



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL CUERPO RÍGIDO, UNA DESCRIPCIÓN
GEOMÉTRICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

HOMAR RIVERA RODRÍGUEZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS CONSTANTINO GARCÍA NARANJO ORTIZ DE
LA HUERTA

Ciudad Universitaria, México D. F., 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Rivera

Rodríguez

Homar

63 62 38 78

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

30811881-0

2. Datos del tutor

Dr.

Luis Constantino

García Naranjo

Ortiz de la Huerta

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rafael

Pérez

Pascual

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Arturo

Olvera

Chávez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Juan Adrián

Reyes

Cervantes

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Peter Otto

Hess

Bechstedt

7. Datos del trabajo escrito

El cuerpo rígido, una descripción geométrica

70 p

2015

El cuerpo rígido, una descripción geométrica

Homar Rivera Rodríguez

Abril de 2015

Dedicado a la memoria de Ene

Agradecimientos

A mis padres por todo el apoyo brindado a lo largo de más de 20 años.

Al Dr. Luis García Naranjo por su apoyo en la dirección de esta tesis. Gracias por el tiempo, paciencia y guía brindados para hacer posible la realización de esta tesis.

A mis sinodales por invertir algo de su tiempo en la revisión de este trabajo, en especial al Dr. Rafael Pérez Pascual por todos los comentarios y charlas que sirvieron como guía para entender un poco más la mecánica y mejorar esta tesis.

A Yuri Fedorov por la sugerencia de usar coordenadas esferocónicas para el cálculo del ángulo sólido desarrollado en el apéndice.

Índice general

Introducción	1
1. El Cuerpo Rígido	4
1.1. Sistemas de coordenadas	4
1.2. Velocidad angular	6
1.3. Momento angular	9
1.4. Energía cinética	10
2. Ecuaciones de Euler	12
2.1. Integrales de movimiento	13
2.2. Solución de las ecuaciones por cuadraturas	17
2.2.1. Cuerpo totalmente simétrico	17
2.2.2. Cuerpo con eje de simetría	18
2.2.3. Cuerpo totalmente asimétrico	18
2.3. Casos límites	25
3. Ecuaciones de Reconstrucción	28
3.1. Descripción cualitativa global de la dinámica en el espacio fase	28
3.2. Ecuaciones de reconstrucción	29
3.2.1. Rotaciones estacionarias	31
3.2.2. Cuerpo simétrico	32
3.2.3. Cuerpo totalmente asimétrico	34
3.3. Ángulos de Euler	35
4. Fases Geométricas	39
4.1. Espacio fase del cuerpo rígido	39
4.2. Uno-forma canónica	40
4.3. Cálculo de la fase	44

4.3.1. Integral de línea.	47
4.3.2. Integral de superficie.	49
4.3.3. Expresión final	52
5. Verificación numérica	55
5.1. Simulación 1	56
5.2. Simulación 2	58
5.3. Discusión de resultados	61
A. Cálculo del ángulo sólido	64
Bibliografía	69

Introducción

El problema del cuerpo rígido se introdujo en el panorama científico con los trabajos de Euler y D'Alembert. El problema que ellos se plantearon fue el siguiente: dada la distribución de masa del cuerpo rígido y su velocidad inicial, encontrar la orientación del cuerpo en todo instante de tiempo. Cada uno obtuvo una descripción completa del trompo de Euler a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las ecuaciones diferenciales para la velocidad instantánea del objeto se conocerían después como ecuaciones de Euler [3].

Posteriormente, Lagrange introdujo una manera más abstracta de resolver el problema del trompo de Euler. La clave de ese método era concentrarse en el grupo de isometrías del cuerpo rígido en lugar de su espacio ambiente. Como consecuencia, la solución analítica no proporciona de manera directa ninguna descripción detallada de como ocurre el movimiento del cuerpo rígido dentro del espacio ambiente. Las ecuaciones de Euler, en la notación actual, para un cuerpo rígido involucran a la velocidad o momento angular pero no la posición específica del cuerpo. Lo mismo es cierto para las ecuaciones de Euler para un fluido ideal sin viscosidad: las ecuaciones únicamente involucran a la velocidad euleriana y no a la posición de las partículas que conforman el fluido.

Los dos ejemplos mencionados en el párrafo anterior son instancias del mismo fenómeno matemático como lo hizo ver V. I. Arnold en su famoso artículo *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits* [2]. En resumen, el mecanismo que permite desacoplar la evolución de las velocidades y de las posiciones en las ecuaciones de movimiento es la presencia de un grupo de simetrías. Dicho proceso de desacoplamiento es un ejemplo de una instancia matemática general que se conoce como reducción en el que se eliminan variables en el espacio de fases

mediante el uso de simetrías.

En general, las ecuaciones reducidas son suficientes para deducir un gran número de propiedades de la evolución del sistema físico en cuestión. Sin embargo, en algunas aplicaciones prácticas, como la navegación de un satélite, es importante obtener la dinámica de las variables eliminadas por la reducción. A este proceso se le denomina reconstrucción. En el caso en que las variables reducidas tienen una evolución periódica, el proceso de reconstrucción se inscribe en el contexto de las fases geométricas de Berry [4] que son de importancia en varios campos de la física.

La solución completa al problema de reconstrucción del cuerpo rígido fue obtenida por Jacobi en [6], su solución estaba dada en términos de combinaciones de funciones elípticas y trigonométricas (ver también [11]). Una interpretación analítica moderna de estas funciones es en términos de funciones theta generalizadas [5].

Esta tesis está dedicada al estudio de las fases geométricas en el caso de un cuerpo rígido libre. A través de un análisis geométrico, basado en el artículo Montgomery [10], se obtiene una expresión exacta para el ángulo que describe la orientación del cuerpo después de un periodo del momento angular visto desde un sistema de referencia fijo sobre el cuerpo. De manera complementaria al desarrollo mostrado en [10], en esta tesis se realiza un tratamiento formal y riguroso en los cálculos realizados para obtener la fase. Además se realiza de manera explícita el cálculo del ángulo sólido a través de una parametrización con coordenadas esféricas. También se hace una comparación numérica para verificar la validez del resultado obtenido.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos necesarios para realizar un análisis detallado del cuerpo rígido. Conceptos como velocidad y momento angular son discutidos en este capítulo. Además se presentan herramientas matemáticas más abstractas que resultan de utilidad en el análisis realizado para obtener la fase geométrica.

El capítulo 2 sirve como introducción a las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido libre. En este capítulo se pone de manifiesto la importancia de las integrales de movimiento en problemas mecánicos y su utilidad en el análisis de la dinámica. Finalmente se reducen las ecuaciones de Euler a cuadraturas, obte-

niéndose de esta forma soluciones en términos de funciones elípticas. También se discuten algunas de las propiedades de dichas soluciones, además de analizar su comportamiento en ciertos casos límites.

En el capítulo 3 se presentan las ecuaciones de reconstrucción para el cuerpo rígido libre. Se muestran diferentes maneras de abordar este problema y las dificultades que aparecen con cada una de ellas. En este contexto se introducen los ángulos de Euler y se discute su utilidad en un contexto más abstracto.

El capítulo 4 está dedicado a la obtención de la ecuación principal, aquella que expresa el ángulo de rotación del cuerpo en el contexto de las fases geométricas. La primera parte del capítulo se enfoca en desarrollar las herramientas matemáticas necesarias para obtener el resultado. Posteriormente se muestra en detalle la deducción de la expresión buscada.

En el capítulo 5 se presenta una comparación numérica de la posición del cuerpo obtenida a través de las ecuaciones de movimiento y la información resultante del análisis geométrico. Se obtiene una coincidencia muy buena, lo que ilustra el valor del análisis geométrico realizado.

El Cuerpo Rígido

En este capítulo se describen los conceptos y herramientas, tanto físicos como matemáticos, necesarios para realizar una descripción detallada de un cuerpo rígido. El tratamiento realizado en este capítulo sigue el desarrollo llevado a cabo en [1].

Un cuerpo rígido puede definirse como un sistema de partículas en el cual la distancia entre las partículas no cambia, esto significa que las partículas están sujetas a la constricción holonómica

$$r_{ij} := \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = \text{constante.} \quad (1.1)$$

En el caso continuo, un cuerpo rígido se puede pensar como la idealización de un cuerpo sólido que no se deforma. La ecuación (1.1) para este caso se traduce en que la distancia entre cualesquiera dos puntos en el cuerpo permanece constante sin importar las fuerzas externas aplicadas sobre él.

1.1. Sistemas de coordenadas

Para describir el movimiento de un cuerpo rígido es conveniente utilizar dos sistemas de coordenadas cartesianas: un sistema inercial s y un sistema S en movimiento que se mantiene anclado al cuerpo. Es común tomar el origen del sistema S en el centro de masa del cuerpo. Tal selección del origen del sistema permite escribir la energía cinética del cuerpo como la suma de la energía de traslación y

la de rotación [7].

Para encontrar el número de grados de libertad de este sistema mecánico consideremos tres puntos \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_3 no colineales sobre el cuerpo rígido. Se sigue de la condición de rigidez (1.1) que la posición de cada uno de los puntos sobre el cuerpo está completamente determinada por las posiciones de \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_3 [1] puesto que para ubicar un punto en el espacio bastan las distancias a tres puntos no colineales. Por lo tanto para determinar los grados de libertad de un cuerpo rígido, es suficiente determinar el número de parámetros independientes para ubicar la posición de tres puntos no colineales sobre el cuerpo. Para especificar la posición de \mathbf{x}_1 son necesarios tres parámetros. Para especificar la posición de \mathbf{x}_2 , dado \mathbf{x}_1 , se requieren dos parámetros. Esto es consecuencia de que la distancia r_{12} es fija por lo que \mathbf{x}_2 se encuentra en una esfera de radio r_{12} centrada en \mathbf{x}_1 . Finalmente para especificar la posición de \mathbf{x}_3 , dados \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , se requiere únicamente un parámetro. Esto debido a que las distancias r_{13} y r_{23} están dadas. Entonces \mathbf{x}_3 se encuentra sobre la circunferencia resultante de la intersección de la esfera de radio r_{13} centrada en \mathbf{x}_1 y la esfera de radio r_{23} con centro en \mathbf{x}_2 . De esta manera se encuentra que para especificar la posición de tres puntos no colineales sobre el cuerpo rígido bastan 6 parámetros independientes. Por lo tanto el cuerpo rígido es un sistema mecánico con seis grados de libertad.

La posición del cuerpo respecto al sistema inercial está completamente determinada si se especifican la posición y la orientación del sistema S . Denotemos O al origen del sistema anclado al cuerpo y \mathbf{r} su radio vector (respecto al sistema inercial). La orientación de los ejes de S respecto a s está determinada por tres ángulos independientes. Estos ángulos junto con las tres componentes de \mathbf{r} forman un total de seis coordenadas independientes, que de acuerdo a lo establecido en el párrafo anterior son suficientes para describir el estado del sistema.

Entonces la posición del cuerpo rígido queda totalmente descrita por el vector \mathbf{r} y por la orientación de S respecto al sistema inercial. Dicha orientación puede describirse por elementos del conjunto de rotaciones en el espacio euclidiano. Por lo tanto el espacio ¹ de configuración del cuerpo rígido es la variedad 6-dimensional $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Si el cuerpo tiene un punto que permanece fijo durante el movimiento basta con especificar la orientación de S y en este caso el

¹En este caso el término espacio de configuración se refiere a variedad de configuración y no a un espacio vectorial.

sistema tiene únicamente tres grados de libertad. La variedad de configuración se reduce al grupo de rotaciones $SO(3)$.

De acuerdo a como se definieron los sistemas s y S es posible establecer una relación matemática entre ellos. Basta recordar que para un tiempo fijo es suficiente realizar una traslación seguida de una rotación para hacer coincidir los dos sistemas coordenados. Si $\mathbf{q}(t) \in s$ denota el radio vector de un punto respecto al sistema inercial se sigue que

$$\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{z}(t). \quad (1.2)$$

Donde $\mathbf{Q}(t)$ representa el radio vector del mismo punto pero ahora relativo al sistema anclado al cuerpo, $B(t) \in SO(3)$ es una matriz de rotación y $\mathbf{z}(t)$ representa una traslación.

1.2. Velocidad angular

Para conocer la velocidad absoluta de un punto sobre el cuerpo (respecto al sistema inercial) se debe derivar la expresión (1.2) respecto al tiempo

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + \dot{\mathbf{z}}, \quad (1.3)$$

donde se ha utilizado que $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ pues representa un punto sobre el cuerpo (en reposo en S).

Considérese un movimiento puramente rotacional ($\mathbf{z} = 0$). En estas condiciones $\dot{\mathbf{q}}$ siempre se puede escribir como $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ para algún vector $\boldsymbol{\omega}$. Para probar esta afirmación se escribe $\dot{\mathbf{q}}$ de acuerdo a la ecuación (1.3) con $\mathbf{z} = 0$ con lo que se obtiene

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q}.$$

Además según (1.2) se tiene que $\mathbf{Q} = B^{-1}\mathbf{q}$, por lo cual $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}B^{-1}\mathbf{q} = \hat{\omega}\mathbf{q}$ donde $\hat{\omega} := \dot{B}B^{-1} : s \rightarrow s$ es un operador lineal sobre s .

El operador $\hat{\omega}$ definido de esta manera es un operador antisimétrico. Esto se sigue de que B es una matriz ortogonal por lo que satisface $B^{-1} = B^T$. Diferenciando la expresión $BB^T = I$ respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{B}B^T + B\dot{B}^T = 0, \quad \dot{B}B^{-1} + (\dot{B}B^{-1})^T = 0, \quad (1.4)$$

con lo que se prueba que $\hat{\omega}$ es antisimétrico. Finalmente se utiliza el hecho de que, como se verá más adelante, cada operador antisimétrico \hat{A} en \mathbb{R}^3 corresponde a la multiplicación vectorial por un único vector fijo. Esto es

$$\hat{A}x = \mathbf{A} \times x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 \text{ fijo.}$$

Por lo tanto se tiene que para una rotación general (con las condiciones antes establecidas) siempre es posible escribir

$$\dot{\mathbf{q}} = \hat{\omega} \mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}. \quad (1.5)$$

En coordenadas cartesianas el operador $\hat{\omega}$ se puede expresar como la matriz

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

A partir de esta matriz y de la asociación única $\hat{\omega} \mapsto \boldsymbol{\omega}$ es posible construir el vector de velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}$. En coordenadas cartesianas se tiene que el vector de velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$, donde ω_i son los mismos que en (1.6).

Hay que recalcar que en general la velocidad angular depende del tiempo, esto es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$. El vector de velocidad angular definido de esta manera es relativo al sistema inercial. Para relacionar la velocidad angular en dicho sistema con la velocidad angular relativa al sistema fijo sobre el cuerpo $\boldsymbol{\Omega}(t) \in S$ simplemente se utiliza la matriz de rotación $B(t)$:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = B^{-1}(t) \boldsymbol{\omega}(t). \quad (1.7)$$

Es posible definir la velocidad angular desde un punto de vista más abstracto. De ahora en adelante siempre se considerará un cuerpo rígido libre con un punto fijo. Como se mencionó anteriormente el espacio de configuración para este problema es $SO(3)$, por esta razón el espacio ² fase del sistema será la variedad

²De la misma forma que para el espacio de configuración, el término espacio hace referencia a variedad y no a espacio vectorial.

$T^*SO(3)$, donde T^*M representa el haz o fibrado cotangente a la variedad M .

De ahora en adelante se denotará al espacio tangente al punto $p \in M$ como T_pM . Considérese $g \in SO(3)$ la matriz que representa la orientación del cuerpo en un determinado instante del tiempo t_0 . Entonces $v_g \in T_gSO(3)$ es un vector tangente a $g \in SO(3)$. Para conocer la velocidad angular del cuerpo en $t = t_0$ se definen uno-formas diferenciales ρ_i y λ_i con $i = 1, 2, 3$ tales que

$$\rho_i(v_g) = \omega_i(t_0), \quad \lambda_i(v_g) = \Omega_i(t_0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Donde $\omega_i(t_0)$ y $\Omega_i(t_0)$ representan la i -ésima componente del vector $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ y $\boldsymbol{\Omega}(t_0)$ respectivamente. De la ecuación anterior es posible definir uno-formas vector-valuadas $\rho : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\lambda : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a partir de las cuales se puede conocer la velocidad angular en el sistema inercial y en el sistema del cuerpo respectivamente:

$$\rho(v_g) := \begin{pmatrix} \rho_1(v_g) \\ \rho_2(v_g) \\ \rho_3(v_g) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}(t_0), \quad y \quad \lambda(v_g) := \begin{pmatrix} \lambda_1(v_g) \\ \lambda_2(v_g) \\ \lambda_3(v_g) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Omega}(t_0). \quad (1.9)$$

Como se mencionó anteriormente cada operador antisimétrico en \mathbb{R}^3 se puede asociar de manera única con un vector. Este hecho es consecuencia de que el álgebra de Lie matricial $\mathfrak{so}(3)$ (espacio de matrices 3×3 reales antisimétricas) es isomorfa a \mathbb{R}^3 equipado con el producto vectorial. El isomorfismo entre estas álgebras de Lie está dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Esta relación entre $\mathfrak{so}(3)$ y \mathbb{R}^3 permite encontrar una expresión para λ y ρ . Consideremos los mapeos de traslación izquierda y derecha: $L_g : SO(3) \rightarrow SO(3)$ y $R_g : SO(3) \rightarrow SO(3)$ dados por $L_g(h) = gh$ y $R_g(h) = hg$. Entonces ya que $T_gL_{g^{-1}}, T_gR_{g^{-1}} : T_gSO(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ y recordando que $v_g \in T_gSO(3)$ se encuentran las expresiones buscadas

$$\rho(v_g) = T_gR_{g^{-1}}(v_g) \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda(v_g) = T_gL_{g^{-1}}(v_g) \in \mathbb{R}^3.$$

Entonces para cualquier instante de tiempo se tiene

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \rho(v_B) = T_B R_{B^{-1}}(v_B), \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \lambda(v_B) = T_B L_{B^{-1}}(v_B), \quad (1.11)$$

con $B = B(t)$ la matriz que describe la orientación del cuerpo, hay que recalcar que se ha identificado $\mathfrak{so}(3)$ con \mathbb{R}^3 de la manera descrita en (1.10).

1.3. Momento angular

Consideremos una partícula del cuerpo. Si esta partícula tiene radio vector \mathbf{q} y masa m , entonces su momento angular respecto a s está dado por

$$\mathbf{l} = m \mathbf{q} \times \mathbf{v}. \quad (1.12)$$

Además, de acuerdo a (1.5) $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$, por lo que

$$\mathbf{l} = m \mathbf{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}).$$

Aplicando $B^{-1}(t)$ por la izquierda se obtiene el momento angular de la misma partícula escrito en el marco de referencia del cuerpo:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{Q} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}),$$

donde se ha utilizado el hecho de que $B^{-1}(t)$ es una matriz ortogonal.

La ecuación anterior representa una operación lineal sobre la velocidad angular, por lo tanto existe un operador $\mathbb{I}_{\mathbf{Q}} : S \rightarrow S$ que transforma $\boldsymbol{\Omega}$ en \mathbf{L} :

$$\mathbb{I}_{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L} \quad \text{donde } \mathbb{I}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Z} = m \mathbf{Q} \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}).$$

Nótese que el operador $\mathbb{I}_{\mathbf{Q}}$ depende del punto \mathbf{Q} . Mediante un cálculo simple puede mostrarse que este operador es simétrico.

Para obtener el momento angular total del cuerpo se integran los elementos diferenciales de momento angular sobre todo el volumen del cuerpo:

$$\mathbf{L} = \int_{\text{Cuerpo}} (\mathbf{X} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X})) \rho_0(\mathbf{X}) d^3 \mathbf{X}, \quad (1.13)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa del cuerpo.

En analogía con el caso de una sola partícula, existe un operador $\mathbb{I} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que lleva la velocidad angular en el momento angular total. La acción de este operador está dada por

$$\mathbb{I}\mathbf{Z} = \int_{\text{Cuerpo}} (\mathbf{X} \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{X})) \rho_0(\mathbf{X}) d^3\mathbf{X}. \quad (1.14)$$

Por lo que el momento angular total puede expresarse como

$$\mathbf{L} = \mathbb{I}\boldsymbol{\Omega}. \quad (1.15)$$

Con esta definición del operador \mathbb{I} se puede probar que es simétrico y positivo definido (siempre y cuando el cuerpo no sea unidimensional). Este operador se conoce como el *operador o tensor de inercia* (en el marco de referencia del cuerpo). Por ser simétrico, el operador de inercia tiene una base ortonormal de vectores propios $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ en la cual tiene una representación matricial diagonal

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Los vectores \mathbf{E}_i y los valores propios $I_j > 0$ se conocen como ejes principales de inercia y momentos principales de inercia respectivamente.

1.4. Energía cinética

La energía cinética de una partícula del cuerpo está dada por $T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2$. Además ya que la velocidad \mathbf{v} de un punto relativa al sistema inercial se puede expresar mediante la relación $\mathbf{v} = B\mathbf{V}$ donde \mathbf{V} es el mismo vector pero expresado en el sistema del cuerpo se satisface $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{V}\|$. Entonces la energía cinética de un punto del cuerpo es

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{V}\|^2 = \frac{1}{2}m \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = \frac{1}{2}m \langle \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}, \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \rangle.$$

De la misma manera que el momento angular, la energía cinética total del cuerpo se obtiene al integrar las contribuciones individuales sobre todo el cuerpo.

$$T = \frac{1}{2} \int_{Cuerpo} \rho_0(\mathbf{X}) \|\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)\|^2 d^3 \mathbf{X} = \frac{1}{2} \int_{Cuerpo} \rho_0(\mathbf{X}) \|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}\|^2 d^3 \mathbf{X}. \quad (1.16)$$

Utilizando que $\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}\|^2 = \langle \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}, \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X} \rangle$ y la identidad vectorial $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ puede obtenerse

$$T = \frac{1}{2} \int_{Cuerpo} \rho_0(\mathbf{X}) \langle \mathbf{X} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}), \boldsymbol{\Omega} \rangle d^3 \mathbf{X}.$$

Finalmente, ya que $\boldsymbol{\Omega}$ no depende de la posición \mathbf{X} , la expresión anterior puede reescribirse como

$$T = \frac{1}{2} \left\langle \int_{Cuerpo} \rho_0(\mathbf{X}) (\mathbf{X} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X})) d^3 \mathbf{X}, \boldsymbol{\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbb{I} \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega} \rangle. \quad (1.17)$$

Esta última ecuación, junto con (1.15), muestran que la energía cinética del cuerpo rígido expresada en el marco de referencia del cuerpo es una forma cuadrática con coeficientes constantes de la velocidad angular o bien del momento angular.

Ecuaciones de Euler

En este capítulo se encuentran las ecuaciones que describen la evolución temporal del momento angular de un cuerpo rígido libre en el marco de referencia del cuerpo. También se encuentran las integrales de movimiento del problema y se buscan soluciones a las ecuaciones de movimiento para diferentes situaciones físicas y condiciones iniciales, finalmente se realiza el análisis de cada una de las soluciones obtenidas.

En ausencia de fuerzas externas hablamos de un *cuerpo rígido libre*. En este caso el centro de masa del cuerpo tiene un movimiento rectilíneo uniforme. Si se elige el origen del marco de referencia inercial en el centro de masa, el problema del cuerpo rígido libre se reduce al movimiento de un cuerpo rígido libre con un punto fijo [7]. Entonces, en el análisis de un cuerpo rígido libre puede descartarse la parte del movimiento asociada a traslaciones uniformes y estudiar únicamente el movimiento rotacional del cuerpo rígido con un punto fijo. Este trabajo se enfoca en el estudio de dicha situación por lo que de ahora en adelante siempre se supondrá que el cuerpo rígido es libre y tiene un punto fijo.

Consideremos un punto, \mathbf{x} , fijo en el sistema inercial. En el sistema del cuerpo este punto corresponde al vector $\mathbf{X}(t) = B^{-1}(t)\mathbf{x}$. Al derivar respecto al tiempo y considerar que $\dot{\mathbf{x}} = 0$ se obtiene la velocidad de este punto en el sistema de referencia del cuerpo:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{B}^{-1}(t)\mathbf{x}.$$

De acuerdo a (1.4) $B^{-1}(t) = -B^{-1} \dot{B} B^{-1}$ con lo que se puede escribir

$$\dot{\mathbf{X}} = -B^{-1} \dot{B} B^{-1} \mathbf{x} = -B^{-1} \dot{B} \mathbf{X}.$$

Al igual que para el caso de un punto fijo en el cuerpo, el operador $\hat{\Omega} := B^{-1} \dot{B}$ es antisimétrico y corresponde a la multiplicación por el vector de velocidad angular:

$$\dot{\mathbf{X}} = -\hat{\Omega} \mathbf{X} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X} = \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.1)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular en el sistema de referencia del cuerpo y el operador $\hat{\Omega}$ se define de la misma manera que en (1.6).

En el movimiento del cuerpo rígido libre la torca neta, relativa al sistema inercial, es nula por lo que el vector de momento angular en dicho sistema \mathbf{l} se conserva. Entonces \mathbf{l} es un vector fijo, por lo que se puede aplicar la ecuación (2.1) a este vector. Al tomar $\mathbf{X} = \mathbf{L}$ en dicha ecuación se obtienen las ecuaciones que describen la evolución temporal del momento angular en el sistema de referencia del cuerpo:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L} \times \mathbb{I}^{-1} \mathbf{L}. \quad (2.2)$$

El conjunto de ecuaciones (2.2) se conocen como *ecuaciones de Euler*.

Tomando los ejes coordenados de S de tal manera que coincidan con las direcciones principales del operador de inercia, las ecuaciones de Euler para las componentes del momento angular se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3, \\ \dot{L}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} L_1 L_3, \\ \dot{L}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1. Integrales de movimiento

Como se mencionó anteriormente, en el problema del cuerpo rígido libre se conserva el vector de momento angular en el marco de referencia inercial. Esto

implica la presencia de tres integrales de movimiento: l_1 , l_2 y l_3 . Es fácil demostrar que la energía del cuerpo rígido es otra integral de movimiento. Primero se nota que por ser un cuerpo libre la energía total del sistema es únicamente la energía cinética. Posteriormente, a partir de la expresión (1.17) y las ecuaciones de Euler (2.2) se tiene que:

$$2\dot{E} = \langle \dot{\mathbf{L}}, \boldsymbol{\Omega} \rangle + \langle \mathbf{L}, \dot{\boldsymbol{\Omega}} \rangle = \langle \mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle + \langle \mathbf{L}, \dot{\boldsymbol{\Omega}} \rangle = \langle \mathbf{L}, \dot{\boldsymbol{\Omega}} \rangle.$$

Además $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{I}^{-1} \mathbf{L}$ por lo que $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbb{I}^{-1} \dot{\mathbf{L}} = \mathbb{I}^{-1} (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega})$. Entonces

$$2\dot{E} = \langle \mathbf{L}, \mathbb{I}^{-1} (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega}) \rangle = \langle \mathbb{I}^{-1} \mathbf{L}, \mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega} \rangle = \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega} \rangle = 0,$$

con lo que se demuestra que la energía es constante durante el movimiento.

En el sistema de ejes principales $\mathbb{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, por lo que la expresión para la energía en este sistema es particularmente simple:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right). \quad (2.4)$$

Por otro lado $L := \|\mathbf{L}\|$ es también constante, esto se sigue de que \mathbf{l} es constante y de que $\mathbf{L} = B^{-1}\mathbf{l}$, con B una matriz ortogonal. En componentes tenemos

$$L_1^2(t) + L_2^2(t) + L_3^2(t) = L^2, \quad \text{con } L \text{ constante.} \quad (2.5)$$

Antes de resolver las ecuaciones de Euler es posible analizar la dinámica del momento angular a través de un análisis de las integrales de movimiento. De ahora en adelante se supondrá que $I_1 \geq I_2 \geq I_3$. Para valores fijos de E y L las ecuaciones (2.4) y (2.5) representan respectivamente un elipsoide de semiejes $\sqrt{2EI_1} \geq \sqrt{2EI_2} \geq \sqrt{2EI_3}$ y una esfera de radio L en las coordenadas (L_1, L_2, L_3) . Las trayectorias del momento angular deben estar contenidas en ambas superficies y por lo tanto el vector \mathbf{L} se mueve en las curvas resultantes de intersecar los elipsoides con E constante con esferas de radio L . Para analizar estas curvas se mantendrá fijo el elipsoide (energía fija) mientras que el radio, L , de la esfera se varía.

- Si $L < \sqrt{2EI_3}$ o $L > \sqrt{2EI_1}$ la intersección es vacía por lo que no existen condiciones iniciales en este rango de valores.
- Si el radio de la esfera es igual al menor de los semiejes ($L = \sqrt{2EI_3}$) la intersección consiste de los dos polos $(0, 0, \pm\sqrt{2EI_3})$. Incrementando el

radio tal que $\sqrt{2EI_3} < L < \sqrt{2EI_2}$ se obtiene una curva cerrada, cada vez más grande, alrededor de cada uno de los dos extremos del semieje menor. El sentido en que se recorren estas curvas queda determinado por las condiciones $I_3 \leq I_2 \leq I_1$ y las ecuaciones de Euler.

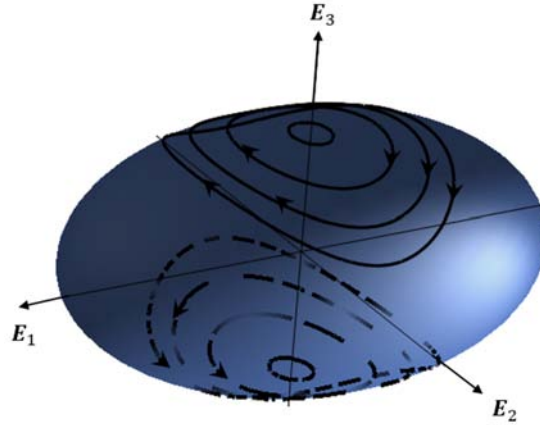


Figura 2.1: Trayectorias del momento angular para $\sqrt{2EI_3} \leq L < \sqrt{2EI_2}$.

Se muestra también el flujo de las soluciones.

- Si $L = \sqrt{2EI_2}$ la intersección del elipsoide de energía con la esfera de radio L consiste en dos círculos máximos contenidos en los planos $L_3 = \pm \sqrt{\frac{I_3(I_1-I_2)}{I_1(I_2-I_3)}} L_1$ que pasan por los polos $(0, \pm\sqrt{2EI_2}, 0)$.

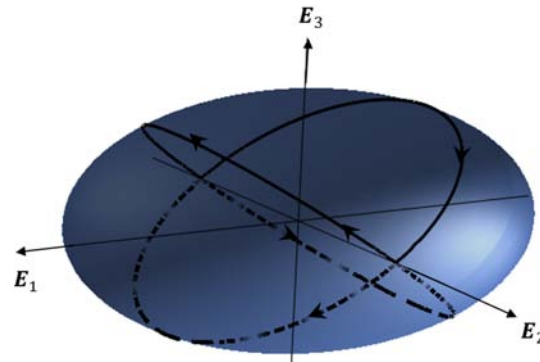


Figura 2.2: Trayectorias del momento angular para $L = \sqrt{2EI_2}$.

- Incrementando el radio tal que $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_1}$ se obtiene una curva cerrada, cada vez más grande, alrededor de cada uno de los dos extremos del semieje mayor. Finalmente, si el radio de la esfera es igual al mayor de los semiejes ($L = \sqrt{2EI_1}$) la intersección consiste en los dos polos $(\pm\sqrt{2EI_1}, 0, 0)$.

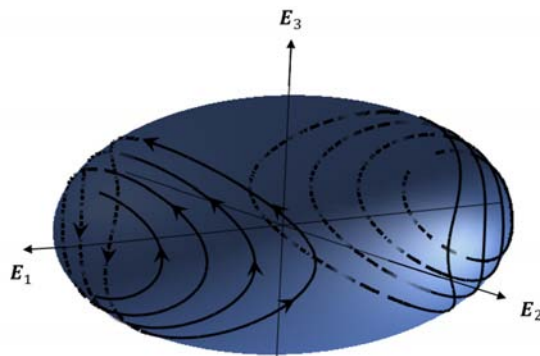


Figura 2.3: Trayectorias del momento angular para $\sqrt{2EI_2} < L \leq \sqrt{2EI_1}$. Se muestra también el flujo de las soluciones.

Las soluciones en que la trayectoria de \mathbf{L} consiste únicamente en alguno de los polos se conocen como *rotaciones estacionarias*. Más generalmente se dice que el movimiento del cuerpo es una rotación estacionaria cuando el cuerpo rota alrededor del eje definido por un vector fijo paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$ un ángulo $\|\boldsymbol{\Omega}\|t$. En las rotaciones estacionarias tanto el vector de momento angular \mathbf{L} como la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ son constantes.

Hay que mencionar que, si $I_1 > I_2 > I_3$, existe una diferencia esencial en la naturaleza de las curvas cercanas a cada uno de los polos del elipsoide. En los ejes \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_3 las curvas que inician en una vecindad de los correspondientes polos se mantienen en esa vecindad para todo instante de tiempo. Por el contrario las curvas que inician cerca de los polos correspondientes al eje \mathbf{E}_2 se alejan de dichos polos. A partir de esta simple observación se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1. (Teorema de Estabilidad del Cuerpo Rígido). *En el movimiento de un cuerpo rígido libre, las rotaciones alrededor de los ejes asociados al menor y mayor de los momentos de inercia son estables (en el sentido de Liapunov)*

mientras que las rotaciones alrededor del eje asociado al momento de inercia medio son inestables.

También es importante recalcar que, si $L \neq \sqrt{2EI_j}$ con $j = 1, 2, 3$, la intersección entre los elipsoides de energía constante y las esferas de momento angular constante son curvas suaves cerradas. Esto implica que el movimiento del vector \mathbf{L} relativo al sistema de referencia del cuerpo debe ser periódico. Durante un periodo el vector de momento angular describe un movimiento sobre alguna superficie y regresa a su posición original. Al encontrar la solución para el momento angular con estas condiciones iniciales debe obtenerse este comportamiento periódico.

2.2. Solución de las ecuaciones por cuadraturas

Para encontrar la solución a las ecuaciones de Euler se sigue el desarrollo realizado en [9]. Las ecuaciones de Euler pueden reescribirse de forma más compacta si se introduce la siguiente notación:

$$a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \geq 0, \quad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} \leq 0, \quad a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \geq 0. \quad (2.6)$$

Utilizando esta notación las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= a_1 L_2 L_3, \\ \dot{L}_2 &= a_2 L_3 L_1, \\ \dot{L}_3 &= a_3 L_1 L_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2.1. Cuerpo totalmente simétrico

Esta situación corresponde a un cuerpo rígido tal que $I_1 = I_2 = I_3$, por ejemplo una esfera o un cubo homogéneos. Para este caso $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ por lo que se concluye que \mathbf{L} , y por lo tanto $\mathbf{\Omega}$, son constantes. El cuerpo rota con velocidad angular constante alrededor de un eje fijo determinado por las condiciones iniciales.

2.2.2. Cuerpo con eje de simetría

Si dos de los momentos principales de inercia son iguales se habla de un cuerpo con un eje de simetría. Para un cuerpo simétrico con $I_1 = I_2 > I_3$, $a_3 = 0$ y $a_2 = -a_1$ por lo que las ecuaciones de Euler se reducen a

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= a_1 L_2 L_3, \\ \dot{L}_2 &= -a_1 L_3 L_1, \\ \dot{L}_3 &= 0.\end{aligned}$$

De donde $L_3(t) = L_3(0) = L_3$ es constante. Si $\eta := a_1 L_3$ entonces la solución a las ecuaciones es

$$\begin{aligned}L_1(t) &= L_1(0) \cos(\eta t) - L_2(0) \sin(\eta t), \\ L_2(t) &= L_2(0) \cos(\eta t) + L_1(0) \sin(\eta t).\end{aligned}$$

Como $I_1 = I_2$, el eje de simetría del cuerpo es \mathbf{E}_3 . Esta simetría nos da la libertad de seleccionar de manera arbitraria \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 mientras que estos se encuentren en el plano perpendicular a \mathbf{E}_3 . Entonces, si se seleccionan \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 de tal manera que $L_2(0) = 0$, el momento angular está dado por

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} L_1(0) \cos(a_1 L_3 t) \\ L_1(0) \sin(a_1 L_3 t) \\ L_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

2.2.3. Cuerpo totalmente asimétrico

Considérese ahora el caso más general $I_1 > I_2 > I_3$. Se definen las constantes positivas a y b de la siguiente manera:

$$a := \frac{L^2}{2E}, \quad b := \frac{2E}{L}. \quad (2.9)$$

A partir de las definiciones anteriores y de las ecuaciones (2.4) y (2.5) es posible expresar L_1 y L_3 en términos de la otra componente del momento angular, obteniéndose

$$L_1^2 = \frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)}(\alpha^2 - L_2^2), \quad (2.10)$$

$$L_3^2 = \frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)}(\beta^2 - L_2^2), \quad (2.11)$$

donde α y β son constantes dadas por

$$\alpha^2 = \frac{ab^2 I_2}{I_2 - I_3}(a - I_3), \quad \beta^2 = \frac{ab^2 I_2}{I_1 - I_2}(I_1 - a). \quad (2.12)$$

Es importante notar que el valor de las constantes a y b , y consecuentemente de α y β , depende de las condiciones iniciales. Por la definición de a , se sigue que $I_3 \leq a \leq I_1$. Entonces α^2 y β^2 efectivamente son positivas por lo que la definición (2.12) es consistente. Los puntos extremos del intervalo $[I_3, I_1]$ así como $a = I_2$ son más sencillos de analizar pero son importantes pues representan rotaciones estacionarias además de ciertas órbitas heteroclínicas.

Rotaciones estacionarias

En el caso $a = I_3$, se obtiene que $\alpha = 0$ y la ecuación (2.10) resulta en $L_1^2 = -\frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)}L_2^2 \leq 0$. Por lo tanto la única solución admisible es $L_1 = L_2 = 0$ y $L_3^2 = 2EI_3$. Entonces, la solución para el momento y la velocidad angular en este caso es

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{2EI_3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{\frac{2E}{I_3}} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

El movimiento del cuerpo es una rotación alrededor del eje fijo \mathbf{E}_3 por un ángulo $\pm\sqrt{\frac{2E}{I_3}}t$.

El caso $a = I_1$ ($\beta = 0$) tiene por solución

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2EI_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2E}{I_1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

que representa una rotación alrededor del eje \mathbf{E}_1 por un ángulo $\pm\sqrt{\frac{2E}{I_1}}t$.

Si $a = I_2$, entonces $\beta^2 = \alpha^2 = 2EI_2$ y (2.10), (2.11) admiten la solución

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{2EI_2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Además de estas rotaciones estacionarias alrededor de \mathbf{E}_2 existen otras soluciones correspondientes a este valor de a . Como se verá más adelante, dichas soluciones son órbitas heteroclínicas entre los puntos críticos $(0, \pm\sqrt{2EI_2}, 0)$.

Rotaciones genéricas

Ahora que los casos $a = I_1$ y $a = I_3$ han sido analizados se puede suponer de aquí en adelante que $I_3 < a < I_1$. Debido a que las ecuaciones (2.10) y (2.11) expresan L_1 y L_3 en términos de L_2 basta encontrar la expresión para esta última componente para determinar el momento angular del cuerpo.

Elevando al cuadrado la ecuación diferencial correspondiente a L_2 del conjunto de ecuaciones (2.7) y utilizando las relaciones (2.10) y (2.11) puede obtenerse

$$\dot{L}_2^2 = a_1 a_3 (\alpha^2 - L_2^2)(\beta^2 - L_2^2). \quad (2.16)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial de primer orden separable. A pesar de estar buscando la solución $L_2 = L_2(t)$, esta puede resolverse para el tiempo en función del momento angular para posteriormente encontrar la función inversa. Entonces, suponiendo que $L_2(0) = 0$ se tiene que

$$t = \int_0^{L_2(t)} \frac{dx}{\sqrt{a_1 a_3 (\alpha^2 - x^2)(\beta^2 - x^2)}}. \quad (2.17)$$

Consideremos primero el caso en que el polinomio de grado cuatro en el denominador de (2.17) tenga raíces dobles. Esto ocurre cuando $\alpha = \beta$. Por otro lado, de acuerdo a la ecuación (2.12) $\alpha^2 = \beta^2$ si y sólo si $a = I_2$. En este caso $\alpha = \beta = L$ y $L^2 = 2EI_2$. Como se vio anteriormente, en estas condiciones la intersección de la esfera de radio L con el elipsoide de energía consiste en dos círculos máximos sobre la esfera que van de $(0, -L, 0)$ a $(0, L, 0)$ y están contenidos en los planos

$$L_3 = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} L_1.$$

Estas curvas corresponden a cuatro órbitas heteroclínicas además de los puntos $(0, \pm L, 0)$. En este caso la ecuación (2.17) puede integrarse en términos de funciones elementales para obtener $L_2(t)$. Al integrar (2.17) y usando las relaciones (2.10), (2.11) se obtiene la expresión de las órbitas heteroclínicas.

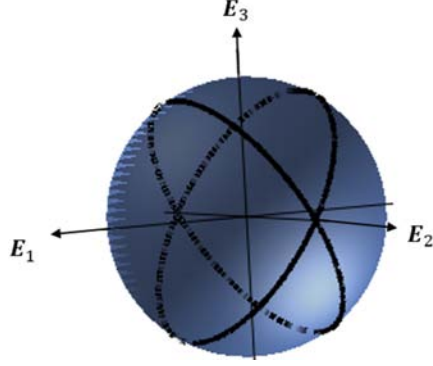


Figura 2.4: Curvas descritas por el momento angular cuando $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}
 L_1(t) &= \pm L \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}} \operatorname{sech}(-\sqrt{a_1 a_3} Lt), \\
 L_2(t) &= \pm L \tanh(-\sqrt{a_1 a_3} Lt), \\
 L_3(t) &= \pm L \sqrt{\frac{a_3}{-a_2}} \operatorname{sech}(-\sqrt{a_1 a_3} Lt),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

cuando $L_3 = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} L_1$, mientras que

$$\begin{aligned}
 L_1(t) &= \pm L \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}} \operatorname{sech}(\sqrt{a_1 a_3} Lt), \\
 L_2(t) &= \pm L \tanh(\sqrt{a_1 a_3} Lt), \\
 L_3(t) &= \pm L \sqrt{\frac{a_3}{-a_2}} \operatorname{sech}(\sqrt{a_1 a_3} Lt),
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

cuando $L_3 = -\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} L_1$.

Si $\alpha \neq \beta$, la integral de la ecuación (2.17) involucra funciones elípticas de Jacobi. La función elíptica $\operatorname{sn}(z)$ con módulo k está relacionada con la integral elíptica incompleta de primer tipo mediante

$$\operatorname{sn}^{-1}(x, k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

donde el módulo elíptico satisface $0 < k < 1$ [8].

Esta restricción sobre el módulo impone a su vez condiciones físicas que deben satisfacerse para encontrar una solución consistente. Recordemos que $I_3 < a < I_1$, además

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{ab^2 I_2 (I_1 - I_3) (I_2 - a)}{(I_1 - I_2) (I_2 - I_3)}.$$

Por lo que $\alpha < \beta$ si $a < I_2$ mientras que $\beta < \alpha$ si $I_2 < a$. Para encontrar la solución por cuadraturas debemos seleccionar uno de estos dos posibles casos. Suponiendo entonces que $I_3 < a < I_2 < I_1$, se sigue que $\alpha/\beta < 1$. Si se introduce una nueva constante μ dada por

$$\mu := \beta \sqrt{a_1 a_3} = \left[\frac{ab^2 (I_1 - a) (I_2 - I_3)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2},$$

se encuentra que la solución a (2.16) con condiciones iniciales $L_2(0) = 0$ y $\dot{L}_2(0) > 0$ está dada por:

$$L_2(t) = \alpha \operatorname{sn} \left(\mu t, \frac{\alpha}{\beta} \right). \quad (2.20)$$

Esta solución es una función elíptica de módulo α/β , que por las suposiciones realizadas efectivamente es menor que la unidad por lo que la función está bien definida. Ya que $|\operatorname{sn}(x, k)| \leq 1$ (ver [14]) se sigue que el valor de $L_2(t)$ varía entre $-\alpha$ y α . En analogía con las funciones circulares, las funciones elípticas de Jacobi satisfacen ciertas identidades que permiten definir las funciones $\operatorname{dn} u$ y $\operatorname{cn} u$ de módulo k [8]:

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

A partir de estas identidades y de las ecuaciones (2.10), (2.11) se pueden encontrar expresiones para las componentes restantes del momento angular

$$L_1^2(t) = \gamma^2 \operatorname{cn}^2 \left(\mu t, \frac{\alpha}{\beta} \right), \quad \gamma^2 := \frac{ab^2 I_1 (a - I_3)}{I_1 - I_3}, \quad (2.21)$$

$$L_3^2(t) = \delta^2 \operatorname{dn}^2\left(\mu t, \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \delta^2 := \frac{ab^2 I_3 (I_1 - a)}{I_1 - I_3}. \quad (2.22)$$

Para determinar el signo de L_1 y L_3 es necesario conocer sus condiciones iniciales. Sin pérdida de generalidad supongamos que $L_3(0) > 0$. Esta suposición junto con el hecho $a_2 < 0$ y las ecuaciones de Euler implican que $L_1(0) < 0$. De esta manera se encuentra la solución completa a las ecuaciones de Euler

$$L_1(t) = -\gamma \operatorname{cn}\left(\mu t, \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad L_2(t) = \alpha \operatorname{sn}\left(\mu t, \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad L_3(t) = \delta \operatorname{dn}\left(\mu t, \frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (2.23)$$

Las funciones elípticas de Jacobi son funciones doblemente periódicas en el plano complejo, uno de sus periodos es real mientras que el segundo es imaginario puro. En el análisis del cuerpo rígido libre se encuentran soluciones en términos de funciones elípticas cuyo argumento es el tiempo, una cantidad real. Por esto sólo no interesa estudiar el periodo real de estas funciones. Entonces, limitándose a cantidades reales, se tiene que las funciones elípticas satisfacen [8]:

$$\operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(u + 4K) = \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u, \quad (2.24)$$

donde K es la integral elíptica completa de primera especie que depende del módulo k de la función elíptica

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Como se mencionó en la sección 2.1 el movimiento del vector de momento angular en el cuerpo es periódico. De (2.24) se observa que el mínimo periodo común de las tres funciones elípticas es $4K(k)$. Entonces el vector \mathbf{L} tendrá periodo $4K(\alpha/\beta)$ en la variable μt . Por lo que el periodo del momento angular en el sistema de referencia del cuerpo está dado por

$$T = \frac{4K(\alpha/\beta)}{\mu} = \left(\frac{I_1 I_2 I_3}{ab^2 (I_1 - a)(I_2 - I_3)} \right)^{1/2} 4K\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (2.25)$$

A partir del análisis realizado a lo largo de esta sección finalmente es posible escribir la solución en términos de las constantes físicas (I_1, I_2, I_3) y las condiciones iniciales (E, L) particulares del problema:

$$\begin{aligned}
 L_1(t) &= - \left[\frac{I_1(L^2 - 2EI_3)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{cn}(\mu t, \alpha/\beta), \\
 L_2(t) &= \left[\frac{I_2(L^2 - 2EI_3)}{I_2 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{sn}(\mu t, \alpha/\beta), \quad (L^2 < 2EI_2) \\
 L_3(t) &= \left[\frac{I_3(2EI_1 - L^2)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{dn}(\mu t, \alpha/\beta),
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde

$$\mu = \left[\frac{(2EI_1 - L^2)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \left[\frac{(I_1 - I_2)(L^2 - 2EI_3)}{(2EI_1 - L^2)(I_2 - I_3)} \right]^{1/2}.$$

El periodo (2.25) expresado en términos de E y L es

$$T = \left[\frac{I_1 I_2 I_3}{(2EI_1 - L^2)(I_2 - I_3)} \right]^{1/2} 4K(\alpha/\beta). \tag{2.27}$$

donde recordamos que

$$K(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2 t^2)}}.$$

Con un desarrollo análogo al realizado en párrafos anteriores puede encontrarse la solución para el caso $I_2 < a$. Para condiciones iniciales $L_2(0) = 0$, $\dot{L}_2(0) > 0$ y $L_1(0) > 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
 L_1(t) &= \left[\frac{I_1(L^2 - 2EI_3)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{dn}(\nu t, \beta/\alpha), \\
 L_2(t) &= \left[\frac{I_2(2EI_1 - L^2)}{I_1 - I_2} \right]^{1/2} \operatorname{sn}(\nu t, \beta/\alpha), \quad (2EI_2 < L^2) \\
 L_3(t) &= - \left[\frac{I_3(2EI_1 - L^2)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{cn}(\nu t, \beta/\alpha),
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde

$$\nu = \left[\frac{(L^2 - 2EI_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2}.$$

El periodo de esta segunda solución está dado por

$$T = \left[\frac{I_1 I_2 I_3}{(L^2 - 2EI_3)(I_1 - I_2)} \right]^{1/2} 4K(\beta/\alpha). \quad (2.29)$$

En el cálculo de la solución a las ecuaciones de Euler se supuso por simplicidad que $L_2(0) = 0$. Si no se hace esta suposición y $L_2(0) \neq 0$, la solución a las ecuaciones tiene la misma estructura que (2.26) o (2.28) dependiendo de los valores de E y L . La diferencia entre las soluciones en el caso $L_2(0) \neq 0$ y las obtenidas en este capítulo es simplemente el hecho de que aparece una fase en el argumento de las funciones elípticas que expresan las componentes del momento angular. Dicha fase está relacionada con la integral elíptica incompleta de primer tipo con argumento proporcional a $L_2(0)$. También es importante mencionar que el periodo de la solución en el caso $L_2(0) \neq 0$ es exactamente el mismo que el obtenido al suponer $L_2(0) = 0$.

2.3. Casos límites

Las funciones elípticas de Jacobi pueden pensarse como una transición de las funciones circulares a las hiperbólicas. Esto se debe a que satisfacen las siguientes identidades [8]:

$$\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u, \quad \operatorname{cn}(u, 0) = \cos u, \quad \operatorname{dn}(u, 0) = 1.$$

$$\operatorname{sn}(u, 1) = \tanh u, \quad \operatorname{cn}(u, 1) = \operatorname{dn}(u, 1) = \operatorname{sech} u.$$

Utilizando estas identidades puede realizarse un análisis de las soluciones (2.26) en ciertos casos límites.

Caso $k = 0$

Existen dos posibilidades que dan lugar a $k = 0$, estas corresponden a las rotaciones estacionarias alrededor de dos de los ejes principales de inercia. Considérese primero el caso $\alpha < \beta$, entonces $k = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$ lo que a su vez implica $a = I_3$. Si $a = I_3$ entonces $\gamma = 0$ por lo que la solución se reduce a

$$L_1(t) = L_2(t) = 0, \quad L_3(t) = \sqrt{ab^2 I_3}. \quad (2.30)$$

Esta solución es exactamente la misma que se obtiene al comenzar con la suposición $a = I_3$: una rotación estacionaria alrededor del eje \mathbf{E}_3 . Al considerar $k = 0$ en el segundo caso ($\beta < \alpha$) se obtiene la rotación estacionaria alrededor del eje \mathbf{E}_1 .

Otra situación en la cual $k = 0$, independientemente de las condiciones iniciales, es cuando $I_2 = I_1$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} L_1(t) &= - \left[\frac{I_1(L^2 - 2EI_3)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \cos(\mu t), & L_2(t) &= \left[\frac{I_1(L^2 - 2EI_3)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \sin(\mu t), \\ L_3(t) &= \left[\frac{I_3(2EI_1 - L^2)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde el parámetro μ se ha reducido a $\left[\frac{(2EI_1 - L^2)(I_1 - I_3)}{I_1^2 I_3} \right]^{1/2}$.

Es fácil verificar que al identificar $L_1(0)$ con $\left[\frac{I_1(L^2 - 2EI_3)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2}$ (lo cual se puede obtener de la conservación de energía y momento angular con $L_2(0) = 0$) esta solución coincide con la solución (2.8) encontrada en el desarrollo del cuerpo con un eje de simetría. El periodo general de las funciones elípticas se reduce también al periodo de las funciones trigonométricas circulares dado que $K(0) = \frac{\pi}{2}$.

Se ha mostrado que la solución en términos de funciones elípticas permite recuperar las rotaciones estacionarias alrededor de los ejes principales y el comportamiento del cuerpo rígido con un eje de simetría.

Caso $k = 1$

Existe otro caso límite de interés: $k = 1$. Esta situación se presenta sólo cuando $\alpha = \beta$, lo que ocurre si y sólo si $a = I_2$. En estas condiciones la solución se reduce a

$$L_1(t) = - \left[\frac{ab^2 I_1 (I_2 - I_3)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{sech}(\mu t), \quad L_2(t) = ab \tanh(\mu t),$$

$$L_3(t) = \left[\frac{ab^2 I_3 (I_1 - I_2)}{I_1 - I_3} \right]^{1/2} \operatorname{sech}(\mu t), \quad (2.32)$$

donde μ se reduce a $\left[\frac{ab^2(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2 I_3} \right]^{1/2}$. De acuerdo a la definición de los parámetros a , b y a_i se puede probar que $\mu = \sqrt{a_1 a_3} L$ y que los coeficientes que multiplican a las funciones hiperbólicas son los mismos que aparecen en (2.19), por lo que esta solución coincide con una de las órbitas heteroclínicas. Para obtener el resto de las órbitas heteroclínicas basta seleccionar diferentes signos en las condiciones iniciales al momento de encontrar la solución general y posteriormente tomar el límite $k = 1$.

Para analizar el periodo recordemos que $T \propto K(k)$. Entonces basta analizar el comportamiento de $K(1)$. Según la definición de integral elíptica de primer tipo se tiene que

$$K(1) = \int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2}.$$

Esta integral impropia es divergente por lo que el periodo de esta solución tiende a infinito. El resultado es consistente pues las funciones hiperbólicas no tienen un periodo real. De esta manera se ha mostrado que a través de la solución general por cuadraturas también es posible recuperar el comportamiento del vector de momento angular asociado a las órbitas heteroclínicas.

Ecuaciones de Reconstrucción

Las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido libre involucran al momento (o velocidad) angular pero no la posición específica del cuerpo. Es por esto que a pesar de haber resuelto las ecuaciones de Euler, y consecuentemente conocer explícitamente el momento angular en el sistema de ejes principales como función del tiempo, la posición del cuerpo en el espacio aún no está determinada. En este capítulo se busca información acerca de la posición del cuerpo rígido.

3.1. Descripción cualitativa global de la dinámica en el espacio fase

Como se vio en el capítulo anterior, el problema del cuerpo rígido libre con un punto fijo tiene 4 integrales de movimiento independientes: E , l_1 , l_2 y l_3 . A partir de esta observación es posible obtener información cualitativa acerca del movimiento sin necesidad de realizar cálculos. Cada una de las integrales de movimiento es una función en $T^*SO(3)$, por lo que las ecuaciones

$$l_1 = c_1, \quad l_2 = c_2, \quad l_3 = c_3, \quad E = c_4, \quad \text{donde } c_i \text{ es constante,}$$

definen una subvariedad M_c de dimensión dos, contenida en la variedad, de dimensión 6, $T^*SO(3)$. Se puede probar que M_c es orientable [1], además utilizando E puede probarse que es compacta. La dinámica deja invariante a M_c y no tiene puntos singulares. A partir de estas consideraciones se sigue que M_c es difeomorfa

al toro bidimensional.

Más aún, (ver [1]), es posible seleccionar coordenadas angulares φ_1 y φ_2 en el toro de tal forma que la dinámica en M_c está descrita por las ecuaciones $\dot{\varphi}_1 = \Upsilon_1$ y $\dot{\varphi}_2 = \Upsilon_2$ para ciertas constantes Υ_1, Υ_2 llamadas *frecuencias*. Esto significa que el movimiento del cuerpo rígido libre es representado por la superposición de dos movimientos periódicos en el toro. Los valores de las frecuencias Υ_1 y Υ_2 dependen de las condiciones iniciales. Si las frecuencias son inconmensurables (su cociente es irracional), entonces el sistema nunca regresa a su estado original. Es por esto que el movimiento del cuerpo rígido libre es un movimiento cuasi-periódico.

La propiedad de tener un flujo cuasi-periódico no es exclusiva de este problema. Esto pues, de acuerdo al teorema de Liouville [1], en un sistema integrable³ cuya subvariedad definida por las integrales de movimiento es compacta y conexa, el movimiento en dicha subvariedad será cuasi-periódico.

3.2. Ecuaciones de reconstrucción

La posición respecto a un sistema inercial del cuerpo rígido no puede obtenerse directamente de las ecuaciones de Euler, esto es consecuencia de que las variables que describen dicha posición no aparecen en estas ecuaciones. El mecanismo que permite desacoplar la evolución de las velocidades al de las posiciones en las ecuaciones de movimiento es la existencia de un grupo de simetrías. Dicho proceso de desacoplamiento es un ejemplo de una instancia matemática general que se conoce como reducción en el que se eliminan variables en el espacio fase mediante el uso de simetrías.

En general, las ecuaciones reducidas son suficientes para deducir un gran número de propiedades de la evolución del sistema físico en cuestión. Sin embargo, en algunos casos es importante obtener la dinámica de las variables eliminadas por la reducción. A este proceso se le denomina *reconstrucción*. En el caso del cuerpo rígido libre, las variables eliminadas corresponden a su orientación respec-

³Un sistema integrable es un sistema hamiltoniano que tiene tantas integrales de movimiento independientes y en involución como grados de libertad.

to a un sistema de referencia inercial, la cual se expresa a través de la matriz de rotación $B(t)$.

Hasta ahora hemos resuelto las ecuaciones necesarias para conocer tanto la velocidad como el momento angular del cuerpo rígido libre en el marco de referencia del cuerpo y a partir de estos es posible encontrar las ecuaciones de reconstrucción para el cuerpo rígido. Para ello basta recordar la definición del operador de velocidad angular en el marco de referencia anclado al cuerpo: $\hat{\Omega} = B^{-1}\dot{B}$, así como la ecuación (1.6) que relaciona este operador y el vector de velocidad angular. Considerando lo anterior es posible escribir las ecuaciones de reconstrucción del cuerpo rígido libre como

$$\dot{B} = B\hat{\Omega}. \quad (3.1)$$

Hay que notar que la ecuación (3.1) representa en realidad un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para las 9 componentes B_{ij} de la matriz B . A pesar de esto es posible reducir el número de ecuaciones recordando que $B \in SO(3)$, lo que implica que no todas sus componentes son independientes. Para mostrar esta simplificación se escribe $B(t)$ como

$$B(t) = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{A}(t) & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{B}(t) & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{C}(t) & \text{---} \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son vectores en tres dimensiones que se acomodan como renglones de la matriz $B(t)$. Dichos vectores se conocen como *vectores de Poisson* y son las coordenadas en el sistema anclado al cuerpo de los vectores de la base del marco de referencia inercial. La condición de ortogonalidad en la matriz B se traduce en que el conjunto $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)\}$ es ortonormal respecto al producto escalar euclideo en \mathbb{R}^3 . Además, el conjunto de ecuaciones diferenciales (3.1) se reduce a tres ecuaciones vectoriales independientes:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.2)$$

Se observa que las ecuaciones diferenciales anteriores son prácticamente la misma y que la única diferencia entre ellas será la condición inicial. Por lo tanto el problema de la reconstrucción de la posición del cuerpo rígido se reduce a resolver la ecuación

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

A continuación se estudian las ecuaciones de reconstrucción para algunos casos sencillos. Además se analiza la posición y movimiento del cuerpo rígido en cada caso.

3.2.1. Rotaciones estacionarias

El primer caso corresponde a una rotación estacionaria. En este caso el vector de velocidad angular en el cuerpo es constante, esto es $\Omega_i(t) = \Omega_i^0$ por lo que (3.1) y (3.2) se reducen a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Si el sistema inercial se selecciona de tal manera que en $t = 0$ coincida con el sistema anclado al cuerpo entonces $B(0) = I$, donde I es la matriz identidad de 3×3 . Es fácil verificar que con estas condiciones la solución a la ecuación matricial (3.1) es

$$B(t) = \exp(\hat{\Omega}t). \quad (3.3)$$

Antes de calcular $B(t)$ hay que recordar que $\hat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$, por lo que su exponencial efectivamente se encuentra en el grupo de rotaciones $SO(3)$. Se sabe que en una rotación estacionaria el movimiento del cuerpo es una rotación alrededor del eje definido por la velocidad angular por un ángulo $\|\Omega\|t$. Por otro lado el movimiento del cuerpo está descrito por $B(t)$. Ya que ambas descripciones son equivalentes podemos concluir lo siguiente.

Teorema 3.1. *La rotación por un ángulo θ alrededor del eje definido por el vector arbitrario \mathbf{v} en el espacio euclideo se puede expresar por medio de la matriz $\exp\left(\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{v}\|}\theta\right)$.*

Finalmente, como $\hat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$, su exponencial puede calcularse explícitamente utilizando la fórmula de Rodrigues [9]:

$$B(t) = I + \frac{\sin(\|\Omega\|t)}{\|\Omega\|} \hat{\Omega} + \frac{1 - \cos(\|\Omega\|t)}{\|\Omega\|^2} \hat{\Omega}^2. \quad (3.4)$$

Si el sistema inercial se selecciona de manera arbitraria tal que $B(0) = B_0$ entonces la solución a las ecuaciones de reconstrucción es $B(t) = B_0 \exp(\hat{\Omega}t)$.

A partir de la fórmula de Rodrigues es posible mostrar que en el caso de una rotación estacionaria se satisface la ecuación

$$\text{tr}(\exp(\hat{\Omega}t)) = 1 + 2 \cos(\|\Omega\|t).$$

Esta ecuación implica que es posible conocer el ángulo de la rotación asociada a $\exp(\hat{\Omega}t)$ a través de su traza. Este resultado puede generalizarse para cualquier matriz en $SO(3)$. Como se sabe, toda matriz de rotación, excepto la identidad, $R \in SO(3)$ define una rotación por un cierto ángulo alrededor de un eje. El ángulo ξ de dicha rotación puede obtenerse a través de la ecuación

$$\text{tr}(R) = 1 + 2 \cos \xi. \quad (3.5)$$

3.2.2. Cuerpo simétrico

Consideremos ahora el caso de la rotación de un cuerpo con eje de simetría. Supongamos que el eje de simetría es \mathbf{E}_3 , entonces los momentos de inercia del cuerpo satisfacen $I_1 = I_2$. Utilizando los resultados obtenidos en la sección 2.2.2 para el momento angular es posible escribir la ecuaciones de reconstrucción como

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3^0 & -\Omega_1^0 \sin(\eta t) \\ -\Omega_3^0 & 0 & \Omega_1^0 \cos(\eta t) \\ \Omega_1^0 \sin(\eta t) & -\Omega_1^0 \cos(\eta t) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}, \quad (3.6)$$

donde $\eta = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3^0$. La ecuación anterior representa un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes que dependen del tiempo. Incluso en un caso sencillo, como es un cuerpo simétrico, se presenta una gran dificultad para encontrar una solución analítica a las ecuaciones de reconstrucción. Sin embargo, para el cuerpo con eje de simetría, es posible analizar el movimiento del cuerpo sin conocer la solución explícita a las ecuaciones de reconstrucción.

Utilizando la solución (2.8) obtenida para el cuerpo con eje de simetría es fácil probar que \mathbf{E}_3 , $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{L} son coplanares. Para ello se calcula el triple producto escalar entre estos vectores:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L} \times \mathbf{E}_3, \boldsymbol{\Omega} \rangle &= \langle (L_1(0) \sin(\eta t), -L_1(0) \cos(\eta t), 0), \\ &\quad (\Omega_1(0) \cos(\eta t), \Omega_1(0) \sin(\eta t), \Omega_3(0)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ya que el triple producto escalar es nulo se sigue que estos vectores son coplanares.

Consideremos también los siguientes productos escalares

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega} \rangle &= 2E, & \langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle &= L^2, & \langle \mathbf{L}, \mathbf{E}_3 \rangle &= L_3, \\ \langle \mathbf{E}_3, \boldsymbol{\Omega} \rangle &= \frac{L_3}{I_3}, & \langle \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3 \rangle &= 1, & \langle \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle &= \left(\frac{L_1(0)}{I_1} \right)^2 + \left(\frac{L_3}{I_3} \right)^2. \end{aligned}$$

Recordando que L_3 es constante, se observa que cada uno de los productos escalares es constante. Esto implica por un lado que la magnitud de \mathbf{E}_3 , $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{L} permanece constante en el tiempo y además que el ángulo formado entre cada par de estos vectores es también constante. Dado que $B(t)$ es una matriz ortogonal esta preserva ángulos y normas, entonces los vectores $B(t)\mathbf{E}_3$, $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{l} satisfacen las mismas propiedades. Consecuentemente el eje de simetría del cuerpo mantiene un ángulo constante con el vector de momento angular \mathbf{l} , que está fijo en el marco de referencia inercial. Por lo tanto, visto desde el sistema de referencia inercial, el eje de simetría ($B(t)\mathbf{E}_3$) se mueve en un cono circular con ángulo constante cuyo eje es \mathbf{l} . Este movimiento se conoce como *precesión regular*. Al mismo tiempo el eje de rotación en el cuerpo (definido por $\boldsymbol{\omega}$) forma un ángulo constante con \mathbf{l} , entonces traza un segundo cono alrededor de este.

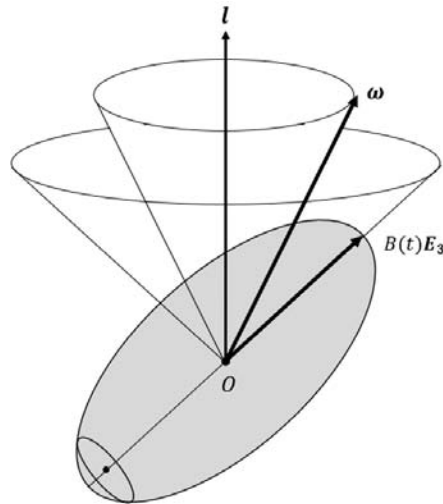


Figura 3.1: Precesión de un cuerpo con eje de simetría, en este caso un elipsoide de revolución.

Para calcular la velocidad de precesión considérese un punto sobre el eje de simetría del cuerpo. Entonces, en el marco de referencia del cuerpo, este punto puede expresarse mediante el vector $\mathbf{Q} = a\mathbf{E}_3$ con a un número real. La velocidad de este punto en el sistema inercial expresada en el marco de referencia del cuerpo es $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \neq \dot{\mathbf{Q}}$. Como \mathbf{E}_3 , $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{L} son coplanares, es posible escribir uno de ellos como combinación lineal de los otros dos. Además ya que $I_1 = I_2$ es posible escribir

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{I_1}\mathbf{L} - \frac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega_3(0)\mathbf{E}_3.$$

Por lo que la velocidad del punto puede escribirse como $\mathbf{V} = \frac{a}{I_1}\mathbf{L} \times \mathbf{E}_3$. De acuerdo a esto, la rapidez del punto \mathbf{Q} es

$$\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}\| = \frac{|a|}{I_1}\|\mathbf{L} \times \mathbf{E}_3\| = \frac{L}{I_1}|a|\sin\lambda,$$

donde λ es el ángulo entre \mathbf{L} y el eje de simetría. Notando que $|a|\sin\lambda$ es la distancia del punto \mathbf{Q} al eje definido por \mathbf{L} podemos concluir que el punto está rotando alrededor de \mathbf{l} con velocidad angular L/I_1 . Esta velocidad corresponde a la velocidad de precesión.

Por lo tanto, para el cuerpo con eje de simetría, el movimiento puede verse como la composición de la rotación con velocidad angular L_3/I_3 alrededor del eje de simetría y la precesión con velocidad angular L/I_1 .

3.2.3. Cuerpo totalmente asimétrico

En el caso más general, todos los momentos principales de inercia son distintos y la velocidad angular como función del tiempo involucra funciones elípticas de Jacobi. Si se suponen las condiciones iniciales $\Omega_2(0) = 0$, $\dot{\Omega}_2(0) > 0$, $\Omega_3(0) > 0$, $\Omega_1(0) < 0$, $I_3 < \frac{L^2}{2E} < I_2$ (mismas condiciones que en el capítulo 2 expresadas en términos de la velocidad angular) entonces, usando (2.23), las ecuaciones de reconstrucción para el caso $L^2 < 2EI_2$ serán:

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta}{I_3} \operatorname{dn}(\mu t, \alpha/\beta) & -\frac{\alpha}{I_2} \operatorname{sn}(\mu t, \alpha/\beta) \\ -\frac{\delta}{I_3} \operatorname{dn}(\mu t, \alpha/\beta) & 0 & -\frac{\gamma}{I_1} \operatorname{cn}(\mu t, \alpha/\beta) \\ \frac{\alpha}{I_2} \operatorname{sn}(\mu t, \alpha/\beta) & \frac{\gamma}{I_1} \operatorname{cn}(\mu t, \alpha/\beta) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}, \quad (3.7)$$

donde γ , δ , α , β y μ están definidos de la misma manera que en el capítulo anterior.

El conjunto de ecuaciones (3.7) muestra la complejidad de las ecuaciones de reconstrucción para el cuerpo rígido libre. Esto pues además de tener coeficientes variables en el tiempo, estos no son funciones elementales sino funciones elípticas. Sin embargo estos coeficientes son funciones periódicas, lo que abre la posibilidad de realizar un análisis de las soluciones a través de la teoría de Floquet.

La integración de las ecuaciones de reconstrucción fue realizada primero por Jacobi [6]. Existen diferentes métodos a través de los cuales se puede obtener la solución a las ecuaciones de reconstrucción del cuerpo rígido, por ejemplo el desarrollo mostrado en [5]. En dicho trabajo se muestra que la solución no puede expresarse únicamente en términos de funciones elípticas como se menciona erróneamente en varios textos sino que es necesario utilizar generalizaciones de las funciones theta de Jacobi. Maneras alternativas de resolver este problema se ilustran en [11].

3.3. Ángulos de Euler

El tratamiento realizado en párrafos anteriores no es la única manera de obtener la orientación del cuerpo rígido libre. La matriz B puede expresarse como la composición de tres rotaciones simples sucesivas. Para ello se introducen los ángulos φ , θ y ψ . Para definir estos ángulos se consideran tanto el sistema de referencia inercial como el sistema anclado al cuerpo además de suponer que el origen de ambos sistemas es el mismo.

Sean $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ las bases de los marcos de referencia inercial y del cuerpo respectivamente. Para pasar del sistema inercial al sistema del cuerpo se realizan tres rotaciones consecutivas en el sentido contrario a las manecillas del reloj:

1. Rotación alrededor del eje \mathbf{e}_3 por un ángulo φ . La imagen del eje \mathbf{e}_1 se conoce como línea de nodos y se denotará como \mathbf{e}_N . Esta rotación se representa

mediante la siguiente matriz

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rotación alrededor de \mathbf{e}_N un ángulo θ . Bajo esta rotación \mathbf{e}_3 se transforma en \mathbf{E}_3 mientras que \mathbf{e}_N permanece fijo. La matriz asociada a esta rotación está dada por

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

3. Rotación alrededor de \mathbf{E}_3 por un ángulo ψ . Después de esta rotación \mathbf{e}_N se transforma en \mathbf{E}_1 . La matriz que representa esta rotación es

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de ángulos φ , θ y ψ definidos de esta manera se conocen como *ángulos de Euler*.

Es importante notar que cualquier rotación en el espacio puede expresarse de la manera descrita anteriormente. El enunciado converso también es cierto, entonces, a cualquier conjunto de números φ , θ , ψ la construcción anterior le asocia una rotación en el espacio euclídeo. Como ya se mencionó $SO(3)$ es una variedad de dimensión tres, entonces si

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \psi < 2\pi,$$

las coordenadas (φ, θ, ψ) definen una carta local para $SO(3)$ [1]. Como es de esperarse en cualquier variedad, esta carta no cubre todos los puntos de $SO(3)$, por ejemplo no se incluye a la matriz identidad, las matrices que representan rotaciones alrededor de los ejes 1 y 3 ni aquellas matrices de $SO(3)$ tales que $a_{33} = \pm 1$, donde a_{ij} representa la componente del i -ésimo renglón y la j -ésima columna.

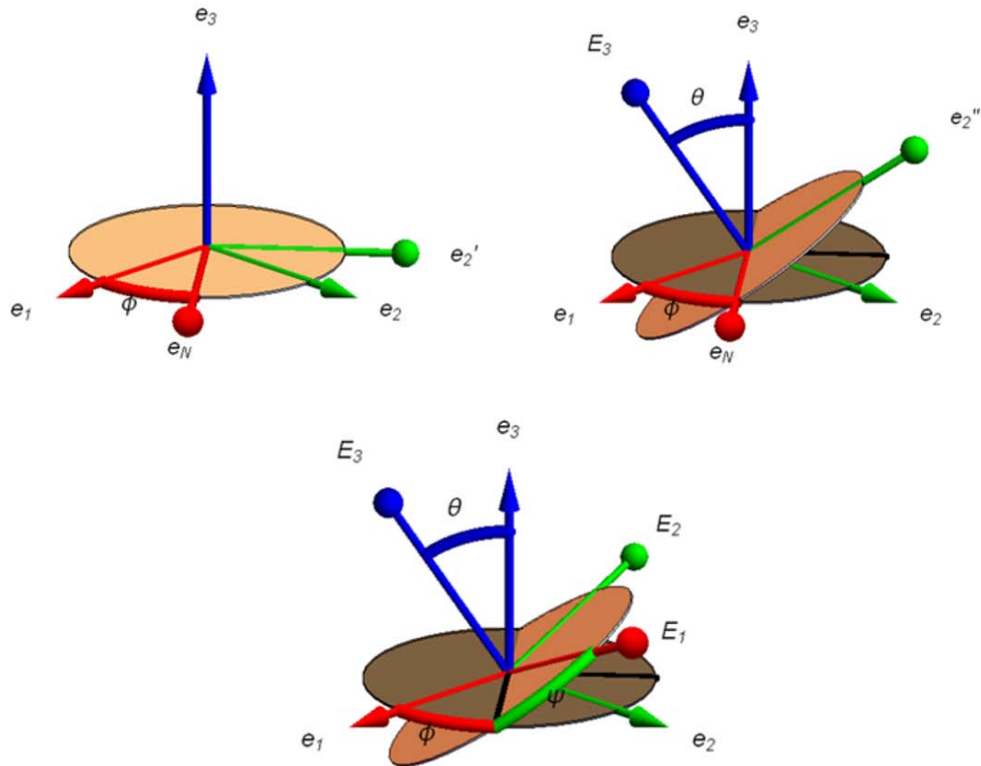


Figura 3.2: Rotaciones que definen los ángulos de Euler.

De acuerdo a como se definieron los ángulos de Euler se satisface que $\mathbf{X} = R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\varphi)\mathbf{x}$, donde como antes \mathbf{x} es el vector de un punto referido al sistema inercial y \mathbf{X} el vector del mismo punto expresado en el marco de referencia del cuerpo. Entonces se tiene que

$$\mathbf{x} = (R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\varphi))^{-1}\mathbf{X}.$$

Por lo tanto la matriz B que lleva del sistema de referencia del cuerpo al sistema inercial se puede expresar en términos de las rotaciones elementales como

$$B = R_1^{-1}(\varphi)R_2^{-1}(\theta)R_3^{-1}(\psi), \quad (3.8)$$

o bien, como función de los ángulos de Euler:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

De esta manera el problema de reconstrucción se puede traducir en encontrar los ángulos de Euler como función del tiempo. Una forma de lograr esto es escribir el operador de velocidad angular en el cuerpo como función de los ángulos de Euler: $\hat{\Omega} = B^{-1}(t)\dot{B}(t)$. Después, a partir de la expresión para $\hat{\Omega}$, se escribe el vector de velocidad angular en el cuerpo:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Además la expresión para la velocidad angular como función del tiempo ya está determinada, por lo tanto podemos escribir la ecuaciones de reconstrucción como

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{\Omega}. \quad (3.11)$$

Esta última expresión muestra que para encontrar los ángulos de Euler como función del tiempo es necesario resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de primero orden acopladas. Es por esta razón que los ángulos de Euler no representan el mejor enfoque del problema de reconstrucción, de esta forma también se muestra la necesidad de introducir otras técnicas para obtener información acerca de la orientación del cuerpo rígido.

Fases Geométricas

En el capítulo anterior se encontraron las ecuaciones necesarias para determinar la orientación, respecto a un sistema inercial, del cuerpo rígido libre. Se mostró la complejidad de las ecuaciones resultantes incluso en situaciones físicas simples. A pesar de no conocer la solución analítica es posible determinar ciertas características del movimiento a través de un análisis de la dinámica en el espacio fase. Como se ha visto, para condiciones iniciales adecuadas, el movimiento del momento angular en el marco de referencia del cuerpo es periódico. Aplicando el teorema de Stokes a una superficie adecuada en $T^*SO(3)$ se puede obtener una expresión para el ángulo $\Delta\phi$ que el cuerpo rota alrededor del momento angular referido a un sistema inercial después de un periodo de L . Determinar esta expresión es el propósito de este capítulo y el procedimiento llevado a cabo está basado en el trabajo de Richard Montgomery [10].

4.1. Espacio fase del cuerpo rígido

Como se vio anteriormente, la orientación de un cuerpo rígido libre se expresa mediante una matriz de rotación, por lo que el espacio de configuración de este sistema es $SO(3)$. Como consecuencia inmediata de este hecho se sigue que el espacio fase (de momentos) para el cuerpo rígido es el haz cotangente de $SO(3)$: $T^*SO(3)$.

Para estudiar el haz cotangente a un grupo de Lie G , generalmente se utiliza la *trivialización izquierda o derecha del espacio cotangente* T^*G [15]. A través

de dicha trivialización el estudio de la dinámica se puede realizar en el espacio $G \times \mathfrak{g}^*$, donde \mathfrak{g}^* es el espacio dual del álgebra de Lie \mathfrak{g} . En el caso del cuerpo rígido $G = SO(3)$ por lo que la dinámica en el espacio de fases $T^*SO(3)$ puede estudiarse en el espacio $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$. Además $\mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$, por lo que finalmente se encuentra que $T^*SO(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Físicamente esto corresponde a pensar en los elementos del espacio fase como parejas (B, \mathbf{L}) si se utiliza la trivialización izquierda o bien (B, \mathbf{l}) con la trivialización derecha, donde $B \in SO(3)$ es la matriz que describe la orientación del cuerpo.

A través de las relaciones establecidas en el párrafo anterior es claro que el espacio fase es una variedad de dimensión 6. Si se utilizan los ángulos de Euler como coordenadas para $SO(3)$ entonces tenemos dos posibles elecciones para coordenadas locales en $T^*SO(3)$: $(\varphi, \theta, \psi, L_1, L_2, L_3)$ o $(\varphi, \theta, \psi, l_1, l_2, l_3)$ dependiendo de la trivialización utilizada.

4.2. Uno-forma canónica

Consideremos una variedad n -dimensional Q y un conjunto de coordenadas locales (q^1, \dots, q^n) en Q . Entonces (dq^1, \dots, dq^n) forma una base para el espacio cotangente en el punto q , T_q^*Q , donde $q \in Q$. Al formar este conjunto una base, se sigue que cualquier covector $p_q \in T_q^*Q$ puede escribirse como $p_q = p_i dq^i$ para ciertos escalares p_1, \dots, p_n . Aplicando este mismo proceso a todos los puntos de la variedad se pueden construir coordenadas locales para T^*Q , estas coordenadas inducidas son $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ y se denominan *coordenadas cotangentes canónicas*.

En el haz cotangente de una variedad es posible definir una uno-forma diferencial especial que juega un papel muy importante en los formalismos hamiltoniano y lagrangiano de la mecánica. Para definir la *uno-forma canónica* Θ primero considérese la proyección en el fibrado cotangente: $\pi : T^*Q \rightarrow Q$. Esta proyección mapea todo covector $p_q \in T_q^*Q$ a su punto base $q \in Q$. Ahora notemos que la derivada, $T\pi$, de la proyección es un mapeo tal que $T\pi : T(T^*Q) \rightarrow TQ$. Ya que Θ es una uno-forma en T^*Q , entonces, para todo $p_q \in T^*Q$, Θ_{p_q} actúa sobre vectores en $T_{p_q}(T^*Q)$. Sea $v_{p_q} \in T_{p_q}(T^*Q)$, la acción de la uno-forma canónica se define de tal manera que

$$\Theta_{p_q}(v_{p_q}) := \langle p_q, T_{p_q}\pi(v_{p_q}) \rangle. \quad (4.1)$$

Para verificar que la expresión (4.1) está bien definida analicemos cada una de sus componentes. Comenzando con el miembro izquierdo de la ecuación, $\Theta_{p_q} \in T_{p_q}^*(T^*Q)$ mientras que $v_{p_q} \in T_{p_q}(T^*Q)$ por lo que el miembro izquierdo es un número real. Por otro lado $p_q \in T_q^*Q$ y $T_{p_q}\pi(v_{p_q}) \in T_qQ$. De acuerdo a esto, el producto interior en el miembro derecho de la expresión está bien definido y resulta en un número real. Con este análisis se verifica que la expresión (4.1) está bien definida. Nótese además que esta definición de la uno-forma canónica es intrínseca en el sentido de que es independiente de las coordenadas utilizadas.

Ahora se obtendrá una expresión para Θ en términos de un conjunto de coordenadas cotangentes canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Para encontrar esta expresión se parte del hecho de que Θ es una uno-forma sobre T^*Q , entonces esta se puede escribir como

$$\Theta = a_1(p, q)dq^1 + \dots + a_n(p, q)dq^n + b_1(p, q)dp_1 + \dots + b_n(p, q)dp_n,$$

donde a_i y b_i son los coeficientes a determinar. Además si $v_{p_q} \in T_{p_q}(T^*Q)$, este se puede escribir como

$$v_{p_q} = c^1(p, q)\partial_{q^1} + \dots + c^n(p, q)\partial_{q^n} + f^1(p, q)\partial_{p_1} + \dots + f^n(p, q)\partial_{p_n}.$$

Por lo tanto, el miembro izquierdo de (4.1) resulta en

$$\Theta(v_{p_q}) = a_1c^1 + \dots + a_nc^n + b_1f^1 + \dots + b_nf^n. \quad (4.2)$$

Por otro lado $T_{p_q}\pi(v_{p_q}) = c^1(p, q)\partial_{q^1} + \dots + c^n(p, q)\partial_{q^n}$ y $p_q = p_1dq^1 + \dots + p_ndq^n$ por lo que el producto interior a la derecha en (4.1) es

$$\langle p_q, T_{p_q}\pi(v_{p_q}) \rangle = c^1p_1 + \dots + c^np_n. \quad (4.3)$$

Ya que (4.2) debe coincidir con (4.3) para cualquier elección de c^1, \dots, c^n se obtienen los coeficientes: $a_i = p_i$ y $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Por lo tanto la expresión en coordenadas cotangentes canónicas de la uno-forma canónica en el haz cotangente es

$$\Theta = p_1dq^1 + \dots + p_ndq^n = p_idq^i. \quad (4.4)$$

El desarrollo realizado en párrafos anteriores es válido para una variedad arbitraria Q . Para el problema particular del cuerpo rígido libre $Q = SO(3)$ por lo que la uno-forma canónica para este sistema es una forma diferencial sobre $T^*SO(3)$. De ahora en adelante se utilizarán los ángulos de Euler como coordenadas para $SO(3)$. Entonces, en $T^*SO(3)$, es posible escribir

$$\Theta = p_\varphi d\varphi + p_\theta d\theta + p_\psi d\psi, \quad (4.5)$$

donde p_φ , p_θ y p_ψ son los momentos canónicos conjugados correspondientes a estas coordenadas.

Para encontrar la expresión de estos momentos en términos de los ángulos de Euler y las velocidades generalizadas se utilizan las transformaciones

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}.$$

Aquí \mathcal{L} denota la lagrangiana del sistema, que en nuestro caso es simplemente la energía cinética: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \mathbb{I} \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle$. En las expresiones anteriores se supone que \mathcal{L} está expresada como función de $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. Esto se logra al utilizar (3.10) para expresar $\boldsymbol{\Omega}$ en términos de estas variables. Así se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 ((I_1 \sin^2 \psi + I_2 \cos^2 \psi) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi) + \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 I_3 + \dot{\varphi} \dot{\psi} I_3 \cos \theta \\ &\quad + (I_1 - I_2) \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi. \end{aligned}$$

A partir de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} p_\varphi &= I_1 (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \theta \sin \psi + I_2 (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \theta \cos \psi \\ &\quad + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta, \\ p_\theta &= I_1 (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \cos \psi - I_2 (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \psi, \\ p_\psi &= I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \end{aligned}$$

De la ecuación (3.10) y de la relación $\mathbf{L} = \mathbb{I} \boldsymbol{\Omega}$ es inmediato que los momentos pueden reescribirse en función de las componentes del momento angular en el

cuerpo como

$$\begin{aligned} p_\varphi &= L_1 \sin \theta \sin \psi + L_2 \sin \theta \cos \psi + L_3 \cos \theta, \\ p_\theta &= L_1 \cos \psi - L_2 \sin \psi, \\ p_\psi &= L_3. \end{aligned}$$

Al sustituir esta expresión de los momentos en (4.5) se obtiene la expresión en coordenadas correspondientes a la trivialización izquierda de la uno-forma canónica en $T^*SO(3)$

$$\Theta = (L_1 \sin \theta \sin \psi + L_2 \sin \theta \cos \psi + L_3 \cos \theta)d\varphi + (L_1 \cos \psi - L_2 \sin \psi)d\theta + L_3 d\psi. \quad (4.6)$$

Para simplificar la expresión anterior se utilizan las uno-formas vectoriales λ y ρ definidas en (1.9). La propiedad que define a estas uno-formas es que aplicadas sobre un vector tangente v_g el resultado es la velocidad angular en el sistema del cuerpo y el sistema inercial respectivamente, esto es, $\lambda_i(v_g) = \Omega_i$ y $\rho_i(v_g) = \omega_i$ con $i = 1, 2, 3$. Para encontrar expresiones para estas uno-formas en la base asociada a los ángulos de Euler consideremos primero λ_1 . Esta es una uno-forma sobre $SO(3)$, por lo que $\lambda_1 = g_1 d\varphi + g_2 d\theta + g_3 d\psi$ para ciertos escalares g_1, g_2, g_3 que dependen de φ, θ y ψ . Además ya que $v_g \in TSO(3)$ este se puede escribir como $v_g = \dot{\varphi}\partial_\varphi + \dot{\theta}\partial_\theta + \dot{\psi}\partial_\psi$, entonces

$$\lambda_1(v_g) = \dot{\varphi}g_1 + \dot{\theta}g_2 + \dot{\psi}g_3.$$

Por otro lado, $\lambda_1(v_g) = \Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$. Al imponer la condición de que las dos expresiones anteriores coincidan se encuentran los coeficientes g_i y es posible encontrar la expresión para λ_1 como combinación lineal de $d\varphi, d\theta, d\psi$. Con un proceso totalmente análogo se pueden encontrar expresiones para $\lambda_2, \lambda_3, \rho_1, \rho_2$ y ρ_3 . Estas expresiones son:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi d\theta + \sin \varphi \sin \theta d\psi \\ \sin \varphi d\theta - \cos \varphi \sin \theta d\psi \\ d\varphi + \cos \theta d\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi d\varphi + \cos \psi d\theta \\ \sin \theta \cos \psi d\varphi - \sin \psi d\theta \\ \cos \theta d\varphi + d\psi \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Entonces, al comparar la ecuación anterior y (4.6) se observa que Θ puede reescribirse como

$$\Theta = L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + L_3 \lambda_3. \quad (4.8)$$

Además, con un poco de álgebra, puede mostrarse que la matriz $B(\varphi, \theta, \psi)$ tal como está escrita en (3.9) relaciona las uno-formas vectoriales λ y ρ de la siguiente manera

$$\rho(v_g) = B\lambda(v_g), \quad \text{para todo } v_g \in T_gSO(3).$$

Utilizando esta relación junto con $\mathbf{l} = B\mathbf{L}$ se encuentra otra expresión para la uno-forma canónica, esta vez en las coordenadas asociadas a la trivialización derecha:

$$\Theta = l_1\rho_1 + l_2\rho_2 + l_3\rho_3. \quad (4.9)$$

4.3. Cálculo de la fase

Como se ha visto, el momento angular del cuerpo rígido libre en el marco de referencia inercial es constante en el tiempo. Además si las condiciones iniciales satisfacen $L^2 \neq 2EI_j$ con $j = 1, 2, 3$, el momento angular en el marco de referencia del cuerpo tiene un movimiento periódico, cuyo periodo T se dedujo en el capítulo 2 y está dado por las expresiones (2.27) y (2.29). Como se verá a continuación, en un tiempo T el cuerpo, visto desde el sistema inercial, rota alrededor de \mathbf{l} un cierto ángulo $\Delta\phi$. Siguiendo a Montgomery [10], para derivar una expresión para este ángulo, aplicaremos el teorema de Stokes a una cierta integral de la uno-forma canónica en el espacio fase del cuerpo rígido libre.

Primero se mostrará que después de un tiempo T el cuerpo efectivamente ha rotado cierto ángulo alrededor del momento angular \mathbf{l} . Para esto se parte de la ecuación $\mathbf{l} = B(t)\mathbf{L}(t)$ y de la periodicidad del momento angular en el cuerpo:

$$\mathbf{L}(t_0 + T) = \mathbf{L}(t_0).$$

Combinando estas dos expresiones y utilizando el hecho de que \mathbf{l} es constante en el tiempo se encuentra que

$$B(t_0 + T)B^{-1}(t_0)\mathbf{l} = \mathbf{l}. \quad (4.10)$$

Ya que $B(t) \in SO(3)$ para todo t se sigue que $B(t_0 + T)B^{-1}(t_0) \in SO(3)$, por lo que es una matriz de rotación. Entonces \mathbf{l} permanece fijo bajo la acción de la matriz de rotación $R = B(t_0 + T)B^{-1}(t_0)$, lo que implica que este vector define

el eje de la rotación asociada a R . De esta manera se ha mostrado que R es una matriz que describe una rotación alrededor del momento angular en el sistema de referencia inercial.

A partir de la definición de la matriz R se sigue que $B(t_0 + T) = RB(t_0)$. Escrita de esta forma la ecuación muestra que en el intervalo $[t_0, t_0 + T]$ la orientación del cuerpo se modificó por la acción de la matriz R . Por lo tanto el cuerpo sufrió una rotación por un cierto ángulo $\Delta\phi$ alrededor del eje determinado por el vector \mathbf{l} . Cabe mencionar que este resultado es válido para cualquier t_0 y cualquier configuración de referencia aunque es mucho más claro cuando $t_0 = 0$ y $B(0) = I$. En estas condiciones el resultado se reduce a $B(T)\mathbf{l} = \mathbf{l}$, lo que claramente indica que $B(T)$, la matriz que describe la orientación del cuerpo después de un periodo, es una rotación alrededor de \mathbf{l} .

Ahora que se ha mostrado que después de un tiempo T el cuerpo ha rotado cierto ángulo $\Delta\phi$ alrededor del vector \mathbf{l} , se procede a calcular dicho ángulo. El teorema de Stokes establece que la integral de una forma diferencial α sobre la frontera de una variedad orientable Σ es igual a la integral de su derivada exterior $d\alpha$ sobre toda la variedad (ver por ejemplo [12]):

$$\int_{\partial\Sigma} \alpha = \int_{\Sigma} d\alpha.$$

Para calcular $\Delta\phi$ se aplicará este teorema a una integral de la uno-forma canónica Θ en $T^*SO(3)$ y la variedad Σ será una superficie de dimensión 2 en el espacio fase del cuerpo rígido.

Por simplicidad consideremos el caso en que $t_0 = 0$ corresponde a la configuración de referencia de manera que $B(0) = I$ (para el caso general ver observación 4.2). Para mayor claridad denotaremos el vector de momento angular en el sistema inercial \mathbf{l} como \mathbf{l}_0 . Entonces el correspondiente momento angular inicial en coordenadas del cuerpo es $\mathbf{L}(0) = \mathbf{l}_0 = (l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, l_0^{(3)})$. Estas condiciones iniciales están asociadas al elemento (I, \mathbf{l}_0) en el espacio fase. La trayectoria en el espacio fase correspondiente a la evolución dinámica del cuerpo consiste de pares $(B(t), \mathbf{L}(t))$ en coordenadas del cuerpo o bien $(B(t), \mathbf{l}_0)$ en coordenadas del sistema inercial. Considérense ahora las siguientes dos curvas en el espacio fase, ambas iniciando en (I, \mathbf{l}_0) :

- C_1 : curva definida como el segmento de la curva integral del cuerpo par-

tiendo de la condición inicial (I, \mathbf{l}_0) hasta el elemento correspondiente al tiempo $t = T$, $(B(T), \mathbf{L}(T)) = (B(T), \mathbf{L}(0)) = (B(T), \mathbf{l}_0)$. Esta curva se puede parametrizar por el tiempo físico de la siguiente manera: $\gamma_1(t) = (B(t), \mathbf{L}(t))$, $t \in [0, T]$.

- C_2 : curva en $T^*SO(3)$ definida por la siguiente parametrización: $\gamma_2(\alpha) = (\exp\left(\frac{\hat{\mathbf{l}}_0}{\|\mathbf{l}_0\|}\alpha\right), \mathbf{l}_0)$, $\alpha \in [0, \Delta\phi]$. Es decir C_2 es la curva correspondiente a la rotación del cuerpo en el sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de \mathbf{l}_0 por un ángulo α iniciando desde cero hasta $\Delta\phi$.

Nótese que para C_2 se ha utilizado el momento angular en el sistema inercial a pesar de estar utilizando la base del cuerpo, en este caso \mathbf{l}_0 debe pensarse como la condición inicial $\mathbf{L}(0)$ que permanece constante a lo largo de toda la curva. También es importante recalcar que existe una diferencia esencial en las curvas descritas. C_1 es una curva que coincide con la evolución dinámica del cuerpo mientras que C_2 no está relacionada con el movimiento que describe el cuerpo excepto en sus puntos extremos.

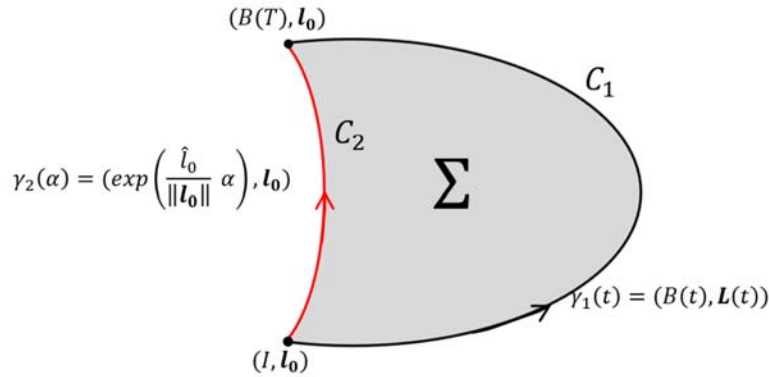


Figura 4.1: Representación de una superficie Σ en el espacio fase cuya frontera está formada por C_1 y C_2 .

Se observa que las dos curvas construidas se intersecan cuando $t = T$ y $\alpha = \Delta\phi$. Para probar esta afirmación simplemente se utiliza la periodicidad de \mathbf{L} y el hecho de que $B(T)$ es precisamente una rotación alrededor de \mathbf{l}_0 un ángulo $\Delta\phi$ por lo que se puede escribir como $\exp\left(\Delta\phi \frac{\hat{\mathbf{l}}_0}{\|\mathbf{l}_0\|}\right)$. En virtud de estas propiedades se tiene que $C_1(T) = (B(T), \mathbf{L}(T)) = (\exp\left(\Delta\phi \frac{\hat{\mathbf{l}}_0}{\|\mathbf{l}_0\|}\right), \mathbf{l}_0)$. Por otro lado $C_2(\Delta\phi) =$

$(\exp\left(\Delta\phi\frac{\hat{l}_0}{\|\mathbf{l}_0\|}\right), \mathbf{l}_0)$. De esta forma se muestra que $C_1(T) = C_2(\Delta\phi)$. Por tanto la curva $C = C_1 - C_2$, obtenida al recorrer primero C_1 y después C_2 en sentido inverso, es cerrada. Al integrar la uno-forma canónica sobre C y aplicando el teorema de Stokes se obtendrá el resultado buscado. Sea Σ cualquier superficie bidimensional tal que $\partial\Sigma = C$, el teorema de Stokes para este caso se escribe como

$$\int_C \Theta = \int_\Sigma d\Theta. \quad (4.11)$$

4.3.1. Integral de línea.

Primero se calculará la integral sobre la curva C . De acuerdo a la manera en que se definió C la integral puede dividirse en dos integrales distintas:

$$\int_C \Theta = \int_{C_1} \Theta - \int_{C_2} \Theta.$$

En coordenadas del sistema inercial la curva C_1 está parametrizada por $\gamma_1(t) = (B(t), \mathbf{l}_0)$, por lo que el vector tangente a esta curva es $\frac{d\gamma_1}{dt} = (\dot{B}(t), 0)$. Dado que se está trabajando en el marco de referencia inercial, la expresión para Θ que debe utilizarse es (4.9). Entonces

$$\int_{C_1} \Theta = \int_0^T \Theta \left(\frac{d\gamma_1}{dt} \right) dt = \int_0^T [l_0^{(1)}\rho_1 + l_0^{(2)}\rho_2 + l_0^{(3)}\rho_3][(\dot{B}(t), 0)] dt.$$

Ya que $B(t) \in SO(3)$ se sigue que $\dot{B}(t) \in T_{B(t)}SO(3)$, por lo que la acción de Θ sobre $\dot{B}(t)$ está bien definida. Esta integral se simplifica a

$$\int_{C_1} \Theta = \int_0^T (l_0^{(1)}\rho_1(\dot{B}(t)) + l_0^{(2)}\rho_2(\dot{B}(t)) + l_0^{(3)}\rho_3(\dot{B}(t))) dt.$$

Recordando la definición de ρ_i se sigue que $\rho_i(\dot{B}(t)) = \omega_i(t)$ por lo que se obtiene

$$\int_{C_1} \Theta = \int_0^T (l_0^{(1)}\omega_1(t) + l_0^{(2)}\omega_2(t) + l_0^{(3)}\omega_3(t)) dt = \int_0^T \langle \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\omega}(t) \rangle dt.$$

Finalmente se utiliza que C_1 es un segmento de una curva integral. Gracias a esto, a lo largo de C_1 , el producto interior $\langle \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\omega}(t) \rangle$ es simplemente dos veces la energía que además es una constante durante el movimiento. Por lo tanto

$$\int_{C_1} \Theta = \int_0^T 2E dt = 2ET. \quad (4.12)$$

Para calcular la contribución a la integral a lo largo de C_2 se utilizarán también las coordenadas del sistema de referencia inercial, entonces se tiene que

$$\int_{C_2} \Theta = \int_0^{\Delta\phi} \Theta \left(\frac{d\gamma_2}{d\alpha} \right) d\alpha = \int_0^{\Delta\phi} [l_0^{(1)}\rho_1 + l_0^{(2)}\rho_2 + l_0^{(3)}\rho_3] \left[\left(\frac{dB(\alpha)}{d\alpha}, 0 \right) \right] d\alpha.$$

Al igual que en el caso de C_1 , $\frac{dB}{d\alpha} \in T_{B(\alpha)}SO(3)$ por lo que la ecuación anterior puede expresarse en términos del vector de velocidad angular:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \Theta &= \int_0^{\Delta\phi} \left(l_0^{(1)}\rho_1 \left(\frac{dB}{d\alpha} \right) + l_0^{(2)}\rho_2 \left(\frac{dB}{d\alpha} \right) + l_0^{(3)}\rho_3 \left(\frac{dB}{d\alpha} \right) \right) d\alpha \\ &= \int_0^{\Delta\phi} (l_0^{(1)}\omega_1(\alpha) + l_0^{(2)}\omega_2(\alpha) + l_0^{(3)}\omega_3(\alpha)) d\alpha. \end{aligned}$$

Hay que notar que en esta integral el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(\alpha)$ no está relacionado con el movimiento del cuerpo pues C_2 no corresponde a alguna curva integral. Para calcular $\boldsymbol{\omega}(\alpha)$ a lo largo de C_2 se utiliza la definición del operador $\hat{\omega}$, según la cual $\hat{\omega}(\alpha) = \frac{dB(\alpha)}{d\alpha} B^{-1}(\alpha)$. A lo largo de C_2 se satisface que $B(\alpha) = \exp\left(\frac{\hat{l}_0}{\|\mathbf{l}_0\|}\alpha\right)$, por lo que fácilmente se obtiene que

$$\hat{\omega}(\alpha) = \frac{dB(\alpha)}{d\alpha} B^{-1}(\alpha) = \frac{\hat{l}_0}{\|\mathbf{l}_0\|}, \quad \text{a lo largo de } C_2.$$

De esta manera la integral sobre la segunda curva puede escribirse como

$$\int_{C_2} \Theta = \int_0^{\Delta\phi} \left(\frac{(l_0^{(1)})^2}{\|\mathbf{l}_0\|} + \frac{(l_0^{(2)})^2}{\|\mathbf{l}_0\|} + \frac{(l_0^{(3)})^2}{\|\mathbf{l}_0\|} \right) d\alpha = \int_0^{\Delta\phi} \|\mathbf{l}_0\| d\alpha = \|\mathbf{l}_0\| \Delta\phi. \quad (4.13)$$

Así se obtiene el valor de la integral de la uno-forma canónica sobre C :

$$\int_C \Theta = 2ET - L\Delta\phi, \quad (4.14)$$

donde $L = \|\mathbf{l}_0\|$.

4.3.2. Integral de superficie.

La segunda integral en el teorema de Stokes aplicado a nuestro caso es $\int_{\Sigma} d\Theta$, por lo que es necesario calcular la derivada exterior de la uno-forma canónica en $T^*SO(3)$, en particular debe encontrarse una expresión para $d\Theta$ sobre la superficie Σ . Hasta ahora no se ha especificado quien es Σ más allá de decir que es una superficie cuya frontera es C . Para calcular $\int_{\Sigma} d\Theta$ haremos una elección conveniente de la superficie Σ , para esto consideremos el mapeo $\Phi_R : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya acción se define como

$$\Phi_R((B, \mathbf{l})) = \mathbf{l},$$

donde, como siempre, $B \in SO(3)$ y \mathbf{l} es el momento angular en el sistema de referencia inercial. A partir de la definición de este mapeo así como de la forma en que se construyó la curva C es claro que $C_1, C_2 \subset \Phi_R^{-1}(\mathbf{l}_0)$. Se elige la superficie Σ como alguna subvariedad de $T^*SO(3)$ tal que $\Sigma \subset \Phi_R^{-1}(\mathbf{l}_0)$ y $\partial\Sigma = C$.

Se define también la función $\Phi_{Le} : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbf{L})$ cuya acción está dada de acuerdo a la siguiente regla de correspondencia: $\Phi_{Le}((B, \mathbf{L})) = \mathbf{L}$, donde \mathbf{L} es el momento angular en el marco de referencia del cuerpo. La expresión “ $\mathbb{R}^3(\mathbf{L})$ ” se utiliza para recalcar que las coordenadas utilizadas para \mathbb{R}^3 son las componentes del vector \mathbf{L} .

Hasta este momento no se ha hecho alguna referencia a la elección específica del sistema inercial, por lo que este sistema puede seleccionarse de una manera conveniente. Para el desarrollo que se llevará a cabo a continuación, el sistema de referencia inercial se elige de tal forma que \mathbf{l}_0 sea paralelo a \mathbf{e}_3 , de modo que $\mathbf{l}_0 = \|\mathbf{l}_0\| \mathbf{e}_3$.

A partir de la restricción de la función Φ_{Le} al conjunto $\Phi_R^{-1}(\mathbf{l}_0)$ es posible construir una nueva función F de la siguiente manera:

$$F := \Phi_{Le}|_{\Phi_R^{-1}(\mathbf{l}_0)} : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{S}_{\|\mathbf{l}_0\|}^2,$$

donde $\mathbb{S}_{\|\mathbf{l}_0\|}^2$ representa la esfera de radio $\|\mathbf{l}_0\|$ en $\mathbb{R}^3(\mathbf{L})$. Hay que notar que la acción de esta función corresponde simplemente a escribir el vector de momento angular asociado a \mathbf{l}_0 en las coordenadas del sistema de referencia del cuerpo. Dada la elección del sistema de referencia inercial y utilizando los ángulos de Euler como coordenadas la expresión para F es

$$F(\varphi, \theta, \psi, \mathbf{l}_0) = B^{-1}\mathbf{l}_0 = \begin{pmatrix} \|\mathbf{l}_0\| \sin \theta \sin \psi \\ \|\mathbf{l}_0\| \sin \theta \cos \psi \\ \|\mathbf{l}_0\| \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Haciendo un análisis detallado en coordenadas locales (ángulos de Euler) uno puede convencerse de que Σ puede elegirse de modo que $F|_{Int \Sigma}$ sea un difeomorfismo al conjunto $\Lambda := F(Int \Sigma)$. Para determinar quién es la región Λ se analiza la imagen de la curva $C = \partial \Sigma$ bajo F . Ya que C_1 es un segmento de curva integral, $F(C_1)$ consiste en los puntos sobre la esfera correspondientes a la trayectoria del vector de momento angular referido al sistema del cuerpo. Entonces la imagen de C_1 consiste en una de las curvas suaves cerradas resultantes de la intersección de la esfera de radio $\|\mathbf{l}_0\|$ con el elipsoide de energía E , dichas curvas se describieron detalladamente en el capítulo 2. Por el contrario, la imagen de C_2 consiste únicamente en un punto, esto es consecuencia de que, sobre C_2 , B corresponde a una rotación alrededor de \mathbf{l}_0 . Consecuentemente $B^{-1}\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}_0$ en C_2 , por ser este vector el eje de la rotación. Por lo tanto se tiene que $F(C_2) = \mathbf{l}_0$. De esta manera se encuentra que $F(C) = F(C_1)$ es la curva sobre la que se mueve el vector \mathbf{L} y Λ corresponde simplemente a la curva $F(C)$ junto con su interior (con la orientación consistente) sobre la esfera de radio $\|\mathbf{l}_0\|$, esta región se muestra en la figura 4.2.

El siguiente paso es obtener una expresión para $d\Theta$. Si se calcula la derivada exterior a la expresión (4.9) se obtiene que

$$d\Theta = l_1 d\rho_1 + l_2 d\rho_2 + l_3 d\rho_3 + dl_1 \wedge \rho_1 + dl_2 \wedge \rho_2 + dl_3 \wedge \rho_3, \quad (4.16)$$

donde \wedge denota el producto exterior de formas diferenciales. Recordando que $\mathbf{l}_0 = \|\mathbf{l}_0\|\mathbf{e}_3$ se tiene que $l_1 = l_2 = 0$. Además por ser $l_i = l_0^{(i)}$ constantes se sigue que $dl_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto la expresión (4.16) restringida a la superficie Σ y escrita en términos de los ángulos de Euler se reduce a

$$d\Theta|_{\Sigma} = l_0^{(3)} d\rho_3 = \|\mathbf{l}_0\| d(d\varphi + \cos \theta d\psi) = -\|\mathbf{l}_0\| \sin \theta d\theta \wedge d\psi.$$

Utilizando la fórmula de cambio de variable (ver [12]) es posible escribir

$$\int_{int \Sigma} d\Theta = \int_{int \Lambda} ((F|_{\Sigma})^{-1})^* d\Theta,$$

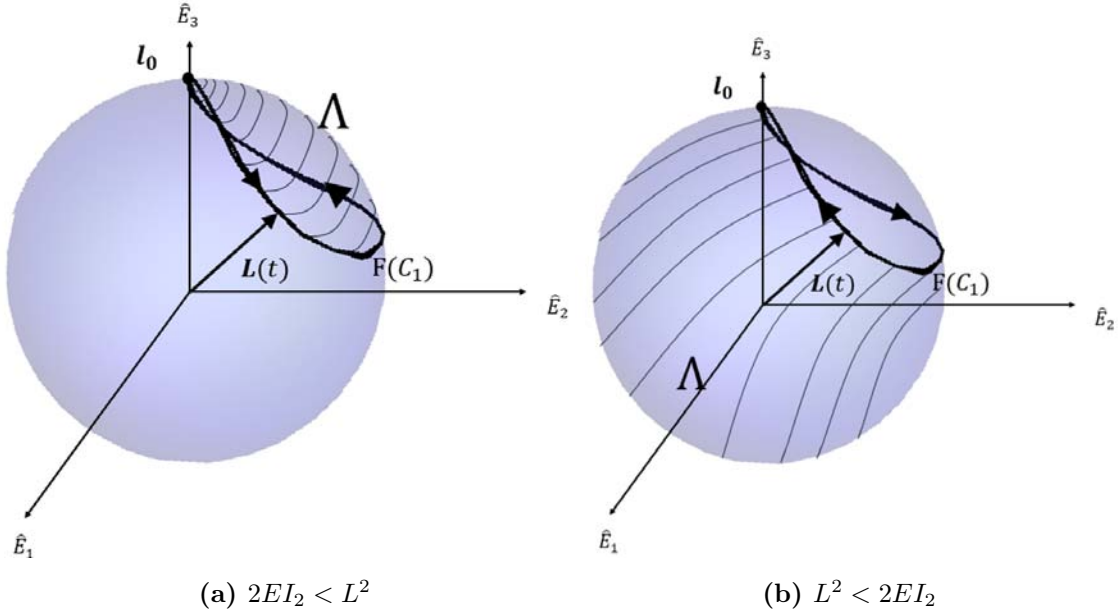


Figura 4.2: Superficie Λ sobre la esfera de radio L , se muestran los dos posibles casos para la orientación de $F(C)$ y su interior dependiendo de los valores de E y L .

donde G^* se refiere al pull-back por la función G . Si se expresa esta última integral en términos de los ángulos de Euler se obtiene que

$$\int_{int \Lambda} ((F|_{\Sigma})^{-1})^* d\Theta = \int_{int \Lambda} -\|\mathbf{l}_0\| \sin \theta d\theta \wedge d\psi.$$

Finalmente se utiliza el hecho de que la contribución a las integrales sobre la frontera de Σ y Λ es nula para reescribir el resultado como

$$\int_{\Sigma} d\Theta = \int_{\Lambda} -\|\mathbf{l}_0\| \sin \theta d\theta \wedge d\psi. \quad (4.17)$$

Por otro lado considérese la dos-forma χ en $\mathbb{R}^3(\mathbf{L})$ definida como

$$\chi := \frac{1}{\|\mathbf{l}_0\|} (L_1 dL_2 \wedge dL_3 + L_2 dL_3 \wedge dL_1 + L_3 dL_1 \wedge dL_2)$$

y la inclusión

$$\iota : \mathbb{S}_{\|\mathbf{l}_0\|}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbf{L}).$$

Con un cálculo sencillo (ver [13]) puede probarse que el área de la superficie $\Lambda \in \mathbb{S}_{\|\mathbf{l}_0\|}^2$ puede expresarse mediante la integral

$$A(\Lambda) = \int_{\Lambda} \iota^* \chi. \quad (4.18)$$

Notemos que (4.15) define coordenadas esféricas (θ, ψ) en $\mathbb{S}_{\|\mathbf{l}_0\|}^2$, por lo que es posible encontrar una expresión para $\iota^* \chi$ en estas coordenadas. Después de realizar y simplificar los cálculos se obtiene que

$$\iota^* \chi = -\|\mathbf{l}_0\|^2 \sin \theta d\theta \wedge d\psi. \quad (4.19)$$

Por lo tanto es posible escribir $-\|\mathbf{l}_0\| \sin \theta d\theta \wedge d\psi = \frac{1}{\|\mathbf{l}_0\|} \iota^* \chi$. Gracias a esta igualdad y a las ecuaciones (4.17) y (4.18) se encuentra que

$$\int_{\Sigma} d\Theta = \frac{1}{\|\mathbf{l}_0\|} A(\Lambda). \quad (4.20)$$

Si además se nota que el área de la superficie Λ está relacionada con el ángulo sólido Ψ barrido por el vector de momento angular en el marco de referencia del cuerpo a través de $A(\Lambda) = \|\mathbf{l}_0\|^2 \Psi$ (ver observación 4.1) y recordando que $L = \|\mathbf{l}_0\|$, es posible escribir la integral de superficie como

$$\int_{\Sigma} d\Theta = L\Psi. \quad (4.21)$$

4.3.3. Expresión final

De acuerdo al desarrollo realizado en párrafos anteriores y a través de la ecuaciones (4.14) y (4.21) es posible concluir que el teorema de Stokes aplicado a nuestro caso implica que

$$2ET - L\Delta\phi = L\Psi,$$

por lo que la expresión buscada para el ángulo de rotación $\Delta\phi$ es

$$\Delta\phi = \frac{2ET}{L} - \Psi. \quad (4.22)$$

Observación 4.1. En [10] el ángulo sólido se elige con una convención de signo relacionado con la orientación de $F(C)$ dada por la dinámica. De acuerdo a nuestros cálculos esto es consistente con (4.22) módulo $\pm 4\pi$ dependiendo de la elección del “interior” de la curva.

La ecuación (4.22) realmente sólo depende de las condiciones iniciales E y L además de los momentos principales de inercia. Esto es debido a que tanto el periodo T como el ángulo sólido Ψ pueden expresarse en función de esas cantidades. Por ejemplo, si las condiciones iniciales son tales que $2EI_2 < L^2$, entonces (ver apéndice A)

$$\Psi = 2\pi - \int_1^{b_3} \int_{b_1}^{b_2} \frac{v-u}{\sqrt{(u-b_1)(b_2-u)(b_3-u)}\sqrt{(v-b_1)(v-b_2)(b_3-u)}} du dv, \quad (4.23)$$

donde

$$b_1 = 1 - \sqrt{\frac{I_2(2EI_1 - L^2)(L^2 - 2EI_3)}{2EI_1I_3(L^2 - 2EI_2)}}, \quad b_2 = 1 - \sqrt{\frac{I_3(2EI_1 - L^2)(L^2 - 2EI_2)}{2EI_1I_2(L^2 - 2EI_3)}},$$

$$b_3 = 1 + \sqrt{\frac{I_1(L^2 - 2EI_2)(L^2 - 2EI_3)}{2EI_2I_3(2EI_1 - L^2)}}.$$

La integral (4.23) puede reducirse a integrales elípticas cuyos parámetros dependen de las condiciones iniciales y de los momentos principales de inercia. Por lo tanto si $2EI_2 < L^2$,

$$\Delta\phi = \frac{8E}{L} \left[\frac{I_1I_2I_3}{(L^2 - 2EI_3)(I_1 - I_2)} \right]^{1/2} K(\beta/\alpha) - 2\pi$$

$$+ \int_1^{b_3} \int_{b_1}^{b_2} \frac{v-u}{\sqrt{(u-b_1)(b_2-u)(b_3-u)}\sqrt{(v-b_1)(v-b_2)(b_3-u)}} du dv. \quad (4.24)$$

Observación 4.2. *En el desarrollo realizado anteriormente para calcular $\Delta\phi$, se ha hecho la hipótesis de que $B(0) = I$. Sea $(B(t), \mathbf{L}(t))$ la solución a las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido (ecuaciones de reconstrucción y de Euler) con condición inicial (I, \mathbf{l}_0) . Con un cálculo simple puede mostrarse que la solución a las mismas ecuaciones con condición inicial arbitraria (B_0, \mathbf{l}_0) está dada por $(\tilde{B}(t) = B_0B(t), \mathbf{L}(t))$.*

Se ha probado que $R = B(T)$ representa una rotación alrededor de \mathbf{l}_0 por un ángulo $\Delta\phi$, cuya expresión está dada por (4.22) para el caso de la condición inicial $B(0) = I$. Además se sabe que, en el caso de la condición inicial arbitraria $\tilde{B}(0) = B_0$, $\tilde{R} = \tilde{B}(T)\tilde{B}^{-1}(0)$ es también una rotación alrededor de \mathbf{l}_0 por un cierto ángulo $\Delta\phi'$. Para encontrar la relación entre estos dos ángulos simplemente se expresa \tilde{R} en función de la matriz R , obteniéndose

$$\tilde{R} = B_0RB_0^{-1}.$$

Esta ecuación implica que las matrices R y \tilde{R} son semejantes. Esto se traduce en que el ángulo de rotación asociado a \tilde{R} es exactamente el mismo que el asociado a R , esto es $\Delta\phi = \Delta\phi'$. Por lo tanto la expresión (4.22) es válida para cualquier condición inicial.

Verificación numérica

En este capítulo se compara el valor obtenido para el coseno del ángulo $\Delta\phi$ a través de una integración numérica de las ecuaciones de Euler y de reconstrucción, con el valor predicho por la expresión (4.22). Para resolver las ecuaciones de movimiento numéricamente se utilizó un método Runge-Kutta del software MATLAB.

En todos los cálculos del programa realizado para la integración numérica se utilizaron números de punto flotante de precisión doble. Para resolver las ecuaciones de movimiento se empleó un método Runge-Kutta de orden 4 integrado en MATLAB, este método implementa un intervalo temporal variable para mejorar la eficiencia del cálculo. Las tolerancias absoluta y relativa usadas en este proceso fueron de 1×10^{-13} . Para calcular las integrales dobles necesarias para conocer el ángulo sólido se utilizó el método “tiled” incluido en el software. Este método está basado en el proceso de dividir la región de integración en pequeños rectángulos y aproximar la integral sobre cada rectángulo a través de una regla 2-D de cuadratura.

Se resolvieron las ecuaciones de Euler escritas en el sistema de ejes principales para obtener el vector $\mathbf{L}(t)$ para dos conjuntos de condiciones iniciales y momentos principales de inercia. Para obtener la matriz $B(t)$, solución a las ecuaciones de reconstrucción, se utilizó el enfoque de los vectores de Poisson. De esta forma se integraron numéricamente las 9 ecuaciones diferenciales acopladas siguientes

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3, & \dot{L}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} L_3 L_1, & \dot{L}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2, \\
\dot{A}_1 &= \frac{A_2 L_3}{I_3} - \frac{A_3 L_2}{I_2}, & \dot{A}_2 &= \frac{A_3 L_1}{I_1} - \frac{A_1 L_3}{I_3}, & \dot{A}_3 &= \frac{A_1 L_2}{I_2} - \frac{A_2 L_1}{I_1}, \\
\dot{B}_1 &= \frac{B_2 L_3}{I_3} - \frac{B_3 L_2}{I_2}, & \dot{B}_2 &= \frac{B_3 L_1}{I_1} - \frac{B_1 L_3}{I_3}, & \dot{B}_3 &= \frac{B_1 L_2}{I_2} - \frac{B_2 L_1}{I_1}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

El tercer vector de Poisson, \mathbf{C} , se recupera a través de la relación $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

En todas las simulaciones se supuso que los momentos principales de inercia eran tales que $I_3 < I_2 < I_1$ y las condiciones iniciales satisfacían $2EI_2 < L^2$ para asegurar la validez de la ecuación (4.24). Además se cumplen las relaciones $I_m < I_j + I_k$ válidas para cualquier cuerpo rígido no plano. Las condiciones iniciales para la matriz B se tomaron como $B(0) = I$ pues de acuerdo a la observación 4.2 basta con analizar ese caso.

La aproximación numérica para $\cos(\Delta\phi)$ se obtuvo al utilizar la expresión (3.5), que en este caso resulta:

$$\cos(\Delta\phi) = \frac{\text{tr}(B(T)) - 1}{2} = \frac{A_1(T) + B_2(T) + C_3(T) - 1}{2}. \tag{5.2}$$

5.1. Simulación 1

Para la primera simulación se supuso un cuerpo rígido tal que los momentos principales de inercia eran

$$I_1 = 5.0 \text{ kg m}^2, \quad I_2 = 4.0 \text{ kg m}^2, \quad I_3 = 3.0 \text{ kg m}^2.$$

Además de las condiciones iniciales

$$L_1(0) = 5.80 \text{ J s}, \quad L_2(0) = 0 \text{ J s}, \quad L_3(0) = -2.50 \text{ J s}.$$

De esta manera se obtiene que $E = 4.4056 \text{ J}$ y $L^2 = 39.8900 \text{ J}^2 \text{ s}^2$. Utilizando la ecuación (2.29), el periodo del vector de momento angular resulta

$$T = 14.5244 \text{ s}.$$

En la figura 5.1 se muestra la evolución de las componentes de \mathbf{L} durante un periodo. En dicha figura se observa que $L_1(t)$ tiene la mitad del periodo que las otras dos componentes. Este hecho es consistente con la solución por cuadraturas (2.28) pues el periodo de la función $\text{dn}(x)$ es la mitad que el periodo de $\text{sn}(x)$ y $\text{cn}(x)$.

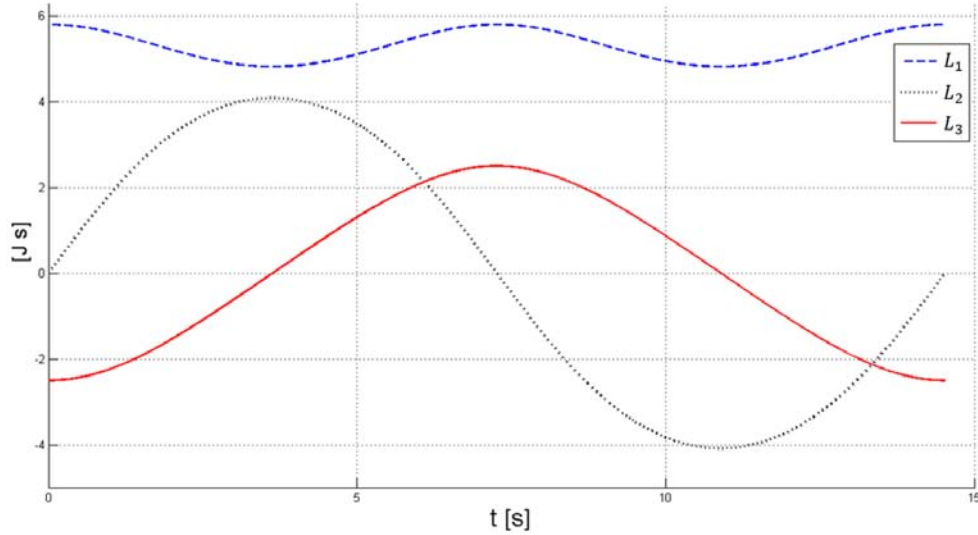


Figura 5.1: Componentes del momento angular en la primera simulación.

La evolución temporal de los vectores de Poisson, y por tanto de las componentes de la matriz $B(t)$, se muestra en las figuras siguientes.

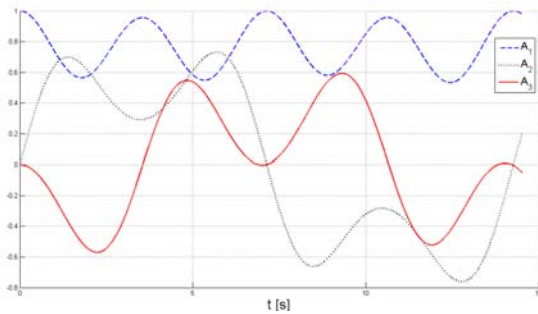


Figura 5.2: Evolución temporal del vector A en la primera simulación.

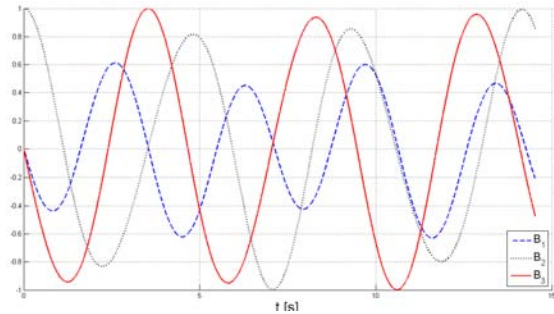


Figura 5.3: Evolución temporal del vector B en la primera simulación.

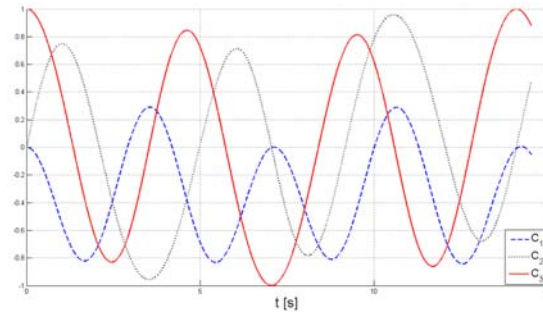


Figura 5.4: Evolución temporal del vector \mathbf{C} en la primera simulación.

Puede notarse que el comportamiento de los vectores de Poisson tiene carácter oscilatorio. Además se puede ver que estos vectores no tienen el mismo periodo que el vector \mathbf{L} , lo que implica que la matriz que describe la orientación del cuerpo no tiene periodo T . Esta observación verifica el hecho de que el movimiento del cuerpo rígido no es periódico sino cuasi-periódico.

El valor numérico resultante de la solución a las ecuaciones de movimiento para el coseno del ángulo de la rotación alrededor de \mathbf{l} en $t = T$ es

$$\cos(\Delta\phi)_{num} = 0.857512598.$$

Por otro lado, al utilizar la expresión (4.24) se encuentra que $\Delta\phi = 19.389937182$ por lo que

$$\cos(\Delta\phi) = 0.857512599.$$

5.2. Simulación 2

En la segunda simulación se supuso un cuerpo rígido tal que los momentos principales de inercia eran

$$I_1 = 23.0 \text{ kg m}^2, \quad I_2 = 17.0 \text{ kg m}^2, \quad I_3 = 14.0 \text{ kg m}^2.$$

Además de las condiciones iniciales

$$L_1(0) = 1.00 \text{ J s}, \quad L_2(0) = 10.00 \text{ J s}, \quad L_3(0) = 1.00 \text{ J s}.$$

Con las condiciones anteriores se obtienen los valores de la energía $E = 2.9986 J$ y magnitud del momento angular $L^2 = 102.00 J^2 s^2$. Al calcular el periodo a través de la expresión (2.29) se obtiene

$$T = 118.5144 s.$$

En la figura 5.2 se muestra la evolución de las componentes de \mathbf{L} durante un periodo. En este caso $2EI_2 = 101.95$ por lo que esta solución se encuentra cerca del límite $2EI_2 = L^2$. Esto puede observarse en la figura 5.2 pues el comportamiento de las componentes del momento angular comienza a mostrar semejanza con las funciones hiperbólicas que de acuerdo a (2.18) describen a las órbitas heteroclínicas. Además con estas condiciones el periodo es mucho mayor que en la simulación 1, comportamiento consistente con la cercanía a la órbita heteroclínica.

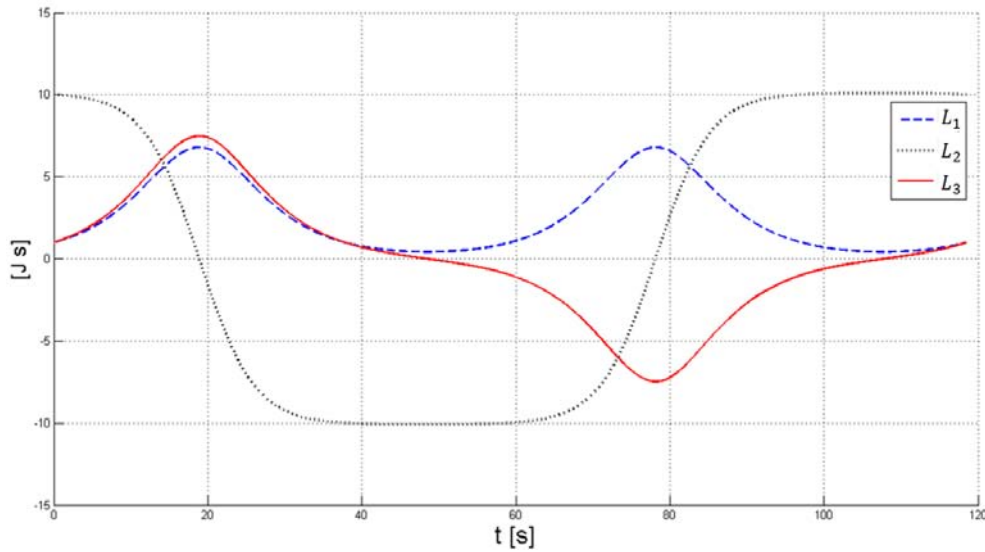


Figura 5.5: Momento angular para el segundo conjunto de condiciones.

En las siguientes figuras se muestran los vectores de Poisson para el conjunto de condiciones iniciales y momentos de inercia correspondientes a esta simulación.

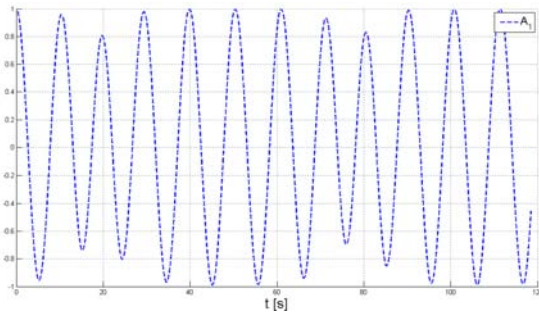


Figura 5.6: Evolución temporal de la primera componente del vector \mathbf{A} .

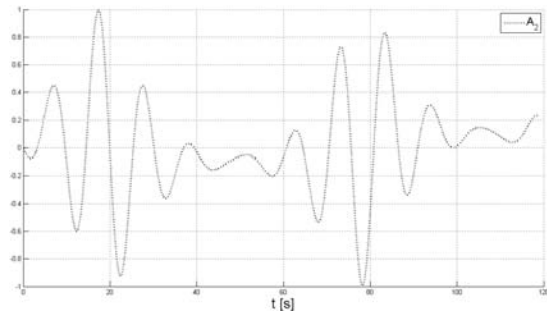


Figura 5.7: Evolución temporal de la segunda componente del vector \mathbf{A} .

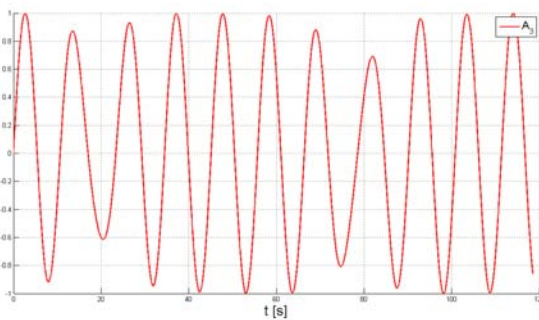


Figura 5.8: Evolución temporal de la tercera componente del vector \mathbf{A} .

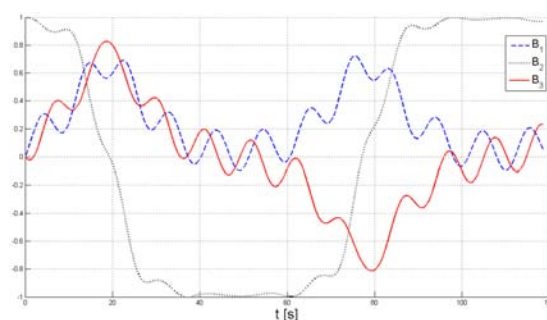


Figura 5.9: Evolución temporal del vector \mathbf{B} .

El valor numérico resultante de la solución a las ecuaciones de movimiento para el coseno del ángulo $\Delta\phi$ es

$$\cos(\Delta\phi)_{num} = -0.469129852.$$

Por otro lado, al sustituir los valores de los momentos de inercia, energía y condiciones iniciales en la expresión (4.24) se obtiene $\Delta\phi = 67.055936863$, por lo que el valor del coseno resulta en

$$\cos(\Delta\phi) = -0.469129824.$$

5.3. Discusión de resultados

A través del análisis realizado hasta ahora sólo se han comparado los valores del coseno del ángulo $\Delta\phi$ pero no el ángulo en sí. Esta limitación proviene del hecho de que la traza de $B(t)$ únicamente proporciona información del coseno del ángulo. Una manera en que se podría estimar el ángulo de la rotación alrededor de \mathbf{l} a través de la solución numérica es analizando la gráfica de $\frac{\text{tr}(B(t))-1}{2}$ como función del tiempo. Esta gráfica representa el coseno de cierto argumento, que en este caso es precisamente el ángulo que el cuerpo rota alrededor de su eje instantáneo de rotación. Además por las propiedades de la función coseno se sabe que cada oscilación completa significa que su argumento ha aumentado en 2π . De esta manera al contar el número de oscilaciones completas en la gráfica durante un periodo se puede estimar $\Delta\phi_{num}$.

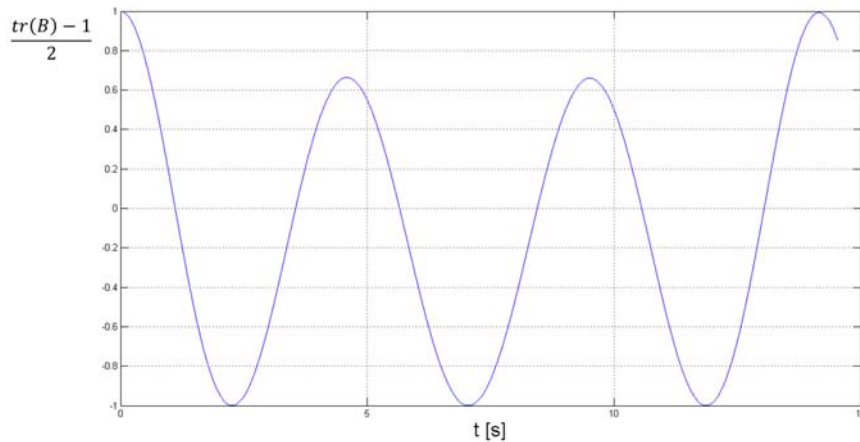


Figura 5.10: Valores obtenidos para $\frac{\text{tr}(B(t))-1}{2}$ como función del tiempo en la simulación 1.

En el primer caso se observan un poco más de tres oscilaciones completas, esto implica que el valor de $\Delta\phi_{num}$ es ligeramente mayor a $3 \cdot 2\pi \approx 18.8495$. Esto es consistente con el valor de $\Delta\phi = 19.389937182$ obtenido a través de (4.24).

En la simulación 2 (figura 5.11) se encuentran aproximadamente entre 10 y 11 oscilaciones completas. Esto se traduce en un valor estimado para $\Delta\phi_{num}$ entre $10 \cdot 2\pi \approx 62.8318$ y $11 \cdot 2\pi \approx 69.1150$. Al igual que en la primera simulación esta

manera de estimar el ángulo de la rotación proporciona resultados consistentes con el valor obtenido con la ecuación (4.24). Vale la pena mencionar que en este caso las oscilaciones no están tan bien definidas como en la primera simulación. Es por esto que para contar el número de oscilaciones completas se observó el número de máximos locales en la figura 5.11.

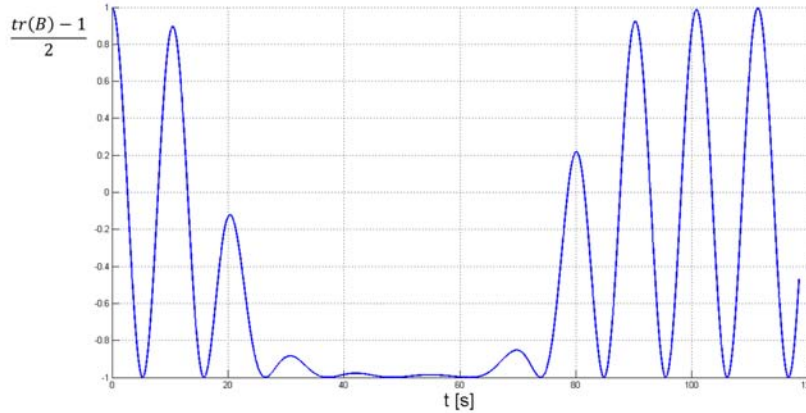


Figura 5.11: Valores obtenidos para $\frac{\text{tr}(B(t))-1}{2}$ como función del tiempo en la simulación 2.

Si bien el eje de rotación del cuerpo no es el vector constante \mathbf{l} en todo instante de tiempo, el movimiento del cuerpo se realiza de manera que el eje instantáneo de rotación cambia de manera continua y suave, como consecuencia el ángulo que ha rotado el cuerpo alrededor de su eje instantáneo es también una función continua del tiempo. Esto permite pensar que el analizar el número de oscilaciones es una manera adecuada de obtener el valor del ángulo de la rotación alrededor de \mathbf{l} después de un periodo. En este trabajo no fue posible obtener una demostración rigurosa de la validez de dicho análisis. Como consecuencia lo más que se puede decir es que este método parece proporcionar los resultados correctos y se deja abierta la cuestión de encontrar un argumento riguroso que pruebe la validez del análisis.

En ambas simulaciones se encuentra que el valor del coseno del ángulo predicho por la ecuación (4.24) coincide con el valor obtenido a partir de las ecuaciones de movimiento al menos en las primeras siete cifras decimales. Esto verifica que la expresión obtenida utilizando hechos geométricos proporciona la información correcta acerca de la orientación del cuerpo rígido en el espacio después de un

periodo del vector de momento angular referido al sistema de ejes principales. Este resultado era de esperarse pues en la deducción de (4.22) no se realizó ninguna aproximación o se impuso alguna restricción adicional, por lo que es una expresión exacta.

Con la verificación de la expresión (4.22) se muestra que la geometría diferencial es una herramienta poderosa para obtener información acerca de la evolución de sistemas mecánicos, especialmente en la presencia de simetrías.

Cálculo del ángulo sólido

En este apéndice se muestra detalladamente la deducción de la expresión del ángulo sólido barrido por el vector de momento angular después de un periodo.

Como se mencionó al encontrar la solución a las ecuaciones de Euler, si $L^2 \neq 2EI_2$ es necesario distinguir entre dos casos para encontrar una solución consistente:

- Caso 1: corresponde a condiciones iniciales tales que $2EI_2 < L^2$. En estas condiciones las curvas sobre las que ocurre la dinámica del momento angular se encuentran alrededor del eje \mathbf{E}_1 .
- Caso 2: en este caso se satisface $L^2 < 2EI_2$ y las curvas resultantes de la intersección de la esfera de momento con el elipsoide de energía se encuentran alrededor del eje \mathbf{E}_3 .

Se nota que estos dos tipos de soluciones están separados por las órbitas heteroclínicas sobre la esfera de momento angular. En la figura [A.1](#) se muestran estas soluciones.

Para calcular el ángulo sólido Ψ es necesario seleccionar uno de los dos tipos de solución. Supongamos entonces que las condiciones son tales que $2EI_2 < L^2$, por lo que se trata del primer caso.

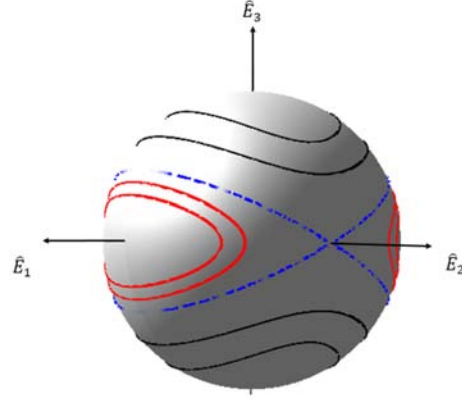


Figura A.1: Diferentes tipos de soluciones a las ecuaciones de Euler. Las órbitas heteroclínicas se muestran con una línea punteada.

Se introduce un sistema de coordenadas que permite calcular el área buscada sobre la esfera. Sean $b_1 < b_2 < b_3$ números reales y $c \in \mathbb{R}$ tal que $b_2 < c < b_3$. Consideremos el rectángulo $D = (b_1, b_2) \times (c, b_3)$, se define $G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ donde

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= L \sqrt{\frac{(b_3 - u)(b_3 - v)}{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)}}, & y(u, v) &= L \sqrt{\frac{(b_1 - u)(b_1 - v)}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)}}, \\
 z(u, v) &= L \sqrt{\frac{(b_2 - u)(b_2 - v)}{(b_2 - b_1)(b_2 - b_3)}}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Las coordenadas (u, v) se conocen como *coordenadas esferocónicas*. A partir de la definición de estas coordenadas puede verificarse que

$$x(u, v)^2 + y(u, v)^2 + z(u, v)^2 = L^2,$$

por lo que $G(D) \subset \mathbb{S}_L^2$. Realizando un análisis sobre la frontera de D puede mostrarse que $G(D)$ es la región sobre la esfera delimitada por los planos $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$ además de la curva σ resultante de la intersección de la esfera de radio L con la superficie definida por la ecuación

$$\left(\frac{c(b_1 + b_2) - b_1 b_2}{L^2 c^2} \right) x^2 + \left(\frac{c(b_2 + b_3) - b_2 b_3}{L^2 c^2} \right) y^2 + \left(\frac{c(b_1 + b_3) - b_1 b_3}{L^2 c^2} \right) z^2 = 1. \tag{A.2}$$

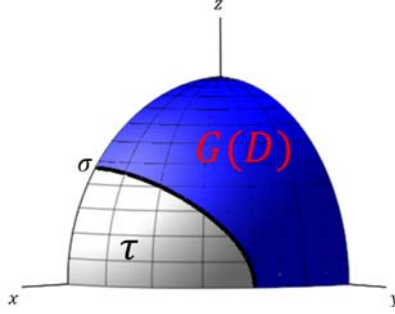


Figura A.2: Imagen del rectángulo D bajo la acción de G sobre el octante positivo de la esfera.

Recordando que se supuso $2EI_3 < 2EI_2 < L^2 < 2EI_1$ es posible seleccionar los escalares b_i y c de manera que

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1 - \sqrt{\frac{I_2(2EI_1 - L^2)(L^2 - 2EI_3)}{2EI_1I_3(L^2 - 2EI_2)}}, & b_2 &= 1 - \sqrt{\frac{I_3(2EI_1 - L^2)(L^2 - 2EI_2)}{2EI_1I_2(L^2 - 2EI_3)}}, \\
 b_3 &= 1 + \sqrt{\frac{I_1(L^2 - 2EI_2)(L^2 - 2EI_3)}{2EI_2I_3(2EI_1 - L^2)}}, & c &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Nótese que $b_2 < c$ y $c < b_3$. Además con un poco de álgebra puede mostrarse que $b_1 < b_2$.

Si se definen los parámetros de la manera establecida anteriormente se sigue que

$$\frac{c(b_1 + b_2) - b_1b_2}{L^2c^2} > \frac{c(b_2 + b_3) - b_2b_3}{L^2c^2} > \frac{c(b_1 + b_3) - b_1b_3}{L^2c^2} > 0,$$

por lo que (A.2) define un elipsoide. Más aún, los semiejes de ese elipsoide coinciden con los semiejes del elipsoide de energía, esto es

$$\frac{c(b_1 + b_2) - b_1b_2}{L^2c^2} = 2EI_1, \quad \frac{c(b_2 + b_3) - b_2b_3}{L^2c^2} = 2EI_2, \quad \frac{c(b_1 + b_3) - b_1b_3}{L^2c^2} = 2EI_3.$$

Entonces σ corresponde a la intersección de la esfera de radio L con el elipsoide de energía, por lo que se puede identificar con un segmento de la curva definida por la frontera de la región Λ descrita en la sección 4.3. En la figura A.2 se

observa que σ divide el octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ de la esfera en dos regiones ajenas: la primera de ellas es simplemente $G(D)$ mientras que la otra región, que denotaremos como τ , corresponde a una sección de Λ .

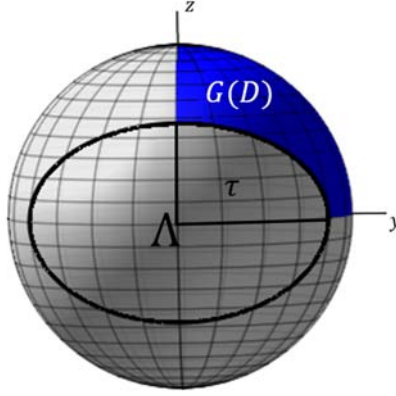


Figura A.3: Simetría sobre los octantes de la esfera.

Dada la naturaleza de la región τ así como de su frontera se sigue que existe una simetría respecto a considerar sólo el octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ de la esfera en lugar de considerar cualquier otro octante del hemisferio $x \geq 0$, esta simetría puede verse en la figura A.3. Gracias a esta simetría es posible relacionar el área de τ con el área de Λ a través de la expresión $A(\Lambda) = 4A(\tau)$. La región $G(D)$ tiene una simetría análoga. Dado que el área del hemisferio $x \geq 0$ es $2\pi L^2$, tenemos que

$$2\pi L^2 = 4(A(\tau) + A(G(D))) = A(\Lambda) + 4A(G(D)),$$

por lo que

$$A(\Lambda) = 2\pi L^2 - 4A(G(D)). \quad (\text{A.4})$$

Para calcular el área de $G(D)$ utilizamos la parametrización (A.1). Si denotamos

$$\mathbf{X}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{X}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

un cálculo directo muestra que

$$\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\| = \frac{L^2}{4} \frac{v - u}{\sqrt{(u - b_1)(b_2 - u)(b_3 - u)} \sqrt{(v - b_1)(v - b_2)(b_3 - u)}}$$

y por lo tanto

$$A(G(D)) = \frac{L^2}{4} \int_1^{b_3} \int_{b_1}^{b_2} \frac{v - u}{\sqrt{(u - b_1)(b_2 - u)(b_3 - u)} \sqrt{(v - b_1)(v - b_2)(b_3 - u)}} du dv$$

Finalmente, recordando que $\Psi = \frac{A(\Delta)}{L^2}$ se encuentra la expresión para el ángulo sólido:

$$\Psi = 2\pi - \int_1^{b_3} \int_{b_1}^{b_2} \frac{v - u}{\sqrt{(u - b_1)(b_2 - u)(b_3 - u)} \sqrt{(v - b_1)(v - b_2)(b_3 - u)}} du dv. \quad (\text{A.5})$$

Bibliografía

- [1] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1989.
- [2] Arnold, V. I. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Annales de l'institut Fourier, 16(1): 319-361. 1966
- [3] Becchi A., Corradi M. y Foce F. *Essays on the History of Mechanics*, Springer Basel AG, 2003.
- [4] Berry, M. *The geometric phase*, Sci. Am., 259(6): 46-55. 1988.
- [5] Fedorov, Y. *Classical Integrable Systems and Billiards Related to Generalized Jacobians*. Acta Applicandae Mathematicae, 55: 251–301, 1999.
- [6] Jacobi, C. G. J. *Sur la rotation d'un corps*, Gesammelten Werke, 2: 139-172. 1884.
- [7] Landau, L. D. y Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics Volume 1. Mechanics*, Pergamon Press, 1969.
- [8] Lawden, D. F. *Elliptic Functions and Applications*, Springer-Verlag, 1989.
- [9] Marsden, J. E. y Ratiu, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, 1999.
- [10] Montgomery, R. *How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century*. Amer. J. Phys., 59: 394-398. 1991.
- [11] Piña, E. *Sobre el caso de Euler del movimiento de un cuerpo rígido*. Revista Mexicana de Física, 54(2): 92-103. 2008.

- [12] Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish Inc., 1999.
- [13] Suhubi, E. *Exterior Analysis. Using Applications of Differential Forms*. Elsevier, 2013.
- [14] Whitaker, E. T. y Watson, G. N. *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1940.
- [15] Winternitz, P. *Group Theory and Numerical Analysis.*, American Mathematical Society, 2005.