UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

IDEALES DE ENTEROS EN UN CAMPO DE NÚMEROS NO-ESTÁNDAR

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALFREDO HUICOCHEA MOCTEZUMA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. TIMOTHY GENDRON THORNTON
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D.F.

2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El propósito de esta tesis es dar una descripción detallada de los resultados del artículo [3], visto desde una extensión elemental en particular, en este caso una ultrapotencia ${}^*\mathbb{Q}$ de los racionales, donde utilizaremos los axiomas de ZFC. Este artículo, como varias publicaciones de investigación no siempre cuenta con argumentos completos, lo cual en ocasiones hace difícil su lectura. Esperamos que la exposición encontrada en esta tesis pueda dar una introducción más accesible a las ideas ingeniosas de Cherlin.

Ahora resumiremos los resultados principales descritos en este trabajo. Sea ${}^*\mathbb{Q}$ una ultrapotencia de los racionales, así tenemos que $\mathrm{Th}({}^*\mathbb{Q}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Q})$. Sea $\mathcal{K}/{}^*\mathbb{Q}$ una extensión finita y $\mathcal{O}$ la cerradura entera de ${}^*\mathbb{Z}$ en $\mathcal{K}$, donde ${}^*\mathbb{Z}$ es un modelo no estándar de $\mathbb{Z}$ en ${}^*\mathbb{Q}$. El resultado principal de Cherlin es caracterizar los ideales de $\mathcal{O}$ y dar una noción de factorización prima de ideales adecuada en este contexto.

Como sabemos en una extensión algebraica finita de los racionales $\mathbb{Q}$, su anillo de enteros algebraicos es un dominio de Dedekind, lo cual no ocurre en nuestro anillo de enteros no estándar $\mathcal{O}$. Sin embargo, muchas de las propiedades de los dominios de Dedekind las recuperamos al utilizar ideales definibles. Una de las claves para usar este hecho es el Teorema de *Robinson*, que nos dice que $\mathbb{Z}$ y $\mathcal{O}$, el anillo de enteros algebraicos de una extensión finita $K/\mathbb{Q}$, son definibles en dicha extensión, generalizando este resultado a nuestro campo numérico no estándar $\mathcal{K}$, tendremos como consecuencia que la clase de extensiones finitas de ${}^*\mathbb{Q}$ coincide con las de $\mathbb{Q}$. Estos hechos se dan sin demostración en el artículo de Cherlin; en §3 daremos las demostraciones.

En §4 aplicamos el resultado de §3 para recuperar factorización primaria para ideales definibles; a su vez probamos que todo ideal primo definible es máximo, la cual es una de las propiedades que definen a un dominio de Dedekind. Mas específicamente, si $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$ es definible se demostrara que:

$$\mathfrak{a} = \prod_{\wp} \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{p})},$$

donde $\wp$ sera el conjunto de los ideales primos definibles y $s(\mathfrak{p}) : \wp \to {}^*\mathbb{N}$ es una función definible (en nuestro contexto las potencias pueden ser infinitas y a su vez nos daremos cuenta que la cantidad de divisores también puede ser infinita).

Para el análisis de los ideales no definibles utilizaremos ultrapotencias para considerar dichos ideales como puntos límite de los ideales definibles, es decir a cada ideal máximo $\mathfrak{m}$ le asociaremos un ultrafiltro $D(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Ult}(\mathcal{D}(\wp))$, donde $\mathrm{Ult}(\mathcal{D}(\wp))$ es el espacio de Stone sobre el conjunto de subconjuntos definibles de $\wp$, denotado por $\mathcal{D}(\wp)$. Así obtenemos una gavilla $^{\circ}\hat{\mathbb{N}}$ sobre el espacio de Stone $\mathrm{Ult}(\mathcal{D}(\wp))$, cuya fibra sobre $D(\mathfrak{m})$ es el conjunto de cortaduras de Dedekind de la ultrapotencia de $^{*}\mathbb{N}$ respecto a $D(\mathfrak{m})$.

Así podemos dar una factorización adecuada para cualquier ideal $\mathfrak{a} \subset O$:

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathcal{M}} \mathfrak{m}^{s_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m})},$$

donde $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ult}(\mathcal{D}(\wp))$ es el subespacio denso de ideales máximos y $s_{\mathfrak{a}} : \mathcal{M} \to {}^{\circ}\hat{\mathbb{N}}$ es una sección en la gavilla.

Capítulo 2

Preliminares

En la siguiente discusión hablaremos un poco de las nociones básicas que debemos tener en cuenta para leer este documento.

2.1. Teoría de Números Algebraicos

Como ya sabemos $\mathbb{Z}$ es un subanillo del anillo $\mathbb{Q}$, ahora tomamos una extensión algebraica finita K de $\mathbb{Q}$ para algún polinomio irreducible, por lo que $\mathbb{Z}$ es subanillo de K. Recordemos que $x \in K$ es un *entero algebraico* sobre $\mathbb{Z}$ si x es raíz de un polinomio irreducible y mónico P con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Si tomamos todos los enteros algebraicos en la extensión finita K, a este conjunto se le conoce como la *cerradura integral* de $\mathbb{Z}$ en K y se denota por $\mathcal{O}$.

Además recordemos que el anillo $\mathcal{O}$ es un dominio de Dedekind, es decir, cumple con ser Noetheriano, íntegramente cerrado y todo ideal primo de $\mathcal{O}$ es máximo. La propiedad importante de dichos dominios es el hecho de que para cada ideal de $\mathcal{O}$ este tiene una factorización única en ideales primos y además, cada ideal es a lo más 2-generado. Recordemos que gracias a esta propiedad podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.1 (chino del resto)**.** *Sea $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}_i^{m_i}$ un ideal y $p_i \in \mathfrak{p}_i^{m_i}$, entonces*

$$\text{existe } a \in \mathcal{O}, \text{ tal que } a \equiv p_i \mod \mathfrak{p}_i^{m_i}$$

.

Además tenemos que recordar que dado un ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}$, la norma del ideal $\mathfrak{a}$ esta dada por

$$N(\mathfrak{a}) = \mid \mathcal{O}/\mathfrak{a} \mid$$

Para más detalles consultar [9]

2.2. Teoría de Modelos

En esta sección daremos una pequeña discusión sobre la teoría de modelos involucrada en esta tesis, para más información consulte [7].

En la lógica de predicados, se usan lenguajes de primer orden para describir estructuras matemáticas en las que nos referimos sólo a elementos y no a subconjuntos.

Un *lenguaje* formal de primer orden $\mathcal{L} = \{f_\alpha; R_\beta; C_\gamma\}$ es una colección de simbolos que representan funciones, relaciones y constantes respectivamente. Una *$\mathcal{L}$-estructura* $\mathcal{M}$ es una colección de funciones, relaciones, constantes y un conjunto no vacío llamado universo, es decir, $\mathcal{M} = (M, f_\alpha^M, R_\beta^M, C_\gamma^M)$, donde $f_\alpha^M, R_\beta^M, C_\gamma^M$ son funciones, relaciones y constantes que corresponden a $f_\alpha, R_\beta, C_\gamma$ respectivamente. En general los superíndices M se omiten. Por ejemplo $Q = (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, <, 1, 0)$ es una estructura la cual contiene a los racionales como el universo, con las funciones $+, -, \cdot$, la relación $<$ y las constantes $0, 1$, que corresponden al lenguaje $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, <, 1, 0\}$ para formar enunciados de la forma $\forall a, b \exists x\ (ax = b)$ y $\forall a, b \exists c\ (a < c < b)$.

Un *$\mathcal{L}$-término* es un "polinomio lógico" que involucra variables, constantes y funciones. Por ejemplo $1 + (1 + (1 + 1))$ el cual es el término 4, y $(v_1 + v_2)(v_3 + 1)$. Una *$\mathcal{L}$-fórmula atómica* es un expresión que involucra sólo $\mathcal{L}$-términos y relaciones (incluyendo la relación igualdad), por ejemplo $v_1 < (v_1 + v_2)(v_3 + 1)$. El conjunto de *$\mathcal{L}$-fórmulas* es el conjunto más pequeño $\mathcal{W}$ que contiene a las fórmulas atómicas y es cerrado con respecto a los operadores lógicos $(\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall)$, por ejemplo si $\phi, \psi \in \mathcal{W}$, entonces $\neg\phi$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$ están en $\mathcal{W}$ y si $\phi \in \mathcal{W}$ entonces $\exists v_i\ \phi$ y $\forall v_i\ \phi$ están en $\mathcal{W}$.

Diremos que una variable v es *libre* en una fórmula ϕ si no está dentro del alcance de los cuantificadores $\exists v$ o $\forall v$, escribiremos $\phi(\bar{v})$, $\bar{v} = (v_1, ..., v_m)$ para indicar que ϕ tiene sus variables libres en $\{v_1, ..., v_m\}$. Así, si $\bar{b} \in M^m$, escribimos $M \models \phi(\bar{b})$ si $\phi(\bar{b})$ se cumple en M. Llamaremos a una fórmula, *$\mathcal{L}$-enunciado*, si ésta no tiene variables libres. Si una fórmula tiene variables libres diremos que esta es un *n-predicado*, donde n es el número de variables libres. Un aspecto importante es que el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es un conjunto numerable, si $\mathcal{L}$ es numerable. La *numeración de Gödel* es una función que asigna a cada símbolo y fórmula de un lenguaje formal un número natural único, denominado *número de Gödel* (GN) [12].

Una *$\mathcal{L}$-teoría* es un conjunto T de $\mathcal{L}$-enunciados. Un *modelo* de T es una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, tal que para cada $\mathcal{L}$-enunciado $\phi \in T$, $M \models \phi$; en este caso escribiremos $M \models T$. Una teoría es *consistente* si no produce contradicciones, de este modo podemos hablar que una teoría es *satisfactible* si tiene un modelo. Así el teorema de completud de Gödel nos dice que una teoría es consistente si y sólo si es satisfactible. Otra propiedad importante a considerar es cuándo una teoría T tiene *funciones de skolem*, es decir, si para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(v, \bar{w})$ existe una función $f \in \mathcal{L}$ tal que $T \models \forall \bar{w}((\exists v \phi(v, \bar{w})) \rightarrow \phi(f(\bar{w}), \bar{w}))$.

Una teoría es *completa* si para todo par de fórmulas $(\phi, \neg\phi)$ al menos una de ellas forma parte de la teoría. Así para una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathcal{M}$, su teoría completa $\mathrm{Th}(M)$ es el conjunto de todos los enunciados que se satisfacen en $\mathcal{M}$. Dos estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son *elementalmente equivalente* si sus teorías completas son iguales, denotado por $M \equiv N$.

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras con dominios M y N respectivamente. Un *$\mathcal{L}$-encaje* $\imath : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una función uno a uno $\imath : M \rightarrow N$ que preserva la interpretación de todos los símbolos de $\mathcal{L}$, es decir, $\forall f, R, C \in \mathcal{L}$, $\imath \circ f^M = f^N \circ \imath$, $\imath \circ R^M = R^N$, $\imath(C^M) = C^N$. Un $\mathcal{L}$-encaje biyectivo es llamado un *$\mathcal{L}$-isomorfismo*. Si $M \subseteq N$ y la función inclusión es un $\mathcal{L}$-encaje, entonces diremos que $\mathcal{M}$ es una *subestructura* de $\mathcal{N}$ o que $\mathcal{N}$ es una *extensión* de $\mathcal{M}$.

Si $\phi^M(\bar{v})$ es una $\mathcal{L}$-fórmula interpretada en M, y $\phi^N(\bar{v})$ su contraparte en N, y si

$$\forall \bar{b} \in M^m, M \models \phi^M(\bar{b}) \text{ si y sólo si } N \models \phi^N(\imath(\bar{b})),$$

decimos que $\imath$ es un *encaje elemental*. Si además, $M \subset N$, entonces decimos que $\mathcal{M}$ es una *subestructura elemental* de $\mathcal{N}$, denotado por $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Teorema 2.2 (Löwenheim-Skolem)**.** *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathcal{N}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $X \subseteq N$. Entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ tal que $X \subseteq M$, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ y $\mid \mathcal{M} \mid \leq \mid X \mid + \mid \mathcal{L} \mid$*

Hablemos un poco de definibilidad; diremos que $X \subseteq M^n$ es *definible* en M si existen una $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m)$ y $\bar{b} \in M^m$ tales que

$$X = \{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

Diremos que $\phi(\bar{v}, \bar{b})$ define a X con parámetros $\bar{b}$. Sea $A \subset M$, diremos que X es *definible con parámetros en A* si existe $\psi(\bar{v}, w_1, ..., w_l)$ y $\bar{b} \in A^l$ tal que $\psi(\bar{v}, \bar{b})$ define a X. Si $A = \emptyset$, entonces diremos que es definible sin parámetros, por ejemplo el conjunto de números primos es definible sin parámetros con la siguiente fórmula $p \in P \leftrightarrow (p \neq 1 \wedge (\forall q((1 < q < p) \to q \nmid p))$, donde $q \mid p \leftrightarrow \exists k(p = kq)$.

Ahora podemos hablar de un *ideal primo definible*, el cual será un ideal primo que cumple con ser un conjunto definible. Otro punto es recordar el concepto de *función definible*, la cual es considerada como un conjunto definible.

Ahora veamos el siguiente hecho

Teorema 2.3. *Sea una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ la cual admite funciones de skolem, podemos encontrar para $X \subset M$ una subestructura elemental mínima $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}$ que contenga a X, la cual es llamada cerradura de skolem de X en $\mathcal{M}$.*

En particular, si $\mathcal{X}$ es una substructura de $\mathcal{M}$ con funciones de skolem, entonces $\mathcal{X}$ es una substructura elemental de $\mathcal{M}$.

En el texto trabajaremos con cocientes de estructuras, por consiguiente trataremos un poco este tema en lo que sigue. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura y sea $E(\bar{x}, \bar{y})$ una relación de equivalencia definible en M^m, es decir

1. $\forall \bar{x}(E(\bar{x}, \bar{x}))$
2. $\forall \bar{x}, \bar{y}(E(\bar{x}, \bar{y}) \to E(\bar{y}, \bar{x}))$
3. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}(E(\bar{x}, \bar{y}) \wedge E(\bar{y}, \bar{z}) \to E(\bar{x}, \bar{z}))$

Tomemos el cociente de M^m/E el cual lo denotaremos por S_E. Sea

$$S = \{S_E : E \text{ una relación de equivalencia definible en } M^m \text{ para algún } m\}.$$

Con estos elementos podemos construir un nuevo lenguaje $\mathcal{L}^{\text{eq}} = \mathcal{L} \cup \{S_E, f_E\}_E$ donde tomaremos a cada S_E y f_E como 1-predicados. Así

$$\mathcal{M}^{eq} = (M, S_E, f_E, f_\alpha^M, R_\alpha^M, C_\alpha^M),$$

donde S_E es un universo auxilar llamado *suerte*, para cada relación de equivalencia E y $f_E : M^m \to S_E$, tal que $f_E(\bar{a}) = \bar{a}/E$ y así una nueva $\mathcal{L}^{\text{eq}}$-estructura $\mathcal{M}^{\text{eq}}$ que contiene a la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y a los cocientes S_E. Notemos que $\mathcal{L}^{\text{eq}}$ sólo depende de $\mathcal{L}$, ya que la relación de equivalencia definible E se determina sólo por una $\mathcal{L}$-fórmula. Así para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ la teoría completa de $\mathcal{M}^{\text{eq}}$ es $\text{Th}(\mathcal{M}^{\text{eq}})$, la cual contiene a $\text{Th}(\mathcal{M})$. Es costumbre utilizar como universo en $\mathcal{M}^{\text{eq}}$, $M^{\text{eq}} = M \sqcup \bigsqcup_E S_E$.

2.3. Ultraproductos

Esta sección está enfocada a una de las herramientas más importantes para la caracterización de los ideales en nuestro anillo de enteros algebraicos no estándar. Comenzaremos por recordar lo que es un *álgebra booleana*, es una estructura $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, \neg, 0, 1)$ donde B es un conjunto parcialmente ordenado cerrado respecto a las operaciones suma, producto y complemento respectivamente, dichas operaciones son conmutativas, asociativas y distributivas. Además cumple con los siguientes enunciados:

1. $(\forall x, y)[(x + y) \cdot y = y \wedge (x \cdot y) + y = y]$.

2. $(\forall x \exists y)(x + y = 1 \wedge x \cdot y = 0)$.

Tomemos un conjunto A y sea $P(A)$ su conjunto potencia, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de A. $P(A)$ es una álgebra booleana con las operaciones unión, intersección y complemento, así como la relación de orden parcial inducida por la contención tomando como $0 = \emptyset$ y $1 = P(A)$.

Un subconjunto $\mathcal{F}$ de un álgebra booleana $\mathcal{B}$, es un filtro sobre $\mathcal{B}$, si cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $0 \notin \mathcal{F}$.

2. $\forall x \in \mathcal{F}$ y $y \in B$, si $x \leq y$ entonces $y \in \mathcal{F}$.

3. El producto de dos elementos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

Una base filtro es un subconjunto $\mathfrak{B}$ de un álgebra booleana $\mathcal{B}$, con las siguientes propiedades:

1. $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ y $0 \notin \mathfrak{B}$.

2. $\forall x, y \exists z (z \leq xy)$.

Existen dos tipos de filtros los *principales* y los *no principales*, los principales son los filtros generados por un conjunto finito de elementos y los no principales que no son generados por un conjunto finito de elementos.

Daremos un ejemplo de un filtro no principal sobre $P(\mathbb{Z})$, sea

$$\mathcal{F}' = \{A \subseteq \mathbb{Z} : \mathbb{Z} - A \textit{ es finito}\}$$

supongamos que es principal, es decir, que es generado por un conjunto finito $C \subset P(\mathbb{Z})$. Como todo elemento de C tiene complemento finito, entonces la intersección de todos los elementos de C tiene también complemento finito. Si quitamos una cantidad finita de elementos a esa intersección, también tendrá complemento finito por lo que este nuevo conjunto X estará en $\mathcal{F}'$. Pero X no contiene a ningún elemento de C, lo cual es una contradicción.

Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X, si para todo subconjunto B de X, $B \in \mathcal{F}$ o $X - B \in \mathcal{F}$, es decir, es un filtro máximo. Cuando hablemos de un ultrafiltro, lo denotaremos por $\mathcal{U}$. Una observación importante es que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es principal si y sólo si $\mathcal{U}$ es generado por un elemento. Además, dado un filtro, el teorema del ultrafiltro nos dice que “para todo filtro sobre un álgebra booleana, existe un ultrafiltro que contiene a ese filtro”(usando el axioma de elección).

Sea I un conjunto de índices y $\mathcal{M}_i$ una $\mathcal{L}$-estructura para cada $i \in I$. Sea $\prod_{i\in I} M_i$ el producto cartesiano de los conjuntos M_i. Tomemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre el álgebra booleana $P(I)$. Ahora definamos la siguiente relación de equivalencia, sea $\hat{a}, \hat{b} \in \prod_{i\in I} M_i$

$$\hat{a} \sim_{\mathcal{U}} \hat{b} \Leftrightarrow \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Un *ultraproducto*, es el conjunto cociente con respecto $\sim_{\mathcal{U}}$ y se denota por

$$\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U}.$$

En particular, si M_i es igual para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U} = \prod M^I/\mathcal{U}$ y lo llamaremos *ultrapotencia*.

Para cada $\hat{a} \in \prod_{i\in I} M_i$, denotaremos a la clase de $\hat{a}$ como $[\hat{a}] = \{\hat{b} : \hat{a} \sim_{\mathcal{U}} \hat{b}\}$. Así diremos que $[\hat{a}] \in \prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U}$.

Teorema 2.4 (Łoš)**.** *Sea ϕ es una $\mathcal{L}$-fórmula, entonces* $\forall[\hat{a}] \in \prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U}$

$$\textstyle\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U} \models \phi([\hat{a}]) \Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \phi(a_i)\} \in \mathcal{U}.$$

Demostración. [4] □

Aplicando este teorema a solo un $\mathcal{L}$-enunciado tenemos el *principio de transferencia*, el cual nos dice:

$$\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U} \models \phi \Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \phi\} \in \mathcal{U}$$

Capítulo 3

Teorema de J. Robinson

Sea ${}^*\mathbb{Q}$ una ultrapotencia de $\mathbb{Q}$, es decir,

$$ {}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathcal{I}}/\mathcal{U}, $$

donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal en $\mathcal{I}$.

Tenemos que ${}^*\mathbb{Q}$ es campo ya que $\mathbb{Q}$ lo es, [4].

Lema 3.1. *Sea ${}^*\mathbb{Q}$ una ultrapotencia de $\mathbb{Q}$, entonces ${}^*\mathbb{Q}$ tiene característica cero, es decir, para todo ${}^*r \neq 0$ y ${}^*n$, tal que ${}^*n{}^*r = 0$, entonces ${}^*n = 0$*

Demostración. Sea ${}^*r \neq 0$ y ${}^*n$, tal que ${}^*n{}^*r = 0$, entonces $\{i \in \mathcal{I} | n_i r_i = 0\} \in \mathcal{U}$, ya que $\{i \in \mathcal{I} | r_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$, entonces $\{i \in \mathcal{I} | n_i r_i = 0\} \cap \{i \in \mathcal{I} | r_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathbb{Q}$ es de característica cero, $\{i \in \mathcal{I} | n_i r_i = 0\} \cap \{i \in \mathcal{I} | r_i \neq 0\} \subseteq \{i \in \mathcal{I} | n_i = 0\} \in \mathcal{U}$ y por lo tanto ${}^*n = 0$. □

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{K}$ una extensión algebraica de grado n de ${}^*\mathbb{Q}$, para un polinomio mínimo $P(x)$ de grado n. $\mathcal{K}$ es isomorfo al ultraproducto*

$$ \prod K_i/\mathcal{U}, $$

donde $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro asociado a la ultrapotencia ${}^*\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ y K_i es una extensión algebraica finita de grado n para toda $i \in \mathcal{I}$ asociada al polinomio $P(x)$.

Demostración. Por transferencia desde $\mathbb{Q}$, ${}^*\mathbb{Q}$ es de característica 0, así por el teorema del elemento primitivo tenemos, $\mathcal{K} =^* \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{K}$.

Sea $\bar{q} \in {}^*\mathbb{Q}^n$ el vector de coeficientes del polinomio mínimo $P(x)$ asociado a θ, $\bar{q} = ({}^*q_{n-1}, {}^*q_{n-2}, ..., {}^*q_0)$. Sea ${}^*q_k =^* \{q_{k,i}\}$, con $k = 0, ..., n-1$, así podemos asociarle la siguiente familia de vectores $((q_{n-1,i}, q_{n-2,i}, ..., q_{0,i})) \in \mathbb{Q}$, esto induce una familia de polinomios $\{P_i(X)\}$ (podemos suponer que son mínimos para toda i). Por tanto, para cada i inducimos una extensión algebraica de grado n $K_i/\mathbb{Q}$, así podemos construir el ultraproducto $\prod K_i/\mathcal{U}$, el cual es un campo (por teorema de Lòs). Ya que $K_i = \mathbb{Q}(\theta_i)$, con $P_i(\theta_i) = 0$, el elemento ${}^*\theta =^* \{\theta_i\}$ genera $\prod K_i/\mathcal{U}$ como una ${}^*\mathbb{Q}$-álgebra, así la función ${}^*\theta \to \theta$, induce el isomorfismo deseado. □

Notación 3.1. En algunas ocasiones, denotaremos $\alpha \in \mathcal{K}$ por $\alpha = [\alpha_i]$ para destacar que pertenece a un ultraproducto.

En este capítulo, probaremos que el teorema de definibilidad de J. Robinson se cumple en nuestro campo de números no estándar, el cual nos hará más fácil la definición de fórmulas en el futuro:

Teorema 3.1 (J. Robinson, [11]). *Sean K un campo numérico de grado n, O el anillo de los enteros algebraicos en K, y $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros racionales. Entonces O y $\mathbb{Z}$ son ambos definibles en K por fórmulas que sólo dependen de n.*

Notación 3.2. Sea A un conjunto definible, entonces existe ϕ_A una $\mathcal{L}-$fórmula, la cual define a A, en el transcurso de este texto, usaremos la notación $a \in A$ para $\phi_A(a)$

Aplicando el teorema de Łoš a la formula de Robinson $\phi_n(x)$, tenemos que la *cerradura integral de $^*\mathbb{Z}$ es definible en $\mathcal{K}$, es decir, que $\prod O_i/\mathcal{U}$ es definible en $\mathcal{K}$. Análogamente tenemos que $^*\mathbb{Z}$ es definible en $\mathcal{K}$.

Nos falta mostrar que *cerradura integral de $^*\mathbb{Z}$ en $\mathcal{K}$ coincide con la cerradura integral O de $^*\mathbb{Z}$.

Por el teorema 9.2 en pagina 65 de [8], que nos dice que si K es extension de grado n de $\mathbb{Q}$ y x pertenece a la cerradura integral de $\mathbb{Z}$ en K, entonces existe un polinomio mónico $P(x)$ de grado no mas que n con coeficientes en $\mathbb{Z}$ tal que $P(x) = 0$. Aplicando el principio de transferencia a esta afirmación, obtenemos que cada x en *cerradura integral de $^*\mathbb{Z}$ es raíz de un polinomio mónico de grado no mas que n con coeficientes en $^*\mathbb{Z}$. Se deduce que x pertenece a la cerradura integral O de $^*\mathbb{Z}$. Es decir

$$x \in O \Leftrightarrow (\exists z_0, ..., z_{n-1} \in {}^*\mathbb{Z})(z_0 + z_1 x + ... + z_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0)$$
$$\Leftrightarrow \{i \in \mathcal{I} | z_{i,0} + z_{i,1}x_i + ... + z_{i,n-1}x_i^{n-1} + x_i^n = 0\} \in \mathcal{U}$$
$$\Leftrightarrow \{i \in \mathcal{I} | x_i \in O_i\} \in \mathcal{U}$$
$$\Leftrightarrow x \in \prod O_i/\mathcal{U}.$$

Hemos probado el siguiente:

Corolario 3.1. *Sea $\mathcal{K}$ una extensión finita de $^*\mathbb{Q}$, y sea O la cerradura integral de $^*\mathbb{Z}$ en $\mathcal{K}$. Entonces O y $^*\mathbb{Z}$ son definibles sobre $\mathcal{K}$.*

Sea $\mathrm{Ex}^n_{\mathbb{Q}}$ la $\mathcal{L}$-teoría de extensiones de grado n de $\mathbb{Q}$, es decir, un enunciado pertenece a $\mathrm{Ex}^n_{\mathbb{Q}}$ si y sólo si es cierto para cada extensión $K/\mathbb{Q}$. Del mismo modo $\mathrm{Ex}^n_{\mathbb{Z}}$ denota la $\mathcal{L}$-teoría de extensiones enteras de grado n de $\mathbb{Z}$. Tenemos el siguiente:

Corolario 3.2. *Los modelos de $Ex^n_{\mathbb{Q}}$ son las extensiones de grado n de todos los campos racionales no estándar $^*\mathbb{Q}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ una extensión algebraica de grado n de $^*\mathbb{Q}$ y $\varphi \in \mathrm{Ex}^n_{\mathbb{Q}}$. Ya que para toda K extensión algebraica de grado n de $\mathbb{Q}$, $K \models \varphi$, y también tenemos que $\mathcal{K}$ es un ultraproducto de extensiones algebraicas de grado n de $\mathbb{Q}$. Por lo tanto por el teorema de Łoš tenemos que $\mathcal{K} \models \varphi$. □

Capítulo 4

Ideales Definibles

El anillo $\mathcal{O}$ de enteros de $\mathcal{K}$ es por definición la cerradura integral de ${}^*\mathbb{Z}$ en $\mathcal{K}$. Primero notemos que $\mathcal{O}$ y ${}^*\mathbb{Z}$ no son dominios de Dedekind. Por ejemplo, ${}^*\mathbb{Z}$ tiene ideales infinitamente generados i.e.

$$\bigcap_n {}^*(n)$$

donde ${}^*(n) := n{}^*\mathbb{Z}$, con n número natural estándar. Además, existen ideales primos que no son máximos. Por ejemplo, tomemos una ultrapotencia ${}^*\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$, sea s una *cortadura aditiva* de ${}^*\mathbb{N}$ y sea

$$\mathfrak{p} = \bigcap {}^*(p)^s = \bigcap_{n<s} {}^*(p)^n,$$

el cual es primo y no máximo (véase capítulo 7 donde se discute este ejemplo con detalle).

Proposición 4.1. *Todo ideal primo definible, es máximo.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo definible. Consideremos la enunciado:

$$\psi_{\mathfrak{p}} : (\forall\alpha,\beta \in \mathcal{O})(\alpha\beta \in \mathfrak{p} \to (\alpha \in \mathfrak{p} \vee \beta \in \mathfrak{p})) \to [(\forall x \in \mathcal{O})(x \notin \mathfrak{p}) \to (\exists a, b \in \mathcal{O})(\exists y \in \mathfrak{p})(1 = ax + by)],$$

Vemos que $\psi_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ex}^n_{\mathbb{Q}}$, la cual nos muestra que nuestro ideal primo definible $\mathfrak{p}$ es máximo.

□

Así tenemos por la proposición 4.1, observación 5.3 y el ejemplo anterior las contenciones estrictas:

$$\{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}\colon \mathfrak{p} \text{ primo definible}\} \subsetneq \{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}\colon \mathfrak{p} \text{ es máximo}\} \subsetneq \{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}\colon \mathfrak{p} \text{ es primo}\}$$

Como ${}^*\mathbb{Z}$ es una extensión elemental de $\mathbb{Z}$, el Corolario 3.2 nos dice que los ideales definibles de $\mathcal{O}$ se comportan como ideales en un anillo estándar de enteros algebraicos. En lo que sigue desarrollaremos este hecho.

Notación 4.1. $\wp := \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ es ideal primo definible en } \mathcal{O}\} \subset 2^{\mathcal{O}}$.

Proposición 4.2. *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal definible, entonces $\mathfrak{a}$ es 2-generado, es decir, $\mathfrak{a} = (\alpha,\beta)$, con $\alpha,\beta \in \mathcal{O}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal definible, por la definibilidad de $\mathfrak{a}$ podemos enunciar lo siguiente:

$$\phi_{\mathfrak{a}} : (\exists \alpha, \beta \in \mathfrak{a})(\forall \gamma \in \mathfrak{a})(\exists \gamma_1, \gamma_2 \in O)(\gamma = \gamma_1 \alpha + \gamma_2 \beta)$$

por lo que $\phi_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Ex}^n_{\mathbb{Q}}$, por lo que $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta)$. □

En consecuencia, el siguiente conjunto será de interés:

$$\tilde{\wp} = \{(\alpha, \beta) \subseteq O \times O : (\alpha, \beta) \text{ es un ideal primo definible}\}$$

Sea $\mathrm{Ex}^{n\,\mathrm{eq}}_{\mathbb{Q}}$ la $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$-teoría completa de extensiones finitas de grado n de $\mathbb{Q}$.

Proposición 4.3. *$\wp$ es definible en O utilizando la teoría $Ex^{n\,eq}_{\mathbb{Q}}$.*

Demostración. Primero, veamos a $\tilde{\wp}$ como un subconjunto $\emptyset$-definible de $O \times O$, como sigue:

$$\phi(x, y) : (\forall w, z)(\exists a, b)(wz = ax + by) \rightarrow (\exists c, d)(w = cx + dy \vee z = cx + dy).$$

A continuación, la siguiente relación de equivalencia $E_{GL_2}((a, b), (a', b')) : (\exists M \in \mathrm{GL}_2 \subset O^4)(a' = ax + by \wedge b' = ax' + by')$, donde GL_2 es grupo de matrices invertibles de 2×2 , la cual es $\emptyset$-definible, nos proporciona una suerte $S_{E_{GL_2}}$, así tenemos que $\wp = \pi_{E_{GL_2}}(\tilde{\wp})$, donde $\pi_{E_{GL_2}}$ es la función canónica del cociente. Por lo tanto $\wp$ es definible en O utilizando el lenguaje $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$.

□

Análogamente tenemos que $\mathfrak{I}$ el conjunto de todos los ideales definibles de O, también es definible en O utilizando el lenguaje $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$.

Proposición 4.4. *Existe una biyección definible entre O y ${}^*\mathbb{N}$, con parámetros en O.*

Demostración. Fijando un entero algebraico, podemos hallar una base entera de O, y así una función biyectiva de O a ${}^*\mathbb{Z}^n$, la cual seria O-definible.

Sea P_1 el conjunto de números primos en ${}^*\mathbb{N}$, el cual es definible sin parámetros. Ahora utilizaremos P_1 para formar los siguientes conjuntos definibles $p \in P_m \leftrightarrow (\exists q_1, ..., q_m \in P_1)(p = q_1...q_m)$, es decir, P_m es el conjunto de números que son producto de m números primos, con $m \geq 2$. Observemos que los conjuntos P_m son disjuntos entre sí y ${}^*\mathbb{N} = \cup_{m \in {}^*\mathbb{N}} P_m$. Así podemos hallar la siguiente función biyectiva definible de ${}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$ a ${}^*\mathbb{N}$

$$(x, y, z) \in^* \mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N} \leftrightarrow (z \in P_x \wedge ((\exists! a_1, ..., a_{y-1} \in P_x)(a_1 < a_2 < ... < a_{y-1} < z)).$$

Sea

$$(x, y) \in {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{Z} \leftrightarrow (x = 2y \vee x = -2y - 1),$$

una función definible de ${}^*\mathbb{Z}$ a ${}^*\mathbb{N}$. Por lo tanto tenemos lo deseado. □

Nota 4.1. Apartir de este momento utilizaremos el lenguaje $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$, aunque sólo para poder cuantificar sobre los ideales en $\wp$, y así poder traducir teoremas del caso estándar a nuestro contexto, es decir, al caso no estándar.

En el teorema siguiente, utilizaremos la siguiente notación:

$$\prod \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})} = \bigcap \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})},$$

la cual, como sabemos, es la definición alternativa del producto de ideales en la teoría de números.

Teorema 4.1. *Sea $\mathfrak{a}$ es un ideal definible en O, entonces*

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})},$$

donde $\mathfrak{p}$ varia sobre un conjunto definible de primos definibles y $s : \mathfrak{I} \times \wp \to {}^*\mathbb{N}$ es una función definible e $\mathfrak{I}$ es el conjunto de todos los ideales definibles de O. Además para todo $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}$ el $\sup s(\mathfrak{a}, .)$ *existe.*

Demostración. Consideremos el siguiente teorema en $\mathrm{Ex}_{\mathbb{Q}}^{n\,\mathrm{eq}}$ que garantiza la existencia de $\mathfrak{p}^{*n}$:

$\forall \mathfrak{p} = (\alpha, \beta) \in \wp$ y ${}^*n \in^* \mathbb{N}$, existe $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}$, tal que

1. $\forall \mathfrak{p}' \in \wp$, si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}' \to \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ (que dice que sólo hay un primo que contiene $\mathfrak{b}$)
2. $\forall^* m \leq {}^*n, \alpha^{{}^*m}\beta^{{}^*n-{}^*m} \in \mathfrak{b}$ (que dice que $\mathfrak{b}$ contiene los generadores de la potencia $\mathfrak{p}^{*n}$)
3. $\forall^* n' < {}^*n, \exists^* m' \leq {}^*n$ tal que $\alpha^{{}^*m'}\beta^{{}^*n'-{}^*m'} \notin \mathfrak{b}$ (que dice que $\mathfrak{b}$ no es igual otra potencia más pequeña.)

Por lo que $a \in \mathfrak{p}^{*n} \leftrightarrow \exists \mathfrak{b} \in \mathfrak{I}$ cumpliendo las propiedades $1, 2, 3$, tal que $a \in \mathfrak{b}$. Lo cual nos define a $\mathfrak{p}^{*n}$

Ahora podemos extender la función potencia $\wp \times \mathbb{N} \to \mathfrak{I}$, $(\mathfrak{p}, m) \mapsto \mathfrak{p}^m$, a $\wp \times {}^*\mathbb{N} \to \mathfrak{I}$. Por tanto, podemos definir $s : \mathfrak{I} \times \wp \to {}^*\mathbb{N}$ como

$$[(s(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) = {}^*m) \leftrightarrow ({}^*m \in {}^*\mathbb{N} \wedge {}^*m \neq 0) \wedge (\forall^* m' \in {}^*\mathbb{N})({}^*m' \leq {}^*m)(\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^{{}^*m'}) \wedge (\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}^{{}^*m+1})] \vee [s(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) = 0 \leftrightarrow \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}].$$

Luego la factorización primaria, es decir, el hecho de que $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}$ es consecuencia del siguiente enunciado en el lenguaje $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$:

$$(\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{I})[(\forall \mathfrak{p} \in \wp)(\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}) \wedge s(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) \neq 0] \wedge [(\forall x \in O)(\forall \mathfrak{p} \in \wp)(x \in \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})} \wedge s(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) \neq 0) \to (x \in \mathfrak{a})]$$

Por otro lado la expresión $\prod \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{p})}$, donde s es definible nos da un ideal definible.

Ya que la existencia del $\sup s(\mathfrak{a}, .)$ es un $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$-enunciado para cada ideal definible, entonces tenemos lo deseado.

□

Ahora podemos enunciar el teorema chino de residuo para ideales definibles.

Teorema 4.2 (chino definible del residuo)**.** *Sea $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}$ un ideal definible, con s definible y $f : \wp \to O$ una función definible, entonces*

$$\exists a \in O, \textit{ tal que } a \equiv f(\mathfrak{p}) \mod \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}$$

.

Demostración. Gracias al Teorema 4.1 podemos cuantificar elementos en $\mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}$ ya que es un ideal definible.

Procederemos a construir el enunciado del teorema chino del residuo para cualquier ideal definible y función definible $f : \wp \to \mathcal{O}$ $(f(\mathfrak{p}) = b \Leftrightarrow \varphi_f(\mathfrak{p}, b, \bar{c}))$, ya que $\mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}$ es definible:

$$(\exists a \in \mathcal{O})(\forall \mathfrak{p} \in \wp \exists b \in \mathcal{O})(\varphi_f(\mathfrak{p}, b, \bar{c}) \wedge a - b \in \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})})$$

Por lo tanto el enunciado anterior nos proporciona lo deseado, es decir

$$\exists a \in \mathcal{O}, \text{ tal que } a \equiv f(\mathfrak{p}) \mod \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{a},\mathfrak{p})}$$

$\square$

Capítulo 5

Ideales Máximos y Ultrafiltros

Comenzaremos con el estudio de los ideales de O clasificando todos los ideales máximos. Esto involucrará al álgebra booleana de todos los subconjuntos $O-$definibles de $\wp$ (esto es porque podemos ver a $\wp \leftrightarrow X \subseteq {}^*\mathbb{N}$, con X O-definible), los cuales los denotaremos por $\mathrm{Def}(\wp)$.

$$\mathrm{Def}(\wp) = \{S \subseteq \wp : S \text{ es } O\text{−definible}\}.$$

$\mathrm{Def}(\wp)$ tiene un orden parcial con respecto a la inclusión.

Un ejemplo de un conjunto definible S lo tenemos cuando tomamos un ideal definible $\mathfrak{a} = (a, b)$ y sea:

$$S = \{\mathfrak{p} \in \wp : \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}\} \in \mathrm{Def}(\wp)\}.$$

Definición 5.1. Sea $S \in \mathrm{Def}(\wp)$, diremos que S es *acotado* si y sólo si existe

$$f : [0, {}^*n] \to S \text{ definible y sobre.}$$

Lema 5.1. *Sea $\mathcal{K} = \prod K_i/\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro asociado a la ultrapotencia ${}^*\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ y K_i es una extensión algebraica finita de grado n para toda $i \in \mathcal{I}$. S es acotado si y sólo si S es hiperfinito, es decir, $S = \prod S_i/\mathcal{U}$, donde $S_i \subset \wp_i$ es finito para todo i.*

Demostración. Ya que $\wp$ es O-definible en ${}^*\mathbb{N}$, existe ϕ, la cual define a $\wp$ en ${}^*\mathbb{N}$. Así, por el teorema de Łoš, podemos definir $\wp_i$ y S_i, para cada i. Por lo tanto $\mathfrak{p} = (\alpha,\beta) \in S$ si y sólo si $X = \{i : (\alpha_i,\beta_i) \in S_i\} \in \mathcal{U}$. Como S es acotado, existe una función $f : [0, {}^*n] \to S$ definible y sobre, por lo tanto por el teorema de Łoš, f es definible si y sólo si $Y = \{i : f_i : [0, n_i] \to S_i$ es definible y sobre$\} \in \mathcal{U}$. Lo cual nos lleva a que S_i es finito para cada $i \in Y \in \mathcal{U}$. Por lo tanto S es hiperfinito.

Inversamente, utilizando el hecho de que podemos ver a $\wp_i$ como un subconjunto definible de $\mathbb{N}_i = \mathbb{N}$ para cada i, y ya que S_i es finito para cada i, podemos formar una función $f_i = [0, n_i] \to S_i$ definible y sobre (en efecto podemos definirla con el orden de $\mathbb{N}$). Así tenemos que $f = \prod f_i/\mathcal{U} : \prod[0, n_i]/\mathcal{U} \to \prod S_i/\mathcal{U}$ es definible y sobre. Por lo tanto S es acotado. □

Observemos que esta definición de ser acotado es un poco más restrictiva que la noción que tenemos en el caso estándar, ya que si tomamos:

$$I = [0, {}^*n + m), \text{ donde } {}^*n \in {}^*\mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N},$$

este conjunto no es definible, ya que esto implicaría que $\mathbb{N}$ seria definible en ${}^*\mathbb{N}$. Además, vemos que tiene cotas superiores en ${}^*\mathbb{N}$, pero no puede ser acotado en el sentido que dimos en la definición anterior. Ya que si existiera dicha función definible y sobre $g : [0, {}^*n'] \to I$, tendríamos que I es definible.

Antes de seguir con nuestra discusión, daremos una definición para la norma absoluta de un ideal definible. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal definible, así tenemos que $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta)$, entonces aplicando la proposición 3.1:

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = {}^*\{\mathfrak{N}((\alpha_i, \beta_i))\},$$

donde $\mathfrak{N}((\alpha_i, \beta_i))$ es la norma absoluta de un ideal en el caso estándar.

Notemos que la norma clásica $\mathfrak{n}_K$ de una extensión finita $K/\mathbb{Q}$ de grado n es definible para un ideal definible $\mathfrak{a}$, de hecho

> $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = M \Leftrightarrow$ existen $M_1, ..., M_n \in \mathbb{N}$ y $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ una base entera de $\mathcal{O}$, tal que $M_1...M_n = M$ y $\{M_1\gamma_1, ..., M_n\gamma_n\}$ es una base para $\mathfrak{a}$.

Es decir, $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = M \Leftrightarrow [(\exists M_1, ..., M_n \in \mathbb{N})(M_1 \neq 1 \vee ... \vee M_n \neq 1) \wedge [(\exists \gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathcal{O})(\forall x \in \mathcal{O} \exists y_1, ..., y_n \in \mathbb{Z})(x = y_1\gamma_1 + ... + y_n\gamma_n)](M_1...M_n = M \wedge (\forall a \in \mathfrak{a})(\exists w_1, ..., w_n \in \mathbb{Z})(a = w_1 M_1 \gamma_1 + ... + w_n M_n \gamma_n))]$

La norma en $\mathcal{K}$ siendo un ultraproducto de normas definibles, es definible.

Notación 5.1. $S_{a,b} = \{\mathfrak{p} \in \wp : \mathfrak{p} \mid (a, b)\}$ y si el ideal (a, b) es principal entonces lo denotaremos como: $S_a = \{\mathfrak{p} \in \wp : \mathfrak{p} \mid (a)\}$.

Proposición 5.1. *Sea* $S \in \mathrm{Def}(\wp)$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. S *es acotado.*
2. $\{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in S\} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ *es acotado en* ${}^*\mathbb{N}$
3. $S = S_{a,b}$ *donde* (a, b) *es un ideal no cero de* $\mathcal{O}$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sea $f : [0, {}^*n] \to S$ definible y sobre, entonces $\mathfrak{N} \circ f : [0, {}^*n] \to \mathfrak{N}(S)$, es definible y sobre.

$2 \Rightarrow 3$. Análogamente al lema 5.1, $\mathfrak{N}(S)$ es hiperfinito, entonces tenemos que existe ${}^*N \in {}^*\mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{N}(S) \leq {}^*N$. Ya que $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{a}$ es un teorema en el lenguaje $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$ (ver [9]), se sigue que ${}^*N!$ es divisible para cada $\mathfrak{p} \in S$, así $\bigcap_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p} \neq \emptyset$. Así tenemos que $\bigcap_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ es un ideal definible no cero (véase Teorema 4.1), entonces $\exists \alpha, \beta$ tal que $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta)$ y

$$S = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \mid (\alpha, \beta)\}.$$

$3 \Rightarrow 1$. Podemos ver que $\mathfrak{p} = (\alpha, \beta) \in S_{a,b}$ si y sólo si $X = \{i : (\alpha_i, \beta_i) \mid (a_i, b_i)\} \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $S_i = \{\mathfrak{p}_i = (\alpha_i, \beta_i) : (\alpha_i, \beta_i) \mid (a_i, b_i)\}$ es finito y así $S = \prod S_i/\mathcal{U}$ es hiperfinito, y por tanto acotado.

□

Nota 5.1. Sea $S \subset \wp$ acotado y $g : \wp \to {}^*\mathbb{N}$ definible, entonces $g(S)$ tiene supremo. En efecto, ya que existe $f : [0, {}^*n] \to S$ sobre, $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(g)$, por lo tanto basta probar que $f : [0, {}^*n] \to {}^*\mathbb{N}$ tiene supremo.

Un ejemplo de un conjunto definible que no es acotado, es el siguiente

$$\mathfrak{p} \in S \leftrightarrow (\exists p \in {}^*\mathbb{N})[(\forall a \in {}^*\mathbb{N})(a \mid p \to a = 1 \vee a = p)] \wedge (\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p),$$

(es decir, S consiste en todos los ideales primos definibles tal que su norma absoluta es un número primo en ${}^*\mathbb{N}$). Notemos que S es un subconjunto propio de $\wp$ puesto que la norma absoluta de un ideal primo en general, es p^m [9]. En este ejemplo vemos que no puede existir una función $f : [0, {}^*n] \to S$ definible y sobre, ya que si dicha función existiera, tendríamos una función definible y sobre $g : [0, {}^*n] \to \{{}^*p \in {}^*\mathbb{N} : {}^*p \text{ es primo}\}$, lo cual es imposible debido al inciso 2 de la proposición anterior. Por lo tanto S no es acotado.

Para comenzar con la clasificación de los ideales máximos de $\mathcal{O}$, probaremos los siguientes hechos:

Proposición 5.2. *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal propio de $\mathcal{O}$, entonces el conjunto: $\mathfrak{B}_\mathfrak{a} = \{S_a : a \in \mathfrak{a}\}$ es subbase filtro en* $\mathrm{Def}(\wp)$.

Demostración. Veamos que $\mathfrak{B}_\mathfrak{a}$ tiene la propiedad de la intersección finita, es decir, $\bigcap_{i=1}^k S_{a_i} \neq \emptyset$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $S_{a_i} \in \mathfrak{B}_\mathfrak{a}$. Si suponemos lo contrario, tendríamos que $a_1, ..., a_k$ son primos relativos. Por lo que $1 \in \mathfrak{a}$, entonces tendremos que $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$, lo cual es una contradicción. Así tomando el conjunto $\mathfrak{B}'_\mathfrak{a}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{B}_\mathfrak{a}$, formamos una base de filtro.

□

Proposición 5.3. *Si D es un filtro en* $\mathrm{Def}(\wp)$*, es decir que $D \subseteq \mathrm{Def}(\wp) \subseteq 2^\wp$, sea*

$$\mathfrak{m}(D) = \{a \in \mathcal{O} : S_a \in D\} \subset \mathcal{O}.$$

Entonces $\mathfrak{m}(D)$ es un ideal de $\mathcal{O}$.

Demostración. Sea $a, b \in \mathfrak{m}(D)$, demostraremos que $a - b \in \mathfrak{m}(D)$. Como $a, b \in \mathfrak{m}(D)$ entonces $S_a, S_b \in D$ tal que

$$S_a = \{\mathfrak{p} \in \wp : \mathfrak{p} \mid (a)\} \text{ y } S_b = \{\mathfrak{p} \in \wp : \mathfrak{p} \mid (b)\}$$

Ya que $S_a \cap S_b \subseteq S_{a-b}$, como D es un filtro, entonces $S_{a-b} \in D$, por lo tanto $a - b \in \mathfrak{m}(D)$.

Sea $a \in \mathcal{O}$ y $b \in \mathfrak{m}(D)$, probaremos que $ab \in \mathfrak{m}(D)$. Como $b \in \mathfrak{m}(D)$, tenemos que $S_b \in D$. Sea $\mathfrak{p} \in S_b$, como $\mathfrak{p}$ divide a (b), tenemos que $b \in \mathfrak{p}$ y por tanto que $ab \in \mathfrak{p}$. Entonces $(ab) \subseteq \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p}$ divide a (ab) lo cual nos lleva a que $S_b \subseteq S_{ab}$, como D es filtro, obtenemos lo deseado. □

Definición 5.2.

1. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathcal{O}$ sea $D(\mathfrak{a})$ el filtro en $\mathrm{Def}(\wp)$ generado por el conjunto: $\{S_a : a \in \mathfrak{a}\}$
2. Si D es un filtro en $\mathrm{Def}(\wp)$ sea $\mathfrak{m}(D) = \{a \in \mathcal{O} : S_a \in D\} \subset \mathcal{O}$.

Observación 5.1. Si $\mathfrak{a} \neq 0$ entonces $D(\mathfrak{a})$ contiene un conjunto acotado. Por lo que el filtro se llamará "filtro acotado". En efecto, como existe $a \in \mathfrak{a}$ tal que $a \neq 0$ entonces $S_a \in D(\mathfrak{a})$ donde S_a es acotado.

Definición 5.3. Si D es un filtro en $\mathrm{Def}(\wp)$, se le llamará *filtro acotado* si $\exists S \in D$ acotado. Si además D es un ultrafiltro, entonces se le llamará *ultrafiltro acotado*.

Observación 5.2. Si $a, b \in \mathfrak{a}$, entonces $S_{a,b} \in D(\mathfrak{a})$, en efecto como $S_a, S_b \in D(\mathfrak{a})$, entonces $S_a \cap S_b \subseteq S_{a,b} \in D(\mathfrak{a})$.

Teorema 5.1.

I. *Si* $\mathfrak{p}$ *es un ideal primo no cero de* O *entonces* $D(\mathfrak{p})$ *es un ultrafiltro acotado en* $\mathrm{Def}(\wp)$.

II. *Si* D *es un ultrafiltro acotado en* $\mathrm{Def}(\wp)$ *entonces* $\mathfrak{m}(D)$ *es un ideal máximo de* O.

III. *La correspondencia* $D \leftrightarrow \mathfrak{m}(D)$ *es 1-1 entre los ultrafiltros acotados en* $\mathrm{Def}(\wp)$ *y los ideales máximos de* O.

IV. *Si* $\mathfrak{p}$ *es un ideal primo no cero de* O *entonces* $\mathfrak{m}(D(\mathfrak{p}))$ *es el unico ideal máximo que contiene a* $\mathfrak{p}$.

Demostración. Notemos primero que si $D(\mathfrak{a})$ es sólo la cerradura respecto a la operación de contención ($\supseteq$) del conjunto $\{S_{a,b} : a, b \in \mathfrak{a}\}$, ya que si $a, b, a', b' \in \mathfrak{a}$ son arbitrarios entonces para adecuados c, d tenemos que el ideal O-definible (a, b, a', b') es igual a (c, d), así que $S_{a,b} \cap S_{a',b'} = S_{c,d}$.

I. Supongamos que $\mathfrak{p}$ es primo. Para ver que $D(\mathfrak{p})$ es un ultrafiltro es suficiente considerar una partición (X, Y) de algun conjunto acotado $S \in D(\mathfrak{p})$; debemos entonces mostrar que X o Y está en $D(\mathfrak{p})$. Podemos asumir por la proposición 5.1 que $S = S_{a,b}$ con $a, b \in \mathfrak{p}$, y escribimos a $(a, b) = \prod_S \mathfrak{q}^{s(\mathfrak{q})}$.

   Sea $\mathfrak{a} = \prod_X \mathfrak{q}^{s(\mathfrak{q})}$ y $\mathfrak{b} = \prod_Y \mathfrak{q}^{s(\mathfrak{q})}$. Entonces $\mathfrak{p}$ contiene $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a, b)$, por lo tanto $\mathfrak{p}$ contiene a $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ y no a ambos ya que son primos relativos. Si por ejemplo $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} = (c, d)$ entonces $X = S_{c,d} \in D(\mathfrak{p})$.

II. Si D es algún filtro en $\mathrm{Def}(\wp)$, entonces $\mathfrak{m}(D)$ es un ideal por la proposición 5.3, como $S_{a+b} \supseteq S_a \cap S_b$ y $S_{ac} \supseteq S_a$. Supongamos entonces que D es un ultrafiltro acotado, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(D)$, y $a \notin \mathfrak{m}(D)$. Sea $S = S_a$, entonces $S \notin D$ (ya que si $S \in D$, entonces $a \in \mathfrak{m}(D)$), así S es disjunto de algun conjunto acotado $T \in D$.

   Como T es definible, la función característica $s_T : \wp \to \{0, 1\}$ es definible ya que $s_T(\mathfrak{p}) = a \leftrightarrow (a = 1 \wedge \mathfrak{p} \in T) \vee (a = 0 \wedge \mathfrak{p} \notin T)$, y por teorema 4.1, $\prod \mathfrak{p}^{s_T(\mathfrak{p})}$ también lo es. Ahora escojamos b, c los generadores para $\prod \mathfrak{p}^{s_T(\mathfrak{p})}$, entonces $b, c \in \mathfrak{m}(D)$ y $(a, b, c) = O$ (ya que (a, b, c) no tiene divisores primos definibles), y esto prueba que $\mathfrak{m}(D)$ es máximo.

III. Mostraremos que las funciones $D \to \mathfrak{m}(D)$ y $\mathfrak{m}(D) \to D(\mathfrak{m})$ son inversas una del otra.
   i) Fijemos un ultrafiltro D. Claramente $D \subseteq D(\mathfrak{m}(D))$ y como D es máximo, entonces $D = D(\mathfrak{m}(D))$.
   ii) Fijemos ahora un ideal máximo $\mathfrak{m}$. Claramente $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}(D(\mathfrak{m}))$ y como $\mathfrak{m}$ es máximo, entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(D(\mathfrak{m}))$.

IV. En primer lugar $\mathfrak{m}(D(\mathfrak{p}))$ es un ideal conteniendo $\mathfrak{p}$. Si nosotros consideramos algun ideal $\mathfrak{a}$ conteniendo $\mathfrak{p}$, entonces $D(\mathfrak{p}) \subseteq D(\mathfrak{a})$ y ya que $D(\mathfrak{p})$ es máximo, $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{p})$. Por lo tanto $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}(D(\mathfrak{a})) = \mathfrak{m}(D(\mathfrak{p}))$ y así $\mathfrak{m}(D(\mathfrak{p}))$ es el único ideal máximo conteniendo $\mathfrak{p}$.

□

Observación 5.3. En particular si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo definible, el ultrafiltro $D(\mathfrak{p})$ es principal ya que contendrá a $S_{a,b} = \{\mathfrak{p}\}$, donde $\mathfrak{p} = (a, b)$. Ya que tenemos ultrafiltros no principales en nuestra construcción, entonces tendremos ideales máximos que no son definibles.

La anterior proposición suministra una adecuada descripción del espacio de ideales máximos, y como asociar a un ideal primo, un único ideal máximo que lo contenga. Ahora procederemos a la clasificación de los ideales primos. Llamaremos a un ideal $\mathfrak{a}$ un $\mathfrak{m}$-ideal, si tiene la propiedad de estar contenido en un único ideal máximo $\mathfrak{m}$. La clasificación de tales ideales depende de la construcción de una ultrapotencia definible.

Capítulo 6

Ultrapotencias Definibles

Sea A una estructura con un subconjunto definible $P \subseteq A$, y consideremos a D un ultrafiltro en:

$$\mathrm{Def}(P) = \{X \subseteq P : X \text{ es } A\text{-definible}\} \subset 2^P$$

Lo cual es un álgebra booleana. Ahora sea:

$$\mathrm{Def}(A^P) = \{f : P \to A \mid f \text{ es definible}\}$$

Definición 6.1. Sea $\mathrm{Def}(A^P)/D$ la ultrapotencia definible inducida por la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff \{i : f(i) = g(i)\} \in D$$

Notación 6.1. Sea

$$^\circ A_D = {^\circ A} = \mathrm{Def}(A^P)/D$$

y también sea

$$^\circ f = [f : P \to A]$$

con f definible, donde $[\cdot]$ es la clase de f en $^\circ A$.

Nota 6.1. A cada $a \in A$ le asociaremos $c_a : P \to a$, lo cual induce el encaje diagonal

$$\triangle : A \to {^\circ A}$$

Proposición 6.1. *Si A admite funciones de skolem definibles, entonces $\triangle : A \to {^\circ A}$ es un encaje elemental, es decir $A \prec {^\circ A}$.*

Demostración. Ya que A substructura de $^\circ A$, y A admite funciones de skolem definibles, entonces, A es cerrado respecto a funciones de skolem definibles y por lo tanto es una substructura elemental de $^\circ A$ [1]. □

Proposición 6.2. *D es principal $\Leftrightarrow$ $\triangle$ es un isomorfismo.*

Demostración. [$\Rightarrow$]. Si D es principal, tenemos que existe $S = \{a\} \in D$. Por lo que tendremos que $f \sim c_{f(a)}$, es decir que sólo nos interesara la imagen de la función en el elemento a. Por tanto $\triangle$ es un isomorfismo.

[$\Leftarrow$]. Si $\triangle$ es un isomorfismo, tenemos que la función identidad $id : P \to P$ es equivalente a una función constante c_a, con $a \in P$, pero como el conjunto en donde pueden ser iguales es $\{a\}$ ya que la función *id* asigna imagenes distintas a cada $p \in P$, entonces tenemos que $\{a\} \in D$ y como D es ultrafiltro, tendremos D debe de constar de todos los conjuntos que contienen a a (ya que la intersección de $\{a\}$ con cualquier conjunto de D debe ser no vacía). Así tenemos que D es principal.

□

Supongamos que $\triangle : A \to {}^\circ A$ es un encaje elemental. Denotamos ${}^\circ P$ =Def$(P^P)/D$, entonces cada función definible $f : P \to A$ induce una función

$$ {}^\circ F : {}^\circ P \to {}^\circ A, \quad {}^\circ F({}^\circ g) = {}^\circ (f \circ g), \text{ para } g : P \to P \in {}^\circ g \in {}^\circ P $$

.

En particular para la función identidad id:$P \to P$, tenemos:

$$ {}^\circ F({}^\circ \text{id}) = {}^\circ f $$

Aplicaremos esta construcción al anillo de los enteros no estándar O.

Como establecimos anteriormente, podemos definir ${}^*\mathbb{Z}$ en O y tratar la totalidad de la situación como codificando en ${}^*\mathbb{Z}$, ya que para cada $a \in O$ existen $z_1, ..., z_n \in^* \mathbb{Z}$ tal que $z_1 + z_2 a + z_3 a^2 + ... + z_n a^{n-1} + a^n = 0$, así que mientras las propiedades algebraicas de la anillo O son interesantes en sí mismas, la lógica detras de O, es realmente sólo la lógica de ${}^*\mathbb{Z}$. Así tenemos que como ${}^*\mathbb{Z}$ admite funciones de skolem definibles, entonces O también admite funciones de skolem definibles.

Tomaremos $P = \wp$ (viendo a $\wp$ como un subconjunto de O) y todo ultrafiltro será sobre Def$(\wp)$. Denotaremos ${}^\circ O = {}^\circ O_D =$ Def$(O^\wp)/D$.

Ahora fijamos un ideal máximo $\mathfrak{m} \subset O$ (no necesariamente definible), sea $D = D(\mathfrak{m})$, y consideremos ${}^\circ O_D$.

Un elemento ${}^\circ g \in {}^\circ \wp$, es la clase de una función $g : \wp \to \wp$, la cual nos proporciona una $\wp$-familia de ideales primos definibles

$$ \{g(\mathfrak{p})\} = \{g(\alpha_\mathfrak{p}, \beta_\mathfrak{p})\} = \{(\alpha'_\mathfrak{p}, \beta'_\mathfrak{p})\}, $$

por lo tanto la ultrapotencia nos genera un ideal primo definible $({}^\circ \alpha', {}^\circ \beta')$ indexado por ${}^\circ g$.

Nota 6.2. Sea ${}^\circ\mathbb{N}$ la ultrapontencia de ${}^*\mathbb{N}$ asociada a D, ${}^\circ \mathfrak{a} = ({}^\circ \alpha', {}^\circ \beta')$ el ideal indexado por ${}^\circ g$ y ${}^\circ k \in {}^\circ\mathbb{N}$, decimos que ${}^\circ a \in {}^\circ \mathfrak{a}^{{}^\circ k}$ si y sólo si existe $S \in D$ tal que $f(\mathfrak{q}) \in g(\mathfrak{q})^{k(\mathfrak{q})}$, donde $f : \wp \to O$ y $k : \wp \to {}^*\mathbb{N}$ son las funciones definibles asociadas a ${}^\circ a$ y ${}^\circ k$ respectivamente.

Proposición 6.3. *En ${}^\circ O_D$ la clase ${}^\circ$id $\in {}^\circ \wp \subset {}^\circ O$ representa a un ideal máximo 2-generado $\mathfrak{M} = ({}^\circ \alpha, {}^\circ \beta)$ donde ${}^\circ \alpha, {}^\circ \beta$ son funciones definibles.*

Demostración. Basta probar que $\mathfrak{M}$ es máximo. Supongamos que no lo es, entonces $\exists {}^\circ x \notin \mathfrak{M}, ({}^\circ x, {}^\circ \alpha, {}^\circ \beta) \neq {}^\circ O$. Pero como tenemos que $\{\mathfrak{p} \in \wp : (x_\mathfrak{p}, \alpha_\mathfrak{p}, \beta_\mathfrak{p}) = O\} \in D$ ya que $(\alpha_\mathfrak{p}, \beta_\mathfrak{p})$ es un ideal máximo en O, lo nos lleva a que $({}^\circ x, {}^\circ \alpha, {}^\circ \beta) = {}^\circ O$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathfrak{M}$ es máximo. □

Explotaremos la relación entre el ideal no necesariamente definible $\mathfrak{m}$ y el ideal definible $\mathfrak{M}$ con el fin de llevar acabo la clasificación de los $\mathfrak{m}$-ideales en el capitulo siguiente. El resto de esta sección esta dedicada a una análisis preliminar de esta relación.

El siguiente teorema sirve como una ilustración del principio general de que el análisis de los ideales no definibles puede ser reducido al análisis de los ideales definibles.

Teorema 6.1. *Si $\mathfrak{m}$ es un ideal máximo de O y $D = D(\mathfrak{m})$ entonces*

$$\mathfrak{M} \cap O = \mathfrak{m}$$

y el homomorfismo inducido

$$h : O/\mathfrak{m} \to {}^{\circ}O_D/\mathfrak{M}$$

es un isomorfismo, es decir $\mathfrak{M}$ extiende $\mathfrak{m}$.

Demostración. Para la primera afirmación, fijamos $a \in O$. Entonces
$a \in \mathfrak{M}$
$\iff$ ${}^{\circ}O_D$ satisface que ${}^{\circ}c_a \in \mathfrak{M}$
$\iff$ $\{\mathfrak{p} \in \wp : a \in \mathfrak{p}\} \in D$
$\iff$ $S_a \in D$
$\iff$ $a \in \mathfrak{m}(D) = \mathfrak{m}$, como se deseaba.

Así h es un monomorfismo. Probaremos que h es epimorfismo, elegimos ${}^{\circ}f \in {}^{\circ}O_D$ y fijamos un conjunto acotado $S \in D$. Probaremos que ${}^{\circ}f \mod \mathfrak{M}$ está en la imagen de h.

Por el Teorema 4.2 nosotros podemos encontrar $a \in O$ satisfaciendo:

$$a \equiv f(\mathfrak{p}) \mod \mathfrak{p} \quad \forall \mathfrak{p} \in S$$

Entonces ${}^{\circ}O_D$ satisface que ${}^{\circ}c_a \equiv {}^{\circ}f \mod \mathfrak{M}$, así $h(a \mod \mathfrak{m}) = {}^{\circ}f \mod \mathfrak{M}$. □

La reducción de la clasificación de los $\mathfrak{m}$-ideales a la clasificación de los $\mathfrak{M}$-ideales se lleva a cabo de manera similar. Sin embargo un punto relativo a la transferencia de la estructura de segundo orden de O a ${}^{\circ}O_D$ merece aclaración ya que necesitaremos cuantificar elementos en conjuntos no definibles.

Dado $X \subseteq O$ definible, definido por la fórmula $\chi(x, \bar{a})$, establecemos:

$${}^{\circ}X = {}^{\circ}X_D = \{{}^{\circ}f : {}^{\circ}O_D \models \chi({}^{\circ}f, \bar{a})\}.$$

Equivalentemente ${}^{\circ}X = \{{}^{\circ}f : \{\mathfrak{p} : f(\mathfrak{p}) \in X\} \in D\}$, y podemos por tanto extender esta notación a conjuntos no definibles X también. Esto es inadecuado desde nuestro punto de vista, ya que no produce la ecuación siguiente deseable: ${}^{\circ}\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$.

Proposición 6.4. *Sea $\mathfrak{a}$ es un ideal de O (no necesariamente definible) y ${}^{\circ}\mathfrak{a}$ por el procedimiento sugerido, entonces ${}^{\circ}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}{}^{\circ}O_D$.*

Demostración. Fijemos ${}^{\circ}f$ en ${}^{\circ}\mathfrak{a}$ y escogemos a, b en $\mathfrak{m}$ así que $S_{a,b} \subseteq \{\mathfrak{p} : f(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{a}\}$. Sea $\mathfrak{a}'$ el ideal generado por el conjunto $\{f(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in S_{a,b}\} \subseteq \mathfrak{a}$, notemos que $\mathfrak{a}'$ es definible ya que f y $S_{a,b}$ lo son. Entonces $\mathfrak{a}' = (c, d)$ para c, d adecuados y así para algún $\mathfrak{p} \in S_{a,b}$ podemos escribir $f(\mathfrak{p}) = cf_1(\mathfrak{p}) + df_2(\mathfrak{p})$ con f_1, f_2 definibles. Entonces ${}^{\circ}f = c{}^{\circ}f_1 + d{}^{\circ}f_2$ está en $\mathfrak{a}{}^{\circ}O_D$. Por otro lado si $x{}^{\circ}f \in \mathfrak{a}{}^{\circ}O$, con $x \in \mathfrak{a}$ y ${}^{\circ}f \in {}^{\circ}O$, entonces $\{\mathfrak{p} : f(\mathfrak{p})x \in \mathfrak{a})\} \in D$ y por lo tanto $x{}^{\circ}f \in {}^{\circ}\mathfrak{a}$. □

Podemos mostrar que en efecto, cuando $\mathfrak{m}$ es no definible $\mathfrak{m}{}^{\circ}O_D = {}^{\circ}\mathfrak{m}$ no sólo falla en ser máximo, incluso no es primo. $\mathfrak{m}{}^{\circ}O_D = {}^{\circ}\mathfrak{m}$ estará contenido en al menos 3 diferentes ideales máximos, exactamente uno de los cuales es definible, a saber, $\mathfrak{M}$. La prueba de este hecho ocupa el resto de esta sección.

Primeramente consideraremos ideales definibles sobre $\mathfrak{m}{}^{\circ}O_D = {}^{\circ}\mathfrak{m}$, es decir definible usando parámetros de ${}^{\circ}\mathfrak{m}$.

Teorema 6.2. *Si* $\mathfrak{m}$ *está contenido en el ideal propio definible* $\mathfrak{A}$ *de* $^\circ O_D$ *entonces* $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$

Demostración. Un ideal propio definible $\mathfrak{A}$ de $^\circ O_D$ corresponde a dos funciones definibles $f_1, f_2 : \wp \to O$ tales que $\mathfrak{A} = (^\circ f_1, ^\circ f_2)$. Podemos asumir que para cada $\mathfrak{q} \in \wp$, $(f_1(\mathfrak{q}), f_2(\mathfrak{q})) \neq O$ y entonces fijamos una función definible $g : \wp \to \wp$ tal que para cada $\mathfrak{q} \in \wp$, $g(\mathfrak{q}) \supseteq (f_1(\mathfrak{q}), f_2(\mathfrak{q})) \neq O$, esto se puede realizar gracias a la definibilidad de cada $(f_1(\mathfrak{q}), f_2(\mathfrak{q}))$ y por tanto tiene una factorización en primos definibles para cada $\mathfrak{q}$. Entonces la función g nos genera un ideal primo $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}_g \subset O$ y por tanto conteniendo a $\mathfrak{m}$. Afirmamos que:

$$\text{Para } S \in D, \text{ tenemos } g(S) \in D \tag{6.1}$$

Para probar lo anterior, supondremos que (6.1) no se cumple, así que podemos tomar $S, T \in D$ con $g(S) \cap T = \emptyset$ (sin perdida de generalidad podemos tomar a S, T acotados). Por el Teorema 4.2 escojemos $a \in O$ tal que:

$$a \equiv 0 \quad \text{mód } \mathfrak{q} \text{ para } \mathfrak{q} \in T \wedge a \equiv 1 \quad \text{mód } \mathfrak{q} \text{ para } \mathfrak{q} \in g(S) \tag{6.2}$$

Entonces $a \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{P}_g$ así $\{\mathfrak{q} \in \wp : a \in g(\mathfrak{q})\} \in D$. Por lo tanto

$$S \cap \{\mathfrak{q} \in \wp : a \in g(\mathfrak{q})\} = \{\mathfrak{q} \in S : a \in g(\mathfrak{q})\} \in D$$

pero el anterior conjunto es vacío por (6.2), lo cual es una contradicción. Así (6.1) se cumple. Ya que D es un ultrafiltro se sigue que $\{\mathfrak{q} : g(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\} \in D$ (por [2] Corolario 1.11), es decir, $^\circ g = {}^\circ id$. Por tanto $\mathfrak{P}_g = \mathfrak{M}$.

Hasta ahora hemos demostrado que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$. Escribiendo $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}'$, afirmamos que $\mathfrak{A}' = {}^\circ O_D$. De lo contrario el argumento que han dado muestra que $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{M}$ ya que $\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}$ y por tanto $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$, así que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}^2$. Esta posibilidad es fácilmente eliminada ya que si fijamos $S \in D$ acotado y sea $\mathfrak{b} = \prod_S \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{M}^2$ entonces $\mathfrak{M}^2$ divide a $\mathfrak{b}^\circ O_D$, por tanto $\{\mathfrak{q} \in \wp : \mathfrak{q}^2 \text{ divide a } \mathfrak{b}\} \in D$. Como el anterior conjunto es vacío, tenemos una contradicción. □

Análogamente podemos probar el siguiente resultado:

Teorema 6.3. *Sean* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *ideales máximos de* O*, y sea* $D = D(\mathfrak{m})$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathfrak{n} = O \cap \mathfrak{A}$ *para algún ideal definible* $\mathfrak{A}$ *de* $^\circ O_D$*.*
2. $\mathfrak{n} = O \cap \mathfrak{N}$ *para algún ideal máximo definible* $\mathfrak{N}$ *de* $^\circ O_D$
3. $D(\mathfrak{n}) = f(D(\mathfrak{m}))$ *para alguna función definible* $f : \wp \to \wp$*.*

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2. Sea $\mathfrak{n} = O \cap \mathfrak{A}$, con $\mathfrak{A}$ un ideal definible de $^\circ O_D$. Como $\mathfrak{A}$ es definible, existen $f_1, f_2 : \wp \to O$ funciones definibles tales que $\mathfrak{A} = (^\circ f_1, ^\circ f_2)$, Podemos asumir que para cada $\mathfrak{q} \in \wp$, $(f_1(\mathfrak{q}), f_2(\mathfrak{q})) \neq O$ y entonces fijamos una función definible $g : \wp \to \wp$ tal que para cada $\mathfrak{q} \in \wp$, $g(\mathfrak{q}) \supseteq (f_1(\mathfrak{q}), f_2(\mathfrak{q})) \neq O$. Entonces la función g nos genera un ideal máximo definible $\mathfrak{N}$, tal que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N} \subset O$ y por tanto conteniendo a $\mathfrak{n}$.

Ya que $O \cap \mathfrak{N}$ es un ideal de O conteniendo a $\mathfrak{n}$, por la máximalidad de $\mathfrak{n}$ tenemos $\mathfrak{n} = O \cap \mathfrak{N}$.

2 $\Rightarrow$ 3. Ahora suponemos que se cumple que existe un ideal máximo definible $\mathfrak{N}$ de $^\circ O_D$ tal que $\mathfrak{n} = O \cap \mathfrak{N}$. Como $\mathfrak{N}$ es definible y máximo podemos escoger una función definible $f : \wp \to \wp$, que nos genera el ideal $\mathfrak{N}$. Demostraremos que $D(\mathfrak{n}) =$

$\{S \subseteq \wp : f^{-1}(S) \in D(\mathfrak{m})\} =: f(D(\mathfrak{m}))$. Sin pérdida de generalidad tomemos $S \in D(\mathfrak{n})$ acotado, por tanto, existe $a, b \in \mathfrak{n}$ tal que $S = \{\mathfrak{p} \in \wp : \mathfrak{p} \mid (a, b)\}$. Ahora vemos que $f^{-1}(S) = \{\mathfrak{p} \in \wp : f(\mathfrak{p}) \in S\} = \{\mathfrak{p} \in \wp : f(\mathfrak{p}) \mid (a, b)\}$, como $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{N}$, tenemos que $\{\mathfrak{p} \in \wp : f(\mathfrak{p}) \mid (a, b)\} \in D(\mathfrak{m})$ (ya que $a, b \in \mathfrak{N}$ si el anterior conjunto está en $D(\mathfrak{m})$. Y por tanto $f^{-1}(S) \in D(\mathfrak{m})$, así $D(\mathfrak{n}) \subset f(D(\mathfrak{m}))$. Por [2], tenemos que $f(D(\mathfrak{m}))$ es un ultrafiltro. Entonces $D(\mathfrak{n}) = f(D(\mathfrak{m}))$.

$3 \Rightarrow 1$ supongamos que $D(\mathfrak{n}) = f(D(\mathfrak{m}))$ para alguna función definible $f : \wp \to \wp$. Usando f podemos generar un ideal máximo definible $\mathfrak{N}$. Basta mostrar que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{N}$, Pero como para cada $a, b \in \mathfrak{n}$, $S_{(a,b)} \in D(\mathfrak{n}) = f(D(\mathfrak{m}))$, tenemos que $f^{-1}(S_{(a,b)}) = \{\mathfrak{p} \in \wp : f(\mathfrak{p}) \in S_{(a,b)}\} = \{\mathfrak{p} \in \wp : f(\mathfrak{p}) \mid (a, b)\} \in D(\mathfrak{m})$ y entonces $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{N}$, por lo tanto $\mathfrak{n} = O \cap \mathfrak{N}$.

□

Ahora vamos a volver a la pregunta: ¿cuantos ideales máximos de ${}^\circ O_D$ puede contener ${}^\circ\mathfrak{m} = \mathfrak{m}{}^\circ O_D$?, probaremos que el número de tales ideales es al menos 3.

Teorema 6.4. *Sea $\mathfrak{m}$ un ideal no definible de O, $D = D(\mathfrak{m})$. Entonces el número de ideales máximos de ${}^\circ O_D$ conteniendo ${}^\circ\mathfrak{m} = \mathfrak{m}{}^\circ O_D$ es al menos 3.*

Demostración. Fijamos un orden lineal definible $<$ de $\wp$ (podemos utilizar el heredado por la contención que tenemos $\wp \subset {}^*\mathbb{N}$), y por tanto también de ${}^\circ\wp_D$. Sea ${}^\circ D = \{{}^\circ S_D : S \in D\}$. Afirmamos que podemos aumentar ${}^\circ D$ con cualesquiera de los siguientes conjuntos:

$$X = \{{}^\circ\mathfrak{p}_D \in {}^\circ\wp_D : {}^\circ\mathfrak{p}_D <_D \mathfrak{M}\}, \quad Y = \{{}^\circ\mathfrak{p}_D \in {}^\circ\wp_D : {}^\circ\mathfrak{p}_D >_D \mathfrak{M}\}.$$

Afirmamos que ${}^\circ D \cup \{X\}$ y ${}^\circ D \cup \{Y\}$ generan filtros propios. Teniendo en cuenta el filtro principal $D(\mathfrak{M})$ esto dará lugar a al menos 3 ultrafiltros, y por tanto a al menos 3 ideales máximos (por el teorema 5.1).

Basta verificar que ${}^\circ D \cup \{Y\}$ genera un filtro propio. Para ello supongamos lo contrario que para un conjunto S de D tenemos ${}^\circ S_D \cap Y = \emptyset$, es decir, no hay una función $f : \wp \to \wp$ definible tal que ${}^\circ f >_D \mathfrak{M}$. Esto es falso, por que si definimos una función $f : S \to S$ de tal forma que $f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$ donde $\mathfrak{p}' > \mathfrak{p}$ y no existe $\mathfrak{p}''$ tal que $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}'' < \mathfrak{p}' \quad \forall \mathfrak{p} \in S$ (con la excepción de la $\mathfrak{p}$ más grande en S, si hay una) entonces claramente ${}^\circ f >_D \mathfrak{M}$. □

Capítulo 7

$\mathfrak{m}$-ideales

Empezaremos por considerar un ideal máximo definible $\mathfrak{m}$ en el anillo de enteros algebraicos no estándar O. Definiremos como los **$\mathfrak{m}$-ideales**, a los ideales $\mathfrak{a}$ de O contenidos en $\mathfrak{m}$ (no necesariamente definibles) y en ningún otro ideal máximo.

Proposición 7.1. *Si $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}-$ideal definible entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$ para algún número natural no estándar $n \in {}^*\mathbb{N}$.*

Demostración. Como $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{a}$ son definibles, $\mathfrak{a}$ tiene una factorización en ideales primos definibles y como $\mathfrak{m}$ es el único que lo divide, entonces se tiene lo deseado. □

En general sea

$$s_{\mathfrak{a}} = \{n \in {}^*\mathbb{N} : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^n\}$$

Entonces $s_{\mathfrak{a}}$ es una cortadura de Dedekind, en el sentido de que $s_{\mathfrak{a}}$ es un segmento inicial de ${}^*\mathbb{N}$, lo cual nos lleva a que s_a puede o no tener elemento máximo. Nos referiremos al conjunto de todas las cortaduras como la **compleción de Dedekind** de ${}^*\mathbb{N}$, y escribiremos $m \leq s$, $m > s$, $m = s$ de acuerdo $m \in s$, $m \notin s$, $s = [1, m]$, donde $m \in {}^*\mathbb{N}$.

Observación 7.1. $\bigcap_{m \leq s} \mathfrak{m}^m = \bigcup_{n \geq s} \mathfrak{m}^n$ para cualquier cortadura de Dedekind s.

Demostración de la observación. Claramente $\bigcap_{m \leq s} \mathfrak{m}^m \supseteq \bigcup_{n \geq s} \mathfrak{m}^n$, y reciprocamente si $a \in \bigcap_{m \leq s} \mathfrak{m}^m$ entonces el exponente n de $\mathfrak{m}$ en la factorización de (a) en ideales definibles debe ser al menos s, así $a \in \bigcup_{n \geq s} \mathfrak{m}^n$. □

Notación 7.1. $\mathfrak{m}^s = \bigcap_{m \leq s} \mathfrak{m}^m$.

Podemos extender la definición de un $\mathfrak{m}$-ideal para el caso en que $\mathfrak{m}$ no es necesariamente definible, es decir, ideales $\mathfrak{a}$ de O contenidos en $\mathfrak{m}$ (no necesariamente definible) y en ningún otro ideal máximo. Ahora daremos algunas caracterizaciones para $\mathfrak{m}$-ideales:

Lema 7.1. *Sea $\mathfrak{m}$ un ideal máximo (no necesariamente definible) de O, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal*
2. *$D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{m})$*
3. *para alguna $n \in {}^*\mathbb{N}$ el conjunto $\mathfrak{m}^{(n)} := \{a^n : a \in \mathfrak{m}\}$ está contenido en $\mathfrak{a}$*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ Es claro que $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{m})$. Ahora supongamos que $D(\mathfrak{a})$ no es ultrafiltro, entonces existe $\mathfrak{U}$ ultrafiltro distinto de $D(\mathfrak{m})$ conteniendo $D(\mathfrak{a})$, por tanto, dichos ultrafiltros nos genera dos ideales máximos distintos conteniendo a $\mathfrak{a}$ lo cual es imposible por Teorema 5.1. Por lo que $D(\mathfrak{a})$ es un ultrafiltro.

$2 \Rightarrow 1$ primero veamos que $\mathfrak{a}$ está contenido en $\mathfrak{m}$; si $a \in \mathfrak{a}$, entonces $S_a \in D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{m})$ por lo tanto $a \in \mathfrak{m}(D(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$. Ahora demostraremos que $\mathfrak{m}$ es único:

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}'$

$\Rightarrow D(\mathfrak{a}) \subset D(\mathfrak{m}')$

$\Rightarrow D(\mathfrak{m}) \subset D(\mathfrak{m}')$

$\Rightarrow D(\mathfrak{m}) = D(\mathfrak{m}')$

$\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

$3 \Rightarrow 2$ Como para cada $a \in \mathfrak{m}$, $S_{a^n} = S_a$, entonces $D(\mathfrak{m}) \subset D(\mathfrak{a})$, y ya que $D(\mathfrak{m})$ es máximo, tenemos lo deseado.

$2 \Rightarrow 3$ Fijamos $a \in \mathfrak{a}$ y factorizamos $(a) = \prod_{\wp} \mathfrak{p}^{s(\mathfrak{p})}$. Sea n $=\sup_{\wp}(s(\mathfrak{p}))$ (véase teorema 4.1). Afirmamos que $\mathfrak{m}^{(n)} \subseteq \mathfrak{a}$. De hecho fijamos $b \in \mathfrak{m}^{(n)}$, escribimos $(b) = \prod_{\wp} \mathfrak{p}^{t(\mathfrak{p})}$, y sea $S = \{\mathfrak{p} \in \wp : t(\mathfrak{p}) > 0\}$. Entonces $t \geq s$ sobre S. Como $S \in D(\mathfrak{m}) = D(\mathfrak{a})$, fijamos $(c, d) \subseteq \mathfrak{a}$ tal que $S_{c,d} \subseteq S$. Por lo tanto $b \in (a, c, d) = \prod_{S_{a,c,d}} \mathfrak{p}^{r(\mathfrak{p})} \subseteq \mathfrak{a}$, donde $r(\mathfrak{p}) \leq \min[s(\mathfrak{p}), t(\mathfrak{p})] \leq t(\mathfrak{p})$. □

Note también que si $\mathfrak{m}$ es definible, entonces *3.* es equivalente a:

3'. Para alguna n, $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$.

Teorema 7.1. *Supongamos que $\mathfrak{m}$ es un ideal máximo definible. Entonces cada $\mathfrak{m}$-ideal puede escribirse únicamente como $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^{s_{\mathfrak{a}}}$, donde $s_{\mathfrak{a}}$ es la cortadura de Dedekind en ${}^*\mathbb{N}$, asociada a $\mathfrak{a}$ definida arriba.*

Demostración. Nótese primero que cada ideal $\mathfrak{a}$ de la forma $\mathfrak{m}^s$ es un $\mathfrak{m}$-ideal, porque si elegimos $n > s$ entonces $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$.

Supongamos entonces que $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal. Si a es cualquier elemento de $\mathfrak{a}$ y (a) tiene la factorización $(a) = \mathfrak{m}^k J$ con $(J, \mathfrak{m}) = O$ entonces $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{a}$. En efecto, para alguna $n > s$, $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$. Por otro lado, $(J, \mathfrak{m}^n) = O$, entonces tenemos $1 = \sum \alpha_i b_i^n + \beta\gamma$, donde $b_i \in \mathfrak{m} \wedge \gamma \in J$, por lo tanto $\forall b \in \mathfrak{m} \quad b^k = \alpha b^k(\sum \alpha_i b_i^n) + \beta\gamma b^k \in (\mathfrak{m}^n, \mathfrak{m}^k J) \subseteq \mathfrak{a}$.

Claramente $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^{s_{\mathfrak{a}}}$. Si $n \geq s_{\mathfrak{a}}$ debemos mostrar que $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$; entonces se sigue que $\mathfrak{a} \supseteq \bigcup_{n \geq s_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{s_{\mathfrak{a}}}$ y la prueba estará completa.

Fijamos $n \geq s_{\mathfrak{a}}$. Entonces $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}^n$, así podemos elegir $a \in \mathfrak{a} - \mathfrak{m}^n$ y escribimos $(a) = \mathfrak{m}^k J$ con $(\mathfrak{m}, J) = O$, $k \leq n - 1$. Así $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}^{n-1} \subseteq \mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{a}$. Esto completa la prueba. □

Ahora podemos usar la técnica del capitulo anterior, para reducir el caso de los no definibles a los definibles. En la presente situación esto parece requerir ligeramente más cuidado de lo que en realidad se requiere.

Teorema 7.2. *Sea $\mathfrak{M} \subset {}^\circ O$ el ideal máximo definible asociado a $\mathfrak{m}$ como en Capitulo 5. La función $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{a} := \mathfrak{A} \cap O$ desde $\mathfrak{M}$-ideales de ${}^\circ O$ a los $\mathfrak{m}$-ideales de O es una correspondencia biunívoca.*

Demostración. Sea ${}^\circ\mathbb{N}$ la ultrapontencia de ${}^*\mathbb{N}$ asociado a $D(\mathfrak{m})$. Ahora debemos verificar primero que π manda los $\mathfrak{M}$-ideales a los $\mathfrak{m}$-ideales. Asumimos por tanto que $\mathfrak{A}$ es un $\mathfrak{M}$-ideal y que $\mathfrak{M}^{{}^\circ n} \subseteq \mathfrak{A}$, con ${}^\circ n \in {}^\circ\mathbb{N}$. Fijamos un conjunto acotado S en D y sea $n = \sup_S {}^\circ n(\mathfrak{q})$ (ver Nota 5.1). Fijamos $a \in \mathfrak{m}$. Probaremos que a^n está en $\mathfrak{A}$, así que $\mathfrak{a} := \mathfrak{A} \cap O$ es un $\mathfrak{m}$-ideal. Esto es de hecho evidente: $a^{{}^\circ n}$ está en $\mathfrak{A}$, y $a^{{}^\circ n}$ divide a a^n.

Probaremos la proposición definiendo un inverso para π, una función extensión e de $\mathfrak{m}$-ideales $\mathfrak{a}$ de O a los $\mathfrak{M}$-ideales $\mathfrak{A} = e(\mathfrak{a})$ en ${}^\circ O_D$. Como hemos señalado, $\mathfrak{a}{}^\circ O_D$ en general no es un $\mathfrak{M}$-ideal (ya que existen al menos 3 ideales máximos que lo contienen). Si localizamos ${}^\circ O_D$ en $\mathfrak{M}$, es decir tomamos

$$({}^\circ O_D)_{\mathfrak{M}} = \{\frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha \in {}^\circ O_D, \beta \in {}^\circ O_D - \mathfrak{M}\}$$

y entonces intersecamos la localización de $(\mathfrak{a}{}^\circ O_D)_{\mathfrak{M}}$ con ${}^\circ O_D$, en efecto conseguimos un ideal adecuado $e(\mathfrak{a})$. Tomaremos un enfoque diferente, equivalente a lo anterior.

Sea $\mathfrak{a}$ un $\mathfrak{m}$-ideal de O y definimos una cortadura de Dedekind $s_\mathfrak{a}$ en ${}^\circ\mathbb{N}_D$ por: ${}^\circ n \in s_\mathfrak{a} \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}^{{}^\circ n}$.

El ideal $e(\mathfrak{a}) := \mathfrak{M}^{s_\mathfrak{a}}$ es un $\mathfrak{M}$-ideal. Así sólo necesitamos verificar que $\pi \circ e$ y $e \circ \pi$ son funciones identidad.

Calculando $\pi \circ e$:

$\pi \circ e(\mathfrak{a}) = \mathfrak{M}^{s_\mathfrak{a}} \cap O$, el cual contiene a $\mathfrak{a}$. Por otro lado si $a \notin \mathfrak{a} \wedge a \in \mathfrak{M}$ sea $(a) = \mathfrak{M}^{{}^\circ n}\mathfrak{A}$ en ${}^\circ O_D$ con ${}^\circ n \in {}^\circ\mathbb{N}_D$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = {}^\circ O_D$. Entonces $a \notin \mathfrak{M}^{{}^\circ n+1}$ y probaremos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}^{{}^\circ n+1}$ entonces tenemos $a \notin \pi \circ e(\mathfrak{a})$, lo cual muestra que $\pi \circ e(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

Para ello, procederemos por contradicción. Supongamos $b \in \mathfrak{a}$, $b \notin \mathfrak{M}^{{}^\circ n+1}$. Entonces $(b) = \mathfrak{M}^{{}^\circ k}\mathfrak{A}'$ con ${}^\circ k \leq {}^\circ n$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{M}) = {}^\circ O_D$. Ahora $a \in \mathfrak{M}^{{}^\circ k}$, así para algun conjunto $S \in D(\mathfrak{m})$ tal que $a \in \prod_S \mathfrak{q}^{{}^\circ k(\mathfrak{q})}$ (ver Nota 6.2). Como $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal, tenemos que $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{m})$ (por Lema 7.1), por lo que podemos encontrar $u, v \in \mathfrak{a}$ tal que $S_{(u,v)} \subseteq S$. Como $b \in \prod_{S'} \mathfrak{q}^{{}^\circ k(\mathfrak{q})} \wedge b \notin \prod_{S'} \mathfrak{q}^{{}^\circ k(\mathfrak{q})+1}$, entonces

$$a \in \prod_S \mathfrak{q}^{{}^\circ k(\mathfrak{q})} \subseteq (b, u, v) = \prod \mathfrak{q}^{{}^\circ k'(\mathfrak{q})} \subseteq \mathfrak{a}$$

con ${}^\circ k' \leq {}^\circ k$, así $a \in \mathfrak{a}$, lo cual es una contradicción.

Ahora, calculando $e \circ \pi$:

Sea $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{M}$-ideal de ${}^\circ O_D$, por Teorema 7.1 $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{s_\mathfrak{A}}$. Entonces $e \circ \pi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}^{s_{\mathfrak{A}\cap O}}$. Debemos mostrar que $s_{\mathfrak{A}\cap O} = s_\mathfrak{A}$. Por definición:

1. ${}^\circ n \in s_{(\mathfrak{A}\cap O)} \iff \mathfrak{M}^{{}^\circ n} \supseteq \mathfrak{A} \cap O$.
2. ${}^\circ n \in s_\mathfrak{A} \iff \mathfrak{M}^{{}^\circ n} \supseteq \mathfrak{A}$.

Claramente $2 \Rightarrow 1$, ya que si ${}^\circ n \in s_{(\mathfrak{A}\cap O)} \subseteq s_\mathfrak{A} \iff \mathfrak{M}^{{}^\circ n} \supseteq \mathfrak{A}$ pero $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A} \cap O$ y por tanto $\mathfrak{M}^{{}^\circ n} \supseteq \mathfrak{A} \cap O$. Ahora mostraremos que $\neg 2 \Rightarrow \neg 1$ para completar la prueba.

Fijemos ${}^\circ a \in \mathfrak{A}$, ${}^\circ a \notin \mathfrak{M}^{{}^\circ n}$. Usando Teorema 4.2 para elegir

$$a \in O \quad a \equiv f(\mathfrak{q}) \quad \text{mód } \mathfrak{q}^{k(\mathfrak{q})}$$

para toda $\mathfrak{q}$ en algún $S \in D(\mathfrak{m})$, donde ${}^\circ k$ es elegido tan grande que $\mathfrak{M}^{{}^\circ k} \subseteq \mathfrak{A}$ y $f : \wp \to O$ es la función definible asociada a ${}^\circ a$. Como $a - f(\mathfrak{q}) \in \mathfrak{A} \wedge f(\mathfrak{q}) \in \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{q} \in S' \subseteq S$, tenemos que $a \in \mathfrak{A}$, por tanto $a \in \mathfrak{A} \cap O$ y como ${}^\circ k \geq {}^\circ n$, tenemos que $(a - {}^\circ a) \in \mathfrak{M}^{{}^\circ k} \subseteq \mathfrak{M}^{{}^\circ n}$, por lo tanto $a \equiv {}^\circ a$ (mod $\mathfrak{M}^{{}^\circ n}$), así $a \notin \mathfrak{M}^{{}^\circ n}$. Esto prueba $\neg 1$, como deseábamos. □

Notación 7.2. Si $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal de O sea $s_\mathfrak{a}$ la siguiente cortadura de Dedekind de ${}^\circ\mathbb{N}_D$:

$$s_\mathfrak{a} := \{{}^\circ n : \mathfrak{M}^{{}^\circ n} \supseteq \mathfrak{a}\}.$$

Combinando los Teoremas 7.1, 7.2 tenemos:

Corolario 7.1. *Para cualquier ideal máximo $\mathfrak{m}$ de O, cualquier $\mathfrak{m}$-ideal de O puede ser escrito únicamente como $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}^{s_\mathfrak{a}} \cap O$.*

Para cualquier ideal máximo $\mathfrak{m}$ de O y una cortadura de Dedekind s de $^\circ\mathbb{N}_D$ ($D = D(\mathfrak{m})$) acordando momentáneamente escribiremos

$$\mathfrak{m}^s := \mathfrak{M}^s \cap O.$$

Entonces reescribimos el corolario y la proposición anterior, como:

Teorema 7.3. *Cualquier $\mathfrak{m}$-ideal $\mathfrak{a}$ de O puede ser expresado de manera única como $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^s$ donde el exponente s es una cortadura de Dedekind en $^\circ\mathbb{N}_D$. Existe una correspondencia biunívoca entre los ideales $\mathfrak{m}^s$ de O y los ideales $\mathfrak{M}^s$ de $^\circ O_D$.*

Este resultado es más satisfactorio si nosotros adoptamos el siguiente punto de vista, para cada $a \in O$ escribimos la factorización de a en primos, de la forma:

$$(a) = \prod \mathfrak{q}^{exp(a,\mathfrak{q})},$$

donde $exp(a,\cdot)$ es una función definible de $\wp$ a $^*\mathbb{N}$. De hecho, si escribimos

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{def}}(O) := \wp \subseteq \mathrm{Spec}(O) = \{\mathfrak{m} \subset O \mid \mathfrak{m} \text{ es un ideal máximo}\}$$

generamos una gavilla

$$\begin{array}{c} ^\circ\mathbb{N} \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(O) \end{array}$$

donde la fibra sobre $\mathfrak{m}$ es $^\circ\mathbb{N}_{D(\mathfrak{m})}$, y $\exp(a,\cdot)$ extiende a una sección como sigue; sea $\mathfrak{m}$ un ideal máximo de O, sea $D = D(\mathfrak{m})$ y

$$exp(a,\mathfrak{m}) := {}^\circ exp(a,\cdot)_D$$

el cual yace en $^\circ\mathbb{N}_D$.

Proposición 7.2. *Para cualquier cortadura de Dedekind s en $^\circ\mathbb{N}_D$*

$$\mathfrak{m}^s = \{a \in O : exp(a,\mathfrak{m}) \geq s\}.$$

Demostración. Sea $I = \{a \in O : exp(a,\mathfrak{m}) \geq s\}$, mostraremos que I es un ideal. Si $a, b \in I$, $a + b \in (a, b)$, entonces

$$\exp(a + b,\mathfrak{m}) \geq \exp((a, b),\mathfrak{m}) = \min\,[\exp(a,\mathfrak{m}), \exp(b,\mathfrak{m})] \geq s$$

por lo que $a+b \in I$. Analogamente, sea $a \in I$ y $b \in O$, $ab \in (a)$ por lo que $\exp(ab,\mathfrak{m}) \geq \exp(a,\mathfrak{m}) \geq s$, por lo tanto $ab \in I$. Lo que muestra que I es un ideal.

Ya que $I \subset O$, basta probar que $I \subset \mathfrak{M}^s = \bigcup_{^\circ n \geq s} \mathfrak{M}^{^\circ n}$, es decir, si $a \in I$, $a \in \mathfrak{M}^s$ si y sólo si existe $^\circ n \geq s$ tal que $a \in \mathfrak{M}^{^\circ n}$. Sea $^\circ n := {}^\circ\exp(a,\cdot) \geq s$, pero por la Nota 6.2, tenemos que $a \in \mathfrak{M}^{^\circ\exp(a,\cdot)}$. Por otro lado si $a \in \mathfrak{m}^s$, entonces existe $^\circ n$ tal que $a \in \mathfrak{M}^{^\circ n}$, si y sólo si $^\circ\exp(a,\cdot) \geq {}^\circ n$. □

Por tanto esta fórmula debería ser tomada como la definición de $\mathfrak{m}^s$. Entonces es fácil probar la primera parte del Teorema 7.3 sin mirar tan de cerca a $^\circ O_D$.

Ahora especialicemos este resultado para clasificar los ideales primos $\mathfrak{p}$ de O. Como cada ideal primo $\mathfrak{p}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal para un $\mathfrak{m}$ adecuado por Teorema 5.1, y como los $\mathfrak{m}$-ideales son clasificados por cortaduras en $^\circ\mathbb{N}_D$, los ideales primos serán clasificados por "cortaduras primas".

Definición 7.1. Si s es una cortadura de Dedekind en $^\circ\mathbb{N} = {}^\circ\mathbb{N}_D$:

1. s es una cortadura **no principal** $\iff$ s es cerrado respecto a la suma de 1, es decir, cerrado respecto a la función sucesor.
2. s es una cortadura **aditiva** $\iff$ s es cerrado respecto a la suma.

Podemos introducir dos relaciones de equivalencia sobre $^\circ\mathbb{N}$ por:

1. $^\circ m \sim_1 {}^\circ n \iff |\, {}^\circ m - {}^\circ n \,|$ es finito
2. $^\circ m \sim_2 {}^\circ n \iff |\, \log({}^\circ m/{}^\circ n) \,|$ es finito

Para la primera relación, la clase de $^\circ n \in {}^\circ\mathbb{N}$ la denotaremos por $U({}^\circ n)$ por ser el universo de $^\circ n$, que como denota la relación son los elementos de $^\circ\mathbb{N}$ que se encuentran a distancia finita de $^\circ n$. Para la segunda tomaremos $U^{\log}({}^\circ n)$ por ser el universo "logaritmo"de $^\circ n$.

Sea $^\circ n \in {}^\circ\mathbb{N}$ fija y la cortadura $s = \{{}^\circ m \in {}^\circ\mathbb{N} \mid {}^\circ m \leq U({}^\circ n)\}$, veremos que s es una cortadura no principal. Sea $^\circ m \in s$, si $^\circ m$ es estrictamente menor que $U({}^\circ n)$, entonces $^\circ m$ está a distancia infinita de $U({}^\circ n)$, y al sumarle 1 a $^\circ m$ también será menor que $U({}^\circ n)$ y por tanto $^\circ m + 1 \in s$. Si $^\circ m \in U({}^\circ n)$, entonces $^\circ m + 1$ estará a distancia finita de $^\circ m$ el cual está a distancia finita de $^\circ n$, por lo tanto $^\circ m + 1$ está a distancia finita de $^\circ n$ por lo que $^\circ m + 1 \in U({}^\circ n) \subseteq s$.

Veamos que si fijamos $^\circ n \in {}^\circ\mathbb{N}$ y formamos la cortadura $s = \{{}^\circ m \in {}^\circ\mathbb{N} \mid {}^\circ m \leq U^{\log}({}^\circ n)\}$, probaremos que s es una cortadura aditiva. Sea $^\circ m, {}^\circ m' \in s$; sin perdida de generalidad supongamos que $^\circ m, {}^\circ m' \in U^{\log}(n)$, y supongamos que $^\circ m \leq {}^\circ m'$. Por tanto tenemos la siguiente desigualdad

$$\left|\log\left(\frac{{}^\circ m + {}^\circ m'}{{}^\circ n}\right)\right| \leq \left|\log\left(\frac{2{}^\circ m'}{{}^\circ n}\right)\right| < \infty$$

ya que $|\log(\frac{{}^\circ m'}{{}^\circ n})| < \infty$. Por lo que $^\circ m + {}^\circ m' \in s$, así s es aditiva.

Cortaduras no principales y aditivas están en correspondencia biunívoca con las cortaduras de los cocientes ordenados $^\circ\mathbb{N}/\sim_1$ y $^\circ\mathbb{N}/\sim_2$ respectivamente. Existe una biyección natural entre las cortaduras aditivas y las no principales; a saber la inyección $i :^\circ \mathbb{N} \to {}^\circ\mathbb{N}$ definida por $i({}^\circ n) = 2^{{}^\circ n}$ induce un isomorfismo de orden entre los 2 cocientes ordenados $^\circ\mathbb{N}/\sim_2$, $^\circ\mathbb{N}/\sim_1$ y esto induce una biyección entre las cortaduras en los cocientes ordenados. Así si s es no principal podemos definir la cortadura aditiva 2^s, y recíprocamente asociaremos a una cortadura aditiva s, la cortadura no principal $\log s$.

Con la finalidad de reducir la clasificación de los $\mathfrak{m}$-ideales primos a la clasificación de los $\mathfrak{M}$-ideales primos completamos el Teorema 7.3 como sigue, pero antes daremos una definición para la suma de cortaduras:

Definiremos $s + t$ por:

$$^\circ k \geq s + t \iff \text{para algún } {}^\circ m \geq s,\ {}^\circ m' \geq t,\ \text{tal que } {}^\circ k = {}^\circ m + {}^\circ m'.$$

En general $s + t \neq \{^\circ m + {}^\circ m' : {}^\circ m \leq s, {}^\circ m' \leq t\}$. Ya que para una cortadura aditiva s, tenemos $\{^\circ m + {}^\circ m' : {}^\circ m \leq s, {}^\circ m' \leq s\} = s \neq s + s$.

Teorema 7.4. $\mathfrak{m}^s\mathfrak{m}^t = \mathfrak{m}^{s+t}$. *Equivalentemente, la correspondencia del Teorema 7.2 preserva la multiplicación.*

Demostración. Ahora como $\mathfrak{m}^s = \bigcup_{^\circ i \geq s} \mathfrak{m}^{^\circ i}$, $\mathfrak{m}^t = \bigcup_{^\circ j \geq t} \mathfrak{m}^{^\circ j}$, y

$$\mathfrak{m}^{s+t} = \bigcup_{^\circ k \geq s+t} \mathfrak{m}^{^\circ k} = \bigcup_{^\circ i \geq s, ^\circ j \geq t} \mathfrak{m}^{^\circ i + ^\circ j}$$

por tanto podemos ver a $\mathfrak{m}^s$ como unión de potencias de $\mathfrak{m}^{^\circ i}$, donde $^\circ i$ es una cortadura principal, por lo que tenemos que demostrar que

$$\bigcup_{^\circ k \geq s+t} \mathfrak{m}^{^\circ k} = \bigcup_{^\circ i \geq s} \mathfrak{m}^{^\circ i} \bigcup_{^\circ j \geq t} \mathfrak{m}^{^\circ j} = \bigcup_{^\circ i \geq s, ^\circ j \geq t} \mathfrak{m}^{^\circ i}\mathfrak{m}^{^\circ j}$$

así sólo basta probar el teorema cuando $s, t, s + t$ son enteros, $^\circ i, {}^\circ j, {}^\circ i + {}^\circ j \in {}^\circ\mathbb{N}_D$.

Usaremos la fórmula $\mathfrak{m}^{^\circ i} = \{a \in O : \exp(a, \mathfrak{m}) \geq {}^\circ i\}$, mencionado anteriormente. Entonces claramente $\mathfrak{m}^{^\circ i}\mathfrak{m}^{^\circ j} \subseteq \mathfrak{m}^{^\circ i + ^\circ j}$, en efecto si $S_1 = \{\mathfrak{p} : \exp(a, \mathfrak{p}) \geq i_\mathfrak{p}\}$ y $S_2 = \{\mathfrak{p} : \exp(b, \mathfrak{p}) \geq j_\mathfrak{p}\}$, con $S_1, S_2 \in D(\mathfrak{m})$, entonces $\forall \mathfrak{p} \in S_1 \cap S_2, \exp(ab, \mathfrak{p}) \geq i_\mathfrak{p} + j_\mathfrak{p}$ y por lo tanto $S = \{\mathfrak{p} : \exp(ab, \mathfrak{p}) \geq i_\mathfrak{p} + j_\mathfrak{p}\} \in D(\mathfrak{m})$. Para la inclusión inversa fijamos $a \in \mathfrak{m}^{^\circ i + ^\circ j}$ y escribimos $(a) = \prod \mathfrak{q}^{k(\mathfrak{q})}$ donde $^\circ k \geq {}^\circ i + {}^\circ j$. Podemos tomar $^\circ k = {}^\circ k_1 + {}^\circ k_2$ con $^\circ k_1 \geq {}^\circ i, {}^\circ k_2 \geq {}^\circ j$. Sean:

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{q}^{k_1(\mathfrak{q})}, \mathfrak{b} = \prod \mathfrak{q}^{k_2(\mathfrak{q})}.$$

Entonces $a \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}^{^\circ i}\mathfrak{m}^{^\circ j}$ como queríamos. □

Teorema 7.5. *El $\mathfrak{m}$-ideal $\mathfrak{m}^s$ es primo si y sólo si s es aditivo o $s = 1$. Por tanto, en particular, en la correspondencia entre $\mathfrak{m}$-ideales y los $\mathfrak{M}$-ideales, los ideales primos de un lado están en correspondencia con los ideales primos del otro lado.*

Demostración. El segundo enunciado se sigue inmediatamente del primero, ya que los ideales correspondientes son asociados con la misma cortadura. Esta correspondencia entre los $\mathfrak{m}$-ideales primos y los $\mathfrak{M}$-ideales primos, a primera vista puede parecer evidente, pero sí requiere de una prueba.

Fijemos un $\mathfrak{m}$-ideal $\mathfrak{m}^s$ y asumimos que s es aditivo. Entonces $\mathfrak{m}^s$ es primo, ya que si $ab \in \mathfrak{m}^s$, entonces

$$\exp(a, \mathfrak{m}) + \exp(b, \mathfrak{m}) = \exp(ab, \mathfrak{m}) \geq s$$

(el hecho de que $\exp(\cdot, \mathfrak{m})$ sea un homomorfismo se sigue de que $\exp(\cdot, \mathfrak{p})$ lo es para todo $\mathfrak{p} \in \wp$) y así por la aditividad de s, $\exp(a, \mathfrak{m}) \geq s$ o $\exp(b, \mathfrak{m}) \geq s$, así que a o b está en $\mathfrak{m}^s$.

Si $\mathfrak{m}^s$ es primo y $s > 1$, $^\circ m, {}^\circ n < s$ entonces $\mathfrak{m}^s \not\supseteq \mathfrak{m}^{^\circ m}, \mathfrak{m}^{^\circ n}$, así $\mathfrak{m}^s \not\supseteq \mathfrak{m}^{^\circ m}\mathfrak{m}^{^\circ n} = \mathfrak{m}^{^\circ m + ^\circ n}$ el cual prueba que $^\circ m + {}^\circ n < s$, entonces s es aditivo. □

Corolario 7.2. *Un ideal $\mathfrak{a}$ es primo si y sólo si, cumple con las siguientes propiedades:*

1. *$\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal, para algún $\mathfrak{m}$.*

2. *Si para toda a, $a^2 \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a}$.*

Demostración. [⇒] Por Teorema 5.1, $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal, para algún $\mathfrak{m}$. 2. se cumple por ser $\mathfrak{a}$ primo.

[⇐] como $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{m}$-ideal, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^s$, con s una cortadura. Entonces tenemos que probar que s es aditiva, supongamos que no lo es, que existe $n \leq s$ tal que $2n \nleq s$, por tanto tenemos las siguientes contenciones:

$$\mathfrak{m}^n \supset \mathfrak{m}^s \supset \mathfrak{m}^{2n}$$

Tomemos $a \in \mathfrak{m}^n - \mathfrak{m}^s$, pero como $a^2 \in \mathfrak{m}^{2n} \subset \mathfrak{m}^s = \mathfrak{a}$, entonces por [2.] $a \in \mathfrak{a} = \mathfrak{m}^s$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto s es aditiva, así que $\mathfrak{a}$ es primo. □

Capítulo 8

Ideales Generales

Nuestra intención es expresar a cada ideal $\mathfrak{a}$ de O en la forma:

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} \mathfrak{m}^{s_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m})} \tag{8.1}$$

donde $\mathcal{M}$ será el espacio de los ideales máximos, y $s_{\mathfrak{a}}$ toma valores en el conjunto de cortaduras de Dedekind en ${}^{\circ}\mathbb{N}_D$ donde $D = D(\mathfrak{m}), \mathfrak{m} \in \mathcal{M}$. Una manera de hacer esto comprensible es realizar lo siguiente.

Comenzamos definiendo el siguiente conjunto:

Sea ${}^{\circ}\hat{\mathbb{N}}_D$ la compleción de Dedekind de ${}^{\circ}\mathbb{N}_D$, es decir

$${}^{\circ}\hat{\mathbb{N}} = \{s : s \text{ es una cortadura de Dedekind en } {}^{\circ}\mathbb{N}\}$$

con la operación suma antes definida. Notemos que ${}^{\circ}\hat{\mathbb{N}}$ tiene un orden lineal (véase [5] para más propiedades sobre la aritmetica de ${}^{\circ}\hat{\mathbb{N}}_D$).

Ahora sea:

$$\hat{\mathcal{N}} = \{(\mathfrak{m}, c) : \mathfrak{m} \in \mathcal{M}, c \in {}^{\circ}\hat{\mathbb{N}}_D, D = D(\mathfrak{m})\}.$$

El espacio $\mathcal{M}$ de ideales máximos es visto como un subconjunto abierto denso del espacio de Stone de $\mathcal{D}(\wp)$. En efecto si $X \in \mathrm{Def}(\wp)$, entonces $X \subset \wp$ definible, así tenemos $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}\in X} \mathfrak{p} = (a, b) \subset \mathfrak{m}$ para algún ideal máximo $\mathfrak{m}$, por lo tanto $X = S_{a,b} \in D(\mathfrak{m})$. $\hat{\mathcal{N}}$ es una gavilla sobre $\mathcal{M}$. Dando una topología a $\hat{\mathcal{N}}$ asociando a cualquier definible $S \subseteq \mathcal{M}$ y cualesquiera $f, g : S \to {}^{*}\mathbb{N}$ funciones definibles el conjunto abierto básico:

$$O_{S,f,g} = \{(\mathfrak{m}, c) \in \hat{\mathcal{N}} : \mathfrak{m} \in S, {}^{\circ}g < c < {}^{\circ}f,\ D = D(\mathfrak{m})\}$$

donde ${}^{\circ}f, {}^{\circ}g \in {}^{\circ}\mathbb{N}_D$ son como en el Capitulo 5.

Cualquier función $s : \mathcal{M} \to \hat{\mathcal{N}}$ satisfaciendo $\pi \circ s = \mathrm{id}$ (con π la proyección de $\hat{\mathcal{N}}$ a $\mathcal{M}$ y id la identidad en $\mathcal{M}$) es llamada una sección de $\hat{\mathcal{N}}$. No usaremos las secciones continuas de $\hat{\mathcal{N}}$, en vez de eso utilizaremos las secciones semicontinuas de $\hat{\mathcal{N}}$, las cuales están definidas como las secciones de $\hat{\mathcal{N}}$ que son continuas con respecto a la siguiente topología más gruesa:

$$O_{S,f} = \{(\mathfrak{m}, c) \in \hat{\mathcal{N}} : \mathfrak{m} \in S, c < {}^{\circ}f \text{ donde } {}^{\circ}f \in {}^{\circ}\mathbb{N}_D,\ \text{con } D = D(\mathfrak{m})\}$$

.

Vamos a relacionar los ideales de $\mathcal{O}$ y las secciones semicontinuas de $\hat{\mathcal{N}}$ como sigue. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathcal{O}$, sea $s_{\mathfrak{a}} : \mathcal{M} \to \hat{\mathcal{N}}$ definida por $s_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}, c)$ donde c está determinada por $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^c$ (aquí $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, con $\mathfrak{a}$ localizado en $\mathfrak{m}$; esto es un $\mathfrak{m}$-ideal).

Teorema 8.1. *La correspondencia $\mathfrak{a} \mapsto s_{\mathfrak{a}}$ es un isomorfismo entre el retículo de ideales de $\mathcal{O}$ y el retículo de secciones semicontinuas con soporte compacto de $\hat{\mathcal{N}}$. Respecto a esta correspondencia, la multiplicación de ideales corresponde a la adicción puntual de secciones, siendo esta adición la adición de cortaduras.*

Demostración. En lo que concierne a la adicción de cortaduras, revise el Teorema 7.4. Es claro que cada $s_{\mathfrak{a}}$ tiene soporte compacto (ya que el soporte de una función es cerrado y el espacio de Stone es compacto) y que la correspondencia $\mathfrak{a} \mapsto s_{\mathfrak{a}}$ es $1-1$ puesto que si dos ideales tienen la misma localización en cada ideal máximo, deben coincidir. Por tanto debemos verificar que el rango de $\mathfrak{a} \mapsto s_{\mathfrak{a}}$ es precisamente el conjunto de secciones semicontinuas con soporte compacto.

Observemos en primer lugar que

$$s_{\mathfrak{a}} = \operatorname*{ínf}_{a\in\mathfrak{a}} s_{(a)}.$$

Ya que para cualquier a, b tenemos $s_{(a,b)} = \text{ínf}(s_{(a)}, s_{(b)})$, sólo tenemos que mostrar que cualquier sección semicontinua es un ínfimo de las secciones continuas de la forma $s_{(a,b)}$ (sólo trataremos con la secciones con soporte compacto). Esto es casi directo de la topología general. (Usando el teorema chino del Resto). En efecto, sea s una sección semicontinua con soporte compacto, así podemos hallar, utilizando el teorema chino del resto, $A = \{a \in \mathcal{O} | a \in \mathfrak{m}^c,\ \text{para todo } \mathfrak{m},\ \text{con } s(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}, c) \text{ y } c \neq 0\}$, es decir, podemos hallar a en cada elemento del sopote de la sección s. y como para cualesquiera par de elementos $a, b \in A$, $s_{(a,b)} = \text{ínf}(s_{(a)}, s_{(b)})$, tenemos una sucesión en el soporte de s, y ya que dicho soporte es compacto, entonces $s = \text{ínf}\, s_{(a,b)}$. □

Bibliografía

[1] D. A. Anapolitanos *A note on definable skolem functions*. Bulletin the Greek Mathematical Society, volume 29, 1998.

[2] Gregory Cherlin and J. Hirschfeld. Ultrafilters and ultraproducts in non-standard analysis. In *Contributions to Non-standard Analysis* [6], pages 261–280.

[3] Gregory L. Cherlin. Ideals of integers in nonstandard models of arithmetic. In Weispfenning and Saracino, editors, *Model Theory and Algebra*, number 498 in Lecture Notes in Mathematics, pages 60–90. Springer-Verlag, 1975.

[4] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.

[5] Richard Kaye. The arithmetic of cuts in models of arithmetic. *Math. Log. Q.*, 59(4-5):332–351, 2013.

[6] W.A.J. Luxemburg, A. Robinson, and Contributions to Non-Standard Analysis. *Contributions to Non-standard Analysis*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland, 1970.

[7] D. Marker. *Model Theory : An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.

[8] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[9] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1999.

[10] L. Pacholski, J. Wierzejewski, and A.J. Wilkie. *Model Theory of Algebra and Arithmetic: Proceedings of the Conference on Applications of Logic to Algebra and Arithmetic Held at Karpacz, Poland, September 1-7, 1979*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.

[11] Julia Robinson. The undecidability of algebraic rings and fields. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 10:950–956, 1959.

[12] Raymond M. Smullyan. *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford University Press, USA, 1992.