UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

CAMPUS ARAGÓN

"ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE UNA PLATAFORMA DE STEWART 6 UPS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO MECÁNICO

P R E S E N T A

HERMINIO HERNÁNDEZ SAN JUAN

ASESOR: M EN I. JOSÉ ANTONIO SOUZA JIMÉNEZ

MÉXICO **2015**

Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México

“La imaginación es más importante que el conocimiento “

Albert Einstein

Dedicatoria.

Dedico este trabajo a mis padres, Isabel San Juan y Cipriano Hernández, por ser el motivo por el cual tengo vida y lograr este sueño de poder cumplir con uno de mis propósitos en la vida.

Ustedes son un gran ejemplo y una inspiración de vida, gracias a su apoyo y consejo en este camino en el que me propuse navegar puedo estar alegre al poder cumplir con un sueño, que comparto con ustedes.

El camino no fue sencillo pero cuando uno piensa que desfallece en el intento, siempre están ahí de la mano de Dios, apoyando en cada una de las dificultades que se han presentado, y que mejor que el amor y la sabiduría de un padre que comprende las situaciones que uno pasa durante la juventud.

Y el ver que ustedes luchan día a día para que yo pudiera continuar con mis estudios y contar con un apoyo incondicional, fue un gran impulso para que diera siempre lo mejor de mí a lo largo de la trayectoria en la carrera, así como en mí vida personal.

Por ser unos padres maravillosos con los que Dios me bendijo gracias.

Agradecimientos.

A Dios por permitirme la vida y porque él tiene el control de las cosas en cada uno de nosotros, porque en él subsiste y existe todo.

A mis padres y a mi familia por que han sido un gran soporte durante mis estudios y cada consejo me ayudó a ser mejor cada día.

A mi novia Adriana, por ser una amiga y compañera en cada instante de mi vida, recordándome que los sueños se hacen posibles cuando uno no deja de luchar por ellos y que la paciencia y perseverancia son indispensables en todo momento, por su apoyo incondicional y el amor que me brindó su familia.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en particular a la Facultad de Estudios Superiores Aragón por haber sido una segunda casa para mí y por cada una de las experiencias que cambiaron mi vida durante mi estancia.

A mi tutor M. en I. José Antonio Souza Jiménez, porque siempre he recibido un gran apoyo de su parte y por permitirme trabajar a su lado este proyecto, estando dispuesto en cada momento para resolver toda duda y por ser un ejemplo como profesor y amigo.

A cada uno de los sinodales por su valiosa aportación en la revisión de esta tesis.

Al Dr. en I. Jacinto Cortez Pérez, por el apoyo recibido durante mi estancia en el Laboratorio de Mecánica Aplicada del Centro Tecnológico de la FES Aragón, y como profesor por ser una inspiración durante la carrera y un ejemplo a seguir en las cuestiones académicas y proyectos en los que ha estado involucrado.

Al M. en I. Alberto Reyes Solís, por ser uno de los profesores que influyeron demasiado en mi vida académica, por su honestidad en su trabajo y los conocimientos académicos recibidos de su parte ayudaron a que cambiara mi forma de ver muchas cosas de la carrera.

Contenido

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Introducción

La robótica es una disciplina que tiempo atrás estaba únicamente relacionada con la ciencia ficción para la mayoría de las personas. Ciertamente, era una idea que se manifestaba en películas donde robots humanoides formaban parte importante del atractivo de las mismas. Siempre ha existido la necesidad en el hombre de poder manipular objetos pesados o realizar tareas que suelen ser riesgosas, por lo que como tantos desarrollos tecnológicos inspirados en la observación de las leyes de la naturaleza se concibió el diseño de los robots dando lugar al surgimiento de la robótica.

Sin embargo, en los últimos tiempos, ésta se ha convertido en una disciplina emergente que ha despertado un gran interés entre los académicos e investigadores gracias a sus características multidisciplinarias e innovadoras. Actualmente, la tecnología basada en la robótica es ampliamente utilizada en el mundo industrial donde, en virtud de los desarrollos recientes en automatización, la idea de un mecanismo que se puede mover en el espacio resulta muy atractiva.

Los robots surgen como una herramienta de ayuda a los trabajadores que pueden ser utilizados para la manufactura, en tareas repetitivas que requieran precisión y rapidez, en trabajos que sean muy peligrosos o imposibles de realizar para un ser humano. Esto ha permitido que los robots entren en uso comercial y sus costos se abaraten.

Al considerar la estructura de los robots estos se pueden clasificar en: **Robots móviles, seriales y paralelos.**

Los móviles son robots con gran capacidad de desplazamiento, acoplados a carros o plataformas. Están dotados de un cierto grado de inteligencia mediante su programación, lo que les permite sortear obstáculos y la posibilidad de navegar en distintos terrenos, estos tienen aplicaciones como: exploración minera, exploración planetaria, misiones de búsqueda y rescate de personas, limpieza de desechos peligrosos, automatización de procesos, vigilancia, reconocimiento de terreno, por mencionar algunas [1].

Mientras que los robots de tipo seriales, son los más estudiados en la literatura y empleados en la práctica, están formados por una cadena cinemática abierta, con una estructura similar al brazo humano (antropomórficos), donde todas sus juntas son actuadas, Figura 1.1 (a).

Aunque sus prestaciones han mejorado a través de los años, éstos presentan ciertas características negativas propias a su diseño que hacen que sean inapropiados para determinadas aplicaciones, entre ellas la poca capacidad de carga respecto a su masa, la falta de rigidez ante perturbaciones externas y la precisión pobre de su elemento terminal.

Ante este escenario surge una arquitectura alternativa que consiste en el uso de múltiples actuadores en paralelo, los cuales son conocidos como robots paralelos, están formados por dos plataformas, una fija y otra móvil, unidas por varias cadenas cinemáticas en paralelo (brazos). Cada brazo es a su vez una cadena cinemática de tipo serial donde las dos últimas barras son las dos plataformas y por ello, formando cadenas cinemáticas cerradas, Figura. 1.1 (b). Esta configuración permite tratar con muchos de los problemas de los manipuladores de tipo seriales, permitiendo la disminución la de la masa de la estructura, una mayor rigidez en presencia de perturbaciones, mejor precisión y más capacidad de carga utilizando actuadores menos potentes.

Figura 1.1 (a).

Figura 1.1 (b).

Sin embargo, también presentan otras características que, según para que aplicación, pueden considerarse desventajas, por ejemplo la presencia de juntas no actuadas, en general, hace más complejo el análisis de los robots paralelos que el de los seriales [1]. Lo cual conlleva a que la cinemática de los mecanismos sea más complicada. El espacio de trabajo suele ser pequeño comparativamente hablando. Además, no es sencillo su cálculo, pues la posición y orientación están muy fuertemente acopladas.

Sin embargo ante todo esto, su estudio y desarrollo ha logrado llevar a la aplicación de estos robots en varias actividades, como: orientación de antenas, telescopios y paneles solares, simuladores de vuelo para aviones y helicópteros así como simuladores de conducción de vehículos, carretillas elevadoras, en la industria para ensamblaje de componentes, para posicionamiento de piezas, entre otras. Entre los robots de configuración paralela encontramos uno de ellos, conocido como la plataforma de Stewart, ha recibido la mayor atención en el mundo industrial y académico.

En este caso el tema que nos concierne es el análisis dinámico de la Plataforma de Stewart 6 UPS (universal, prismatic and Spherical) el cual será el objeto de estudio de esta tesis.

1.2. Objetivo general.

Obtener el modelo dinámico de una plataforma de Stewart 6 UPS para ser utilizado en modelos de control que permitan que el mecanismo pueda llegar a ser autónomo.

1.3. Justificación.

Anteriormente se realizó el análisis dinámico por medio del método Newton-Euler [2], se busca comparar los resultados obtenidos por ambos métodos para corroborar si fue correcto dicho análisis

Con el modelo dinámico es posible realizar la aplicación que se desee para la Plataforma de Stewart. En este aspecto los robots paralelos poseen un amplio campo de aplicación, aunque no se puede negar la indiscutible primacía de los robots con estructura serie, los desarrollos en mecanismos paralelos están en constante crecimiento, tal es así que han sido adoptados en diversas áreas, desde microrobots posicionadores hasta grandes plataformas de gran capacidad de carga, en aplicaciones médicas, aislamiento y producción de vibraciones, en cirugía para posicionamiento de microscopios e incluso de pacientes y cirugía ortopédica, en tecnología de grúas, la investigación submarina, rescate aire-mar, entre otras aplicaciones.

Figura 1.2 Simulador de marcha usando dos plataformas Stewart.

1.4. Metodología.

Se realizara el análisis dinámico de la plataforma 6 UPS por el método Euler-Lagrange mediante el cual se desea determinar los torques aplicados por los actuadores en los eslabones de entrada, para que el efector final alcance una trayectoria dada y conocer su comportamiento. En este método se obtienen ecuaciones de una forma cerrada, en otras palabras, formula ecuaciones de movimiento usando un conjunto de coordenadas generalizadas [3]. Esto elimina todas o algunas de las fuerzas de restricción. Con el entendimiento de la dinámica del manipulador, es posible diseñar un controlador con mejores características de ejecución que con aquellos encontrados usando métodos heurísticos, después de que ha sido construido el manipulador.

1.5. Marco Teórico y Estado del Arte.

Los manipuladores paralelos son mecanismos donde todos los enlaces están conectados a la base y la plataforma en movimiento al mismo tiempo. Dado que una estructura paralela es una cadena cinemática cerrada, todas las patas están conectadas desde el origen del punto por una conexión en paralelo de la herramienta. Esta conexión permite una mayor precisión y una mayor velocidad. Los manipuladores paralelos tienen un mejor desempeño en comparación con los seriales, en términos de un alto grado de precisión, altas velocidades o aceleraciones y alta rigidez. Por lo tanto, parece perfectamente adecuado para la alta velocidad industrial en aplicaciones, como pick-and-place o micro de alta velocidad de mecanizado. Se utilizan en muchos campos, tales como los sistemas de simulación de vuelo, manufactura y aplicaciones médicas.

Los manipuladores paralelos se pueden clasificar en dos categorías fundamentales, en: manipuladores espaciales y plana. La primera categoría se compone de los manipuladores paralelos espaciales que pueden trasladarse y girar en el espacio tridimensional.

Mientras que los manipuladores paralelos planos que componen la segunda categoría, pueden trasladarse a lo largo del eje x y eje y, y girar alrededor del eje z, solamente. Aunque los manipuladores paralelas planas son cada vez más utilizados en la industria para aplicaciones de micro-nanoposicionamiento.

Uno de los manipuladores espaciales más populares es, la Plataforma Stewart, es ampliamente preferido en simuladores de vuelo (Stewart, 1965). Este mecanismo es el de 6 grados de libertad. Se compone de una placa superior (plataforma móvil), una placa base (base fija), y seis patas extensibles que conecta la placa superior a la placa inferior. SP (Stewart Plataform) emplea la mismo arquitectura del mecanismo de Gough (Merlet, 1999). Por ello también se conoce como plataformas de Stewart-Gough en la literatura.

El modelado cinemático y dinámico del SP es extremadamente complicado en comparación con los robots en serie. Típicamente, la cinemática del robot pueden ser divididos en cinemática directa e inversa [4].

a) **Cinemática Directa.** Consiste en determinar la posición y orientación del extremo final del robot con respecto al sistema de la base del robot a partir de conocer los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos.

b) **Cinemática Inversa.** Resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación conocidas del extremo.

Cinemática Directa (ángulos para encontrar posición):

Se conoce:
- La longitud de cada eslabón.
- El ángulo de cada articulación.

Se busca:
- La posición de cualquier punto. (Coordenadas con respecto a la base).

Cinemática Inversa (posición para encontrar ángulos):

Se conoce:
- La longitud de cada eslabón.
- La posición de cualquier punto. (Coordenadas con respecto a la base).

Se busca:
- El ángulo de cada articulación requerido para obtener la posición.

Como resultado, la mayoría de los trabajos de investigación se concentraron en la cinemática directa (Bonev y Ryu, 2000; Merlet, 2004; Harib y Srinivasan, 2003; Wang, 2007).

El modelo dinámico de manipuladores paralelos es bastante complicado debido a su estructura de bucle cerrado, la relación acoplada entre los parámetros del sistema y las restricciones cinemáticas. El modelado dinámico puede también dividirse en dos temas: el modelo dinámico inverso y directo.

La dinámica inversa es importante para el control del sistema, mientras que el modelo directo se utiliza para el sistema de simulación.

El análisis dinámico del manipulador se ha realizado tradicionalmente a través de varios métodos diferentes; pero, los más concurridos son: El método de Newton-Euler, la formulación de Lagrange.

El enfoque de Newton-Euler requiere el cálculo de todas las fuerzas y momentos de restricción entre los eslabones. El método consiste en definir las ecuaciones de movimiento para cada eslabón del robot y a partir de ello efectuar el análisis ya que se genera un sistema de ecuaciones en función tanto de las fuerzas y/o torques, las cuales son calculados a partir de las relaciones cinemáticas.

Uno de los importantes estudios fue presentado por Dasgupta y Mruthyunjaya (1998). En su estudio, las ecuaciones dinámicas de la 6-UPS SP, fueron derivadas utilizando el enfoque de Newton-Euler. Las ecuaciones dinámicas se obtuvieron implementando la dinámica inversa y los resultados de la simulación mostraron que esta formulación proporciona una modelización completa de la dinámica de SP.

Otro método de obtención de la dinámica del manipulador es la formulación de Lagrange. Este método se utiliza para describir la dinámica de un sistema mecánico bajo conceptos de trabajo y energía. [5]

Es un método perteneciente a la dinámica analítica, la cual consiste en una serie de técnicas basadas en el tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos [6]. Este tiene la ventaja de considerar la definición de coordenadas generalizadas por el análisis de fuerzas de contacto.

La formulación de Lagrange se expresa en ecuaciones que relacionan las fuerzas que realizan trabajo virtual con la energía cinética y potencial del sistema, donde el número de ecuaciones de Lagrange generadas es igual a los grados de libertad del sistema. Para el caso de mecanismos paralelos, se requiere formular las ecuaciones de restricción necesarias que igualen al número de incógnitas.

Abdellatif y Heimann (2009). Ellos demostraron que la derivación del modelo explícito era posible utilizando el la formulación de Lagrange en un forma computacionalmente eficiente y sin simplificaciones de manipuladores cinemáticos paralelos de 6 DOF.

Guo y Li (2006) derivan las ecuaciones dinámicas de la plataforma de Stewart 6 DOF con actuadores prismáticas, sobre la base de la combinación de método Newton-Euler con la formulación de Lagrange. Con el fin de validar la formulación propuesta de ejemplos numéricos estudiados utilizados en otras referencias. Los resultados de la simulación mostraron que se pueden derivar las ecuaciones dinámicas explícitas en el espacio de trabajo de la plataforma de Stewart, mediante la aplicación de la combinación de estos métodos.

En este caso el método que se aplicara para el estudio de una plataforma de Stewart 6 UPS es el de la combinación del método Euler-Lagrange.

1.6. Configuración del robot paralelo.

La configuración del manipulador en estudio se presenta en la Figura 1.3 donde se indican los componentes de éste, y en la Figura 1.4 se muestra una sola cadena cinemática del robot donde se encuentran los nombres simplificados asignados a cada parte o conjunto del robot que se usará para referirse a ellos en el resto del trabajo.

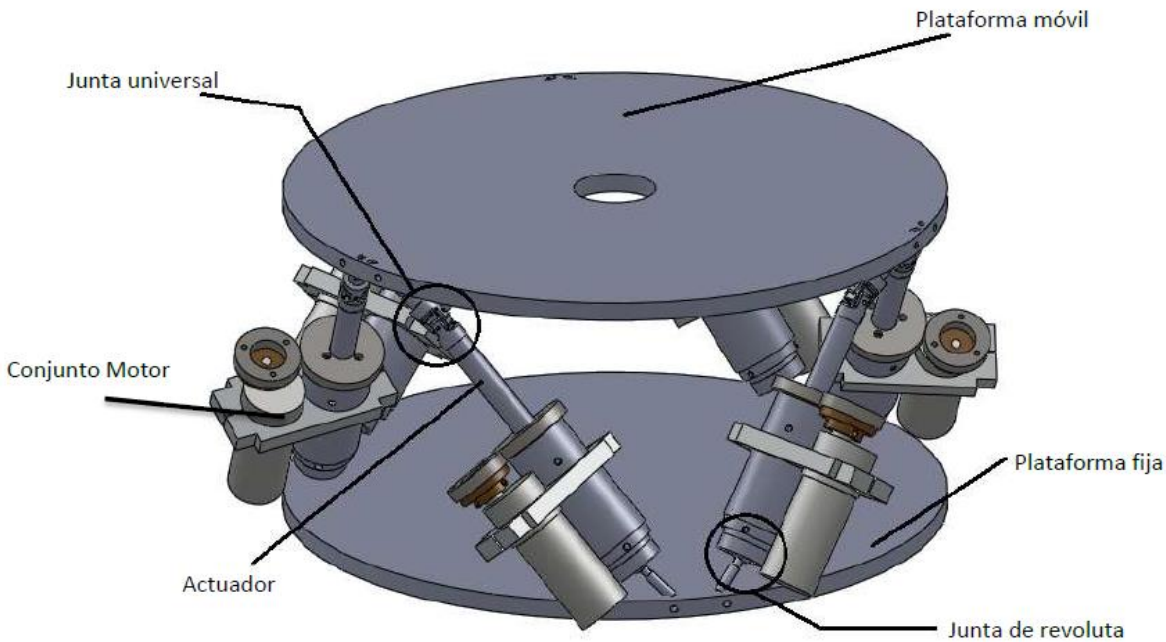


Figura 1.3 Configuración del robot paralelo

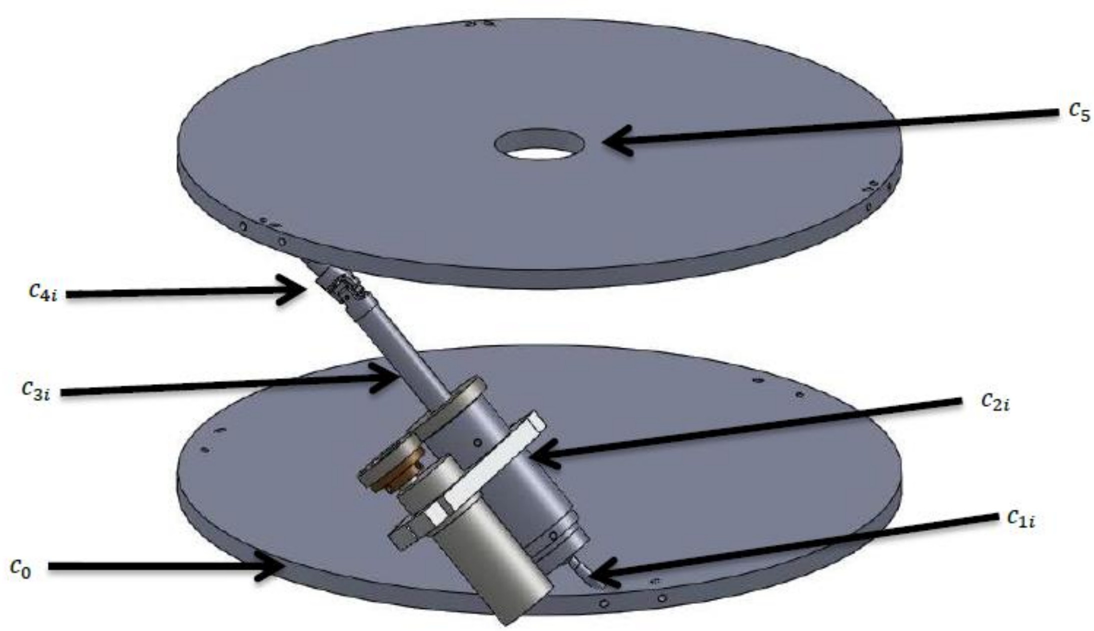


Figura 1.4 Cuerpos de una cadena cinemática

1.7. Grados de Libertad.

Los grados de libertad de un mecanismo son el número de parámetros o entradas necesarias para especificar la configuración de un mecanismo. Los grados de libertad de un mecanismo paralelo pueden ser determinados con la aplicación de la fórmula de Chebyshev-Grübler-Kutzbach.

$$\boldsymbol{L = 6(b - g - 1) + \sum f_k}$$

Donde *b* y *g* son respectivamente, número de cuerpos (incluyendo la base), número de juntas del mecanismo y el número de grados de libertad de la junta *k*. Por lo tanto, para la plataforma se tiene:

$$\boldsymbol{b = 20}$$
$$\boldsymbol{g = 24}$$
$$\boldsymbol{\sum f_k = 36}$$

Sustituyendo los valores se tiene:

$$\boldsymbol{L = 6(20 - 24 - 1) + 36 = 6}$$

Por lo tanto el manipular en estudio tiene 6 grados de libertad.

Capítulo 2

Análisis Cinemático.

2.1 Introducción.

La cinemática es la parte de la Dinámica que describe el movimiento de los cuerpos sin referencia a las fuerzas que lo causan ni a las que se generan a consecuencia del mismo. [7]

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación de la herramienta del robot con los valores que toman sus coordenadas de sus articulaciones. [8]

2.2 Matrices Homogéneas.

Matriz de transformación homogénea. Se define como matriz de transformación homogénea T a una matriz de dimensión 4x4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro [9].

Esta matriz está compuesta por 4 submatrices:

$\mathbf{R_{3x3}}$ Submatriz de Rotación
$\mathbf{P_{3x1}}$ Submatriz de Traslación
$\mathbf{F_{1x3}}$ Submatriz de Perspectiva
$\mathbf{E_{3x3}}$ Submatriz de Escalado Global

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_{3x3}} & \mathbf{P_{3x1}} \\ \mathbf{F_{1x3}} & \mathbf{E_{3x3}} \end{bmatrix}$$

En robótica, generalmente se considera la submatriz de perspectiva como nula y la submatriz de escalado global como uno. Un vector Homogéneo siempre tendrá 4 dimensiones.

La matriz de transformación Homogénea sirve para:

a) Conocer las coordenadas del vector $\mathbf{r_x}, \mathbf{r_y}, \mathbf{r_z}$ en el sistema O´XYZ a partir de sus coordenadas $\mathbf{r_u}, \mathbf{r_v}, \mathbf{r_w}$ en el sistema O´UVW.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r_x} \\ \mathbf{r_y} \\ \mathbf{r_z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \mathbf{r_u} \\ \mathbf{r_v} \\ \mathbf{r_w} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

b) Expresar las rotaciones y traslaciones de un vector con respecto a un sistema fijo O´XYZ.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r'}_\mathbf{x} \\ \mathbf{r'}_\mathbf{y} \\ \mathbf{r'}_\mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \mathbf{r_x} \\ \mathbf{r_y} \\ \mathbf{r_z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Por ello se han tomado como herramientas las matrices de trasformación homogéneas para el análisis de posición, ya que mediante ellas puede explicarse los movimientos de traslación y rotación de un cuerpo en el espacio [10].

Puede explicarse el movimiento general de un cuerpo en el espacio mediante una sola transformación homogénea, representada por una matriz de 4x4, pero ya que necesitan definirse las ecuaciones de lazo correspondientes a cada cadena cinemática, es necesario usar las transformaciones homogéneas de traslaciones puras con respecto a los ejes x, y, z mostradas en la ecuaciones (2.1):

$$\mathrm{T_{z1}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{T_{z2}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{T_{z3}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Las matrices de transformaciones homogéneas de rotaciones puras con respecto a los ejes x, y, z están dadas por las ecuaciones (2.2):

$$\mathrm{T_{z4}}(\theta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta x & -s\theta x & 0 \\ 0 & s\theta x & \mathrm{c}\theta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{T_{z5}}(\theta y) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta y & 0 & s\theta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta y & 0 & c\theta y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T_{z6}}(\theta z) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta z & -s\theta z & 0 & 0 \\ s\theta z & c\theta z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

2.3 Generalidades de sistemas locales.

Para este análisis se definen sistemas de referencia locales colocados en distintos puntos del manipulador, los cuales se van generando uno a partir de otro mediante las trasformaciones necesarias y así definir las ecuaciones de lazo necesarias para la soluciones de las posiciones.

La Plataforma de Stewart estará montada sobre un móvil de acuerdo al trabajo planteado por Souza [11], y el sistema de referencia que lo representa (i_C, j_C, k_C), se genera con una serie de tres transformaciones de traslación con respecto a los ejes x, y, z, en ese orden, y tres trasformaciones de giro con respecto a los ejes z, x y nuevamente otro giro en z.

$$T_{OC} = T_{z1(xc)}T_{z2(yc)}T_{z3(zc)}T_{z6(\psi c)}T_{z4(\theta c)}T_{z6(\phi c)} \quad (2.3)$$

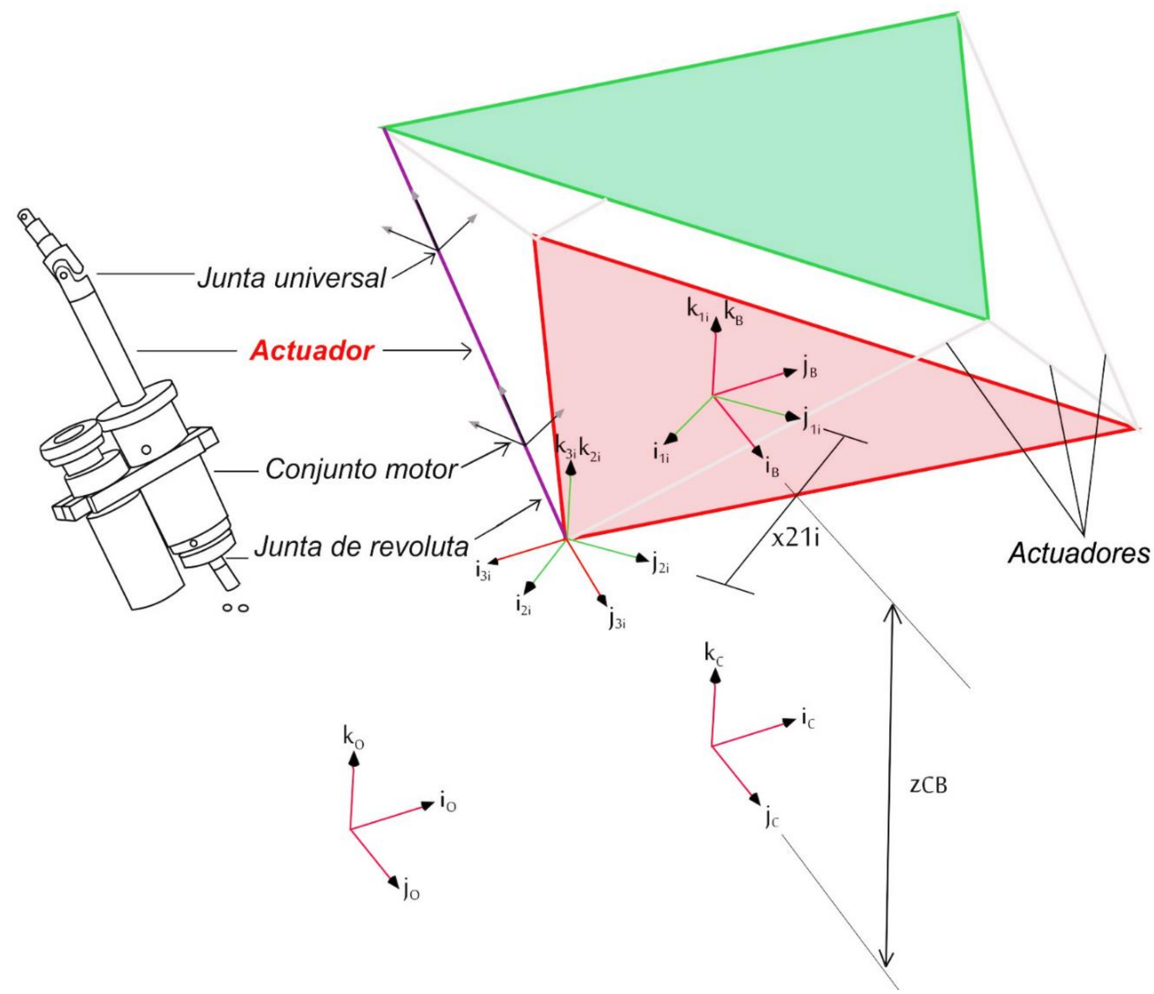


Figura 2.1 Sistemas de referencia del inercial al $3i$

En el esquema anterior, Figura 2.2, se realiza una transformación de traslación a lo largo del eje z para construir el sistema (i_B, j_B, k_B), en la plataforma fija de la Plataforma de Stewart.

$$T_{CB} = T_{z3(zCB)} \tag{2.4}$$

La secuencia de transformación del sistema inercial puede escribirse en forma simplificada de la siguiente manera:

$$T_{OB} = T_{OC}T_{CB} \tag{2.5}$$

Mediante la aplicación de un giro sobre z y una traslación en x se llega al sistema ubicado en el acoplamiento de la plataforma fija y la junta esférica (i_{2i}, j_{2i}, k_{2i}), Figura 2.2

$$T_{B2i} = T_{z6(\delta 1Bi)}T_{z1(x21i)} \tag{2.6}$$

Al construir el sistema $7i$ a partir del $2i$ hay una secuencia de tres transformaciones, dos rotaciones, una en torno a z, seguido de otra rotación con respecto a x, una traslación a lo largo del eje z genera el sistema $5i$, después el sistema 6i es generado a partir de una rotación en z.

El sistema 6i es generado debido a que hay una equivalencia entre la junta esférica y la combinación de una junta universal con una de revoluta unida a la plataforma fija como el diseño mostrado en el Trabajo de Souza [11]. La configuración es ideal para facilitar la ubicación de un sistema que coincida simétricamente con los ejes de giro de una junta universal, permitiendo observar la orientación inicial desde la cual se simplifica la medición de los ángulos variables de la junta universal al igual que el de la esférica, siendo el giro de revoluta equivalente al giro con respecto al eje del sistema 6i.

Para generar el sistema 7i se realiza una rotación en el eje z , este sistema está localizado en la junta esférica que proporciona tres grados de libertad que estrictamente son tres ángulos de orientación variable, dichos ángulos deben ser incluidos en las transformaciones así como los nuevos sistemas locales que éstos generan, Figura 2.3.

Las transformaciones para pasar del sistema $2i$ al $7i$ se muestran en las Figuras 2.2 y 2.3:

$$T_{27i} = T_{z6(\delta 32i)} T_{z4(\delta 43i)} T_{z3(z54i)} T_{z6(\delta 65i)} T_{z6(\theta 76i)} \tag{2.7}$$

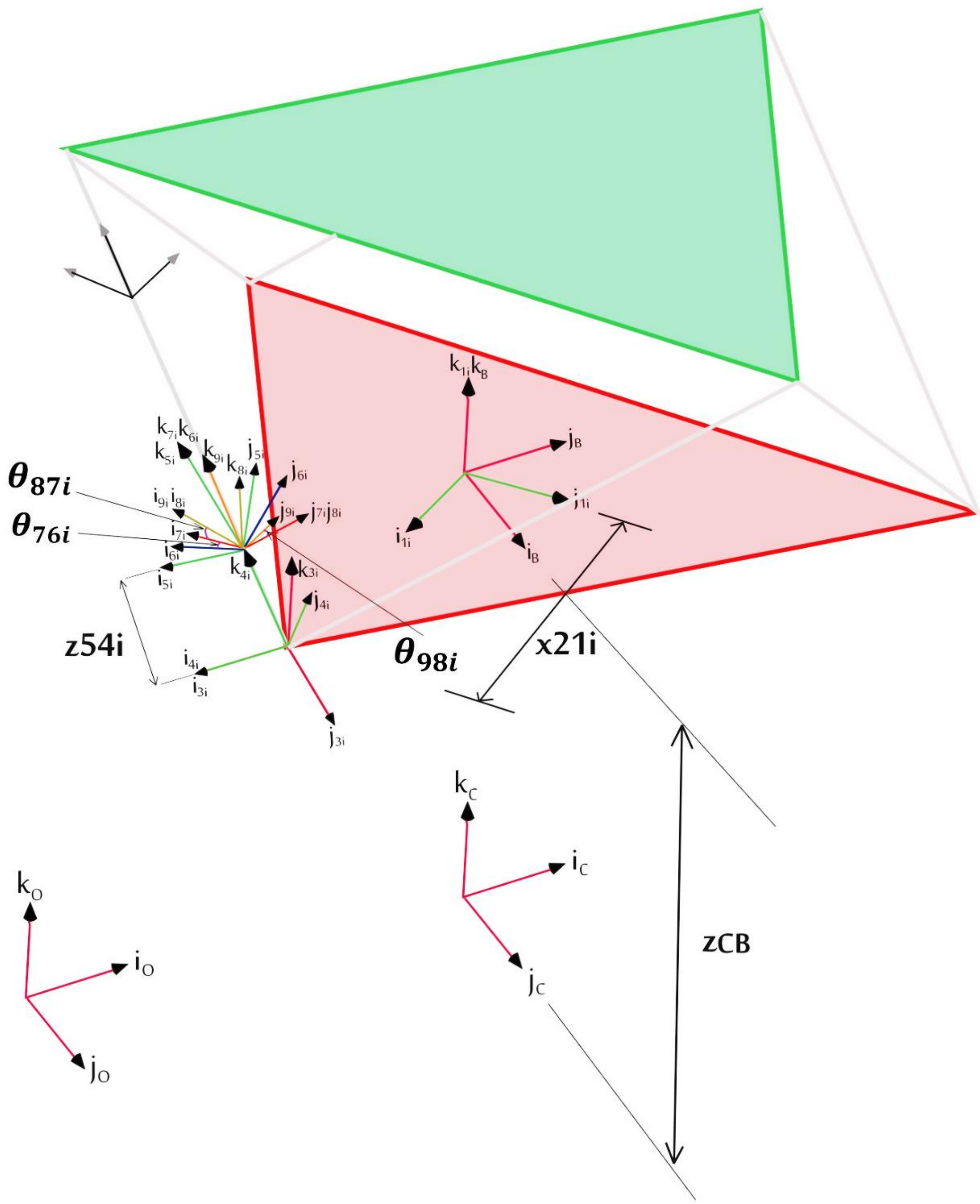


Figura 2.2 Sistemas de referencia del $4i$ al $9i$

Para pasar del sistema $7i$ hasta el $10i$, correspondiente al sistema ubicado al final del actuador, son de acuerdo a las siguientes transformaciones, un giro en y seguido del último giro variable en x proporcionado por los tres grados de libertad de la junta esférica y finalizando con un desplazamiento, también variable, debido a la longitud no constante del actuador en el eje z. Figura 2.3 y 2.4

$$T_{710i} = T_{z5(\theta 87i)} T_{z4(\theta 98i)} T_{z3(z109i)} \tag{2.8}$$

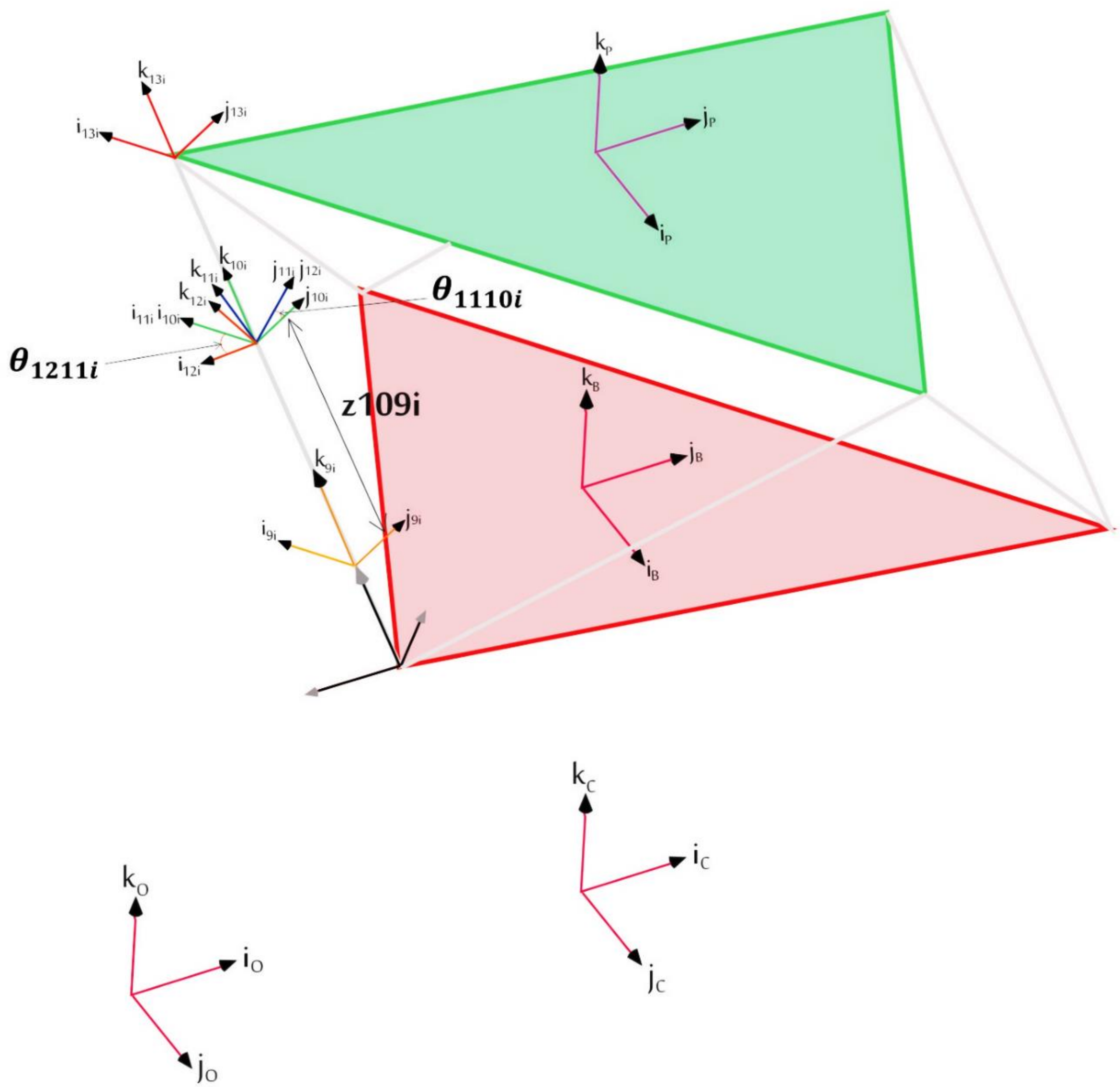


Figura 2.3 Sistemas de referencia del $9i$ al $13i$

Al final del actuador y a la altura del eje inferior de la junta universal se localiza el sistema $10i$ y para llegar al sistema $13i$ al final de la junta universal en la parte superior del manipulador, son necesarias dos rotaciones, primero una alrededor de x seguida de otra respecto al eje y, en donde ambas rotaciones son representadas por ángulos θ_{1110i} y θ_{1211i}, estas rotaciones son seguidas de una traslación de magnitud constante a lo largo del eje z como se muestra en las Figuras 2.4 y 2.5.

$$T_{1013i} = T_{z4(\theta 1110i)} T_{z5(\theta 1211i)} T_{z3(z1312i)} \quad (2.9)$$

Finalmente, se genera una ecuación de lazo, necesario para generar la base del sistema inercial que conduce a la placa superior del manipulador en el sistema (i_p, j_p, k_p),(T_{OP}) y entonces al sistema llegar al sistema $13i$ (T_{P18i}), esta seria de transformaciones se muestran en la Figura 2.5.

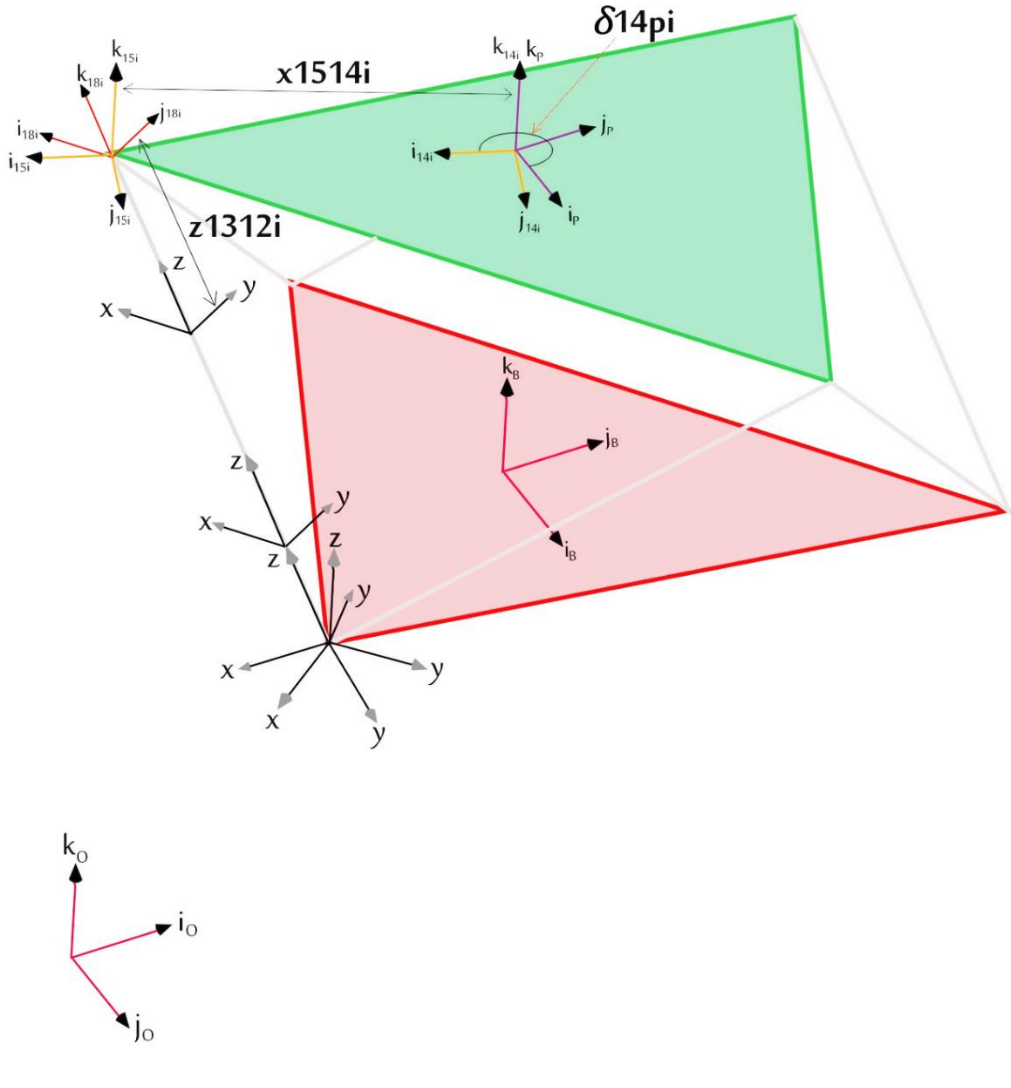


Figura 2.4 Sistemas de referencia del inercial al $18i$

A las ecuaciones que describen a (T_{OP}) debe agregarse la matriz phi, de esta forma se considera la rotación de la plataforma superior con respecto a un eje arbitrario que no había sido expresado en alguno de los sistemas locales mostrados en la Figura 2.5

$$T_{OP} = T_{z1(xp)}T_{z2(yp)}T_{z3(zp)}T_{z6(\psi)}M_{\phi,u} \qquad (2.10)$$

$$T_{P18i} = T_{z6(\delta 14pi)}T_{z1(x1514i)}T_{z6(\delta 1615i)}T_{z4(\delta 1716i)}T_{z6(\delta 1817i)} \qquad (2.11)$$

De tal forma que la ecuación de lazo queda de la siguiente forma:

$$T_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} = T_{OP}T_{P18i} \qquad (2.12)$$

Las incógnitas a determinar en la ecuación (2.12) son los ángulos de las juntas tanto esférica como universal, así como la longitud variable del actuador lineal:

$$\theta_{76i}, \theta_{87i}, \theta_{98i}, \theta_{1110i}\theta_{1211i}, z_{109i}$$

Con $i = 1,2,3,4,5,6$

De lo anterior debe entenderse que al tener seis incógnitas por cada una de las cadenas cinemáticas se tiene un total de 36 variables.

2.4 Generación de trayectoria.

De manera general, el objetivo de un manipulador o plataforma robótica es que siga una trayectoria deseada, con la finalidad de realizar una tarea determinada. Para esto se definen los puntos que conforman dicha trayectoria, considerando que el movimiento de un cuerpo en el espacio consiste de dos partes. Una trayectoria lineal o curva en el espacio que sigue un punto del cuerpo (el centro de masa de la plataforma superior del manipulador en éste caso) y la orientación angular del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de posición, velocidad y aceleración tanto lineal como angular y ser cumplidas en un tiempo definido previamente. A continuación se desarrolla la trayectoria lineal y la angular que se propone para la plataforma en función del tiempo.

Trayectoria Lineal.

La trayectoria propuesta a seguir por un punto del cuerpo es una línea recta en el espacio.

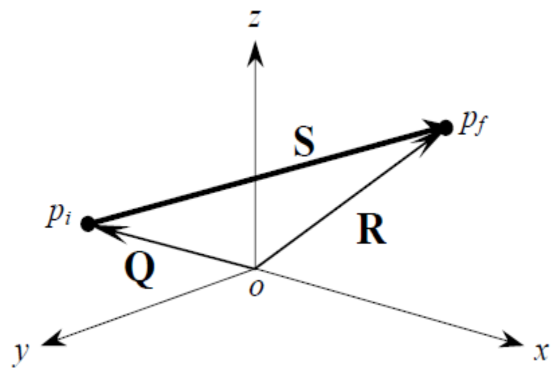


Figura 2.5 Recta en el espacio

La ecuación vectorial que define la recta en el espacio mostrada en la Figura 2.5 es:

$$\overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{Q}} + \overrightarrow{\mathbf{S}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{Q}} + s\overrightarrow{\mathbf{u}} \tag{2.13}$$

Donde *s* es la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{S}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ es el vector unitario que define la orientación de $\overrightarrow{\mathbf{S}}$. Para definir $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ en función del tiempo, se requiere que la magnitud *s* cambie con respecto al tiempo, es decir:

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathrm{t}) = \overrightarrow{\mathbf{Q}} + s(\mathrm{t})\overrightarrow{\mathbf{u}} \tag{2.14}$$

Las ecuaciones vectoriales de velocidad y aceleración se definen como la primera y segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación (2.14):

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathrm{t}) = \dot{s}(t)\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}(\mathrm{t}) = \ddot{s}(t)\overrightarrow{\mathbf{u}} \tag{2.15}$$

Ya que $\overrightarrow{\mathbf{Q}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ no varía respecto al tiempo, porque están definidos por puntos fijos en el espacio. La magnitud *s(t)* debe satisfacer condiciones iniciales y finales de posición, velocidad y aceleración, es decir debe satisfacer 6 condiciones, según se muestra en la Figura 2.6.

.

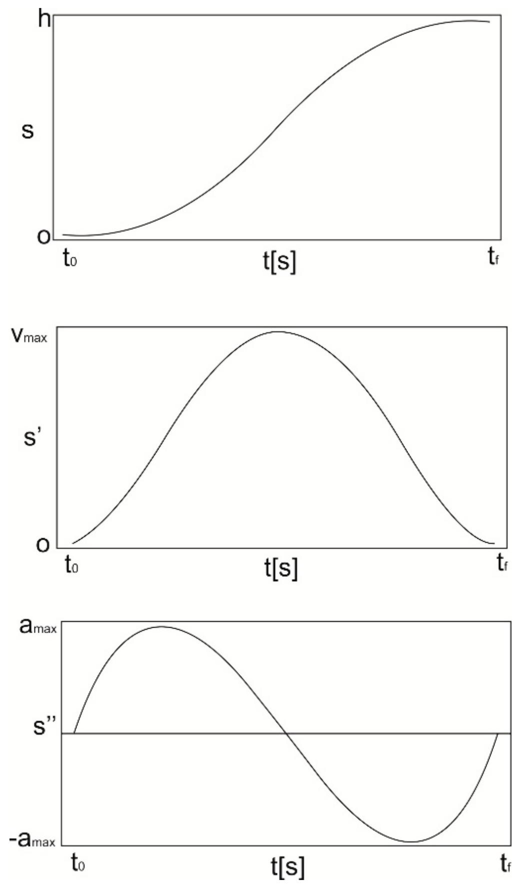


Figura 2.6 Condiciones iniciales.

La primera gráfica indica el cambio de magnitud del vector $\vec{\boldsymbol{S}}$, que irá variando desde 0 en un tiempo inicial t_0, hasta una posición correspondiente para un tiempo final t_f, donde los valores de tiempo t_0 y t_f los definimos de manera arbitraria y $d = \|\vec{\boldsymbol{S}}\|$.

La segunda gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector $\vec{\boldsymbol{S}}$ cambia respecto al tiempo. Es decir, es la rapidez con que realiza el traslado del punto inicial p_i al punto final p_f, para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f.

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez con que la magnitud del vector $\vec{\boldsymbol{S}}$ cambia respecto al tiempo, para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f.

La forma general de una función polinomial en función del tiempo es:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_5 t^5 \dots + a_n t^{\mathrm{n}} \qquad (2.16)$$

En donde los coeficientes a_{i}, con $i = 0, \dots, n$, son las incógnitas a determinar en el desarrollo de la ecuación polinomial.

Las condiciones de frontera observadas en las gráficas de la Figura 2.6 Son los únicos valores con los que se cuenta para determinar dichos coeficientes, y sabiendo que los coeficientes estarán presentes en la primera y segunda derivada del polinomio, es posible resolver un sistema de ecuaciones para determinarlos.

El grado del polinomio depende entonces de las condiciones de frontera siendo el grado del polinomio y k las condiciones de frontera se tiene que:

$$n = k - 1 \qquad (2.17)$$

Quedando entonces para este caso y las seis condiciones de frontera con las que se cuenta $(k = 6)$.

$$n = 6 - 1$$

$$n = 5 \qquad (2.18)$$

Entonces para satisfacer las 6 condiciones, se empleara un polinomio de quinto grado, ya que este cuenta con 6 coeficientes a determinar. Por lo que pueden escribirse los polinomios para la posición, velocidad y aceleración de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Debido a que existen condiciones iniciales y finales mostradas en la Figura 2.6, para $t = t_0 = 0$ se tiene las 3 condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \mathrm{s}(t_0) &= \mathrm{s}(0) = 0 \\ \dot{s}(t_0) &= \dot{s}(0) = 0 \\ \ddot{s}(t_0) &= \ddot{s}(0) = 0 \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Al sustituir los resultados de las ecuaciones (2.20) en las ecuaciones (2.19) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
s(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 + a_5(0)^5 \\
\dot{s}(0) &= a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + 4a_4(0)^3 + 5a_5(0)^4 \\
\ddot{s}(0) &= 2a_2 + 6a_3(0) + 12a_4(0)^2 + 20a_5(0)^3
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Simplificando los tres primeros coeficientes son:

$$
a_0 = 0 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = 0 \tag{2.22}
$$

A partir de la Figura 2.6 y repitiendo el proceso para $t = t_f$ se tienen las tres condiciones finales:

$$
\begin{aligned}
s(t_\mathrm{f}) &= d = \|p_\mathrm{f} - p_\mathrm{i}\| \\
\dot{s}(t_\mathrm{f}) &= 0 \\
\ddot{s}(t_\mathrm{f}) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Donde $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $p_f = (x_f, y_f, z_f)$, son las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria respectivamente, la magnitud de la diferencia entre ellos, representa la distancia *d* que necesitamos recorrer en la línea recta. Al sustituir las ecuaciones. (2.22) y (2.23) en las ecuaciones (2.19) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\|p_\mathrm{f} - p_\mathrm{i}\| &= a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\
0 &= 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\
0 &= 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

El sistema de ecuaciones puede ser expresada de la siguiente manera, en su forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \|p_\mathrm{f} - p_\mathrm{i}\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{2.25}
$$

Al resolver el sistema de la ecuación (2.25) se obtiene los tres últimos coeficientes:

$$a_3 = 10\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^3}$$

$$a_4 = -15\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^4}$$

$$a_5 = 6\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^5}$$

(2.26)

Sustituyendo las ecuaciones (2.22) y (2.26) en la ecuación (2.19):

$$\mathrm{s}(t) = 10\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^3}t^3 - 15\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^4}t^4 + 6\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^5}t^5$$

$$\dot{s}(t) = 30\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^3}t^2 - 60\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^4}t^3 + 30\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^4}t^4$$

$$\ddot{s}(t) = 60\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^3}t + 180\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^4}t^2 + 120\frac{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}{t_f^4}t^3$$

Finalmente, factorizando se obtienen las ecuaciones que representan el cambio de la magnitud de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo:

$$s(t) = \|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|\left[10\frac{t^3}{t_f^3} - 15\frac{t^4}{t_f^4} + 6\frac{t^5}{t_f^4}\right]$$

$$\dot{s}(t) = \|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|\left[30\frac{t^2}{t_f^3} - 60\frac{t^3}{t_f^4} + 30\frac{t^4}{t_f^4}\right]$$

$$\ddot{s}(t) = \|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|\left[60\frac{t}{t_f^3} + 180\frac{t^2}{t_f^4} + 120\frac{t^3}{t_f^4}\right]$$

(2.27)

Reescribiendo las ecuaciones (2.14) y (2.15) en función de los puntos de la recta:

$$\vec{\mathbf{R}}(\mathrm{t}) = \vec{\mathbf{Q}} + \mathrm{s}(\mathrm{t})\vec{\mathbf{u}} = (p_{\mathrm{i}} - 0) + \mathrm{s}(\mathrm{t})\frac{(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}})}{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}$$

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathrm{t}) = \dot{s}(t)\vec{\mathrm{u}} = \dot{s}\frac{(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}})}{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\mathrm{t}) = \ddot{s}(t)\vec{\mathbf{u}} = \ddot{s}\frac{(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}})}{\|p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}\|}$$

(2.28)

Sustituyendo las ecuaciones (2.27) en las ecuaciones (2.28), se obtiene finalmente la ecuación vectorial de posición, la ecuación de velocidad y la de aceleración que debe seguir la plataforma móvil:

$$\vec{\mathbf{R}}(\mathrm{t}) = p_{\mathrm{i}} + \left[10\frac{t^3}{t_f^3} - 15\frac{t^4}{t_f^4} + 6\frac{t^5}{t_f^4}\right](p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}})$$

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathrm{t}) = \left[30\frac{t^2}{t_f^3} - 60\frac{t^3}{t_f^4} + 30\frac{t^4}{t_f^4}\right](p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}})$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\mathrm{t}) = \left[60\frac{t}{t_f^3} + 180\frac{t^2}{t_f^4} + 120\frac{t^3}{t_f^4}\right](p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}})$$

(2.29)

Orientación angular

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, en el entendido de que para este caso, solo se desea pasar de valores iniciales a finales, para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio.

Esto conducirá a las siguientes ecuaciones:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{t}) = \beta_{\mathrm{i}} + \left[10\frac{t^3}{t_f^3} - 15\frac{t^4}{t_f^4} + 6\frac{t^5}{t_f^4}\right](\beta_{\mathrm{f}} - \beta_{\mathrm{i}})$$

$$\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}}(\mathrm{t}) = \left[30\frac{t^2}{t_f^3} - 60\frac{t^3}{t_f^4} + 30\frac{t^4}{t_f^4}\right](\beta_{\mathrm{f}} - \beta_{\mathrm{i}})$$

$$\ddot{\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}}(\mathrm{t}) = \left[60\frac{t}{t_f^3} + 180\frac{t^2}{t_f^4} + 120\frac{t^3}{t_f^4}\right](\beta_{\mathrm{f}} - \beta_{\mathrm{i}})$$

(2.30)

Donde el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}} = (\psi, \theta, \varphi)$. De la misma manera $\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{i}} = (\psi_i, \theta_i, \varphi_i)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{f}} = (\psi_f, \theta_{f,} \varphi_f)$, que se refieren a los valores iniciales y finales respectivamente.

2.5 Ecuaciones de posición.

$$T_{OC} = T_{z1(xc)}T_{z2(yc)}T_{z3(zc)}T_{z6(\psi c)}T_{z4(\theta c)}T_{z6(\phi c)} \quad (2.3)$$

$$T_{CB} = T_{z3(zCB)} \quad (2.4)$$

$$T_{OB} = T_{OC}T_{CB} \quad (2.5)$$

$$T_{B2i} = T_{z6(\delta 1Bi)}T_{z1(x21i)} \quad (2.6)$$

$$T_{27i} = T_{z6(\delta 32i)}T_{z4(\delta 43i)}T_{z3(z54i)}T_{z6(\delta 65i)}T_{z6(\theta 76i)} \quad (2.7)$$

$$T_{710i} = T_{z5(\theta 87i)}T_{z4(\theta 98i)}T_{z3(z109i)} \quad (2.8)$$

$$T_{1013i} = T_{z4(\theta 1110i)}T_{z5(\theta 1211i)}T_{z3(z1312i)} \quad (2.9)$$

$$T_{OP} = T_{z1(xp)}T_{z2(yp)}T_{z3(zp)}T_{z6(\psi)}M_{\phi,u} \quad (2.10)$$

$$T_{P18i} = T_{z6(\delta 14pi)}T_{z1(x1514i)}T_{z6(\delta 1615i)}T_{z4(\delta 1716i)}T_{z6(\delta 1817i)} \quad (2.11)$$

$$LI = T_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} \quad (2.31)$$

$$LD = T_{OP}T_{P18i} \quad (2.32)$$

2.6 Ecuaciones de velocidad.

$$dT_{OC} = T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}dT_{z6[\psi C]}T_{z4[\theta C]}T_{z6[\phi C]} + T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}T_{z6[\psi C]}dT_{z4[\theta C]}T_{z6[\phi C]} + T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}T_{z6[\psi C]}T_{z4[\theta C]}dT_{z6[\phi C]} \quad (2.33)$$

$$dT_{OB} = dT_{OC}T_{z3[zBC]} + T_{OC}dT_{z3[zBC]} \quad (2.34)$$

$$dT_{B2i} = [0]_{4x4} \quad (2.35)$$

$$dT_{27i} = T_{z6[\delta 32i]}T_{z4[\delta 43i]}T_{z3[z54i]}T_{z6[\delta 65i]}dT_{z6[\theta 76i]} \quad (2.36)$$

$$dT_{710i} = dT_{z5[\theta 87i]}T_{z4[\theta 98i]}T_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]}dT_{z4[\theta 98i]}T_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]}T_{z4[\theta 98i]}dT_{z3[z109i]} \quad (2.37)$$

$$dT_{1013i} = dT_{z4[\theta 1110i]}T_{z5[\theta 1211i]}T_{z3[z1312i]} + T_{z4[\theta 1110i]}dT_{z5[\theta 1211i]}T_{z3[z1312i]} \quad (2.38)$$

$$dT_{OP} = dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} + T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_{\phi} + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_{\phi} + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_{\phi}M_{\phi} \quad (2.39)$$

$$dT_{P18i} = [0]_{4x4} \quad (2.40)$$

$$dLI = dT_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + T_{OB}dT_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}dT_{27i}T_{710i}T_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}T_{27i}dT_{710i}T_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}dT_{1013i} \quad (2.41)$$

$$dLD = dT_{OP}T_{P18i} + T_{OP}dT_{P18i} \quad (2.42)$$

2.7 Ecuaciones de aceleración.

$$ddT_{OC} = T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}ddT_{z6[\psi C]}T_{z4[\theta C]}T_{z6[\phi C]} + T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}T_{z6[\psi C]}ddT_{z4[\theta C]}T_{z6[\phi C]} + T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}T_{z6[\psi C]}T_{z4[\theta C]}ddT_{z6[\phi C]} + 2T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}dT_{z6[\psi C]}dT_{z4[\theta C]}T_{z6[\phi C]} + 2T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}dT_{z6[\psi C]}T_{z4[\theta C]}dT_{z6[\phi C]} + 2T_{z1[xC]}T_{z2[yC]}T_{z3[zC]}T_{z6[\psi C]}dT_{z4[\theta C]}dT_{z6[\phi C]} \quad (2.43)$$

$$ddT_{OB} = ddT_{BC}T_{z3[zBC]} + 2dT_{BC}dT_{z3[zBC]} + T_{OB}ddT_{z3[zC]} \quad (2.44)$$

$$ddT_{B2i} = [0]_{4x4} \quad (2.45)$$

$$ddT_{27i} = T_{z6[\delta 32i]}T_{z4[\delta 43i]}T_{z3[z54i]}T_{z6[\delta 65i]}ddT_{z6[\theta 76i]} \quad (2.46)$$

$$ddT_{710i} = ddT_{z5[\theta 87i]}T_{z4[\theta 98i]}T_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]}ddT_{z4[\theta 98i]}T_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]}T_{z4[\theta 98i]}ddT_{z3[z109i]} + T_{z5[\theta 87i]}T_{z4[\theta 98i]}ddT_{z3[z109i]} + 2dT_{z5[\theta 87i]}dT_{z4[\theta 98i]}T_{z3[z109i]} + 2dT_{z5[\theta 87i]}T_{z4[\theta 98i]}dT_{z3[z109i]} + 2T_{z5[\theta 87i]}dT_{z4[\theta 98i]}dT_{z3[z109i]} \quad (2.47)$$

$$ddT_{1013i} = ddT_{z4[\theta 1110i]}T_{z5[\theta 1211i]}T_{z3[z1312i]} + 2dT_{z4[\theta 1110i]}dT_{z5[\theta 1211i]}T_{z3[z1312i]} + T_{z4[\theta 1110i]}ddT_{z5[\theta 1211i]}T_{z3[z1312i]} \quad (2.48)$$

$$ddT_{OP} = ddT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_\phi + T_{z1[xp]}ddT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_\phi + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}ddT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_\phi + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}ddT_{z6[\psi]}M_\phi + T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}A_\phi M_\phi + 2dT_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_\phi + 2dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_\phi + 2dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_\phi + 2dT_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_\phi M_\phi + 2T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}M_\phi + 2T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_\phi + 2T_{z1[xp]}dT_{z2[yp]}T_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_\phi M_\phi + 2T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}M_\phi + 2T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}dT_{z3[zp]}T_{z6[\psi]}W_\phi M_\phi + 2T_{z1[xp]}T_{z2[yp]}T_{z3[zp]}dT_{z6[\psi]}W_\phi M_\phi \quad (2.49)$$

$$ddT_{P18i} = [0]_{4x4} \quad (2.50)$$

$$ddLI = ddT_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}dT_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}T_{B2i}dT_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}T_{B2i}T_{27i}dT_{710i}T_{1013i} + 2dT_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}dT_{1013i} + T_{OB}ddT_{B2i}T_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}dT_{B2i}dT_{27i}T_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}dT_{B2i}T_{27i}dT_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}dT_{B2i}T_{27i}T_{710i}dT_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}T_{27i}ddT_{710i}T_{1013i} + 2T_{OB}T_{B2i}T_{27i}dT_{710i}dT_{1013i} + T_{OB}T_{B2i}T_{27i}T_{710i}ddT_{1013i} \quad (2.51)$$

$$ddLD = ddT_{OP}T_{P18i} + 2dT_{OP}.dT_{P18i} + T_{OP}ddT_{P18i} \quad (2.52)$$

2.8 Solución numérica.

Para la solución de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración se implementa una solución numérica ofrecida por el software de desarrollo matemático llamado Mathematica en su versión 9, permitiéndonos evitar una laboriosa solución analítica o algebraica.

Debido a que la plataforma de Stewart, es un manipulador paralelo con actuadores lineales en una cadena cerrada, cuenta con una configuración completamente predecible al estar éstos totalmente contraídos, lo que permite determinar fácilmente las condiciones iniciales del manipulador, como lo son los: ángulos, posiciones y distancias relativas entre eslabones y articulaciones, a diferencia de lo que se presenta en los manipuladores enteramente seriales.

Con estas condiciones los sistemas de ecuaciones obtenidos en la posición, velocidad y aceleración del manipulador fueron obtenidas mediante el software ya mencionado.

Comandos implementados en el Software de Mathematica 9.

FindRoot

Se utiliza para la posición ya que el sistema es no lineal y se específica un valor inicial para cada una de las variables, dicha instrucción busca una solución utilizando métodos de Newton.

Solve

Se usa para el caso de la velocidad y la aceleración presentan sistemas lineales (ecuaciones polinomiales de primer grado). El algoritmo de esta instrucción no requiere dar valores iniciales.

A continuación en la tabla 2.1 se muestran los valores de ángulos y longitudes constantes de cada cadena cinemática que conforma a la Plataforma de Stewart (PS).

Tabla 2.1. Parámetros de cada una de las cadenas cinemáticas de la PS

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
δ_{1Bi}	300°	180°	60°	-60°	180°	60°
X_{21i} (cm)	15.01	15.01	15.01	15.01	15.01	15.01
δ_{32i}	-30°	30	-210°	30°	30°	210°
δ_{43i}	55°	-55°	-55°	-55°	55°	55°
Z_{54i} (cm)	5	5	5	5	5	5
δ_{65i}	45°	135°	45°	-45°	-135°	-45°
Z_{1312i} (cm)	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8
δ_{14pi}	240°	240°	0°	0°	120°	120°
X_{1514i} (cm)	15.01	15.01	15.01	15.01	15.01	15.01
δ_{1615i}	30°	-30°	210°	-30°	30°	-210°
δ_{1716i}	55°	-55°	-55°	-55°	55°	55°
δ_{1817i}	45°	135°	45°	-45°	-135°	-45°

2.9 Resultados.

Anteriormente en la tesis de Francisco [2], se trazó una trayectoria que comprueba que se puede confiar en los resultados para trayectorias más complejas. Para nuestro caso valores iniciales y finales para las posiciones y ángulos son:

$\boldsymbol{p_i} = \{0, 0, 0.1061\}m,\ \boldsymbol{p_f} = \{-0.055, 0,\ 0.1471\}m,\ \boldsymbol{\beta_i}\{0,0,0\},\ \boldsymbol{\beta_f}\{0, -17, 0\}$

En las imágenes de la Figura 2.7 se muestran las gráficas de las posiciones, velocidades y aceleraciones del actuador. El resto de los resultados para esta misma trayectoria se encuentran en el apéndice A.

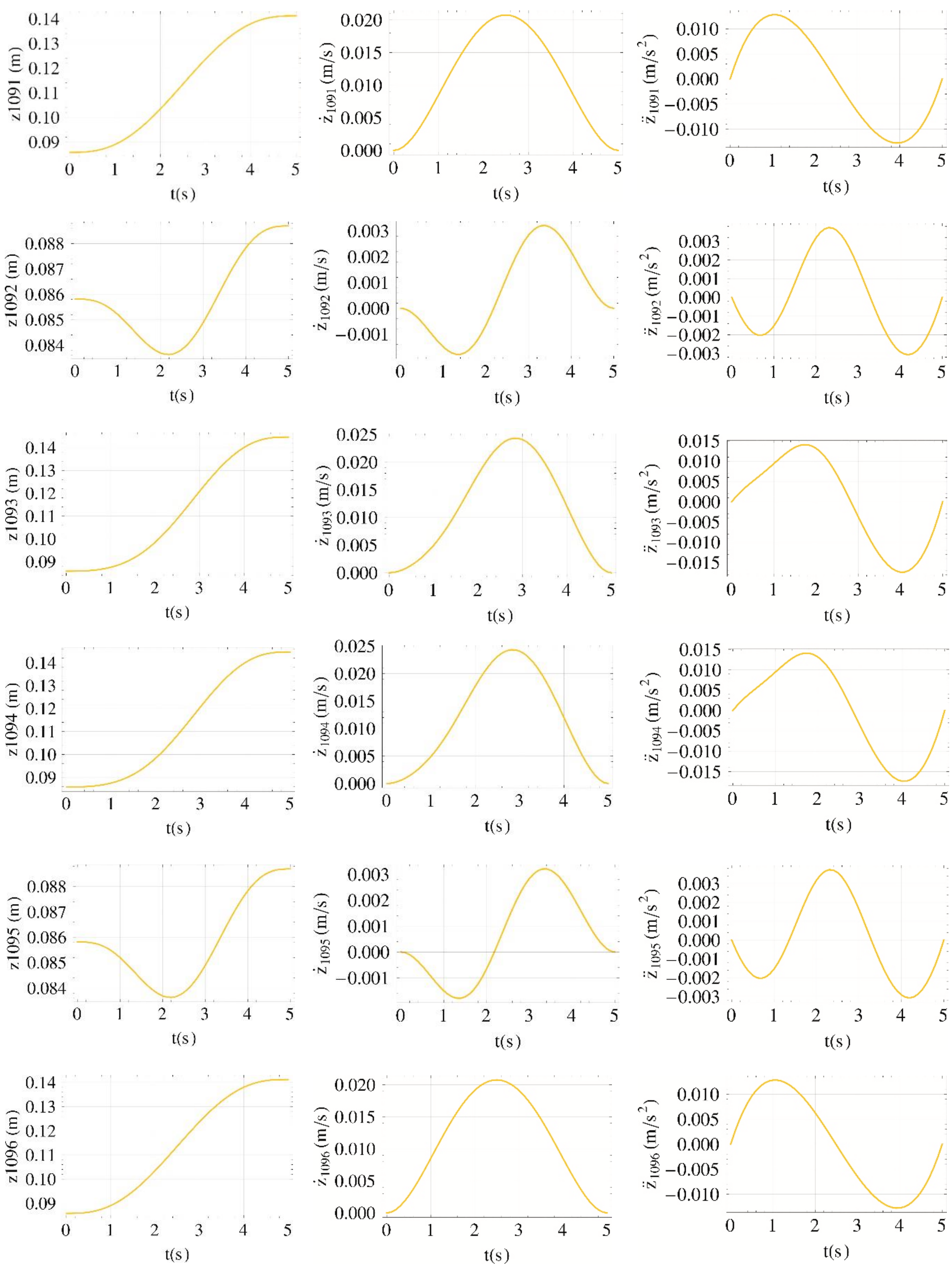


Figura 2.7 Gráficas de posición, velocidad y aceleración de los actuadores.

Las trayectorias mostradas en la figura 2.7, confirman que las ecuaciones obtenidas coinciden con la simetría mencionada entre las cadenas cinemáticas del manipulador y se puede notar que la trayectoria en posición:

$$z_{1091} = z_{1096} \qquad z_{1092} = z_{1095} \qquad z_{1093} = z_{1094}$$

Asi mismo para la velocidad y aceleracion.

Haciendo el compendio de las trayectorias para posicion, velocidad y aceleracion se tienen las figuras 2.8, 2.9 y 2.10, en las que podemos observar lo mencionado anteriormente.

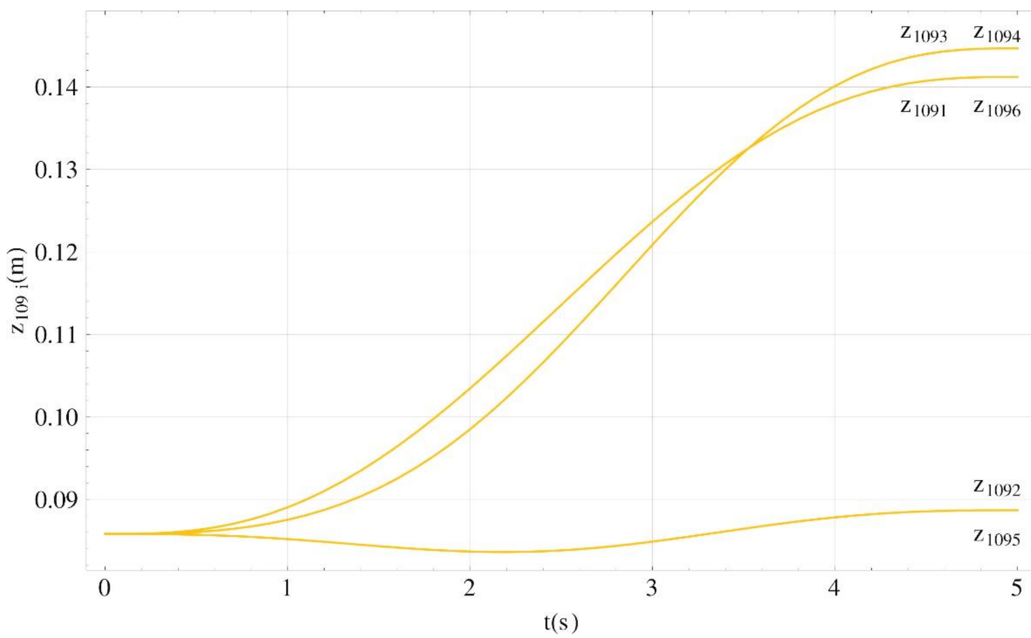


Figura 2.8 Resultados de z_{109i}

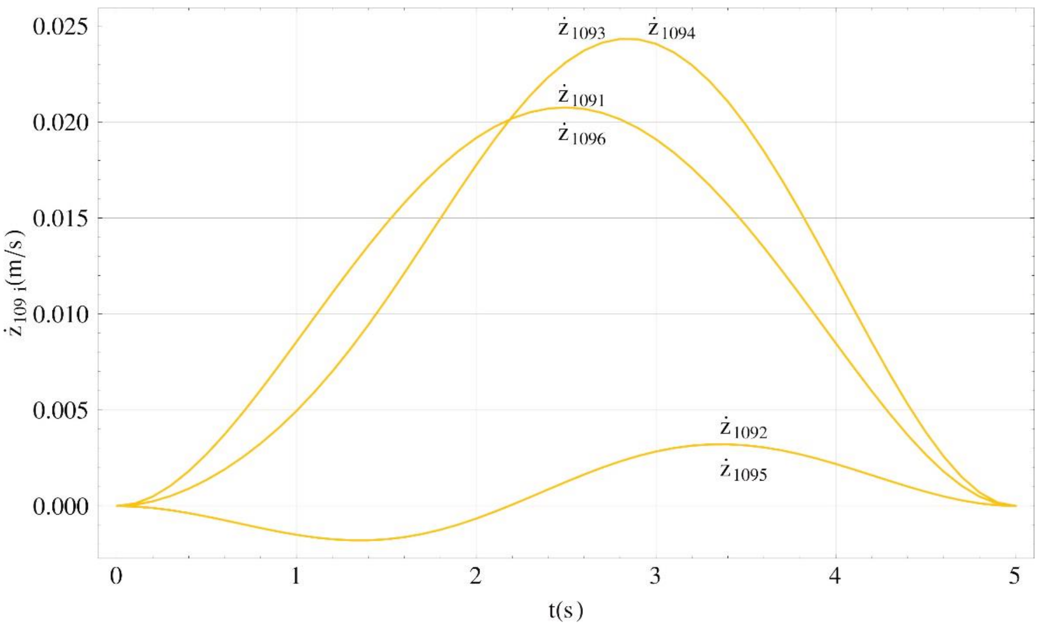


Figura 2.9 Resultados de $\dot{z}_{109i}$

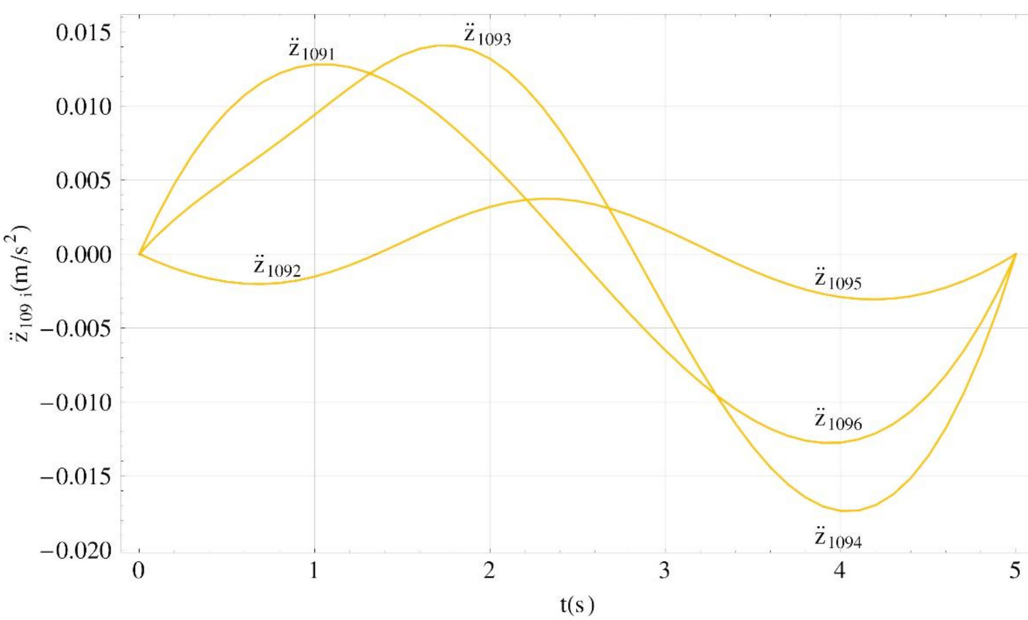


Figura 2.10 Resultados de $\ddot{z}_{109i}$

Capítulo 3

Momentos de Inercia y Cinemática de los Centros de Gravedad

3.1 Introducción.

En este capítulo se realiza la determinación de los momentos de inercia, así como el planteamiento de las ecuaciones cinemáticas del robot hexa, para definir las velocidades y aceleraciones utilizando la representación vectorial. Dicho proceso se realizará en cada uno de los cuerpos.

Debido a la simetría de las cadenas cinemáticas del manipulador se estudiará una sola como se muestra en la Figura 3.1 donde se puede observar cada uno de los nombres de los cuerpos del manipulador.

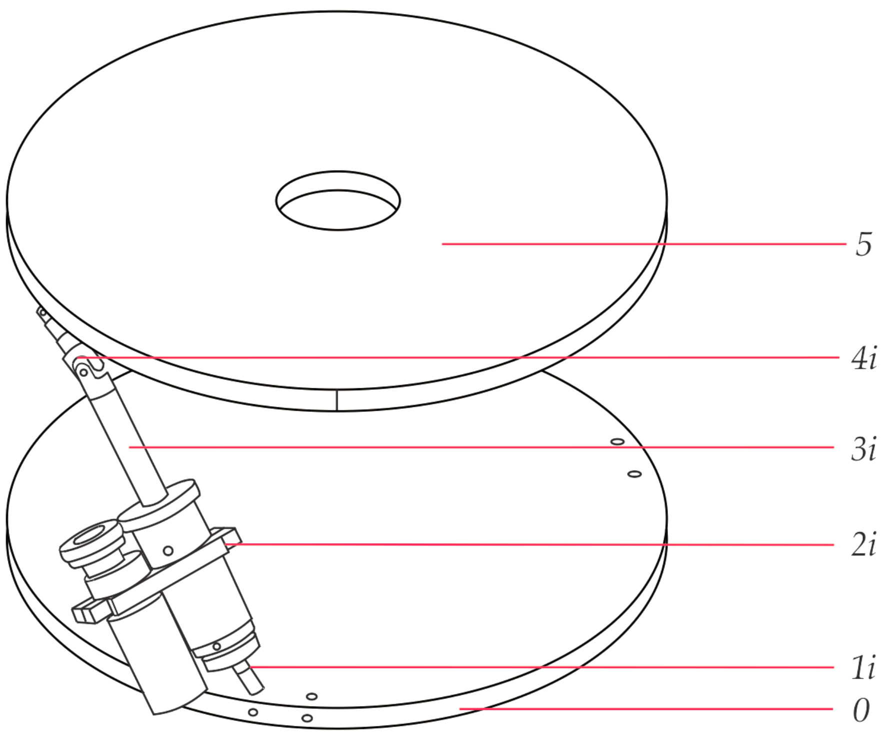


Figura 3.1 Configuración de la plataforma 6 UPS

3.2 Momentos de Inercia.

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un cuerpo a aceleraciones angulares. [12].
Para el análisis dinámico es necesaria la determinación de los momentos de inercia de aquellos cuerpos que conforman al manipulador, con masa suficiente para influir en el comportamiento del mecanismo [2].

Para ello se implementó tres métodos: teórica, experimental y a través de un software de CAD (Solid Works). El modelo en estudio es un prototipo físico (Figura 3.1), por ello se utilizó estos tres métodos. Algunas de las piezas tienen una geometría compleja, por tanto, determinar el momento de inercia de éstas resulta difícil y que puede presentar errores, los cuales se van sumando entre mayor sea el número de ellas, debido a ello y a las características físicas de cada elemento, fue el método que se considera para el cálculo de los momentos de inercia.

3.3 Método experimental.

El método empleado para la determinación de los momentos de inercia es un método experimental expuesto detalladamente en el trabajo “Determination of an irregular object’s moment of inertia” [13].

Dicho experimento ha sido escogido ya que permite determinar los momentos de inercia con respecto al centro de masa de un objeto compuesto y no homogéneo, como es el caso de los motores del robot.

La Configuración original del dispositivo de prueba de acuerdo a la Figura 3.2 consiste de una plataforma superior (4) paralela a una inferior (2). La plataforma superior fijada al armazón de acero (3) cuenta con un fotómetro (7) y un medidor de fuerza (5) que para estas pruebas no fueron requeridos, en ésta misma se encuentran unas armellas (6) ubicadas en una circunferencia de radio igual a la que contiene a los agujeros de la plataforma inferior, o péndulo si se prefiere.

La plataforma inferior que contiene al objeto está hecha de triplay de 40 centímetros de diámetro, y una masa de poco más de 100 gramos y está unida a la plataforma superior por medio de tres hilos delgados (1) de masa despreciable de 2 metros de longitud.

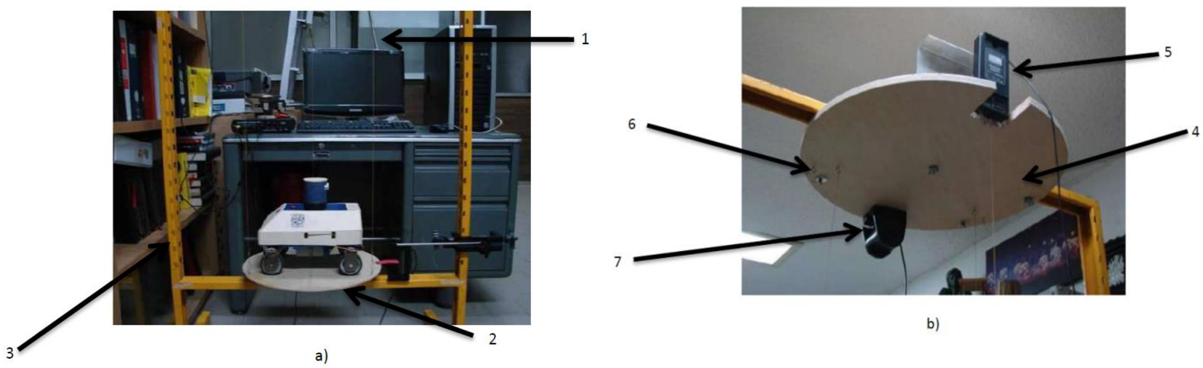


Figura 3.2 (a) Elementos de la plataforma superior, (b) Elementos de la plataforma inferior.

Para efecto de las pruebas realizadas a los componentes de la plataforma de Stewart en estudio, se tuvieron varias consideraciones, de acuerdo a lo descrito por el autor del artículo, y en la trabajo llamado “Análisis Dinámico de una plataforma de Stewart 6 UPS” [2].

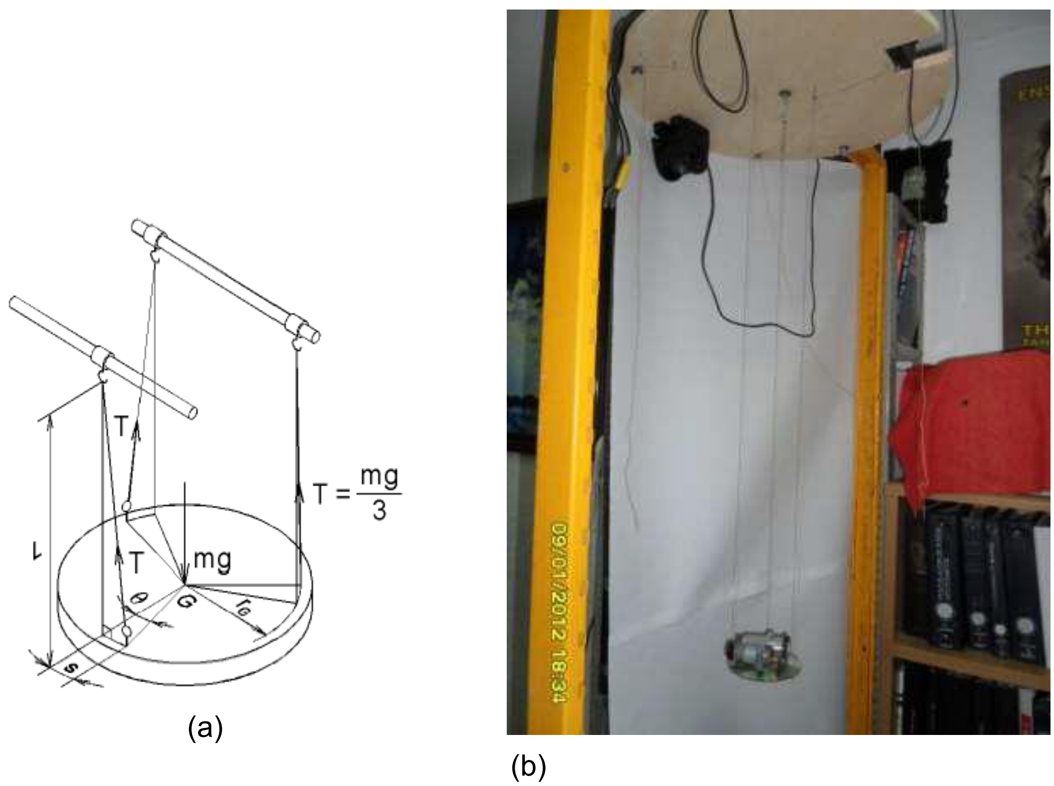


Figura 3.3 (a) Fotografía real del dispositivo después de las modificaciones. (b) Diagrama de cuerpo libre del dispositivo.

El experimento se realiza de la siguiente forma:

- Se coloca el cuerpo sobre la plataforma inferior haciendo coincidir su centro de masa con el centro de la base
- Se hace girar manualmente la plataforma inferior respecto a la vertical un ángulo, Figura 3.3 b), para posteriormente soltarla y hacer que esta oscile de tal forma que se pueda calcular su periodo.

Con el dato de periodo, la longitud de la cuerda del péndulo, la distancia del centro de la plataforma a la unión del hilo y la plataforma, así como el momento de inercia de la plataforma inferior, se determina el momento de inercia de la pieza en estudio.

En base a esto de realizaron los análisis teóricos, experimentales y a través del software de CAD para los cuerpos que conforman la Plataforma de Stewart.

3.4 Calculo de los Momentos de Inercia para los Cuerpos C_{2i}, C_{3i}, C_0, C_5.

Debido a que la masa del cuerpo C_{1i} es despreciada al compararla con la de la plataforma móvil (cuerpo C_5), este caso se repite con el cuerpo C_{4i}. Ante ello se buscó comprobar si el método experimental era capaz de determinar fiablemente los momentos de inercia para objetos con masas pequeñas o bien, menores a 150g. Por lo que de acuerdo al autor, se realizaron modificaciones a la plataforma y se diseñó una nueva para dichos objetos y poder seguir manteniendo la relación de 10:1 entre la masa del objeto y la plataforma. Para este fin se realizó un análisis a una objeto regular Figura 3.4, en donde los datos obtenidos mostraron ser incongruentes [2] en relación a los parámetros de error que maneja el autor del artículo, como se puede ver en la Tabla 3.1:

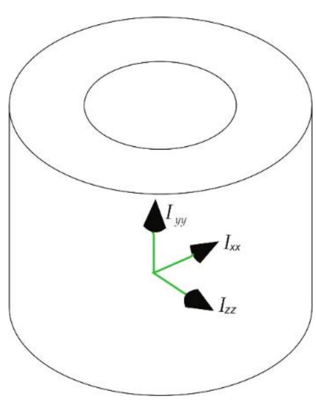
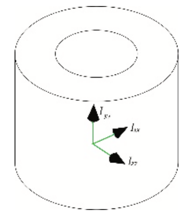


Figura 3.4 Cilindro hueco de bronce.

Tabla 3.1 Determinación de momento de inercia Cilindro hueco de bronce.

	Cilindro hueco de bronce.		
Método.	Software CAD	0.00000500 kg·m^2	
	Experimental	0.00003984 kg·m^2	

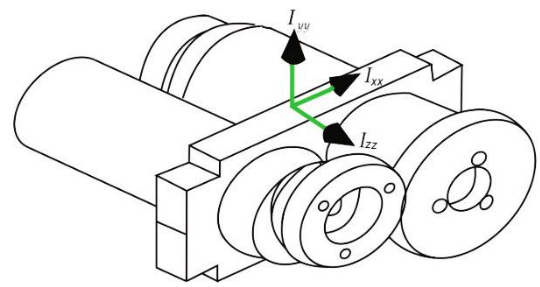
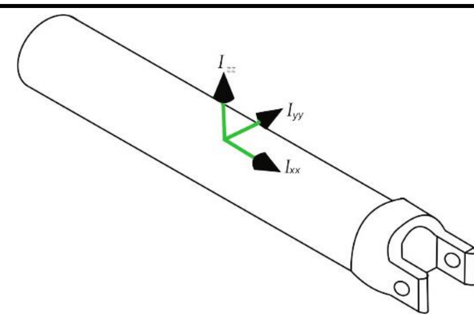
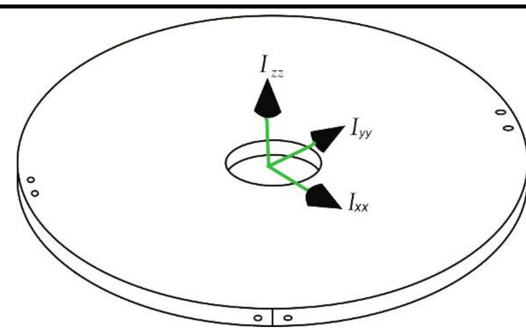
Error de 696.8 % que es inaceptable.

Para el caso del cuerpo C_{2i} (Conjunto Motor) se considera el método experimental, debido a que presenta una geometría irregular y esto complica el realizar un cálculo de forma teórica y por el Software CAD, por ello se procede de acuerdo a los pasos explicados en la sección 3.3 a calcular los momentos de inercia y se obtienen los datos mostrados en la Tabla 3.2.

Para el cuerpo C_{3i} (Conjunto Actuador) se realiza un análisis por medio del Software CAD, a pesar de que el tornillo es en realidad una forma compleja por la cuerda de éste y las piezas pequeñas que están unidas a él, puede ser idealizado para fines prácticos como un cilindro regular y homogéneo. Los momentos de inercia calculados se muestran la Tabla 3.2.

Y finalmente para los cuerpos C_0, C_5 (Plataforma inferior y superior) el cálculo de los momentos de inercia se realizó analíticamente despreciando pequeñas perforaciones hechas en ellas para el uso de prisioneros que detienen a los cuerpos C_{1i} y C_{4i} en la plataforma inferior y superior respectivamente. El resultado se muestra en la Tabla 3.2. El análisis de cada cuerpo se puede ver con mayor detalle en la tesis Titulada: Análisis Cinemático de una Plataforma de Stewart 6UPS [2]. Estos datos se implementaran para el análisis de la Plataforma en el análisis Euler-Lagrange.

Tabla 3.2 Determinación de momento de inercia de cada cuerpo.

Método.	Experimental.	Cuerpo C_{2i} Conjunto Motor.		
				
		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
		0.000038905 kg·m^2	0.000298195 kg·m^2	0.000115561 kg·m^2
	Software CAD.	Cuerpo C_{3i} Conjunto Actuador.		
				
		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
		0.00000162 kg·m^2	0.00004712 kg·m^2	0.00004707 kg·m^2
	Analítico.	Cuerpo C_0 y C_5 Plataforma superior e inferior		
				
		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
		0.012909 kg·m^2	0.012909 kg·m^2	0.025818 kg·m^2

3.5 Cinemática de los Centros de Gravedad.

El objetivo del planteamiento de ecuaciones cinemáticas, es definir las velocidades y aceleraciones utilizando la representación vectorial, el análisis se planteado para cada cuerpo de acuerdo a lo que se muestra en la figura 3.1 y 3.5.

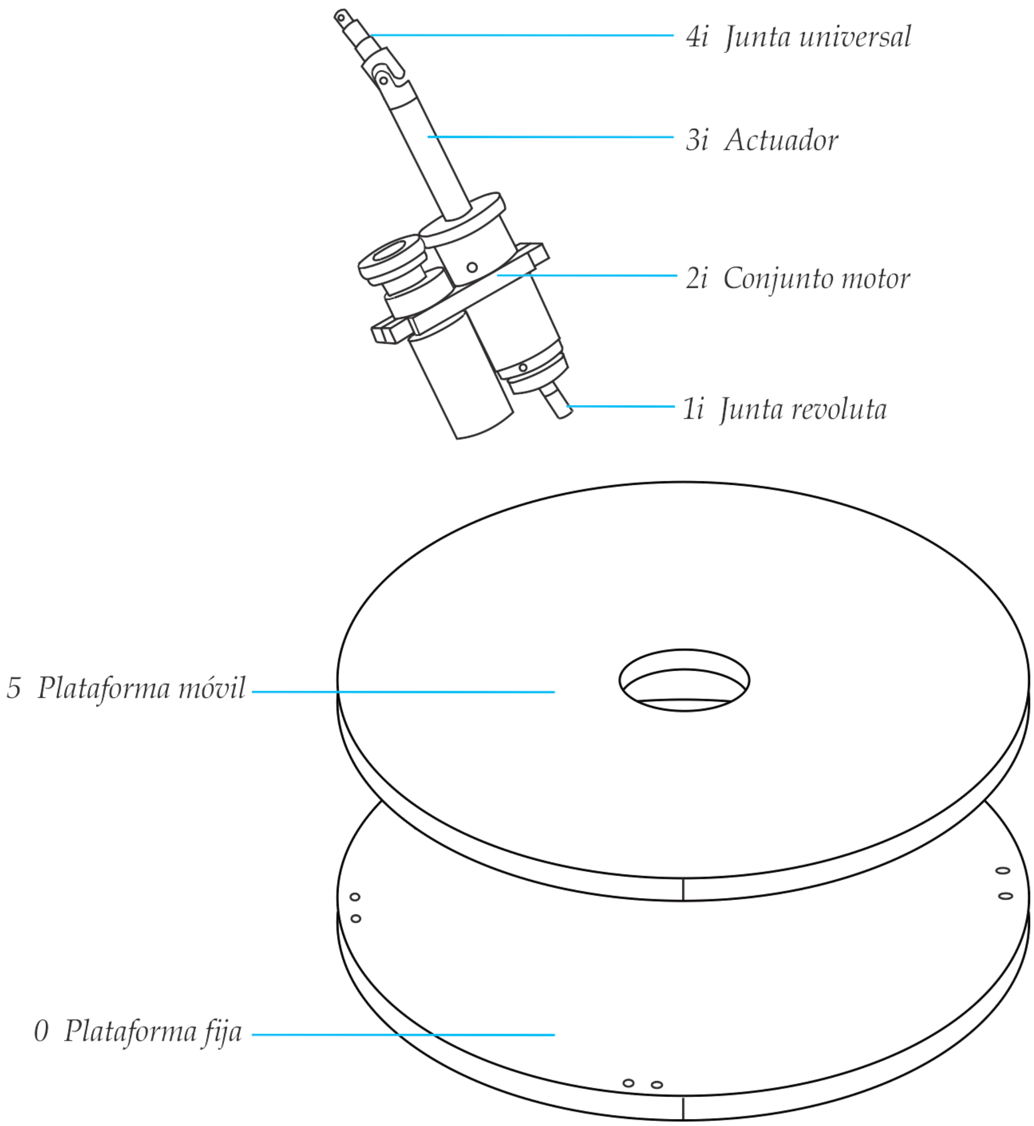


Figura 3.5 Cadena cinemática y Plataforma móvil y fija.

3.6 Análisis del Cuerpo 1i

Ya que el cuerpo 1i se encuentra en condiciones estáticas respecto a la placa inferior del manipulador, los términos de velocidades y aceleraciones son iguales a cero.

3.7 Análisis del cuerpo 2i

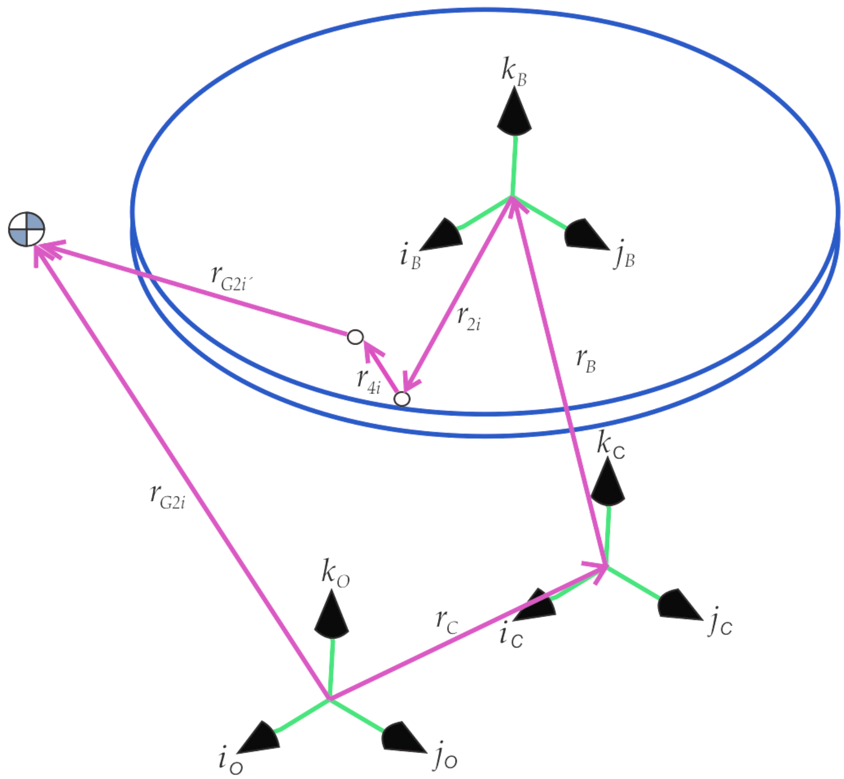


Figura 3.6 Centro de gravedad del cuerpo 2$\boldsymbol{i}$

3.7.1 Ecuaciones Cinemáticas.

Con el fin de obtener el centro de gravedad del cuerpo 2i y con base en la figura anterior, se tiene la siguiente ecuación de posición definida en la base inercial: 2i

$$r_{G2i}^{o} = r_{C}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{G2i'}^{o} \tag{3.1}$$

Dónde:

$$r_{G2i'}^{o} = R_{7i}^{o} r_{G2i'}^{7i}$$

Derivando respecto al tiempo a la ecuación (3.1) se obtiene la ecuación de la velocidad del centro de masa del cuerpo $2i$, considerando como constantes $r_C^o, r_B^o, r_{2i}^o, r_{4i}^o$ tenemos:

$$v_{G2i}^o = v_{G2i'}^o$$

$$v_{G2i}^o = \omega_{o2i}^o \times r_{G2i'}^o \tag{3.2}$$

El vector de velocidad angular ω_{o2i}^o inercial para el cuerpo $2i$ se define como:

$$\omega_{o2i}^o = R_{7i}^o \omega_{G2i'}^{7i} \tag{3.3}$$

El vector de velocidad angular en el sistema local $7i$ para el cuerpo $2i$, se define como:

$$\omega_{G2i'}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i} k_{6i}^{6i} = \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}[0,0,1]^T \tag{3.4}$$

La aceleración del centro de gravedad del cuerpo $2i$ se obtiene al derivar respecto al tiempo la ecuación. (3.2)

$$a_{G2i}^o = a_{G2i'}^o$$

$$a_{G2i}^o = \alpha_{o2i}^o \times r_{G2i'}^o + \omega_{o2i}^o \times (\omega_{o2i}^o \times r_{G2i'}^o) \tag{3.5}$$

El vector de aceleración angular inercial para el cuerpo $2i$ se define como:

$$\alpha_{o2i}^o = R_{7i}^o \alpha_{G2i'}^{7i} \tag{3.6}$$

Donde $\alpha_{G2i'}^{7i}$ se define en la base local $7i$:

$$\alpha_{G2i'}^{7i} = \ddot{\theta}_{7,6i} k_{6i}^{6i} = \ddot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} = \ddot{\theta}_{7,6i}[0,0,1]^T \tag{3.7}$$

Hasta este momento se han encontrado las velocidades y aceleraciones, definidas en la base inercial, por lo que, a continuación, se proyectarán en la base local del cuerpo $2i$ con la ayuda de matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o2i}^{o} en la base local $7i$:

$$\omega_{o2i}^{7i} = R_{o}^{7i}\omega_{o2i}^{o}$$

$$\omega_{o2i}^{7i} = R_{o}^{7i}R_{7i}^{0}\omega_{G2i'}^{7i}$$

$$\omega_{o2i}^{7i} = R_{7i}^{7i}\omega_{2i}^{7i} \tag{3.8}$$

$$\omega_{o2i}^{7i} = \omega_{2i}^{7i}$$

Al proyectar α_{o2i}^{o} en la base local $7i$:

$$\alpha_{o2i}^{7i} = R_{o}^{7i}\alpha_{o2i}^{o}$$

$$\alpha_{o2i}^{7i} = R_{o}^{7i}R_{7i}^{0}\alpha_{G2i'}^{7i}$$

$$\alpha_{o2i}^{7i} = R_{7i}^{7i}\alpha_{2i}^{7i} \tag{3.9}$$

$$\alpha_{o2i}^{7i} = \alpha_{2i}^{7i}$$

Al proyectar a_{G2i}^{o} en la base local $7i$:

$$a_{G2i}^{7i} = R_{o}^{7i}a_{G2i}^{o}$$

$$a_{G2i}^{7i} = R_{o}^{7i}\alpha_{o2i}^{o} \times R_{o}^{7i}r_{G2i'}^{o} + R_{o}^{7i}\omega_{o2i}^{o} \times (R_{o}^{7i}\omega_{o2i}^{o} \times R_{o}^{7i}r_{G2i'}^{o}) \tag{3.10}$$

$$a_{G2i}^{7i} = \alpha_{2i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i} + \omega_{2i}^{7i} \times (\omega_{2i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

3.8 Análisis del cuerpo $3i$

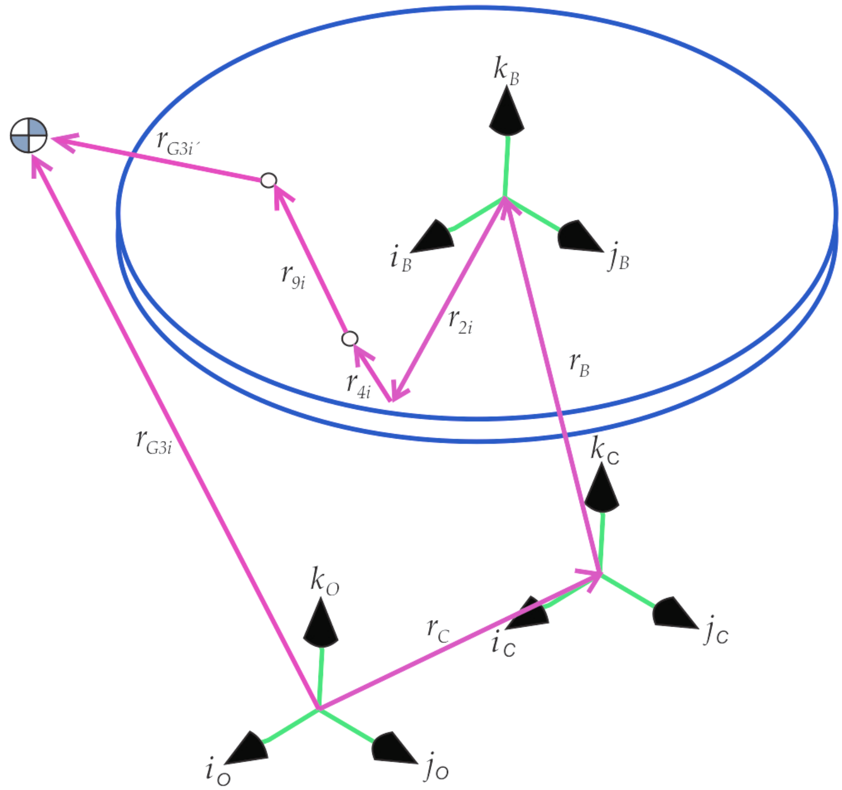


Figura 3.7 Centro de gravedad del cuerpo 3$\boldsymbol{i}$

3.8.1 Ecuaciones Cinemáticas

En base a la figura anterior se tiene la siguiente ecuación de posición definida en la base inercial para el centro de gravedad del cuerpo 3i**:**

$$r_{G3i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{9i}^{o} + r_{G3i'}^{o} \tag{3.11}$$

Dónde:

$$r_{9i}^{o} = R_{9i}^{o} r_{9i}^{9i}$$

$$r_{G3i'}^{o} = R_{9i}^{o} r_{G3i'}^{9i}$$

Para este caso debe entenderse que la velocidad del cuerpo anterior al cuerpo en estudio, afecta directamente la velocidad de su centro de masa, donde los valores de r_c^o, r_B^o, r_{2i}^o siguen siendo cero, por lo que al derivar respecto al tiempo a la ecuación (3.11) se obtiene la velocidad del centro de gravedad:

$$v_{G3i}^o = v_{4i}^o + v_{9i}^o + v_{G3i'}^o$$

De acuerdo a lo anterior es necesario explicar que el vector de velocidad v_{4i}^o no afecta la velocidad del centro de masa del cuerpo $3i$, pero el vector de velocidad v_{9i}^o proporciona una componente de velocidad que debe considerarse al calcular la velocidad del centro de masa, quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$v_{G3i}^o = v_{9i}^o + v_{G3i'}^o \tag{3.12}$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (3.12) se tiene que:

$$v_{9i}^o = \omega_{o2i}^o \times r_{9i}^o$$

$$v_{G3i'}^o = v_{o3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{G3i'}^o$$

$$v_{o3i}^o = R_{9i}^o v_{3i}^{9i} \tag{3.13}$$

$$v_{3i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i}[0,0,1]^T$$

$$\omega_{o3i}^o = \omega_{o2i}^o$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (3.12):

$$a_{G3i}^o = a_{9i}^o + a_{G3i'}^o$$

$$a_{G3i}^o = \alpha_{o2i}^o \times r_{9i}^o + \omega_{o2i}^o \times (\omega_{o2i}^o \times r_{9i}^o) \tag{3.14}$$

$$a_{G3i'}^o = a_{o3i}^o + 2\omega_{o3i}^o \times v_{o3i}^o + \alpha_{o3i}^o \times r_{G3i'}^o + \omega_{o3i}^o \times (\omega_{o3i}^o \times r_{G3i'}^o)$$

Definiendo el vector de aceleración angular inercial y aceleración lineal inercial para el cuerpo $3i$, respectivamente:

$$\alpha_{o3i}^{o} = \alpha_{o2i}^{o}$$

$$a_{o3i}^{o} = R_{9i}^{o} a_{3i}^{9i} \tag{3.15}$$

Donde a_{3i}^{9i} se define en la base local $9i$:

$$a_{3i}^{9i} = \ddot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} = \ddot{z}_{10,9i} [0,0,1]^{T} \tag{3.16}$$

Hasta este momento se han encontrado las velocidades y aceleraciones, definidas en la base inercial, por lo que, a continuación, se proyectarán en la base local $9i$ con la ayuda de matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o3i}^{o} en la base local $9i$:

$$\omega_{o3i}^{9i} = R_{o}^{9i} \omega_{o3i}^{o}$$

$$\omega_{o3i}^{9i} = R_{o}^{9i} R_{7i}^{0} \omega_{G2i'}^{7i}$$

$$\omega_{o3i}^{9i} = R_{7i}^{9i} \omega_{3i}^{7i} \tag{3.17}$$

$$\omega_{o3i}^{9i} = \omega_{3i}^{9i}$$

Al proyectar α_{o3i}^{o} en la base local $9i$:

$$\alpha_{o3i}^{9i} = R_{o}^{9i} \alpha_{o3i}^{o}$$

$$\alpha_{o3i}^{9i} = R_{o}^{9i} R_{7i}^{0} \alpha_{2i}^{7i}$$

$$\alpha_{o3i}^{9i} = R_{7i}^{9i} \alpha_{3i}^{7i} \qquad 3.18)$$

$$\alpha_{o3i}^{9i} = \alpha_{3i}^{9i}$$

Al proyectar v_{G3i}^{o} en la base local $9i$:

$$v_{G3i}^{9i} = R_{o}^{9i} v_{G3i}^{o}$$

$$v_{G3i}^{9i} = R_{0}^{9i} (v_{9i}^{o} + v_{G3i'}^{o})$$

$$v_{G3i}^{9i} = v_{9i}^{9i} + v_{G3i'}^{9i}$$

$$v_{9i}^{9i} = R_{0}^{9i} v_{9i}^{o}$$

$$v_{9i}^{9i} = R_{0}^{9i} (\omega_{o2i}^{o} \times r_{9i}^{o})$$

$$v_{9i}^{9i} = \omega_{o2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i}$$

$$v_{G3i'}^{9i} = R_{o}^{9i} v_{G3i'}^{o}$$

$$v_{G3i'}^{9i} = R_{o}^{9i} v_{o3i}^{o} + R_{o}^{9i} \omega_{o3i}^{o} \times R_{o}^{9i} r_{G3i'}^{o} \qquad (3.19)$$

$$v_{G3i'}^{9i} = v_{o3i}^{9i} + \omega_{o3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i}$$

$$v_{G3i}^{9i} = \omega_{o2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i} + v_{o3i}^{9i} + \omega_{o3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i}$$

Al proyectar a_{G3i}^{o} en la base local $9i$:

$$a_{G3i}^{9i} = a_{9i}^{9i} + a_{G3i'}^{9i}$$

$$a_{9i}^{9i} = R_{o}^{9i} a_{9i}^{o} = R_{o}^{9i} \alpha_{o2i}^{o} \times R_{o}^{9i} r_{9i}^{o} + R_{o}^{9i} \omega_{o2i}^{o} \times \left(R_{o}^{9i} \omega_{o2i}^{o} \times R_{o}^{9i} r_{9i}^{o}\right)$$

$$a_{9i}^{9i} = \alpha_{2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i} + \omega_{2i}^{9i} \times \left(\omega_{2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i}\right)$$

$$a_{G3i'}^{9i} = R_{o}^{9i} a_{G3i'}^{o} \qquad (3.20)$$

$$a_{G3i'}^{9i} = R_{o}^{9i} a_{o3i}^{o} + 2 R_{o}^{9i} \omega_{o3i}^{o} \times R_{o}^{9i} v_{o3i}^{o} + R_{o}^{9i} \alpha_{o3i}^{o} \times R_{o}^{9i} r_{G3i'}^{o}$$
$$+ R_{o}^{9i} \omega_{o3i}^{o} \left(R_{o}^{9i} \omega_{o3i}^{o} \times R_{o}^{9i} r_{G3i'}^{o}\right)$$

$$a_{G3i'}^{9i} = a_{3i}^{9i} + 2\omega_{3i}^{9i} \times v_{3i}^{9i} + \alpha_{3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i} + \omega_{3i}^{9i} \left(\omega_{3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i}\right)$$

3.9 Análisis del cuerpo $4i$

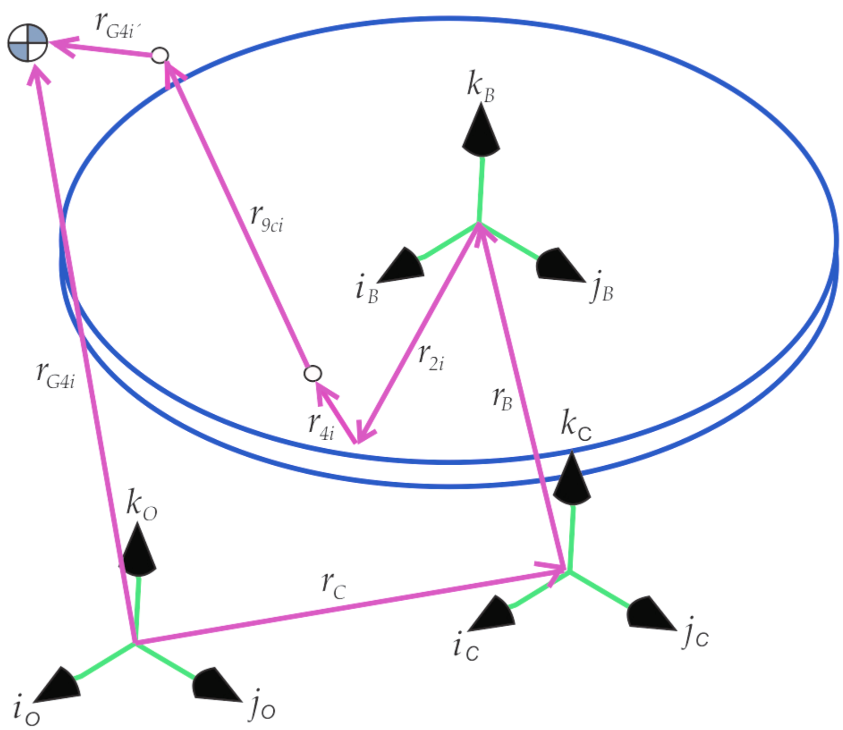


Figura 3.8 Centro de gravedad del cuerpo $4i$.

3.9.1 Ecuaciones Cinemáticas

En base a la figura anterior se tiene la siguiente ecuación de posición definida en la base inercial para el centro de gravedad del cuerpo $4i$:

$$r_{G4i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{9ci}^{o} + r_{G4i'}^{o} \quad (3.21)$$

Dónde:

$$r_{9i}^{o} = R_{9i}^{o} r_{9ci}^{9i}$$

$$r_{G4i'}^{o} = R_{11i}^{o} r_{G4i'}^{11i}$$

La velocidad del cuerpo anterior al cuerpo en estudio, afecta directamente la velocidad del centro de masa de éste. Los valores de $r_c^o, r_B^o\ y\ r_{2i}^o$ siguen considerándose como constantes, así que al derivar con respecto al tiempo a la ecuación (3.21), sus derivadas valen cero, obteniendo:

$$v_{G4i}^o = v_{4i}^o + v_{9ci}^o + v_{G4i'}^o$$

Con lo explicado en lo anterior el vector de velocidad v_{4i}^o no afecta la velocidad del centro de masa del cuerpo, $4i$, pero el vector de velocidad v_{9ci}^o proporciona una componente de velocidad que debe considerarse al calcular la velocidad del centro de masa, quedando entonces:

$$v_{G4i}^o = v_{9ci}^o + v_{G4i'}^o \tag{3.22}$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (3.22) se tiene que:

$$v_{9ci}^o = v_{o3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o \tag{3.23}$$

$$v_{G4i'}^o = \omega_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o$$

Al definir el vector de velocidad angular ω_{o4i}^o debe considerarse que la velocidad angular del centro de masa del cuerpo $4i$ está siendo afectada por la velocidad angular del cuerpo anterior, quedando de la siguiente forma:

$$\omega_{o4i}^o = \omega_{3i}^o + \omega_{4i}^o \tag{3.24}$$

$$\omega_{o4i}^o = R_{9i}^o \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i}$$

Donde ω_{4i}^{11i} se define en la base local $11i$:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{10i}^{10i} = \dot{\theta}_{11,10i}[1,0,0]^T \tag{3.25}$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (3.22):

$$a_{G4i}^o = a_{9ci}^o + a_{G4i'}^o$$

$$a_{9ci}^o = a_{o3i}^o + 2\omega_{o3i}^o \times v_{o3i}^o + \alpha_{o3i}^o \times r_{9ci}^o + \omega_{o3i}^o \times (\omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o) \tag{3.26}$$

$$a_{G4i'}^o = \alpha_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o + \omega_{o4i}^o \times (\omega_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o)$$

El vector de aceleración angular inercial para el cuerpo $4i$ se define de la siguiente manera:

$$\alpha_{o4i}^{o} = \alpha_{2i}^{o} + \alpha_{4i}^{o} + \omega_{2i}^{o} \times \omega_{4i}^{o}$$

Dónde:

$$\alpha_{3i}^{o}=\alpha_{2i}^{o}$$

$$\alpha_{o4i}^{o} = R_{9i}^{o}\alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^{o}\alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{o}\omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i} \tag{3.27}$$

Donde α_{4i}^{11i} se define en la base local $11i$:

$$\alpha_{4i}^{11i} = \ddot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} = \ddot{\theta}_{11,10i} i_{10i}^{10i} = \ddot{\theta}_{11,10i}[1,0,0]^T \tag{3.28}$$

Hasta este momento se han encontrado las velocidades y aceleraciones, definidas en la base inercial, por lo que, a continuación, se proyectarán en la base local $9i$ con la ayuda de matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o4i}^{o} en la base local $11i$:

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{o}^{11i}\omega_{o4i}^{o}$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{o}^{11i}(R_{9i}^{o}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i})$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{o}^{11i}R_{9i}^{o}\omega_{3i}^{9i} + R_{o}^{11i}R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i} \tag{3.29}$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{11i}\omega_{4i}^{11i}$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i}$$

Al proyectar α_{o4i}^{o} en la base local $11i$:

$$\alpha_{o4i}^{11i} = R_o^{11i}\alpha_{o4i}^{o}$$

$$\alpha_{o4i}^{11i} = R_o^{11i}(\alpha_{2i}^{o} + \alpha_{4i}^{o} + \omega_{2i}^{o} \times \omega_{4i}^{o})$$

$$\alpha_{o4i}^{11i} = R_o^{11i}(R_{9i}^{o}\alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^{o}\alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{o}\omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i})$$

$$\alpha_{o4i}^{11i} = R_o^{11i}R_{9i}^{o}\alpha_{2i}^{9i} + R_o^{11i}R_{11i}^{o}\alpha_{4i}^{11i} + R_o^{11i}R_{9i}^{o}\omega_{2i}^{9i} \times R_o^{11i}R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i} \tag{3.30}$$

$$\alpha_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^{11i}\alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{11i}\omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^{11i}\omega_{4i}^{11i}$$

$$\alpha_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\alpha_{2i}^{9i} + \alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{11i}\omega_{2i}^{9i} \times \omega_{4i}^{11i}$$

Al proyectar v_{G4i}^{o} en la base local $11i$:

$$v_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}v_{G4i}^{o}$$

$$v_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}(v_{9ci}^{o} + v_{G4i'}^{o})$$

$$v_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}(v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o} + \omega_{o4i}^{o} \times r_{G4i'}^{o}) \tag{3.31}$$

$$v_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}v_{o3i}^{o} + R_o^{11i}\omega_{o3i}^{o} \times R_o^{11i}r_{9ci}^{o} + R_o^{11i}\omega_{o4i}^{o} \times R_o^{11i}r_{G4i'}^{o}$$

$$v_{G4i}^{11i} = v_{o3i}^{11i} + \omega_{o3i}^{11i} \times r_{9ci}^{11i} + \omega_{o4i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}$$

Al proyectar a_{G4i}^{o} en la base local $11i$:

$$a_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}a_{G4i}^{0}$$

$$a_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}(a_{9ci}^{o} + a_{G4i'}^{0}) \tag{3.32}$$

$$a_{G4i}^{11i} = R_o^{11i}a_{9ci}^{o} + R_o^{11i}a_{G4i'}^{0}$$

$$a_{G4i}^{11i} = a_{9ci}^{11i} + a_{G4i'}^{11i}$$

Dónde:

$$R_o^{11i}a_{9ci}^o = R_o^{11i}a_{o3i}^o + 2R_o^{11i}\omega_{o3i}^o \times R_o^{11i}v_{o3i}^o + R_o^{11i}\alpha_{o3i}^o \times R_o^{11i}r_{9ci}^o$$

$$+R_o^{11i}\omega_{o3i}^o \times (R_o^{11i}\omega_{o3i}^o \times R_o^{11i}r_{9ci}^o)$$

$$a_{9ci}^{11i} = R_o^{11i}a_{9ci}^o = a_{o3i}^{11i} + 2\omega_{o3i}^{11i} \times v_{o3i}^{11i} + \alpha_{o3i}^{11i} \times r_{9ci}^{11i} + \omega_{o3i}^{11i} \times (\omega_{o3i}^{11i} \times r_{9ci}^{11i})$$

$$R_o^{11i}a_{G4i'}^0 = R_o^{11i}\alpha_{o4i}^o \times R_o^{11i}r_{G4i}^o + R_o^{11i}\omega_{o4i}^o \times (R_o^{11i}\omega_{o4i}^o \times R_o^{11i}r_{G4i}^o) \qquad (3.33)$$

$$a_{G4i'}^{11i} = R_o^{11i}a_{G4i'}^0 = \alpha_{o4i}^{11i} \times r_{G4i}^{11i} + \omega_{o4i}^{11i} \times (\omega_{o4i}^{11i} \times r_{G4i}^{11i})$$

3.10 Análisis del Cuerpo 5.

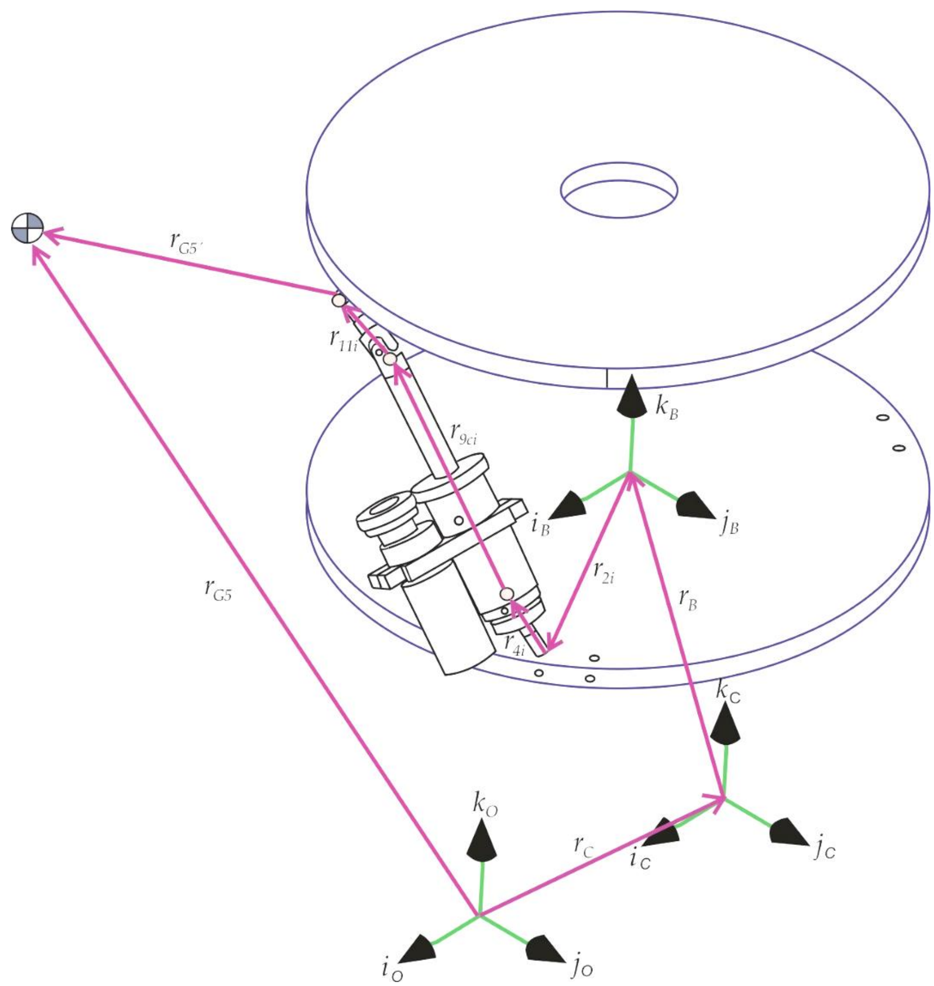


Figura. 4.1 Centro de gravedad del cuerpo 5

3.10.1 Ecuaciones Cinemáticas

De acuerdo a la Figura 3.9 se puede ubicar al centro de gravedad del cuerpo 5 de acuerdo a la siguiente ecuación vectorial de posición definida en la base inercial:

$$r_{G5i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{9ci}^{o} + r_{11i}^{o} + r_{G5'}^{o} \tag{3.34}$$

Dónde:

$$r_{9ci}^{o} = R_{9i}^{o} r_{9ci}^{9i}$$

$$r_{11i}^{o} = R_{11i}^{o} r_{11i}^{11i}$$

$$r_{G5'}^{o} = R_{p}^{o} r_{G5'}^{p} \tag{3.35}$$

Derivando respecto al tiempo a la ecuación (3.34) se obtiene la velocidad del centro de gravedad del plato móvil (Cuerpo 5), donde se considera constante $r_{G5i'}^{o}$ ya que no afecta a la velocidad del centro de gravedad:

$$v_{G5}^{o} = v_{9ci}^{o} + v_{11i}^{o} + v_{G5'}^{o} \tag{3.36}$$

Dónde:

$$v_{9ci}^{o} = v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o}$$

$$v_{11i}^{o} = \omega_{o5}^{o} \times r_{11i}^{o}$$

$$v_{G5'}^{o} = 0$$

$$\omega_{o5}^{o} = \omega_{o4i}^{o} \tag{3.37}$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar con respecto al tiempo la ecuación (3.36):

$$a_{G5}^{o} = a_{9ci}^{o} + a_{11i}^{o} \tag{3.38}$$

Al explicar cada de una de las partes de la ecuación (3.38) se tiene que:

$$a_{9ci}^{o} = a_{o3i}^{o} + 2\omega_{o3i}^{o} \times v_{o3i}^{o} + \alpha_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times (\omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o}) \qquad (3.39)$$

$$a_{11i}^{o} = \alpha_{o5}^{o} \times r_{11i}^{o} + \omega_{o5}^{o} \times (\omega_{o5}^{o} \times r_{11i}^{o})$$

Se sabe que $\omega_{o5}^{o} = \omega_{o4i}^{o}$, por lo que el vector de aceleración angular inercial para el cuerpo 5 se define de la siguiente manera:

$$\alpha_{o5}^{o} = \alpha_{o4i}^{o} \qquad (3.40)$$

Se ha logrado encontrar las velocidades y aceleraciones, definidas en la base inercial, por lo que, a continuación, se proyectarán en la base local del cuerpo 5 con la ayuda de matrices de rotación.

Al proyectar ω_{o5}^{o} en la base local p:

$$\omega_{o5}^{p} = R_{o}^{p}\omega_{o4i}^{o}$$

$$\omega_{o5}^{p} = R_{o}^{p}(R_{9i}^{o}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i})$$

$$\omega_{o5}^{p} = R_{o}^{p}R_{9i}^{o}\omega_{3i}^{9i} + R_{o}^{p}R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i} \qquad (3.41)$$

$$\omega_{o5}^{p} = R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

Al proyectar α_{o5}^{o} en la base local p:

$$\alpha_{o5}^{o} = R_{o}^{p}\alpha_{o5}^{o}$$

$$\alpha_{o5}^{o} = R_{o}^{11i}(\alpha_{2i}^{o} + \alpha_{4i}^{o} + \omega_{2i}^{o} \times \omega_{4i}^{o})$$

$$\alpha_{o5}^{o} = R_{o}^{p}(R_{9i}^{o}\alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^{o}\alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{o}\omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i})$$

$$\alpha_{o5}^{o} = R_{o}^{p}R_{9i}^{o}\alpha_{2i}^{9i} + R_{o}^{p}R_{11i}^{o}\alpha_{4i}^{11i} + R_{o}^{p}R_{9i}^{o}\omega_{2i}^{9i} \times R_{o}^{p}R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i} \qquad (3.42)$$

$$\alpha_{o5}^{o} = R_{9i}^{p}\alpha_{2i}^{9i} + R_{11i}^{p}\alpha_{4i}^{11i} + R_{9i}^{p}\omega_{2i}^{9i} \times R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

Al proyectar v_{G5}^{o} en la base local p:

$$v_{G5}^{p} = R_{o}^{p} v_{G5}^{o}$$

$$v_{G5}^{p} = R_{o}^{p}(v_{9ci}^{o} + v_{11i}^{o})$$

$$v_{G5}^{p} = R_{o}^{p}(v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o} + \omega_{o5}^{o} \times r_{11i}^{o})$$

$$v_{G5}^{p} = R_{o}^{p} v_{o3i}^{o} + R_{o}^{p} \omega_{o3i}^{o} \times R_{o}^{p} r_{9ci}^{o} + R_{o}^{p} \omega_{o5}^{o} \times R_{o}^{p} r_{11i}^{o}$$

$$v_{G5}^{p} = v_{o3i}^{p} + \omega_{o3i}^{p} \times r_{9ci}^{p} + \omega_{o5}^{p} \times r_{11i}^{p} \tag{3.43}$$

Al proyectar a_{G5}^{o} en la base local p:

$$a_{G5}^{p} = R_{o}^{p} a_{G5}^{o}$$

$$a_{G5}^{p} = R_{o}^{p}(a_{9ci}^{o} + a_{11i}^{o})$$

$$a_{G5}^{p} = R_{o}^{p} a_{9ci}^{o} + R_{o}^{p} a_{11i}^{o}$$

$$a_{G5}^{p} = a_{9ci}^{p} + a_{11i}^{p} \tag{3.44}$$

Dónde:

$$a_{9ci}^{p} = R_{o}^{p} a_{o3i}^{o} + 2R_{o}^{p} \omega_{o3i}^{o} \times R_{o}^{p} v_{o3i}^{o} + R_{o}^{p} \alpha_{o3i}^{o} \times R_{o}^{p} r_{9ci}^{o} + R_{o}^{p} \omega_{o3i}^{o} \times (R_{o}^{p} \omega_{o3i}^{o} \times R_{o}^{p} r_{9ci}^{o})$$

$$a_{9ci}^{p} = a_{o3i}^{p} + 2\omega_{o3i}^{p} \times v_{o3i}^{p} + \alpha_{o3i}^{p} \times r_{9ci}^{p} + \omega_{o3i}^{p} \times (\omega_{o3i}^{p} \times r_{9ci}^{p}) \tag{3.45}$$

$$a_{11i}^{p} = R_{o}^{p} \alpha_{o5}^{o} \times R_{o}^{p} r_{11i}^{o} + R_{o}^{p} \omega_{o5}^{o} \times (R_{o}^{p} \omega_{o5}^{o} \times R_{o}^{p} r_{11i}^{o})$$

$$a_{11i}^{p} = \alpha_{o5}^{p} \times r_{11i}^{p} + \omega_{o5}^{p} \times (\omega_{o5}^{p} \times r_{11i}^{p}) \tag{3.46}$$

Capítulo 4

Análisis Dinámico Formulación **Euler-Lagrange**

4.1 Introducción

La dinámica de la plataforma de Stewart es considerada dentro de este capítulo, donde, se desea determinar las fuerzas aplicadas por los actuadores en los eslabones de entrada para que el efector final alcance una trayectoria dada.
A diferencia del método de Newton-Euler, el método de Euler-Lagrange no contiene en sus ecuaciones todas las fuerzas de restricción entre eslabones, obteniéndose así ecuaciones de una forma cerrada. El método de Lagrange, en otras palabras, formula ecuaciones de movimiento usando un conjunto de coordenadas generalizadas (Spong, y otros, 1989). Esto elimina todas o algunas de las fuerzas de restricción.

La función Lagrangiana es definida como la diferencia entre la energía cinética y energía potencial de un sistema mecánico como:

$$L = K - U \tag{4.1}$$

Donde K es la energía cinética definida como:

$$K = \frac{1}{2}(mv^T v + \omega^T I \omega) \tag{4.2}$$

Y U la energía potencial como:

$$U = mg^T r_G \tag{4.3}$$

La energía cinética depende de la localización y la velocidad de los eslabones del manipulador, mientras la energía potencial depende únicamente de la localización de los eslabones. La ecuación de Lagrange de movimiento es formulada en términos de la función Lagrangiana como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{4.4}$$

El término Q_j es conocido como fuerzas generalizadas y se obtendrá a partir de expresiones, que involucren los torques y coordenadas generalizadas.

4.2 Vectores de Centros de Gravedad y Velocidad Angular

Se puede ver que en la ecuación (4.2) aparece la velocidad de centro de gravedad y la velocidad angular de cada cuerpo. Dichas velocidades fueron calculadas en el capítulo 2 y serán utilizadas en el presente capítulo.

Los vectores de centros de gravedad definidos en la base inercial son:

$$r_{G2i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{G2i'}^{o}$$

$$r_{G3i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{9i}^{o} + r_{G3i'}^{o}$$

$$r_{G4i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{9ci}^{o} + r_{G4i'}^{o}$$

$$r_{G5}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{9ci}^{o} + r_{11i}^{o} + r_{G5'}^{o} \tag{4.5}$$

En las secciones 3.6.1, 3.7.1, 3.8.1, 3.9.1 se muestra como se construyó cada uno de los vectores anteriores:

4.2.1. Velocidad de Centro de Gravedad del Cuerpo $2i$

De v_{G2i}^{7i} se tiene:

$$v_{G2i}^{7i} = \omega_{o2i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}$$

Considerando que:

$$\omega_{o2i}^{7i} = R_{o}^{7i}\omega_{o2i}^{o} = R_{o}^{7i}R_{7i}^{0}\omega_{G2i'}^{7i}$$

A partir de la ecuación. (3.4) tiene el término de velocidad angular:

$$\omega_{G2i'}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}k_{6i}^{6i} = \dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}$$

$$r_{G2i'}^{7i} = [x_{G2i'}, y_{G2i'}, z_{G2i'}]^{T}$$

Sustituyendo en la ecuación. (3.2):

$$v_{G2i}^{7i} = (\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{G2i'}^{7i}$$

$$= \dot{\theta}_{7,6i}\,(k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

Haciendo cambio de variable:

$$v_{G2i}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}\, e_{2i} \tag{4.6}$$

Dónde:

$$e_{2i} = (k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}) \tag{4.7}$$

Poniendo en función de las coordenadas generalizadas:

$$v_{G2i}^{7i} = [e_{2i}, 0, 0, 0, 0, 0]\dot{q} \tag{4.8}$$

$$\dot{q} = \left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]^T \tag{4.9}$$

Renombrando:

$$v_{G2i}^{7i} = M_{1i}\dot{q} \tag{4.10}$$

Dónde:

$$M_{1i} = [e_{2i}, 0, 0, 0, 0, 0] \tag{4.11}$$

4.2.2. Velocidad Angular del Cuerpo 2i

De la ecuación (3.8) se tiene:

$$\omega_{o2i}^{7i} = R_o^{7i}\omega_{o2i}^{o}$$

$$= R_o^{7i}R_{7i}^{0}\omega_{G2i'}^{7i}$$

$$= \dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}$$

Haciendo cambio de variable se tiene:

$$\omega_{o2i}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}k_{1i} \tag{4.12}$$

Dónde:

$$k_{1i} = k_{7i}^{7i} \tag{4.13}$$

Poniendo en función de las coordenadas generalizadas:

$$\omega_{o2i}^{7i} = [k_{1i}, 0, 0, 0, 0, 0]\dot{q} \tag{4.14}$$

Renombrando:

$$\omega_{o2i}^{7i} = M_{2i}\dot{q} \tag{4.15}$$

Dónde:

$$M_{2i} = [k_{1i}, 0, 0, 0, 0, 0] \tag{4.16}$$

4.2.3. Velocidad de Centro de Gravedad del Cuerpo $3i$

De la ecuación. (3.19) se tiene:

$$v_{G3i}^{9i} = \omega_{o2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i} + v_{o3i}^{9i} + \omega_{o3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i}$$

Considerando que:

$$\omega_{o2i}^{o} = \omega_{o3i}^{o} \qquad r_{9i}^{9i} = [\, 0, 0, 8.5]^T$$

$$\omega_{o2i}^{9i} = \omega_{o2i}^{9i} = R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} \qquad r_{G3i'}^{9i} = [x_{G3i'}, y_{G3i'}, z_{G3i'}]^T$$

$$R_{7i}^{9i} = R_{z4}(-\theta_{9,8i})R_{z5}(-\theta_{8,7i})$$

$$\begin{aligned} v_{o3i}^{9i} &= R_{o}^{9i}v_{o3i}^{o} \\ &= R_{o}^{9i}(R_{9i}^{o}v_{3i}^{9i}) \\ &= \dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i} \end{aligned} \qquad \omega_{G2i'}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}$$

Sustituyendo los términos de velocidad y velocidad angular anteriores en la ecuación (3.19) y simplificando:

$$\begin{aligned} v_{G3i}^{9i} &= \omega_{o2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i} + v_{o3i}^{9i} + \omega_{o3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i} \\ &= (R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7}) \times r_{9i}^{9i} + v_{o3i}^{9i} + (R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7}) \times r_{G3i'}^{9i} \\ &= R_{7i}^{9i}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{9i}^{9i} + \dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i} + R_{7i}^{9i}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{G3i'}^{9i} \\ &= \dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i} + R_{7i}^{9i}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}) \\ &= \dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right] \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable se tiene:

$$v_{G3i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i}k_{2i} + \dot{\theta}_{7,6i}e_{3i} \tag{4.17}$$

Dónde:

$$k_{2i} = k_{9i}^{9i} \tag{4.18}$$

$$e_{3i} = R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}) \tag{4.19}$$

Poniendo la ecuación (4.13) en términos de las coordenadas generalizadas tenemos:

$$v_{G3i}^{9i} = [e_{3i}, 0, 0, 0, 0, k_{2i}]\dot{q} \tag{4.20}$$

Finalmente renombrando:

$$v_{G3i}^{9i} = M_{3i}\dot{q} \tag{4.21}$$

Dónde:

$$M_{3i} = [e_{3i}, 0, 0, 0, 0, k_{2i}] \tag{4.22}$$

4.2.4. Velocidad Angular del Cuerpo 3i

De la ecuación (3.17) se tiene:

$$\omega_{o3i}^{9i} = \omega_{3i}^{9i} = R_o^{9i}\omega_{o3i}^{o}$$

$$= R_o^{9i}R_{7i}^{0}\omega_{G2i'}^{7i}$$

$$= R_{7i}^{9i}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i})$$

$$= \dot{\theta}_{7,6i}(R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i})$$

Haciendo cambio de variable se tiene:

$$\omega_{o3i}^{9i} = \dot{\theta}_{7,6i}k_{3i} \tag{4.23}$$

Dónde:

$$k_{3i} = R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \tag{4.24}$$

Poniendo en función de las coordenadas generalizadas:

$$\omega_{o3i}^{9i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]\dot{q} \tag{4.25}$$

Renombrando:

$$\omega_{o3i}^{9i} = M_{4i}\dot{q} \tag{4.26}$$

Dónde:

$$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0] \tag{4.27}$$

4.2.5. Velocidad de Centro de Gravedad del Cuerpo $4i$

De la ecuación. (3.31) se tiene:

$$v_{G4i}^{11i} = v_{o3i}^{11i} + \omega_{o3i}^{11i} \times r_{9ci}^{11i} + \omega_{o4i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}$$

Donde a partir de las ecuación. (3.4), (3.13), (3.25) y (3.29) se tienen respectivamente los vectores de velocidad angular:

Considerando que:

$$\omega_{o3i}^{11i} = R_{7i}^{11i}(\omega_{G2i'}^{7i})$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i}$$

$$= R_{9i}^{11i}R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} + \omega_{4i}^{11i}$$

$$= R_{7i}^{11i}\omega_{G2i'}^{7i} + \omega_{4i}^{11i}$$

$$v_{o3i}^{11i} = R_{o}^{11i}v_{o3i}^{o} = R_{o}^{11i}R_{9i}^{o}v_{3i}^{9i}$$

$$= R_{9i}^{11i}(v_{3i}^{9i})$$

$$r_{9ci}^{11i} = R_{9i}^{11i}r_{9ci}^{9i}$$

$$r_{9ci}^{9i} = [0, 0, z109i\ ]^T$$

$$r_{G4i'}^{11i} = [x_{G4i'}, y_{G4i'}, z_{G4i'}]^T$$

$$\omega_{G2i'}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}$$

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}$$

$$v_{3i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i}$$

$$R_{9i}^{11i} = R_{z4}(-\theta_{11,10i})$$

$$R_{7i}^{11i} = R_{z4}(-\theta_{11,10i})R_{z4}(-\theta_{9,8i})R_{z5}(-\theta_{8,7i})$$

Sustituyendo los términos de velocidad y velocidad angular anteriores en la ecuación (3.31) y simplificando:

$$v_{G4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}(v_{3i}^{9i}) + R_{7i}^{11i}(\omega_{G2i'}^{7i}) \times r_{9ci}^{11i} + (R_{7i}^{11i}\omega_{G2i'}^{7i} + \omega_{4i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}$$

$$= R_{9i}^{11i}(\dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{11i}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{9ci}^{11i} + \left[R_{7i}^{11i}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) + \dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}\right] \times r_{G4i'}^{11i}$$

$$= R_{9i}^{11i}\left(\dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i}\right) + R_{7i}^{11i}\left(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}\right) \times (r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}) + \dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}$$

$$= \dot{z}_{10,9i}\left(R_{9i}^{11i}k_{9i}^{9i}\right) + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i})\right] + \dot{\theta}_{11,10i}(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i})$$

Renombrando se tiene:

$$v_{G4i}^{11i} = \dot{z}_{10,9i}k_{4i} + \dot{\theta}_{7,6i}e_{4i} + \dot{\theta}_{11,10i}e_{5i} \tag{4.28}$$

Dónde:

$$k_{4i} = R_{9i}^{11i}k_{9i}^{9i} \tag{4.29}$$

$$e_{4i} = R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}) \tag{4.30}$$

$$e_{5i} = (i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}) \tag{4.31}$$

Poniendo la ecuación (4.28) en términos de las coordenadas generalizadas tenemos:

$$v_{G4i}^{11i} = [e_{4i}, 0, 0, e_{5i}, 0, k_{4i}]\dot{q} \tag{4.32}$$

Finalmente renombrando:

$$v_{G4i}^{11i} = M_{5i}\dot{q} \tag{4.33}$$

Dónde:

$$M_{5i} = [e_{4i}, 0, 0, e_{5i}, 0, k_{4i}] \tag{4.34}$$

4.2.6. Velocidad Angular del Cuerpo $4i$

De la ecuación (3.29) se tiene:

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i}$$

De la ecuación (3.17) tenemos:

$$\omega_{3i}^{9i} = \omega_{o3i}^{9i}$$

Conociendo que ω_{o3i}^{9i} se tiene calculada en la sección 4.2.4 tenemos entonces:

$$\omega_{3i}^{9i} = M_{4i}\dot{q}$$

Para ω_{4i}^{11i}de la ecuación (3.25) tenemos:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$

Haciendo cambio de variable se tiene:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} k_{5i} \tag{4.35}$$

Dónde:

$$k_{5i} = i_{11i}^{11i} \tag{4.36}$$

Poniendo a ω_{4i}^{11i} en función de las coordenadas generalizadas:

$$\omega_{4i}^{11i} = [0,0,0,k_{5i},0,0]\dot{q} \tag{4.37}$$

Renombrando:

$$\omega_{4i}^{11i} = M_{6i}\dot{q} \tag{4.38}$$

Dónde:

$$M_{6i} = [0,0,0,k_{5i},0,0] \tag{4.39}$$

Sustituyendo los términos de velocidad angular anteriores en la ecuación (3.29) y simplificando:

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i} M_{4i}\dot{q} + M_{6i}\dot{q}$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = (R_{9i}^{11i} M_{4i} + M_{6i})\dot{q}$$

Renombrando:

$$\omega_{o4i}^{11i} = M_{7i}\dot{q} \tag{4.40}$$

Dónde:

$$M_{7i} = R_{9i}^{11i} M_{4i} + M_{6i} \tag{4.41}$$

4.2.7. Velocidad de Centro de Gravedad del Cuerpo 5

De la ecuación. (3.36) se tiene:

$$v_{G5}^{p} = v_{9ci}^{p} + v_{11i}^{p} + v_{G5'}^{p}$$

Considerando que:

$$v_{9ci}^{p} = R_{o}^{p} v_{9ci}^{o}$$

$$= R_{o}^{p}(v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o})$$

$$= R_{o}^{p}\left(R_{9i}^{o} v_{3i}^{9i}\right) + R_{o}^{p}\left(R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o}\right)$$

$$= R_{9i}^{p}\left(v_{3i}^{9i}\right) + R_{7i}^{p}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{p}$$

$$= R_{o}^{p}(\omega_{3i}^{o} + \omega_{4i}^{o}) \times r_{11i}^{p}$$

$$= R_{o}^{p}(R_{9i}^{o}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}$$

$$= (R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}$$

$$= (R_{9i}^{p}R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}$$

$$= (R_{7i}^{p}\omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}$$

$$v_{11i}^{p} = R_{o}^{p}(\omega_{o5}^{o} \times r_{11i}^{o})$$

$$r_{9ci}^{p} = R_{9i}^{p} r_{9ci}^{9i}$$

$$r_{11i}^{p} = R_{11i}^{p} r_{11i}^{11i}$$

$$r_{9ci}^{9i} = [0, 0, z109i\ ]^{T}$$

$$r_{11i}^{11i} = [0, 0, 0.85\ ]^{T}$$

$$v_{G5'}^{p} = 0$$

$$\omega_{o5}^{o} = \omega_{o4i}^{o}$$

$$\omega_{G2i'}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}$$

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$

$$v_{3i}^{9i} = \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i}$$

$$R_{7i}^{p} = R_{z6}(\delta 14pi) R_{z1}(x1514i) R_{z6}(\delta 1615i) R_{z4}(\delta 1716i) R_{z6}(\delta 1817i) R_{z5}(-\theta_{12,11i}) R_{z4}(-\theta_{11,10i}) R_{z4}(-\theta_{9,8i}) R_{z5}(-\theta_{8,7i})$$

$$R_{9i}^{p} = R_{z6}(\delta 14pi) R_{z1}(x1514i) R_{z6}(\delta 1615i) R_{z4}(\delta 1716i) R_{z6}(\delta 1817i) R_{z5}(-\theta_{12,11i}) R_{z4}(-\theta_{11,10i})$$

$$R_{11i}^{p} = R_{z6}(\delta 14pi) R_{z1}(x1514i) R_{z6}(\delta 1615i) R_{z4}(\delta 1716i) R_{z6}(\delta 1817i) R_{z5}(-\theta_{12,11i})$$

Sustituyendo los términos de velocidad y velocidad angular anteriores en la ecuación (3.36) y simplificando:

$$v_{G5}^{p} = R_{9i}^{p}\left(v_{3i}^{9i}\right) + R_{7i}^{p}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{p} + \left(R_{7i}^{p}\omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{p} + 0$$

$$= R_{9i}^{p}\left(\dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i}\right) + R_{7i}^{p}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{9ci}^{p} + (R_{7i}^{p}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{p}\dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}$$

$$= R_{9i}^{p}\left(\dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i}\right) + R_{7i}^{p}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{9ci}^{p} + R_{7i}^{p}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{11i}^{p} + R_{11i}^{p}(\dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}$$

$$= \dot{z}_{10,9i}\left(R_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}\right) + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{p}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p})\right] + \dot{\theta}_{11,10i}(R_{11i}^{p}i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p})$$

Renombrando se tiene:

$$v_{G5}^{p} = \dot{z}_{10,9i}k_{6i} + \dot{\theta}_{7,6i}e_{6i} + \dot{\theta}_{11,10i}e_{7i} \tag{4.42}$$

Dónde:

$$k_{6} = \left(R_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}\right) \tag{4.43}$$

$$e_{6} = R_{7i}^{p}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p}) \tag{4.44}$$

$$e_{7} = (R_{11i}^{p}i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p}) \tag{4.45}$$

Poniendo la ecuación (4.42) en términos de las coordenadas generalizadas tenemos:

$$v_{G5}^{p} = \ [e_{6}, 0, 0, e_{7}, 0, k_{6}]\dot{q} \tag{4.46}$$

Finalmente renombrando:

$$v_{G5}^{p} = M_8\dot{q} \tag{4.47}$$

Dónde:

$$M_8 = [e_6, 0, 0, e_7, 0, k_6] \tag{4.48}$$

4.2.8. Velocidad Angular del Cuerpo 5

De la ecuación (3.40) se tiene:

$$\omega_{o5}^{p} = R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

De las ecuaciones (4.26) y (4.38) respectivamente tenemos:

$$\omega_{3i}^{9i} = \omega_{o3i}^{9i} = M_{4i}\dot{q}$$

$$\omega_{o4i}^{11i} = M_{6i}\dot{q}$$

Sustituyendo los términos de velocidad angular anteriores en la ecuación (3.40) y simplificando:

$$\omega_{o5}^{p} = R_{9i}^{p}M_{4i}\dot{q} + R_{11i}^{p}M_{6i}\dot{q}$$

Renombrando:

$$\omega_{o5}^{p} = M_9\dot{q} \tag{4.49}$$

Dónde:

$$M_9 = R_{9i}^{p}M_{4i} + R_{11i}^{p}M_{6i} \tag{4.50}$$

4.3. Función Lagrangiana

Aplicando la ecuación (4.1) a la plataforma, se consigue de manera general la siguiente expresión:

$$L = \sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{k=1}^{4}(K_{ki} - U_{ki})\right) + L_5 \tag{4.51}$$

$$i = número\ de\ la\ cadena$$

$$k = número\ de\ cuerpos\ en\ la\ cadena\ i$$

Expandiendo los términos del primer paréntesis:

$$L = \sum_{i=1}^{6}\big((K_{1i} - U_{1i}) + (K_{2i} - U_{2i}) + (K_{3i} - U_{3i}) + (K_{4i} - U_{4i})\big) + (K_5 - U_5)$$

$$L = \sum_{i=1}^{6}(L_{1i} + L_{2i} + L_{3i} + L_{4i}) + L_5 \tag{4.52}$$

Donde $L_{ki} = K_{ki} - U_{ki}$:

$$L_{1i} = 0$$

$$L_{2i} = \frac{1}{2}\Big(m_{3i}\big(v_{G2i}^{7i}\big)^T v_{G2i}^{7i} + \big(\omega_{o2i}^{7i}\big)^T (I_{G2i}\omega_{o2i}^{7i}\Big) + m_{2i}g^T r_{G2i}^{o}$$

$$L_{3i} = \frac{1}{2}\Big(m_{3i}\big(v_{G3i}^{9i}\big)^T v_{G3i}^{9i} + \big(\omega_{o3i}^{9i}\big)^T (I_{G3i}\omega_{o3i}^{9i}\Big) + m_{3i}g^T r_{G3i}^{o}$$

$$L_{4i} = \frac{1}{2}\Big(m_{4i}\big(v_{G4i}^{11i}\big)^T v_{G4i}^{11i} + \big(\omega_{o4i}^{11i}\big)^T (I_{G4i}\omega_{o4i}^{11i}\Big) + m_{4i}g^T r_{G4i}^{o}$$

$$L_5 = \frac{1}{2}\Big(m_5\big(v_{G5}^{p}\big)^T v_{G5}^{p} + \big(\omega_{o5}^{p}\big)^T (I_{G5}\omega_{o5}^{p}\Big) + m_5 g^T r_{G5}^{o}$$

Donde $g = [0,0,-9.81]^T$

4.3.1. Desarrollando el primer término de la ecuación Lagrangiana

Desarrollando el término $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$

A partir de la ecuación (4.4)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j$$

Desarrollando el primer término de la ecuación anterior a partir de la ecuación (4.52)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} \tag{4.53}$$

Para $j=1,2,3,4,5,6$, donde:

$\dot{q}_1=\dot{\theta}_{7,6i}$ $\dot{q}_2=\dot{\theta}_{8,7i}$ $\dot{q}_3=\dot{\theta}_{9,8i}$

$\dot{q}_4=\dot{\theta}_{11,10i}$ $\dot{q}_5=\dot{\theta}_{12,11i}$ $\dot{q}_6=\dot{z}_{10,9i}$

Para el cuerpo $2i$

Desarrollando el término $\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}$

Tomando cada subtérmino de la ecuación (4.53).

$$\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\left(m_{2i}\left(v_{G2i}^{7i}\right)^T v_{G2i}^{7i}+\left(\omega_{o2i}^{7i}\right)^T\left(I_{G2i}\omega_{o2i}^{7i}\right)+m_{2i}g^T r_{G2i}^{o}\right)\right. \tag{4.54}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.10), (4.15) en la ecuación (4.54) y agrupando:

$$\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_{2i}\left(v_{G2i}^{7i}\right)^T v_{G2i}^{7i} + \left(\omega_{o2i}^{7i}\right)^T (I_{G2i}\omega_{o2i}^{7i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_{2i}\,(M_{1i}\dot{q}\,)^T M_{1i}\dot{q}\; + (M_{2i}\dot{q}\,)^T (I_{G2i}M_{2i}\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_{2i}\,\dot{q}^{\,T}(M_{1i}^T M_{1i})\dot{q}\; + \dot{q}^{\,T}(M_{2i}^T I_{G2i}M_{2i})\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}^{\,T}(m_{2i}\,M_{1i}^T M_{1i} + M_{2i}^T I_{G2i}M_{2i})\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}^{\,T} N_{2i}\dot{q}\,)$$

Efectuando la derivada:

$$\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j} N_{2i}\dot{q}\; + \dot{q}^{\,T} N_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{4.55}$$

Donde N_{2i}es de 6x6:

$$N_{2i} = m_{2i}\,M_{1i}^T M_{1i} + M_{2i}^T I_{G2i} M_{2i} \tag{4.56}$$

Para el cuerpo $\boldsymbol{3i}$

Desarrollando el término $\boldsymbol{\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}}$

Se tiene:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\left(m_{3i}\left(v_{G3i}^{9i}\right)^T v_{G3i}^{9i} + \left(\omega_{o3i}^{9i}\right)^T (I_{G3i}\omega_{o3i}^{9i}\right) + m_{3i}g^T r_{G3i}^{o}\right) \tag{4.57}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.21), (4.26) en la ecuación (4.57) y agrupando:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_{3i}\left(v_{G3i}^{9i}\right)^T v_{G3i}^{9i} + \left(\omega_{o3i}^{9i}\right)^T (I_{G3i}\omega_{o3i}^{9i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_{3i}\,(M_{3i}\dot{q}\,)^T M_{3i}\dot{q}\; + (M_{4i}\dot{q}\,)^T (I_{G3i}M_{4i}\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_{3i}\,\dot{q}^{\,T}(M_{3i}^T M_{3i})\dot{q}\; + \dot{q}^{\,T}(M_{4i}^T I_{G3i}M_{3i})\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}^{\,T}(m_{3i}\,M_{3i}^T M_{3i} + M_{4i}^T I_{G3i}M_{4i})\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}^{\,T}N_{3i}\dot{q}\,)$$

Efectuando la derivada:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}N_{3i}\dot{q}\; + \dot{q}^{\,T}N_{3i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{4.58}$$

Donde N_{3i}es de 6x6:

$$N_{3i} = m_{3i}\,M_{3i}^T M_{3i} + M_{4i}^T I_{G3i} M_{4i} \tag{4.59}$$

Para el cuerpo $4i$

Desarrollando el término $\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}$

Se tiene:

$$\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\left(m_{4i}\left(v_{G4i}^{11i}\right)^T v_{G4i}^{11i} + \left(\omega_{o4i}^{11i}\right)^T (I_{G4i}\omega_{o4i}^{11i}\right) + m_{4i}g^T r_{G4i}^{o}\right) \tag{4.60}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.33), (4.40) en la ecuación (4.60) y agrupando:

$$\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_{4i}\left(v_{G4i}^{11i}\right)^T v_{G4i}^{11i} + \left(\omega_{o4i}^{11i}\right)^T (I_{G4i}\omega_{o4i}^{11i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_{4i}\,(M_{5i}\dot{q}\,)^T M_{5i}\dot{q}\; + (M_{7i}\dot{q}\,)^T(I_{G4i}M_{7i}\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_{4i}\,\dot{q}^{\,T}(M_{5i}^T M_{5i})\dot{q}\; + \dot{q}^{\,T}(M_{7i}^T I_{G4i}M_{7i})\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}^{\,T}(m_{4i}\,M_{5i}^T M_{5i} + M_{7i}^T I_{G4i}M_{7i})\dot{q}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}^{\,T}N_{4i}\dot{q}\,)$$

Efectuando la derivada:

$$\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}N_{4i}\dot{q}\; + \dot{q}^{\,T}N_{4i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

(4.61)

Donde N_{4i}es de 6x6:

$$N_{4i} = m_{4i}\,M_{5i}^T M_{5i} + M_{7i}^T I_{G4i}M_{7i} \tag{4.62}$$

Para el cuerpo 5

Desarrollando el término $\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j}$

Se tiene:

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\left(m_5\left(v_{G5}^p\right)^T v_{G5}^p + \left(\omega_{o5}^p\right)^T (I_{G5}\omega_{o5}^p\right) + m_5 g^T r_{G5}^o\right)$$

(4.63)

Sustituyendo las ecuaciones (4.47), (4.49) en la ecuación (4.63) y agrupando:

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_5\left(v_{G5}^{p}\right)^{T} v_{G5}^{p} + \left(\omega_{o5}^{p}\right)^{T}\left(I_{G5}\omega_{o5}^{p}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_5(M_8\dot{q}\,)^T M_8\dot{q}\ + (M_9\dot{q}\,)^T(I_{G5}M_9\dot{q}\,)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_5\,\dot{q}^{\,T}(M_8^T M_8)\dot{q}\ + \dot{q}^{\,T}(M_9^T I_{G5} M_9)\dot{q}\,\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{q}^{\,T}(m_5\,M_8^T M_8 + M_9^T I_{G5} M_9)\dot{q}\,\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{q}^{\,T} N_5 \dot{q}\,\right)$$

Efectuando la derivada:

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j} N_5\dot{q}\ + \dot{q}^{\,T} N_5 \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{4.64}$$

Donde N_5 es de 6x6:

$$N_5 = m_5\,M_8^T M_8 + M_9^T I_{G5} M_9 \tag{4.65}$$

Al evaluar el término $\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}$, dependerá que valor tome j, de tal manera que se tienen los siguientes resultados para diferente valor del iterador j. De esta forma para:

$j = 1$

$$\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{7,6i}}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right] = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$j = 2$

$$\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]$$

$$= \frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{\theta}_{8,7i}}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right] = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

$j = 3$

$$\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{9,8i}}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right] = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$$

$j = 4$

$$\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_4} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_4}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{11,10i}}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right] = [0, 0, 0, 1, 0, 0]$$

$j = 5$

$$\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_5} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_5}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{12,11i}}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right] = [0, 0, 0, 0, 1, 0]$$

$j = 6$

$$\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_5} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_5}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{z}_{10,9i}}\left[\dot{\theta}_{7,6i}, \dot{\theta}_{8,7i}, \dot{\theta}_{9,8i}, \dot{\theta}_{11,10i}, \dot{\theta}_{12,11i}, \dot{z}_{10,9i}\right] = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

Por lo tanto, se hace notar que al derivar el término $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}$ respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

Ahora, tomando la ecuación (4.53) y derivando respecto al tempo tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

(4.66)

Desarrollando la derivada con respecto al tiempo para cada elemento:

Desarrollando el término $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}\right)$

Derivando la ecuación (4.54) y agrupando se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j} N_{2i}\dot{q} \; + \dot{q}^{\,T} N_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}\frac{dN_{2i}}{dt}\dot{q} \; + \frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}\frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{d\dot{q}^{\,T}}{dt}N_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}^{\,T}\frac{dN_{2i}}{dt}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{2i}\dot{q} \; + \frac{\partial \dot{q}^{\,T}}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}\ddot{q} \; + \ddot{q}^{\,T}N_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}^{\,T}\dot{N}_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

Tenemos las siguientes identidades:

$$\dot{q}^T\left(\dot{N}_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \dot{q}^T A = A^T\dot{q} = \left(\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{2i}^T\right)\dot{q}$$

(4.67)

$$\ddot{q}^T\left(N_{2i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \ddot{q}^T B = B^T\ddot{q} = \left(\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}^T\right)\ddot{q}$$

(4.68)

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{2i}\dot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}\ddot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}^T\ddot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{2i}^T\dot{q}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}(N_{2i} + N_{2i}^T)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{N}_{2i} + \dot{N}_{2i}^T\right)\dot{q}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}(2N_{2i})\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\left(2\dot{N}_{2i}\right)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}\ddot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{2i}\dot{q}$$

Donde N_{2i} es simétrica, es decir es decir $N_{2i} = N_{2i}^T$, comprobando lo anterior:

$$N_{2i} = m_{2i}M_{1i}^T M_{1i} + M_{2i}^T I_{G2i} M_{2i}$$

$$N_{2i}^T = (m_{2i}M_{1i}^T M_{1i})^T + (M_{2i}^T I_{G2i} M_{2i})^T$$

$$= m_{2i}M_{1i}^T M_{1i} + M_{2i}^T I_{G2i}^T M_{2i}$$

$$N_{2i}^T = m_{2i}M_{1i}^T M_{1i} + M_{2i}^T I_{G2i} M_{2i} = N_{2i}$$

Al cumplirse que $I_{G2i} = I_{G2i}^T$ se comprueba que la matriz N_{2i} es simétrica, finalmente se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \mathrm{D}_{2ij}\ddot{q} + \mathrm{V}_{2ij}\dot{q} \tag{4.69}$$

Dónde:

$$\mathrm{D}_{2ij} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}N_{2i}$$

(4.70)

$$\mathrm{V}_{2ij} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{2i}$$

Además:

$$\dot{N}_{2i} = m_{2i}\left(\dot{M}_{1i}^T M_{1i} + M_{1i}^T \dot{M}_{1i}\right) + \left(\dot{M}_{2i}^T I_{G2i} M_{2i} + M_{2i}^T I_{G2i} \dot{M}_{2i}\right)$$

$$M_{1i} = [e_{2i}, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$M_{2i} = [k_{1i}, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$e_{2i} = k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}$$

$$k_{1i} = k_{7i}^{7i}$$

Derivando:

$$\dot{M}_{1i} = [\dot{e}_{2i}, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\dot{M}_{2i} = \left[\dot{k}_{1i}, 0, 0, 0, 0, 0\right]$$

$$\dot{k}_{1i} = \dot{k}_{7i}^{7i} = 0$$

$$\dot{e}_{2i} = \dot{k}_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i} + k_{7i}^{7i} \times \dot{r}_{G2i'}^{7i}$$

$$= k_{7i}^{7i} \times \dot{r}_{G2i'}^{7i} = k_{7i}^{7i} \times v_{G2i'}^{7i} = k_{7i}^{7i} \times \left(\omega_{o2i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}\right)$$

$$= k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}\right)$$

Donde $\dot{k}_{7i}^{7i} = 0$, ya que no cambia de magnitud ni dirección.

Desarrollando $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}\right)}$

Derivando la ecuación (4.57) y agrupando se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_{3i}\dot{q} + \dot{q}^T N_{3i} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}(N_{3i} + N_{3i}^T)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{N}_{3i} + \dot{N}_{3i}^T\right)\dot{q}$$

$$= \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_{3i}\ddot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{3i}\dot{q}$$

Finalmente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \mathrm{D}_{3ij}\ddot{q} + \mathrm{V}_{3ij}\dot{q}$$

(4.71)

Dónde:

$$\mathrm{D}_{3ij} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_{3i}$$

(4.72)

$$\mathrm{V}_{3ij} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{N}_{3i}$$

Además:

$$\dot{N}_{3i} = m_{3i}\left(\dot{M}_{3i}^T M_{3i} + M_{3i}^T \dot{M}_{3i}\right) + \left(\dot{M}_{4i}^T I_{G3i} M_{4i} + M_{4i}^T I_{G3i} \dot{M}_{4i}\right)$$

$$M_{3i} = [e_{3i}, 0, 0, 0, 0, k_{2i}]$$

$$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$e_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)$$

$$k_{2i} = k_{9i}^{9i}$$

$$k_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$$

$$R_{7i}^{9i} = R_{z4}(-\theta_{9.8i}) R_{z5}(-\theta_{8.7i}) R_{z6}(-\theta_{7,6i})$$

Derivando:

$$\dot{M}_{3i} = \left[\dot{e}_{3i}, 0, 0, 0, 0, \dot{k}_{2i}\right]$$

$$\dot{M}_{4i} = \left[\dot{k}_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0\right]$$

$$\dot{k}_{2i} = \dot{k}_{9i}^{9i} = \omega_{o2i}^{9i} \times k_{9i}^{9i} = R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i} = \left(R_{7i}^{9i} \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}\right) \times k_{9i}^{9i}$$

$$\dot{e}_{3i} = \dot{R}_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{r}_{9i}^{9i} + \dot{r}_{G3i'}^{9i}\right)$$

$$\dot{k}_{3i} = \dot{R}_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$$

Con el fin de obtener los términos del tipo $\dot{R}_\theta r$ de manera vectorial, se sabe que la velocidad de un vector que solo cambia de dirección se escribe matricialmente de la siguiente manera:

$$v = Wr$$

Donde Wes la matriz de velocidad. Tal que:

$$W = \dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

De forma general se tiene:

$$v = Wr = \dot{R}R^T r = \omega \times r$$

Donde ω es el vector axial de la matriz anti simétrica W. Tomando en cuenta lo anterior, para $\dot{R}_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$, se tiene:

$$\begin{aligned} v_{7,9i} &= \dot{R}_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \\ &= \dot{R}_{7i}^{9i}\, I\, k_{7i}^{7i} \\ &= \dot{R}_{7i}^{9i} R_{7i}^{9i^T} \left(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \\ &= W\left(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \\ v_{7,9i} &= \omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la siguiente nomenclatura $\omega_{i,k}^{j}$; velocidad angular de la base k vista desde i y proyectada en j. De tal forma que:

$$\dot{R}_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} = \omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \tag{4.73}$$

Para obtener $\omega_{9,7i}^{9i}$ se tiene de la ecuación (3.17):

$$\omega_{o3i}^{9i} = R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i}$$

Dónde:

$$\omega_{7,9i}^{9i} = \omega_{o3i}^{9i}$$

La derivada de la matriz de rotación R_{7i}^{9i}, toma en cuenta los giros $\theta_{9.8i}, \theta_{8.7i}$

En la ecuación anterior se tiene la velocidad $\omega_{7,9i}^{9i}$ de la base $9i$ vista desde la base $7i$ proyectada en la base $9i$, con el fin de que esta sea vista desde la base $9i$, se aplica la propiedad de la velocidad angular (McGill, y otros), $\omega_{9,7i}^{9i} = -\omega_{7,9i}^{9i}$

Ahora tenemos:

$$\omega_{9,7i}^{9i} = -\omega_{o3i}^{9i}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de velocidad:

$$\omega_{9,7i}^{9i} = -R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i}$$

$$\omega_{9,7i}^{9i} = -R_{7i}^{9i}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i} \tag{4.74}$$

Para obtener los términos $\dot{r}_{9i}^{9i}\ y\ \dot{r}_{G3i'}^{9i}$, tenemos:

$$\dot{r}_{9i}^{9i} = v_{9i}^{9i}$$

De la ecuación (3.19) tenemos:

$$v_{9i}^{9i} = \omega_{o2i}^{9i} \times r_{9i}^{9i}$$

$$= R_{o}^{9i}(\omega_{o2i}^{o}) \times r_{9i}^{9i}$$

$$= R_{o}^{9i}\left(R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i}\right) \times r_{9i}^{9i}$$

$$= R_{7i}^{9i}\left(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9i}^{9i}$$

Para $\dot{r}_{G3i'}^{9i}$:

$$\dot{r}_{G3i'}^{9i} = v_{G3i'}^{9i}$$

De las ecuaciones (3.13) y (3.19) tenemos:

$$v_{G3i'}^{9i} = v_{o3i}^{9i} + \omega_{o3i}^{9i} \times r_{G3i'}^{9i}$$
$$= R_o^{9i} v_{o3i}^{o} + R_o^{9i}\left(R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i}\right) \times r_{G3i'}^{9i}$$
$$= R_o^{9i} R_{9i}^{o} v_{3i}^{9i} + R_{7i}^{9i}\left(\dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{G3i'}^{9i}$$
$$= R_{9i}^{9i} \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + R_{7i}^{9i}\left(\dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{G3i'}^{9i}$$

Finalmente tenemos:

$$\dot{r}_{9i}^{9i} + \dot{r}_{G3i'}^{9i} = R_{7i}^{9i}\left(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9i}^{9i} + \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + R_{7i}^{9i}\left(\dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{G3i'}^{9i}$$

Simplificando y agrupando:

$$v_{G3i}^{9i} = \dot{r}_{9i}^{9i} + \dot{r}_{G3i'}^{9i} = \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7.6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right] \tag{4.75}$$

Reescribiendo $\dot{e}_{3i}$ y $\dot{k}_{3i}$, considerando las ecuaciones (4.73), (4.74) y (4.75):

$$\dot{e}_{3i} = (\omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(v_{G3i}^{9i}\right)$$
$$= (\omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7.6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right]\right)$$
$$\dot{k}_{3i} = \omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$$

Desarrollando $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}\right)}$

Derivando la ecuación (4.61) y agrupando se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_{4i}\dot{q} + \dot{q}^T N_{4i}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}(N_{4i} + N_{4i}^T)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{N}_{4i} + \dot{N}_{4i}^T\right)\dot{q}$$
$$= \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_{4i}\ddot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\dot{N}_{4i}\dot{q}$$

Finalmente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \mathrm{D}_{4ij}\ddot{q} + \mathrm{V}_{4ij}\dot{q}$$

(4.76)

Dónde:

$$\mathrm{D}_{4ij} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_{4i}$$

(4.77)

$$\mathrm{V}_{4ij} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{N}_{4i}$$

Además:

$$\dot{N}_{4i} = m_{4i}\left(\dot{M}_{5i}^T M_{5i} + M_{5i}^T \dot{M}_{5i}\right) + \left(\dot{M}_{7i}^T I_{G4i} M_{7i} + M_{7i}^T I_{G4i} \dot{M}_{7i}\right)$$

$$M_{5i} = [e_{4i}, 0, 0, e_{5i}, 0, k_{4i}]$$

$$M_{7i} = R_{9i}^{11i} M_{4i} + M_{6i}$$

$$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$M_{6i} = [0, 0, 0, k_{5i}, 0, 0]$$

$$e_{4i} = R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i})$$

$$e_{5i} = (i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i})$$

$$k_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$$

$$k_{4i} = R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$$

$$k_{5i} = i_{11i}^{11i}$$

$$R_{9i}^{11i} = R_{z4}(-\theta_{11,10i})$$

$$R_{7i}^{11i} = R_{z4}(-\theta_{11,10i}) R_{z4}(-\theta_{9,8i}) R_{z5}(-\theta_{8,7i})$$

Derivando:

$\dot{M}_{5i} = \left[\dot{e}_{4i}, 0, 0, \dot{e}_{5i}, 0, \dot{k}_{4i}\right]$

$\dot{M}_{7i} = \dot{R}_{9i}^{11i} M_{4i} + R_{9i}^{11i} \dot{M}_{4i} + \dot{M}_{6i}$

$= \dot{R}_{9i}^{11i} (R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}) + R_{9i}^{11i} \dot{M}_{4i} + \dot{M}_{6i}$

$= \dot{R}_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} + R_{9i}^{11i} \dot{M}_{4i} + \dot{M}_{6i}$

$\dot{M}_{4i} = \left[\dot{k}_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0\right]$

$\dot{M}_{6i} = \left[0, 0, 0, \dot{k}_{5i}, 0, 0\right]$

$\dot{e}_{4i} = \dot{R}_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{r}_{9ci}^{11i} + \dot{r}_{G4i'}^{11i}\right)$

$\dot{e}_{5i} = \dot{i}_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \dot{r}_{G4i'}^{11i}$

$\dot{k}_{3i} = \omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$

$\dot{k}_{4i} = \dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$

$\dot{k}_{5i} = \dot{i}_{11i}^{11i} = \omega_{o4i}^{11i} \times i_{11i}^{11i} = \left(R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i}\right) \times i_{11i}^{11i} = R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} \times i_{11i}^{11i}$

Para obtener el término $\dot{R}_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}$, hacemos algo similar al procedimiento para obtener el término $\dot{R}_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$, se tiene:

$$v_{7,11i} = \dot{R}_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}$$

$$= \dot{R}_{7i}^{11i} \, I \, k_{7i}^{7i}$$

$$= \dot{R}_{7i}^{11i} R_{7i}^{11i^T} \left(R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}\right)$$

$$= W\left(R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}\right)$$

$$v_{7,11i} = \omega_{11,7i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}$$

De tal forma que:

$$\dot{R}_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} = \omega_{11,7i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \tag{4.78}$$

Para obtener $\omega_{11,7i}^{11i}$ se tiene de la ecuación. (3.29):

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i}$$

La derivada de la matriz de rotación R_{9i}^{11i}, toma en cuenta los giros $\theta_{11.10i}, \theta_{9.8i}, \theta_{8,7i}, \theta_{7,6i}$ por lo tanto reescribiendo la ecuación anterior:

$$\omega_{7,11i}^{11i} = \omega_{o4i}^{11i} - R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} = \omega_{4i}^{11i}$$

La velocidad $\omega_{9,11i}^{11i}$, es la velocidad de la base $11i$ vista desde la base $9i$ proyectada en la base $11i$, con el fin de que esta sea vista desde la base $11i$. Tal que:

$$\omega_{11,7i}^{11i} = -\omega_{7,11i}^{11i}$$
$$= -\omega_{4i}^{11i}$$

Dónde:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de velocidad:

$$\omega_{11,7i}^{11i} = -\omega_{4i}^{11i}$$
$$\omega_{11,7i}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$
$$\omega_{11,7i}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} \qquad (4.79)$$

Para obtener el término $\dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$, se tiene:

$$v_{9,11i} = \dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$$
$$= \dot{R}_{9i}^{11i}\ I\ k_{9i}^{9i}$$
$$= \dot{R}_{9i}^{11i} R_{9i}^{11i^T}\left(R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}\right)$$
$$= W\left(R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}\right)$$
$$v_{9,11i} = \omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$$

De tal forma que:

$$\dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} = \omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} \tag{4.80}$$

Para obtener $\omega_{11,9i}^{11i}$ se tiene de la ecuación (3.29):

$$\omega_{o4i}^{11i} = R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} + \omega_{4i}^{11i}$$

La derivada de la matriz de rotación R_{9i}^{11i}, de la ecuación (4.80) toma en cuenta los giros $\theta_{11.10i}, \theta_{9.8i}$, por lo tanto reescribiendo la ecuación anterior:

$$\omega_{9,11i}^{11i} = \omega_{o4i}^{11i} - R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} = \omega_{4i}^{11i}$$

La velocidad $\omega_{9,11i}^{11i}$, es la velocidad de la base $11i$ vista desde la base $9i$ proyectada en la base $11i$, con el fin de que esta sea vista desde la base $11i$. Tal que:

$$\omega_{11,9i}^{11i} = -\omega_{4i}^{11i}$$

Dónde:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de velocidad:

$$\omega_{11,9i}^{11i} = -\omega_{4i}^{11i}$$

$$\omega_{11,9i}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} \tag{4.81}$$

En las ecuaciones de $\dot{e}_{4i}$ y $\dot{e}_{5i}$ tenemos los términos $\dot{r}_{9ci}^{9i}$, $\dot{r}_{G4i'}^{9i}$, y se realiza lo siguiente para obtenerlos. Tal que:

Para $\dot{r}_{9ci}^{9i}$:

$$\dot{r}_{9ci}^{9i} = v_{9ci}^{9i}$$

De la ecuación (3.23) tenemos:

$$v_{9ci}^{9i} = R_o^{9i}(v_{o3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o)$$

$$= R_o^{9i}(R_{9i}^o v_{3i}^{9i}) + R_o^{9i}(R_{7i}^o \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^o)$$

$$= R_{9i}^{9i} \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + R_{7i}^{9i}\left(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9ci}^{9i}$$

Para $\dot{r}_{G4i'}^{11i}$:

$$\dot{r}_{G4i'}^{11i} = v_{G4i'}^{11i}$$

De las ecuaciones (3.23) y (3.24) tenemos:

$$v_{G4i'}^{11i} = R_o^{11i}(\omega_{o4i}^o \times r_{G4i'}^o)$$

$$= R_o^{11i}(\omega_{3i}^o + \omega_{4i}^o) \times r_{G4i'}^{11i}$$

$$= R_o^{11i}(R_{9i}^o \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}$$

$$= (R_{9i}^{11i}(R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i}) + R_{11i}^{11i} \omega_{4i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}$$

$$= (R_{7i}^{11i} \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}$$

Finalmente tenemos:

$$\dot{r}_{G4i'}^{11i} = (R_{7i}^{11i} \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i} \tag{4.82}$$

$$\dot{r}_{9ci}^{9i} + \dot{r}_{G4i'}^{11i} = \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + R_{7i}^{9i} \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} \times r_{9ci}^{9i} + (R_{7i}^{11i} \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}$$

Simplificando y agrupando:

$$\dot{r}_{9ci}^{9i} + \dot{r}_{G4i'}^{11i} = \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right] + \dot{\theta}_{11.10i}\left[i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right] \tag{4.83}$$

Reescribiendo $\dot{e}_{4i}, \dot{e}_{5i}, \dot{k}_{4i}$ y $\dot{M}_{7i}$ considerando las ecuaciones (4.78), (4.80), (4.82) y (4.83):

$$\dot{e}_{4i} = \omega_{11,7i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right] + \dot{\theta}_{11.10i}\left[i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right]\right)$$

$$\dot{e}_{5i} = \left(R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} \times i_{11i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{11i} \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$\dot{k}_{4i} = \omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$$

$$\dot{M}_{7i} = \omega_{11,7i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} + R_{9i}^{11i} \dot{M}_{4i} + \dot{M}_{6i}$$

Desarrollando $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j}\right)}$

Derivando la ecuación (4.63) y agrupando se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_5 \dot{q} + \dot{q}^T N_5 \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}(N_5 + N_5^T)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{N}_5 + \dot{N}_5^T\right)\dot{q}$$

$$= \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_5 \ddot{q} + \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{N}_5 \dot{q}$$

Finalmente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j}\right) = \mathrm{D}_{5j}\ddot{q} + \mathrm{V}_{5j}\dot{q} \qquad (4.84)$$

Dónde:

$$\mathrm{D}_{5j} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} N_5$$

$$\mathrm{V}_{5j} = \frac{\partial \dot{q}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{N}_5 \tag{4.85}$$

Además:

$\dot{N}_5 = m_5\left(\dot{M}_8^T M_8 + M_8^T \dot{M}_8\right) + \left(\dot{M}_9^T I_{G5} M_9 + M_9^T I_{G5} \dot{M}_9\right)$

$M_8 = [e_6, 0, 0, e_7, 0, k_6]$

$M_9 = R_{9i}^p M_{4i} + R_{11i}^p M_{6i}$

$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$M_{6i} = [0, 0, 0, k_{5i}, 0, 0]$

$e_6 = R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^p \times r_{11i}^p)$

$e_7 = (R_{11i}^p i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^p)$

$k_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$

$k_{5i} = i_{11i}^{11i}$

$k_6 = R_{9i}^p k_{9i}^{9i}$

$R_{7i}^p = R_{z6}(\delta 14pi) R_{z1}(x1514i) R_{z6}(\delta 1615i) R_{z4}(\delta 1716i) R_{z6}(\delta 1817i) R_{z5}\left(-\theta_{12,11i}\right) R_{z4}\left(-\theta_{11,10i}\right)$
$\quad R_{z4}(-\theta_{9,8i}) R_{z5}(-\theta_{8,7i}) R_{z6}(-\theta_{7,6i})$

$R_{9i}^p = R_{z6}(\delta 14pi) R_{z1}(x1514i) R_{z6}(\delta 1615i) R_{z4}(\delta 1716i) R_{z6}(\delta 1817i) R_{z5}\left(-\theta_{12,11i}\right) R_{z4}\left(-\theta_{11,10i}\right)$
$\quad R_{z4}(-\theta_{9,8i})$

$R_{11i}^p = R_{z6}(\delta 14pi) R_{z1}(x1514i) R_{z6}(\delta 1615i) R_{z4}(\delta 1716i) R_{z6}(\delta 1817i) R_{z5}(-\theta_{12,11i}) R_{z4}(-\theta_{11,10i})$

Derivando:

$\dot{M}_8 = [\dot{e}_6, 0, 0, \dot{e}_7, 0, \dot{k}_6]$

$\dot{M}_9 = \dot{R}^p_{9i} M_{4i} + R^p_{9i} \dot{M}_{4i} + \dot{R}^p_{11i} M_{6i} + R^p_{11i} \dot{M}_{6i}$

$= \dot{R}^p_{9i}(R^{9i}_{7i} k^{7i}_{7i}) + R^p_{9i} \dot{M}_{4i} + \dot{R}^p_{11i} i^{11i}_{11i} + R^p_{11i} \dot{M}_{6i}$

$= \dot{R}^p_{7i} k^{7i}_{7i} + R^p_{9i} \dot{M}_{4i} + \dot{R}^p_{11i} i^{11i}_{11i} + R^p_{11i} \dot{M}_{6i}$

$\dot{M}_{4i} = [\dot{k}_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\dot{M}_{6i} = [0, 0, 0, \dot{k}_{5i}, 0, 0]$

$\dot{e}_6 = \dot{R}^p_{7i} k^{7i}_{7i} \times (r^p_{9ci} \times r^p_{11i}) + R^p_{7i} k^{7i}_{7i} \times (\dot{r}^p_{9ci} \times \dot{r}^p_{11i})$

$\dot{e}_7 = \dot{R}^p_{11i} i^{11i}_{11i} \times r^p_{11i} + R^p_{11i} i^{11i}_{11i} \times \dot{r}^p_{11i}$

$\dot{k}_{3i} = \omega^{9i}_{9,7i} \times R^{9i}_{7i} k^{7i}_{7i}$

$\dot{k}_{5i} = R^{11i}_{9i} \omega^{9i}_{3i} \times i^{11i}_{11i}$

$\dot{k}_6 = \dot{R}^p_{9i} k^{9i}_{9i}$

Para obtener el término $\dot{R}^p_{7i} k^{7i}_{7i}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
v_{7,p} &= \dot{R}^p_{7i} k^{7i}_{7i} \\
&= \dot{R}^p_{7i}\, I\, k^{7i}_{7i} \\
&= \dot{R}^p_{7i} {R^p_{7i}}^T (R^p_{7i} k^{7i}_{7i}) \\
&= W(R^p_{7i} k^{7i}_{7i}) \\
v_{7,p} &= \omega^p_{p,7i} \times R^p_{7i} k^{7i}_{7i}
\end{aligned}$$

De tal forma que:

$$\dot{R}^p_{7i} k^{7i}_{7i} = \omega^p_{p,7i} \times R^p_{7i} k^{7i}_{7i} \tag{4.86}$$

Para Obtener $\omega_{p,7i}^{p}$ se toma como referencia la ecuación. (3.24), considerando la transformación R_{o}^{p}:

$$\omega_{o4i}^{p} = R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

La derivada de la matriz de rotación R_{7i}^{p}, presente en la ecuación (4.86) toma en cuenta los giros $\theta_{11.10i}, \theta_{11.10i}, \theta_{9.8i}, \theta_{8,7i}, \theta_{7,6i}$ por lo tanto reescribiendo la ecuación anterior:

$$\omega_{7,p}^{p} = \omega_{o4i}^{p} = R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

La velocidad $\omega_{7,p}^{p}$, es la velocidad de la base p vista desde la base $7i$ proyectada en la base p, con el fin de que esta sea vista desde la base p. Tal que:

$$\omega_{p,7i}^{p} = -\omega_{7,p}^{p}$$

$$= -R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} - R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

Dónde:

$$\omega_{3i}^{9i} = R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} = R_{7i}^{9i}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}$$

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de velocidad:

$$\omega_{p,7i}^{p} = -R_{9i}^{p}\omega_{3i}^{9i} - R_{11i}^{p}\omega_{4i}^{11i}$$

$$\omega_{p,7i}^{p} = -R_{9i}^{p}(R_{7i}^{9i}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) - R_{11i}^{p}\dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}$$

$$\omega_{p,7i}^{p} = -R_{7i}^{p}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i} - R_{11i}^{p}\dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i} \quad (4.87)$$

Para obtener el término $\dot{R}_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}$, se tiene:

$$v_{9,p} = \dot{R}_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}$$

$$= \dot{R}_{9i}^{p}\; I\; k_{9i}^{9i}$$

$$= \dot{R}_{9i}^{p}{R_{9i}^{p}}^{T}\left(R_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}\right)$$

$$= W\left(R_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}\right)$$

$$v_{9,p} = \omega_{p,9i}^{p} \times R_{9i}^{p}k_{9i}^{9i}$$

De tal forma que:

$$\dot{R}_{9i}^{p} k_{9i}^{9i} = \omega_{p,9i}^{p} \times R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i} \tag{4.88}$$

Para obtener $\omega_{p,9i}^{p}$ se toma en consideración la ecuación (3.24), tomando en cuenta la transformación R_{o}^{p}:

$$\omega_{o4i}^{p} = R_{9i}^{p} \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{p} \omega_{4i}^{11i}$$

La derivada de la matriz de rotación R_{9i}^{p}, en la ecuación (4.88) toma en cuenta los giros $\theta_{12.11i}, \theta_{11.10i}, \theta_{9.8i}$, por lo tanto reescribiendo la ecuación anterior:

$$\omega_{9,p}^{p} = \omega_{o4i}^{p} - R_{9i}^{p} \omega_{3i}^{9i} = R_{11i}^{p} \omega_{4i}^{p}$$

La velocidad $\omega_{9,p}^{p}$, es la velocidad de la base p vista desde la base $9i$ proyectada en la base p, con el fin de que esta sea vista desde la base p. Tal que:

$$\omega_{p,9i}^{p} = -\omega_{9,p}^{p}$$

$$= -R_{11i}^{p} \omega_{4i}^{p}$$

Dónde:

$$\omega_{4i}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de velocidad:

$$\omega_{p,9i}^{p} = -R_{11i}^{p} \omega_{4i}^{p}$$

$$\omega_{p,9i}^{p} = -R_{11i}^{p} \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i} \tag{4.89}$$

Para obtener el término $\dot{R}_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}$, se tiene:

$$v_{11,p} = \dot{R}_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}$$

$$= \dot{R}_{11i}^{p} \, I \, i_{11i}^{11i}$$

$$= \dot{R}_{11i}^{p} R_{11i}^{p\,T} \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right)$$

$$= W\left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right)$$

$$v_{11,p} = \omega_{p,11i}^{p} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}$$

De tal forma que:

$$\dot{R}^{p}_{11i} i^{11i}_{11i} = \omega^{p}_{p,11i} \times R^{p}_{11i} i^{11i}_{11i} \tag{4.90}$$

Ahora para obtener $\omega^{p}_{p,11i}$ se toma en consideración la ecuación (3.24), tomando en cuenta la transformación R^{p}_{o}:

$$\omega^{p}_{o4i} = R^{p}_{9i}\omega^{9i}_{3i} + R^{p}_{11i}\omega^{11i}_{4i}$$

La derivada de la matriz de rotación R^{p}_{11i}, presente en la ecuación (4.90) toma en cuenta los giros $\theta_{12.11i}, \theta_{11.10i}$, por lo tanto reescribiendo la ecuación anterior:

$$\omega^{p}_{11,p} = \omega^{p}_{o4i} - R^{p}_{9i}\omega^{9i}_{3i} = R^{p}_{11i}\omega^{p}_{4i}$$

La velocidad $\omega^{p}_{11,p}$, es la velocidad de la base p vista desde la base 11i proyectada en la base p, con el fin de que esta sea vista desde la base p. Tal que:

$$\omega^{p}_{p,11i} = -\omega^{p}_{11,p}$$
$$= -R^{p}_{11i}\omega^{p}_{4i}$$

Dónde:

$$\omega^{11i}_{4i} = \dot{\theta}_{11,10i} i^{11i}_{11i}$$

Sustituyendo cada uno de los términos de velocidad:

$$\omega^{p}_{p,11i} = -R^{p}_{11i}\omega^{p}_{4i}$$
$$\omega^{p}_{p,11i} = -R^{p}_{11i}\dot{\theta}_{11,10i} i^{11i}_{11i} \tag{4.91}$$

Donde podemos ver que:

$$\omega^{p}_{p,9i} = \omega^{p}_{p,11i}$$

En las ecuaciones de $\dot{e}_6$ y $\dot{e}_7$ tenemos los términos $\dot{r}^{p}_{9ci}$, $\dot{r}^{p}_{11i}$, se realiza lo siguiente para obtenerlos. Tal que:

Para $\dot{r}^{p}_{9ci}$:

$$\dot{r}^{p}_{9ci} = v^{p}_{9ci}$$

De la ecuación (3.23) tenemos, considerando la transformación R_o^{9i}:

$$v_{9ci}^{p} = R_o^p(v_{o3i}^o + \omega_{o3i}^o \times r_{9ci}^o)$$

$$= R_o^p(R_{9i}^o v_{3i}^{9i}) + R_o^p(R_{7i}^o \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^o)$$

$$= R_{9i}^p \dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + R_{7i}^p\left(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9ci}^p$$

Para $\dot{r}_{G4i'}^{11i}$:

$$\dot{r}_{11i}^p = v_{11i}^p$$

Tenemos:

$$v_{11i}^p = \omega_{o5}^o \times r_{11i}^o$$

Dónde:

$$\omega_{o5}^o = \omega_{o4i}^o = \omega_{3i}^o + \omega_{4i}^o$$

Tal que, sustituyendo la expresión de velocidad angular en la ecuación anterior, tenemos:

$$v_{11i}^p = R_o^p((\omega_{3i}^o + \omega_{4i}^o) \times r_{11i}^o)$$

$$= R_o^p(\omega_{3i}^o + \omega_{4i}^o) \times r_{11i}^p$$

$$= R_o^p(R_{9i}^o \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^o \omega_{4i}^{11i}) \times r_{11i}^p$$

$$= (R_{9i}^p(R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i}) + R_{11i}^p \omega_{4i}^{11i}) \times r_{11i}^p$$

$$= (R_{7i}^p \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^p \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^p$$

Finalmente tenemos:

$$\dot{r}_{11i}^p = (R_{7i}^p \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^p \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^p \tag{4.92}$$

$$\dot{r}_{9ci}^p + \dot{r}_{11i}^p = \dot{z}_{10,9i}\left[R_{9i}^p k_{9i}^{9i}\right] + \dot{\theta}_{7,6i}\left[\left(R_{7i}^p k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9ci}^p\right] + (R_{7i}^p \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^p \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^p$$

Simplificando y agrupando:

$$\dot{r}_{9ci}^p + \dot{r}_{11i}^p = \dot{z}_{10,9i}\left[R_{9i}^p k_{9i}^{9i}\right] + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^p + r_{11i}^p)\right] + \dot{\theta}_{11.10i}\left[R_{11i}^p i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^p\right] \tag{4.93}$$

Reescribiendo $\dot{e}_{6i}, \dot{e}_{7i}, \dot{k}_6$ y $\dot{M}_9$ considerando las ecuaciones (4.86), (4.88), (4.90), (4.92) y (4.93):

$$\dot{M}_9 = (\omega_{p,7i}^{p} \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i}) + R_{9i}^{p} \dot{M}_{4i} + (\omega_{p,11i}^{p} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}) + R_{11i}^{p} \dot{M}_{6i}$$

$$\dot{e}_6 = (\omega_{p,7i}^{p} \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i}) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p}\right) + R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i}\left[R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}\right] + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{p} + r_{11i}^{p})\right] + \dot{\theta}_{11.10i}\left[R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p}\right]\right)$$

$$\dot{e}_7 = (\omega_{p,11i}^{p} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p} + R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times ((R_{7i}^{p} \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{p} \dot{\theta}_{11.10i} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p})$$

$$\dot{k}_6 = \omega_{p,9i}^{p} \times R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}$$

4.3.2. Desarrollo del segundo término de la ecuación Lagrangiana

Tomando ecuación (4.52) y aplicando la derivada parcial con respecto a la variable de coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial}{\partial q_j}(L_{1i} + L_{2i} + L_{3i} + L_{4i}) + \frac{\partial L_5}{\partial q_j}$$

Desarrollando $\left(\boldsymbol{\frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j}}\right)$

L_{2i}, se define como:

$$L_{2i} = \frac{1}{2}\left(m_{3i}\left(v_{G2i}^{7i}\right)^T v_{G2i}^{7i} + \left(\omega_{o2i}^{7i}\right)^T (I_{G2i}\omega_{o2i}^{7i}\right) + m_{2i} g^T r_{G2i}^{o}$$

Simplificando:

$$L_{2i} = \frac{1}{2}(\dot{q}^{\,T} N_{2i} \dot{q}\,) + m_{2i} g^T r_{G2i}^{o}$$

Dónde:

$$N_{2i} = m_{2i}\, M_{1i}^T M_{1i} + M_{2i}^T I_{G2i} M_{2i}$$

$M_{1i} = [e_{2i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$M_{2i} = [k_{1i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$e_{2i} = k_{7i}^{7i} \times\ r_{G2i'}^{7i}$

$$k_{1i} = k_{7i}^{7i}$$

Derivando respecto a q_j:

$$\frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{q}^{\,T} N_{2i}\dot{q}\,) + \frac{\partial}{\partial q_j}(m_{2i} g^T r^o_{G2i})$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_{2i}}{\partial q_j}\dot{q}\; + m_{2i} g^T \frac{\partial r^o_{G2i}}{\partial q_j}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j} = \mathrm{V}'_{2ij}\dot{q} + \mathrm{C}_{2ij} \tag{4.94}$$

Dónde:

$$\mathrm{V}'_{2ij} = \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_{2i}}{\partial q_j}\dot{q} \tag{4.95}$$

$$\mathrm{C}_{2ij} = m_{2i} g^T \frac{\partial r^o_{G2i}}{\partial q_j}$$

A su vez:

$$\frac{\partial N_{2i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(m_{2i}\, M^T_{1i} M_{1i}) + \frac{\partial}{\partial q_j}(M^T_{2i} I_{G2i} M_{2i})$$

$$= m_{2i}\left(\frac{\partial M^T_{1i}}{\partial q_j} M_{1i} + M^T_{1i}\frac{\partial M_{1i}}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial M^T_{2i}}{\partial q_j} I_{G2i} M_{2i} + M^T_{2i} I_{G2i}\frac{\partial M_{2i}}{\partial q_j}\right)$$

Dónde:

$$\frac{\partial M_{1i}}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j}, 0, 0, 0, 0, 0\right]$$

$$\frac{\partial M_{2i}}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial k_{1i}}{\partial q_j}, 0, 0, 0, 0, 0\right]$$

A continuación se procederá a derivar e_{2i} y k_{1i}, respecto a q_j para ser utilizadas en las ecuaciones anteriores. A lo largo del procedimiento se presentarán dos tipos de vectores del tipo k_m, siendo ambos funciones de $\theta_{7,6i}, \theta_{11,10i}, z_{10,9i}$. Con el fin de obtener las derivadas parciales respecto a q_j de dichos vectores, se hará uso de las derivadas parciales respecto al tiempo de los mismos para posteriormente multiplicar cada lado de estas últimas por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, tal como sigue, derivando respecto al tiempo:

$$\frac{\partial k_m}{\partial t} = \frac{\partial k_m}{\partial \theta_{7,6i}}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} + \frac{\partial k_m}{\partial \theta_{11,10i}}\frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial t} + \frac{\partial k_m}{\partial z_{10,9i}}\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t}$$

Ahora multiplicando por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$:

$$\left(\frac{\partial k_m}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial k_m}{\partial \theta_{7,6i}}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial q_j} + \left(\frac{\partial k_m}{\partial \theta_{11,10i}}\frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial q_j} + \left(\frac{\partial k_m}{\partial z_{10,9i}}\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial q_j}$$

Finalmente agrupando de forma matricial:

$$\frac{\partial k_m}{\partial q_j} = J_{n,3x6}\frac{\partial q_i}{\partial q_j}$$

(4.96)

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{8,7i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{9,8i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{12,11i}}{\partial q_j}, \frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}\right]^T$$

Donde $J_{n,3x6}$ es una matriz de 3x6 y se obtiene factorizando los términos $\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{8,7i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{9,8i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_{12,11i}}{\partial q_j}, \frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}$.

El vector $e_{2i} = k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}$, está definido en la base $7i$, por lo tanto $k_{7i}^{7i} = [0, 0, 1]^T$ y $r_{G2i'}^{7i} = [x_{G2i'}, y_{G2i'}, z_{G2i'}]^T$no se presenta como una función de $\theta_{7,6i}$. De esta forma la derivada respecto a $\theta_{7,6i}$ aparenta ser cero. Sin embargo, físicamente, cuando el robot se mueve el vector $r_{G2i'}^{7i}$ va cambiando su orientación, debido al ángulo $\theta_{7,6i}$. Para poder encontrar su derivada respecto a q_j procedemos de la siguiente manera.

Derivando e_{2i} respecto al tiempo, se hace notar que es de tres componentes:

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial t} = \frac{\partial k_{7i}^{7i}}{\partial t} \times r_{G2i'}^{7i} + k_{7i}^{7i} \times \frac{\partial r_{G2i'}^{7i}}{\partial t}$$

$$= k_{7i}^{7i} \times \frac{\partial r_{G2i'}^{7i}}{\partial t}$$

$$= k_{7i}^{7i} \times (\omega_{o2i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

$$= k_{7i}^{7i} \times (R_{7i}^{7i}\, \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial t} = k_{7i}^{7i} \times (\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$

$$\left(\frac{\partial e_{2i}}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial q_j} = k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}\right)\frac{\partial t}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j} = k_{7i}^{7i} \times \left(k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} \tag{4.97}$$

Escribiendo matricialmente la ecuación anterior:

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j} = J_{1i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{1i} = \left[J_{1i,1}, 0, 0, 0, 0, 0\right] \qquad J_{1i,1} = k_{7i}^{7i} \times \left(k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}\right)$$

Para obtener $\frac{\partial k_{1i}}{\partial q_j} = \frac{\partial k_{7i}^{7i}}{\partial q_j}$, nos basaremos en la premisa de cualquier vector asociado a algún elemento del robot que no varié al tiempo, tampoco presentará variación respecto a cualquier otra variable del robot. De esta forma se tiene:

$$\frac{\partial k_{1i}}{\partial q_j} = \frac{\partial k_{7i}^{7i}}{\partial q_j} = 0 \tag{4.98}$$

Para obtener $\frac{\partial r_{G2i}^{o}}{\partial q_j}$, se parte de la ecuación (3.2):

$$v_{G2i}^{o} = \omega_{o2i}^{o} \times r_{G2i'}^{o}$$

$$\frac{\partial r_{G2i}^{o}}{\partial t} = \omega_{o2i}^{o} \times r_{G2i'}^{o}$$

$$= R_{7i}^{o}(\omega_{o2i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

$$\frac{\partial r_{G2i}^{o}}{\partial t} = R_{7i}^{o}(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, semejante al procedimiento realizado para obtener la ecuación (4.97) tenemos:

$$\frac{\partial r_{G2i}^{o}}{\partial q_j} = R_{7i}^{o}(k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i}) \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}$$

(4.99)

Escribiendo matricialmente la ecuación anterior:

$$\frac{\partial r_{G2i}^{o}}{\partial q_j} = J_{2i} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{2i} = \left[J_{2i,1}, 0, 0, 0, 0, 0\right] \qquad J_{2i,1} = R_{7i}^{o}(k_{7i}^{7i} \times r_{G2i'}^{7i})$$

Desarrollando $\left(\frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j}\right)$

L_{3i}, se define como:

$$L_{3i} = \frac{1}{2}\left(m_{3i}\left(v_{G3i}^{9i}\right)^T v_{G3i}^{9i} + \left(\omega_{o3i}^{9i}\right)^T (I_{G3i}\omega_{o3i}^{9i}\right) + m_{3i} g^T r_{G3i}^{o}$$

Simplificando:

$$L_{3i} = \frac{1}{2}(\dot{q}^{\,T} N_{3i} \dot{q}\,) + m_{3i} g^T r_{G3i}^{o}$$

Dónde:

$$N_{3i} = m_{3i}\, M_{3i}^T M_{3i} + M_{4i}^T I_{G3i} M_{4i}$$

$M_{3i} = [e_{3i}, 0, 0, 0, 0, k_{2i}]$

$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$e_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})$

$k_{2i} = k_{9i}^{9i}$

$k_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$

Derivando respecto a q_j:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{q}^{\,T} N_{3i}\dot{q}\,) + \frac{\partial}{\partial q_j}(m_{3i} g^T r_{G3i}^o)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_{3i}}{\partial q_j}\dot{q} \,+ m_{3i} g^T \frac{\partial r_{G3i}^o}{\partial q_j}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j} = \mathrm{V}'_{3ij}\dot{q} + \mathrm{C}_{3ij}$$

(4.100)

Dónde:

$$\mathrm{V}'_{3ij} = \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_{3i}}{\partial q_j}$$

(4.101)

$$\mathrm{C}_{3ij} = m_{3i} g^T \frac{\partial r_{G3i}^o}{\partial q_j}$$

A su vez:

$$\frac{\partial N_{3i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(m_{3i}\, M_{3i}^T M_{3i}) + \frac{\partial}{\partial q_j}(M_{4i}^T I_{G3i} M_{4i})$$

$$= m_{3i}\left(\frac{\partial M_{3i}^T}{\partial q_j} M_{3i} + M_{3i}^T \frac{\partial M_{3i}}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial M_{4i}^T}{\partial q_j} I_{G3i} M_{4i} + M_{4i}^T I_{G3i}\frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j}\right)$$

Dónde:

$$\frac{\partial M_{3i}}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial e_{3i}}{\partial q_j}, 0, 0, 0, 0, \frac{\partial k_{2i}}{\partial q_j}\right]$$

$$\frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial k_{3i}}{\partial q_j}, 0, 0, 0, 0, 0\right]$$

Para obtener el término $\frac{\partial e_{3i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial e_{3i}}{\partial t} = \frac{\partial R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}}{\partial t} \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \frac{\partial\left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)}{\partial t}$$

$$= (\omega_{9,7i}^{9i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7.6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right]\right)$$

$$= \left(-R_{7i}^{9i} \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) +$$
$$R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7.6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right]\right)$$

$$= \dot{\theta}_{7,6i}\left[\left(-R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)\right] +$$
$$R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7.6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right]\right)$$

$$= \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}\left[\left(-R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)\right] +$$
$$R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t} k_{9i}^{9i} + \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right]\right)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial e_{3i}}{\partial q_j} = \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}\left[\left(-R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)\right] +$$
$$R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j} k_{9i}^{9i} + \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i})\right]\right)$$

$$\frac{\partial e_{3i}}{\partial q_j} = \left(\left(-R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)\right)\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}$$
$$+ \left(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times k_{9i}^{9i}\right)\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}$$

(4.102)

Acomodando de forma matricial la ecuación (4.102) se tiene:

$$\frac{\partial e_{3i}}{\partial q_j} = J_{3i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{3i} = \left[J_{3i,1}, 0, 0, 0, 0, J_{3i,6}\right]$$

$$J_{3i,1} = \left(-R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right) + R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times \left(R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9i}^{9i} + r_{G3i'}^{9i}\right)\right)$$

$$J_{3i,6} = R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times k_{9i}^{9i}$$

Para obtener $\frac{\partial k_{2i}}{\partial q_j}$, donde es $\frac{\partial k_{9i}^{9i}}{\partial q_j}$ y se obtiene la derivada de k_{9i}^{9i} respecto al tiempo:

$$\frac{\partial k_{9i}^{9i}}{\partial t} = \left(R_{7i}^{9i}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}\right) \times k_{9i}^{9i}$$

$$= \left(R_{7i}^{9i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}k_{7i}^{7i}\right) \times k_{9i}^{9i}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, para obtener $\frac{\partial k_{9i}^{9i}}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial k_{9i}^{9i}}{\partial q_j} = \left(R_{7i}^{9i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}k_{7i}^{7i}\right) \times k_{9i}^{9i}$$

$$= \left(R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times k_{9i}^{9i}\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}$$

(4.103)

De forma matricial, la ecuación anterior se expresa:

$$\frac{\partial k_{2i}}{\partial q_j} = \frac{\partial k_{9i}^{9i}}{\partial q_j} = J_{4i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.104)

Dónde:

$$J_{4i} = \left[J_{4i,1}, 0, 0, 0, 0, 0\right] \qquad\qquad J_{4i,1} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times k_{9i}^{9i}$$

Para obtener $\frac{\partial k_{3i}}{\partial q_j}$, donde es $\frac{\partial R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial k_{3i}}{\partial q_j} = \frac{\partial R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j} = J_{5i} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.105)

Dónde:

$$J_{5i} = \left[\frac{\partial R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}}{\partial \theta_{7,6i}}, 0,0, 0, 0, 0\right]$$

Para obtener $\frac{\partial r_{G3i}^{o}}{\partial q_j}$, se parte de la ecuación (3.12) y (3.13):

$$v_{G3i}^{o} = \omega_{o2i}^{o} \times r_{G2i'}^{o} + v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{G3i'}^{o}$$

$$\frac{\partial r_{G3i}^{o}}{\partial t} = R_{7i}^{o} \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{G2i'}^{o} + R_{9i}^{o} v_{3i}^{9i} + R_{7i}^{o} \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{G3i'}^{o}$$

$$= R_{7i}^{o}(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}) \times r_{G2i'}^{o} + R_{9i}^{o}(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{o}(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}) \times r_{G3i'}^{o}$$

$$= R_{7i}^{o}(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i}) \times r_{G2i'}^{o} + R_{9i}^{o}(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t} k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{o}(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i}) \times r_{G3i'}^{o}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, y agrupando:

$$\frac{\partial r_{G3i}^{o}}{\partial q_j} = R_{7i}^{o}(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} k_{7i}^{7i}) \times r_{G2i'}^{o} + R_{9i}^{o}(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j} k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{o}(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} k_{7i}^{7i}) \times r_{G3i'}^{o}$$

$$= \left(R_{7i}^{o} k_{7i}^{7i} \times (r_{G2i'}^{o} + r_{G3i'}^{o})\right) \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} + \left(R_{9i}^{o} k_{9i}^{9i}\right) \frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}$$

(4.106)

Escribiendo matricialmente la ecuación anterior:

$$\frac{\partial r^{o}_{G3i}}{\partial q_j} = J_{6i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{6i} = \left[J_{6i,1}, 0, 0, 0, 0, J_{6i,6}\right]$$

$J_{6i,1} = R^{o}_{7i} k^{7i}_{7i} \times \ (r^{o}_{G2i'} + r^{o}_{G3i'})$

$J_{6i,6} = R^{o}_{9i} k^{9i}_{9i}$

Desarrollando $\left(\frac{\partial L_{4i}}{\partial q_j}\right)$

L_{4i}, se define como:

$$L_{4i} = \frac{1}{2}\left(m_{4i}\left(v^{11i}_{G4i}\right)^{T} v^{11i}_{G4i} + \left(\omega^{11i}_{o4i}\right)^{T}(I_{G4i}\omega^{11i}_{o4i}\right) + m_{4i} g^{T} r^{o}_{G4i}$$

Simplificando:

$$L_{4i} = \frac{1}{2}(\dot{q}^{\,T} N_{4i}\dot{q}\,) + m_{4i} g^{T} r^{o}_{G4i}$$

Dónde:

$$N_{4i} = m_{4i}\, M^{T}_{5i} M_{5i} + M^{T}_{7i} I_{G4i} M_{7i}$$

$M_{5i} = [e_{4i}, 0, 0, e_{5i}, 0, k_{4i}]$

$M_{7i} = R^{11i}_{9i} M_{4i} + M_{6i}$

$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$M_{6i} = [0, 0, 0, k_{5i}, 0, 0]$

$e_{4i} = R^{11i}_{7i} k^{7i}_{7i} \times (r^{11i}_{9ci} + r^{11i}_{G4i'})$

$e_{5i} = i^{11i}_{11i} \times r^{11i}_{G4i'}$

$k_{3i} = R^{9i}_{7i} k^{7i}_{7i}$

$k_{4i} = R^{11i}_{9i} k^{9i}_{9i}$

$k_{5i} = i^{11i}_{11i}$

Derivando respecto a q_j:

$$\frac{\partial L_{4i}}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{q}^{\,T} N_{4i}\dot{q}\,) + \frac{\partial}{\partial q_j}(m_{4i} g^T r^o_{G4i})$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_{4i}}{\partial q_j}\dot{q} \; + m_{4i} g^T \frac{\partial r^o_{G4i}}{\partial q_j}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial L_{4i}}{\partial q_j} = \mathrm{V}'_{4ij}\dot{q} + \mathrm{C}_{4ij} \tag{4.107}$$

Dónde:

$$\mathrm{V}'_{4ij} = \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_{4i}}{\partial q_j} \tag{4.108}$$

$$\mathrm{C}_{4ij} = m_{4i} g^T \frac{\partial r^o_{G4i}}{\partial q_j}$$

A su vez:

$$\frac{\partial N_{4i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(m_{4i}\, M^T_{5i} M_{5i}) + \frac{\partial}{\partial q_j}(M^T_{7i} I_{G4i} M_{7i})$$

$$= m_{4i}\left(\frac{\partial M^T_{5i}}{\partial q_j} M_{5i} + M^T_{5i}\frac{\partial M_{5i}}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial M^T_{7i}}{\partial q_j} I_{G4i} M_{7i} + M^T_{7i} I_{G4i}\frac{\partial M_{7i}}{\partial q_j}\right)$$

Dónde:

$$\frac{\partial M_{5i}}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial e_{4i}}{\partial q_j}, 0, 0, \frac{\partial e_{5i}}{\partial q_j}, 0, \frac{\partial k_{4i}}{\partial q_j}\right]$$

$$\frac{\partial M_{7i}}{\partial q_j} = \frac{\partial R_{9i}^{11i}}{\partial q_j} M_{4i} + R_{9i}^{11i} \frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j}$$

$$= \frac{\partial R_{9i}^{11i}}{\partial q_j} (R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}) + R_{9i}^{11i} \frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j}$$

$$= \frac{\partial R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j} + R_{9i}^{11i} \frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j} = \left[0, 0, 0, \frac{\partial k_{5i}}{\partial q_j}, 0, 0\right]$$

Para obtener el término $\frac{\partial e_{4i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial e_{4i}}{\partial t} = \frac{\partial R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}}{\partial t} \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \frac{\partial \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)}{\partial t}$$

$$= \left(\omega_{11,7i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) +$$

$$R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right] + \dot{\theta}_{11.10i}\left[i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right]\right)$$

$$= \left(\left(-R_{7i}^{11i} \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} - \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}\right) \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) +$$

$$R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7,6i}\left[R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right] + \dot{\theta}_{11.10i}\left[i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right]\right)$$

$$= \dot{\theta}_{7,6i} \left(\left(-R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right) +$$

$$\dot{\theta}_{11,10i} \left((-i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right) +$$

$$R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i} + \dot{\theta}_{7,6i}\left(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right) + \dot{\theta}_{11.10i}\left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} \left(\left(-R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right) +$$

$$\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t} \left((-i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right) +$$

$$R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t} k_{9i}^{9i} + \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}\left(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right) + \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t}\left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)\right)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial e_{4i}}{\partial q_j} = \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}\left(\left(-R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right) +$$

$$\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j}\left(\left(-i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right)\right) +$$

$$R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}k_{9i}^{9i} + \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}\left(R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right) + \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j}\left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)\right)$$

$$= \left(\left(-R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times \left(R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right)\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} +$$

$$\left(\left(-i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times \left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)\right)\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} +$$

$$\left(R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times k_{9i}^{9i}\right)\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}$$

(4.109)

Acomodando de forma matricial la ecuación (4.109) se tiene:

$$\frac{\partial e_{4i}}{\partial q_j} = J_{7i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{7i} = \left[J_{7i,1}, 0, 0, J_{7i,4}, 0, J_{7i,6}\right]$$

$$J_{7i,1} = \left(-R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times \left(R_{7i}^{9i}k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{9i} + r_{G4i'}^{11i})\right)$$

$$J_{7i,4} = \left(-i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^{11i} + r_{G4i'}^{11i}\right) + R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times \left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$J_{7i,6} = R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times k_{9i}^{9i}$$

Para obtener el término $\frac{\partial e_{5i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial e_{5i}}{\partial t} = \frac{\partial i_{11i}^{11i}}{\partial t} \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \frac{\partial r_{G4i'}^{11i}}{\partial t}$$

$$= (R_{9i}^{11i}\omega_{3i}^{9i} \times i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{11i}\dot{\theta}_{7.6i}k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$= (R_{9i}^{11i}R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} \times i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{11i}\dot{\theta}_{7.6i}k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$= (R_{7i}^{11i}\dot{\theta}_{7.6i}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{11i}\dot{\theta}_{7.6i}k_{7i}^{7i} + \dot{\theta}_{11.10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$= (R_{7i}^{11i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{11i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}k_{7i}^{7i} + \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t}i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial e_{5i}}{\partial q_j} = (R_{7i}^{11i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{11i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}k_{7i}^{7i} + \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j}i_{11i}^{11i}) \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$= \left(\left(R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left(R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} +$$

$$\left(i_{11i}^{11i} \times \left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)\right)\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} \tag{4.110}$$

Acomodando de forma matricial la ecuación (4.110) se tiene:

$$\frac{\partial e_{5i}}{\partial q_j} = J_{8i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{8i} = \left[J_{8i,1}, 0, 0, J_{8i,4}, 0, 0\right]$$

$$J_{8i,1} = \left(R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{11i} + i_{11i}^{11i} \times \left(R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

$$J_{8i,4} = i_{11i}^{11i} \times \left(i_{11i}^{11i} \times r_{G4i'}^{11i}\right)$$

Para obtener $\frac{\partial R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j} = J_{9i} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.111)

Dónde:

$$J_{9i} = \left[0, 0, 0, \frac{\partial R_{7i}^{11i} k_{7i}^{7i}}{\partial \theta_{11,10i}}, 0, 0\right]$$

Para obtener $\frac{\partial k_{4i}}{\partial q_j}$, donde es $\frac{\partial R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}}{\partial q_j} = J_{10i} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.112)

Dónde:

$$J_{10i} = \left[0, 0, 0, \frac{\partial R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}}{\partial \theta_{11,10i}}, 0, 0\right]$$

Para obtener,$\frac{\partial k_{5i}}{\partial q_j}$ donde es $\frac{\partial i_{11i}^{11i}}{\partial q_j}$, se obtiene la derivada de i_{11i}^{11i} respecto al tiempo:

$$\frac{\partial i_{11i}^{11i}}{\partial t} = R_{9i}^{11i} \omega_{3i}^{9i} \times i_{11i}^{11i}$$

$$= R_{9i}^{11i} R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i} \times i_{11i}^{11i}$$

$$= R_{7i}^{11i} \dot{\theta}_{7.6i} k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}$$

$$= \left(R_{7i}^{11i} \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i}\right) \times i_{11i}^{11i}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, para obtener $\frac{\partial i_{11i}^{11i}}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial i_{11i}^{11i}}{\partial q_j} = \left(R_{7i}^{11i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}k_{7i}^{7i}\right) \times i_{11i}^{11i}$$

$$= \left(R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}$$

(4.113)

De forma matricial, la ecuación anterior se expresa:

$$\frac{\partial k_{5i}}{\partial q_j} = \frac{\partial i_{11i}^{11i}}{\partial q_j} = J_{11i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{11i} = \left[J_{11i,1}, 0, 0, 0, 0, 0\right] \qquad J_{11i,1} = R_{7i}^{11i}k_{7i}^{7i} \times i_{11i}^{11i}$$

Para obtener $\frac{\partial r_{G4i}^{o}}{\partial q_j}$, se parte de la ecuación (3.22) y (3.23):

$$v_{G3i}^{o} = v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o} + \omega_{o4i}^{o} \times r_{G4i'}^{o}$$

$$\frac{\partial r_{G4i}^{o}}{\partial t} = R_{9i}^{o}v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + (\omega_{3i}^{o} + \omega_{4i}^{o}) \times r_{G4i'}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{9i}^{o}\omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{9i}^{o}R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o}\omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{9i}^{o}R_{7i}^{9i}\omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{o}\omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}(\dot{z}_{10,9i}k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{o}(\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i}) \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{7i}^{o}\dot{\theta}_{7,6i}k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{o}\dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}\left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t}k_{9i}^{9i}\right) + R_{7i}^{o}\left(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{7i}^{o}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t}k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{o}\frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial t}i_{11i}^{11i}\right) \times r_{G4i'}^{o}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, y agrupando:

$$\frac{\partial r^o_{G4i}}{\partial q_j} = R^o_{9i}\left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}k^{9i}_{9i}\right) + R^o_{7i}\left(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}k^{7i}_{7i}\right)\times\ r^o_{9ci} +$$

$$\left(R^o_{7i}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}k^{7i}_{7i} + R^o_{11i}\frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial q_j}i^{11i}_{11i}\right)\times r^o_{G4i'}$$

$$= \left(R^o_{7i}k^{7i}_{7i}\times\ (r^o_{9ci} + r^o_{G4i'})\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} + \left(R^o_{11i}i^{11i}_{11i}\times r^o_{G4i'}\right)\frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial q_j} + \left(R^o_{9i}k^{9i}_{9i}\right)\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j}$$

(4.114)

Escribiendo matricialmente la ecuación anterior:

$$\frac{\partial r^o_{G4i}}{\partial q_j} = J_{12i}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{12i} = \left[J_{12i,1}, 0, 0, J_{12i,4}, 0, J_{12i,6}\right]$$

$$J_{12i,1} = R^o_{7i}k^{7i}_{7i}\times\ (r^o_{9ci} + r^o_{G4i'})$$

$$J_{12i,4} = R^o_{11i}i^{11i}_{11i}\times r^o_{G4i'}$$

$$J_{12i,6} = R^o_{9i}k^{9i}_{9i}$$

Desarrollando $\left(\frac{\partial L_5}{\partial q_j}\right)$

L_5, se define como:

$$L_5 = \frac{1}{2}\left(m_5\left(v^p_{G5}\right)^T v^p_{G5} + \left(\omega^p_{o5}\right)^T (I_{G5}\omega^p_{o5}\right) + m_5 g^T r^o_{G5}$$

Simplificando:

$$L_5 = \frac{1}{2}(\dot{q}^{\,T} N_5 \dot{q}\,) + m_5 g^T r^o_{G5}$$

Dónde:

$$N_5 = m_5\, M_8^T M_8 + M_9^T I_{G5} M_9$$

$M_8 = [e_6, 0, 0, e_7, 0, k_6]$

$M_9 = R_{9i}^{p} M_{4i} + R_{11i}^{p} M_{6i}$

$M_{4i} = [k_{3i}, 0, 0, 0, 0, 0]$

$M_{6i} = [0, 0, 0, k_{5i}, 0, 0]$

$e_6 = R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p})$

$e_7 = (R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p})$

$k_{3i} = R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}$

$k_{5i} = i_{11i}^{11i}$

$k_6 = \left(R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}\right)$

Derivando respecto a q_j:

$$\frac{\partial L_5}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{q}^{\,T} N_5 \dot{q}\,) + \frac{\partial}{\partial q_j}(m_5 g^T r_{G5}^{o})$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_5}{\partial q_j}\dot{q} \; + m_5 g^T \frac{\partial r_{G5}^{o}}{\partial q_j}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial L_5}{\partial q_j} = \mathrm{V}'_{5j}\dot{q} + \mathrm{C}_{5j} \tag{4.115}$$

Dónde:

$$\mathrm{V}'_{5j} = \frac{1}{2}\dot{q}^{\,T}\frac{\partial N_5}{\partial q_j}$$

(4.116)

$$\mathrm{C}_{5j} = m_5 g^T \frac{\partial r_{G5}^{o}}{\partial q_j}$$

A su vez:

$$\frac{\partial N_5}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(m_5\, M_8^T M_8) + \frac{\partial}{\partial q_j}(M_9^T I_{G5} M_9)$$

$$= m_5\left(\frac{\partial M_8^T}{\partial q_j} M_8 + M_8^T \frac{\partial M_8}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial M_9^T}{\partial q_j} I_{G5} M_9 + M_9^T I_{G5} \frac{\partial M_9}{\partial q_j}\right)$$

Dónde:

$$\frac{\partial M_8}{\partial q_j} = \left[\frac{\partial e_6}{\partial q_j}, 0, 0, \frac{\partial e_7}{\partial q_j}, 0, \frac{\partial k_6}{\partial q_j}\right]$$

$$\frac{\partial M_9}{\partial q_j} = \frac{\partial R_{9i}^p}{\partial q_j} M_{4i} + R_{9i}^p \frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} + \frac{\partial R_{11i}^p}{\partial q_j} M_{6i} + R_{11i}^p \frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j}$$

$$= \frac{\partial R_{9i}^p}{\partial q_j}(R_{7i}^{9i} k_{7i}^{7i}) + R_{9i}^p \frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} + \frac{\partial R_{11i}^p}{\partial q_j} i_{11i}^{11i} + R_{11i}^p \frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j}$$

$$= \frac{\partial R_{7i}^p k_{7i}^{7i}}{\partial q_j} + R_{9i}^p \frac{\partial M_{4i}}{\partial q_j} + \frac{\partial R_{11i}^p i_{11i}^{11i}}{\partial q_j} + R_{11i}^p \frac{\partial M_{6i}}{\partial q_j}$$

Para obtener el término $\frac{\partial e_6}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial e_6}{\partial t} = \frac{\partial R_{7i}^p k_{7i}^{7i}}{\partial t} \times \left(r_{9ci}^p + r_{11i}^p\right) + R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times \frac{\partial\left(r_{9ci}^p + r_{11i}^p\right)}{\partial t}$$

$$= \omega_{p,7i}^p \times R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^p \times r_{11i}^p\right) +$$

$$R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i}\left(R_{9i}^p k_{9i}^{9i}\right) + \dot{\theta}_{7,6i}\left(R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^p + r_{11i}^p)\right) + \dot{\theta}_{11.10i}\left(R_{11i}^p i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^p\right)\right)$$

$$= \left(\left(-R_{7i}^p \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} - R_{11i}^p \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}\right) \times R_{7i}^p k_{7i}^{7i}\right) \times \left(r_{9ci}^p \times r_{11i}^p\right) +$$

$$R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times \left(\dot{z}_{10,9i}\left(R_{9i}^p k_{9i}^{9i}\right) + \dot{\theta}_{7,6i}\left(R_{7i}^p k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^p + r_{11i}^p)\right) + \dot{\theta}_{11.10i}\left(R_{11i}^p i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^p\right)\right)$$

$$= \left(\left(-R_{7i}^{p} \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i} - R_{11i}^{p} \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t} i_{11i}^{11i} \right) \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \right) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p} \right) +$$

$$R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t} R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i} + \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} \left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{p} + r_{11i}^{p} \right) \right) + \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t} \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p} \right) \right)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial e_6}{\partial q_j} = \left(\left(-R_{7i}^{p} \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} k_{7i}^{7i} - R_{11i}^{p} \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} i_{11i}^{11i} \right) \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \right) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p} \right) +$$

$$R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j} R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i} + \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} \left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{p} + r_{11i}^{p} \right) \right) + \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p} \right) \right)$$

$$= \left(\left(-R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \right) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p} \right) + R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{p} + r_{11i}^{p} \right) \right) \right) \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} +$$

$$\left(\left(-R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \right) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p} \right) + R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p} \right) \right) \frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} +$$

$$\left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i} \right) \frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j} \tag{4.117}$$

Acomodando de forma matricial la ecuación (4.117) se tiene:

$$\frac{\partial e_6}{\partial q_j} = J_{13} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{13} = \left[J_{13,1}, 0, 0, J_{13,4}, 0, J_{13,6} \right]$$

$$J_{13,1} = \left(-R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \right) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p} \right) + R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(r_{9ci}^{p} + r_{11i}^{p} \right) \right)$$

$$J_{13,4} = \left(-R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \right) \times \left(r_{9ci}^{p} \times r_{11i}^{p} \right) + R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{p} \right)$$

$$J_{13,6} = R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}$$

Para obtener el término $\frac{\partial e_7}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial e_7}{\partial t} = \frac{\partial R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}}{\partial t} \times r_{11i}^{p} + R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \frac{\partial r_{11i}^{p}}{\partial t}$$

$$= \left(\omega_{p,11i}^{p} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{p} + R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{p}\dot{\theta}_{7.6i}k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{p}\dot{\theta}_{11.10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}\right)$$

$$= \left(-R_{11i}^{p}\dot{\theta}_{11,10i}i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{p} + R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{p}\dot{\theta}_{7.6i}k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{p}\dot{\theta}_{11.10i}i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}\right)$$

$$= \left(-R_{11i}^{p}\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t} i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{p} +$$

$$R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{p}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{p}\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial t} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}\right)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$ y agrupando:

$$\frac{\partial e_7}{\partial q_j} = \left(-R_{11i}^{p}\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{p} +$$

$$R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \left((R_{7i}^{p}\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{p}\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} i_{11i}^{11i}) \times r_{11i}^{p}\right)$$

$$= \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times r_{11i}^{p}\right)\right)\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} +$$

$$\left(\left(\left(-R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right) + \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right)\right) \times r_{11i}^{p}\right)\frac{\partial \theta_{11.10i}}{\partial q_j} \tag{4.118}$$

Acomodando de forma matricial la ecuación (4.118) se tiene:

$$\frac{\partial e_7}{\partial q_j} = J_{14}\frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{14} = \left[J_{14,1}, 0, 0, J_{14,2}, 0, 0\right]$$

$$J_{14,1} = R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times \left(R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i} \times r_{11i}^{p}\right)$$

$$J_{14,2} = \left(\left(-R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right) + \left(R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i} \times R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}\right)\right) \times r_{11i}^{p}$$

Para obtener $\frac{\partial R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}}{\partial q_j} = J_{15} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.119)

Dónde:

$$J_{15} = \left[0, 0, 0, \frac{\partial R_{9i}^{p} k_{9i}^{9i}}{\partial \theta_{11,10i}}, 0, 0\right]$$

Para $\frac{\partial R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i}}{\partial q_j} = J_{16} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.120)

Dónde:

$$J_{16} = \left[\frac{\partial R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i}}{\partial \theta_{7,6i}}, 0, 0, \frac{\partial R_{7i}^{p} k_{7i}^{7i}}{\partial \theta_{11,10i}}, 0, 0\right]$$

Para $\frac{\partial R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$\frac{\partial R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}}{\partial q_j} = J_{17} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

(4.121)

Dónde:

$$J_{17} = \left[0,0, 0, \frac{\partial R_{11i}^{p} i_{11i}^{11i}}{\partial \theta_{11,10i}}, 0, 0\right]$$

Para obtener $\frac{\partial r_{G5}^{o}}{\partial q_j}$, se tiene:

$$v_{G5}^{o} = v_{o3i}^{o} + \omega_{o3i}^{o} \times r_{9ci}^{o} + \omega_{o5}^{o} \times r_{11i}^{o}$$

$$\frac{\partial r_{G5}^{o}}{\partial t} = R_{9i}^{o} v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o} \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + (\omega_{3i}^{o} + \omega_{4i}^{o}) \times r_{11i}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o} v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o} \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{9i}^{o} \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{o} \omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o} v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o} \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{9i}^{o} R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{o} \omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o} v_{o3i}^{9i} + R_{7i}^{o} \omega_{G2i'}^{7i} \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{9i}^{o} R_{7i}^{9i} \omega_{G2i'}^{7i} + R_{11i}^{o} \omega_{4i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}(\dot{z}_{10,9i} k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{o}(\dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}) \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{7i}^{o} \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{o} \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{o}$$

$$= R_{9i}^{o}(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial t} k_{9i}^{9i}) + R_{7i}^{o}(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i}) \times r_{9ci}^{o} + \left(R_{7i}^{o} \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial t} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{o} \frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial t} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{o}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{\partial t}{\partial q_j}$, y agrupando:

$$\frac{\partial r_{G4i}^{o}}{\partial q_j} = R_{9i}^{o} \left(\frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j} k_{9i}^{9i}\right) + R_{7i}^{o} \left(\frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} k_{7i}^{7i}\right) \times r_{9ci}^{o} +$$

$$\left(R_{7i}^{o} \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} k_{7i}^{7i} + R_{11i}^{o} \frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial q_j} i_{11i}^{11i}\right) \times r_{11i}^{o}$$

$$= \left(R_{7i}^{o} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{o} + r_{11i}^{o})\right) \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j} + \left(R_{11i}^{o} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{o}\right) \frac{\partial \theta_{11,10i}}{\partial q_j} + \left(R_{9i}^{o} k_{9i}^{9i}\right) \frac{\partial z_{10,9i}}{\partial q_j} \tag{4.122}$$

Escribiendo matricialmente la ecuación anterior:

$$\frac{\partial r_{G5}^{o}}{\partial q_j} = J_{18} \frac{\partial O_i}{\partial q_j}$$

Dónde:

$$J_{18} = \left[J_{18,1}, 0, 0, J_{18,4}, 0, J_{18,6}\right]$$

$$J_{18,1} = R_{7i}^{o} k_{7i}^{7i} \times (r_{9ci}^{o} + r_{11i}^{o})$$

$$J_{18,4} = R_{11i}^{o} i_{11i}^{11i} \times r_{11i}^{o} \qquad J_{18,6} = R_{9i}^{o} k_{9i}^{9i}$$

4.3.3 Fuerzas Generalizadas

La formulación de la ecuación de Langrange considera el uso de fuerzas generalizadas contemplando las fuerzas aplicadas externamente, fuerzas y torques de actuadores, fuerzas de resortes lineales y torsionales, de modo que es necesario desarrollar estas expresiones para que sean compatibles con el lagrangiano. Las fuerzas generalizadas se obtienen a partir de la expresión de trabajo virtual.

Primero consideremos el caso en el cual los actuadores ejercen una fuerza o torque en las juntas, fuerzas y momentos externos son aplicados en el efector final. Por lo tanto el trabajo virtual producido por estas fuerzas y momentos es:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{6} F_i^T \delta r_i + M_i^T \delta Q_i = Q^T \delta q$$

Aplicando al robot, donde i, j representa el número de cadena y cuerpo respectivamente:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{3} (f_{ij}^T \delta r_{ij} + M_{ij}^T \delta Q_{ij}) + f_{ext}^T \delta r_{ext} + M_{ext}^T \delta Q_{ext} = Q^T \delta q$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{6} (F_{2i}^T \delta r_{2i}^0 + F_{3i}^T \delta r_{3i}^0 + F_{4i}^T \delta r_{4i}^0 + T_{2i}^T \delta Q_{2i} + T_{3i}^T \delta Q_{3i} + T_{4i}^T \delta Q_{4i}) + F_{ext}^T \delta r_p^0 + M_{ext}^T \delta Q_p \tag{4.123}$$

Dónde:

$$F_{2i} = 0 \qquad T_{2i} = T_{2i} k_{7i}^o$$

$$F_{3i} = f_{3i} k_{9i}^o \qquad T_{3i} = T_{3i} k_{9i}^o$$

$$F_{4i} = 0 \qquad T_{4i} = T_{4i} i_{11i}^o$$

$$F_{ext} = f_{xio} + f_{yjo} + f_{zko} \qquad M_{ext} = m_{xio} + m_{yjo} + m_{zko}$$

Los vectores de posición de aplicación de las fuerzas son:

$$r_{o2i} = r_C^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{9i}^o$$

$$r_{o3i} = r_C^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{9Ci}^o$$

$$r_{o4i} = r_C^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{9Ci}^o + r_{11i}^o$$

$$r_{op} = r_C^o + r_B^o + r_{2i}^o + r_{4i}^o + r_{9Ci}^o + r_{11i}^o + r_p^o$$

Obteniendo los desplazamientos virtuales:

$$\delta r_{o2i} = \delta r_{9i}$$

$$\delta r_{o3i} = \delta r_{9ci}$$

$$\delta r_{o4i} = \delta r_{9ci} + \delta r_{11i}$$

$$\delta r_{op} = \delta r_{9ci} + \delta r_{11i} + r_p^o$$

Dónde:

$$r_{9i}^o = z_{2i,o} k_{7i}^o$$

$$r_{9Ci}^o = z_{3,2i} k_{9i}^o$$

$$r_{11i}^o = z_{4,3i} k_{11i}^o$$

$$r_p^o = x_{p,4i} i_p^o$$

Donde las transformaciones son:

$$R_{7i}^o = R_{Z6}(\delta_{1Bi}) R_{Z6}(\delta_{32i}) R_{Z4}(\delta_{43i}) R_{Z6}(\delta_{65i}) R_{Z6}(\theta_{76i})$$

$$R_{9i}^o = R_{Z6}(\delta_{1Bi}) R_{Z6}(\delta_{32i}) R_{Z4}(\delta_{43i}) R_{Z6}(\delta_{65i}) R_{Z6}(\theta_{76i}) R_{Z5}(\theta_{87i}) R_{Z4}(\theta_{98i})$$

$$R_{11i}^o = R_{Z6}(\delta_{1Bi}) R_{Z6}(\delta_{32i}) R_{Z4}(\delta_{43i}) R_{Z6}(\delta_{65i}) R_{Z6}(\theta_{76i}) R_{Z5}(\theta_{87i}) R_{Z4}(\theta_{98i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i})$$

$$R_p^o = R_{Z6}(\delta_{1Bi}) R_{Z6}(\delta_{32i}) R_{Z4}(\delta_{43i}) R_{Z6}(\delta_{65i}) R_{Z6}(\theta_{76i}) R_{Z5}(\theta_{87i}) R_{Z4}(\theta_{98i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i})$$
$$R_{Z5}(\theta_{12,11i}) R_{Z6}(-\delta_{18,17i}) R_{Z4}(-\delta_{17,16i}) R_{Z6}(-\delta_{16,15i})$$

Obteniendo ahora el cambio virtual en los vectores:

$$\delta r_{9i}^{o} = \delta z_{2i,o} k_{7i}^{o} + z_{2i,o} \delta k_{7i}^{o} \tag{4.124}$$

$$\delta r_{9Ci}^{o} = \delta z_{3,2i} k_{9i}^{o} + z_{3,2i} \delta k_{9i}^{o} \tag{4.125}$$

$$\delta r_{11i}^{o} = \delta z_{4,3i} k_{11i}^{o} + z_{4,3i} \delta k_{11i}^{o} \tag{4.126}$$

$$\delta r_{p}^{o} = \delta x_{p,4i} i_{p}^{o} + x_{p,4i} \delta i_{p}^{o} \tag{4.127}$$

Considerando:

$$= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial R}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -s\theta & -c\theta \\ c\theta & -s\theta \end{bmatrix}$$

$$\delta R = \begin{bmatrix} -s\theta\delta\theta & -c\theta\delta\theta \\ c\theta\delta\theta & -s\theta\delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta & -c\theta \\ c\theta & -s\theta \end{bmatrix} \delta\theta = \frac{\partial R}{\partial \theta} \delta\theta$$

Aplicando a las transformaciones para obtener el cambio virtual:

$$\delta R_{7i}^{o} = \delta R_{Z6}(\theta_{7,6i}) = \frac{\partial R_{Z6}}{\partial \theta_{Z6i}}(\theta_{7,6i}) \delta\theta_{7,6i}$$

$$\begin{aligned} \delta R_{9i}^{o} &= \delta\left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i})\right) \\ &= \delta R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) \\ &\quad + R_{Z6}(\theta_{7,6i}) \delta R_{Z6}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) \\ &\quad + R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z6}(\theta_{8,7i}) \delta R_{Z4}(\theta_{9,8i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta R_{11i}^{o} &= \delta\left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i})\right) \\ &= \delta R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) \\ &\quad + R_{Z6}(\theta_{7,6i}) \delta R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) \\ &\quad + R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) \delta R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) \\ &\quad + R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) \delta R_{Z4}(\theta_{11,10i}) \end{aligned}$$

$$\delta R_p^o = \delta\left(R_{Z6}(\theta_{7,6i})R_{Z5}(\theta_{8,7i})R_{Z4}(\theta_{9,8i})R_{Z4}(\theta_{11,10i})R_{Z5}(\theta_{12,11i})\right)$$
$$= \delta R_{Z6}(\theta_{7,6i})R_{Z5}(\theta_{8,7i})R_{Z4}(\theta_{9,8i})R_{Z4}(\theta_{11,10i})R_{Z5}(\theta_{12,11i})$$
$$+R_{Z6}(\theta_{7,6i})\delta R_{Z5}(\theta_{8,7i})R_{Z4}(\theta_{9,8i})R_{Z4}(\theta_{11,10i})R_{Z5}(\theta_{12,11i})$$
$$+R_{Z6}(\theta_{7,6i})R_{Z5}(\theta_{8,7i})\delta R_{Z4}(\theta_{9,8i})R_{Z4}(\theta_{11,10i})R_{Z5}(\theta_{12,11i})$$
$$+R_{Z6}(\theta_{7,6i})R_{Z5}(\theta_{8,7i})R_{Z4}(\theta_{9,8i})\delta R_{Z4}(\theta_{11,10i})R_{Z5}(\theta_{12,11i})$$
$$+R_{Z6}(\theta_{7,6i})R_{Z5}(\theta_{8,7i})R_{Z4}(\theta_{9,8i})\delta R_{Z4}(\theta_{11,10i})\delta R_{Z5}(\theta_{12,11i})$$

Aplicando a los sistemas locales para obtener el cambio virtual:

$$\delta k_{7i}^o = \delta R_{7i}^o k_{7i}^{7i} = \left(\frac{\partial R_{Z6}(\theta_{7,6i})}{\partial \theta_{7,6i}} k_{7i}^{7i}\right)\delta\theta_{7,6i}$$
$$= b_2 \delta\theta_{7,6i} \tag{4.128}$$

$$\delta k_{9i}^o = \delta R_{9i}^o k_{9i}^{9i}$$
$$= \left(\frac{\partial R_{Z6}(\theta_{7,6i})}{\partial \theta_{7,6i}} R_{Z5}(\theta_{8,7i})R_{Z4}(\theta_{9,8i})k_{9i}^{9i}\right)\delta\theta_{7,6i}$$
$$+\left(R_{Z6}(\theta_{7,6i})\frac{\partial R_{Z5}(\theta_{8,7i})}{\partial \theta_{8,7i}} R_{Z4}(\theta_{9,8i})k_{9i}^{9i}\right)\delta\theta_{8,7i}$$
$$+\left(R_{Z6}(\theta_{7,6i})R_{Z5}(\theta_{8,7i})\frac{\partial R_{Z4}(\theta_{9,8i})}{\partial \theta_{9,8i}} k_{9i}^{9i}\right)\delta\theta_{9,8i}$$
$$= b_3\delta\theta_{7,6i} + b_4\delta\theta_{8,7i} + b_5\delta\theta_{9,8i} \tag{4.129}$$

$$
\begin{aligned}
\delta k_{11i}^{o} &= \delta R_{11i}^{o} k_{11i}^{11i} \\
&= \left(\frac{\partial R_{Z6}(\theta_{7,6i})}{\partial \theta_{7,6i}} R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) i_{11i}^{o} \right) \delta\theta_{7,6i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) \frac{\partial R_{Z5}(\theta_{8,7i})}{\partial \theta_{8,7i}} R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) i_{11i}^{o} \right) \delta\theta_{8,7i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) \frac{\partial R_{Z4}(\theta_{9,8i})}{\partial \theta_{9,8i}} R_{Z4}(\theta_{11,10i}) i_{11i}^{o} \right) \delta\theta_{9,8i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) \frac{\partial R_{Z4}(\theta_{11,10i})}{\partial \theta_{11,10i}} i_{11i}^{o} \right) \delta\theta_{11,10i} \\
&= b_6 \delta\theta_{7,6i} + b_7 \delta\theta_{8,7i} + b_8 \delta\theta_{9,8i} + b_9 \delta\theta_{11,10i}
\end{aligned}
\tag{4.130}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta k_{p}^{o} &= \delta R_{p}^{o} k_{p}^{p} \\
&= \left(\frac{\partial R_{Z6}(\theta_{7,6i})}{\partial \theta_{7,6i}} R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) R_{Z5}(\theta_{12,11i}) k_{p}^{p} \right) \delta\theta_{7,6i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) \frac{\partial R_{Z5}(\theta_{8,7i})}{\partial \theta_{8,7i}} R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) R_{Z5}(\theta_{12,11i}) k_{p}^{p} \right) \delta\theta_{8,7i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) \frac{\partial R_{Z4}(\theta_{9,8i})}{\partial \theta_{9,8i}} R_{Z4}(\theta_{11,10i}) R_{Z5}(\theta_{12,11i}) k_{p}^{p} \right) \delta\theta_{9,8i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) \frac{\partial R_{Z4}(\theta_{11,10i})}{\partial \theta_{11,10i}} R_{Z5}(\theta_{12,11i}) k_{p}^{p} \right) \delta\theta_{11,10i} \\
&+ \left(R_{Z6}(\theta_{7,6i}) R_{Z5}(\theta_{8,7i}) R_{Z4}(\theta_{9,8i}) R_{Z4}(\theta_{11,10i}) \frac{\partial R_{Z4}(\theta_{12,11i})}{\partial \theta_{12,11i}} k_{p}^{p} \right) \delta\theta_{12,10i} \\
&= b_{10} \delta\theta_{7,6i} + b_{11} \delta\theta_{8,7i} + b_{12} \delta\theta_{9,8i} + b_{13} \delta\theta_{11,10i} + b_{14} \delta\theta_{12,11i}
\end{aligned}
\tag{4.131}
$$

Sustituyendo las ecuaciones

$$\delta r_{o2i} = \delta z_{2i,o} k_{7i}^{o} + z_{2i,o} b_2 \delta\theta_{7,6i}$$

$$\delta r_{o3i} = \delta z_{3,2i} k_{9i}^{o} + z_{3,2i}(b_3 \delta\theta_{7,6i} + b_4 \delta\theta_{8,7i} + b_5 \delta\theta_{9,8i})$$

$$\delta r_{o4i} = \delta z_{3,2i} k_{9i}^{o} + \delta z_{4,3i} k_{11i}^{o} + z_{4,3}\left(b_6 \delta\theta_{7,6i} + b_7 \delta\theta_{8,7i} + b_8 \delta\theta_{9,8i} + b_9 \delta\theta_{11,10i}\right)$$

$$\delta r_{op} = \delta z_{3,2i} k_{9i}^{o} + \delta z_{4,3i} k_{11i}^{o} + \delta x_{p,4i} i_p^{o}$$
$$+ x_{p,4i}\left(b_{10} \delta\theta_{7,6i} + b_{11} \delta\theta_{8,7i} + b_{12} \delta\theta_{9,8i} + b_{13} \delta\theta_{11,10i} + b_{14} \delta\theta_{12,11i}\right)$$

Los desplazamientos virtuales angulares δQ se definen como:

$$\delta Q_i = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \omega}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta Q_2 = \frac{\partial \omega_{o2i}^{o}}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial \omega_{o2i}^{o}}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2 + \frac{\partial \omega_{o2i}^{o}}{\partial \dot{q}_3} \delta q_3 + \frac{\partial \omega_{o2i}^{o}}{\partial \dot{q}_4} \delta q_4 + \frac{\partial \omega_{o2i}^{o}}{\partial \dot{q}_5} \delta q_5 + \frac{\partial \omega_{o2i}^{o}}{\partial \dot{q}_6} \delta q_6$$

Las velocidades angulares se relacionan con los desplazamientos virtuales, esto:

$$\delta Q = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\theta}} \delta\theta$$

Por lo que para el sistema tenemos:

Desarrollando para δQ_2

$$\delta Q_2 = \frac{\partial \dot{\theta}_{7,6i}}{\partial \dot{\theta}_{7,6i}} \delta\theta_{7,6i} = k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i}$$

Dónde:

$$\omega_{o2i}^{o} = R_{7i}^{0} \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{7i}$$

Desarrollando para δQ_3

$$\delta Q_3 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{o3}^{o}}{\partial q_j} \delta q_j = k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i}$$

Dónde:

$$\omega_{o2i}^{o} = \omega_{o3i}^{o}$$

Desarrollando para δQ_4

$$\delta Q_4 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{o4}^{o}}{\partial q_j} \delta q_j = k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i} + i_{11i}^{0} \delta\theta_{11,10i}$$

Dónde:

$$\omega_{o4i}^{o} = R_{9i}^{o} \omega_{3i}^{9i} + R_{11i}^{o} \omega_{4i}^{11i}$$

$$\omega_{3i}^{o} = \dot{\theta}_{7,6i} k_{7i}^{0}$$

$$\omega_{4i}^{o} = \dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{o}$$

Desarrollando para δQ_p

$$\delta Q_p = \delta Q_4$$

Sustituyendo en ecuación (123):

$$\begin{aligned}
\delta W = {} & f_2 (k_{7i}^{o})^T \left(z_{2o} b_2 \delta\theta_{7,6i} \right) \\
& + f_3 (k_{9i}^{o})^T \left(\delta z_{3,2i} k_{9i}^{o} + z_{3,2i} (b_3 \delta\theta_{7,6i} + b_4 \delta\theta_{8,7i} + b_5 \delta\theta_{9,8i}) \right) \\
& + f_4 (i_{11i}^{o})^T \left(\delta z_{3,2i} k_{9i}^{o} + z_{4,3} \left(b_6 \delta\theta_{7,6i} + b_7 \delta\theta_{8,7i} + b_8 \delta\theta_{9,8i} + b_9 \delta\theta_{11,10i} \right) \right) \\
& + T_2 (k_{7i}^{o})^T \left(k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i} \right) + T_3 (k_{9i}^{o})^T \left(k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i} \right) \\
& + T_4 (i_{11i}^{o})^T \left(k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i} + i_{11i}^{o} \delta\theta_{11,10i} \right) \\
& + F_{ext}^{T} \left(\delta z_{3,2} k_{9i}^{o} + z_{4,3} \left(b_6 \delta\theta_{7,6i} + b_9 \delta\theta_{11,10i} \right) \right) \\
& + M_{ext}^{T} \left(k_{7i}^{o} \delta\theta_{7,6i} + k_{11i}^{o} \delta\theta_{11,10i} \right)
\end{aligned}$$

(4.132)

Los términos f_2 y f_4 son cero debido a que no se presenta ninguna de estas fuerzas en los cuerpos 1 y 4, por lo que la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta W = {} & f_3(k_{9i}^{o})^T\left(\delta z_{3,2i}k_{9i}^{o} + z_{3,2i}(b_3\delta\theta_{7,6i} + b_4\delta\theta_{8,7i} + b_5\delta\theta_{9,8i})\right) + T_2(k_{7i}^{o})^T\left(k_{7i}^{o}\delta\theta_{7,6i}\right) \\ & + T_3(k_{9i}^{o})^T\left(k_{7i}^{o}\delta\theta_{7,6i}\right) + T_4(i_{11i}^{o})^T\left(k_{7i}^{o}\delta\theta_{7,6i} + i_{11i}^{o}\delta\theta_{11,10i}\right) \\ & + F_{ext}^{T}\Big(\delta z_{3,2}k_{9i}^{o} \\ & + x_{p,4i}\left(b_{10}\delta\theta_{7,6i} + b_{11}\delta\theta_{8,7i} + b_{12}\delta\theta_{9,8i} + b_{13}\delta\theta_{11,10i} + b_{14}\delta\theta_{12,11i}\right)\Big) \\ & + M_{ext}^{T}\left(k_{7i}^{o}\delta\theta_{7,6i} + k_{11i}^{o}\delta\theta_{11,10i}\right)\end{aligned} \tag{4.133}$$

Ahora expresando la ecuación (4.132) de forma matricial tenemos:

$$= \begin{bmatrix} f_2 & f_3 & f_4 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{7i}^{7o}(z_{2,0}b_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{9i}^{oT}(z_{3,2}b_3) & k_{9i}^{oT}(z_{3,2}b_4) & k_{9i}^{oT}(z_{3,2}b_5) & 0 & 0 & k_{9i}^{oT}k_{9i}^{o} \\ i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_6) & i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_7) & i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_8) & i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_9) & 0 & i_{11i}^{oT}k_{7i}^{o} \\ k_{7i}^{oT}k_{7i}^{o} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{9i}^{oT}k_{7i}^{o} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i_{11i}^{oT}k_{7i}^{o} & 0 & 0 & i_{11i}^{oT}i_{11i}^{o} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_{7,6i} \\ \delta\theta_{8,7i} \\ \delta\theta_{9,8i} \\ \delta\theta_{11,10i} \\ \delta\theta_{12,11i} \\ \delta z_{10,9i} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} F_{ext}^{T} & M_{ext}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p,4i}b_{10} & x_{p,4i}b_{11} & x_{p,4i}b_{12} & x_{p,4i}b_{13} & x_{p,4i}b_{14} & k_{9i}^{o} \\ k_{7i}^{o} & 0 & 0 & k_{11i}^{o} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_{7,6i} \\ \delta\theta_{8,7i} \\ \delta\theta_{9,8i} \\ \delta\theta_{11,10i} \\ \delta\theta_{12,11i} \\ \delta z_{10,9i} \end{bmatrix}$$

Dónde:

$$\delta z_{3,2} = \delta z_{10,9i} = \dot{z}_{10,9i}$$

Que representa el desplazamiento del cuerpo $3i$

Finalmente tenemos:

$$\delta W = (\tau^T J_T)\delta q + (F^T J_F)\delta q$$
$$= (\tau^T J_T + F^T J_F)\delta q$$
$$\delta W = Q^T \delta q$$

Las fuerzas generalizadas obtenidas son:

$$Q^T = (\tau^T J_T + F^T J_F)$$

Dónde:

$$\tau^T = \begin{bmatrix} f_2 & f_3 & f_4 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix}$$

$$J_T = \begin{bmatrix} k_{7i}^{7o}(z_{2,0}b_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{9i}^{oT}(z_{3,2}b_3) & k_{9i}^{oT}(z_{3,2}b_4) & k_{9i}^{oT}(z_{3,2}b_5) & 0 & 0 & k_{9i}^{oT}k_{9i}^{o} \\ i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_6) & i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_7) & i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_8) & i_{11i}^{oT}(z_{4,3}b_9) & 0 & i_{11i}^{oT}k_{7i}^{o} \\ k_{7i}^{oT}k_{7i}^{o} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{9i}^{oT}k_{7i}^{o} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i_{11i}^{oT}k_{7i}^{o} & 0 & 0 & i_{11i}^{oT}i_{11i}^{o} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta q = \begin{bmatrix} \delta\theta_{7,6i} \\ \delta\theta_{8,7i} \\ \delta\theta_{9,8i} \\ \delta\theta_{11,10i} \\ \delta\theta_{12,11i} \\ \delta z_{10,9i} \end{bmatrix}$$

$$F^T = [F_{ext}^T \quad M_{ext}^T]$$

$$J_F = \begin{bmatrix} x_{p,4i}b_{10} & x_{p,4i}b_{11} & x_{p,4i}b_{12} & x_{p,4i}b_{13} & x_{p,4i}b_{14} & k_{9i}^{o} \\ k_{7i}^{o} & 0 & 0 & k_{11i}^{o} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde δq son las coordenadas generalizadas $\dot{q}$.

Por último, se tiene la ecuación (4.4)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial l}{\partial q_j}=Q_j$$

Dónde:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial L_{4i}}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{6}\left(D_{2ij}\ddot{q}+V_{2ij}\dot{q}+D_{3ij}\ddot{q}+V_{3ij}\dot{q}+D_{4ij}\ddot{q}+V_{4ij}\dot{q}\right)+D_{5j}\ddot{q}+V_{5j}\dot{q}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{6}\left(D_{2ij}+D_{3ij}+D_{4ij}\right)+D_{5j}\right]\ddot{q}+\left[\sum_{i=1}^{6}\left(V_{2ij}+V_{3ij}+V_{4ij}\right)+V_{5j}\right]\dot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(L_{2i}+L_{3i}+L_{4i}\right)+\frac{\partial L_5}{\partial q_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{6}\left(V'_{2ij}\dot{q}+C_{2ij}+V'_{3ij}+C_{3ij}+V'_{4ij}+C_{4ij}\right)+V'_{5j}\dot{q}+C_{5j}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{6}\left(V'_{2ij}+V'_{3ij}+V'_{4ij}\right)+V'_{5j}\right]\dot{q}+\left[\sum_{i=1}^{6}\left(C_{2ij}+C_{3ij}+C_{4ij}\right)+C_{5j}\right]$$

$$Q^T=\left(\tau^T J_T+F^T J_F\right)$$

$$Q=J_T^T\tau+J_F^T F$$

Sustituyendo en la ecuación (4.4)

$$\left[\sum_{i=1}^{6}\left(D_{2ij}+D_{3ij}+D_{4ij}\right)+D_{5j}\right]\ddot{q}+\left[\sum_{i=1}^{6}\left(V_{2ij}+V_{3ij}+V_{4ij}\right)+V_{5j}\right]\dot{q}-$$

$$\left[\sum_{i=1}^{6}\left(V'_{2ij}+V'_{3ij}+V'_{4ij}\right)+V'_{5j}\right]\dot{q}-\left[\sum_{i=1}^{6}\left(C_{2ij}+C_{3ij}+C_{4ij}\right)+C_{5j}\right]=Q_j$$

$$\left[\sum_{i=1}^{6}\left(D_{2ij}+D_{3ij}+D_{4ij}\right)+D_{5j}\right]\ddot{q}+$$

$$\left[\sum_{i=1}^{6}\left(V_{2ij}+V_{3ij}+V_{4ij}\right)+V_{5j}-\sum_{i=1}^{6}\left(V'_{2ij}+V'_{3ij}+V'_{4ij}\right)-V'_{5j}\right]\dot{q}+$$

$$\left[\sum_{i=1}^{6}\left(-C_{2ij}-C_{3ij}-C_{4ij}\right)-C_{5j}\right]=Q_j$$

Finalmente:

$$D_j\ddot{q}+V_j\dot{q}+C_j=Q_j \tag{4.134}$$

Dónde:

$$D_j=\left[\sum_{i=1}^{6}\left(D_{2ij}+D_{3ij}+D_{4ij}\right)+D_{5j}\right]$$

$$V_j=\left[\sum_{i=1}^{6}\left(V_{2ij}+V_{3ij}+V_{4ij}\right)+V_{5j}-\sum_{i=1}^{6}\left(V'_{2ij}+V'_{3ij}+V'_{24ij}\right)-V'_{5j}\right]$$

$$C_j=\left[\sum_{i=1}^{6}\left(-C_{2ij}-C_{3ij}-C_{4ij}\right)-C_{5j}\right]$$

Escribiendo la ecuación (4.134) seis veces, una para cada $j = 1,2,3,4,5,6$, obtenemos ecuaciones escalares, las cuales se ordenan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

$D'\ddot{q} + V'\dot{q} + C' = Q$

$D'\ddot{q} + V'\dot{q} + C' = J_T^T \tau + J_F^T F$

$D'\ddot{q} + V'\dot{q} + C' - J_F^T F = J_T^T \tau$

$J_T^{-T} D'\ddot{q} + J_T^{-T} V'\dot{q} + J_T^{-T} C' + (-J_T^{-T} J_F^T F) = \tau$

Finalmente:

$$D\ddot{q} + V\dot{q} + C + E = \tau \tag{4.135}$$

Dónde:

$$D = J_T^{-T} D'$$

$$V = J_T^{-T} V'$$

$$C = J_T^{-T} C'$$

$$E = -J_T^{-T} J_F^T F$$

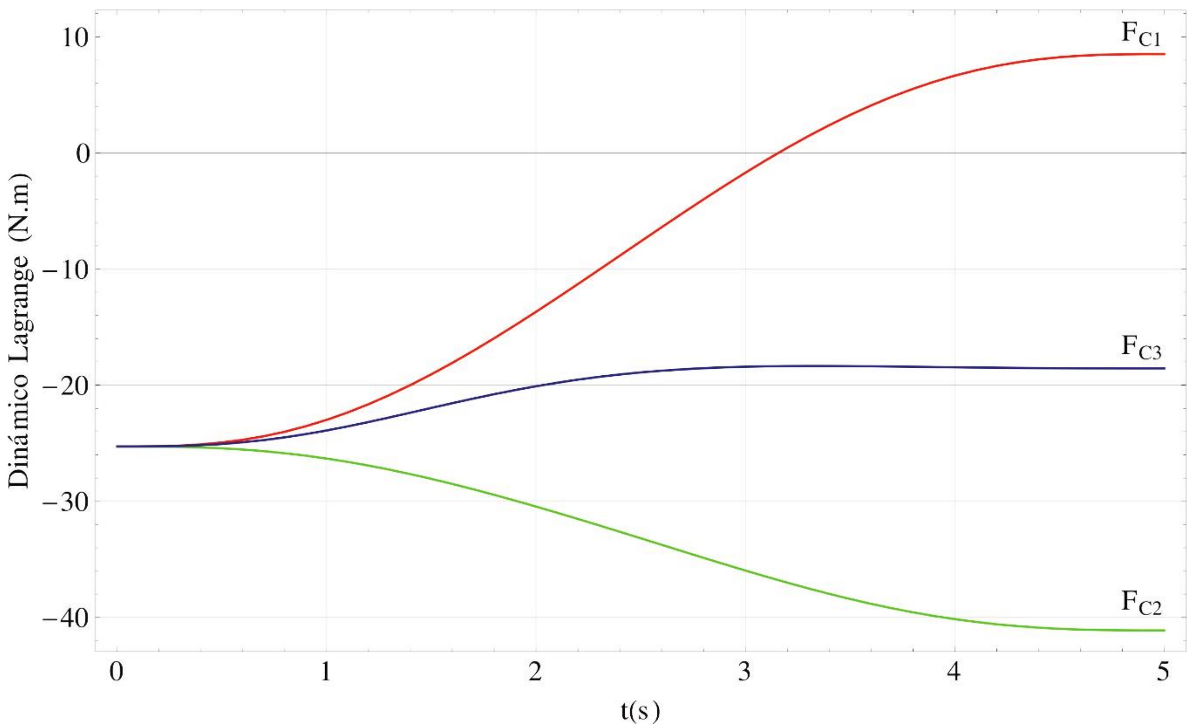
4.3.4. Solución del método Euler-Lagrange

La solución del método de Euler-Lagrange, se obtuvo con ayuda del software Mathematica 9, y consistió en programar la ecuación (4.135) con cada uno de los términos que la componen.

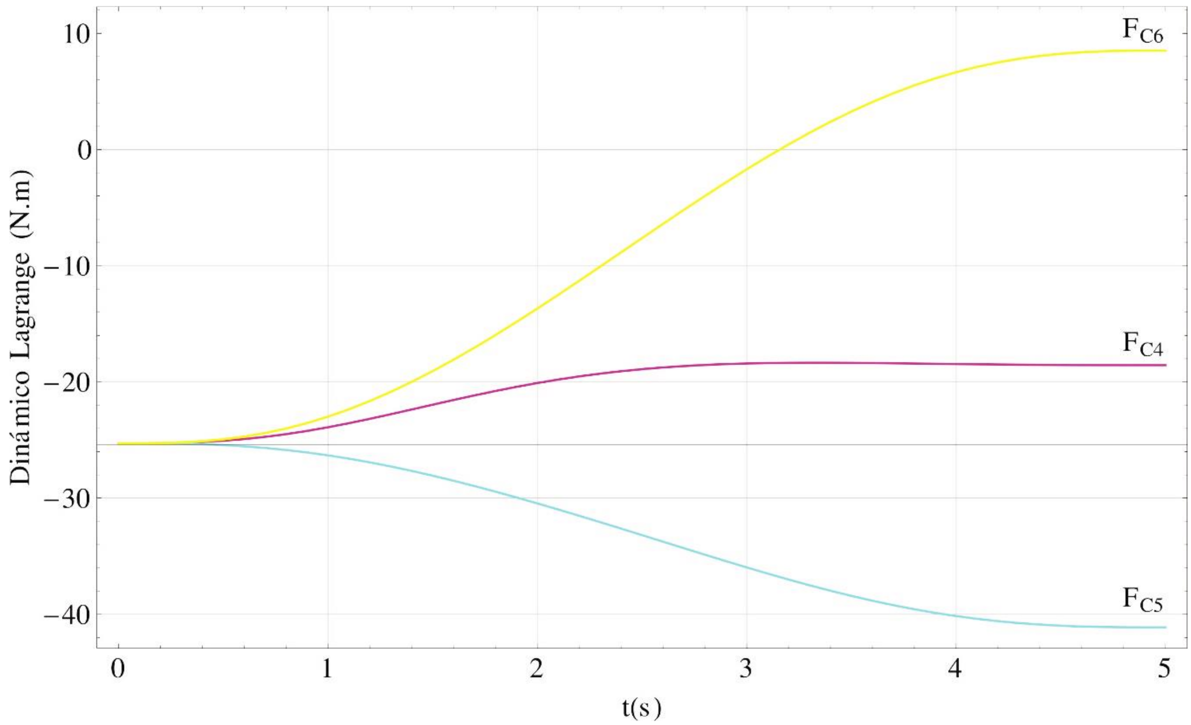
$$D\ddot{q} + V\dot{q} + C + E = \tau$$

Los datos de masas, inercias y fuerzas externas usadas en este método son las mismas empleadas en el método de Newton-Euler [2].

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran las gráficas de las Fuerzas obtenidas para el análisis dinámico de cada cadena:



Figuras 4.1 Fuerzas presentes en los actuadores 1, 2 y 3



Figuras 4.2 Fuerzas presentes en los actuadores 4, 5 y 6

Capítulo 5

Conclusiones

Comprobando el análisis realizado en la tesis anteriormente mencionada [2] se hace notar que el uso de las matrices de transformación homogéneas como herramienta para el análisis cinemático brinda una mejor comprensión del comportamiento de una cadena cinemática al utilizar traslaciones y rotaciones puras a partir de sistemas de referencia locales anteriores, facilitando de esta manera el desarrollo de la cinemática sin importar la configuración, o tipo de juntas que compongan al manipulador.

Para el análisis dinámico formulación Euler-Lagrange, se usaron las bases locales e inerciales; las primeras se usaron para el cálculo de la energía cinética de los eslabones, ya que existe un producto punto y no importa en qué base se realice siempre y cuando los vectores estén proyectados en la misma base; la segunda se implementó para el cálculo de la energía potencial, debido a este caso, por facilidad, se decidió que todos los vectores de centro de gravedad de los cuerpos estén proyectados en la misma base.

Mientras que para el análisis dinámico formulación Newton-Euler, se implementan diferentes bases locales, las cuales evitan que las ecuaciones estén más cargadas de información (con los ángulos de las matrices de rotación), tal como sucede con el uso de bases inerciales, ya que es necesario proyectar cada uno de los torsores a esta última. De esta forma, se pueden usar tantas bases locales como se quiera, siempre y cuando sean usadas de forma correcta el resultado debe ser el mismo que el obtenido con bases inerciales.

Por ello es notable que los resultados obtenidos por uno u otro método mencionados anterior mente nos brindan el mismo resultado que se esperaba, es decir son dos planteamientos distintos que nos permiten obtener un mismo resultado; pero con una implementación distinta. Ya que para la construcción e implementación se debe tener un cúmulo de información que permita lograr este objetivo. Dicha información se obtiene de las dos formulaciones desarrolladas en este trabajo: La primera es la formulación Newton-Euler; que gracias a que toma en cuenta las fuerzas de restricción, inerciales, debidas a los pesos etc.; brinda la información necesaria para diseñar cada una de los elementos mecánicos del robot (pernos, rodamientos, geometría de las barras, etc.). La segunda el cual fue el tema de estudio de esta tesis, que es la formulación Euler-Lagrange, permite obtener un modelo matemático adecuado para la mayoría de los esquemas de control, una ventaja particular del modelo obtenido en este trabajo es que es un modelo completo, ya que no se hace ningún tipo de simplificación.

Para el diseño de controladores de movimiento, se realiza el análisis de estabilidad y el análisis del acotamiento de las señales, para cada controlador.

Para realizar el estudio de estabilidad se siguen dos metodologías diferentes. Una de ellas es, cuando ya se conoce el controlador y está enfocado al análisis de estabilidad, en la que se debe establecer la ecuación dinámica del sistema y la ecuación deseada, para así obtener la ecuación dinámica del error. Se desarrolla la ecuación del error de lazo cerrado (incluyendo la ecuación del controlador), proponiendo una función candidata a Lyapunov que incluya a todos los estados de la ecuación dinámica del error, posteriormente se deriva la función obtenida y se evalúa a lo largo de la trayectoria, si la derivada de la función es definida negativa, el sistema en lazo cerrado es estable.

La segunda metodología, se implementa cuando se realiza el diseño de un controlador que asegure la estabilidad del sistema, en la cual se establece la ecuación dinámica y la dinámica deseada, se obtiene la ecuación del error y se propone una función candidata a Lyapunov que incluya todos los estados de la ecuación dinámica del error, después es derivada la función de Lyapunov evaluando a lo largo de la trayectoria, para finalmente forzar a que la derivada se la función sea definida negativa y al hacerlo se obtiene la ecuación del controlador.

Por último, los resultados obtenidos con cada una de las formulaciones, se puede concluir que son correctos y que si alguien decidiera continuar con la construcción e implementación del robot, puede tomar la información presentada en este trabajo como base para su desarrollo.

Bibliografía.

[1]. Antonio Barrientos, Luis Felipe P, Carlos Balaguer, Rafael Aracil. (2004), **Fundamentos de Robótica**, 2ª ed. Madrid España, Mc. Graw-Hill.

[2]. Francisco De Matías A. 2012. **Análisis Dinámico de una Plataforma de Stewart 6 UPS**, Tesis de Licenciatura, Ingeniería Mecánica-Eléctrica. Universidad Autónoma de México.

[3]. Spong, Mark W. y Vidyasagar, M. 1989. ***Robot Dynamics and Control.*** s.l. : john Wiley & Sons, 1989. págs. 129-133

[4]. M.C: Miguel de J. Ramírez C. CMfgT, **Cinemática del Robot Industrial**.

[5]. G. Gladwell: **Parallel Robots**, 2006. Springer, Dordrecht, Países Bajos, 2ª ed. ISBN 1-4020-4132-2

[6]. Cisneros Limon, R. (2006) **Modelo Matemático de un Robot Paralelo de Seis Grados de Libertad**. Tesis Licenciatura. Ingeniería en Electrónica y Computadoras. Universidad de las Américas Puebla.

[7]. J.L Meriam, L.G Kraige. 2007. **Mecánica para ingenieros**, Dinámica, 3ª ed. Editorial Reverté.

[8]. Lung-Wen Tsai. **Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators**. Ed. Wiley Interscience.

[9]. Serdar Küçük. 2012. **Serial and parallel Robot manipulators**: kinematics, dynamics, control and optimization. InTech.

[10]. Stejskal Vladimír, Valá.ek Michael. 1996. **Kinematics and Dynamics** of Machinery.Marcel Dekker, Inc.

[11]. José Antonio Souza Jimenez. (2011) **Kinematics and tip-over stability analysis for a hybrid serial-parallel mobile manipulator**.

[12]. R.C. Hibbeler. 2010. Ingeniería Mecánica, **Dinámica** 12ª Edición. Ed. Pearson.

[13]. Y. Minami Koyama, H. G. Serrano Miranda. 2010. **Experimental determination of an irregular object's moment of inertia**.

Apéndice A.
Resultados del Capítulo 2.

A.1 Resultados de Posición.

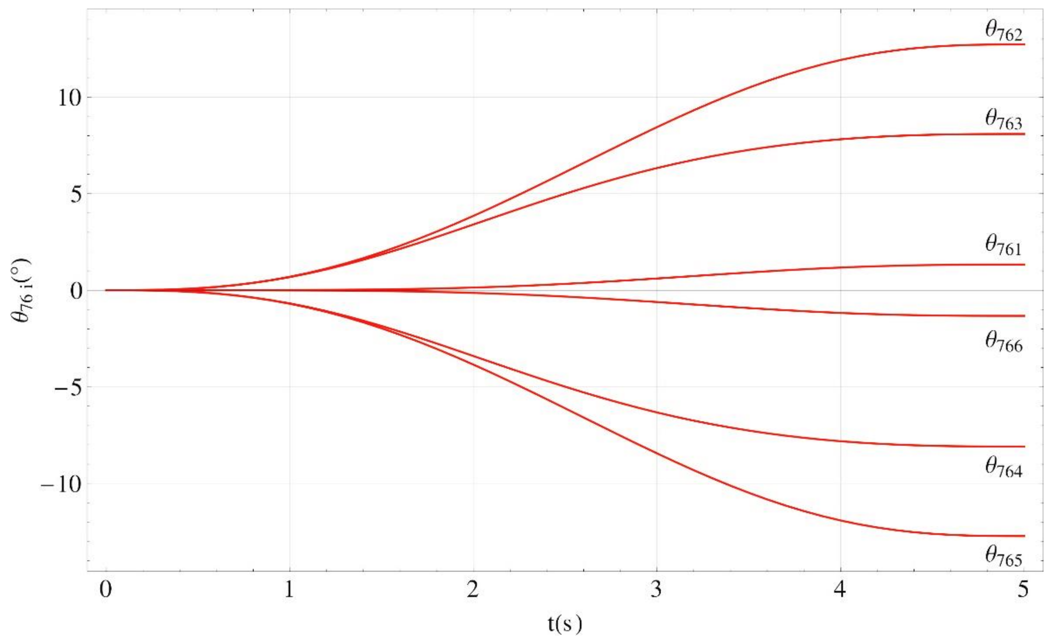


Figura A.1 Resultados de θ_{76i}

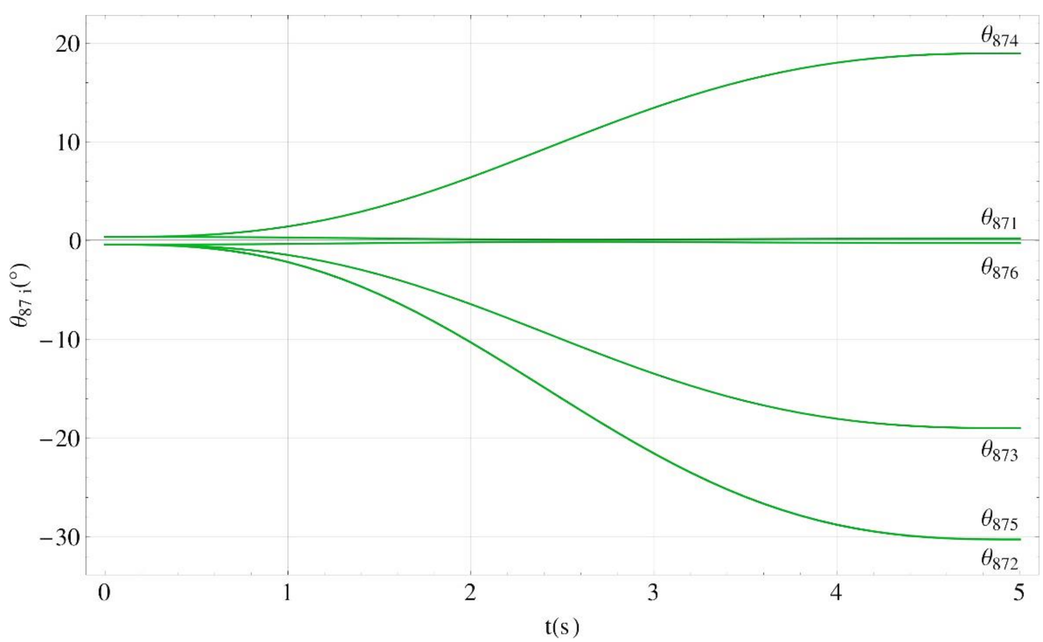


Figura A.2 Resultados de θ_{87i}

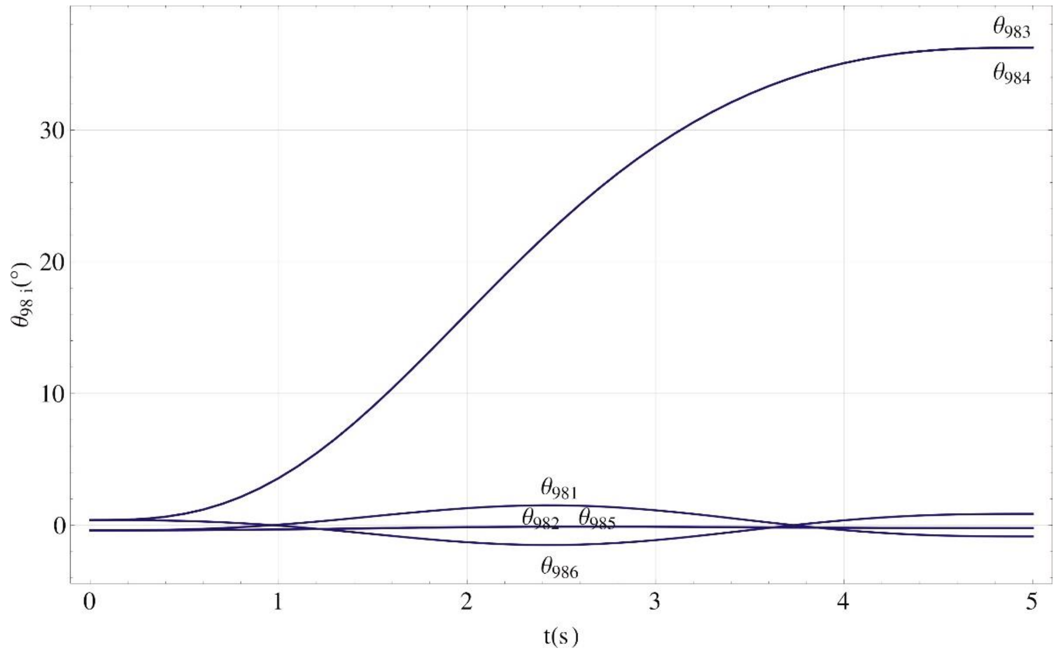


Figura A.3 Resultados de θ_{98i}

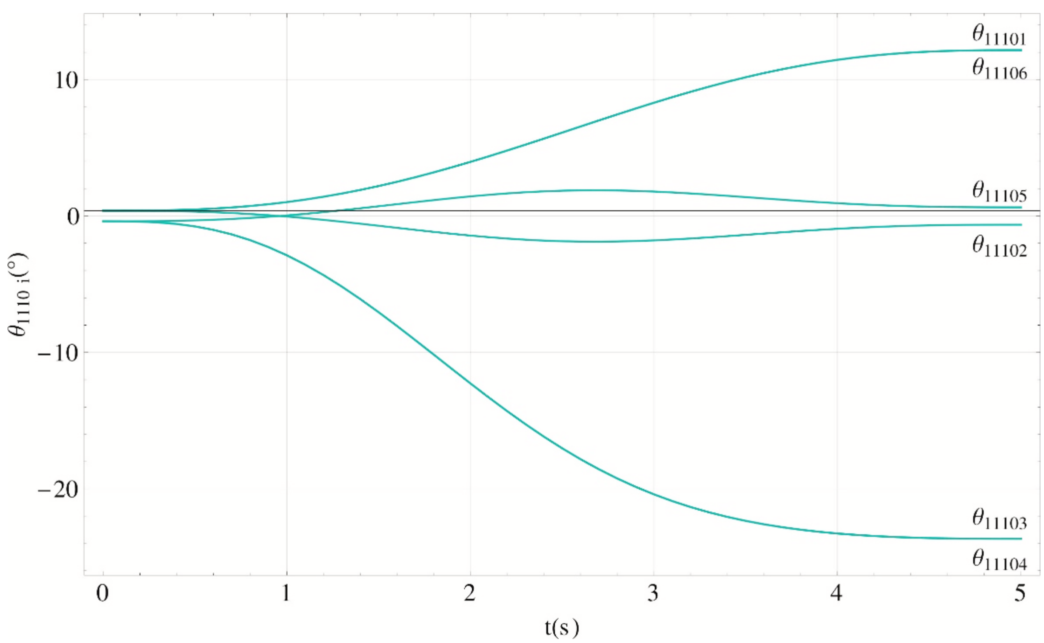


Figura A.4 Resultados de θ_{1110i}

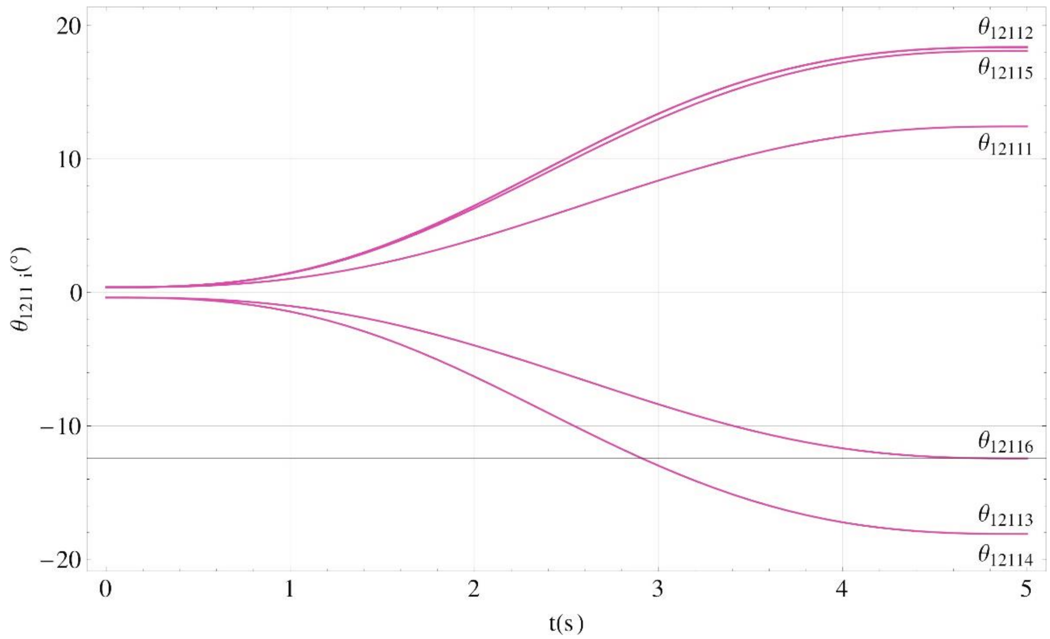


Figura A.5 Resultados de θ_{1211i}

A.2 Resultados de Velocidad.

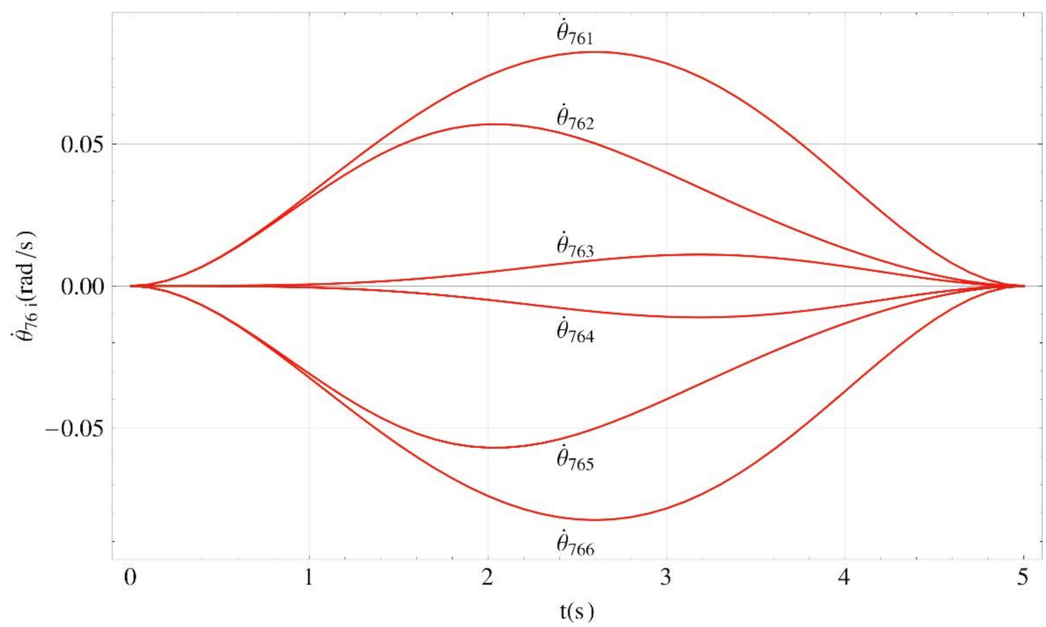


Figura A.6 Resultados de $\dot{\theta}_{76i}$

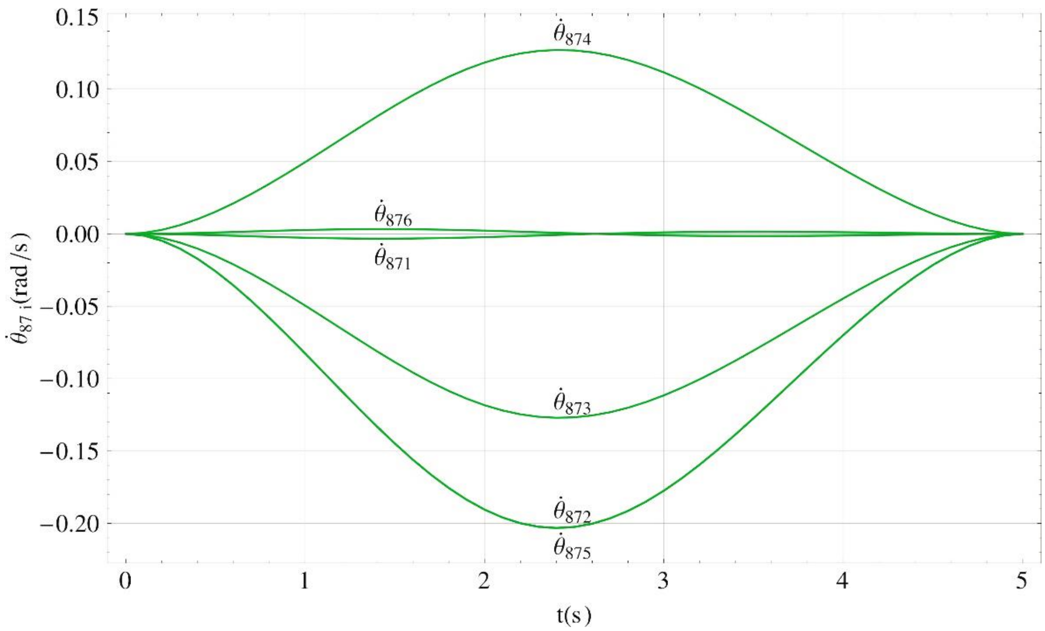


Figura A.7 Resultados de $\dot{\theta}_{87i}$

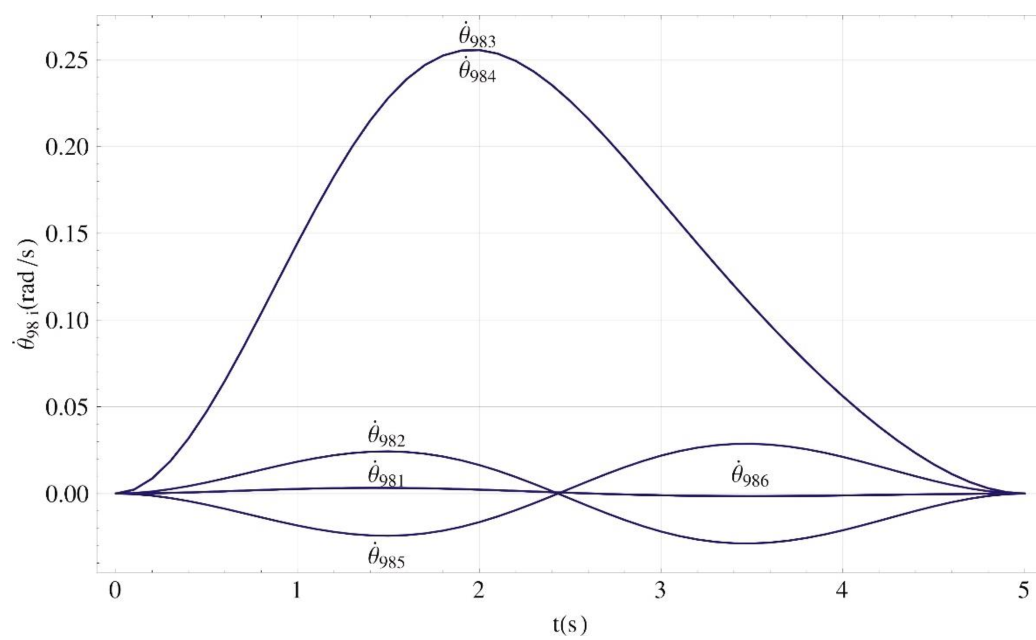


Figura A.8 Resultados de $\dot{\theta}_{98i}$

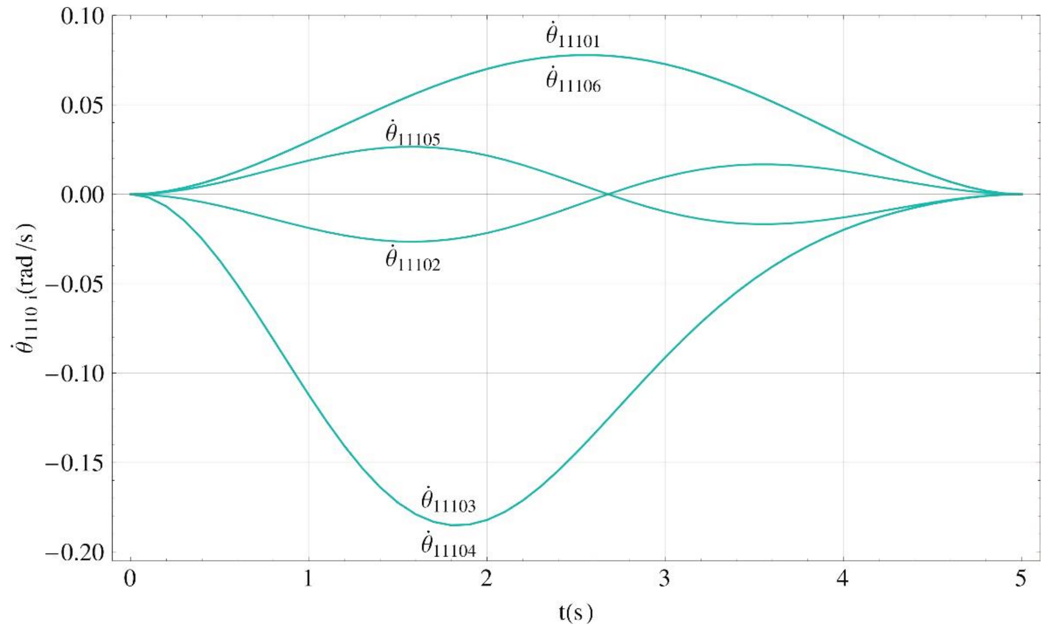


Figura A.9 Resultados de $\dot{\theta}_{1110i}$

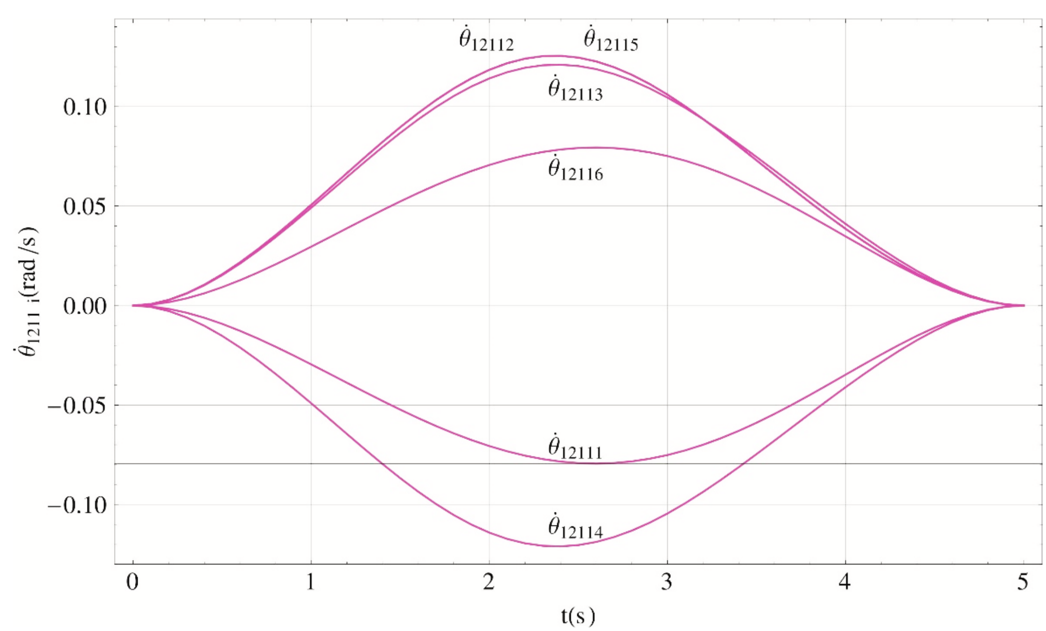


Figura A.10 Resultados de $\dot{\theta}_{1211i}$

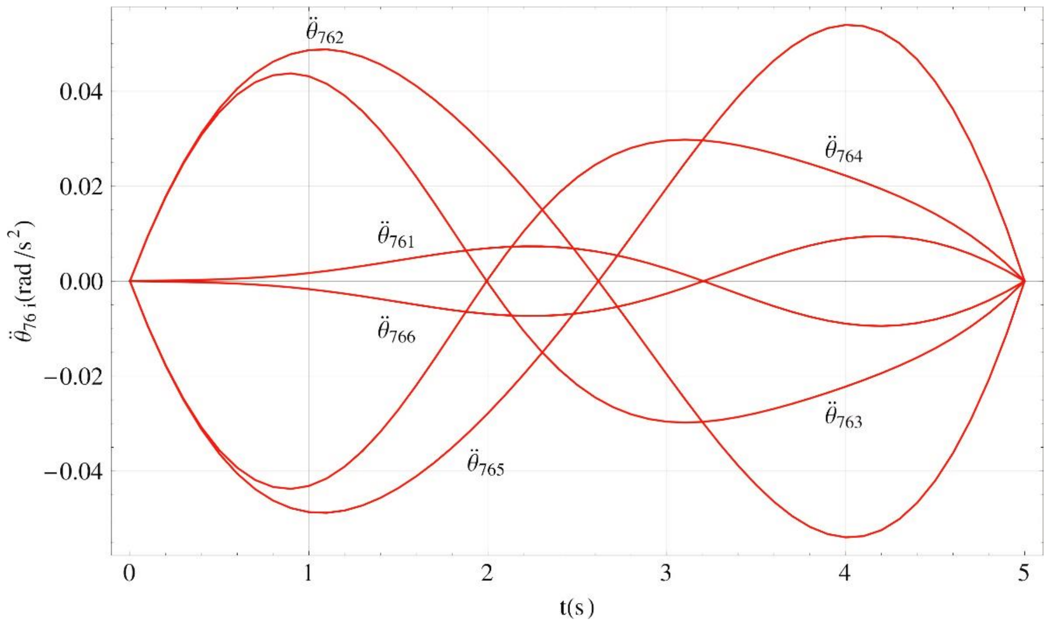


Figura A.11 Resultados de $\ddot{\theta}_{76i}$

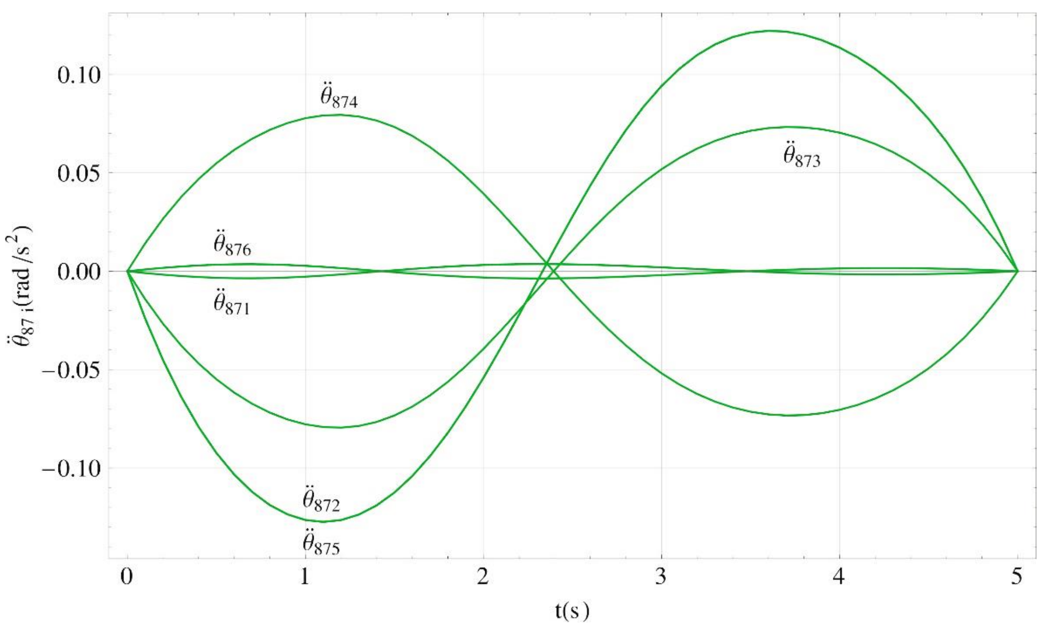


Figura A.12 Resultados de $\ddot{\theta}_{87i}$

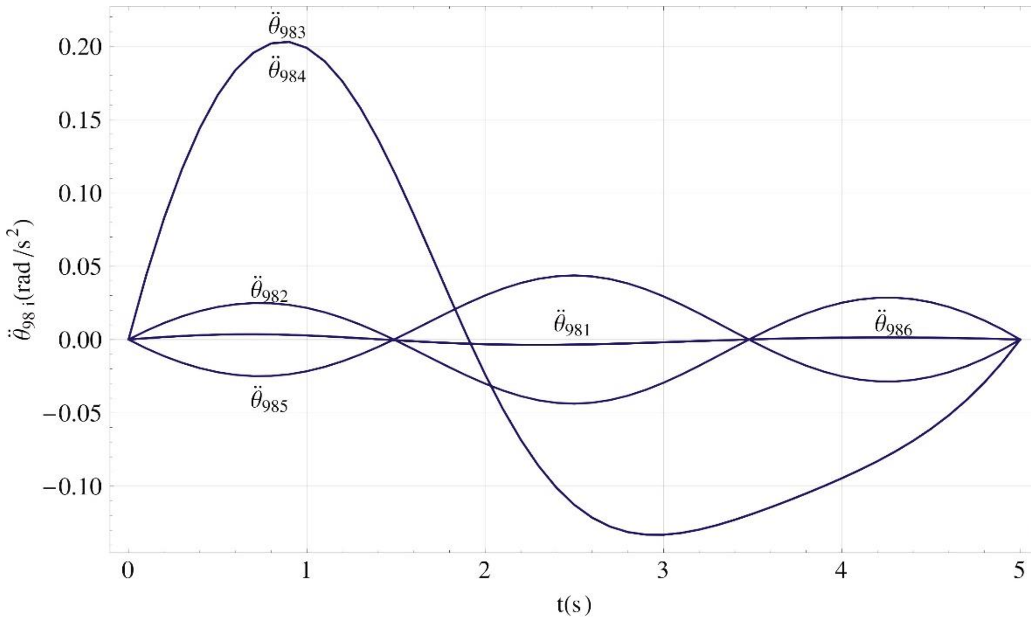


Figura A.13 Resultados de $\ddot{\theta}_{98i}$

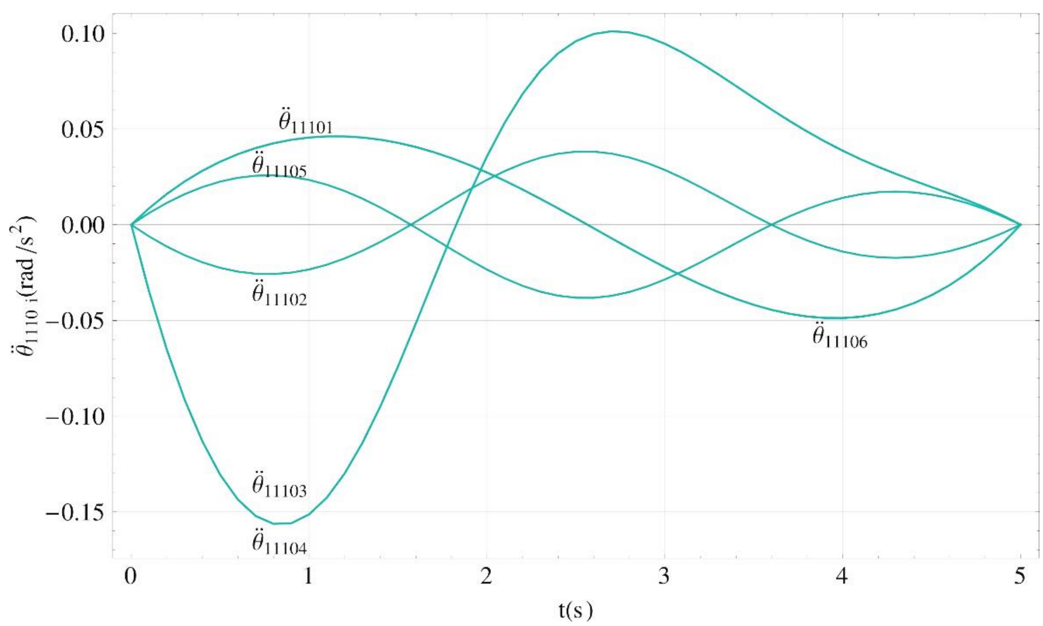


Figura A.14 Resultados de $\ddot{\theta}_{1110i}$

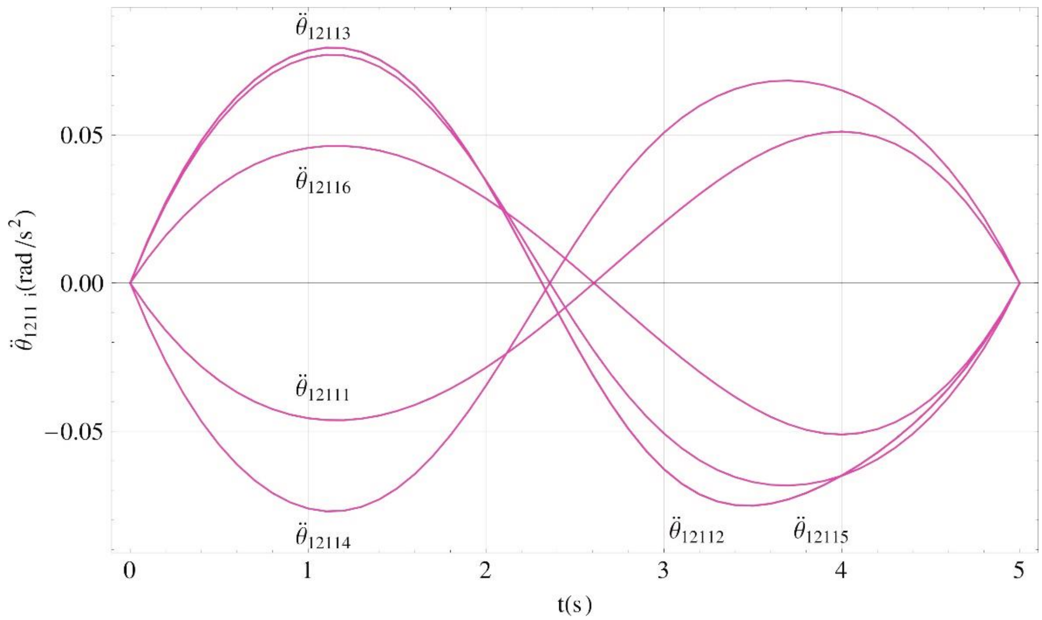


Figura A.15 Resultados de $\ddot{\theta}_{1211i}$

Apéndice B.
Desarrollo y comprobación de la ecuación (4.80):

$$\dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} = \omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$$

Desarrollando el término izquierdo de la ecuación anterior, donde:

$$R_{9i}^{11i} = R_{z4}(-\theta_{11,10i})$$

$$k_{9i}^{9i} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Derivando la matriz de rotación respecto al tiempo:

$$\dot{R}_{9i}^{11i} = \frac{\partial R_{z4}(-\theta_{11,10i})}{\partial \theta_{11,10i}}$$

Comprobando la derivada a través del Software Mathematica 9 obtenemos cada uno de los elementos de $\dot{R}_{9i}^{11i}$:

$\dot{R}_{9i[1,1]}^{11i} = 0$

$\dot{R}_{9i[1,2]}^{11i} = 0$

$\dot{R}_{9i[1,3]}^{11i} = 0$

$\dot{R}_{9i[2,1]}^{11i} = 0$

$\dot{R}_{9i[2,2]}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i}\ s\theta_{11,10i}$

$\dot{R}_{9i[2,3]}^{11i} = \dot{\theta}_{11,10i}\ c\theta_{11,10i}$

$\dot{R}_{9i[3,1]}^{11i} = 0$

$\dot{R}_{9i[3,2]}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i}\ c\theta_{11,10i}$

$$\dot{R}_{9i[3,3]}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i}\ s\theta_{11,10i}$$

Ahora al multiplicar $\dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$:

$$\dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{11,10i}\, c\theta_{11,10i} \\ -\dot{\theta}_{11,10i}\, s\theta_{11,10i} \end{bmatrix}$$

(e.1)

Desarrollando el segundo término, donde:

$$\omega_{11,9i}^{11i} = -\dot{\theta}_{11,10i} i_{11i}^{11i}$$

$$i_{11i}^{11i} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

Al desarrollar $\omega_{11,9i}^{11i}$, se tiene:

$$\omega_{11,9i}^{11i} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{11,10i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$:

$$R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} = \begin{bmatrix} 0 \\ s\theta_{11,10i} \\ c\theta_{11,10i} \end{bmatrix}$$

Ahora desarrollando el producto cruz entre estos últimos $\omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$:

$$\omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{11,10i}\, c\theta_{11,10i} \\ -\dot{\theta}_{11,10i}\, s\theta_{11,10i} \end{bmatrix}$$

(e.2)

Finalmente se hace notar que las ecuaciones (e.1) y (e.2) son iguales, por lo tanto, se comprueba que $\dot{R}_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i} = \omega_{11,9i}^{11i} \times R_{9i}^{11i} k_{9i}^{9i}$, se cumple. De la misma forma se pueden comprobar las ecuaciones (4.73), (4.78), (4.86), (4.88) y (4.90).

Desarrollo y comprobación de la ecuación (4.97):

En esta sección se efectuará el desarrollo matricial del término $\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j}$, para demostrar que lo presentado en la sección 4.3.2 es correcto.

Desarrollo matricial:

De la ecuación (3.1):

$$r_{G2i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + r_{G2i'}^{o}$$

$$r_{G2i}^{o} = r_{c}^{o} + r_{B}^{o} + r_{2i}^{o} + r_{4i}^{o} + R_{7i}^{o} r_{G2i'}^{7i}$$

Dónde:

$$r_{G2i'}^{7i} = [x_{G2i'}, y_{G2i'}, z_{G2i'}]$$

$$R_{7i}^{o} = R_{z6}(\delta_{1Bi}) R_{z6}(\delta_{32i}) R_{z4}(\delta_{43i}) R_{z6}(\delta_{65i}) R_{z6}(\theta_{7,6i})$$

$$R_{o}^{7i} = R_{z6}(-\theta_{7,6i}) R_{z6}(-\delta_{65i}) R_{z4}(-\delta_{43i}) R_{z6}(-\delta_{32i}) R_{z6}(-\delta_{1Bi})$$

Derivando la ecuación (3.1) respecto al tiempo:

$$v_{G2i}^{o} = \dot{R}_{7i}^{o} (R_{7i}^{o})^{T} r_{G2i'}^{o}$$

$$= W_{7i}^{o} r_{G2i'}^{o}$$

Al desarrollar se obtiene $W_{7i}^{o} = \dot{\theta}_{7i} S_{7i}^{o}$ y escribiendo $r_{G2i'}^{o}$ en función de $r_{G2i'}^{7i}$ la ecuación anterior, se tiene:

$$v_{G2i}^{o} = S_{7i}^{o} (R_{7i}^{o} r_{G2i'}^{7i}) \dot{\theta}_{7i} \qquad \text{(e.3)}$$

$$S_{7i}^{o} = \begin{bmatrix} -c(\theta_{7,6i}) & s(\theta_{7,6i}) & c(\theta_{7,6i}) - s(\theta_{7,6i}) \\ -s(\theta_{7,6i}) & -c(\theta_{7,6i}) & c(\theta_{7,6i}) + s(\theta_{7,6i}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora la ecuación (4.6):

$$v_{G2i}^{7i} = \dot{\theta}_{7,6i}\, e_{2i}$$

Por la semejanza entre las ecuaciones (4.6) y (e.3) nos damos cuenta que e_{2i} proyectado en la base inercial es:

$$e_{2i}^{0} = S_{7i}^{o} R_{7i}^{o} r_{G2i'}^{7i}$$

Derivando e_{2i}^{0} respecto a q_j:

$$\frac{\partial e_{2i}^{0}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_{7i}}(S_{7i}^{o} R_{7i}^{o} r_{G2i'}^{7i}) \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$$

$$= \left(S_{7i}^{o} \frac{\partial R_{7i}^{o}}{\partial \theta_{7i}} r_{G2i'}^{7i} \right) \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$$

Ahora proyectando e_{2i}^{0} en la base local $7i$:

$$\frac{\partial\, e_{2i}}{\partial q_j} = R_{o}^{7i} \left(S_{7i}^{o} \frac{\partial R_{7i}^{o}}{\partial \theta_{7i}} r_{G2i'}^{7i} \right) \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$$

(e.4)

$$= J_{1i,1} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$$

Finalmente, desarrollando la ecuación (e.4)

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} -x_{G2i'} \\ -y_{G2i'} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$$

Por otro lado, del desarrollo vectorial de la sección 4.3.2, sabemos de la ecuación (4.97):

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j} = k_{7i}^{7i} \times \left(k_{7i}^{7i} \times\, r_{G2i'}^{7i} \right) \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}$$

Desarrollando la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial e_{2i}}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} -x_{G2i'} \\ -y_{G2i'} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \theta_{7,6i}}{\partial q_j}$$

De esta forma nos damos cuenta que el desarrollo matricial y vectorial arrojan el mismo resultado, por lo tanto, se comprueba que el desarrollo de la sección 4.3.2. es correcto. En el desarrollo de dicha sección se usará el método vectorial para derivar vectores respecto a q_j.