiciona las propiedades físicas de las fases líquidas y sólidas. Como se activó la ecuación de conservación de energía, es importante adicionar las propiedades del fluido o material sólido que corresponda a la temperatura de operación del sistema.

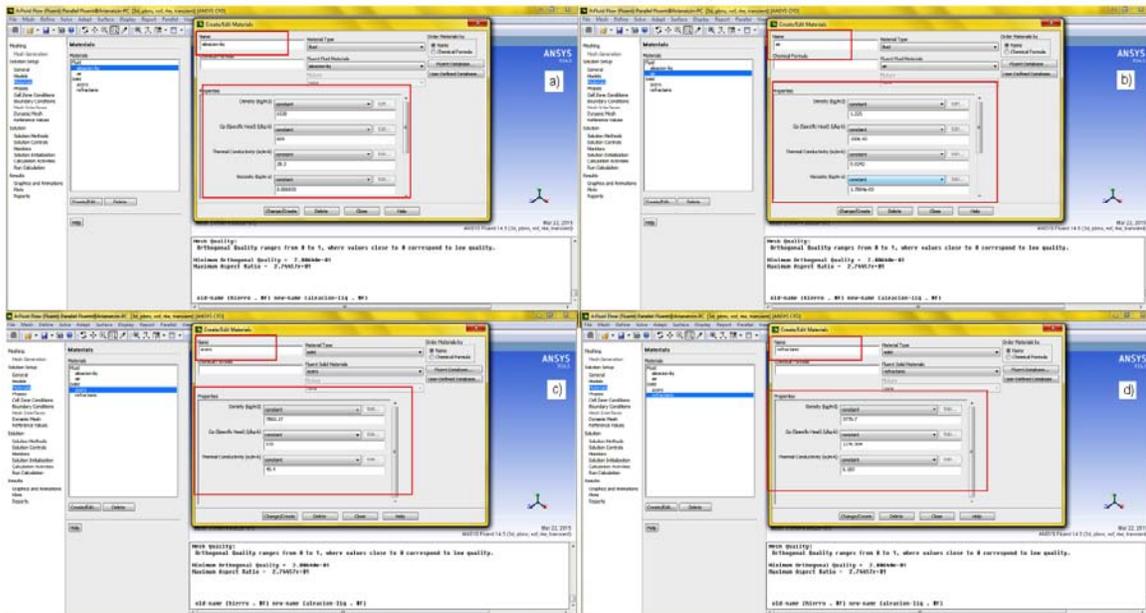


Figura C-3. Ilustración de la adición de las propiedades físicas del sistema, a) aleación líquida b) aire, c) acero y d) refractario.

4) Manejando el algoritmo VOF (*volumen of fluid*) para resolución del balance de masa en la ecuación de continuidad de las fases presentes en el sistema (aleación líquida y aire), es necesario determinar en *Fluent*, la fase primaria y la secundaria; la fase primaria corresponderá al principal fluido de estudio y la segunda fase coadyuvará a su interacción física. Ver Figura C-4.

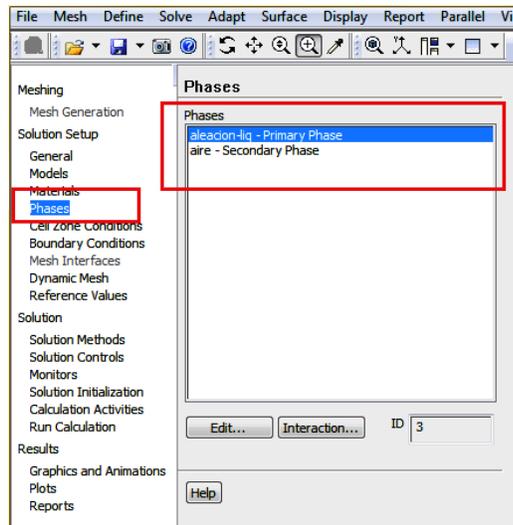


Figura C-4. Definición de fase primaria y secundaria.

5) Condiciones a la frontera. Teniendo en cuenta los tres dominios del dispositivo: i) dominio de los fluidos, ii) dominio del refractario y iii) dominio del acero, se muestra en la Figura C-5 el apartado de *Boundary Conditions* y los parámetros adicionados.

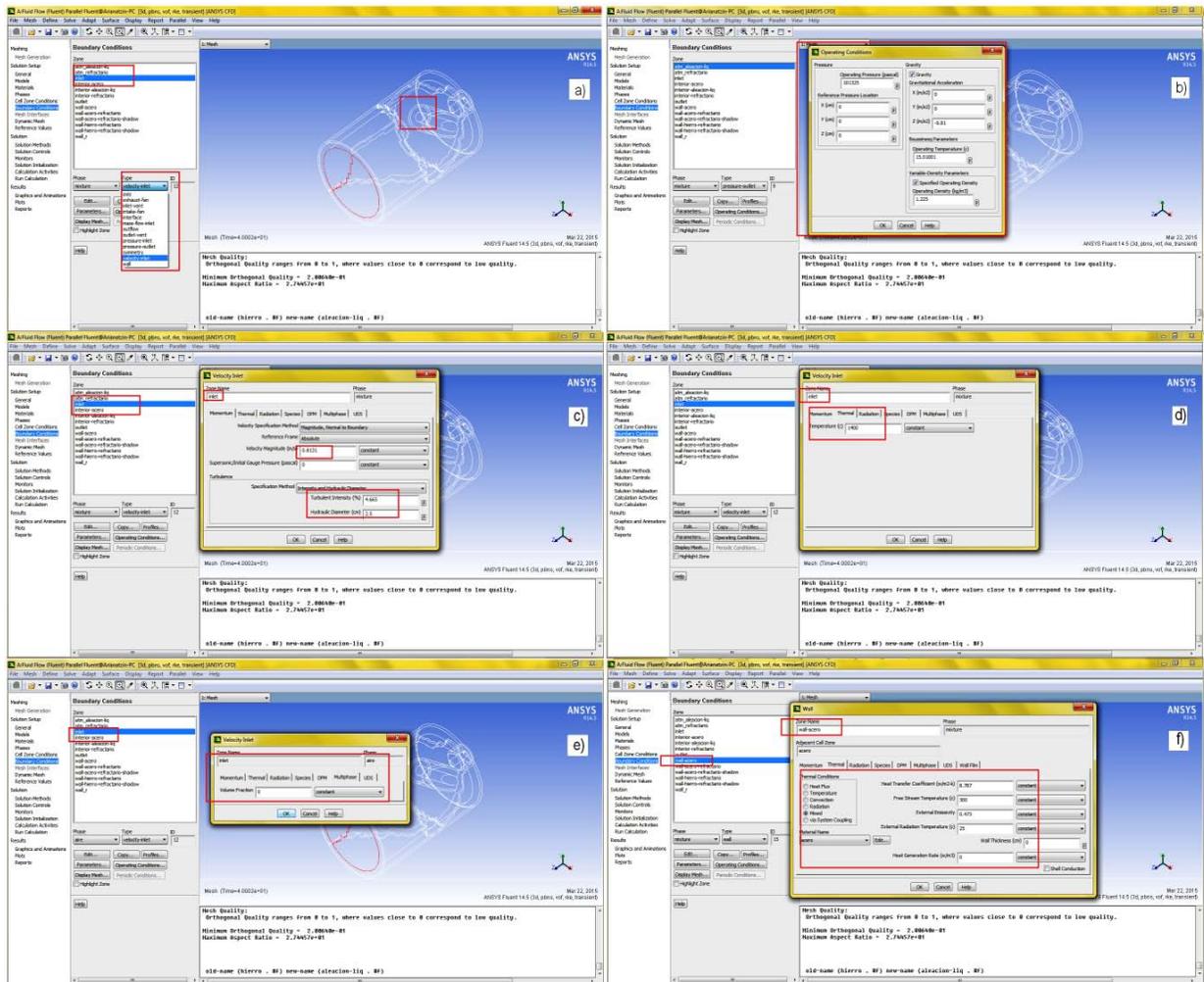


Figura C-5. Ilustración de las condiciones a la frontera para los dominios del dispositivo, a) y c) condiciones de velocidad a la entrada b) parámetros de operación, d) temperatura de entrada del fluido y d) condiciones térmicas para la carcasa de acero.

En el inciso (f) de la Figura C-5, las condiciones térmicas en la pared de acero fueron calculadas mediante correlaciones empíricas, como se explicó en el Capítulo II.

Las condiciones térmicas de las paredes adscritas a las carcasas, se definirán a detalle en la siguiente Figura C-6.

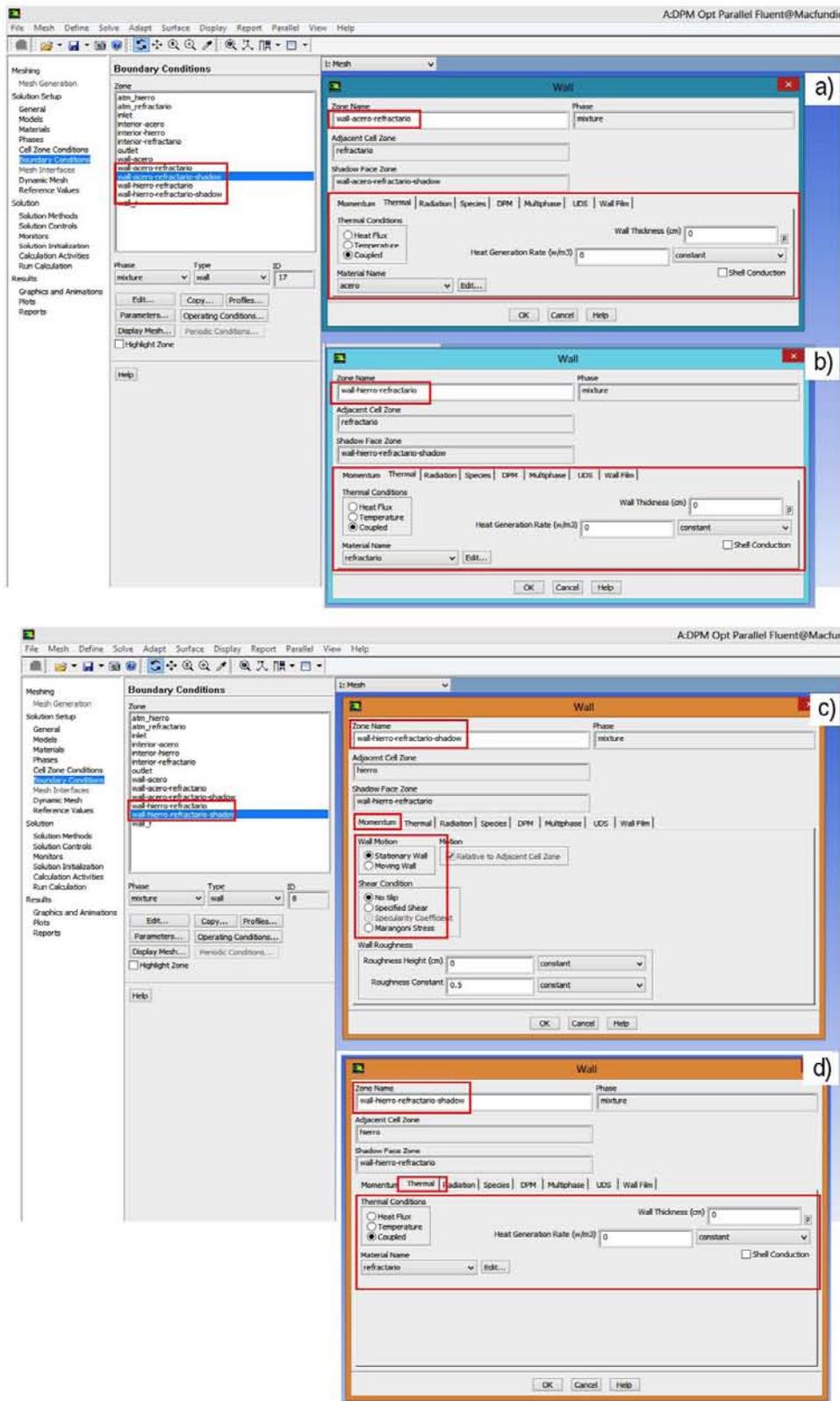


Figura C-6. Ilustración de las condiciones térmicas en las paredes del sistema; a) pared acero-refractario, b) pared hierro-refractario, c) y d) intercara "pared" hierro-refractario para condición de movimiento y térmica, respectivamente.

Al tener doble carcasa, *Fluent* genera en automático las paredes vecinas en la frontera de los dominios, así para la intercara o pared que "ve" o está en contacto con la aleación líquida (Hierro) se deberá incorporar la condición de pared estacionaria y no deslizamiento (ver Figura C-6 inciso (c)), la pared que le sigue es la del refractario, donde como se encuentra entre un fluido y un sólido, el usuario deberá declarar la condición térmica a convenir, para este trabajo se estableció un cálculo mixto del flux de calor y la temperatura en esa pared en cada paso de tiempo (ver Figura C-6 inciso (d)). Ahora bien, la siguiente pared es la misma pero es ahora la intercara que "ve" o está en contacto con el acero, por tanto el usuario definirá si desea que *Fluent* calcule la temperatura de la pared, el flux de calor o ambos (ver Figura C-6 inciso (a)). Finalmente, en la misma pared que ahora "ve" al aire de los alrededores, será necesario declarar parámetros tales como el coeficiente de transferencia convectivo promedio, la emisividad del material y las temperaturas medidas experimentalmente o "estimadas"; en este trabajo se activó la combinación de la transferencia de energía por convección y radiación con el fin de no adicionar un modelo de radiación al modelo matemático y facilitar su pronta solución (ver Figura C-5 inciso (f)).

6) Modelo de la fase discreta (DPM). En la Figura C-7 se ilustra el procedimiento de acoplar el enfoque lagrangiano al sistema, cuando este ha llegado a un estado cuasi-estable.

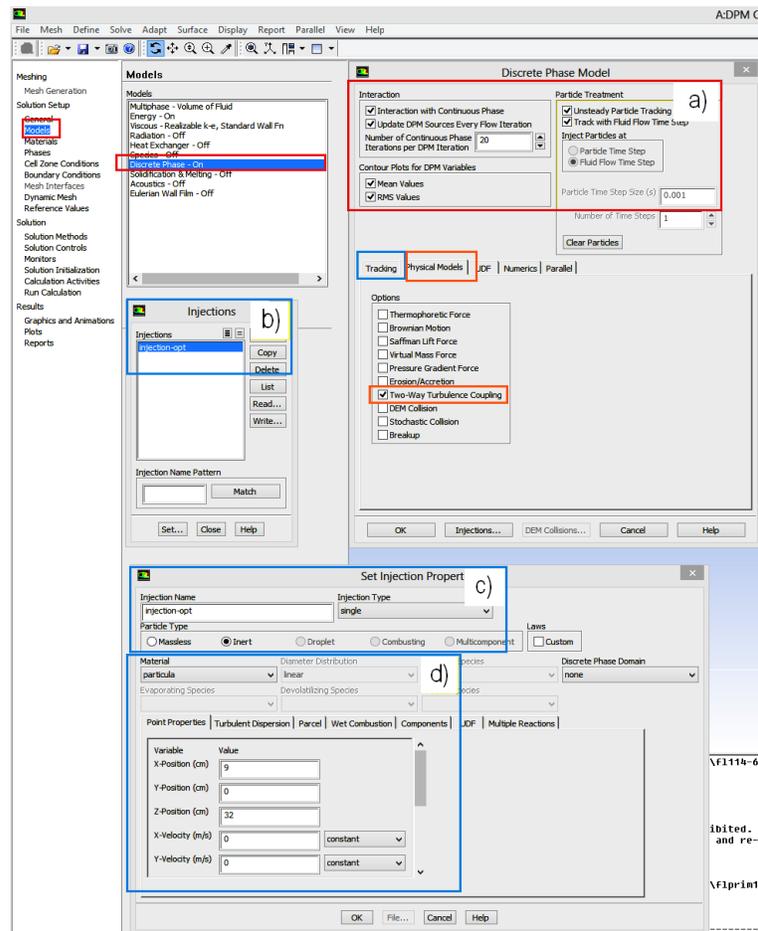


Figura C-7. Ilustración de la adición del modelo de la fase discreta, a) Parámetros dinámicos, b) *Tracking/Injections*, c) tipo de inyección y d) condiciones de la inyección.

Los parámetros de este modelo radican en activar la interacción entre la fase continua (aleación líquida) y las partículas sólidas, así como definir que las trayectorias se evalúen en estado transitorio. Además de que este modelo también tiene la opción de acoplar las ecuaciones de turbulencia (ver Figura C-7 inciso (a)). Los incisos de la (b) a la (d) son las condiciones a la frontera de las partículas, ver sección 2.4.4.2 del Capítulo II.

7) Solución. La resolución de las ecuaciones gobernantes, básicamente está basado en cuatro algoritmos de solución, en este trabajo se utilizó el método de PISO porque se trata de simulaciones en estado transitorio. Se recomienda que en los primeros intentos de solución las ecuaciones se bajen a primer orden, una vez lograda el valor de convergencia establecido, pueden subirse a segundo orden.