



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ZARAGOZA**

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO  
POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA:  
RIVERA RIVERA JESUS AMADO**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**MEXICO D.F. ABRIL DEL 2015**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES “ZARAGOZA”**

**DIRECCIÓN**

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
PRESENTE.**

Comunico a usted que al alumno(a) Rivera Rivera Jesús Amado con número de cuenta 410019160 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 24 del mes de abril de 2015 a las 11:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	I.Q. RAUL RAMÓN MORA HERNÁNDEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	M. en C. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ
SUPLENTE	DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

\_\_\_\_\_  
Edtson E. Herrera Valencia  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_

El título de la tesis que se presenta es: **Efectos de deslizamiento en un sistema de flujo continuo por compresión en una geometría de platos concéntricos.**

Opción de Titulación: Tesis profesional

**ATENTAMENTE**  
**“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”**  
México, D. F. a 19 de marzo de 2015.

**DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ**  
DIRECTOR

**ZARAGOZA**  
**DIRECCIÓN**

RECIBI:  
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES  
Y DE GRADO

Vc. Bc.

I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA  
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.



### AGRADECIMIENTOS

- **Universidad Nacional Autónoma de México,, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Carrera de Ingeniería Química**
- **Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por el apoyo en este trabajo de titulación, intercambio de ideas y opiniones.**
- **Dr. Fausto Calderas García por el intercambio de ideas y de opiniones y la asesoría constante en este trabajo.**
- **Dr. Mariano Pérez Camacho por las sugerencias a este trabajo, el intercambio de opiniones y su experiencia en el área experimental.**
- **Al Ing. Raúl Ramón Mora Hernández por los comentarios y sugerencias para que este trabajo tenga una aplicación tecnológica.**
- **Al Ing. Juvenal Guzmán Gómez por los comentarios y sugerencias en este proyecto de Licenciatura.**
- **Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115615>> << Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.**

# “EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

---

Rivera Rivera Jesús Amado

## DEDICATORIAS

Este trabajo está dedicado principalmente a mis padres. Para Antonia que sin sus consejos, paciencia y desveladas no hubiera podido lograr este objetivo, eres la persona que siempre estuvo ahí para mí en las buenas y en las malas, por esos regaños que me ayudaron a corregir el camino desde el inicio de esta aventura llamada escuela, siempre te estaré agradecido por TODO. Para Amado, por todo ese apoyo que recibí de tu parte, el esfuerzo que pones en cada hora de trabajo para sacar a tu familia adelante, por darnos a mis hermanos y a mí toda tu sabiduría y aconsejarnos en la vida. Por esos momentos de diversión y ocurrencias que siempre nos sacan una sonrisa y a veces hasta una carcajada y hacen que más que mis papás sienta que son mis amigos más cercanos. Para ustedes que siempre estuvieron a mi lado los quiero mucho papás.

A mis hermanos Esperanza y Silverio que siempre me han apoyado en todas las circunstancias buenas y malas, a ustedes que sin sus ocurrencias, peleas, platicas, salidas no hubiera podido lograr este objetivo.

A mis compañeros de la carrera Pedro, Pablo, Zavaleta, Miriam, Yasmin, que sin sus ocurrencias que hicieron más amena las horas de estudio, por su ayuda en todo momento en tareas, trabajos, estudiar para un examen y todos esos momentos de ocio que siempre nos ayudaban a despejarnos y poder descansar un momento.

A los que me acompañaron en la elaboración de este trabajo profesional, por esas reuniones en campus 3 donde junto al profesor Edtson pasamos buenos momentos de relajación, estrés, impaciencia pero donde siempre había tiempo para una buena comida y un buen café.



## APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO

A continuación, se presentan las aportaciones más importantes del presente trabajo aplicado a los fenómenos de transporte en fluidos newtonianos en sistema que presentan el fenómeno molecular de deslizamiento.

La aportación a este trabajo de tesis de licenciatura es el estudio del efecto de deslizamiento ( $V_s$ ) en particular para un fluido newtoniano, en particular, en este trabajo se estudia el flujo continuo por compresión entre dos discos concéntricos, se parados a una distancia  $h$ . El plato superior, se perfora con una serie de orificios aleatorios de tal manera que el fluido entra por los orificios simulado un flujo continuo. Las aportaciones más importantes son presentadas a continuación:

- a) En este trabajo se acopla la ecuación de continuidad con la ecuación de momento para un fluido newtoniano (Navier-Stokes).
- b) A partir de un conjunto de variables adimensionales se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales dependen de dos números adimensionales:  $\alpha$  y el número de Reynolds  $Re$ . El primero de ellos, relaciona dos longitudes características axial y radial respectivamente, y el segundo dos tipos de mecanismos, inerciales y viscosos.
- c) Suponiendo que los términos que contienen el parámetro  $\alpha$  son pequeños, el sistema se puede simplificar, al flujo entre placas paralelas por medio de un gradiente de presión radial constante. Esta aproximación es conocida como de lubricación y el método que se presenta aquí demuestra que las contribuciones son pequeñas, en vez de solo invocar la aproximación de lubricación.
- d) Geométricamente, el flujo se aproxima al de una rendija a gradiente de presión constante.
- e) A partir del balance entre el gradiente de presión y la componente  $r_z$  de la divergencia del tensor esfuerzos, se obtienen expresiones analíticas para las siguientes cantidades dinámicas: (i) Velocidad radial, (ii) Velocidad axial, (iii) Gradiente de presión, (iv) Perfil de Presiones, (v) Gradiente de presión, (vi) fuerza

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

---

Rivera Rivera Jesús Amado

normal en el plato superior. Todas ellas, en función de las propiedades del medio, geométricas, y la velocidad promedio con la que se inyecta el plato inferior.

- f) Los perfiles de velocidad se modifican por efecto del deslizamiento, es decir las curvas de los perfiles de velocidad pierden su efecto axi-simétrico, y el sistema se puede comparar al flujo de un sistema que combina el flujo de Couette y el de Poiseuille en un sistema de placas paralelas.
- g) El efecto de los mecanismos deslizantes tiene un efecto negativo en el contexto de la fuerza normal, ya que disminuye su valor numérico y su capacidad de carga.
- h) A partir de datos reométricos, se predicen las curvas de velocidad y fuerza resultando que el sistema es muy sensible a los datos reométricos que sean utilizados.
- i) Finalmente, este trabajo es punto de partida en la extensión de sistemas complejos con mecanismos deslizantes en la pared lo que abre posibilidades en la industria de agentes lubricantes basados en sistemas poliméricos.



## Índice

LEYENDA DE FIGURAS .....	XI
NOMENCLATURA .....	XIII
GLOSARIO .....	XIV
RESUMEN .....	XVI
ABSTRACT.....	XVI
CAPÍTULO I .....	1
INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 Flujo por compresión .....	2
1.1.1 Descripción .....	2
1.1.2 Aplicaciones.....	3
1.1.3 Tipos de sistema físico.....	3
1.1.4. Ecuaciones constitutivas .....	4
1.1.5 Aproximaciones matemáticas .....	4
1.1.6 Antecedentes e historia del flujo por compresión.....	5
1.1.7 Viscosimetría de platos paralelos .....	8
1.1.8 Efectos de la temperatura en el flujo por compresión .....	9
1.1.9 Efectos de la porosidad en el flujo por compresión.....	9
1.1.10 Efectos inerciales y elásticos en el flujo por compresión .....	9
1.1.11 Flujo por compresión en diferentes geometrías.....	10
1.2 Flujo continuo por compresión .....	10
1.3 Antecedentes del flujo continuo por compresión .....	10
CAPÍTULO II .....	13
OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE TRABAJO .....	13
2.1 Objetivo general.....	14
2.2 Objetivos particulares .....	14
2.2.1 El primer objetivo .....	14
2.2.2 El segundo objetivo .....	14
2.2.3 El tercer objetivo.....	14
2.3 Hipótesis del trabajo .....	14
CAPÍTULO III.....	16
FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	16
3.1 Reología .....	17
3.1.1 ¿Qué es la reología?.....	17



**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR  
COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

3.2 Tensor de deformación .....	17
3.3 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.....	17
3.4 Tensor rapidez de deformación.....	18
3.5 El tensor de Vorticidad .....	18
3.6 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación .....	19
3.7 Tensor de esfuerzos .....	19
3.8 Ecuaciones constitutivas .....	20
3.8.1 Fluido Newtoniano .....	20
3.8.2 Fluido No Newtonianos .....	20
3.8.3 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia).....	20
3.8.4 Modelo de Ellis.....	21
3.8.5 Modelo de Carreau.....	21
3.8.6 Modelo de Reinner-Phillipoff.....	22
3.8.7 Fluido de Bingham.....	22
3.9 Métodos reométricos.....	23
3.10 Flujo cortante simple .....	23
CAPÍTULO IV .....	25
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	25
4.1 Descripción física y análisis de proceso .....	26
4.2 Ecuaciones Vectoriales y Tensoriales.....	26
4.2.1 Ecuación de continuidad.....	26
4.2.2 Ecuación de momento.....	27
4.2.3 Ecuación constitutiva.....	27
4.2.4 Tensor rapidez de deformación.....	27
4.2.5 Vector velocidad y tensores cinemáticos.....	28
4.2.6 Tensor de esfuerzos .....	29
4.2.7 Ecuación de Newton y componentes del tensor de esfuerzos .....	29
4.2.8 Condiciones de Frontera .....	30
4.2.9 Componentes de la ecuación de movimiento .....	31
4.3 Variables adimensionales .....	31
4.4 Ecuaciones adimensionales.....	32
4.4.1 Ecuación de continuidad.....	32
4.4.2 Ecuación de Movimiento .....	32



4.4.3 Componentes de la ecuación tensorial de Newton .....	33
4.4.4 Condiciones de frontera .....	34
4.4.5 Fuerza adimensional .....	34
CAPÍTULO V .....	35
MODELADO TEÓRICO .....	35
5.1 Aproximación de lubricación.....	36
5.2 Análisis con deslizamiento ( $V_s \neq 0$ ) .....	36
5.2.1 Componentes radial y axial de la ecuación de movimiento.....	36
5.2.2 Ecuación de continuidad.....	36
5.2.3 Componentes del tensor de esfuerzos .....	36
5.2.4 Condiciones de frontera .....	36
5.2.5 Fuerza en el plato superior debido al flujo continuo .....	37
5.2.6 Cálculo del perfil de velocidad radial con deslizamiento en la pared .....	37
5.2.7 Cálculo del perfil de velocidad axial con deslizamiento en la pared.....	38
5.2.8 Cálculo de gradiente de presión y presión con efectos de deslizamiento.....	38
5.2.9 Cálculo del perfil de presiones con deslizamiento.....	39
5.2.10 Cálculo de la fuerza normal.....	39
5.3 Resumen de ecuaciones principales obtenidas a partir de los cálculos anteriores.....	41
CAPÍTULO VI .....	43
ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	43
6.1 Predicciones teóricas.....	44
6.2 Análisis sin efectos de deslizamiento ( $V_s=0$ ) .....	45
6.3 Comparación de graficas .....	46
6.3.1 Velocidad Radial.....	46
6.3.2 Velocidad Axial .....	48
6.3.3 Gradiente de Presión.....	50
6.3.4 Presión .....	52
6.3.5 Fuerza Normal .....	54
6.3.6 Flujo por compresión utilizando datos experimentales ( $V_s=0$ ).....	56
6.4 Análisis con efectos de deslizamiento ( $V_s \neq 0$ ).....	59
6.4.1 Flujo continuo por compresión utilizando datos experimentales ( $V_s \neq 0$ ).....	60
CAPÍTULO VII .....	63
CONCLUSIONES .....	63
7.1 Flujo continuo por compresión .....	64

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR  
COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

---

Rivera Rivera Jesús Amado

7.2 Deslizamiento vs dinámica molecular .....	67
CAPÍTULO VIII.....	68
TRABAJO FUTURO .....	68
8.1 Modelos no newtonianos .....	69
8.1.1 Newtoniano generalizado .....	69
8.1.2 Modelos viscoelásticos lineales .....	69
8.1.3 Modelos viscoelásticos no lineales .....	70
8.2 Mecanismos inerciales y elásticos .....	70
8.3 Métodos matemáticos y computacionales .....	71
8.4 Sistemas y Reometría.....	71
APÉNDICES .....	72
APÉNDICE A.....	73
APÉNDICE B.....	77
BIBLIOGRAFÍA .....	81



## LEYENDA DE FIGURAS

Figura 1 Flujo por compresión axi-simétrico con una masa constante de la muestra entre los platos (Engmann et. al. (2005) [9]).	2
Figura 2 . Flujo por compresión axi-simétrico con área de contacto constante entre los platos y la muestra (Engmann et. al. (2005) [9])	2
Figura 3 Sistema de coordenadas y dimensiones básicas usadas en la descripción del flujo compresible axi-simétrico. Engmann et. al. (2005)	4
Figura 4 Ilustra el sistema de flujo continuo por compresión. Dos platos concéntricos separados a una distancia constante $H$ . El líquido es inyectado a Flujo constante $Q$ a través de una serie de perforaciones en el plato inferior (a) y lo que se mide es la magnitud de la fuerza que experimenta el plato superior por efecto del fluido. Nótese, que si en la geometría, se desprecia los efectos de curvatura, el flujo se puede aproximar localmente al de una rendija a gradiente de presión pulsátil.	12
Figura 5 Organización del trabajo desarrollado en la tesis.	15
Figura 6. Velocidad radial adimensional sin deslizamiento vs coordenada axial adimensional, en función del radio de los platos.	45
Figura 7. Velocidad radial adimensional sin deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido	46
Figura 8. Velocidad radial adimensional con deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido	46
Figura 9. Velocidad axial adimensional sin deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido.	49
Figura 10. Velocidad axial adimensional con deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido.	49
Figura 11. Gradiente de presión adimensional sin deslizamiento vs la distancia del radio, en función de la no homogeneidad del líquido.	50
Figura 12. Gradiente de presión adimensional con deslizamiento vs la distancia del radio, en función de la no homogeneidad del líquido.	50
Figura 13. Presión adimensional sin deslizamiento vs coordenada radial adimensional, en función de la no homogeneidad del líquido	52
Figura 14. Presión adimensional con deslizamiento vs coordenada radial adimensional, en función de la no homogeneidad del líquido	52

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR  
COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

---

Rivera Rivera Jesús Amado

Figura 15. Fuerza sobre el plato superior sin deslizamiento vs velocidad promedio del líquido, en función de la no homogeneidad del líquido.....	54
Figura 16. Fuerza sobre el plato superior con deslizamiento vs velocidad promedio del líquido, en función de la no homogeneidad del líquido.....	54
Figura 17. Fuerza en el plato superior (sin deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido homogéneo, distancia entre discos constante $z = h$ , variando el radio del disco $r = a$ .....	57
Figura 18. Fuerza en el plato superior sin deslizamiento vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido totalmente homogéneo, radio del disco constante $r = a$ , variando la distancia entre platos $z = h$ .....	57
Figura 19. Fuerza en el plato superior (sin deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (agua), líquido totalmente homogéneo, distancia entre discos constante $z = h$ , variando el radio del disco $r = a$ .....	58
Figura 20. Velocidad radial adimensional con deslizamiento vs separación de los platos, en función de la coordenada adimensional axial.....	59
Figura 21. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido homogéneo, distancia del radio constante $r = a$ , variando la distancia entre discos $z = h$ .....	60
Figura 22. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido homogéneo, distancia constante entre discos $z = h$ , variando la distancia del radio $r = a$ .....	61
Figura 23. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (agua), líquido homogéneo, distancia del radio constante $r = a$ , variando la distancia entre discos $z = h$ .....	61
Figura 24. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (agua), líquido homogéneo, distancia constante entre discos $z = h$ , variando la distancia del radio $r = a$ .....	62



## NOMENCLATURA

### Variables dimensionales

$a$	Radio del disco. [m]
$F_N$	Fuerza Newtoniana. [N]
$h$	Distancia entre los discos. [m]
$m$	Coefficiente de homogeneidad. [1]
$p$	Presión hidrostática. [Pa]
$Q$	Flujo volumétrico. [m <sup>3</sup> /s]
$\{r,z\}$	Coordenadas axial y radial respectivamente. [m]
$V_{(R)}$	Velocidad radial dimensional. [m/s]
$V_{(Z)}$	Velocidad axial dimensional. [m/s]
$\langle V \rangle$	Velocidad Promedio. [m/s]
$V_s$	Factor de deslizamiento. [m/s]

### Variables adimensionales

$F$	Fuerza adimensional en el plato superior. $z = 1$
$p^*$	Presión hidrostática adimensional.
$\{r^*,z^*\}$	Coordenadas axial y radial adimensional respectivamente Y y Z.
$Re$	Numero de Reynolds.
$u(r^*)$	Velocidad radial adimensional en $z = 0$ .
$V_{(R)}^*$	Velocidad radial adimensional.
$V_{(Z)}^*$	Velocidad axial adimensional.

### Vectores y tensores

$\mathbf{D}$	Tensor rapidez de deformación. [1/s]
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos. [Pa]

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

---

Rivera Rivera Jesús Amado

$\mathbf{v}$	Vector velocidad. [m/s]
$\nabla\mathbf{v}$	Tensor gradiente de velocidad. [1/s]
$\nabla\mathbf{v}^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad. [1/s]

Letras griegas

$\alpha$	Relación entre la longitud característica axial $h$ y la longitud característica radial $a$ . [1]
$\mu$	Viscosidad del fluido. [Pas]
$\theta$	Coordenadas angular. [1]
$\sigma_{ik}^*$	Componente $ik$ del tensor de esfuerzos. [Pa]
$\rho$	Densidad del líquido. [kg/m <sup>3</sup> ]

## GLOSARIO

<b>Aproximación de Lubricación:</b>	Es cuando en un sistema se desprecian los términos pequeños, los cuales están relacionados con el cociente de dos longitudes características axial y radial respectivamente.
<b>Deformación:</b>	Cambio relativo de la posición con respecto a otra en un medio continuo.
<b>Deslizamiento:</b>	Es cuando en un sistema físico no se cumple la condición de adherencia de la superficie al fluido.
<b>Ecuación constitutiva:</b>	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema. En particular en reología es el Esfuerzo y la Deformación.
<b>Ecuación de continuidad:</b>	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
<b>Ecuación de movimiento:</b>	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
<b>Ecuación de Navier-Stokes:</b>	Ecuación de movimiento aplicada a un fluido Newtoniano.



<b>Estado estacionario:</b>	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
<b>Fluido:</b>	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo se deforma continua irreversiblemente.
<b>Fluido incompresible:</b>	Fluido que tiene una densidad constante.
<b>Fluido newtoniano:</b>	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
<b>Fluido no-newtoniano:</b>	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
<b>Fluido adelgazante al corte:</b>	Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
<b>Fluido engrosante al corte:</b>	Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
<b>Flujo volumétrico:</b>	Volumen por unidad de tiempo.
<b>Lubricación:</b>	Es cuando en un sistema físico se mete un fluido viscoso que minimiza el contacto entre ellos, para abatir la fricción o la disipación de energía.
<b>Modelo de Cross:</b>	Modelo reológico de cuatro parámetros materiales que describe la viscosidad en función de la rapidez de deformación y que predice dos zonas a baja y alta rapidez de deformación y la zona intermedia asociada a la ley de potencia.
<b>Modelo de Ellis:</b>	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
<b>Rapidez de deformación:</b>	Evolución temporal de la deformación.
<b>Viscosidad:</b>	Medida de la resistencia a fluir de la materia.



# “EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

Rivera Rivera Jesús Amado

## RESUMEN

En este trabajo se estudia un sistema de lubricación de platos concéntricos con deslizamiento en la pared. EL flujo continuo por compresión consiste en dos platos separados a una distancia  $z = h$  y radio  $r = a$ . Para simular el flujo continuo en el sistema, se perfora el plato de abajo con una serie de orificios por los cuales, un fluido es inyectado a flujo volumétrico constante. Con el fin, de resolver las ecuaciones diferenciales lineales acopladas (Momento, Continuidad, Constitutiva), se propone un conjunto de variables adimensionales, que permiten introducir un parámetro perturbativo (mucho menor a uno), el cual relaciona dos longitudes características (axial y radial). A orden cero, la expresión para la fuerza es equivalente al modelo de Stefan, y a primer orden se obtiene una corrección por efectos inerciales. Finalmente, se utilizan datos experimentales provenientes de la literatura y son comparados con las predicciones de nuestro modelo.

**Palabras claves:** Flujo por compresión, Deslizamiento en la pared, Método Perturbativo, Lubricación, Fluidos Newtonianos.

**Área específica del proyecto:** Fenómenos de Transporte y Reología

## ABSTRACT

In this work, it is studied a Lubrication system in a concentric circular plates with partla slip on the wall. The continuous squeeze flow consist in two circular plates with a gap  $H$  and radius  $a$ . In order to simulate the continuous volumetric flow in the system, arrays of holes are made in the lower plate. In order to solve the set of coupled nonlinear differential equations (Momentum, Continuity and Constitutive ) it is proposed a set of dimensionless variables, which lead introduced a small parameter, which is a ratio between two lengths scale associated to the gap  $H$  and radius  $r$ . To zeroth order, the normal force is equivalent to the Stefan equation, which depends of the geometric, slip and material properties in the system. To first order in the perturbation parameter, and analytical inertial-force expression is obtained. Finally, continuous squeeze flow film is predicted using experimental data from the literature and compare them with our model.

**Key words:** Squeeze flow, Slip wall, Perturbation parameter, Lubrication system, Newtonian Fluids.

**Fields of the project:** Transport Phenomena and Rheology

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUCCIÓN**

## FUNDAMENTACIÓN DE LA ELECCIÓN DEL TEMA

### 1.1 Flujo por compresión

#### 1.1.1 Descripción

El flujo por compresión es uno de los sistemas más estudiados en el área de fenómenos transporte y reología (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976). En este sistema, el fluido es colocado entre dos platos circulares paralelos, el inferior se encuentra estático mientras que el superior se aproxima con una velocidad  $H(t)$  comprimiendo al fluido que se encuentra colocado en el plato inferior (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976). El fluido es comprimido por una fuerza constante y fluye en la dirección radial hacia fuera del sistema (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976; Leider & Bird 1974; Leider 1974). En este sistema se supone, que el fluido es lo suficientemente viscoso, de tal manera que el líquido permanece entre los dos platos, i.e., la tensión superficial entre el fluido y la superficie es lo suficientemente alta para mantener el fluido en el plato inferior (Bird et al. 1987, 2002)

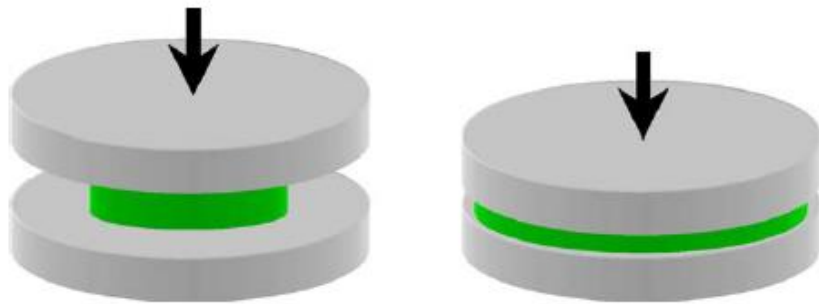


Figura 1 Flujo por compresión axi-simétrico con una masa constante de la muestra entre los platos (Engmann et. al. (2005) [9]).

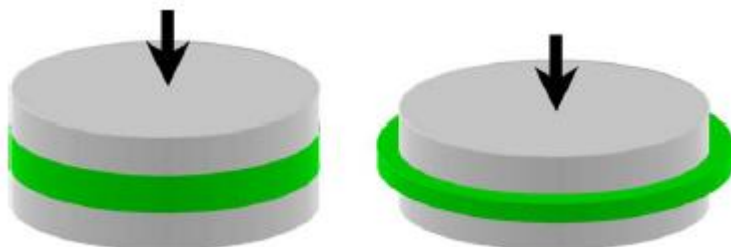


Figura 2 . Flujo por compresión axi-simétrico con área de contacto constante entre los platos y la muestra (Engmann et. al (2005) [9])

### 1.1.2 Aplicaciones

Este sistema ha sido empleado en diferentes contextos en la industria, investigación y aplicaciones de tipo tecnológico (Engmann et al. 2005). Ejemplos de flujo por compresión se pueden observar en la vida cotidiana (Engmann et al. 2005). Por ejemplo, cuando ingiere un alimento y se procesa en los dientes, se forma una pasta que después es deglutida y pasa por el aparato digestivo (Engmann et al. 2005; Tornqvist et al. 2000). En la industria de los alimentos, existen muchos ejemplos de este tipo de sistemas de flujo (Engmann et al. 2005; Tornqvist et al. 2000). El amasado de pan, la preparación de galletas en donde unen la pasta o la crema con las superficies sólidas, son ejemplos claros de flujo por compresión en la industria alimenticia (Engmann et al. 2005; Tornqvist et al. 2000).

En la industria de los polímeros, los procesos de moldeo, inyección y extrusión combina flujos cortantes y extensionales, los cuales son punto de partida en la descripción matemática y física de estos sistemas (Bird et al. 1987; Covey & Stanmore 1981). Desde el punto de vista de la teoría de lubricación, el estudio de aditivos poliméricos, es un reto que está todavía muy lejos de ser entendido (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Covey & Stanmore 1981; Engamnn et al. 2005; Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000; Scott 1931, 1936). Los aditivos son fluidos que permiten, evitar o disminuir la fricción o desgaste entre la maquinaria y el equipo de uso en la industria mecánica (Bird et al. 2002; Phan-Thien & Tanner 1984).

### 1.1.3 Tipos de sistema físico

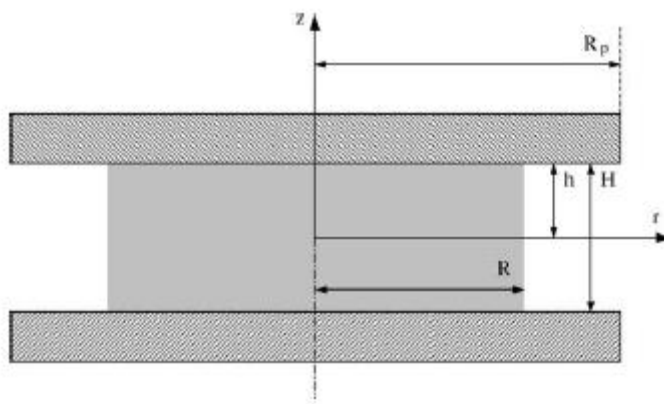
En este sistema, se han probado diferentes tipos de fluidos: (a) Líquidos newtonianos, (ii) y Líquidos no newtonianos (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Covey & Stanmore 1981; Engamnn et al. 2005; Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000; Sherwood & Durban 1996 a,b). Desde un punto de vista geométrico, el flujo por compresión ha sido investigado con diferentes geometrías: a) rectangulares, b) circulares (el más utilizado) y c) esféricos (Chen 1993; Covey 1981; Engmann et al. 2005; Leider & Bird 1974; Leider 1974; Lian et al. 2001)

#### 1.1.4. Ecuaciones constitutivas

Este modelo se ha estudiado con diferentes tipos de ecuaciones constitutivas llamadas: I. Viscosos: (i) Newton, (ii) Ostwald, (iii) Bingham, (iv) Hershel Bulkley, II. Modelos viscoelásticos lineales: (a) Maxwell, (b) Jeffreys, (c) Burgers (d) Viscoelástico Generalizado, III. Modelos viscoelásticos no-lineales: (1) Maxwell convectivo superior, (2) Tanner, (c) Oldroyd B, (3) Giesekus, etc. (Barnes et al.1989; Bird et al. 1987, 2002)

#### 1.1.5 Aproximaciones matemáticas

Matemáticamente, este sistema es muy complicado debido a que el vector de velocidad contiene dos componentes: radial y axial respectivamente, las cuales son funciones del tiempo y de la posición radial y axial respectivamente, i.e.  $\{V_r(r,z,t), V_z(r,z,t)\}$  (Bird et al. 1987, 1987, 2002). Este hecho complica notablemente los métodos analíticos (Grimm et al. 1976), y naturalmente induce los métodos numéricos, ya que se tiene la ecuación de continuidad, dos componentes de la ecuación de movimiento y las componentes de la ecuación constitutiva respectivamente (Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000). Incluso el modelo más sencillo, como es el newtoniano, se complica por este hecho lo que lo hace un problema muy atractivo para los estudios de la reología, mecánica de fluidos y fenómenos de transporte (Bird et al 1987, 2002; Grimm 1976).



**Figura 3 Sistema de coordenadas y dimensiones básicas usadas en la descripción del flujo compresible axi-simétrico. Engmann et. al. (2005)**



**La primera aproximación analítica**, se hace suponiendo que los términos que sean multiplicados por la separación de los platos y dividida por el radio del disco circular, son pequeños es decir,  $H/a \ll 1$ , por lo que los componentes de la ecuación de movimiento que los contienen se desprecian (Bird et al. 1987, 2002). **Esta suposición se conoce como aproximación de Lubricación, la cual físicamente consiste en despreciar los efectos de curvatura, y aproximar el flujo como si se tratara de un flujo a gradiente de presión constante entre dos platos paralelos** (Sthefan 1874; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976). En el estudio del flujo por compresión han sido incluidos fluidos viscosos newtonianos, fluidos viscosos no newtonianos, fluidos viscoelásticos lineales y no lineales respectivamente (Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976; Huang et al. 2002; McClelland & Finlayson; Phan-Thien & Tanner 1983; Phan-Thien & Tanner; Phan-Thien 2000; Sherwood & Durban 1996a, 1996b; Waters & Gooden 1983, 1984; Engmann et al. 2005).

**Otras aproximaciones** se basan en suponer conservación de masa en el sistema, i.e., que la ecuación de continuidad se satisface por un conjunto de funciones, las cuales al ser sustituidas en las componentes de la ecuación de movimiento conducen a un sistema no lineal de ecuaciones acopladas que permiten proponer diferentes esquemas de tipo numérico. (Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000). Por último, en este contexto los métodos basados en esquemas de diferencias finitas, elemento finito, volumen finito, permiten obtener resultados más precisos para el valor de la fuerza en el plato superior respectivamente (Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000).

### **1.1.6 Antecedentes e historia del flujo por compresión**

El flujo por compresión de un líquido newtoniano fue estudiado despreciando los mecanismos inerciales (Sthefan 1874; Brindley et al. 1976; Bird et al. 1987, 2002). En este sistema, el fluido viscoso es colocado entre dos platos separados de radio  $a$  y separados a una distancia  $h$ , y el plato superior, se aproxima con una velocidad no constante, es decir, la velocidad se modifica punto a punto (Sthefan 1974; Brindley et al. 1976; Bird et al. 1987; 2002). Stefan (1874) demostró que la fuerza para mantener el movimiento del líquido fluyendo por el espacio comprendido entre los platos, es proporcional a la

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

viscosidad cortante y propiedades geométricas del sistema. La ecuación básica de Stephan esta dada por la siguiente expresión analítica:

$$F(t) = \frac{3}{2} \frac{\pi a^4 \eta_0 \dot{H}(t)}{H(t)^3} \quad (a)$$

En la Ec. (a)  $F(t)$  es la fuerza que experimenta el plato superior debido al medio,  $\eta_0$  es la viscosidad del medio,  $h(t)$  es la separación del medio,  $a$  es el radio del disco y  $\dot{h}(t)$  es la velocidad promedio (Sthefan 1984; Brindley et al. 1976; Bird et al. 1987, 2002; Leider and Bird 1974; Leider 1974; Grim 1981). Por otra parte, Scott (1931) investigo el sistema de flujo por compresión, pero a un fluido de la ley de potencia. El resultado fue un modelo no analítico no lineal, el cual describe la variación de la fuerza, en función de la separación de los platos. El modelo analítico de Scott se define de la siguiente manera:

$$F(t) = \frac{2\pi(2+1/n)^n}{n+3} K \left| \dot{H} \right|^{n-1} H^{-(2n+1)} R^{n+3} \quad (b)$$

La Ec. (b) representa la fuerza para mantener el movimiento del fluido por efecto de la compresión. En este trabajo se deduce una expresión analítica para la fuerza en función de las propiedades del modelo de ley de potencia. Este resultado se aplica a fluidos adelgazantes y engrosantes al corte respectivamente. Esta expresión se reduce a los encontrados por Sthefan (1874) para un fluido newtoniano (Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1974). Por otra parte, Brindley et al. (1974) analizaron un líquido viscoelástico con una ecuación constitutiva de segundo orden en el tensor rapidez de deformación. En su investigación se deduce una expresión analítica para la fuerza y la altura de descenso en función de las propiedades materiales, geométricas y la velocidad con la que desciende el plato (Brindley et al. 1974). Por otra parte Covey et al. (1981) investigo el esfuerzo de cedencia en el flujo por compresión. En su investigación, caracterizaron el fluido con dos ecuaciones constitutivas. La primera de ellas con un modelo de Bingham y la segunda con un Herschel-Bulkley (Bird et al. 1987, 2002). En este estudio se reportan dos soluciones analíticas, en función de los parámetros del medio para valores asintóticos en el número de plasticidad, el cual relaciona el esfuerzo cortante con el esfuerzo de cedencia (Bird et al. 1987, 2002). Los datos experimentales que reportan para pastas, concuerdan con el modelo

teórico deducido el cual, concuerda con las observaciones y ajustes experimentales. A partir de sus predicciones teóricas y ajustes experimentales, los parámetros materiales del sistema son calculados (Covey et al. 1981). En la Tabla 1 se muestran algunos de los resultados analíticos de los trabajos antes mencionados.

**Tabla 1. Fuerza normal dentro de los platos (para muestra con área constante) en función de la separación de los platos H y la velocidad de descenso del plato dH/dt**

Ecuación Constitutiva	Fuerza normal $F(H, H_0, \dot{H})$
<b>Newton</b>	$F_Z = \frac{3}{2} \frac{\pi a^4 \eta_0 \dot{H}}{H^3}$
<b>Ostwald</b>	$F_Z = -\frac{2\pi(2+1/n)^n}{n+3} K \dot{H} \left  \dot{H} \right ^{n-1} H^{-(2n+1)} R^{n+3}$
<b>Bingham</b>	$F_Z = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3H} + \frac{4\pi R^3}{7H^2} \left  2\tau_y K \dot{H} R \right ^{1/2}; \quad \frac{-K \dot{H} R}{\tau_y H^2} < 0.05$ $F_Z = \frac{\pi\tau_y R^3}{H} + \frac{3\pi R^4 \left  \dot{H} \right  K}{2H^3}; \quad \frac{-K \dot{H} R}{\tau_y H^2} > 10$ $F_Z = \frac{1.282K \dot{H} R}{(H/R)^{2.981}} \left[ 1 - 1.238 \frac{\tau_y H}{K \dot{H}} \left( \frac{H}{R} \right)^{1.026} \right]; \quad 0.01 < \frac{H}{R} < 0.1$
<b>Hershel Bulkley</b>	$F_Z = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3H} + 2\pi \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n/(n+1)} \frac{n+1}{4n+3} \frac{K^{1/(n+1)} \tau_y^{n/(n+1)} \left  \dot{H} \right ^{n/(n+1)}}{H^{(4n+3)/(n+1)}}; \quad \frac{-K^{1/n} \dot{H} R}{\tau_y^{1/n} H^2} \ll 1$ $F_Z = \frac{\pi\tau_y R^3}{H} + \frac{2\pi \dot{H} \left  \dot{H} \right ^{n-1} K}{H^{2n+1} (n+3)} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n R^{n+3}; \quad \frac{-K^{1/n} \dot{H} R}{\tau_y^{1/n} H^2} \gg 1$



**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

**1.1.7 Viscosimetría de platos paralelos**

Una de las aplicaciones más importantes del flujo por compresión es el cálculo de las propiedades materiales, es decir, viscosidades y tiempos de relajación respectivamente. El experimento clásico consiste en suponer una fuerza constante, y dejar que el sistema se comprima hasta que la proximidad en los platos sea del orden de micras. La expresión básica puede ser deducida de la Ecuación de Stefan. Suponiendo que la carga  $Fz = F_0$  se puede integrar la Ec. (1), por lo que se tiene la siguiente función para el descenso de los platos en función de la altura inicial.

$$H(t) = H_0 \left( 1 + \frac{4H_0^2 F_0 t}{3\pi\mu R^4} \right)^{-1/2} \tag{c}$$

Nótese que la altura está determinada por las propiedades geométricas y materiales del sistema. La Ec.(c) es punto de partida en muchas investigaciones con diferentes tipos de fluidos.

**Tabla 2. Separación de los platos bajo la aplicación de una fuerza  $F_0$  constante, para diferentes modelos materiales sin deslizamiento en los platos: (Engmann et al. 2005).**

<b>Modelo</b>	<b>Área constante <math>H(F_0, t)</math></b>	<b>Volumen constante <math>H(F_0, t)</math></b>
<b>Newton</b>	$H(t) = H_0 \left( 1 + \frac{4H_0^2 F_0 t}{3\pi\mu R^4} \right)^{-1/2}$	$H_0 \left( 1 + \frac{8H_0^2 F_0 t}{3\pi\mu R_0^4} \right)^{-1/4}$ Asumiendo: $R(t) \approx R_0 \sqrt{\frac{H_0}{H(t)}}$
<b>Ley de potencia</b>	$H(t) = \left( H_0^{-(n+1)/(n)} + \frac{n+1}{2n+1} \left( \frac{F_0(n+3)}{2\pi\mu R^{n+3}} \right)^{1/n} t \right)^{-n/(n+1)}$	No hay expresión analítica
<b>Bingham</b>	$H(t \rightarrow \infty) = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3 F_0}$	$H(t \rightarrow \infty) = \left( \frac{2V^{3/2}\tau_y}{3\sqrt{\pi} F_0} \right)^{2/5}$

<b>Herschel – Bulkley</b>	$H(t \rightarrow \infty) = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3 F_0}$	$H(t \rightarrow \infty) = \left( \frac{2V^{3/2}\tau_y}{3\sqrt{\pi} F_0} \right)^{2/5}$
---------------------------	----------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------

### 1.1.8 Efectos de la temperatura en el flujo por compresión

El efecto de la temperatura ha sido incorporado acoplado la ecuación de transporte de energía, con la de momento y reológica en una geometría de platos paralelos (Sherwood & Durban 1996 a,b). En esta investigación, se acopla la ecuación convectiva superior de Maxwell con la ecuación de energía y se propone que la ecuación de viscosidad tenga una dependencia tipo Arrhenius (Bird et al. 1987; 2002). En esta investigación, el sistema acoplado no lineal de ecuaciones diferenciales parciales, se resuelve por un método numérico basado en cálculo variacional (elemento finito). Sus resultados demostraron que la temperatura de bulbo está fuertemente correlacionada con las propiedades del medio y la energía (calor) decrece conforme el sistema es comprimido (Sherwood & Durban 1996 a,b).

### 1.1.9 Efectos de la porosidad en el flujo por compresión

La mayoría de los materiales de interés en la industria son porosos, en este contexto, Sherwood & Durban (1996) estudiaron el flujo transitorio por compresión para pastas. En su investigación, la ecuación de movimiento y las condiciones de contorno fueron modificadas para incorporar los efectos de porosidad y la filtración en el medio, por lo que la solución es numérica. Sherwood & Durban (1996) a,b demostraron que la fuerza de compresión es inversamente proporcional al número de Peclet que se puede expresar como el producto entre los números adimensionales de Reynolds y Prandtl (Bird et al. 1987, 2002).

### 1.1.10 Efectos inerciales y elásticos en el flujo por compresión

Muchos autores, han incorporado los mecanismos inerciales y elásticos mediante métodos perturbativos mediante técnicas perturbativas las cuales, se centran en obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas (McClelland & Finlayson 1983; Waters & Gooden et al. 1983, 1984). McClelland & Finlayson (1983) estudian el flujo por compresión transitorio en una geometría de platos concéntricos, utilizando una técnica basada en teoría de perturbaciones con el fin de incluir efectos inerciales y elásticos. En esta investigación, el fluido es caracterizado por un modelo tipo Maxwell (Bird et al. 1978).

### **1.1.11 Flujo por compresión en diferentes geometrías**

Algunos autores han tratado de investigar el flujo por compresión modificando la geometría de compresión. Lian et al. (2001) estudio el flujo por compresión de un líquido tipo ley de potencia, en un sistema esférico. Sus resultados demostraron que el gradiente de presión tiende a cero conforma la separación es pequeña. Aquí la separación de los platos es función del radio de las esferas y la fuerza decrece en función de las propiedades materiales del modelo tipo ley de potencia.

**Sin embargo el flujo por compresión tradicional tiene un inconveniente, que existen partes mecánicas móviles, las cuales deben de tomarse en cuenta en el balance mecánico, es decir, la inercia del plato superior moviéndose a una velocidad de descenso contribuye al balance global de la fuerza. Este hecho por si solo complica el estudio y el modelamiento matemático del sistema, lo que representa una desventaja.**

### ***1.2 Flujo continuo por compresión***

El flujo continuo por compresión (Ver. Fig.4) fue propuesto por Oliver et al. (1974,1984). Este sistema simula el problema tradicional del flujo por compresión entre dos superficies. En contraste, el flujo continuo por compresión, el fluido es inyectado a flujo constante entre dos discos paralelos de radio  $a$ , los cuales están separados por una distancia axial  $h$ , es decir, el líquido entra por una serie de perforaciones en el plato inferior. El sistema tiene las ventajas de que no hay partes móviles, por lo que no se toma en cuenta la inercia de los platos.

### ***1.3 Antecedentes del flujo continuo por compresión***

Waters y Gooden (1983, 1984) han analizado este sistema para un fluido tipo ley de potencia, usando un método perturbativo para el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. A orden cero demostraron que la fuerza depende de las propiedades geométricas y del flujo como son: (i) el radio y la separación de los platos y (ii) la viscosidad cortante, las constantes del modelo de ley de potencia y la no-homogeneidad del líquido debido a las perforaciones en el plato inferior. En el caso particular de un flujo



homogéneo, la relación que obtuvieron es equivalente al modelo de Stefan (1902) para el flujo transitorio por compresión analizado por Waters et al (1983). En este trabajo, para la ecuación de Stefan ellos analizaron el flujo por compresión tradicional en el cual el plato superior se aproxima al plato inferior con velocidades bajas. Para flujo homogéneo se obtuvo una expresión que se aproxima al resultado que obtuvo Scott (1931). En este contexto, se demostró que los efectos inerciales contribuyen al fenómeno de lubricación. De la misma manera, Waters y Gooden (1984) analizaron un líquido viscoelástico caracterizado por una ecuación constitutiva tipo Oldroyd-B (Bird et. al. 1987), la cual contiene ocho parámetros materiales las cuales pueden ser ajustadas mediante experimentos en estado estacionario y no estacionario. Este modelo, predice efectos no lineales asociados matemáticamente con los operadores convectivos de los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación. Físicamente, estos efectos representan las contribuciones viscoelásticas del medio. A orden cero los autores demostraron que las curvas de la fuerza como función del número de Weissenberg son muy similares a las curvas de la viscosidad como función de la rapidez de deformación. Se demostró que la fuerza depende de las propiedades materiales del modelo de Oldroyd-B (Bird, et. al. 2002). A primer orden en el parámetro de expansión, la fuerza puede ser separada en dos contribuciones asociadas a los mecanismos inerciales y viscosas respectivamente.

Desde un punto de vista experimental, Oliver y Ashton (1978) utilizaron una solución de poliacrilamida a una temperatura de 16°C. Sus observaciones experimentales demostraron que la fuerza tiene una variación de tipo lineal con el flujo y aumenta conforme disminuye el diámetro de las perforaciones en el plato inferior. Con base en estos resultados, concluyeron que un líquido viscoelástico mejora las propiedades mecánicas del sistema debido a la contribución de la parte elástica y al diámetro de las perforaciones en el plato inferior. Estos sistemas pueden ser aplicados a fenómenos de lubricación en maquinaria que entra en contacto con aceites y líquidos viscoelásticos.

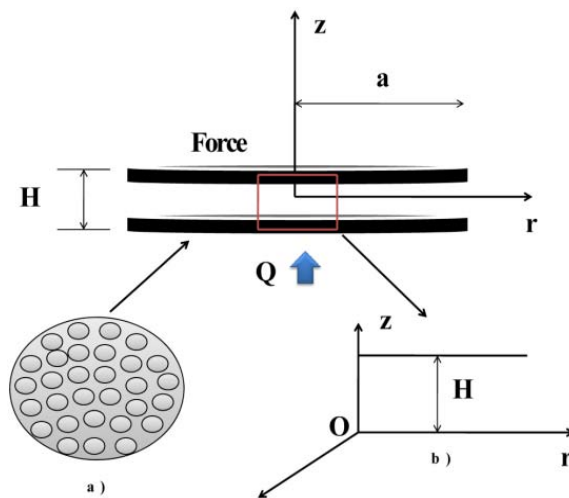
Por otra parte, Brindley et al (1976). Analizaron un líquido viscoelásticos con un modelo de segundo orden. En esta investigación, se deduce una expresión analítica para la fuerza en función de los tiempos de relajación, la viscosidad cortante y la velocidad de con

## “EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

Rivera Rivera Jesús Amado

la que desciende el plato. También se presentan variaciones del esfuerzo como función de la rapidez de deformación a partir de la expresión de la fuerza. Además, se muestra esquemáticamente la variación de la altura de los platos en función del tiempo. Otro de los proyectos interesantes acerca de fluidos viscosos pero con esfuerzo de cedencia, es el que exhiben Covey et al. (1981). En esta investigación, utiliza dos tipos de ecuaciones constitutivas: la primera de ellas es una ecuación que describe un fluido de Bingham (Bird et al. 2002), mismo que posee dos constantes materiales y la segunda ecuación es un fluido de Herschell-Bulkley (Bird et al. 2002), el cual contiene tres parámetros asociados con las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte y con el esfuerzo de cedencia.

En este estudio se reportan dos soluciones analíticas, en función de los parámetros del medio para valores asintóticos en el número de plasticidad, el cual es una medida de los mecanismos cortantes y de cedencia respectivamente. Las predicciones teóricas son contrastadas con observaciones experimentales y a partir de esto, se deducen las propiedades materiales.



**Figura 4 Ilustra el sistema de flujo continuo por compresión. Dos platos concéntricos separados a una distancia constante  $H$ . El líquido es inyectado a Flujo constante  $Q$  a través de una serie de perforaciones en el plato inferior (a) y lo que se mide es la magnitud de la fuerza que experimenta el plato superior por efecto del fluido. Nótese, que si en la geometría, se desprecia los efectos de curvatura, el flujo se puede aproximar localmente al de una rendija a gradiente de presión pulsátil.**



# **CAPÍTULO II**

# **OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE**

# **TRABAJO**

### **2.1 Objetivo general**

Estudiar un sistema de flujo por compresión continua de un líquido viscoso Newtoniano en un sistema de lubricación de platos paralelos, tomando en cuenta los efectos de deslizamiento en la pared.

### **2.2 Objetivos particulares**

#### **2.2.1 El primer objetivo**

Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones de continuidad, momento, constitutiva y las condiciones de frontera.

#### **2.2.2 El segundo objetivo**

Resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales con el fin de obtener el perfil de velocidades radial, axial, gradiente, perfil de presiones y fuerza tomando en consideración los efectos no-homogéneos en el sistema.

#### **2.2.3 El tercer objetivo**

Comparar las predicciones teóricas con datos experimentales provenientes de la literatura con el fin de dilucidar las predicciones de nuestro modelo.

### **2.3 Hipótesis del trabajo**

Si el efecto de los mecanismos deslizantes produce un cambio en la fuerza normal que experimenta el plato superior debido al líquido, entonces este produce un decrecimiento en la fuerza normal del sistema.

Una de las mayores ventajas del modelo inelástico de Newton es su sencillez y que permite obtener expresiones analíticas. *Además la propiedad material puede ser calculada mediante experimentos en estado estacionario y transitorio. Por otro lado y debido a las aplicaciones científicas, tecnológicas actuales y potenciales newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura.*

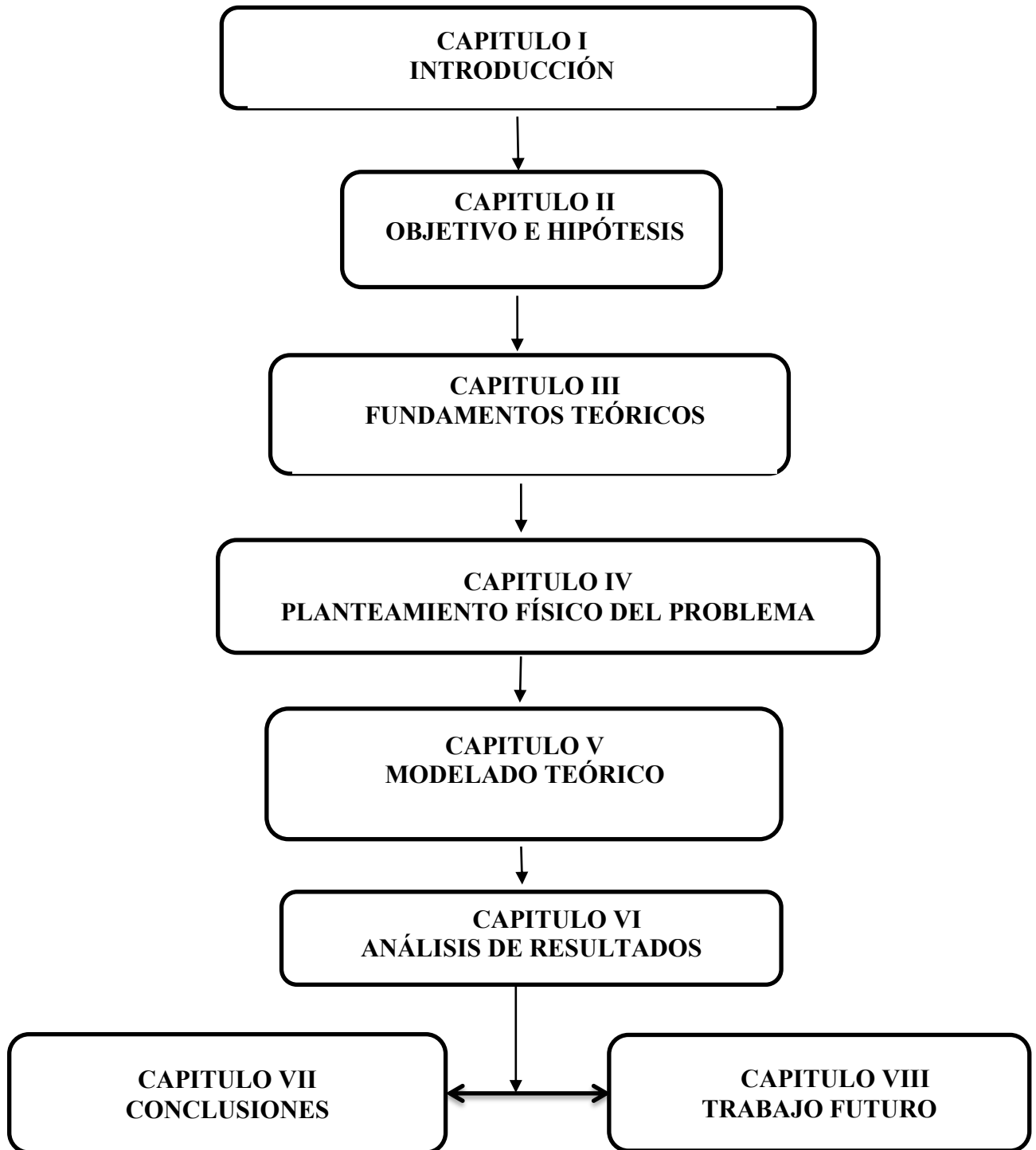


Figura 5 Organización del trabajo desarrollado en la tesis.



# **CAPÍTULO III FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

### 3.1 Reología

#### 3.1.1 ¿Qué es la reología?

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte. La reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et al. 2002). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material. Un fluido es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante. La viscosidad  $\mu$  es una propiedad de transporte, ya que cuantifica la conductividad de cantidad de movimiento a través de un medio conductivo o fluido. Se interpreta como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Barnes 2000).

#### 3.2 Tensor de deformación

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación, es adimensional debido a que  $[u_i] = L; [x_i] = L$ . Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$

#### 3.3 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 3.4 Tensor rapidez de deformación

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{V}$  puede ser descompuesto en una parte simétrica  $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_s$  y anti simétrica  $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$  llamados tensor rapidez de deformación y tensor de Vorticidad:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3)$$

El tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, es decir  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ . Físicamente nos da información acerca de la rapidez con que es deformado el sistema.

### 3.5 El tensor de Vorticidad

El tensor de Vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Es importante notar, que el tensor de Vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir,  $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ . Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo.

### 3.6 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación

El segundo invariante del tensor rapidez de deformación se obtiene tomando el doble producto punto entre los tensores rapidez de deformación. La expresión en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$(\Pi_D)^2 = 2(\mathbf{D}:\mathbf{D}) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2 \quad (6)$$

### 3.7 Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

### **3.8 Ecuaciones constitutivas**

Una ecuación constitutiva es la que relaciona las variables dinámicas del sistema. En reología son el tensor de esfuerzos y de deformación respectivamente.

#### **3.8.1 Fluido Newtoniano**

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. Primero se define la ecuación más simple, el modelo newtoniano, seguida de alguno de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema. En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (9)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana  $\mu$  y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (8), el tensor de esfuerzo cortante,  $\boldsymbol{\sigma}$  tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación  $\mathbf{D}$  tiene inverso de segundo respectivamente. Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen las Ecs. (8,9) son newtonianos.

#### **3.8.2 Fluido No Newtonianos**

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no newtonianos, son aquellos que presentan propiedades aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple y sencilla de un fluido no newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, pH y la rapidez con la que se deforma.

#### **3.8.3 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia).**

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de ley de Potencia, o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_{\mathbf{D}})\mathbf{D} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1}\mathbf{D} = 2m(\Pi_{\mathbf{D}})^{(n-1)/2}\mathbf{D} \quad (10)$$

En donde  $\Pi_{\mathbf{D}}$  es el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, el cual se obtiene tomando el doble producto punto del tensor rapidez de deformación y posterior a eso, su raíz cuadrada. Este modelo contiene dos parámetros de ajuste  $k$  y  $n$  son parámetros. El parámetro  $m$  es conocido como el índice de consistencia y  $n$  es exponente asociado al comportamiento no newtoniano del fluido. Debido a que  $n$  determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si  $n < 1$  el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando  $n > 1$  la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrosante al corte). Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de  $k$  depende del valor numérico de  $n$ , con lo cual valores de  $k$  de distintos fluidos no son comparables.

### 3.8.4 Modelo de Ellis

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia. Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por:  $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$  los cuales están relacionados con la fluideces a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia. Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$2\mathbf{D} = \nu_0\boldsymbol{\sigma} + \nu_1|\boldsymbol{\sigma}|^{n-1}\boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

### 3.8.5 Modelo de Carreau

El siguiente modelo, fue propuesto por Carreau para describir toda la curva reología, es decir a bajas, moderada y altas rapidezces de deformación respectivamente. Esta ecuación

constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) Viscosidad a corte bajo, (ii) Viscosidad a alto corte, (iii) Un tiempo asociado a la fluidez del material y (iv) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido  $\{\eta_0, \eta_\infty, \lambda, n\}$  respectivamente. La expresión matemática que describe el modelo de Carreau es la

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

siguiente: 
$$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left\{1 + \left(\lambda \sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})}\right)^2\right\}^{(n-1)/2}} \quad (12)$$

### 3.8.6 Modelo de Reinner-Phillipoff

El modelo de Reiner-Phillipoff es un modelo inelástico que contiene tres parámetros de ajuste asociados a las propiedades no-newtonianas del sistema. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (iv) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido respectivamente  $\{\eta_0, \eta_\infty, \sigma_s\}$ . La expresión matemática que describe el modelo de Reiner-Phillipoff es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

$$\eta(|\boldsymbol{\sigma}|) = \eta_0 + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2} \quad (13)$$

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma})}$$

En la Ec. (13)  $|\boldsymbol{\sigma}|$  es el valor absoluto del tensor de esfuerzos. Es importante notar que la función viscosidad no depende de la rapidez de deformación, si no del segundo invariante del tensor de esfuerzos.

### 3.8.7 Fluido de Bingham

Estos fluidos presentan un comportamiento solido mientras que el esfuerzo de corte no supere un esfuerzo conocido como de cedencia. Por otra parte, una vez superado es

valor puede adoptar un comportamiento newtoniano (Plástico de Bingham). El modelo matemático que describe el plástico de Bingham, se presenta a continuación:

Plástico de Bingham

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}| \geq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + 2\eta_0 \mathbf{D} \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

En la Ec. (14)  $\boldsymbol{\sigma}_0$  es el esfuerzo de cedencia y  $\eta_0$  es la viscosidad newtoniana en el sistema.

### 3.9 Métodos reométricos

Los tres métodos reométricos más utilizados para la medición de las propiedades de los fluidos complejos son: el de cilindros concéntricos, discos paralelos, cono-plato y de capilar. La viscosidad y las funciones lineales viscoelásticas del material pueden ser determinadas en cualquier de los tres reómetros a geometría de cilindros concéntricos, se hace la prueba al fluido que está entre los dos cilindros concéntricos con un radio interior y exterior diferente, se aplica un torque para hacer rotar los cilindros generando un rango de rotación relativa entre el cilindro interior y exterior. Para la obtención de medidas cuantitativas de las propiedades del material, se asume que el fluido es simétrico al eje y puramente circunferencial con efectos finales insignificantes. En el sistema de discos paralelos, la medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales.

La geometría de cono y plato es utilizado para determinar el coeficiente de corte normal de algunos fluidos. La medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales, asumiendo que los efectos de inercia son insignificantes y la superficie libre es esférica. En el sistema capilar, los fluidos a prueba caen por gravedad, compresión de gas o gracias a un pistón, frecuentemente son utilizados para medir la viscosidad lineal y las propiedades viscoelásticas de los líquidos.

### 3.10 Flujo cortante simple

El flujo cortante simple se genera cuando una fuerza se aplica en dirección del flujo, por lo que el tensor de esfuerzos solo tiene elementos fuera de la diagonal principal por lo que se puede describir en la forma siguiente:



**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Los tensores gradiente de velocidad y su transpuesta se definen como:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

La transpuesta del tensor gradiente de velocidad está dado por:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Por lo tanto el tensor rapidez de deformación toma la forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T = \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

El tensor rapidez de deformación, nos da información acerca de la deformación del material. Finalmente, el modelo constitutivo de toma la siguiente forma matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mu \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Desacoplando las matrices se obtienen las relaciones entre las entradas del tensor de esfuerzos y el tensor rapidez de deformación:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= \mu \frac{\partial \mathbf{V}_z}{\partial x} \\ N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= 0 \\ N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

La primera y segunda diferencia de esfuerzos normales siempre es cero para un fluido newtoniano.



# **CAPÍTULO IV PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

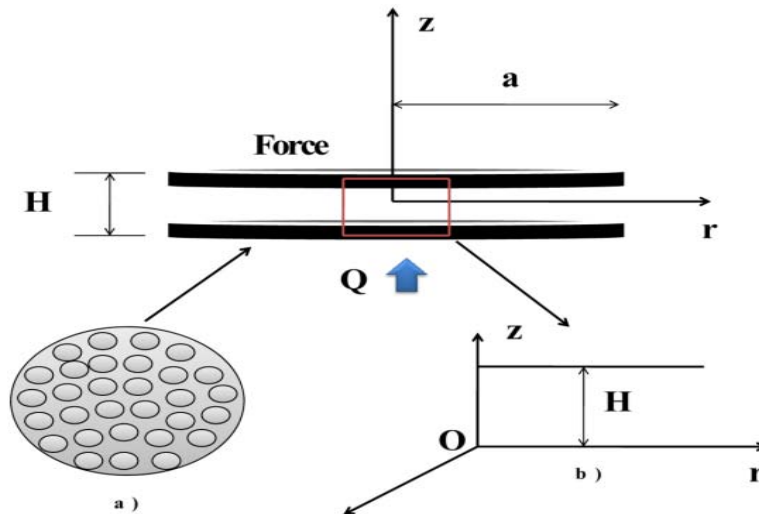
# “EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

Rivera Rivera Jesús Amado

## 4.1 Descripción física y análisis de proceso

El sistema fluye entre dos discos estacionarios de radio, y distancia axial  $h$  ( $h \ll a$ ). El sistema de coordenadas es cilíndrico  $(R, Z, \theta)$ , definido en el centro de los platos, por hipótesis, el movimiento es causado por el flujo continuo del líquido, a través de una serie de perforaciones a lo largo del plato inferior.

- Estado estacionario (Ninguna propiedad o característica del sistema es función del tiempo).
- Proceso Isotérmico (Temperatura es constante).
- Fluido Incompresible (Densidad es constante).
- Coordenadas Cilíndricas  $(r, \theta, z)$ .
- Los efectos gravitacionales se desprecian, es decir  $g = 0$ .
- El fluido es newtoniano (La viscosidad es constante no importa la rapidez con que sea deformado).



## 4.2 Ecuaciones Vectoriales y Tensoriales

### 4.2.1 Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad describe la conservación de la masa en un sistema y matemáticamente se describe mediante la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

#### 4.2.2 Ecuación de momento.

La ecuación de movimiento está basada en la segunda ley de la mecánica de Newton, la cual se describe de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2a)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (2b)$$

En (2a)  $\rho$  es la densidad de líquido,  $D/Dt$ , es el operador de Stokes o la derivada material, la cual describe cambios en la velocidad debido a las variables temporal y espacial respectivamente,  $\mathbf{V}$  es el vector velocidad,  $-\nabla p$  es el gradiente de presión o diferencial de presión, su signo negativo se debe a una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica,  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  es nuestro tensor de esfuerzos,  $\mathbf{g}$  es el vector de aceleración de fuerza de gravedad, el cual en este trabajo se desprecia.

#### 4.2.3 Ecuación constitutiva.

Para caracterizar nuestro líquido se utiliza la ecuación reológica de Newton la cual, relaciona la rapidez de deformación en función del esfuerzo en el sistema de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} \quad (3)$$

$\mu$  es la viscosidad del fluido,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos viscosos y  $\mathbf{D}$  es el tensor rapidez de deformación que es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{V}$ .

#### 4.2.4 Tensor rapidez de deformación.

El tensor rapidez de deformación es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad y nos da información física del tipo de flujo en el sistema. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad (4)$$

En la Ec. (4),  $\mathbf{V}$  es el vector velocidad,  $\nabla$  es el operador nabla,  $\nabla\mathbf{V}$  es el tensor gradiente de velocidad y  $\mathbf{T}$  es la transpuesta del tensor gradiente de velocidad.

#### 4.2.5 Vector velocidad y tensores cinemáticos

El vector velocidad en este sistema, solo tiene dos componentes en la dirección radial y axial respectivamente, por lo que puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [V_r(r, z), 0, V_z(r, z)] \quad (5)$$

El tensor gradiente de velocidad y su transpuesta están definidos como:

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}; \nabla\mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6)$$

A partir de los tensores definidos en la Ec. (6), el tensor rapidez de deformación  $\mathbf{D}$  y el tensor rapidez de Vorticidad  $\mathbf{W}$  toman la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \\ 0 & 2\frac{V_r}{r} & 0 \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) & 0 & 2\frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \\ 0 & 2\frac{V_r}{r} & 0 \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) & 0 & 2\frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Es importante recordar que, el tensor de Vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales.

#### 4.2.6 Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos está relacionado las fuerzas cortantes y extensionales en un elemento de control, mientras que el tensor gradiente de velocidades nos da información acerca del cambio espacial de la velocidad.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (9)$$

La Ec. (9) implica que un elemento de control en este sistema de flujo experimenta fuerzas de tipo cortante y de tipo extensional respectivamente.

#### 4.2.7 Ecuación de Newton y componentes del tensor de esfuerzos

Al sustituir los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación en la Ec. de Newton, se obtiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \\ 0 & 2\frac{V_r}{r} & 0 \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) & 0 & 2\frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Desacoplando la ecuación matricial se tienen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \frac{V_r}{r} \\ \sigma_{zr} &= \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (11a-e)$$

Obsérvese que las componentes  $\sigma_{rz}$  y  $\sigma_{zr}$  son las mismas por lo que el tensor es simétrico.

#### 4.2.7 Componentes de la ecuación de movimiento

La componente de la ecuación de movimiento puede expresarse en término de sus componentes en r y z respectivamente:

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (12)$$

Componente z de la ecuación de movimiento:

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (13)$$

#### 4.2.8 Condiciones de Frontera

Las condiciones de fronteras en el sistema son:

$$V_r(r,z) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,z) r dr d\theta = Q \quad \text{en} \quad z=0 \quad (14)$$

$$V_r(r,z) = V_z(r,z) = V_s \quad \text{en} \quad z = h \quad (15)$$

$$V_r(r,z) = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (16)$$

La condición de frontera descrita en la Ec. (14a) implica que la velocidad radial es cero en el plato inferior (condición de no adherencia del fluido al solido). La segunda condición (Ec. 14b) describe el flujo volumétrico constante que es inyectado en el plato inferior. La condición de frontera Ec. (15) describe los efectos de deslizamiento en el plato superior ( $V_r=V_s$ ) de las dos componentes del vector de velocidad. Esta condición es muy importante debido a que queremos obtener una expresión analítica tomando en cuenta los efectos de deslizamiento. Por último, la Ec. (16) implica que la velocidad radial en  $r=0$  es cero, lo que implica, que se tiene solamente la componente axial diferente de cero. Es importante resaltar, que en  $z = 0$ , existe solamente velocidad radial, por lo que el balance de masa puede ser descrito de la siguiente manera:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,0) r dr d\theta \Rightarrow Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a u(r) r dr d\theta \quad (17)$$

La velocidad  $u(r)$  describe la no homogeneidad del líquido, en el sistema, es decir que el flujo volumétrico es constante pero la distribución depende de la posición. Una primera propuesta para la ecuación de la velocidad  $u(r)$  es un escalamiento tipo ley de potencia, i.e.

$$u(r) = (m+2)r^m \quad (18)$$

**En donde  $m$  es el grado de no homogeneidad del fluido en el sistema. Este parámetro físicamente representa que la distribución del fluido a lo largo de los platos no es uniforme.**

#### 4.2.9 Componentes de la ecuación de movimiento

La fuerza que experimenta el plato superior puede ser escrita como la integral de la componente  $zz$  del esfuerzo total multiplicado por el área de contacto.

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a T_{(zz)} \Big|_{z=h} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( -p + \sigma_{(zz)} \right) \Big|_{z=h} r dr d\theta \quad (19)$$

La Ec. (19) describe la fuerza total aplicada sobre el plato superior relacionando el gradiente de presión con el área total de nuestro sistema.

#### 4.3 Variables adimensionales

Se propusieron las siguientes variables adimensionales para las ecuaciones de continuidad, movimiento y constitutiva con el fin de introducir grupos adimensionales y escalar las variables para facilitar el modelado y simulación computacional de nuestro sistema de flujo por compresión continuo. Las variables escaladas son: (i) coordenada axial, (ii) velocidad radial, (iii) velocidad axial, (iv) coordenada radial, (v) perfil de presión, (vi) esfuerzo y tensor de esfuerzos total.

$$z^* = \frac{z}{z_c}; V_r^* = \frac{V_r}{V_{rc}}; V_z^* = \frac{V_z}{V_{zc}}; r^* = \frac{r}{rc}; p^* = \frac{p}{pc}; \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_c}; T_{ij}^* = \frac{T_{ij}}{\sigma_c} \quad ij = \{rr, \theta\theta, zz, zr, rz\} \quad (20a)$$

Las variables características de nuestro sistema son las siguientes:

$$z_c = H; V_{rc} = \langle V \rangle; V_{zc} = \frac{H}{a} \langle V \rangle = \alpha \langle V \rangle; rc = a; pc = \left( \frac{a}{H} \right) \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) = \alpha^{-1} \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right); \quad (20b)$$

$$\sigma_c = T_c = \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right)$$

En donde la velocidad promedio  $\langle V \rangle$  que es la razón entre el flujo volumétrico y el área de flujo respectivamente.

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{2\pi ah}; \alpha = \frac{h}{a} \ll 1 \quad (20c)$$



Nótese que las variables escaladas para las coordenadas axial y radial están relacionadas con la frontera del sistema, las componentes del campo de velocidades se escalaron con la velocidad promedio, pero la componente axial se multiplico por un factor  $(h/a)$  menor que uno, i.e.  $(h/a) \ll 1$ , el cual relaciona las longitudes radial y axial respectivamente. Esta consideración nos permitirá más adelante utilizar la aproximación de lubricación en el sistema. La presión y el esfuerzo se hicieron adimensionales con el esfuerzo característico relacionado con los mecanismos viscosos. i.e.  $\mu \langle V \rangle / h$ .

#### 4.4 Ecuaciones adimensionales

Introduciendo las variables adimensionales en las ecuaciones de continuidad y movimiento, haciendo la respectiva sustitución y reducción de variables se tiene que:

##### 4.4.1 Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*(r^*, z^*)) + \frac{\partial}{\partial z^*} V_z^*(r^*, z^*) = 0 \quad (21)$$

##### 4.4.2 Ecuación de Movimiento

Desacoplando la ecuación vectorial en sus componentes, se tiene lo siguiente:

*Componente radial adimensional de la ecuación de movimiento*

$$\alpha \text{Re} \left( V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} + \alpha \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rr}^*) - \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} \right) \quad (22)$$

*Componente axial adimensional de la ecuación de movimiento*

$$\alpha^3 \text{Re} \left( V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\alpha^2}{r^*} \left( \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{zr}^*) - \sigma_{\theta\theta}^* \right) + \alpha \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z^*} \quad (23)$$

#### 4.4.3 Componentes de la ecuación tensorial de Newton

A partir del tensor del modelo reológico de Newton (Ec. 3), se obtienen las componentes del esfuerzo en función de la rapidez de deformación para cada componente:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{(rr)}^* &= 2\alpha \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \\
 \sigma_{(rz)}^* &= \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \alpha^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \\
 \sigma_{(\theta\theta)}^* &= 2\alpha \frac{V_r^*}{r^*} \\
 \sigma_{(zr)}^* &= \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \alpha^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \\
 \sigma_{(zz)}^* &= 2\alpha \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}
 \end{aligned} \tag{24a-e}$$

Las Ecs. (24a-e) representan las componentes de la ecuación de movimiento adimensionales. Nótese que dependen de dos números adimensionales ( $\alpha$ ,  $Re$ ). El primer grupo adimensional ( $\alpha$ ), es un cociente de dos longitudes características, el cual tiene tres posibles límites:

$$\alpha = \frac{H}{a} = \begin{cases} \alpha \ll 1; & \text{Longitud axial} \ll \text{Longitud radial} \text{ (Aproximacion de Lubricacion)} \\ \alpha = 1; & \text{Longitud axial} = \text{Longitud radial} \\ \alpha \gg 1 & \text{Longitud axial} \gg \text{Longitud radial} \end{cases} \tag{25a}$$

En nuestro caso, el valor de alfa siempre es menor de uno, i.e.  $\alpha = \frac{H}{a} \ll 1$ . El segundo número es el Reynolds el cual se define como un cociente de magnitudes de fuerzas inerciales y viscosas el cual, puede describir tres comportamientos:

$$Re = \frac{\rho \langle V \rangle H}{\mu} = \begin{cases} Re \gg 1; & \text{Mecanismos inerciales} \gg \text{Mecanismos viscosos} \\ Re \ll 1; & \text{Mecanismos inerciales} \ll \text{Mecanismos viscosos} \\ Re = 1; & \text{Mecanismos inerciales} = \text{Mecanismos viscosos} \end{cases} \tag{25b}$$

Por otra parte, el número de Reynolds describe la transición de flujo en un sistema:

$$Re = \frac{\rho \langle V \rangle H}{\mu} = \begin{cases} Re \gg 2100; & \text{Flujo Laminar} \\ 2100 \ll Re \ll 10000; & \text{Flujo Transitorio} \\ Re \gg 10000 & \text{Flujo Turbulento} \end{cases} \tag{25c}$$

#### 4.4.4 Condiciones de frontera

Las condiciones de fronteras adimensional toman la forma:

$$Vr^*(r^*, z^*) = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0 \quad (26)$$

$$Vr^* = Vz^*(r^*, z^*) = Vs^* \quad \text{en} \quad z^* = 1 \quad (27)$$

$$Vr^*(r^*, z^*) = 0 \quad \text{en} \quad r^* = 0 \quad (28)$$

En la Ec. (27).  $Vs$  se hizo adimensional con la velocidad promedio característica  $\langle V \rangle$ . Nuestras condiciones a la frontera Ecs. (14-16), ahora se trasforman en las Ecs. 26-28, por la sustitución de variables características. La Ec. (26) satisface la siguiente restricción de tipo integral, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\int_0^1 u^*(r^*) r^* dr^* = 1 \quad (29)$$

La Ec. (29) implica que el flujo volumétrico es constante a lo largo del sistema.

#### 4.4.5 Fuerza adimensional

La fuerza que experimenta el plato superior puede ser escrita en forma adimensional:

$$Fz = -\pi \left( \frac{a}{H} \right) \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \int_0^1 T_{zz}^* \Big|_{z^*=1} r^* dr^* = -\pi \left( \frac{a}{H} \right) \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \int_0^1 (-p^* + \alpha \sigma_{zz}^*) \Big|_{z^*=1} r^* dr^* \quad (30)$$

La Ec. (30) describe la fuerza normal adimensional en función de dos contribuciones, la presión y la componente  $zz$  del tensor de esfuerzos.



# CAPÍTULO V

# MODELADO TEÓRICO

### 5.1 Aproximación de lubricación

Aplicando la aproximación de lubricación, es decir despreciando los efectos de curvatura y aproximando el flujo radial en los platos cilíndricos a un flujo reométrico en un sistema de platos paralelos a gradiente de presión constante, en la componente radial de la ecuación de movimiento obtenemos las siguientes simplificaciones.

### 5.2 Análisis con deslizamiento ( $V_s \neq 0$ )

#### 5.2.1 Componentes radial y axial de la ecuación de movimiento.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} &= \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} \\ \frac{\partial p^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*(r^*, z^*)) + \frac{\partial}{\partial z^*} V_z^*(r^*, z^*) &= 0 \end{aligned} \quad (31a-c)$$

#### 5.2.2 Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} V_z^* = 0 \quad (32)$$

#### 5.2.3 Componentes del tensor de esfuerzos

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^* &= \sigma_{zr}^* = \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \alpha^2 \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \\ \sigma_{rr}^* &= \alpha^2 \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= \alpha \frac{V_r^*}{r^*} \\ \sigma_{zz}^* &= \alpha \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \end{aligned} \quad (33a-d)$$

#### 5.2.4 Condiciones de frontera

$$V_r^*(r^*, z^*) = 0, \quad \int_0^1 V_r^*(r^*, z^* = 0) r^* dr^* = \int_0^1 u^*(r^*) r^* dr^* \quad \text{en} \quad z^* = 0 \quad (34)$$

$$V_r^*(r^*, z^*) = V_z^*(r^*, z^*) = V_s^* \quad \text{en} \quad z^* = 1 \quad (35)$$

$$V_r^*(r^*, z^*) = 0 \quad \text{en} \quad r^* = 0 \quad (36)$$

### 5.2.5 Fuerza en el plato superior debido al flujo continuo

La fuerza que experimenta el plato superior debido al flujo continuo del fluido por el plato inferior, es calculada integrando el tensor de esfuerzo total  $T_{zz}^*|_{z^*=1}$ , sobre el área de contacto del fluido, es decir el plato superior

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a T_{zz}^*|_{z^*=1} r^* dr^* d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a (-p^* + \sigma_{zz}^*)|_{z^*=1} r^* dr^* d\theta \quad (37)$$

A partir de las Ecs. (31-37) los perfiles de velocidad radial y axial son calculados, gradiente de presión, perfil de presiones y fuerza en el plato superior.

### 5.2.6 Cálculo del perfil de velocidad radial con deslizamiento en la pared

De la Ec. (31a), el balance adimensional de fuerzas toma la forma:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} = \frac{dp^*}{dr^*} \quad (38)$$

Integrando la Ec. (38) se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz}^* = \frac{dp^*}{dr^*} z^* + C_1(r^*) \quad (39)$$

Sustituyendo la componente radial del esfuerzo en función de la rapidez de deformación:

$$\frac{\partial V_r^*(r^*, z^*)}{\partial r^*} = \frac{dp^*}{dr^*} z^* + C_1(r^*) \quad (40)$$

Integrando por segunda vez con respecto a  $r^*$

$$V_r^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} z^{2*} + C_1(r^*) z^* + C_2(r^*) \quad (41)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera, se encuentran los siguientes valores para las constantes  $\{C_1, C_2\}$

$$\begin{aligned} C_2(r^*) &= 0 \\ C_1(r^*) &= V_s^* - \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} \end{aligned} \quad (42a,b)$$

Finalmente se tiene el perfil de velocidades (solución particular de la ecuación diferencial adimensional)

$$\boxed{Vr^*(r^*, z^*) = Vs^* z^* + \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} z^* (z^* - 1)} \quad (43)$$

### 5.2.7 Cálculo del perfil de velocidad axial con deslizamiento en la pared

De la ecuación de continuidad (Ec. 21), obtenemos la componente  $Vz^*(r^*, z^*)$  de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} Vz^*(r^*, z^*) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*(r^*, z^*)) \quad (44)$$

Integrando con respecto a la variable adimensional  $z^*$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Vz^*(z^*, r^*) - Vz^*(z^* = 0, r^*) = \\ - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \int_0^{z^*} Vr^*(\beta, r^*) d\beta \right) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* Vs^* \int_0^{z^*} \beta d\beta - r^* \frac{1}{2} \left( -\frac{dp^*}{dr^*} \right) \int_0^{z^*} \beta(1-\beta) d\beta \right) \end{aligned} \quad (45)$$

Finalmente, se deduce el perfil de velocidades axial a orden cero:

$$Vz^*(z^*, r^*) = -\frac{1}{2} z^{*2} \frac{Vs^*}{r} - 6 \left( \frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right) \frac{1}{12r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) + u^*(r^*) \quad (46)$$

Aplicando la condición de frontera  $Vz^*(r^*, z^* = 1) = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{Vs^*}{r^*} - u^*(r^*) = \frac{1}{12} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) \quad (47)$$

Sustituyendo la Ec. (47) en el perfil de velocidades axial, se tiene el siguiente resultado:

$$\boxed{Vz^*(z^*, r^*) = z^{*2} (1 - z^*) \frac{Vs^*}{r^*} + u^*(r^*) (1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})} \quad (48)$$

### 5.2.8 Cálculo de gradiente de presión y presión con efectos de deslizamiento.

Por lo tanto el gradiente de presión radial toma la forma:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = 6Vs^* - \frac{12}{r^*} \int_0^{r^*} u^*(\beta) \beta d\beta \quad (49)$$

A partir de este resultado se puede calcular el gradiente de presión y el perfil de presiones en función del radio y la no homogeneidad del líquido:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = 6Vs^* - \frac{12}{r^*} \int_0^{r^*} (m+2)\beta^{*m+1} d\beta = 6Vs^* - 12(r^*)^{m+1} \quad (50)$$

### 5.2.9 Cálculo del perfil de presiones con deslizamiento

Integrando esta ecuación diferencial se tiene lo siguiente:

$$p^*(r^*) = 6Vs^* r^* - \left(\frac{12}{m+2}\right) r^{*m+2} + A_2 \quad (51)$$

Imponiendo la condición de frontera  $p^*(r^* = 1) = 0$

$$A_2 = -6Vs^* + \frac{12}{m+2} \quad (52)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$p(r^*) = 6Vs^*(r^* - 1) + \frac{12}{m+2}(1 - r^{*(m+2)}) \quad (53)$$

En flujo homogéneo, se tiene lo siguiente:

$$p^*(r^*) = 6Vs^*(r^* - 1) + 6(1 - r^{*2}) \quad (54)$$

### 5.2.10 Cálculo de la fuerza normal.

Integrando por partes la expresión de la fuerza normal en la dirección z, se tiene lo siguiente:

$$F_z = \mu \frac{2\pi a^3 \langle V \rangle}{H^2} \left\{ \frac{1}{2} r^{*2} p^* \Big|_{z^*=1} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \right\} = -\mu \frac{a^3 \langle V \rangle}{H^2} \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (55)$$

Sustituyendo el valor del gradiente de presión (Ec.50), en la Ec. (55), se tiene lo siguiente:

$$F_z = \mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \int_0^1 \left( 6Vs^* - \frac{12}{r^*} \int_0^{r^*} u^*(\beta) \beta d\beta \right) r^{*2} dr^* \quad (56)$$

La expresión anterior es la más importante del presente análisis y es punto de partida en análisis posteriores. Suponiendo que la función  $u^*(r^*)$ , la cual representa la no homogeneidad debido a la entrada del medio en la parte inferior del plato, y debe de cumplir la condición de normalización del flujo, es decir:

$$\int_0^1 Vr^*(r^*, z^* = 0) r^* dr^* = \int_0^1 u^*(r^*) r^* dr^* = 1 \quad (57)$$



**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

Por lo que una función de prueba para este sistema, sería una función continua tipo ley de potencia, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\int_0^1 (Ar^{*m}) r^* dr^* = 1 \Rightarrow A = (m+2) \quad (58)$$

Por lo tanto la función de prueba puede ser escrita de la siguiente manera:

$$u^*(r^*; m) = (m+2)r^{*m} \quad (59)$$

Sustituyendo en la fuerza a orden cero, se tiene lo siguiente:

$$F_z = \mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \int_0^1 \left( 6Vs^* - \frac{12}{r^*} \int_0^{r^*} (m+2)\beta^{m+1} d\beta \right) r^{*2} dr^* \quad (60)$$

Por lo tanto la fuerza no homogénea, para un líquido newtoniano puede ser calculada a través de la siguiente expresión analítica:

$$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} - \frac{2}{3} Vs^* \right) \quad (61)$$

La fuerza homogénea newtoniana toma la forma analítica:

$$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( 1 - \frac{2}{3} Vs^* \right) \quad (62)$$

Este resultado es análogo al de Stefan deducido para un fluido que se comprime en un medio de platos concéntricos. Nótese, que la fuerza es directamente proporcional a la viscosidad del medio, velocidad promedio del fluido, e inversamente proporcional a la distancia de separación del medio, i.e.  $F_z = F_z(\mu, \langle V \rangle, h)$ .

Finalmente, en las siguientes tablas se presenta un resumen de los resultados más importantes del presente análisis del flujo continuo por compresión en estado estacionario, para dos casos en particular: (a) Flujo homogéneo ( $m = 0$ ) y flujo no homogéneo ( $m \neq 0$ ), con y sin deslizamiento en ambos casos.

### 5.3 Resumen de ecuaciones principales obtenidas a partir de los cálculos anteriores.

Finalmente, en la siguiente tabla se presenta un resumen de los resultados más importantes del presente análisis del flujo continuo por compresión en estado cuasi estacionario.

Variables Dinámicas	Sin deslizamiento $V_s^* = 0$ Homogéneo	Sin deslizamiento $V_s^* = 0$ No Homogéneo
Perfil de Velocidad Radial Adimensional	$V_r^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} z^* (z^* - 1)$ $V_r^*(r^*, z^*) = 6r^* z^* (1 - z^*)$	$V_r^*(r^*, z^*) = 6(r^*)^{m+1} z^* (1 - z^*)$
Velocidad Axial Adimensional	$V_z^*(r^*, z^*) = u(r^*) [1 + 2z^{*3} - 3z^{*2}]$ $V_z^*(r^*, z^*) = 2(1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$	$V_z^*(r^*, z^*) = (m+2)r^{*m} (1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$
Gradiente de Presión Adimensional	$\frac{dp^*}{dr^*} = -12r^*$	$\frac{dp^*}{dr^*} = -12(r^*)^{m+1}$
Perfil de Presión Adimensional	$p(r^*) - p_a^* = 6(1 - (r^*)^2)$	$p(r^*) - p_a^* = \frac{12}{m+2} (1 - (r^*)^{m+2})$
Fuerza Normal Dimensional	$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2}$	$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} \right)$

**Tabla 3. Resumen de las principales ecuaciones sin deslizamiento en la pared**

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

<b>Variables Dinámicas</b>	<b>Con deslizamiento <math>V_s^* \neq 0</math> Homogéneo</b>	<b>Con deslizamiento <math>V_s^* \neq 0</math> No Homogéneo</b>
<b>Perfil de Velocidad Radial Adimensional</b>	$V_r^*(r^*, z^*) = V_s^* z^* + \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} z^* (z^* - 1)$ <p align="center">o</p> $V_r^*(r^*, z^*) = V_s^* z^* + (3V_s^* - 6r^*) \times z^* (z^* - 1)$	$V_r^*(z^*, r^*) = V_s^* z^* + (3V_s^* - 6r^{*m+1}) \times z^* (z^* - 1)$
<b>Velocidad Axial Adimensional</b>	$V_z^*(z^*, r^*) = z^{*2} (1 - z^*) \frac{V_s^*}{r^*} + u(r^*) (1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$ $V_z^*(z^*, r^*) = z^{*2} (1 - z^*) \frac{V_s^*}{r^*} + 2(1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$	$V_z^*(z^*, r^*) = z^{*2} (1 - z^*) \frac{V_s^*}{r^*} + (m + 2)r^{*m} (1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$
<b>Gradiente de Presión Adimensional</b>	$\frac{dp^*}{dr^*} = 6V_s^* - 12r^*$	$\frac{dp^*}{dr^*} = 6V_s^* - 12r^{*m+1}$
<b>Perfil de Presión Adimensional</b>	$p^*(r^*) - p_a^* = 6V_s^* (r^* - 1) + 6(1 - r^{*2})$	$p(r^*) - p_a^* = 6V_s^* (r^* - 1) + \frac{12}{m+2} (1 - (r^*)^{m+2})$
<b>Fuerza Normal Dimensional</b>	$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left[ 1 - \frac{2}{3} V_s^* \right]$	$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left[ \frac{4}{m+4} - \frac{2}{3} V_s^* \right]$

**Tabla 4. Resumen de las principales ecuaciones con deslizamiento en la pared.**



# CAPÍTULO VI

# ANÁLISIS DE RESULTADOS

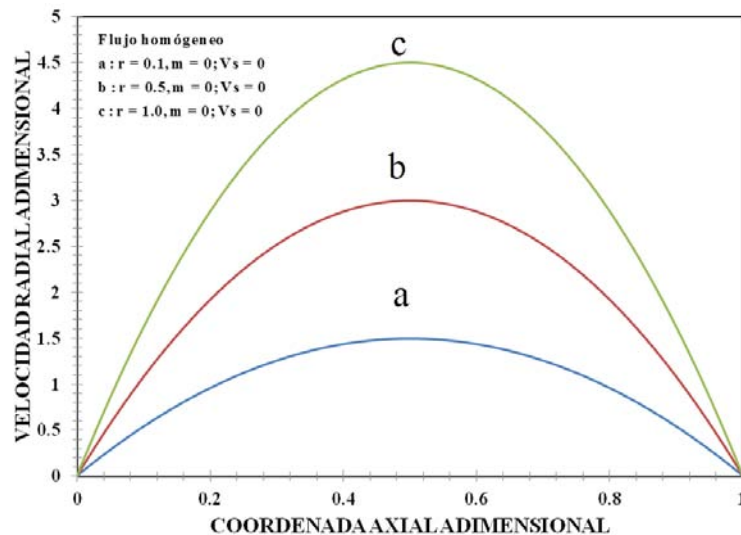
### **6.1 Predicciones teóricas**

En esta sección se muestran las simulaciones del sistema de flujo por compresión continuo. Las ecuaciones utilizadas para las simulaciones son: Ecs. sin efectos de deslizamiento (Tabla 1), Ecuaciones con efectos de deslizamiento (Tabla 2). Los datos numéricos fueron generados en el programa Mathematica 9.0 y exportados a Excel. Por otra parte, los datos experimentales (reométricos y de flujo) fueron obtenidos de trabajos previos concernientes al estudio del flujo continuo por compresión [Oliver.]. En las siguientes simulaciones, se analizaron las siguientes propiedades dinámicas:

- a) Perfil radial de velocidades homogéneo.
- b) Perfil radial de velocidades no-homogéneo.
- c) Perfil axial de velocidades homogéneo.
- d) Perfil axial de velocidades no homogéneo.
- e) Gradiente de presión homogéneo.
- f) Gradiente de presión no homogéneo.
- g) Presión adimensional homogéneo.
- h) Presión adimensional no homogéneo.
- i) Fuerza adimensional homogénea.
- j) Fuerza adimensional no homogénea.

Los fluidos utilizados para alimentar a nuestro modelo fueron: agua y agua con glicerina a temperatura y presión constantes.

## 6.2 Análisis sin efectos de deslizamiento ( $V_s=0$ )



**Figura 6. Velocidad radial adimensional sin deslizamiento vs coordenada axial adimensional, en función del radio de los platos.**

La Fig. 6 ilustra el perfil de velocidad como función de la coordenada axial adimensional. En los 3 casos (a, c), se observa el clásico perfil parabólico a gradiente de presión constante reportado previamente en la literatura. Nótese que conforme el líquido se deforma continua e irreversiblemente en el espacio de la coordenada adimensional radial, el máximo en las curvas aumenta. Físicamente, al despreciar la curvatura a orden cero, el sistema se aproxima gradualmente al flujo entre 2 placas paralelas separadas a una distancia  $h$ . precisamente este es el concepto de lubricación en donde un sistema complejo se aproxima a un sistema más simple.

### 6.3 Comparación de graficas

#### 6.3.1 Velocidad Radial

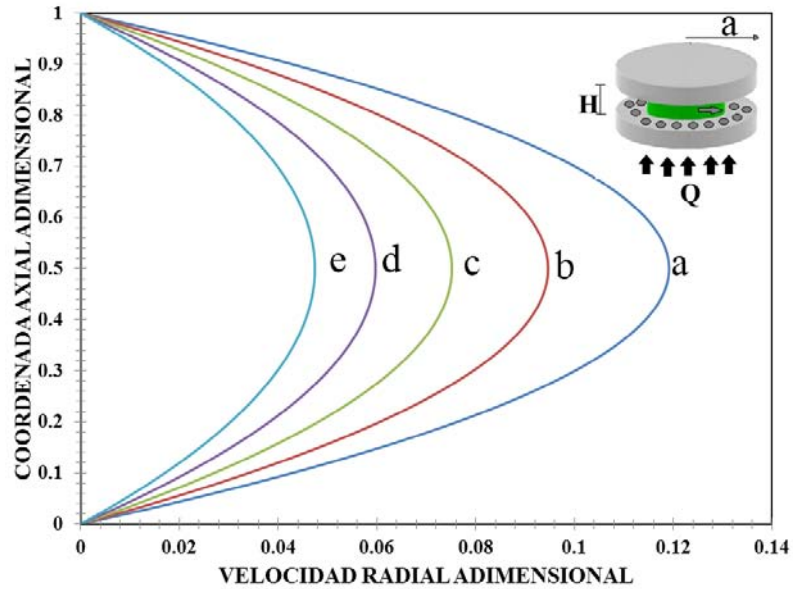


Figura 7. Velocidad radial adimensional sin deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido

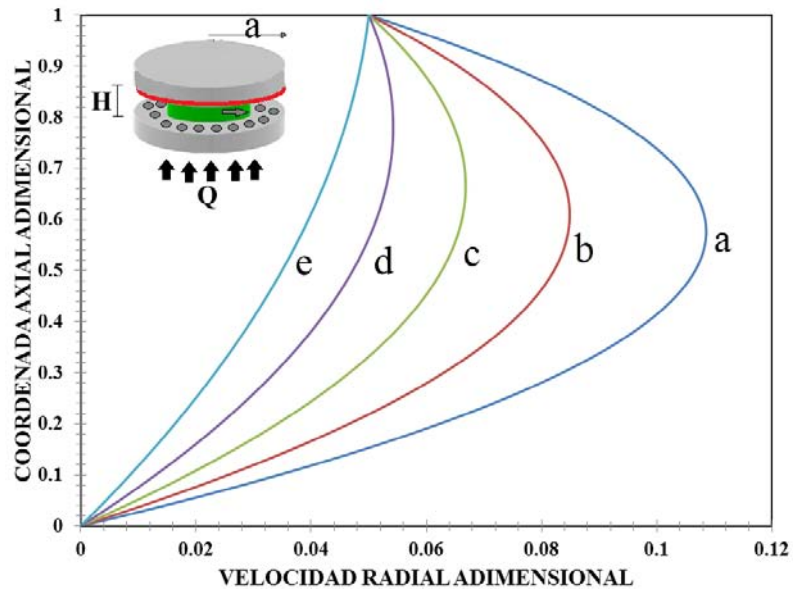


Figura 8. Velocidad radial adimensional con deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido

Las Figs. 7, 8 ilustran los perfiles de velocidad radial adimensional  $V_r^*(r^*, z^*)$  como función de la coordenada axial adimensional  $z^*$ , para diferentes valores del parámetro asociado con la no homogeneidad del líquido, en los casos de no deslizamiento y deslizamiento en la pared respectivamente (Figs. 7, 8). Los otros parámetros empleados en la simulación son:  $m = 0.1 + 0.1j$ ;  $j = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , el valor de la coordenada radial  $r^* = 0.5$  y la velocidad de deslizamiento  $V_s^*$  es cero y 0.5 respectivamente. La expresión analítica para el perfil de velocidades radial, puede ser descrita de la siguiente manera:

$$V_r^*(z^*, r^*) = V_s^* z^* + (6r^{*m+1} - 3V_s^*) z^* (1 - z^*)$$

En la Fig. 7 en donde no existe los mecanismos de deslizamiento, se observa el clásico perfil parabólico descrito en la literatura, es decir, en la pared, del sistema de flujo por compresión el esfuerzo cortante es máximo debido a que la velocidad es cero, y a medida de que el sistema fluye continua irreversiblemente, llega a un valor mínimo de ceo en el centro del sistema de flujo en donde el esfuerzo en el sistema es cero respectivamente. Nótese, que el sistema es asimétrico en el intervalo  $[0, 1]$ . Por otra parte, es claro de la Fig.7 que el efecto del parámetro  $m$  asociado a la no-homogeneidad del líquido disminuye los perfiles de velocidad de  $V_z^*(z^*, r^*)$ . Al tomar la derivada de la velocidad axial e igualarla a cero, i.e.  $dV_r^*(z^*, r^*)/dz^* = 0$ , se calcula la coordenada axial crítica para la cual, el máximo en la velocidad axial se obtiene:  $z_c^* = 1/2$ , respectivamente. Al sustituir, este valor en la velocidad axial se obtiene el valor del máximo, por lo que:

$$V_{\max}^* = V_r^*\left(z^* = \frac{1}{2}, r^*\right) = (6/4)r^{*m+1}$$

Por otra parte, en la Fig. 8 se observa el efecto de deslizamiento en el sistema de flujo por compresión. Nótese que en  $z^* = 1$ , la velocidad axial se desfasa a valores numéricos de  $V_z^* = 0.05$  y en todos los casos, se pierde la axi-simetría por efecto de los mecanismos adelgazantes respectivamente. De la misma manera que en el caso anterior sin deslizamiento, la variable axial crítica para el cual, la velocidad máxima es obtenida es:

$$z_c^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{V_s^*}{2r^{*m+1} + V_s^*} \right) \right)$$

Al sustituir este valor en la expresión matemática de la velocidad axial se obtiene el valor máximo de forma analítica:



$$V_{max}^* = V_r^*(z^*, r^*) = V_s^* z^* + (6r^{*m+1} - 3V_s^*) z^* (1 - z^*)$$

En contraste, en el caso mostrado en la Fig. 8, el perfil parabólico tiene un cambio en su propiedad de axi-simetría por efecto de los mecanismos deslizantes aplicado en la pared del plato superior. Se puede concluir que el mecanismo deslizante tiene un efecto comparable con

el que se encuentra en la combinación de dos tipos de flujo. El primero de ellos, es por debido a un gradiente de presión en la dirección radial del sistema, y el segundo se puede interpretar como una combinación de flujo a gradiente de presión y flujo de arrastre en el palto superior, respectivamente.

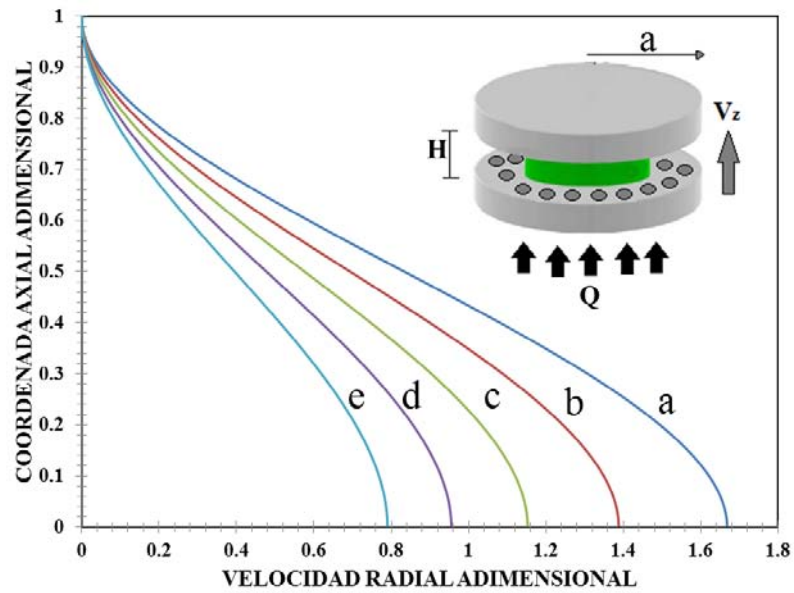
### 6.3.2 Velocidad Axial

Las Figs. 9 y 10 Ilustran los perfiles de velocidad en función de la coordenada axial adimensional para un valor de  $m = 0$ . Esto significa que el sistema físico no presenta efectos debido a la no-homogeneidad del fluido, por lo que la distribución del flujo volumétrico a lo largo de los orificios es la misma y no depende de la posición.

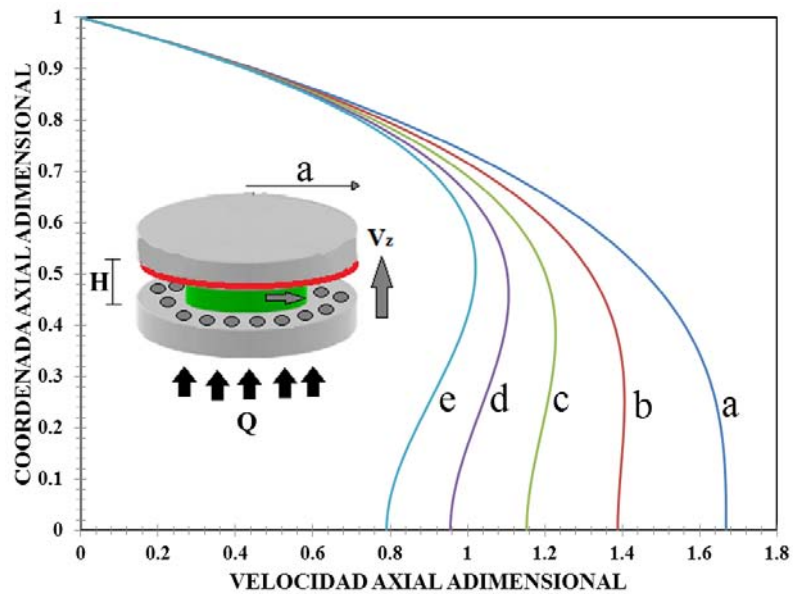
$$V_z^*(z^*, r^*) = z^{*2} (1 - z^*) \frac{V_s^*}{r^*} + (m + 2)r^{*m} (1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$$

Para la Figs. 9 y 10 el valor de la coordenada radial  $r^* = 0.5$ . Matemáticamente, en todos los casos, la velocidad axial muestra un comportamiento monótono decreciente en todo el intervalo de simulación. El efecto de la no homogeneidad disminuye la velocidad axial adimensional como se observa en la Fig. 9 de valores de 1.7 a 0.8 respectivamente. Esto implica que existe un decremento en la velocidad axial del 55 % por efecto de la no-homogeneidad en el fluido. En la Fig.10 se ilustra la velocidad axial como función de la coordenada axial adimensional para diferentes valores del parámetro  $m$  y de la velocidad de deslizamiento en la pared respectivamente. Los valores numéricos utilizados para el parámetro no-homogéneo  $m = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  y la velocidad de deslizamiento adimensional es  $V_s^* = 0.5$ . Es claro que al aumentar la no-homogeneidad del sistema, la velocidad axial presenta un máximo, como consecuencia del aumento del parámetro  $m$  asociado a la no-homogeneidad del líquido debido a la inyección del flujo volumétrico

constante a lo largo del plato inferior debido a la serie de orificios en el plato inferior.  
Nótese que este máximo, se presenta cuando  $z^* = 0.5$



**Figura 9. Velocidad axial adimensional sin deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido.**



**Figura 10. Velocidad axial adimensional con deslizamiento vs separación de los platos en función de la no homogeneidad del líquido.**

### 6.3.3 Gradiente de Presión

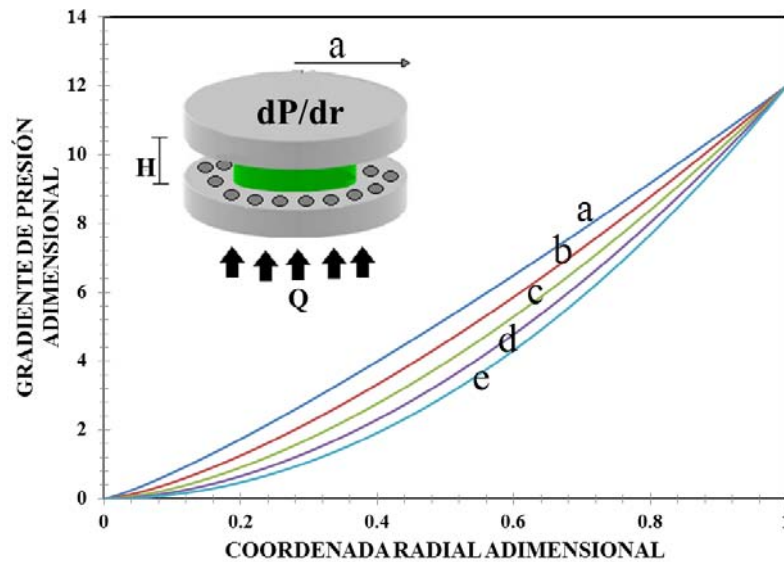


Figura 11. Gradiente de presión adimensional sin deslizamiento vs la distancia del radio, en función de la no homogeneidad del líquido.

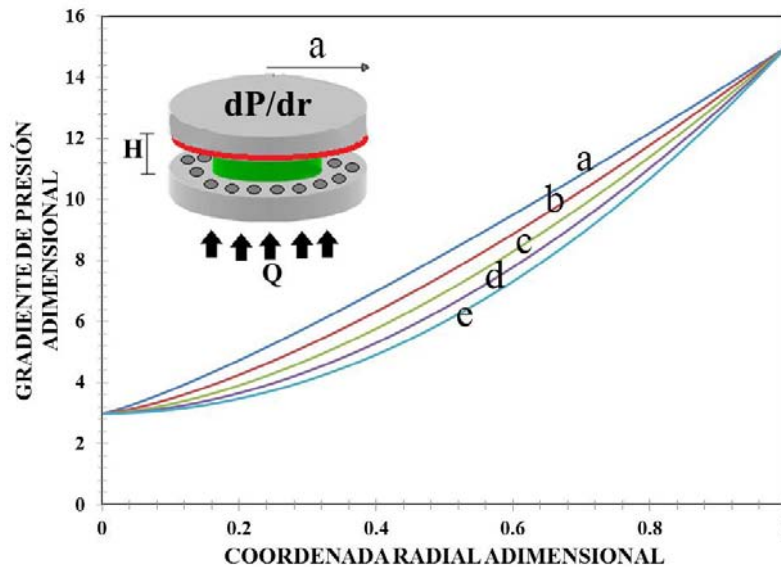


Figura 12. Gradiente de presión adimensional con deslizamiento vs la distancia del radio, en función de la no homogeneidad del líquido.

**La Figs. 11** ilustra el perfil del gradiente de presión adimensional como función de la variable adimensional radial, para diferentes valores del parámetro asociado con la no homogeneidad del líquido  $m = 0$ . Los valores numéricos que se utilizaron en las simulaciones fueron los siguientes:  $m = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, V_s^* = 0$  respectivamente. En particular, cuando  $m = 0$  y  $V_s^* = 0$  (Fig. 11). La relación entre el gradiente de presión y la coordenada radial es lineal con pendiente cercana a la unidad 1. Por otra parte, cuando la no-homogeneidad aumenta en el sistema, i.e.  $m \neq 0$ , el gradiente de presión radial adimensional describe un perfil no lineal (parabólico) con la coordenada radial adimensional. Físicamente, significa que para un valor fijo de la coordenada radial adimensional en función de la no-homogeneidad, el gradiente disminuye considerablemente.

$$\frac{dp^*}{dr^*} = 6V_s^* - 12r^{*m+1}$$

En **la Fig. 12** se ilustra el gradiente de presión vs coordenada radial adimensional para diferentes valores de la no-homogeneidad en el líquido tomando en cuenta los mecanismos adelgazantes. Los parámetros utilizados en la simulación son:  $m = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, V_s^* = 0.5$  respectivamente. En el caso de que exista deslizamiento, las curvas se desfasan hacia valores mayores del gradiente de presión. Como se observa en la Fig. (12), la dependencia entre el gradiente de presión y la coordenada radial es lineal, en el caso de un fluido homogéneo, mientras que al aumentar la no-homogeneidad el sistema describe una parábola una función cuadrática más pronunciada respectivamente. El efecto del gradiente de presión se puede descomponer en dos contribuciones respectivamente:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = \left( \frac{dp^*}{dr^*} \right)_{\text{des}} + \left( \frac{dp^*}{dr^*} \right)_{\text{No-des}} = 6V_s^* - 12r^{*m+1}$$

Esto implica que existe un gradiente de presión extra debido a los mecanismos de no adherencia del solido al fluido.

### 6.3.4 Presión

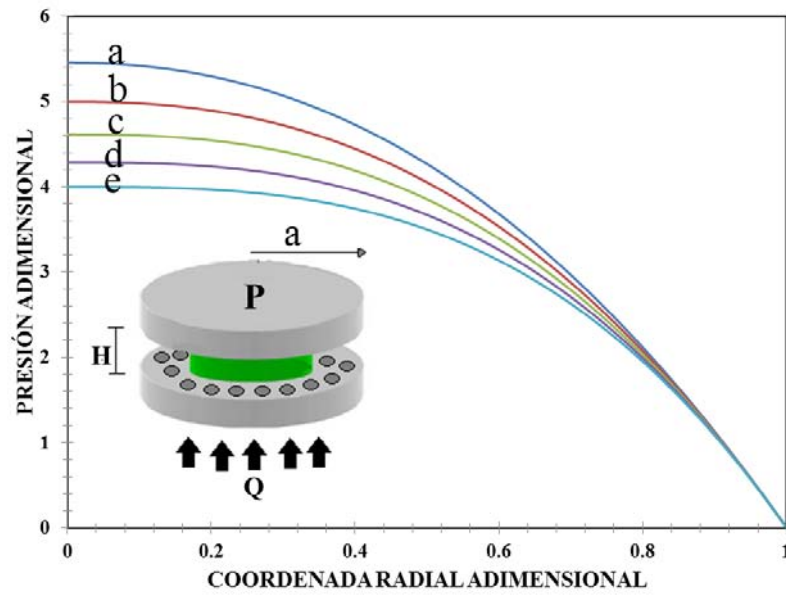


Figura 13. Presión adimensional sin deslizamiento vs coordenada radial adimensional, en función de la no homogeneidad del líquido

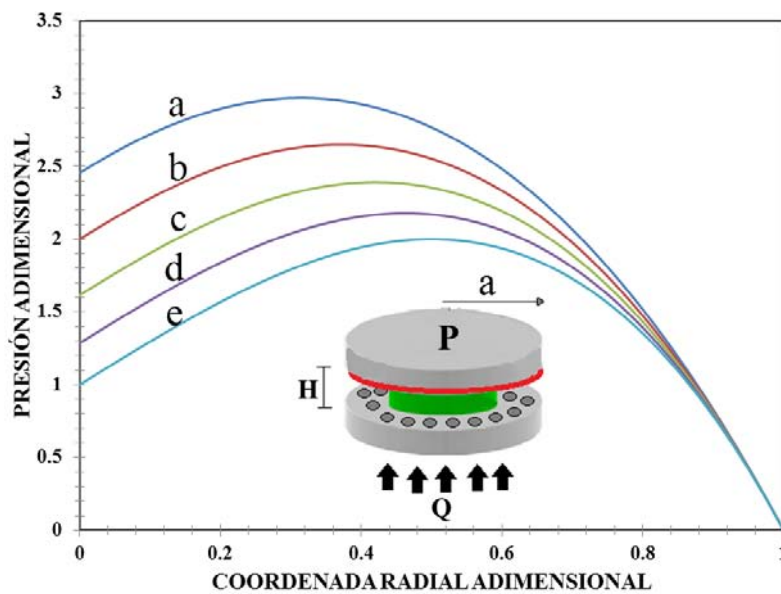


Figura 14. Presión adimensional con deslizamiento vs coordenada radial adimensional, en función de la no homogeneidad del líquido

Las Figs. 13, 14 ilustran los perfiles de presión adimensional como función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores del parámetro asociado con la no homogeneidad del líquido, i.e.  $m = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  sin deslizamiento  $V_s^* = 0$  y con deslizamiento respectivamente. La ecuación que describe el perfil de presiones está dada por la siguiente expresión matemática:

$$p(r^*) - p_a^* = \frac{12}{m+2} (1 - (r^*)^{m+2})$$

La Fig. 13 el perfil de presiones muestra un comportamiento constante a valores bajos de la coordenada radial adimensional, mientras que para un valor crítico de la coordenada radial adimensional, el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un valor de cero. Es importante resaltar que el efecto de la no homogeneidad ( $m \neq 0$ ), la cual es una medida de la dependencia del flujo con la posición, hace que los perfiles de presión se desfasen de mayores a menores valores en el perfil de presiones.

Por otra parte, en la Fig. 14 cuando los mecanismos deslizantes son diferentes de cero, i.e.  $m \neq 0$ . A diferencia de la Fig. 13, el sistema muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo, seguido de un comportamiento monótono decreciente hasta el valor de cero. Se observa un comportamiento monótono creciente hasta un máximo seguido de un comportamiento decreciente.

$$p(r^*) - p_a^* = 6V_s^* (r^* - 1) + \frac{12}{m+2} (1 - (r^*)^{m+2})$$

El efecto del deslizamiento es aumentar el máximo en la presión evaluada en el intervalo experimental de  $[0, 0.5]$ . El valor crítico de la coordenada radial adimensional, para la cual se obtiene el máximo, tiene la forma:

$$0 = \frac{dp^*(r^*)}{dr^*} = 6V_s^* - 12(r^*)^{m+1} \Rightarrow 6V_s^* - 12(r^*)^{m+1} r^* = \sqrt{\frac{V_s^*}{2}}$$

Nótese que el valor de la coordenada radial adimensional crítica depende de la no homogeneidad del líquido y de la condición de deslizamiento en el plato superior. Finalmente, el efecto de la no-homogeneidad es la de disminuir la presión y modificar la axi-asimetría de los perfiles de presión adimensional.

### 6.3.5 Fuerza Normal

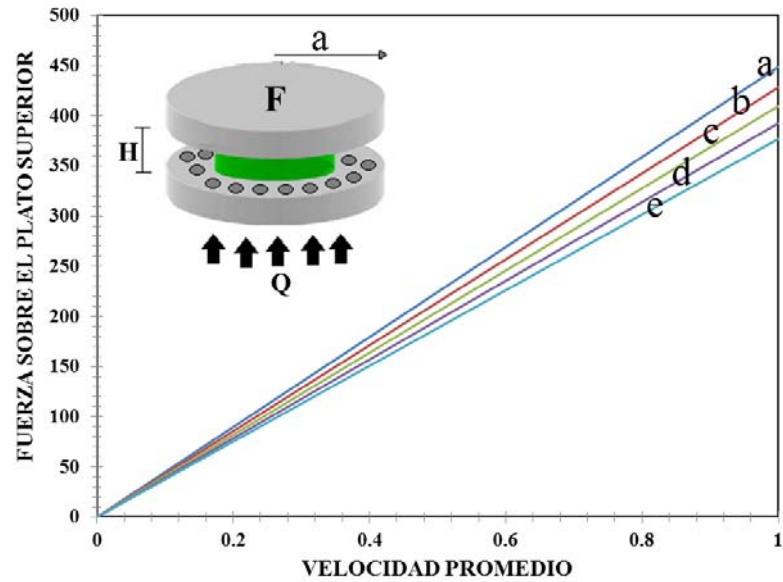


Figura 15. Fuerza sobre el plato superior sin deslizamiento vs velocidad promedio del líquido, en función de la no homogeneidad del líquido.

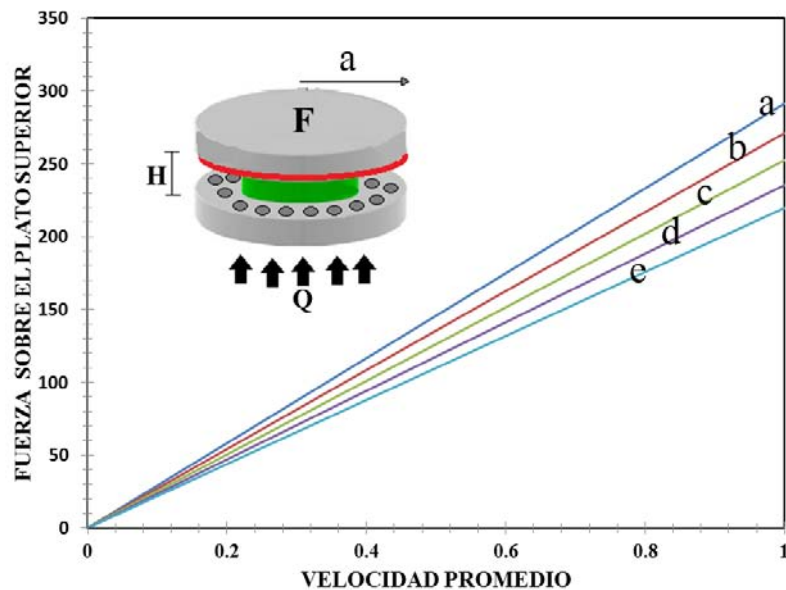


Figura 16. Fuerza sobre el plato superior con deslizamiento vs velocidad promedio del líquido, en función de la no homogeneidad del líquido.

Las Figs. 15, 16 ilustra la fuerza normal en el plato superior como función de la velocidad promedio para diferentes valores de la no homogeneidad del sistema, sin deslizamiento y con deslizamiento respectivamente. Los parámetros utilizados en las simulaciones son:  $a = 0.5$  m,  $H = 0.05$  m y  $\mu = 1$  Pa s. y para el valor de la no-homogeneidad  $m = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ . La ecuación básica que representa la fuerza normal en el flujo continuo por compresión en función de la velocidad promedio sin deslizamiento, está dada por:

$$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} \right)$$

En la Fig. 15 se observan las simulaciones correspondientes a la fuerza normal. En todos los casos, la fuerza normal muestra un comportamiento lineal con la velocidad promedio. Nótese, que el máximo valor de las pendientes asociadas a las rectas se obtiene en flujo homogéneo, i.e.  $m=0$ , no existe la dependencia del flujo con la posición. Es importante destacar que si la homogeneidad aumenta, la fuerza normal tiende a cero:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_z = \lim_{m \rightarrow \infty} 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} \right) \rightarrow 0$$

En la Fig. 16 se presenta la fuerza normal en el plato superior como función de la velocidad promedio. Para la Fig.16 se ocuparon los mismos parámetros que en la Fig, 15 y el valor de la velocidad de deslizamiento es  $V_s^* = 0.5$  respectivamente. La ecuación que describe la fuerza tomando en cuenta los mecanismos deslizantes está dada por:

$$F_z = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} - \frac{2}{3} V_s^* \right)$$

De acuerdo con el modelo newtoniano, el valor de la fuerza normal que experimenta el plato superior decrece en un valor de  $0.66 V_s^*$ . En conclusión es importante resaltar, que la gráfica de mayor pendiente corresponde al caso flujo homogéneo  $m=0$ . Finalmente, para un fluido newtoniano, los factores que afectan la fuerza son los parámetros geométricos, la no-homogeneidad del sistema (fluido) en el plato inferior y la velocidad en el plato superior asociada a los mecanismos deslizantes respectivamente.



**6.3.6 Flujo por compresión utilizando datos experimentales ( $V_s=0$ ).**

En esta sección, se presentan resultados experimentales con datos de algunos fluidos newtonianos con el fin, de comprobar las predicciones y bondades del modelo desarrollado en la presente investigación. Los datos experimentales utilizados fueron extraídos del trabajo de Oliver et al. 1978, los cuales son los siguientes:

**Tabla 5. Datos experimentales de algunos fluidos newtonianos.**

Fluido Newtoniano	Viscosidad $\mu$ (Pa·s)
Glicerol- Agua	0.0099
Agua	0.0122

**Fig. 17-19** ilustran los perfiles de la fuerza normal como función para los siguientes fluidos: (i) mezcla de agua-glicerol y (ii) agua. Las siguientes restricciones han sido empleadas para las simulaciones. En las Figs. (17-19) el sistema se ha considerado flujo homogéneo es decir  $m = 0$  en todos los casos y que la velocidad de deslizamiento en el plato superior es cero, i.e.  $V_s^* = 0$ . En la Fig. 17 se calculó la fuerza normal en función del radio de los discos  $a$ : (i) 0.001 m, (ii) 0.003 m, (iii) 0.005 m y una altura de los platos constante  $h = 0.0002$  m respectivamente. En la Fig. 18 se calcula la fuerza en el plato superior como función de la velocidad promedio para un valor de radio constante  $a = 0.0055$  m y tres separaciones distintas en los platos: (i)  $h = 0.00005$  m, (ii)  $h = 0.0001$  m, (iii)  $h = 0.00015$  m. En la Figs. (17-18), se observa que la relación entre la fuerza normal y la velocidad promedio es lineal y que su pendiente está determinado por las propiedades geométricas y de la viscosidad. La fuerza norma en el plato superior tiene tres limites asintóticos, los cuales pueden ser calculados a través de los siguientes limites

$$\lim_{a \rightarrow \infty} Fz = \lim_{\mu \rightarrow \infty} Fz = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} - \frac{2}{3} V_s^* \right) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} Fz = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( \frac{4}{m+4} - \frac{2}{3} V_s^* \right) \rightarrow 0$$

Nótese que la fuerza es cero cuando el valor de la velocidad de deslizamiento  $V_s^*$  tiene el valor de  $V_s^* = 6/m+4$ .

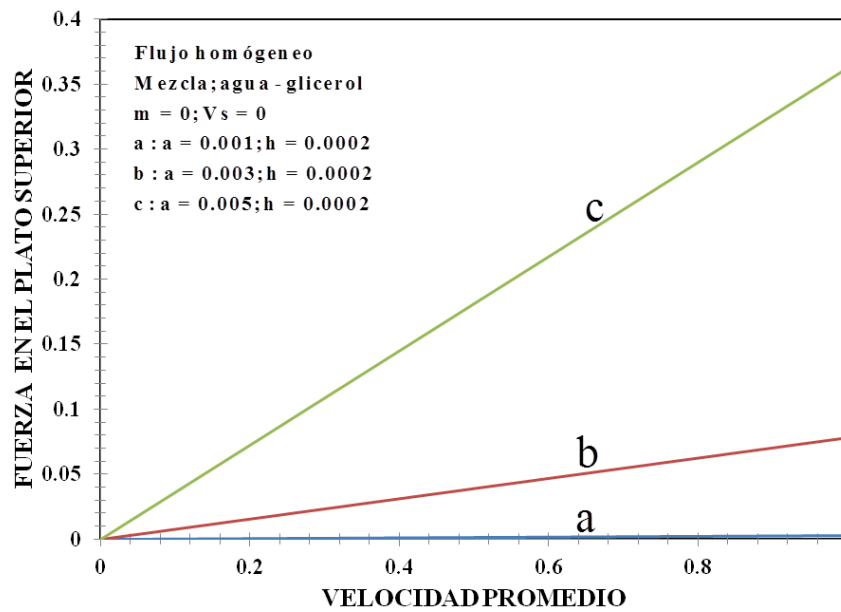


Figura 17. Fuerza en el plato superior (sin deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido homogéneo, distancia entre discos constante  $z = h$ , variando el radio del disco  $r = a$ .

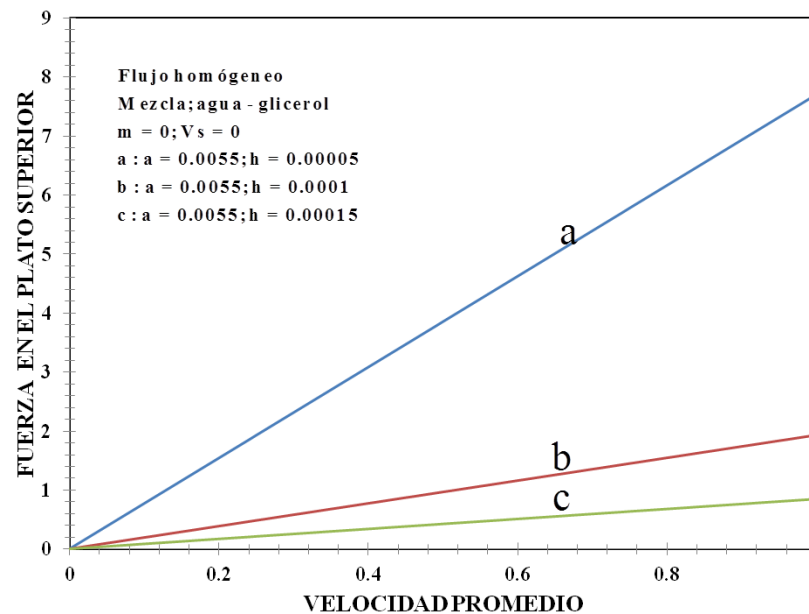
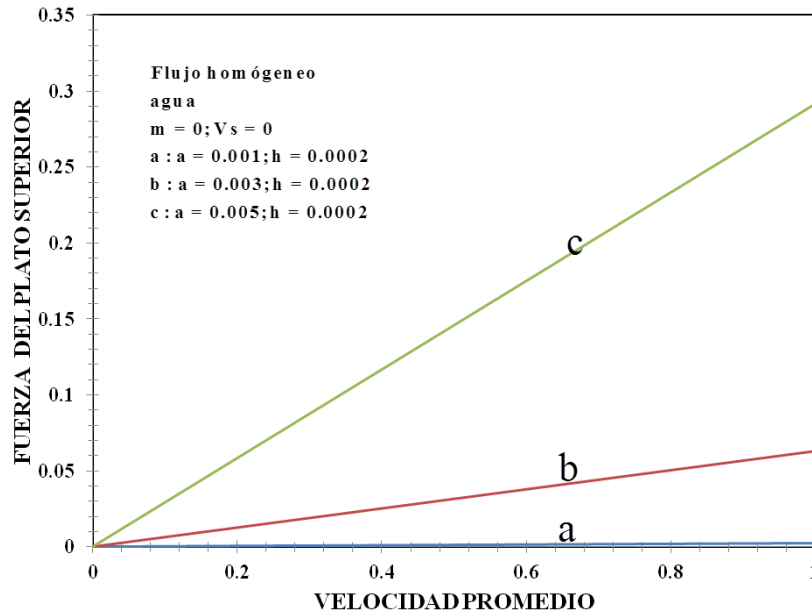


Figura 18. Fuerza en el plato superior sin deslizamiento vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido totalmente homogéneo, radio del disco constante  $r = a$ , variando la distancia entre platos  $z = h$ .

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado



**Figura 19. Fuerza en el plato superior (sin deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (agua), líquido totalmente homogéneo, distancia entre discos constante  $z=h$ , variando el radio del disco  $r=a$ .**

En la Fig. 19 se presentan las simulaciones de la fuerza normal en el plato superior como función de la velocidad promedio en función de las propiedades de las propiedades materiales y geométricas del sistema. En este sistema, se aplicaron las mismas condiciones de flujo, es decir flujo homogéneo sin deslizamiento en la pared. Los parámetros geométricos que se definieron, son el radio y la altura de los platos. Los valores de radio de los discos que se ocuparon son los siguientes: En la Fig. 17 se calculó la fuerza normal en función del radio de los discos a: (i) 0.001 m, (ii) 0.003 m, (iii) 0.005 m y una altura de los platos constante  $h = 0.0002$  m respectivamente. Los valores de la viscosidad fueron obtenidos de la tabla 5.

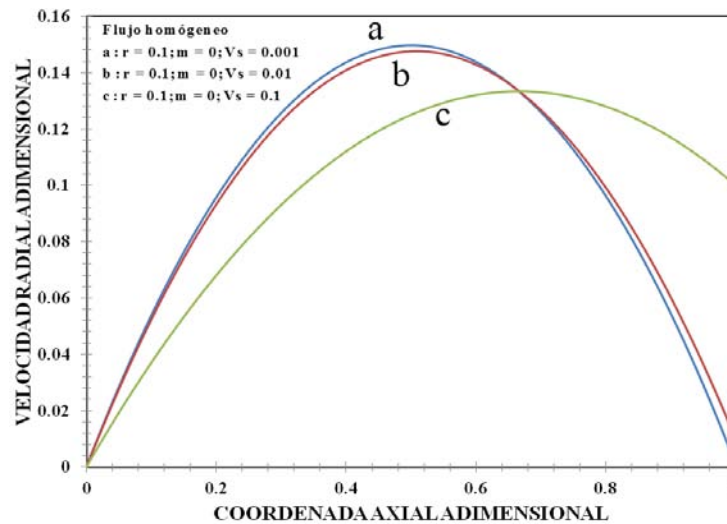
Al igual que las Figs. 18 y 19 la relación entre la fuerza y la velocidad promedio es lineal, sin embargo la pendiente para los fluidos considerados en este trabajo cambia considerablemente. Es importante, resaltar dos cosas de las simulaciones

- a) La fuerza normal es muy sensible a los propiedades geométricas del sistema como son: (i) separación de los platos y (ii) radio de los discos respectivamente.

- b) La fuerza normal es directamente proporcional a la viscosidad por lo que, este experimento puede servir como viscosímetro de platos paralelos.
- c) El esfuerzo y la rapidez de deformación aparentes están dados por las siguientes expresiones:

$$\sigma_{ap} = \frac{Fz}{3\pi a^3 / h} = \mu \frac{\langle V \rangle}{h} = \mu \gamma_{ap}$$

#### 6.4 Análisis con efectos de deslizamiento ( $V_s \neq 0$ )



**Figura 20. Velocidad radial adimensional con deslizamiento vs separación de los platos, en función de la coordenada adimensional axial.**

La Fig. 20 ilustra el perfil de velocidad radial adimensional como función de la coordenada axial adimensional, para valores diferentes de la velocidad de deslizamiento. Los valores numéricos de los parámetros utilizados son los siguientes: (i)  $r = 0.1$  m y (ii)  $m = 0$  y (iii) a.  $V_s^* = 0.001$ , b.  $0.01$ , c.  $0.1$ . El valor de la viscosidad ocupada en la simulación fue obtenido de la tabla 5.

Es importante, resaltar que el efecto del deslizamiento tiene dos efectos principales en el flujo. El primero de ellos, es disminuir el valor del máximo, el cual está determinado por un acoplamiento entre los mecanismos no-homogéneos, de deslizamiento y geométricos respectivamente. Es importante notar que este tipo de sistema, en donde la

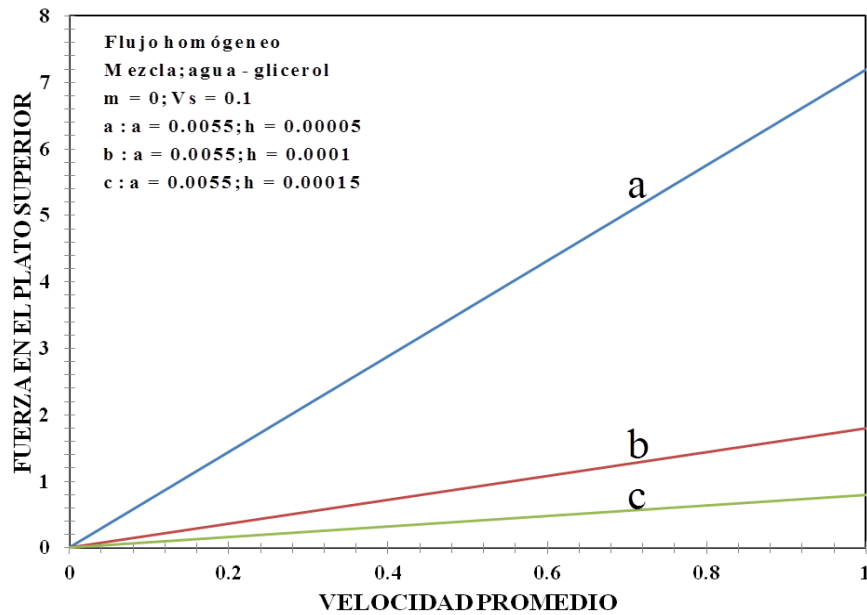
**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

fuerza motriz es un gradiente de presión con deslizamiento, se puede interpretar como la combinación de un flujo de Poiseuille y de Couette respectivamente.

**6.4.1 Flujo continuo por compresión utilizando datos experimentales ( $V_s \neq 0$ ).**

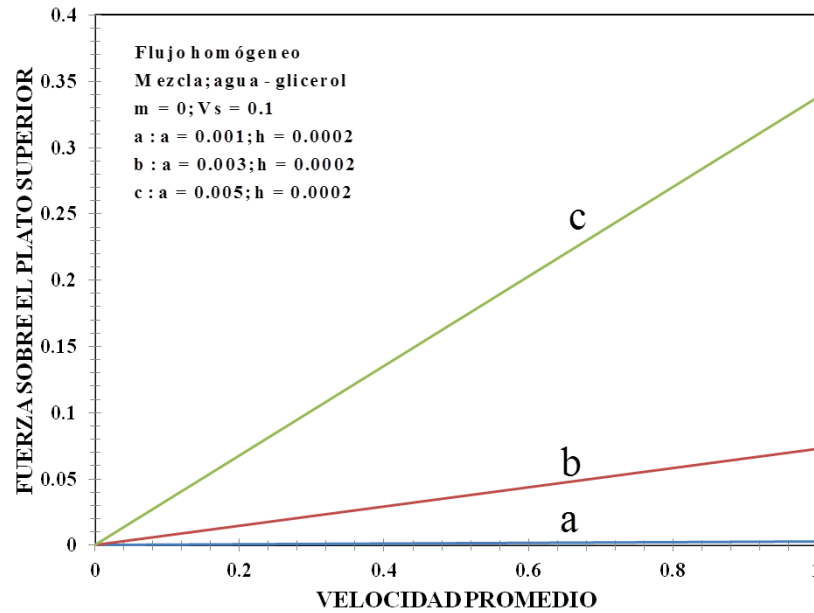
En esta sección presentamos las predicciones de nuestro modelo utilizando datos extraídos de la literatura. Los líquidos empleados en la simulación son agua y una mezcla de agua-glicerol. Las condiciones de operación del sistema se mantuvieron constantes (temperatura, presión, composición).



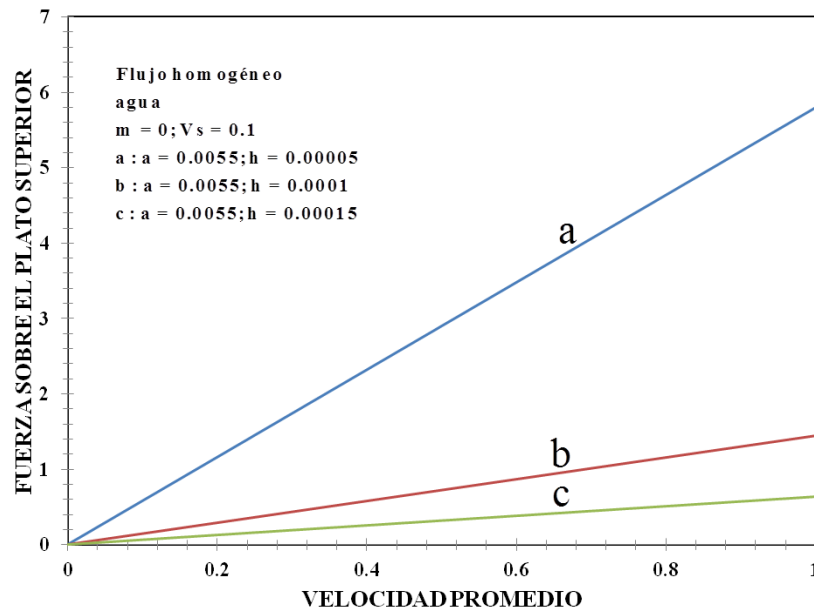
**Figura 21. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido homogéneo, distancia del radio constante  $r=a$ , variando la distancia entre discos  $z=h$ .**

En la Fig. 21 se ilustran los comportamientos de la fuerza normal en función de la velocidad promedio para la mezcla newtoniana agua-glicerol. La descripción física del problema, es similar a las descritas en la teoría. Los parámetros utilizados en esta simulación son: (a)  $m = 0$ , (b)  $a = 0.0055$  m, (c) i.  $h = 0.00005$  m, ii.  $h = 0.0001$  m, iii.  $h = 0.00015$  m y el parámetro de deslizamiento adimensional es igual a  $V_s^* = 0.1$

. En la Fig. 22 los parámetros utilizados son:  $m = 0$ , (i.)  $a = 0.001$  m, (b)  $0.003$  m, (c)  $a = 0.005$  m,  $h = 0.0002$  m y la velocidad de deslizamiento adimensional  $V_s^* = 0.1$ . El valor de la viscosidad utilizado fue extraído de la tabla 5.



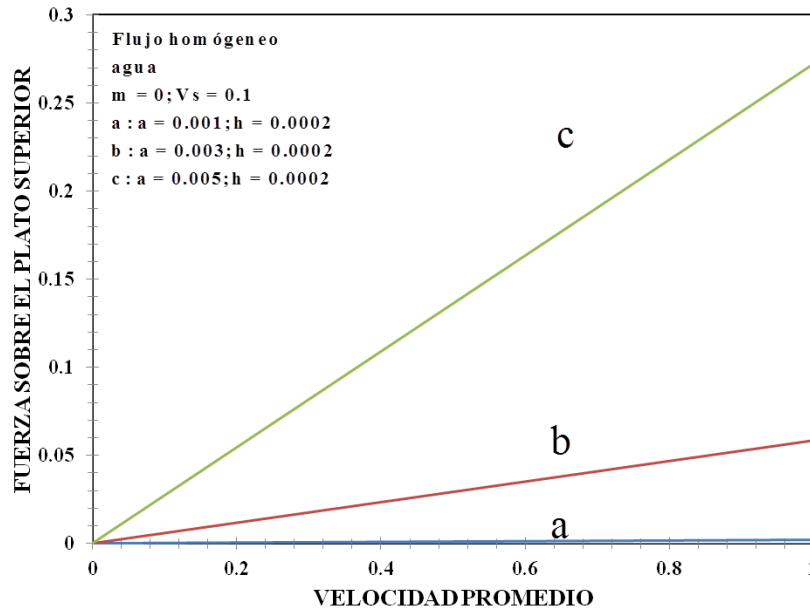
**Figura 22. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (mezcla agua-glicerol), líquido homogéneo, distancia constante entre discos  $z = h$ , variando la distancia del radio  $r = a$ .**



**Figura 23. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (agua), líquido homogéneo, distancia del radio constante  $r = a$ , variando la distancia entre discos  $z = h$ .**

“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

Rivera Rivera Jesús Amado



**Figura 24. Fuerza en el plato superior (con deslizamiento) vs velocidad promedio del líquido (agua), líquido homogéneo, distancia constante entre discos  $z = h$ , variando la distancia del radio  $r = a$ .**

En las Fig. 23 y 24 se ilustran los comportamientos de la fuerza normal en función de la velocidad promedio para un fluido newtoniano (agua). La descripción física del problema, es similar a las descritas en la teoría. Los parámetros utilizados en esta simulación son: (a)  $m = 0$ , (b)  $a = 0.0055$  m, (c) i.  $h = 0.00005$  m, ii.  $h = 0.0001$  m, iii.  $h = 0.00015$  m y el parámetro de deslizamiento adimensional es igual a  $Vs^* = 0.1$ . En la Fig. 25 los parámetros utilizados son:  $m = 0$ , (i.)  $a = 0.001$  m, (b)  $0.003$  m, (c)  $a = 0.005$  m,  $h = 0.0002$  m y la velocidad de deslizamiento adimensional  $Vs^* = 0.1$ . Los valores de las viscosidades en los dos fluidos de prueba fueron extraídos de la Tabla 5.

Al comparar los resultados obtenidos de las simulaciones (Figs. 20-24) con los dos fluidos prueba se observa que describen muy bien los resultados teóricos. La fuerza normal en el plato superior se ve afectada drásticamente por las propiedades geométricas, materiales y dinámicas. Como se mencionó anteriormente, anteriormente, la fuerza es directamente proporcional al cubo del radio de los platos paralelos, inversamente proporcional a la altura de los platos y proporcional a la viscosidad del fluido y la velocidad promedio asociada al flujo volumétrico constante.



# CAPÍTULO VII

# CONCLUSIONES



# “EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

Rivera Rivera Jesús Amado

## 7.1 *Flujo continuo por compresión*

En este trabajo se analiza el flujo continuo por compresión con deslizamiento, en un geometría de platos paralelos. Este sistema consiste en dos platos de radio  $r = a$ , separados a una distancia  $z = h$ . El plato de abajo tiene una serie de orificios por los cuales un fluido newtoniano es bombeado a flujo volumétrico constante. El objetivo de este sistema es calcular la fuerza normal que experimenta el plato superior debido al contacto de líquido sobre la superficie circular. Este sistema simula al flujo tradicional por compresión en el cual los dos platos están separados a una distancia  $h$  y el plato superior, se aproxima al plato inferior con una velocidad constante provocando que el fluido se comprima y por lo tanto se produce un laminado en dirección radial.

Para caracterizar nuestro fluido, se utiliza el modelo newtoniano, el cual tiene una relación lineal entre el tensor de esfuerzo y el tensor rapidez de deformación. Este modelo contiene una propiedad material, conocida como viscosidad, la cual es una medida de la resistencia al flujo en un sistema. Suponiendo líquido incompresible, simetría cilíndrica, proceso isotérmico, y que el vector de velocidades depende de dos componentes, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, las cuales son: (i) la ecuación de continuidad, (ii) las componentes  $r$  y  $z$  de las ecuaciones de movimiento.

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, se propone un conjunto de variables adimensionales, con el fin de escalar las ecuaciones y que aparezcan grupos adimensionales, los cuales describen los mecanismos globales y que juegan un papel preponderante en la descripción del flujo.

En este trabajo se estudió el flujo continuo por compresión, el cual consiste en 2 platos concéntricos de radio  $r = a$  separados a una distancia  $z = h$ . El plato superior de mantiene fijo, mientras que el plato inferior se perfora una serie de orificios, de tal manera que inyecta un fluido a través de los orificios a gasto constante a través de los orificios, el objetivo de este trabajo fue calcular la fuerza que experimenta el plato superior debido al medio, en este caso fue un fluido newtoniano (viscosidad constante). Suponiendo estado estacionario, simetría cilíndrica, efectos gravitacionales despreciables, que el campo de velocidades es radial y axial, el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se simplifica utilizando la aproximación de lubricación, la cual consiste en despreciar los



efectos de frontera (curvatura) y aproximar el flujo como si fuera el flujo de Poiseuille en una rendija de altura “h” a continuación se hace un resumen de las principales ecuaciones y características físicas de este sistema.

Suponiendo que los efectos inerciales son despreciables, se obtiene una expresión analítica para el perfil radial de velocidad en función de la coordenada radial. A través de la conservación de la masa y el uso de la ecuación de continuidad, se obtiene el perfil de velocidad axial. A partir de los perfiles de velocidad se obtiene la expresión para el gradiente de presión en función del deslizamiento en el sistema. Integrando y suponiendo que en  $r = a$  la presión es igual a la atmosférica, se obtiene una expresión cerrada para la presión, la cual describe una parábola que se desfasa debido a la fuerza motriz asociada al gradiente de presión. Mediante un balance de fuerzas en el plato superior, se obtiene vía integración, una expresión para la fuerza en función del gradiente de presión y el área de contacto.

Por otra parte cuando en el sistema no se cumple la condición de adherencia en el plato superior, el perfil de velocidad radial pierde su simetría debido a los mecanismos deslizantes, el siguiente punto importante, está relacionado con que la velocidad axial es independiente de los mecanismos deslizantes, en contraste con la presión, el gradiente de presión y la fuerza que se aplica debido a que los efectos deslizantes hacen que la carga aplicada al sistema (fluido) disminuya.

Al sustituir el gradiente de presión, en la fuerza e integrando se obtiene la ecuación de la fuerza de Stefan con la corrección del deslizamiento en la pared.

Suponiendo que la fuerza es constante, se obtiene una ecuación diferencial lineal para la altura del plato en función de las propiedades del medio y del tiempo.

Se presentan simulaciones para los perfiles de velocidad radial, axial y de la presión como función de las coordenadas espaciales.

- a) Por último se obtuvieron predicciones numéricas utilizando datos reométricos de fluidos newtonianos. Finalmente la rapidez con la que desciende el plato se ve

## “EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”

---

Rivera Rivera Jesús Amado

afectada drásticamente por el parámetro de deslizamiento, ya que las pendientes de la altura como función del tiempo cambian drásticamente con los mecanismos deslizantes

A continuación se hace un resumen de las principales ecuaciones y características físicas de este sistema.

- b) La velocidad radial se modifica por efecto del deslizamiento, i.e. los elementos de control aumentan su velocidad, lo cual se observa en la Fig. 10.
- c) La velocidad axial presenta un máximo local con un mayor valor en el parámetro de deslizamiento.
- d) El gradiente de presión, muestra un comportamiento lineal, sin embargo se observa que se desfasa con el parámetro de deslizamiento.
- e) El perfil de presión sin deslizamiento, muestra un perfil parabólico axi-simétrico, mientras que cuando los mecanismos deslizantes aumentan, la simetría desaparece, y se observa una función con un máximo desfasado.
- f) La fuerza es directamente proporcional a la cuarta potencia del radio, a la viscosidad del medio, a la velocidad con la que desciende el plato superior, factor geométrico e inversamente proporcional al cubo de la distancia que los separa. Sin embargo con deslizamiento aparece un término adicional que está relacionado con las propiedades deslizantes en el plato superior.
- g) Suponiendo que la fuerza que se aplica al plato superior es constante, i.e. no cambia con el tiempo, se obtiene expresiones analíticas para la separación de los platos en función del tiempo y de las propiedades materiales del medio, geométricas y deslizantes.
- h) La rapidez con la que desciende el plato se ve afectada drásticamente por el parámetro de deslizamiento, ya que las pendientes de la altura como función del tiempo cambian drásticamente con los mecanismos deslizantes
- i) A pesar de que la fuerza que se aplica al plato superior es constante, lo observado en las Figs. 9 y 16, permite concluir que la fuerza aplicada en un sistema con efecto deslizante sea mayor, comparado con el sistema en el cual existe la adherencia.



- j) Una de las mayores ventajas del modelo newtoniano, es su sencillez y simplicidad debido a que la relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. Debido a las aplicaciones tecnológicas y potenciales de los sistemas de lubricación con fluidos newtonianos, así como la ausencia de un modelo simple que describa los efectos de deslizamiento en la pared en flujo por compresión en forma satisfactoria para estos fluidos, se justifica plenamente la originalidad de la investigación contenida en el presente proyecto de tesis de licenciatura.

### ***7.2 Deslizamiento vs dinámica molecular***

Es importante notar que el efecto de deslizamiento en la pared es un fenómeno a nivel molecular (en el orden de nanómetros) y por lo tanto merece una atención especial con técnicas sofisticadas y motive el análisis como dinámica molecular y motiva su estudio con diferentes ecuaciones constitutivas. Finalmente, este trabajo es una contribución a la constante búsqueda del entendimiento de sistemas utilizados en la industria mecánica, mejores lubricantes y caracterización de tipo geométrica. La manera de adaptar estas ecuaciones es por medio de las propiedades materiales. Por ejemplo la viscosidad puede ser modificada mediante el pH, el peso molecular, etc. En este punto se pueden hacer investigaciones con fluidos de naturaleza más compleja como aquellos que presentan propiedades viscosas y elásticas en el régimen lineal y no lineal respectivamente. En el aspecto experimental, se puede hacer la caracterización reométrica con sistemas poliméricos, sistemas micelares, dispersiones de cristales líquidos, fluidos biorreológicos, etc.

# **CAPÍTULO VIII**

## **TRABAJO FUTURO**

### **8.1 Modelos no newtonianos**

En este trabajo se modela el flujo continuo por compresión en un sistema de lubricación de platos concéntricos con deslizamiento en el plato superior. El fluido fue caracterizado por el modelo de Newton, en donde la relación entre el esfuerzo y la rapidez de deformación es lineal (bajas deformaciones). Las variables dinámicas del sistema fueron calculadas suponiendo la aproximación de lubricación. Expresiones analíticas para los perfiles de velocidad radial, axial, gradiente de presión, perfil de presiones y Fuerza normal fueron calculadas con y sin deslizamiento en el plato superior. Las extensiones de este trabajo son mencionadas a continuación:

#### **8.1.1 Newtoniano generalizado**

Una extensión natural de este trabajo sería la de caracterizar el líquido complejo con un modelo no newtoniano que presente propiedades complejas como son: (i) adelgazamiento al corte, (ii) engrosamiento al corte, (iii) Tixotropía, (iv) Reopexia, (v) Reopexia entre otros. Algunas de las ecuaciones constitutivas reológicas que pueden ser empleadas son mencionadas a continuación: (i) Ostwaeld, (ii) Ellis, (iii) Bingham, (iv) Carreau, (v) Yasuda Cross, etc (Bird et al. 1987, 2002).

$$\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

En la ecuación anterior,  $\eta$  es la función viscosidad la cual depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación

#### **8.1.2 Modelos viscoelásticos lineales**

Otra de las incorporaciones naturales de este trabajo, son los efectos elásticos a través de los tiempos de relajación de Maxwell, Jeffreys, Burgers y Maxwell Generalizado. Estos modelos reológicos podrían incorporar información acerca de la memoria de los materiales en el sistema de flujo. Un ejemplo de estos modelos, es la ecuación reológica constitutiva de Jeffreys, la cual contiene tres parámetros materiales: (i) un tiempo viscoelástico de Maxwell, (ii) un tiempo viscoelástico de Jeffreys y (iii) una viscosidad a bajo corte.

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$

El modelo de Jeffreys es una combinación de los esfuerzos asociados al solvente y al sistema complejo (polímero) respectivamente (Bird et al. 1987, 2002). Otro modelo de orden superior, que nos permite caracterizar al material es el modelo de Burgers de segundo orden, el cual se describe a continuación:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$

Esta ecuación constitutiva es de segundo orden en la derivada y podría arrojar información útil a través de los parámetros materiales asociados al sistema  $\{\lambda_M, \lambda_J, \beta, \eta_0\}$ .

### 8.1.3 Modelos viscoelásticos no lineales

Por otra parte, fenómenos más complejos están relacionados con el régimen de viscoelasticidad no lineal a través de ecuaciones constitutivas no lineales que describan la naturaleza compleja de estos sistemas. En este punto se pueden utilizar modelos como son: (i) Tanner, (ii) White-Metzner, (iii) Oldroyd-B, (iv) Giesekus entre otros (Bird et al. 1987, 2002). Las Ecuaciones constitutivas mencionadas tiene la siguiente estructura matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta(\Pi_D)^\nabla}{G_0} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

En la ecuación no lineal,  $\nabla$  es el operador convectivo superior de Maxwell el cual, cuantifica los efectos no lineales en el sistema debido a los cambios de la viscosidad por efecto de la rapidez de deformación en el sistema de flujo.

### 8.2 Mecanismos inerciales y elásticos

Por otra parte se pueden incorporar los efectos inerciales y elásticos mediante las componentes de la ecuación de movimiento y no utilizar la aproximación de lubricación:

$$\underbrace{\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\text{Inertia}} V_r = - \frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}}_{\text{Elasticidad}} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}$$



En este punto se pueden incorporar los efectos inerciales por medio de la derivada material de la ecuación de momento, la cual contiene los cambios temporales, espaciales en dirección de la velocidad. Por otra parte, los efectos elásticos se obtienen a través de la primera diferencia de esfuerzos normales.

### **8.3 Métodos matemáticos y computacionales**

Para resolver la ecuación de continuidad, momento y constitutiva, pueden ser empleados diferentes técnicas matemáticas como son: (i) Teoría de perturbaciones, (ii) Métodos numéricos basados en diferencias finitas y elemento finito. Otro punto importante, sería de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas por medio de un paquete comercial tipo COMSOL-MULTIPHYSICS el cual se basa en métodos de elemento finito y en la construcción de mallas las cuales describen el espacio en el que se resuelven las ecuaciones diferenciales.

### **8.4 Sistemas y Reometría**

Otro punto importante en este trabajo es el concerniente a reometría en un viscosímetro de platos concéntricos y por medio de pruebas de compresión calcular los parámetros materiales que describen el flujo y la reología de estos materiales. Aquí, se puede caracterizar diferentes tipos fluidos complejos como son: (i) Sistemas Micelares, (ii) Polímeros, (iii) Polímeros Asociativos, (iv) fibras naturales o sintéticas, (v) Cristales Líquidos entre otros.



# **APÉNDICES**

## APÉNDICE A

### Ecuaciones de movimiento y continuidad adimensionales

En este apéndice, se utilizan las variables adimensionales con el fin de simplificar las ecuaciones de continuidad, movimiento en sus componentes radial y axial respectivamente, además de las componentes del tensor de esfuerzos.

#### La componente radial de la ecuación de movimiento

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (A1)$$

Se eliminan los elementos innecesarios para nuestro modelado.

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (A2)$$

Sustituyendo las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\langle V \rangle^2}{a} V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + \left( \frac{H}{aH} \right) \langle V \rangle^2 V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) &= \left( \frac{a}{H^2} \right) \frac{\mu}{a} \langle V \rangle \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\mu}{a} \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rr}^*) \\ &+ \frac{\mu \langle V \rangle}{H^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} - \frac{\mu}{a} \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} \end{aligned} \quad (A3)$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\rho \langle V \rangle H}{\mu} \left( \frac{H}{a} \right) \left( V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) = - \left( \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \left( \frac{H}{a} \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rr}^*) + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} - \left( \frac{H}{a} \right) \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} \right) \quad (A4)$$

Simplificando las expresiones, se tiene lo siguiente:

$$\alpha \text{Re} \left( \alpha V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rr}^*) + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} - \alpha \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} \quad (A5)$$

Así que la ecuación de movimiento en la coordenada radial que vamos a ocupar es la siguiente:

$$\boxed{\alpha \text{Re} \left( V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} + \alpha \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rr}^*) - \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} \right)} \quad (A6)$$

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

**La componente axial de la ecuación de movimiento.**

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (A7)$$

Se eliminan los elementos innecesarios para nuestro modelado.

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (A8)$$

Sustituyendo variables adimensionales se tiene:

$$\rho \left( \frac{\langle V \rangle^2}{a} V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\langle V \rangle^2}{a^2} H V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) = -a\mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H^3} \right) \frac{\partial p}{\partial z^*} + \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rz}^*) - \mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\mu}{H} \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z^*} \quad (A9)$$

Reduciendo términos tenemos que:

$$\frac{\rho \langle V \rangle a}{\mu} \left( \frac{H}{a} \right)^3 \left( V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) = \left( -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \left( \frac{H}{a} \right)^2 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rz}^*) - \left( \frac{H}{a} \right)^2 \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} + \left( \frac{H}{a} \right) \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z^*} \right) \quad (A10)$$

Así que la ecuación de movimiento en la componente axial que vamos a ocupar es la siguiente:

$$\alpha^3 \text{Re} \left( V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\alpha^2}{r^*} \left( \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rz}^*) - \sigma_{\theta\theta}^* \right) + \alpha \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z^*} \quad (A11)$$

**Tensor de esfuerzos**

De la componente rr del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (A12)$$

Se sustituyen las variables adimensionales:

$$\mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \sigma_{rr}^* = 2\mu \frac{\partial (\langle V \rangle V_r^*)}{a \partial r^*} \quad (A13)$$

Se reducen términos y tenemos que:

$$\sigma_{rr}^* = 2 \left( \frac{H}{a} \right) \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \quad (A14)$$

La componente rr del tensor de esfuerzos queda:

$$\sigma_{rr}^* = 2\alpha \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \quad (A15)$$

De la componente rz y zr del tensor de esfuerzos, que por simetría se mantienen como una igualdad:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) \quad (A16)$$

Se sustituyen variables adimensionales y agrupando términos semejantes, se tiene lo siguiente:

$$\mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \sigma_{rz}^* = \frac{\mu \langle V \rangle}{H} \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \left( \frac{H}{a} \right)^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \quad (A17)$$

Se simplifican términos y nos queda:

$$\sigma_{rz}^* = \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \left( \frac{H}{a} \right)^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \quad (A18)$$

La componente rz y zr del tensor de esfuerzos queda:

$$\sigma_{rz}^* = \sigma_{zr}^* = \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \alpha^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \quad (A19)$$

De la componente  $\theta\theta$  del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \frac{V_r}{r} \quad (A20)$$

Se sustituyen variables adimensionales y se agrupan los términos semejantes, queda de la siguiente forma adimensional:

$$\mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \sigma_{\theta\theta}^* = 2 \left( \frac{\mu \langle V \rangle}{a} \right) \frac{V_r^*}{r^*} \quad (A21)$$

Se reducen términos:

$$\sigma_{\theta\theta}^* = 2 \left( \frac{H}{a} \right) \frac{V_r^*}{r^*} \quad (A22)$$

Y finalmente se tiene la componente  $\theta\theta$  del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{\theta\theta}^* = 2\alpha \frac{V_r^*}{r^*} \quad (A23)$$

De la componente zz del tensor de esfuerzos:

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (A24)$$

Se sustituyen variables adimensionales:

$$\mu \left( \frac{\langle V \rangle}{H} \right) \sigma_{zz}^* = 2\mu \left( \frac{\langle V \rangle}{a} \right) \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \quad (A25)$$

Se reducen agrupan términos y se reducen:

$$\sigma_{zz}^* = 2 \left( \frac{H}{a} \right) \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \quad (A26)$$

Finalmente la componente zz del tensor de esfuerzos:

$$\boxed{\sigma_{zz}^* = 2\alpha \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}} \quad (A27)$$

**Ecuación de continuidad coordenadas cilíndricas:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (A28)$$

Se eliminan los elementos innecesarios para el modelado:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (A29)$$

Sustituyendo variables adimensionales se tiene:

$$\frac{\langle V \rangle}{a} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \rho V_r^*) + \frac{\langle V \rangle}{a} \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho V_z^*) = 0 \quad (A30)$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de continuidad adimensional:

$$\boxed{\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \rho V_r^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho V_z^*) = 0} \quad (A31)$$

## APÉNDICE B

En este apéndice se desarrollan detalladamente todos los paso involucrados en la deducción de los perfiles de velocidad radial, velocidad axial, gradiente de presión, presión y fuerza normal en el plato superior, con deslizamiento en el palto superior, i.e., ( $V_s^* \neq 0$ ). Partiendo, de las ecuaciones de movimiento y continuidad adimensionales

### I. Cálculo de la componente radial del vector velocidad con deslizamiento

De balance de fuerzas, suponiendo que los efectos inerciales son despreciables

$$\frac{d\sigma_{rz}^*}{dz^*} = \frac{dp^*}{dr^*} \quad (B1)$$

Integrando con respecto a  $z$  se tiene:

$$\sigma_{rz}^* = \frac{dp^*}{dr^*} z^* + C_1 \quad (B2)$$

El esfuerzo cortante está relacionado con la rapidez de deformación a través de la Ec. de Newton de la sig. Manera:

$$\sigma_{rz}^* = \frac{dVr^*}{dz^*} \quad (B3)$$

Se sustituye el valor de esfuerzo cortante de la Ec. (B3) por el efecto de rapidez de deformación de tal forma que:

$$\frac{dVr^*}{dz^*} = \frac{dp^*}{dr^*} z^* + C_1 \quad (B4)$$

Se integra por segunda vez:

$$Vr^*(r^*, z^*) = \frac{dp^*}{dr^*} \frac{z^{*2}}{2} + C_1 z^* + C_2 \quad (B5)$$

La solución general (Ec. 5), satisface las siguientes condiciones de frontera:

$$Vr^* = 0; z^* = 0$$

$$Vr^* = V_s^*; z^* = 1 \quad (B6a,b)$$

Se sustituye (B6) en (B5)

$$0 = \frac{dp^*}{dr^*} \frac{(0)^2}{2} + C_1(0) + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \quad (B7)$$

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

Rivera Rivera Jesús Amado

La Ec. (B7) implica que la constante C2 es cero. Sustituyendo la Ec. (B7) en la Ec. (B5) y aplicando la condición de frontera (B6b), se tiene lo siguiente:

$$V_s^* = \frac{dp^*}{dr^*} \frac{1}{2} + C_1 \rightarrow C_1 = V_s^* - \frac{dp^*}{dr^*} \frac{1}{2} \quad (B8)$$

Se sustituyen los valores de las constantes en la Ec. (B5) y tenemos:

$$V_r^*(r^*, z^*) = V_s^* z^* + \frac{dp^*}{dr^*} \frac{z^{*2}}{2} - \frac{dp^*}{dr^*} \frac{1}{2} z^* \quad (B9)$$

Agrupando términos semejantes y reduciendo se tiene el perfil de velocidad radial adimensional:

$$\boxed{V_r^*(r^*, z^*) = V_s^* z^* + \frac{1}{2} \left( -\frac{dp^*}{dr^*} \right) z^* (1-z^*)} \quad (B10)$$

## II. Componente axial del perfil de velocidades

De la ecuación de continuidad se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (B11)$$

Se sustituye la Ec. (B10) en la Ec. (B11) tenemos que:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \left( V_s^* z^* + \frac{1}{2} \left( -\frac{dp^*}{dr^*} \right) z^* (1-z^*) \right) \right) + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (B12)$$

Integrando con respecto a la variable espacial z, la Ec. (B12) toma la forma siguiente :

$$V_z^*(r^*, z^*) = \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} (r^* V_s^*) \left( \frac{z^{*2}}{2} \right) - \frac{1}{2r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) \left( \frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right) + C_3 \quad (B13)$$

Simplificando la Ec. (B13)

$$V_z^*(z^*, r^*) = -\frac{1}{2} z^{*2} \frac{V_s^*}{r^*} - \frac{6}{12} \left( \frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right) \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) + C_3 \quad (B14)$$

Se tiene las siguientes condiciones a la frontera:

$$C.F.: \begin{cases} z^* = 0; & V_z^* = u(r^*) \\ z^* = 1; & V_z^* = 0 \end{cases} \quad (B15a,b)$$

Si se sustituyen las condiciones de frontera en la solución general Ec. (B14), obtenemos:

$$C3 = u(r^*)$$

$$\frac{1}{12} \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) = -u(r^*) + \frac{1}{2} \frac{Vs^*}{r^*} \quad (B16a,b)$$

Y se sustituyen las constantes Ec. (B16) en la ecuación general, se tiene lo siguiente:

$$Vz^*(r^*, z^*, Vs^*) = u(r^*) - \frac{1}{2} z^{*2} \frac{Vs^*}{r^*} + \frac{1}{2} z^{*2} (3-2z^*) \frac{Vs^*}{r^*} - z^{*2} (3-2z^*) u(r^*) \quad (B17)$$

Agrupando los términos semejantes y simplificando obtenemos el perfil de velocidades axial modificado por los efectos de deslizamiento.

$$\boxed{Vz^*(r^*, z^*, Vs^*) = z^{*2} (1-z^*) \frac{Vs^*}{r^*} + u(r^*) (1+2z^{*3}-3z^{*2})} \quad (B18)$$

### III. Gradiente de presión y perfil de presiones con mecanismos deslizantes

Para el cálculo del perfil de presiones, se parte de la Ec. (B16b) y suponiendo que la no homogeneidad en el sistema puede ser descrita por medio de la siguiente función tipo ley de potencia para el plato inferior:

$$u(r^*) = (m+2)r^{*m} \quad (B19)$$

De la Ec. (B16b) se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) = 6Vs^* - 12 r^* u(r^*) = 6Vs^* - 12 r^* (m+2)r^{*m} \quad (B20)$$

Separando variables e integrando con respecto a la coordenada radial adimensional  $r^*$

$$\frac{dp^*}{dr^*} = 6Vs^* r^* - \frac{12}{r^*} \int_0^{r^*} r (m+2)r^{*m} dr + K_1 \quad (B21)$$

Si suponemos que el gradiente de presión, se anula en  $r^* = 0$ , se tiene que la constante  $K_1 = 0$ , por lo que se tiene:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = 6Vs^* r^* - \frac{12}{r^*} (m+2) \int_0^{r^*} r^{m+1} dr = 6Vs^* r^* - 12r^{*m+1} \quad (B22)$$

Finalmente, el gradiente de presión se puede expresar como:

$$\boxed{\frac{dp^*}{dr^*}(r^*, Vs^*, m) = 6Vs^* - 12r^{*m+1}} \quad (B23)$$



**IV. Perfil de presiones con deslizamiento en la pared**

A partir del gradiente de presión (Ec. B23), se tiene lo siguiente:

$$p^*(r^*, Vs^*, m) = 6Vs^* r^* - \frac{12}{m+2} r^{*m+2} + K_2 \quad (B24)$$

La solución general Ec. (B24) satisface la siguiente condición de frontera

$$p^* = p_a^* ; r^* = 1 \quad (B25)$$

Se sustituye (B38) en (B37) y obtenemos el valor de la constante:

$$K_2 = p_a^* - 6Vs^* + \frac{12}{m+2} \quad (B26)$$

Se sustituye la constante  $K_2$  (Ec. B26) en la Ec. (B24), se tiene lo siguiente:

$$\boxed{p^*(r^*, Vs^*, m) - p_a^* = 6Vs^*(r^* - 1) + \frac{12}{m+2}(1 - r^{*m+2})} \quad (B27)$$

**V. Calculo de la fuerza adimensional con mecanismos deslizantes**

La expresión integral para la fuerza normal en el plato superior con deslizamiento, está dado por la siguiente expresión:

$$F_z = -\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (B28)$$

Se sustituye la siguiente la Ec. (B23) dentro de Ec. (B28) obtenemos:

$$F_z = -\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \int_0^1 (6Vs^* - 12r^{*m+1}) r^{*2} dr^* \quad (B29)$$

Integrando la Ec. (B29) y simplificando la expresión se tiene lo siguiente:

$$F_z = -\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left( 2Vs^* r^{*3} - \frac{12}{m+4} r^{*m+4} \right) \Big|_{r^*=1} \quad (B30)$$

Evaluando entre los límites superior e inferior respectivamente, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{F_z(a, m, H, \mu, V_s, \langle V \rangle) = 3\mu \frac{\pi a^3 \langle V \rangle}{h^2} \left[ \frac{4}{m+4} - \frac{2}{3} Vs^* \right]} \quad (B31)$$



# BIBLIOGRAFÍA

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR  
COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

---

Rivera Rivera Jesús Amado

- Avila, F. & Binding, D. M. (1981) Normal and reverse squeezing flows, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 11 111-126.
- Barnes, H.A., Hutton, J.F. & Walters, K. (1989) *An introduction to rheology*, Amsterdam: Elsevier.
- Bird, R.B., Armstrong, R.A. & Hassager, O. (1987) *Dynamics of Polymer Liquids. Vol.1 Fluid Mechanics*. John Willey, New York.
- Bird, R.B., Stewart, W.E. & Lighfoot, E.N. (2002) *Transport Phenomena*, 2a Edition, 1-876.
- Brindley, G., Davis, J.M. & Walters, K. (1976) Elastico-viscous squeeze films. Part I, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1 19-37.
- Chen, X.D. (1993) Slip and no-slip squeezing flow in a wedge, *Rheol. Acta* 32 477–482.
- Covey, G. H. & Stanmore, B.R. (1981) Use of the parallel-plate plastometer for the characterization of viscous fluids with a yield stress, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 8 249-260.
- Engmann, J., Servais, C. & Burbidge, A.S. (2005) Squeeze flow theory and applications to rheometry: A review, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 132 1-27.
- Grimm R.J. (1976) Squeezing flow of Newtonian liquids films. An analysis including fluid inertia, *Appl. Sci. Res.*, 32 149-166.
- Huang, W.B., Xu, Y., Lian, G.P. & Li, H.Y. (2002) Squeeze flow of a power-law fluid between two, rigid spheres with wall slip, *Appl. Math. Mech.*, 23 811-818.
- Laun, H.M., Rady, M. & Hassager, O. (1999) Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 81 1-15.
- Leider, P.J. & Bird, R.B (1974) Squeezing flow between parallel disks. I. Theoretical analysis. *I & EC Fundamentals*, 13 336-341.
- Leider, P.J. (1974) Squeezing flow between parallel disks. II. Experiments. *I & EC Fundamentals*, 13 342-346.
- Lian, G.P., Xu, Y., Huang, W.B. & Adams, M.J. (2001) On the squeeze flow of a power-law fluid between rigid spheres, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 100 151-164.



- McClelland, M.A. & Finlayson, B.A. (1983) Squeezing flow of elastic liquids. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 13 181-201.
- Phan-Thien, N. & Tanner, R.I. (1983) Viscoelastic squeeze-film flows-Maxwell fluids, *J. Fluid Mech.*, 129 265-281.
- Phan-Thien, N. & Tanner, R.I. (1984) Lubrication squeeze film theory for the Oldroyd-B fluid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 14 327-335.
- Phan-Thien, N., Tanner, R.I. & Boger, D.V. (1985) Squeeze film flow of ideal elastic liquids, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 18 227-254.
- Phan-Thien, N., Sugeng, F. & Tanner, R.I. (1987) The squeeze-film flow of viscoelastic fluid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 24 97-119.
- Phan-Thien, N. & Walsh, W. (1984) Squeeze-film flow of an Oldroyd-B fluid, *ZAMP*, 35 747-759.
- Phan-Thien, N. & Low, H.T. (1988) Squeeze-film flow of a viscoelastic fluid-a lubrication model, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 28 129-148.
- Phan-Thien, N. (2000) Squeezing flow of a viscoelastic solid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 95 343-362.
- Oliver, D.R., Ashton, R.C. & Wadelin, G.D. (1978) The load bearing capacity of a continuous-flow squeeze film of liquid, *Appl. Sci, Res.*, 34 25-47.
- Oliver, D.R. & Shahidullah, M. (1984) Reverse squeeze film in a continuous flow system, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 15, 331-339.
- Sherwood, J.D. & Durban, D. (1996a) Squeeze flow of a power-law viscoplastic solid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 62 35-54.
- Sherwood, J.D. & Durban, D. (1996b) Squeeze flow of a Hershel-Bulkley fluid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 77 115-121.

**“EFECTOS DE DESLIZAMIENTO EN UN SISTEMA DE FLUJO CONTINUO POR  
COMPRESIÓN EN UNA GEOMETRIA DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**

---

Rivera Rivera Jesús Amado

- Scott. J.R. (1931) Theory and applications of the parallel-plate plastometer, Trans. Inst. Rubber Ind., 7 169-186.
- Scott. J.R. (1935) Theory and applications of the parallel-plate plastometer, Part 2 Trans. Inst. Rubber Ind., 10 481-493.
- Sthefan, J. (1874), Versuche uber die schienbare Adhesion, Sitzungsbericht der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Class, Abteilung Wie, 69 713-735.
- Tornqvist, R., Sunderland, P. & Manson, J.A.E. (2000) Non-isothermal process rheology of thermoplastic composites for compression flow moulding. Composites Part A, 31 917–927.
- Waters N.D. & Gooden, D.K. (1983) The flow of a power-law in a continuous-flow squeeze film, Appl. Sci. Res., 40 169-184.
- Waters N.D. & Gooden, D.K. (1984) The flow of an Oldroyd B liquid in a continuous-flow squeeze film, J. Non-Newton. Fluid Mech., 14, 361-376.