



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

HACES PRINCIPALES, HOLONOMÍA Y SU  
APLICACIÓN AL TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE  
DE RHAM

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

IVÁN FAVELA MENDOZA



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. EUGENIO GARNICA VIGIL

Ciudad Universitaria, D.F.  
2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Favela  
Mendoza  
Iván  
55 13 01 83 20  
Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
305273811

2. Datos del tutor

Dr  
Eugenio  
Garnica  
Vigil

3. Datos de sinodal 1

Dr  
Pierre  
Michel  
Bayard

4. Datos de sinodal 2

Dr  
Héctor Fidencio  
Sánchez  
Morgado

5. Datos de sinodal 3

Dr  
Alberto León  
Kushner  
Schnur

6. Datos de sinodal 4

M en C  
José Antonio  
Gómez  
Ortega

*A mi abuela y mi madre,  
Marcelina e Iván.*

# Haces Principales, Holonomía y su aplicación al Teorema de descomposición de De Rham

Iván Favela Mendoza

21 de abril de 2015

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Variedades Diferenciales</b>	<b>1</b>
1.1. Estructura Diferencial . . . . .	1
1.2. Variedades Riemannianas . . . . .	5
1.3. Funciones con valores en un espacio vectorial . . . . .	7
1.4. Distribuciones y Teorema de Frobenius . . . . .	9
1.5. Grupos de Lie . . . . .	10
<b>2. Haces Fibrados</b>	<b>13</b>
2.1. Fibrados sobre Variedades . . . . .	13
2.2. Haces Principales . . . . .	15
2.3. Haz Asociado . . . . .	17
2.4. Conexiones en Haces Principales . . . . .	19
2.5. Grupo de Holonomía . . . . .	24
2.6. Forma de Curvatura y Mapeos de conexiones . . . . .	28
<b>3. Conexiones Riemannianas</b>	<b>33</b>
3.1. Transporte paralelo en haces asociados . . . . .	33
3.2. Geodésicas y desarrollos . . . . .	36
3.3. Conexiones Riemannianas . . . . .	41
3.4. Grupo de Holonomía Lineal . . . . .	44
<b>4. Teorema de descomposición de De Rham</b>	<b>51</b>

# Introducción

A consideración del lector, el primer capítulo pretende dar una introducción general y rápida de los conceptos básicos de geometría diferencial, esto con el objetivo de hacer un vínculo con el contenido de los siguientes capítulos, ya que a través del desarrollo de conexiones en haces principales se pueden obtener elementos fundamentales de geometría diferencial, así como el término geodésica y la construcción del mapeo exponencial sin considerar una variedad con una métrica riemanniana y que al tomarla se obtenga una construcción equivalente. Los temas centrales a tratar son los siguientes: en una situación general se desarrollarán los conceptos de Haces Principales  $P(M, G)$ , Haces Vectoriales  $(E, M, \pi_E, \mathbb{F}^k)$ , Haces asociados  $E(P, F)$  y distribuciones sobre variedades diferenciales. Para la variedad base  $M$ , el ejemplo típico para entender estas construcciones es el Haz lineal  $L(M)$  y la variedad tangente  $TM$  (que también es un haz vectorial) como uno de los haces asociados más importantes a este haz principal. Naturalmente, la teoría de Lie juega un papel sobresaliente para el desarrollo de este trabajo, tanto en grupos como en álgebras de Lie.

Dado un grupo de Lie  $G$ , un haz principal  $P$  es un  $G$ -espacio que se proyecta sobre la variedad  $M$  con la particularidad de que la proyección  $\pi$  sea localmente trivial, por lo que la fibra en cada punto es difeomorfa a  $G$ . A través de la acción de  $G$  obtenemos una distribución  $\mathfrak{G}$   $G$ -invariante que se origina a partir del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , llamada Distribución Fundamental. Enseguida introducimos el concepto de Conexión  $\Gamma$  sobre  $P$ , nuevamente una distribución  $G$ -invariante complementaria a la Fundamental. La distribución Fundamental es representada como una vertical y la Conexión como una horizontal en el espacio tangente a  $P$ . Mediante estos dos objetos podemos definir caminos horizontales  $\tau^*$  en  $P$  que se proyectan sobre un camino  $\tau$  en  $M$  predeterminado, en particular, los caminos que se proyectan sobre un lazo en  $M$  con punto inicial y final  $x$  están determinados de manera única por su punto inicial en la fibra de  $x$ . Es así como presentamos el concepto de Holonomía. El conjunto de lazos con punto inicial y final  $x$  en  $M$  es un grupo y de aquí se induce una acción en la fibra de  $x$  que genera el grupo de holonomía  $\Phi(x)$ , y que básicamente es el mismo para todo punto en  $M$  donde cabe mencionar que  $\Phi(x)$  es un grupo de Lie.

La conexión  $\Gamma$  en  $P$  se puede llevar a cualquier haz asociado y así definir el transporte paralelo, una herramienta básica para toda esta teoría. Particularmente en una variedad riemanniana  $(M, g)$ , de todas las conexiones en el haz lineal tomaremos la de Levi-Civita (la única que es simétrica y compatible con la métrica) para aplicar la holonomía, donde el grupo de holonomía lineal  $\Psi(x)$  actúa en  $T_x M$  en forma de isometrías. Por último,

haciendo teoría de representaciones se obtiene el teorema de descomposición de De Rham, que establece que una variedad simplemente conexa y completa se puede descomponer de manera única como producto de irreducibles salvo permutaciones, donde el término irreducible se define a partir de la acción del grupo de holonomía lineal sobre el espacio tangente a  $M$  en el punto en cuestión.

En este trabajo no abordaremos la clasificación de variedades riemannianas irreducibles; sin embargo, podemos comentar que se conocen todas: Las euclidianas que son de dimensión uno, los espacios Simétricos y las variedades de Berger (espacios no simétricos). El espacio  $\mathbb{R}^n$  es euclidiano (producto de  $n$  espacios irreducibles dados por el producto cartesiano) y todas las esferas son espacios simétricos irreducibles. Las variedades de Berger son de mi interés y me gustaría estudiarlas en el futuro para dar continuidad a este trabajo.



# Capítulo 1

## Variedades Diferenciales

### 1.1. Estructura Diferencial

**Definición 1.1.1.** Sea  $M$  un conjunto, diremos que  $M$  tiene estructura diferencial si existen funciones biyectivas  $\chi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  donde  $\alpha$  está en un conjunto de índices  $\Lambda$  y  $U_\alpha$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , tales que cumplen con las siguientes propiedades:

1.  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \chi_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. Si  $\chi_\alpha(U_\alpha) \cap \chi_\beta(U_\beta) = W$ , los conjuntos  $\chi_\alpha^{-1}(W)$  y  $\chi_\beta^{-1}(W)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y la función  $\chi_\beta^{-1} \circ \chi_\alpha : \chi_\alpha^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \chi_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$  es diferenciable en el sentido euclidiano.
3. La familia  $\mathfrak{F} = \{(\chi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  es llamado atlas y es maximal con el orden dado por  $\subset$  bajo las condiciones anteriores.

El conjunto  $M$  adquiere una topología dada por la estructura diferenciable, es decir, los subconjuntos  $\chi_\alpha(U_\alpha)$  son vecindades abiertas para todo punto de  $M$ . La condición de maximalidad del atlas no es necesaria, es decir, al tener una estructura diferenciable sabemos que éste puede ser completado a un atlas maximal, por lo que podemos manejar una estructura diferenciable pensando siempre en completarlo.

El par ordenado  $(\chi_\alpha, U_\alpha)$  se conoce como carta coordenada y  $M$  es llamada  $n$  - variedad diferenciable o variedad diferenciable de dimensión  $n$  o simplemente la denotaremos como  $M^n$ .

**Definición 1.1.2.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  variedades diferenciables de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente, una función  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  es diferenciable en  $p \in M_1$  si para dos cartas  $(\chi, U)$  y  $(\bar{\chi}, V)$  para  $p$  y  $\varphi(p)$  respectivamente, la función

$$\bar{\chi}^{-1} \circ \varphi \circ \chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en el sentido euclidiano. Se dice que  $\varphi$  es diferenciable si lo es en todo punto de  $M$ .

Observamos que al considerar un punto  $p$  en una variedad  $M^n$  y una carta  $(\chi, U)$  automáticamente la vecindad  $\chi(U)$  de  $p$  adquiere coordenadas locales  $x_1, \dots, x_n$  a través del homeomorfismo  $\chi$ , es decir, para cualquier punto  $q \in \chi(U)$  se tiene que  $\chi^{-1}(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$  y de ahora en adelante  $\chi^{-1}(p) = 0$  siempre que tomemos una carta a partir de el punto dado  $p$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad diferenciable, una función diferenciable  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  se llama curva suave en  $M$ , definimos el vector tangente a la curva en el punto  $c(0)$  como la función  $c'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{D}$  es la familia de funciones en  $M$  diferenciables en el punto  $c(0)$ , dada por

$$c'(0)(f) = \frac{\partial}{\partial t} f \circ c \Big|_{t=0}.$$

Y denotaremos el conjunto de vectores en el punto  $p$  como  $T_p M = \{c'(0) \mid c \text{ es una curva en } M\}$  llamado el espacio tangente a  $M$  en  $p$ .

**Observación 1.1.4.** Si  $\chi(U)$  es una vecindad coordenada para  $p = c(0)$  en  $M$  con coordenadas locales  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definidas por la carta, tenemos que  $f \circ \chi = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\chi^{-1} \circ c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ . Por lo que  $f \circ c = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  y el vector tangente a  $c$  se expresa como

$$c'(0)(f) = \frac{\partial}{\partial t} F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Es decir, la expresión anterior depende sólo de la derivada de  $c$  en las coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y por lo tanto el vector tangente depende únicamente de la carta coordenada  $(\chi, U)$ .

**Definición 1.1.5.** Con las operaciones suma de funciones y la multiplicación por escalar el espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $T_p M$  es un espacio vectorial generado por las funciones  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Observación 1.1.6.** Dado que  $T_p M$  es un espacio vectorial (real) cuya dimensión es  $n$ , la función

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (1.1)$$

es un isomorfismo lineal  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ .

Una vez definido el espacio tangente a una variedad en un punto, podemos hablar de la diferencial de una función entre variedades diferenciales en cada punto, y diremos que una función es diferenciable si lo es en cada punto.

**Definición 1.1.7.** Sea  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  es una función diferenciable,  $d_p \varphi : T_p M_1 \rightarrow T_p M_2$  la diferencial de  $\varphi$  en  $p \in M$  se define como  $d_p \varphi(v) := (\varphi \circ c)'(0)$  donde  $c$  es una curva que en el tiempo  $t = 0$  pasa por  $p$  y cuyo vector tangente es  $v$ .

Es fácil ver que la diferencial es una transformación lineal entre espacios vectoriales. Diremos que  $\varphi$  es un difeomorfismo si es una función biyectiva y su inversa es una función diferenciable.

**Observación 1.1.8.** La diferencial de  $\varphi$  es un isomorfismo de espacios vectoriales en cada punto  $p \in M$  si  $\varphi$  es un difeomorfismo.

**Definición 1.1.9.** Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente, decimos que  $\psi : M \rightarrow N$  función diferenciable es una inmersión (sumersión) si  $d_p\psi : T_pM \rightarrow T_{\psi(p)}N$  es inyectiva (suprayectiva) para todo  $p \in M$ .

Si además  $\psi : M \rightarrow \psi(M) \subset N$  es un homeomorfismo, donde  $\psi(M)$  tiene la topología heredada de  $N$ , diremos que  $\psi$  es un encaje. Por lo tanto un subconjunto de una variedad  $N$  es una subvariedad si la inclusión es un encaje.

También diremos que  $\varphi : M \rightarrow M$  una función diferenciable en  $M$  es una transformación (diferenciable) si  $\varphi$  es difeomorfismo.

**Definición 1.1.10.** Definimos el haz tangente de una  $n$ -variedad como el conjunto  $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$ . El haz vectorial también se escribe comúnmente como  $TM = \cup_{p \in M} T_xM$ .

Notemos que  $TM$  es una  $2n$ -variedad diferenciable dada por el atlas  $\tilde{\mathfrak{F}} = \{(\tilde{\chi}_\alpha, \tilde{U}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ , donde una carta  $(\tilde{\chi}, \tilde{U})$  en  $\tilde{\mathfrak{F}}$  es de la forma  $\tilde{\chi} = \chi \times \phi$  y  $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^n$  con  $(\chi, U)$  una carta en el atlas  $\mathfrak{F}$  de  $M$  y  $\phi$  es el isomorfismo lineal definido en la Ecuación 1.1 (el atlas definido anteriormente no es maximal). Y definimos la proyección como la función diferenciable  $\pi : TM \rightarrow M$  dada por  $(p, v) \mapsto p$  para obtener el siguiente diagrama que interpretaremos más adelante como una trivialización local de  $TM$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{\chi}} & \tilde{\chi}(\tilde{U}) \subset TM \\
 \text{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 U & \xrightarrow{\chi} & \chi(U) \subset M
 \end{array}$$

Para  $M^n$  y  $N^m$  variedades consideremos el producto

$$M \times N = \{(p, q) \mid p \in M, q \in N\}$$

donde una carta en un punto  $(p_0, q_0)$  puede ser tomada como  $(\varphi \times \psi, U \times V)$  donde  $(\varphi, U)$  y  $(\psi, V)$  son cartas de  $p_0$  y  $q_0$  en  $M$  y  $N$  respectivamente.

Dado un vector  $Z_{(p_0, q_0)} = (X_0, Y_0)$  en  $T_{(p_0, q_0)}M \times N$  tenemos que existe una curva  $(p(t), q(t))$  en  $M \times N$  donde  $(p(0), q(0)) = (p_0, q_0)$  tal que el vector tangente a la curva  $p(t)$  en  $p_0$  es  $X_0$  y el vector tangente a la curva  $q(t)$  en  $q_0$  es  $Y_0$  en  $T_{p_0}M$  y  $T_{q_0}N$  respectivamente. Definimos  $\phi_1 : M \rightarrow M \times N$  como  $\phi_1(p) = (p, q_0)$  y  $\phi_2 : N \rightarrow M \times N$

como  $\phi_2(q) = (p_0, q)$ . Introducimos la notación  $\mathbf{X}_{(p,q_0)} = d_p\phi_1 X_p$  y  $\mathbf{Y}_{(p_0,q)} = d_q\phi_2 Y_q$  y para cada  $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{(p,q)}(f) &= \frac{d}{dt} f(p(t), q(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(p(t), q_0)|_{t=0} + \frac{d}{dt} f(p_0, q(t))|_{t=0} \\ &= \mathbf{X}_{(p,q)}(f) + \mathbf{Y}_{(p,q)}(f) \end{aligned}$$

De esta forma, el espacio tangente  $T_{(p,q)}M \times N$  se puede identificar con la suma directa de espacios vectoriales  $T_p M \oplus T_q N$ . Si ahora  $\phi : M \times N \rightarrow V$  es diferenciable, donde  $V$  es una variedad diferenciable y definiendo  $\phi_1 : M \rightarrow V$  como  $\phi_1(p) = \phi(p, q_0)$  y  $\phi_2 : N \rightarrow V$  como  $\phi_2(q) = \phi(p_0, q)$ , se obtiene fácilmente que

$$d_{(p_0,q_0)}\phi(Z_{(p_0,q_0)}) = d_{p_0}\phi_1(X_{p_0}) + d_{q_0}\phi_2(Y_{q_0}). \quad (1.2)$$

**Definición 1.1.11.** Un campo vectorial en  $M$  es una función  $X : M \rightarrow TM$ , se dirá que  $X$  es campo vectorial diferenciable si es diferenciable como función entre variedades y se denotará como  $X(p)$  o  $X_p$  con  $p \in M$ .

**Observación 1.1.12.** Para un campo  $X$  y una carta  $(\chi_\alpha, U_\alpha)$  en un punto  $p$ , el campo se escribe localmente como

$$X_p = \sum_{k=1}^n a_k(p) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (1.3)$$

donde  $a_k$  es una función diferenciable sobre  $U_\alpha$ . El conjunto de campos vectoriales sobre  $M$  se denota como  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Definición 1.1.13.** Sea  $\varphi : M \rightarrow M$  una transformación diferenciable sobre  $M^n$ . Denotaremos la diferencial de  $\varphi$  como  $d\varphi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida como

$$d\varphi(X)(p) = d_p\varphi(X_p).$$

Además definimos las operaciones suma y “producto” de campos vectoriales  $+, \cdot : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  como

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$$

como la suma usual de vectores en cada punto  $p$  y

$$(XY)(f) = X(Y(f))$$

donde  $f$  es una función diferenciable sobre  $M$ . Definimos el corchete de dos campos vectoriales como  $[X, Y] = XY - YX$ .

**Observación 1.1.14.** Para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , el corchete  $[ , ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  cumple con las siguientes propiedades:

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,

2.  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  donde  $a$  y  $b$  son números reales,
3.  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$  donde  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables sobre  $M$ ,
4.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (Identidad de Jacobi).

## 1.2. Variedades Riemannianas

**Definición 1.2.1.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad diferenciable, definimos una métrica Riemanniana  $g = \langle, \rangle$  como un producto interior en cada espacio tangente  $T_p M$  para cada punto  $p$  en  $M$  ( $g_p = \langle, \rangle_p$ ) que varía de manera diferenciable sobre  $M$ , es decir, si  $p \in M$  tiene una carta coordenadas  $(\chi_\alpha, U_\alpha)$  con coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$  es una función diferenciable para todo  $q \in \chi_\alpha(U_\alpha)$ .

Para una función diferenciable entre variedades riemannianas  $\varphi : M \rightarrow N$ , se dice que la función  $\varphi$  es una isometría si ocurre que

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d_p \varphi(u), d_p \varphi(v) \rangle_{\varphi(p)}$$

para todo punto  $p$  de  $M$  y  $u, v \in T_x M$  y que  $\varphi$  es una isometría local si para todo  $p$  en la variedad  $M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  tal que  $\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U)$  es una isometría.

**Definición 1.2.2.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana y  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Una conexión afín es una función  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que se denota  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  y que cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$  con  $f, g \in C^\infty(M)$ ,
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
3.  $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$ .

**Observación 1.2.3.** Si  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  es una curva suave sobre  $M$ , podemos derivar  $c$  como función entre variedades, es decir,  $\frac{dc}{dt} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow T_{c(t)} M$  define un campo vectorial sobre la curva  $c$ . En general si  $V$  es un campo vectorial sobre la curva  $c$ , decimos que  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  induce el campo  $V$  si  $Y(c(t)) = V(t)$ .

**Proposición 1.2.4.** Con las hipótesis de la observación anterior, se tiene que una conexión afín define un único campo vectorial sobre la curva  $c$  llamado derivada covariante de un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $c$ , dado como

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$$

que cumple con las propiedades:

1.  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ .

$$2. \frac{D}{dt}(fV) = f\frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}V.$$

Diremos que un campo vectorial  $V(t)$  es paralelo a lo largo de una curva  $c(t)$  si  $V(t) \in T_{c(t)}M$  y  $\frac{DV}{dt} = 0$  para todo  $t$ .

**Proposición 1.2.5.** *Si  $c(t)$  es una curva en  $M$  y  $V_0$  vector en el punto inicial a la curva, entonces existe un único campo vectorial paralelo  $V(t)$  a lo largo de  $c$  tal que  $V(0) = V_0$  llamado el transporte paralelo de  $V_0$  a lo largo de  $c$ .*

Además diremos que una conexión  $\nabla$  es compatible con una métrica riemanniana  $g = \langle, \rangle$  si para cualquier curva  $\alpha$  y cualesquiera campos vectoriales paralelos  $X$  y  $Y$  sobre  $\alpha(t)$  se tiene que el producto  $\langle X, Y \rangle_{\alpha(t)}$  es constante para todo  $t$ .

**Definición 1.2.6.** Una conexión afín  $\nabla$  en una variedad riemanniana  $M$  es simétrica si  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Teorema 1.2.7** (Levi-Civita). *Dada una variedad riemanniana  $(M, g)$  existe una única conexión afín  $\nabla$  simétrica y compatible con la métrica.*

Definiremos una geodésica como una curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  sobre  $M$  si cumple que  $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ . Las geodésicas son curvas muy especiales, ya que jugarán el papel de rectas en la variedad  $M$ , es decir, curvas que minimizan distancias, por lo que se construye una función llamada exponencial. Al igual que las cartas, la función (o mapeo) exponencial se define localmente a través del espacio tangente, es decir, dado un punto  $p$  en la variedad existe una vecindad  $W$  del origen en  $T_p M$ , tal que para cualquier  $X \in W$ , la condición inicial  $(p, X)$  define una geodésica  $\gamma_t$  a través del mapeo exponencial  $Exp_p : V \rightarrow M$ , de tal manera que  $\gamma_0 = p$  y  $\dot{\gamma}(0) = X$ . Por lo que existe una vecindad  $U$  de  $p$  en  $M$ , donde todos los puntos en la vecindad pueden ser unidos con  $p$  a través de una geodésica. La construcción de la función puede consultarse en [2, pág. 72]. Más adelante se construirá el mapeo exponencial utilizando herramientas que son equivalentes a las que se utilizan comúnmente.

**Definición 1.2.8.** Una variedad Riemanniana  $M$  es completa (o geodésicamente completa) si para todo punto  $q$  en  $M$ , la función exponencial  $Exp_q$  está definida para todo  $v \in T_q M$ .

**Teorema 1.2.9** (Hopf-Rinow). *Sea  $M$  una variedad riemanniana conexa, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $M$  es una variedad completa.
2.  $M$  es completo como espacio métrico (con la métrica  $d_g$  generada por la métrica riemanniana).
3. Todo conjunto acotado (con respecto la métrica  $d_g$ ) es relativamente compacto.

Además, si alguno de estos se cumple, entonces para cualquier  $q \in M$  existe una geodésica  $\gamma$  que une a  $q$  y a  $p$  tal que  $Long(\gamma) = d(p, q)$ .

Se le agregará en el Capítulo 3 una equivalencia más, la cual tendrá un peso muy importante en la prueba del teorema final.

### 1.3. Funciones con valores en un espacio vectorial

Como vimos anteriorente, el espacio tangente a una variedad en cada punto es un espacio vectorial (real o complejo) que podemos identificar con un espacio euclidiano. Para el espacio  $\mathbb{R}^n$  siempre consideraremos la estructura diferenciable generada por la carta  $(Id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)$ , por lo que cada espacio vectorial sobre los reales (o los complejos) también puede ser considerado como una variedad diferenciable.

Denotaremos entonces  $C^\infty(M, V)$  como el conjunto de todas las funciones diferenciables  $f : M \rightarrow V$  donde  $V$  es un espacio vectorial con la estructura diferenciable de un espacio euclidiano, y  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  lo denotaremos simplemente como  $C^\infty(M)$ . La construcción de espacio tangente nos acerca a esta última definición, pues como habíamos visto, un vector  $X_p \in T_p M$  en el espacio tangente a una variedad  $M$  en el punto  $p$  opera funciones diferenciables alrededor de un punto y recibimos nuevamente una función diferenciable, y es por eso que un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  además de ser una función diferenciable al tangente  $TM$  también es considerada como un operador

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

en el espacio de funciones diferenciables con valores reales dado como  $X(f)(p) = d_p f$ . Además consideramos a  $C^\infty(M, V)$  como un  $C^\infty(M)$ -módulo, es decir, para  $f \in C^\infty(M)$  y  $H \in C^\infty(M, V)$  se tiene que  $f \cdot H$  es nuevamente un elemento de  $C^\infty(M, V)$ .

**Definición 1.3.1.** Una forma  $r$ -forma diferencial es una función

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-veces}} \longrightarrow C^\infty(M, V)$$

multilineal y antisimétrica, es decir,

i) Para  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$  y  $g, h \in C^\infty(M)$  y cualquier índice  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, g \cdot X_i + h \cdot X'_i, \dots, X_r) = \\ g \cdot \omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_r) + h \cdot \omega(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_r). \end{aligned}$$

ii) Para una permutación de índices  $\pi : (1, 2, \dots, r) \rightarrow (\pi(1), \dots, \pi(r))$

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = (-1)^{\Delta_\pi} \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(r)}),$$

donde  $\Delta_\pi$  es la paridad de la  $\pi$ .

A partir de una carta  $(U, \chi)$  sabemos que cada campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tiene una expresión local

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde  $a_i \in C^\infty(M)$  por lo que podemos definir las 1-formas locales  $dx^1, \dots, dx^n$  para la coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  dadas por la regla de correspondencia

$$dx^j(X)(f) = a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Denotamos  $\Omega^r(M)$  al conjunto de  $r$ -formas diferenciales definidas en una variedad  $M^n$ . Como consecuencia de la antisimetría de las formas, si  $n < r$  se tiene que  $\omega \equiv 0$  si  $\omega$  es una  $r$ -forma y definimos  $\Omega(M) = \cup_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$ . Ahora veremos con la operación producto exterior  $\wedge$  cómo construir formas de grado superior a partir de formas de grados inferiores.

**Definición 1.3.2.** Para  $\omega_1 \in \Omega^r(M)$  y  $\omega_2 \in \Omega^s(M)$  la  $r+s$ -forma  $\omega_1 \wedge \omega_2$  se define como

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_{r+s}) \\ = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi} (-1)^{\Delta_{\pi}} \omega_1(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(r)}) \omega_2(X_{\pi(r+1)}, \dots, X_{\pi(r+s)}) \end{aligned}$$

donde la suma se efectúa sobre todas las posibles permutaciones  $\pi$ .

Con la definición anterior obtenemos que  $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{r+s} \omega_2 \wedge \omega_1$ .

**Ejemplo 1.3.3.** Para  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(M)$  tenemos que

$$\omega_1 \wedge \omega_2(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega_1(X)\omega_2(Y) - \omega_1(Y)\omega_2(X)).$$

En particular tenemos para las 1-formas que  $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$  y trivialmente  $\omega \wedge \omega = 0$ .

Si  $\psi$  es una transformación en  $M$  definiremos la función  $\psi^* : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  como  $(\psi^*\omega)(X) = \omega(d\psi(X))$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Consideraremos el operador derivada exterior para formas  $\mathbf{d}$  con la siguientes propiedades:

1. Para toda  $r$ ,  $\mathbf{d} : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$  es lineal.
2. Dados  $\omega_1 \in \Omega^r(M)$  y  $\omega_2 \in \Omega^s(M)$ , se tiene que

$$\mathbf{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathbf{d}(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge \mathbf{d}(\omega_2).$$

3.  $\mathbf{d}\mathbf{d} = 0$ .

**Proposición 1.3.4.** Si  $X_0, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\omega \in \Omega^r(M)$  entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\omega(X_0, X_1, \dots, X_r) = \\ \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $\hat{X}_i$  es el término que se omite. El caso  $r = 1$  (que se utilizará en el capítulo siguiente) se ve como

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}(X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])). \quad (1.5)$$

Si además  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable entre variedades, entonces definimos para  $\omega' \in \Omega^r(N)$  la  $r$ -forma  $\omega = f^*\omega'$  en  $M$  como

$$(f^*\omega')_p(X_1, \dots, X_r) = \omega'_{f(p)}(df(X_1), \dots, df(X_r)).$$

Por lo que se puede probar mediante la definición de derivada exterior que

$$\mathbf{d}(f^*\omega') = f^*\mathbf{d}(\omega'). \quad (1.6)$$



## 1.4. Distribuciones y Teorema de Frobenius

**Definición 1.4.1.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad, una distribución de dimensión  $k$  es una asignación para cada  $p \in M$ ,  $p \mapsto S_p$  donde  $S_p$  es un subespacio vectorial de  $T_pM$  de dimensión  $k$ .

Se dirá que la distribución es diferenciable si existen campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  (base para  $S$ ) sobre  $M$ , tales que para cada  $p$  en  $M$ , los vectores  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  son base para el subespacio  $S_p$ . Una distribución es *involutiva* si para dos campos vectoriales  $X, Y$  tales que  $X(p)$  y  $Y(p)$  están en  $S_p$  para todo  $p \in M$ , el bracket  $[X, Y](p)$  está en  $S_p$ , es decir, para  $X_i$  y  $X_j$  elementos de la base para  $S$ , su bracket se expresa como

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^k a_l X_l.$$

Una subvariedad  $N$  de  $M$  es una variedad integral de la distribución  $S$  si dado  $f : N \rightarrow M$  el encaje de  $N$  en  $M$  se cumple que  $d_p f(T_p N) = S_p$ . La variedad  $N$  es llamada variedad integral maximal de  $S$  si no existe otra variedad integral de  $S$  que contenga a  $N$  estrictamente.

**Teorema 1.4.2** (Frobenius). *Sea  $S$  una distribución involutiva en  $M$ . Para todo punto  $p$  de  $M$ , existe una única variedad integral maximal  $N(p)$  de  $S$  y cualquier otra variedad integral de  $p$  es una subvariedad abierta de  $N(p)$ .*

Este teorema tiene una formulación diferente, pero totalmente equivalente con las definiciones previas:

Consideramos  $\Omega(M)$  como el anillo de todas las formas en  $M^n$  con la operación derivada exterior. Decimos que  $\mathcal{I}$  es un ideal de  $\Omega(M)$  si  $d\theta \in \mathcal{I}$  siempre que  $\theta \in \mathcal{I}$ .

Una variedad integral de un ideal  $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$  es una subvariedad  $S$  de  $M$  tal que  $\theta(df_S) = 0$  para todo  $\theta \in \mathcal{I}$ , donde  $f_S : S \rightarrow M$  es el encaje de la subvariedad  $S$  en  $M$ .

**Teorema 1.4.3.** *Sea  $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$  un ideal generado por  $n - k$  1-formas  $\theta^1, \dots, \theta^{n-k}$  donde*

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{n-k} \gamma_j^i \wedge \theta^j$$

*para algunas 1-formas  $\gamma_j^i$  (de modo que  $\mathcal{I}$  es cerrado). Entonces para cada punto de la variedad  $M$  existe una carta  $(U, \varphi)$  donde las 1-formas  $\theta^1, \dots, \theta^{n-k}$  son linealmente independientes y el sistema de coordenadas locales  $(y^1, \dots, y^n)$  dado por la carta  $(U, \varphi)$  cumple que:*

1.  $\mathcal{I}$  es generado por las 1-formas  $dy^{k+1}, \dots, dy^n$ .
2. La variedad integral definida por  $\mathcal{I}$  viene dada por el sistema

$$y^{k+1} = c_{k+1}, y^{k+2} = c_{k+2}, \dots, y^n = c_n$$

donde  $c_j$  son constantes.

## 1.5. Grupos de Lie

**Definición 1.5.1.** Un Grupo de Lie es una variedad diferenciable  $G$  con una estructura de grupo tal que la función  $G \times G \rightarrow G$  dada por la regla de correspondencia  $(a, b) \mapsto a^{-1}b$  es diferenciable.

Sea  $a \in G$ , denotaremos las funciones  $b \mapsto ab$  y  $b \mapsto ba$  sobre  $G$  como  $L_a$  y  $R_a$  respectivamente. Sea  $X$  un campo vectorial sobre  $G$ , diremos que  $X$  es  $L$ -invariante ( $R$ -invariante) si  $dL_a \circ X = X \circ L_a$  ( $dR_a \circ X = X \circ R_a$ ). Para cada elemento  $a$  en  $G$  denotaremos  $ad(a) : G \rightarrow G$  definida como  $ad(a)(g) = a^{-1}ga$ .

**Definición 1.5.2.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  junto con una operación  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  que cumple con

1.  $[x, y] = -[y, x]$ .
2.  $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ .

Definimos el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como conjunto de campos vectoriales sobre un grupo de Lie  $G$  que son  $L$ -invariantes (junto con el corchete). Para cada  $a \in G$ , la diferencial de la función  $ad(a) : G \rightarrow G$  define una transformación en  $\mathfrak{g}$  que denotaremos como  $Ad(a)$  y cumple que

$$Ad(a)A = dR_a \circ dL_a(A) = dR_a(A)$$

gracias a la invariancia por la izquierda de  $A$  por ser un elemento de  $\mathfrak{g}$ .

**Observación 1.5.3.** La función  $\alpha_G(X) : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$  dada por  $\alpha_G(X) = X(e)$  es un isomorfismo entre  $\mathfrak{g}$  y  $T_e G$ , ya que si  $\alpha(X) = \alpha(Y)$  entonces se tiene que

$$X(a) = X \circ L_a(e) = dL_a \circ X(e) = dL_a \circ Y(e) = Y \circ L_a = Y(a)$$

por lo tanto  $\alpha$  es inyectiva. Para la sobreyectividad sea  $v \in T_e G$ , definimos el campo  $L$ -invariante  $X$  como  $X(a) = dL_a v$  para todo  $a \in G$ .

De esta manera, si  $d$  es la dimensión de  $G$  como variedad,  $\mathfrak{g}$  tiene dimensión  $d$  y es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie  $\mathfrak{X}(G)$ .

Además cada morfismo de grupos diferenciable  $\hat{\varphi} : G \rightarrow H$  entre grupos de Lie induce un morfismo de álgebras  $\check{\varphi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  que viene dado por  $\check{\varphi} = \alpha_H^{-1} \circ d_e \hat{\varphi} \circ \alpha_G$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \overset{\check{\varphi}}{\dashrightarrow} & \mathfrak{h} \\ \alpha_G \downarrow & & \downarrow \alpha_H \\ T_e G & \xrightarrow{d_e \hat{\varphi}} & T_e H \end{array}$$

**Definición 1.5.4.** Un grupo uniparamétrico de transformaciones (diferenciables) es una familia de funciones  $\{\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M\}$  (denotado como  $\varphi(t, a) = \varphi_t(a)$ ) donde  $M$  es una variedad diferenciable que satisface:

1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t : M \rightarrow M$  es una transformación diferenciable sobre  $M$ .
2. Para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ .

**Observación 1.5.5.** Cada grupo uniparamétrico de transformaciones en una variedad  $M$  induce localmente un campo vectorial  $X$  sobre  $M$ , definiendo  $X(p)$  como el vector tangente a la curva  $\varphi_t(p)$  donde  $\varphi_0(p) = p$ . El inverso también es posible, es decir, cada  $X$  campo vectorial sobre  $M$  induce un grupo uniparamétrico de transformaciones en  $G$  (ver [1] pag. 13).

**Proposición 1.5.6.** Sean  $X$  un campo vectorial en  $M$ ,  $a_t$  el grupo uniparamétrico de transformaciones de  $X$ , y  $\psi$  una transformación en  $M$ . Entonces el grupo uniparamétrico de  $d\psi(X)$  está dado por  $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ .

Suponiendo que  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tiene un grupo uniparamétrico  $\varphi_t$ , se tiene para  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  que

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y - d\varphi_t(Y)}{t}. \quad (1.7)$$

Diremos que  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es invariante respecto a una transformación  $\psi$  si  $d\psi(X) = X$ , es decir, para cada  $p$  en  $M$  se tiene que  $d\psi(X)(p) = X(\psi(p))$ . Por la Proposición 1.5.6 podemos deducir que su correspondiente grupo uniparamétrico  $\varphi_t$  conmuta con  $\psi$ , es decir,  $\varphi_t \circ \psi = \psi \circ \varphi_t$ .

Si tomamos  $A \in \mathfrak{g}$  con su respectivo grupo uniparamétrico de transformaciones  $\varphi_t$  obtenemos para cualquier  $g \in G$  que:

$$\begin{aligned} \varphi_t(g) &= (\varphi_t \circ L_g)(e) = (L_g \circ \varphi_t)(e) \\ &= L_g(\varphi_t(e)) = g\varphi_t(e) \\ &= R_{\varphi_t(e)}g, \end{aligned}$$

por lo que  $\varphi_t$  está definido globalmente en  $G$ . Considerando  $a_t = \varphi_t(e)$ , tenemos gracias a las propiedades de grupo uniparamétrico que

1.  $a_{t+s} = a_t a_s$ ,
2.  $a_0 = e$ ,

por lo tanto,  $A$  está en correspondencia con un subgrupo (uniparamétrico)  $a_t$  en  $G$ .

**Observación 1.5.7.** Aplicando  $\alpha_g^{-1}$  a una base  $\{v_1, \dots, v_d\}$  del espacio  $T_e G$  tenemos que el conjunto  $\{\alpha^{-1}(v_1), \dots, \alpha^{-1}(v_d)\}$  es una base de campos vectoriales para  $\mathfrak{g}$ . Denotamos  $\alpha^{-1}(v_j) = A_j \in \mathfrak{g}$  para  $1 \leq j \leq d$ .

**Definición 1.5.8.** Decimos que un grupo de Lie  $G$  actúa (diferenciamente por la derecha) sobre una variedad  $M$  si cumple que:

1. Todo elemento  $a$  en  $G$  induce una transformación (diferenciable) sobre  $M$ ,  $(a, p) \mapsto pa$ .

2. Para todo  $a$  y  $b$  elementos de  $G$  y  $p \in M$ ,  $p(ab) = (pa)b$ .

**Observación 1.5.9.** A través de la acción de  $G$  sobre  $M$ , todo elemento  $A$  de  $\mathfrak{g}$  induce un campo vectorial sobre  $M$  como sigue:

Considerando  $a_t$  el subgrupo paramétrico de  $A$  y tomando  $\tilde{\sigma}_p : G \rightarrow M$  por  $\tilde{\sigma}_p(a) = pa$ , obtenemos  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida como

$$\sigma(A)(p) = \frac{d}{dt} \tilde{\sigma}_p(a_t)|_{t=0}.$$

El campo  $\sigma(A)$  es llamado **campo fundamental** y se denota simplemente como  $A^*$ .

Un ejemplo de un grupo de Lie que utilizaremos en los siguientes capítulos es  $GL_n(\mathbb{R})$ , el conjunto de matrices de  $n \times n$  invertibles con coeficientes reales. La operación de grupo está dada por la multiplicación usual de matrices y la estructura diferenciable proviene de la identificación de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  con  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

## Capítulo 2

# Haces Fibrados

El concepto de haz fibrado está definido de manera general para espacios topológicos sin necesidad de una estructura diferenciable, sin embargo, aquí consideraremos siempre variedades diferenciales para poder manejar varias herramientas que dependen totalmente de la diferenciabilidad.

### 2.1. Fibrados sobre Variedades

**Definición 2.1.1.** Sea  $M^n$  una variedad diferenciable. Un haz fibrado sobre  $M$  es una cuarteta  $(E, M, F, \pi)$  donde  $E$  y  $F$  son variedades diferenciales,  $\pi : E \rightarrow M$  es una sumersión suprayectiva y para cada  $p$  en  $M$  existe una vecindad  $U \subset M$  y un homeomorfismo  $\psi$  entre  $\pi^{-1}(U)$  y  $U \times F$ ,

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\cong_{\psi}} & \pi^{-1}(U) \subset E \\ \text{proy}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{i} & U \subset M \end{array}$$

esta propiedad es llamada trivialización local y  $F$  es denominada la fibra en el punto  $p$ , esto gracias a que  $\pi^{-1}(\{p\}) \cong \{p\} \times F$ , que denotaremos por simplicidad como  $E_p$ .

Como primera observación, la dimensión de  $E$  es igual a la de  $M$  más la de  $F$  gracias a la trivialidad local de  $E$ .

El ejemplo de haz fibrado que podemos considerar hasta ahora es el haz tangente a una variedad  $M^n$ , es decir  $TM = (TM, M, \mathbb{R}^n, \pi)$ , donde  $\pi$  coincide con la proyección sobre el primer factor. De esta primera definición surgen varios tipos de fibrados sobre una variedad gracias a que no hemos hecho ninguna restricción con respecto a la fibra  $F$ . Para  $F$  considerado como un espacio vectorial tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.1.2.** Un haz vectorial sobre una variedad  $M$  es un haz fibrado  $(E, M, \mathbb{F}^k, \pi)$  donde  $F = \mathbb{F}^k$  es un espacio vectorial y la trivialización local considerada como el par ordenado  $(U, \psi)$  es llamado carta de haz. La familia de cartas de haz  $\mathfrak{F} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$

es llamado atlas de haz vectorial y cualesquiera dos elementos en la familia son compatibles, *i.e.*, si para cada  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  se tiene que  $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \{p\} \times \mathbb{F}^k \rightarrow \{p\} \times \mathbb{F}^k$  es un isomorfismo lineal.

Las definiciones de carta de haz y atlas de haz se consideran para cualquier tipo de haz fibrado, y las funciones de transición  $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$  tienen la propiedad de conservar la estructura algebraica que tengan además de la diferenciable de la fibra, esto se verá en la siguiente sección cuando la fibra es un grupo. El haz tangente  $TM$  es un haz vectorial cuyo atlas de haz vectorial es  $\tilde{\mathfrak{F}} = \{(U_\alpha, \tilde{\chi}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ , donde una carta de haz  $(U, \tilde{\chi})$  en  $\tilde{\mathfrak{F}}$  tiene la regla de correspondencia  $\tilde{\chi}(q, \vec{w}) = (q, \phi(\vec{w}))$  para  $\phi$  el isomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en  $T_x M$  definido en el primer capítulo a través de la carta  $(U, \chi)$  del atlas de la variedad diferenciable en  $p$ .

$$\begin{array}{ccc} \chi(U) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{\chi}} & \bar{\chi}(\bar{U}) \subset TM \\ \text{proy}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \chi(U) & \xrightarrow{i} & \chi(U) \subset M \end{array}$$

Figura 2.1: La trivialización local de  $TM$  dada por la familia  $\tilde{\mathfrak{F}}$ .

**Ejemplo 2.1.3.**  $T^*M = \{(p, v_p^*) | p \in M, v_p^* \in (T_p M)^*\}$  con fibra  $(T_p M)^*$  es naturalmente un haz vectorial, donde  $(T_p M)^*$  es el espacio dual del espacio tangente  $T_p M$ .

Ahora daremos un par de definiciones que ayudarán al manejo de fibrados y que se identificarán en algunos casos particulares (que hasta ahora sólo ha sido  $TM$ ).

**Definición 2.1.4.** Una sección (diferenciable) en un haz fibrado  $(E, M, F, \pi)$  es una función diferenciable  $s : M \rightarrow E$  y cumple que  $\pi_E \circ s = Id_M$ . Denotaremos como  $\mathcal{S}(E)$  al conjunto de secciones de  $E$  sobre  $M$ .

Las secciones en el haz tangente  $TM$  son precisamente  $\mathfrak{X}(M)$ , el conjunto de campos vectoriales diferenciales en  $M$  y  $\mathcal{S}(T^*M)$  es  $\Omega^1(M)$ , el conjunto de las 1-formas sobre  $M$ .

**Definición 2.1.5.** Sean  $(E', M', \mathbb{F}^l, \pi_{E'})$ ,  $(E, M, \mathbb{F}^k, \pi_E)$  haces vectoriales y  $F : E' \rightarrow E$  una función diferenciable. Decimos que  $F$  es una transformación entre haces si existe  $f : M' \rightarrow M$  diferenciable tal que  $\pi_E \circ F = f \circ \pi_{E'}$  y para todo  $z$  en  $M'$  se cumple que  $F(E'_z) \subset E_{f(z)}$  (diremos que  $F$  es fibrada) además de ser lineal en cada fibra.

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{F} & E \\ \pi_{E'} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Figura 2.2: El diagrama conmuta sobre las fibras.

Una forma de plantear las distribuciones a través de haces fibrados vectoriales es la siguiente:

**Definición 2.1.6.** Una distribución  $\Gamma$  sobre  $M$  de dimensión  $k$  visto como un fibrado es un haz vectorial  $(\Gamma, M, \mathbb{F}^k, \pi)$  donde  $\Gamma = \cup_{p \in M} \Gamma_p$  es una subvariedad de  $TM$  de dimensión  $n + k$ , con un atlas de haz vectorial dado por la familia  $\tilde{\mathfrak{F}} = \{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  cuya regla de correspondencia para una carta  $(U, \chi)$  viene dada como

$$\chi(p, (a_1, \dots, a_k)) = (p, \sum_{j=1}^k a_j Y_j(p)),$$

donde el conjunto  $\{Y_1, \dots, Y_k\}$  es una base de campos vectoriales sobre  $U$  para la distribución  $\Gamma$  y  $\pi$  es la restricción de la proyección a  $\Gamma$  en cada punto.

## 2.2. Haces Principales

**Definición 2.2.1.** Sea  $M^n$  variedad diferenciable y  $(P, M, G, \pi)$  haz fibrado donde  $G$  es un grupo de Lie de dimensión  $d$ .  $(P, M, G, \pi)$  es un haz principal (fibrado) si satisface las siguientes propiedades:

1.  $G$  actúa libremente por la derecha sobre  $P$ , es decir, si  $R_a u = ua = x$  para alguna  $u \in P$  entonces  $a = e$  ( $P$  es un  $G$ -espacio).
2.  $M$  es difeomorfo al cociente  $P/G$  y la proyección natural  $P \rightarrow P/G$  coincide con  $\pi$ .
3. La trivialización local en una vecindad  $U$  dada por  $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  tiene la forma  $\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$ , donde  $\phi(ua) = \phi(u)a$  para toda  $a \in G$ .

Denotaremos este haz simplemente como  $P(M, G)$  siempre que se hable de un haz fibrado con estas propiedades.

Fijando un elemento  $u_0$  tal que  $\pi(u_0) = x$ , se tiene que la fibra sobre  $x$  denotada  $G_x$  conserva la estructura de grupo de Lie ya que cada  $u$  en  $G_x$  tiene la forma  $u_0 a$  con  $a \in G$ . Notemos además que si  $P$  es un  $G$ -espacio entonces  $TP$  también lo es definiendo la acción como  $(u, \vec{v}) \cdot a = (ua, d_u R_a(\vec{v}))$  para  $\vec{v} \in T_u P$  y  $a \in G$ .

El ejemplo más sencillo para una haz principal es  $P = M \times G$  llamado el haz trivial, donde  $G$  es cualquier grupo de Lie que actúa en  $P = M \times G$  mediante la acción  $(x, a)b = (x, ab)$  y la proyección  $\pi$  dada como la proyección sobre el primer factor.

Para entender mejor el significado de conexiones afines en variedades riemannianas, mostraremos ahora dos ejemplos de haces principales, el haz de marcos lineales y afines, y veremos más adelante la relación que tienen estos dos en la construcción de conexiones en una variedad donde una métrica riemanniana no es necesaria.

**Ejemplo 2.2.2.** Sea  $M^n$  una variedad y  $G = GL_n(\mathbb{R})$  las matrices invertibles de  $n \times n$  con coeficientes reales. Denotamos  $L(M) = \{u = (x, \mathcal{B}_x) | x \in M\}$  el **Haz de marcos lineales** en  $M$  donde  $\mathcal{B}_x = \{X_1, \dots, X_n\}$  es una base del espacio vectorial  $T_x M$  en cada punto de la variedad  $M$  y llamaremos a los elementos de  $L(M)$  marcos lineales.

Un marco lineal  $u \in L(M)$  puede ser considerado como un isomorfismo lineal

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$$

dada por  $u(e_i) = X_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector canónico en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos la acción por la derecha de  $GL_n(\mathbb{R})$  sobre  $L(M)$  como

$$(x, \{X_1, \dots, X_n\})A = (x, \{u(Ae_1), \dots, u(Ae_n)\}),$$

denotaremos  $u(Ae_i) = A(X_i)$  y  $A(\mathcal{B}_x)$  será la aplicación de la matriz  $A$  a todos los elementos de  $\mathcal{B}_x$  para simplificar notación. Dicha acción es libre, ya que si  $(x, \mathcal{B}_x) = (x, A(\mathcal{B}_x))$  entonces  $u(Ae_i) = u(e_i)$  y tendríamos que  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ . Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  entonces cualquier vector  $X_i$  en  $\mathcal{B}_x$  se expresa como

$$(A_i^j) \frac{\partial}{\partial x_j} (p) = X_i(p),$$

donde  $(A_i^j)$  es una matriz invertible que varía diferenciablemente en  $U$ , por lo que  $\{x_1 \dots x_n\} \cup \{(A_1^1), (A_1^2), \dots, (A_n^n)\}$  son coordenadas locales en  $\pi^{-1}(U)$  y por lo tanto  $L(M)$  es localmente trivial.

**Ejemplo 2.2.3.** Consideramos  $\mathbb{A}^n = \{(\bar{\eta}, 1) | \bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n\}$  el espacio afín de  $\mathbb{R}^n$  y el grupo de transformaciones afines

$$A(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & \bar{\xi} \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(\mathbb{R}), \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

con la operación sobre  $\mathbb{A}^n$  dada como  $\begin{pmatrix} A & \bar{\xi} \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ 1 \end{pmatrix} = (A\bar{\eta}, 1) + (\bar{\xi}, 1)$ .

Definimos el **Haz de marcos afines** como  $A(M) = \{(x, \rho_x, \mathcal{B}_x) | x \in M, v_x \in T_x M\}$  donde la acción de grupo  $A(n, \mathbb{R})$  sobre  $A(M)$  se escribe como

$$\tilde{u}\bar{A} = (x, v_x, \mathcal{B}_x) \begin{pmatrix} A & \bar{\xi} \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix} = (x, \rho_x + u(\bar{\xi}), A(\mathcal{B}_x)).$$

Consideramos ahora el espacio afín definido por el espacio vectorial  $T_x M$ , llamado espacio tangente afín y denotado como  $A_x M$ . Cada elemento  $\tilde{u} = (x, \rho_x, \mathcal{B}_x)$  en  $A(M)$  define una transformación afín  $\tilde{u} : \mathbb{A}^n \rightarrow A_x M$  dada como

$$(\xi_1, \dots, \xi_n, 1) \longmapsto \rho_x + (\xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n).$$

El espacio tangente y el espacio tangente afín tiene una relación directa y esto se debe a que el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  y el espacio afín  $\mathbb{A}^n$  son esencialmente el mismo. Probar que  $A(M)$  es un haz principal es similar a la prueba que hicimos para  $L(M)$ .

**Definición 2.2.4.** Sean  $Q(N, H)$  y  $P(M, G)$  dos haces principales, decimos que una función  $f : Q(N, H) \rightarrow P(M, G)$  es una transformación entre haces si como función entre variedades  $f$  es diferenciable y existe  $\hat{f} : H \rightarrow G$  morfismo de grupos de Lie, tal que para todo  $v \in Q$  y  $b \in H$  la función cumple que  $f(vb) = f(v)\hat{f}(b)$ .

Con la notación de la definición anterior diremos que:



- La función  $f$  es un encaje si lo es como función diferenciable y que también  $\bar{f} : N \rightarrow M$  lo sea.
- $Q(N, H)$  es un subhaz de  $P(M, G)$  si identificamos  $Q$  con  $f(Q) \subset P$ ,  $H$  con  $\hat{f}(H) \leq G$  y  $N$  con  $\bar{f}(N) \subset M$ .
- $Q(M, H)$  es una reducción de la estructura de grupo de Lie  $G$  a  $H$  si  $N = M$  y  $\bar{f} = Id_M$ .
- La estructura de grupo de  $G$  es reducible a  $H$  un subgrupo de Lie de  $G$  ( $H \leq G$ ) si  $Q(M, H)$  es una reducción.

**Ejemplo 2.2.5.** Consideramos las inclusiones de  $\gamma : L(M) \rightarrow A(M)$  y  $\hat{\gamma} : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow A_n(\mathbb{R})$  como

$$(x, \mathcal{B}_x) \xrightarrow{\gamma} (x, \bar{0}_x, \mathcal{B}_x) \text{ y } A \xrightarrow{\hat{\gamma}} \begin{pmatrix} A & \bar{0} \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que  $\gamma(L(M))$  es un subhaz de  $A(M)$  donde  $\hat{\gamma}(GL_n(\mathbb{R})) \leq A_n(\mathbb{R})$ .

## 2.3. Haz Asociado

Consideraremos ahora otro tipo de haz fibrado, éste dependerá de un haz principal  $P(M, G)$ . Sea  $F^k$  un variedad donde  $G$  actúa por la izquierda, definimos una acción libre por la derecha de  $G$  sobre el producto  $P \times F$  como  $(u, \xi)a = (ua, a^{-1}\xi)$ , y consideramos  $E = P \times_G F$  el conjunto de clases de equivalencia definida por la acción del grupo. Escribiremos la clase de equivalencia  $[(u, \xi)]$  simplemente como  $u\xi$  para facilitar la notación y definimos la función diferenciable  $\pi_E : E \rightarrow M$  dada como  $\pi_E(u\xi) = \pi(u)$ . Para establecer una estructura local trivial en  $E$  consideramos a  $x$  en  $M$  y su correspondiente vecindad  $U$ , tal que  $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$ . Por la definición de  $E$  tenemos que

$$\pi^{-1}(U) \times_G F = \pi_E^{-1}(U),$$

utilizando la trivialidad local en  $P$  se tiene que  $\pi^{-1}(U) \times_G F \cong (U \times G \times F)/G$  donde la acción de  $G$  sobre el producto  $U \times G \times F$  se escribe como

$$(x, a, \xi)b = (x, ab, b^{-1}\xi);$$

de esta manera tenemos que  $[(x, a, \xi)] = [(x, e, a^{-1}\xi)]$  para cualquier  $a \in G$  donde obtenemos que  $\pi_E^{-1}(U) \cong U \times F$ . Por lo tanto, la fibra de  $E_x$  de  $E$  sobre  $x$  se puede identificar con la variedad  $F$ . El haz fibrado  $(P \times_G F, M, F, \pi_E)$  es llamado **Haz Fibrado Asociado** y se denota como  $E(P, F)$ .

El haz asociado no tiene ninguna restricción sobre su fibra, y como aporte consideraremos casi siempre que su fibra sea un espacio vectorial. Ahora veremos que el haz tangente es un objeto en común a  $L(M)$  y  $A(M)$  visto como haz asociado a ambos.

**Ejemplo 2.3.1.** Si consideramos  $P = L(M)$  y  $F = \mathbb{R}^n$ , la acción de  $GL_n(\mathbb{R})$  viene dada por el isomorfismo lineal que representa una matriz. Vamos a mostrar que  $L(M) \times_{GL_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$  es exactamente el haz tangente  $TM$ . Definimos la función  $p : L(M) \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$  como

$$p(u, \bar{\xi}) = p(x, \{X_1, \dots, X_n\}, \bar{\xi}) = (x, \xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n).$$

Veamos que la función  $p$  es constante en las fibras del espacio cociente  $E(L(M), \mathbb{R}^n)$ , i.e., si  $p(u, \bar{\xi}) = p(v, \bar{\eta})$  entonces  $[(u, \bar{\xi})] = [(v, \bar{\eta})]$ .

Sea  $v = (y, \bar{\mathcal{B}}_y)$ ; si  $p(u, \bar{\xi}) = p(v, \bar{\eta})$  tenemos que  $(v, \bar{\eta}) = (y, \{Y_1, \dots, Y_n\}, \bar{\eta})$  y obviamente  $x = y$ , además tenemos la ecuación

$$\xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n = \eta_1 Y_1 + \dots + \eta_n Y_n. \quad (2.1)$$

Como  $\mathcal{B}_x$  y  $\bar{\mathcal{B}}_x$  son dos marcos lineales en  $x$ , existe una matriz  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ; tal que  $\mathcal{B}_x = A(\bar{\mathcal{B}}_x)$ , es decir,  $X_i = A(Y_i)$  para  $0 \leq i \leq n$ , y junto con la ecuación anterior tenemos que  $\xi_i = A_i \eta_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , por lo que  $\bar{\xi} = A\bar{\eta}$ , que es lo mismo que  $\bar{\eta} = A^{-1}\bar{\xi}$ . Por lo tanto,  $v\bar{\eta} = (uA)(A^{-1}\bar{\xi}) = u\bar{\xi}$ ; como la función  $p$  es continua, suprayectiva, constante en las fibras del espacio cociente  $L(M) \times_{GL_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$  y además tiene la misma dimensión, llegamos a que  $TM \cong E(L(M), \mathbb{R}^n)$ .

$$\begin{array}{ccc} L(M) \times_{GL_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\bar{\pi}} & E(L(M), \mathbb{R}^n) \\ \downarrow p & \nearrow \cong & \\ TM & & \end{array}$$

Figura 2.3:  $p$  es constante en las fibras de  $\bar{\pi}$ .

**Ejemplo 2.3.2.** Para describir el haz asociado al haz de marcos afines utilizaremos el espacio tangente afín en cada punto  $x \in M$  denotado  $A_x M$  y definiremos el haz tangente afín  $A[M] = \cup_{x \in M} A_x M$ . De esta manera definimos la función  $\bar{p} : A(M) \times \mathbb{A}^n \rightarrow A[M]$  como

$$\bar{p}((x, \rho_x, \mathcal{B}_x), (\bar{\eta}, 1)) = \rho_x + (\eta_1 X_1 + \dots + \eta_n X_n),$$

donde se prueba de manera análoga que  $A[M] \cong E(A(M), \mathbb{A}^n)$ .

Ahora enunciaremos dos teoremas que nos ayudarán a reducir un haz principal.

**Teorema 2.3.3.** *Sea  $G$  un grupo de Lie,  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$  y  $M$  variedad paracompacta. El haz principal  $P(M, G)$  es reducible a un subhaz  $Q(M, H)$  si y sólo si  $E(P(M, G), G/H)$ , el haz fibrado asociado a  $P$ , admite un sección.*

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $E(P, F)$  un haz asociado donde la variedad base  $M$  es paracompacta y la fibra  $F$  es difeomorfa a un espacio euclidiano. Si  $A \subset M$  es cerrado, entonces toda sección  $\sigma : A \rightarrow E$  se puede extender a todo  $M$ . En particular para  $A$  igual al vacío existe una sección definida en  $M$ .*

El primer resultado forma parte de la teoría elemental de haces fibrados, por lo que no ahondaremos en su prueba y consideraremos este teorema válido. De esta forma la variedad  $M$  tendrá la propiedad de ser paracompacta (la prueba de este teorema puede ser consultado en [3]). El segundo es consecuencia inmediata de la paracompacidad de la variedad  $M$  y puede ser consultado en [1].

**Ejemplo 2.3.5.** Sea  $M$  una variedad (paracompacta). Consideramos el subgrupo cerrado  $O(n)$  del grupo de Lie  $GL_n(\mathbb{R})$  que consta de las matrices ortogonales ( $A^{-1} = A^t$ ) que preservan el producto interior en  $\mathbb{R}^n$ . Como el cociente  $GL_n(\mathbb{R})/O(n)$  es un espacio vectorial real de dimensión  $\frac{1}{2}n(n+1)$  obtenemos gracias al el teorema anterior que el haz  $Q(M, O(n))$  es una subhaz reducido de  $L(M)$ . Además podemos introducir una métrica en cada espacio tangente como sigue:

Cada  $u = (x, \{X_1, \dots, X_n\})$  elemento de  $Q$  define una métrica  $g$  en  $T_x M$  dada como  $g(X, Y) = \langle u^{-1}(X), u^{-1}(Y) \rangle$  donde  $\langle, \rangle$  es el producto real usual. Si  $A \in O(n)$  tenemos que  $(uA)$  cumple que

$$\begin{aligned} \langle (uA)^{-1}(X), (uA)^{-1}(Y) \rangle &= \langle A^{-1}u^{-1}(X), A^{-1}u^{-1}(Y) \rangle \\ &= \langle u^{-1}(X), u^{-1}(Y) \rangle \\ &= g(X, Y). \end{aligned}$$

Por lo que la métrica  $g$  no depende de  $u$ , de esta forma podemos dotar a  $M$  de una métrica en cada espacio tangente. Inversamente, dado  $(M, g)$  una variedad riemanniana consideramos el subconjunto  $Q$  de  $L(M)$  cuyos elementos son ortonormales con respecto a  $g$ , es decir,  $u \in Q$  si y sólo si  $\langle \xi, \eta \rangle = g(u\xi, u\eta)$ .  $Q$  es un subhaz de  $L(M)$  ya que para cualquier  $x \in M$  y  $\{X_1, \dots, X_n\}$  vectores en  $T_x M$  ortonormales con respecto a  $g_x$  existe  $u \in L(M)$  tal que  $u(e_i) = X_i$  y análogamente podemos ver que  $ub \in Q$  siempre que  $b \in O(n)$ .

El haz  $Q(M, O(n))$  es llamado **Haz de marcos ortonormales** y se denota como  $O(M)$ .

## 2.4. Conexiones en Haces Principales

En esta sección desarrollaremos el concepto de conexión y 1-forma de conexión en un haz fibrado principal con el objetivo de poner en correspondencia biunívoca la definiciones de conexión en haces fibrados y conexión afín de variedades riemannianas.

Consideramos un haz principal fibrado  $P(M, G)$ , para cada elemento  $u$  de  $P$  tenemos por la trivialidad local del espacio que el tangente  $T_u P$  en  $u$  es isomorfo a  $T_{\pi(u)} M \oplus T_{\phi(u)} G$  de la Definición 2.2.1 para una carta de haz  $(U, \psi)$ , por lo que cabe mencionar que la descomposición del espacio tangente no es canónica ya que depende de la trivialiación local.

Además cada campo vectorial fundamental  $A^*$  sobre  $P$  asociado a un elemento  $A$  en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  es tangente a la fibra en cada punto, es decir, para todo  $u \in P$  y  $G_x$  la fibra en  $u$  (con  $x = \pi(u)$ ) siempre se tiene que  $A_u^* \in T_u G_x$ . Tomando los campos fundamentales  $A_1^*, \dots, A_d^*$  asociados a una base en  $\mathfrak{g}$  obtenemos una base para el tangente a la fibra en cada punto que varía diferenciablemente. Llamaremos a esta distribución la

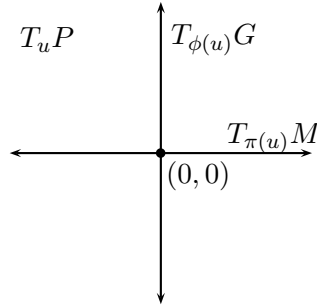


Figura 2.4: El tangente de  $P$  en  $u$  se ve como la suma directa  $T_{\pi(u)}M \oplus T_{\phi(u)}G$ .

**Distribución Fundamental**, la denotaremos como  $\mathfrak{G}$  y la manejaremos en el contexto de haz vectorial. Además, por la invariancia de la fibra bajo la acción de  $G$  tenemos que

$$d_u R_a(A_u^*) = (Ad(a^{-1})A)_{ua}^*$$

para cualquier  $a \in G$  y  $A \in \mathfrak{g}$ . Una vez establecido lo anterior tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.4.1.** Sea  $P(M, G)$  un haz fibrado principal. Una conexión  $\Gamma$  en  $P$  es una distribución de dimensión  $n$  sobre  $P$  que cumple:

1.  $T_u P = \Gamma_u \oplus \mathfrak{G}_u$  para todo  $u \in P$ .
2.  $\Gamma_{ua} = dR_a(\Gamma_u)$  para todo  $u \in P$  y  $a \in G$ , donde  $R_a$  es la transformación inducida por  $a \in G$  ( $R_a u = ua$ ).

Los subespacios vectoriales  $\Gamma_u$  y  $\mathfrak{G}_u$  son llamados **subespacio horizontal** y **subespacio vertical** respectivamente.

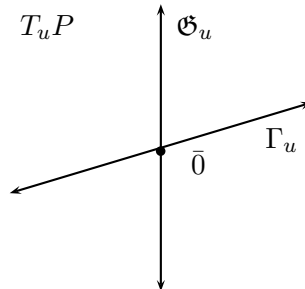


Figura 2.5: El tangente de  $P$  en  $u$  es la suma directa  $\mathfrak{G}_u \oplus \Gamma_u$

Por la trivialidad local del haz tenemos una descomposición de cada campo vectorial en su componente horizontal y componente vertical como elementos en cada subespacio definido anteriormente, es decir, dado  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una cubierta de trivializaciones locales de  $P$ , para cada  $\alpha \in \Lambda$  obtenemos la descomposición  $\mathfrak{X}(U_\alpha) = H_\alpha + V_\alpha$ . Tomando una base de campos

vectoriales  $\{X_1, \dots, X_n\}$  para la distribución  $\Gamma$  en  $U_\alpha$ , sabemos que los campos  $A_1^*, \dots, A_d^*$  forman una base global para la distribución  $\mathfrak{G}$ , de esta forma al tomar  $\beta \in \Lambda$  tal que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , se tiene que

$$H_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = H_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

por lo que la descomposición local se puede extender a todo  $P$ , gracias a que los “empalmes” de los abiertos que conforman las trivializaciones locales de las componentes horizontales son compatibles entre sí, y por lo tanto, tenemos la descomposición global en  $P$  como campos vectoriales horizontales y verticales

$$\mathfrak{X}(P) = \mathfrak{X}^h + \mathfrak{X}^v.$$

Observamos que la dimensión de la distribución  $\Gamma$  y la variedad  $M$  son la misma, por lo que  $\Gamma_u \cong T_{\pi(u)}M$  para cada  $u$  en  $P$ . Como la proyección  $\pi : P \rightarrow M$  es una sumersión suprayectiva, y dado que ésta es constante en cada fibra, concluimos que el núcleo de la transformación lineal  $d_u\pi : T_uP \rightarrow T_{\pi(u)}M$  es exactamente  $\mathfrak{G}_u$  el subespacio vertical. De esta forma  $d_u\pi$  es un isomorfismo entre  $\Gamma_u$  y  $T_{\pi(u)}M$ .

Si con estas propiedades asociamos cada vector horizontal con un vector en  $M$ , la siguiente pregunta sería: ¿existirá la misma correspondencia entre campos vectoriales horizontales y campos vectoriales sobre  $M$ ? La respuesta sería cierta pidiendo que los campos horizontales sean invariantes bajo la acción del grupo  $G$  (al igual que la conexión). Antes de probar el siguiente resultado manejaremos la siguiente notación:

Para cada vector  $X_u$  en  $T_uP$  denotaremos  $hX_u$  y  $vX_u$  como las componentes horizontal y vertical de  $X_u$  respectivamente. Un levantamiento horizontal de un campo vectorial  $X$  sobre  $M$  es un campo vectorial horizontal  $X^*$  sobre  $P$ , tal que  $X^*$  se proyecta sobre  $X$ , i.e.,  $d_u\pi(X_u^*) = X_{\pi(u)}$  para todo  $u \in P$ .

**Proposición 2.4.2.** *Dada una conexión en  $P$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , existe un único levantamiento horizontal  $X^*$   $G$ -invariante sobre  $P$  de  $X$  e inversamente, todo campo vectorial horizontal sobre  $P$  invariante por la acción de  $G$  es el levantamiento de un campo vectorial sobre  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y consideremos  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  una cubierta de trivializaciones locales del haz  $P$ . Tomamos  $(U, \psi)$  en la cubierta y por las propiedades de haz principal tenemos que  $\psi(x, e) \cdot g = \psi(x, g)$  para  $\psi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$ .

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\psi} & \pi^{-1}(U) = W \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

Denotemos  $\pi^{-1}(U) = W$ , para cada  $g \in G$  consideramos la función diferenciable  $\psi_g : U \rightarrow W$  dada como  $\psi_g(x) = \psi(x, g)$ . Definimos entonces el campo vectorial  $\tilde{X}$  en  $W$  como

$$\tilde{X}_{\psi(x, g)} = d_x\psi_g(X_x) = d_{\psi(x, e)}R_g \circ d_x\psi_e(X_x).$$

Esta última igualdad se sigue gracias a que  $\psi$  cumple que  $\psi(x, e) \cdot g = \psi(x, g)$  y que tanto  $W$  como  $TW$  son  $G$ -espacios. Claramente  $\tilde{X}$  se proyecta en  $X$ , pues

$$d_{\psi(x,g)}\pi(\tilde{X}_{\psi(x,g)}) = d_{\psi(x,g)}\pi \circ d_x\psi_g(X_x) = d_x(\pi \circ \psi_g)(X_x) = X_x,$$

donde la última igualdad es cierta gracias a que  $\psi_g$  deja invariante el primer factor. El campo  $\tilde{X}$  también es  $G$ -invariante ya que por definición

$$\begin{aligned} d_{\psi(x,g)}R_{g'}(\tilde{X}_{\psi(x,g)}) &= d_{\psi(x,g)}R_{g'} \circ d_{\psi(x,e)}R_g \circ d_x\psi_e(X_x) \\ &= d_{\psi(x,e)}R_{g \cdot g'} \circ d_x\psi_e(X_x) \\ &= \tilde{X}_{\psi(x,g \cdot g')}. \end{aligned}$$

Tomando  $X^* = h\tilde{X}$  obtenemos un campo horizontal que también se proyecta sobre  $X$  y sigue siendo  $G$ -invariante. Haciendo la misma construcción para otra carta  $(U', \psi')$  donde  $W \cap W' \neq \emptyset$ , se tiene la compatibilidad del campo  $X^*$ , y de esta forma el campo se puede extender a todo  $P$ . El regreso es claro, ya que  $d\pi(X^*) = X$  es diferenciable y gracias a que  $X^*$  es  $G$ -invariante se tiene que  $d\pi(dR_a X^*) = X$  y así el campo sobre  $M$  está bien definido.  $\square$

Del resultado anterior tenemos que para cada carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , los vectores  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  tienen sus respectivos levantamientos horizontales únicos  $X_i^*$  que forman una base (local) para distribución  $\Gamma$  en  $\pi^{-1}(U)$ .

Si, por ejemplo,  $f$  y  $g$  son funciones en  $P$ ,  $X^*$  y  $Y^*$  son levantamientos horizontales; entonces el campo  $fX^* + gY^*$  vuelve a ser horizontal, pero no necesariamente es invariante por la acción de  $G$ , y de acuerdo a la proposición anterior, no es un levantamiento horizontal.

**Observación 2.4.3.** Si denotamos  $X^*, Y^*$  los levantamientos horizontales de  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $A^*, B^*$  los campos vectoriales fundamentales de  $A, B \in \mathfrak{g}$ , se tienen las siguientes propiedades:

1.  $X^* + Y^*$  es el levantamiento horizontal de  $X + Y$  pues en coordenadas locales  $X_1, \dots, X_n$

$$X = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i X_i,$$

por lo tanto, sus levantamientos  $X^*$  y  $Y^*$  tienen la forma

$$X^* = \sum_{i=1}^n (a_i)^*(X_i)^* \quad Y^* = \sum_{i=1}^n (b_i)^*(X_i)^*$$

donde  $(a_i)^* = a_i \circ \pi$ ,  $(b_i)^* = b_i \circ \pi$ , y como  $(a_i)^* + (b_i)^* = (a_i + b_i)^*$ , se tiene que  $(X + Y)^* = X^* + Y^*$ .

2. El campo  $f^*X^*$  es el levantamiento horizontal de  $fX$ , donde  $f$  es una función en  $M$  y  $f^*$  es la función en  $P$  definida como  $f^* = f \circ \pi$ .

3. En general  $[X^*, Y^*]$  no es un campo vectorial horizontal, pero  $h[X^*, Y^*]$  es el levantamiento horizontal de  $[X, Y]$ , esto sucede porque

$$d\pi(h[X^*, Y^*]) = d\pi([X^*, Y^*]) = [d\pi X^*, d\pi Y^*] = [X, Y].$$

4. Para un campo horizontal  $Z$ , el campo  $[A^*, Z]$  es un campo horizontal, ya que si  $a_t$  es el subgrupo uniparamétrico inducido por  $A$ , tenemos por la ecuación 1.7 que

$$[A^*, Z] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Z - dR_{a_t}(Z)}{t}.$$

Como  $Z$  es horizontal, el campo  $dR_{a_t}(Z)$  vuelve a ser horizontal ( $Z$  puede no ser invariante bajo la acción de  $G$ , por lo que en general la expresión anterior no siempre se anula).

5. El campo  $[A^*, B^*]$  es un campo fundamental, puesto que  $\sigma$  es un homomorfismo de álgebras de Lie, y por lo tanto

$$[A^*, B^*] = [\sigma(A), \sigma(B)] = \sigma([A, B]) = ([A, B])^*.$$

Una manera equivalente de definir la conexión  $\Gamma$  es mediante una 1-*forma* llamada **1-forma de conexión**, dicha 1-*forma* se denota  $\omega$  y toma valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  de la siguiente manera:

Como vimos en el primer capítulo, la función  $\sigma$  toma elementos en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y los manda a campos vectoriales que pertenecen a la distribución fundamental  $\mathfrak{G}$ , es decir, para cualquier  $A \in \mathfrak{g}$  siempre se tiene que  $v(A^*) = A^*$ . De esta forma definimos para cualquier campo vectorial  $X$  en  $P$  la 1-*forma* de conexión  $\omega : \mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathfrak{g}$  como

$$\omega(X) = vX$$

la componente vertical o simplemente el único elemento  $A$  en  $\mathfrak{g}$  tal que  $A^* = vX$ .

**Proposición 2.4.4.** *La 1-forma de conexión  $\omega$  cumple con las siguientes propiedades:*

- a)  $\omega(A^*) = A$  para toda  $A \in \mathfrak{g}$ .  
b) Todo  $X \in \mathfrak{X}(P)$  cumple que  $\omega(dR_a(X)) = Ad(a^{-1})\omega(X)$  para todo  $a \in G$ .

*Demostración.* De la definición de  $\omega$ , el primer punto se cumple trivialmente de la definición de campo vectorial fundamental. Para la segunda condición se considera el caso en el que  $X$  es horizontal, como  $\Gamma$  es invariante bajo la acción del grupo  $G$ , se tiene que  $dR_a X = X$  y por lo tanto los dos miembros de la igualdad se anulan.

Si  $X = vX$  entonces  $X = A^*$  para algún  $A \in \mathfrak{g}$ , de esta manera

$$\begin{aligned} (R_a^* \omega)_u(X) &= \omega_{ua}(dR_a(X)) = \omega_{ua}(dR_a(A^*)) \\ &= Ad(a^{-1})A \\ &= Ad(a^{-1})(\omega_u(X)). \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.4.5.** *Para  $\omega$  una 1-forma (diferenciable) en  $P(M, G)$  con valores en  $\mathfrak{g}$  que cumplen con (a) y (b) del resultado anterior existe una única conexión  $\Gamma$  en  $P$  para la cual  $\omega$  es su forma de conexión.*

*Demostración.* Definimos la distribución  $\Gamma^\omega$  para cada  $u \in P$  como

$$\Gamma_u^\omega = \{X \in T_u P \mid \omega(X) = 0\}. \quad (2.2)$$

$\Gamma^\omega$  es una distribución diferenciable ya que  $\omega$  es diferenciable. Además todo vector  $X \in T_u P$  se ve como

$$X = (X - \omega(X)^*) + \omega(X)^*$$

donde el primer sumando es horizontal y el segundo vertical ya que  $\omega(X)^*$  es vertical por el inciso (a) y  $\omega(X - \omega(X)^*) = 0$  que lo hace horizontal. Para ver que la suma es directa tomamos  $X \in \Gamma_u^\omega \cap \mathfrak{G}_u$ , como la función  $\sigma_u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}_u$  dada por  $\sigma_u(A) = A_u^*$  es un isomorfismo lineal para todo  $u$  en  $P$  tenemos que  $X$  es un elemento que cumple tanto  $\omega(X)^* = X$  como  $\omega(X) = 0$  por lo que el vector  $X$  debe ser necesariamente nulo.

Para la segunda propiedad tomamos  $dR_a(X)$  con  $X \in \Gamma_u^\omega$  y utilizando (b) obtenemos que

$$\omega(dR_a(X)) = Ad(a^{-1})\omega(X) = 0$$

de donde concluimos que  $dR_a(X) \in \Gamma_{ua}^\omega$ . □

Denotaremos simplemente a  $\Gamma^\omega$  como  $\Gamma$  ahora que sabemos que la correspondencia entre conexiones y las 1-formas de conexión es biunívoca.

## 2.5. Grupo de Holonomía

Ahora que tenemos el concepto de levantamiento en campos vectoriales, nos interesa considerar el levantamiento horizontal de una curva  $x_t$ , la cual será una curva  $u_t$  en  $P$  cuyos vectores tangentes en cada punto pertenecen al subespacio  $\Gamma_{u_t}$  para toda  $t$ .

**Teorema 2.5.1.** *Dada una curva  $x_t$  en  $M$  con  $t \in [0, 1]$  y un elemento  $u \in \pi^{-1}(x_0)$  fijo existe un único levantamiento horizontal  $u_t$  en  $P$  y cumple que  $u_0 = u$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x_t$  está contenido en una vecindad  $U$  para  $(U, \psi)$ , una trivialización local del haz  $P$ . Fijamos  $u_0$  en la fibra  $\pi^{-1}(x_0)$  y consideramos la curva  $v_t = \psi(x_t, g)$ , donde  $\psi(x_0, g) = u$ . La curva  $v_t$  cumple trivialmente que  $\pi(v_t) = x_t$  por construcción, pero  $\dot{v}_t = d_{x_t}\psi_g(\dot{x}_t)$  no necesariamente es un vector horizontal como habíamos visto en la prueba de levantamiento de campos vectoriales. Ahora encontremos la única curva  $a_t : [0, 1] \rightarrow G$  con  $a_0 = e$ , tal que  $u_t = v_t \cdot a_t$  es horizontal; además, por la invariancia de la fibra bajo la acción de  $G$  la curva  $u_t$  se sigue proyectando sobre  $x_t$ .

Suponiendo que  $u_t$  es horizontal, ésta cumpliría con que  $\omega(\dot{u}_t) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Derivando la curva  $u_t = v_t a_t$  vista como una función con regla de correspondencia  $(v_t, a_t) \mapsto$



$v_t \cdot a_t$ , obtenemos para  $t_0 \in [0, 1]$  que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_t \cdot a_t)|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}(v_t \cdot a_{t_0})|_{t=t_0} + \frac{d}{dt}(v_{t_0} \cdot a_t)|_{t=t_0} \\ &= \dot{v}_{t_0} a_{t_0} + v_{t_0} \dot{a}_{t_0} \\ &= \dot{u}_{t_0}. \end{aligned}$$

Aplicando la 1-forma de conexión  $\omega$  al vector  $\dot{u}_t$  obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_{u_t}(\dot{u}_t) &= \omega_{u_t}(\dot{v}_t a_t) + \omega_{u_t}(v_t \dot{a}_t) \\ &= \omega_{u_t}(dR_{a_t} \dot{v}_t) + \omega_{u_t}((v_t a_t)(a_t^{-1} \dot{a}_t)) \\ &= Ad(a_t^{-1})\omega_{v_t}(\dot{v}_t) + a_t^{-1} \dot{a}_t. \end{aligned}$$

Donde el primer sumando se obtiene de la definición de la forma de conexión  $\omega$ , y la segunda del hecho de que  $v_t \dot{a}_t = (v_t a_t)(a_t^{-1} \dot{a}_t)$  es un vector en el punto  $u_t$ , por lo que esta igualdad se anula si y sólo si  $-\omega(\dot{v}_t) = \dot{a}_t a_t^{-1}$  para toda  $t \in [0, 1]$ . De esta forma, la unicidad de la curva  $a_t$  se prueba con el siguiente resultado:

**Lema 2.5.2.** *Sea  $Y_t$  con  $t \in [0, 1]$  una curva en  $\mathfrak{g} \cong T_e G$ . Existe una única curva  $a_t$  con  $t \in [0, 1]$  en  $G$ , tal que  $\dot{a}_t a_t^{-1} = Y_t$ .*

*Demostración del lema.* Tomamos un campo  $X \in \mathfrak{X}(G \times [0, 1])$ , donde esta variedad es considerada dentro de una vecindad  $G \times (a, b)$  con  $[0, 1] \subset (a, b)$  por cuestiones de diferenciabilidad, y de igual manera ampliamos el intervalo de definición de  $Y_t$  y  $a_t$  a  $(a, b)$ . El campo  $X$  se define como

$$X(g, t) = (Y_t \cdot g, 1),$$

tomando  $1 = \frac{d}{dt}$  y donde la operación  $Y_t \cdot g$  viene dada como  $Y_t \cdot g = dR_g(Y_t)$ . Tomando un flujo local alrededor del origen  $(e, 0)$

$$\phi : (\varepsilon, \varepsilon) \times V \times [0, 1] \rightarrow G \times [0, 1]$$

cuya expresión se ve como  $\phi(s, g, t) = (a(s, g, t), s + t)$ , tenemos que para el punto  $(e, 0)$  el flujo se escribe como  $\phi(s, e, 0) = (a(s, e, 0), s) = (a_s, s)$  donde  $s < \varepsilon < 1$  y por definición de flujo solución se tiene que

$$\dot{\phi}(s, e, t) = X(a_s, s) := (Y_s \cdot a_s, 1).$$

Por otro lado  $\dot{\phi}(0, e, t) = (\dot{a}_t, 1)$ , por lo que  $\dot{a}_t = Y_t \cdot a_t$  y por lo tanto  $\dot{a}_s a_s^{-1} = Y_s$ , donde la construcción de la curva  $a_s$  es única. Haciendo la misma construcción de la curva en el punto  $(a_{s_0}, s_0)$  con  $0 < s_0 < \varepsilon < 1$ , y suponiendo que  $s_0$  es el supremo de los valores en  $[0, 1]$  donde la construcción de la curva buscada es posible, tomamos  $\phi_{s_0}$  la curva solución en el punto y encontramos  $b_s : (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \rightarrow G$ , tal que

$$\dot{b}_s b_s^{-1} = Y_{s_0+s}.$$

De donde obtenemos por continuidad que  $b_{-v} = a_{s-v}$ , por lo tanto podemos extender a  $a_s$  como  $a_{s+v} = b_v$ . Por lo que  $s_0 = 1$  y  $a_s$  está definido en todo el intervalo  $[0, 1]$ .  $\square$

Con la prueba del lema concluimos que el levantamiento de curvas horizontales es único para una conexión  $\Gamma$  en  $P$ .  $\square$

Si llamamos  $\tau = x_t$ , tenemos que a cada elemento  $u$  en la fibra de  $x_0$  le corresponde un valor en la fibra de  $x_1$  dado por el levantamiento único de  $\tau$  en el punto  $u$  por lo que la curva  $x_t$  define una función  $\tau : \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_1)$ .

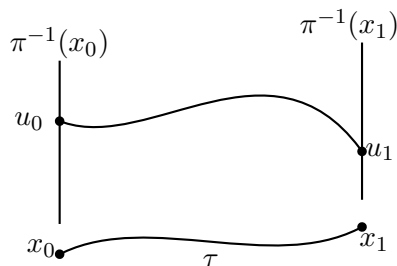


Figura 2.6: La curva  $\tau$  define un isomorfismo entre las fibras.

La función  $\tau$  es biyectiva, esto se deduce de la unicidad del levantamiento horizontal de la curva dado un punto inicial y del hecho de que el transporte paralelo conmuta con la acción del grupo  $G$ , es decir, suponiendo que  $u_0 \neq v_0$  para  $u_0, v_0 \in \pi^{-1}(x_0)$  y tomando  $u_0$  como el elemento neutro existe  $b \in G$  tal que  $v_0 = u_0 b$ , de modo que

$$\tau(v_0) = \tau \circ R_b(u_0) = R_b \circ \tau(u_0),$$

esto gracias a que los levantamientos horizontales son invariantes bajo la acción del grupo de Lie  $G$ . De modo que  $R_b \circ \tau$  es el levantamiento horizontal con condición inicial  $v_0$  y por lo tanto  $\tau(u_0) \neq \tau(v_0)$ . Por lo que para todo  $a \in G$  se tiene que  $\tau(ua) = \tau(u)a$ , esta propiedad es conocida como  $G$ -equivariante.

Si consideramos ahora  $C(x)$  el conjunto de curvas cerradas con punto inicial y final igual a  $x$ , tenemos por la deducción anterior que cada uno de los elementos de  $C(x)$  induce una biyección  $G$ -equivariante en la fibra  $\pi^{-1}(x)$ , de modo que si además consideramos  $C(x)$  junto con la composición de lazos, obtenemos una estructura de grupo donde el elemento neutro es el lazo constante  $x$  y el inverso de cada curva es ella misma pero recorrida en el sentido contrario; por lo que al tomar todas las biyecciones  $G$ -equivariantes que inducen los elementos de  $C(x)$  junto con la composición de funciones obtenemos un subgrupo de  $Hom(\pi^{-1}(x))$  el grupo de automorfismos en la fibra.

**Definición 2.5.3.** Con la notación anterior tenemos que

- i)* El conjunto de biyecciones  $G$ -equivariantes en la fibra de  $x$  dados por los transportes paralelos de los elementos en  $C(x)$  forman un grupo con la composición llamado **grupo de holonomía** de  $\Gamma$  en  $x$  y se denota como  $\Phi(x)$ .
- ii)* El conjunto de biyecciones  $G$ -equivariantes definidos por elementos en  $C^0(x)$ , el conjunto de lazos contraíbles, forma un subgrupo de  $\Phi(x)$  llamado el **grupo de holonomía restringido** de  $\Gamma$  en  $x$  y se denota  $\Phi(x)^0$ .

Por otro lado, si fijamos un elemento  $u$  en la fibra de  $x$ , tenemos que cada lazo  $\tau$  determina un único elemento  $\tau(u)$  en la fibra  $\pi^{-1}(x)$ . Como la fibra es isomorfa a  $G$  e identificando a  $u$  con el elemento neutro ( $u = ue$ ), tenemos que existe  $a \in G$  tal que  $\tau(u) = ua$ .

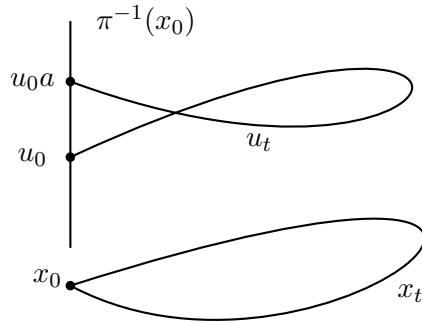


Figura 2.7: El levantamiento único de la curva  $\tau$  determina un único elemento en el grupo  $G$ .

Para un punto fijo  $u$  en la fibra de  $x_0$ , los elementos en  $G$  determinados por la evaluación en  $u$  de elementos en  $\Phi(x)$  forman un subgrupo de  $G$  denotado  $\Phi(u)$ . Este grupo es llamado grupo de holonomía de  $\Gamma$  en  $u \in P$ . El subgrupo de holonomía restringido  $\Phi(u)^0$  se define de manera análoga considerando solamente los elementos en  $G$  que provienen de  $\Phi(x_0)^0$ .

**Observación 2.5.4.** Los grupos  $\Phi(u)$  y  $\Phi(x)$  son isomorfos al igual que  $\Phi^0(u)$  y  $\Phi^0(x)$ , con  $u \in \pi^{-1}(x)$ . El isomorfismo viene dado como vimos anteriormente por la evaluación de todos ellos en el punto  $u$ .

**Proposición 2.5.5.** Sea  $u \in P$ , el grupo  $\Phi(u)$  cumple las siguientes propiedades:

- a. Si  $v = ua$  con  $a \in G$ , entonces  $\text{ad}(a^{-1})\Phi(u) = \Phi(v)$ .
- b. Si  $u$  y  $v$  pueden unirse con una curva horizontal sobre  $P$ , entonces  $\Phi(u) = \Phi(v)$  y  $\Phi^0(u) = \Phi^0(v)$ .

*Demostración.*

- (a) Si  $b \in \Phi(u)$ , entonces existe una curva horizontal  $\tau^*$  que une al punto  $u$  con  $ub$ , por lo que la curva horizontal  $R_a\tau^*$  une al punto  $ua$  con  $(ub)a$ , pero  $ua = v$  y  $(ub)a = v(a^{-1}ba) = v(\text{ad}(a^{-1})b)$ . Por lo tanto  $\text{ad}(a^{-1})b$  es un elemento de  $\Phi(v)$ , y así llegamos a que  $\Phi(v) = \text{ad}(a^{-1})\Phi(u)$ .
- (b) Si  $u$  y  $v$  pueden unirse con una curva horizontal, por lo anterior,  $ub$  se puede unir con  $vb$  con una curva horizontal también. De esta manera tenemos que  $u$  se puede unir con una curva horizontal a  $ub$  si y sólo si  $v$  se puede unir con una curva horizontal a  $vb$  de donde obtenemos que  $b \in \Phi(u)$  si y sólo si  $b \in \Phi(v)$ . □

Cabe mencionar que el grupo de holonomía  $\Phi(u)$  es un subgrupo de Lie de  $G$  al igual que  $\Phi(u)^0$  y que este último es un subgrupo conexo de  $G$  y es un subgrupo normal de  $\Phi(u)$ .

## 2.6. Forma de Curvatura y Mapeos de conexiones

Sea  $P(M, G)$  un haz principal y  $\Gamma$  una conexión sobre  $P$ . Definimos para  $\vartheta$  una  $r$ -forma en  $P$ , la  $r$ -forma  $\vartheta h$  dada por

$$\vartheta h(X_1, \dots, X_r) := \vartheta(hX_1, \dots, hX_r).$$

Para  $\omega$  la 1-forma de conexión consideramos la 2-forma  $(d\omega)h$  llamada la **forma de curvatura**  $\Omega$  asociada a la conexión  $\Gamma$ .

**Teorema 2.6.1** (Ecuación Estructural). *Si  $\omega$  y  $\Omega$  son la forma de conexión y forma de curvatura para una conexión  $\Gamma$  definida en una haz principal, se tiene que*

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)]. \quad (2.3)$$

*Demostración.* La prueba se hará mediante tres casos, ya que gracias a la multilinealidad de las formas consideraremos sólo los casos para los cuales los campos son verticales u horizontales.

- i)* Si  $X$  e  $Y$  son horizontales, tenemos por definición que  $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ , por lo que la igualdad se cumple a partir de la definición de  $\Omega$ .
- ii)* Si  $X$  e  $Y$  son verticales, entonces existen  $A, B \in \mathfrak{g}$ ; tal que  $A^* = X$  y  $B^* = Y$ , donde obtenemos que  $\Omega(X, Y) = 0$ , y así concluimos que

$$0 = d\omega(A^*, B^*) + \frac{1}{2}[\omega(A^*), \omega(B^*)].$$

Por otro lado, de la Proposición 1.3.4 se tiene que

$$d\omega(A^*, B^*) = \frac{1}{2}(X(B) - Y(A) - \omega([A^*, B^*])).$$

Dado que  $A$  y  $B$  no dependen del punto en  $P$ , se tiene que  $X(B) = 0 = Y(A)$  y como  $\omega([A^*, B^*]) = [\omega(A^*), \omega(B^*)]$ , entonces se cumple la igualdad.

- iii)* Si  $X$  es horizontal e  $Y = B^*$ , entonces  $\Omega(X, A) = 0$  y  $\omega(X) = 0$ . Nuevamente por la Proposición 1.3.4, y tomando en cuenta que  $B^*(X) = 0 = X(B^*)$ , la ecuación se ve como

$$d\omega(X, B^*) = -\frac{1}{2}\omega([X, B^*]).$$

Por el punto (4) de la Observación 2.4.3 sabemos que  $[X, B^*]$  es horizontal. De esta forma la ecuación 2.3 se satisface. □

Del resultado anterior obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 2.6.2.** *Si  $X$  y  $Y$  son campos horizontales sobre  $P$ , se tiene que*

$$\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y]).$$

**Teorema 2.6.3.** *Sea  $f : Q(N, H) \rightarrow P(M, G)$  una transformación entre haces, tal que  $\bar{f} : N \rightarrow M$  es un difeomorfismo. Supongamos que  $Q$  tiene una conexión  $\Gamma'$ , y consideramos su respectiva forma de conexión  $\omega'$  y  $\Omega'$  su forma de curvatura, entonces:*

- i) *Existe una única conexión  $\Gamma$  en  $P$  tal que  $df(\Gamma') = \Gamma$ .*
- ii) *Si  $\omega$  y  $\Omega$  son las formas de conexión y curvatura para la conexión  $\Gamma$ , entonces  $f^*\omega = \check{f}\omega'$  y  $f^*\Omega = \check{f}\Omega'$ , donde  $\check{f}$  es el morfismo de álgebras de Lie que induce  $\hat{f}$ , i.e  $\check{f} = \alpha_G^{-1} \circ d_{e'}\hat{f} \circ \alpha_H$ , donde  $\alpha_G$  y  $\alpha_H$  son los isomorfismos de  $\mathfrak{g}$  con  $T_eG$  y  $\mathfrak{h}$  con  $T_{e'}H$  definidos en el primer capítulo.*
- iii) *Si  $f(u') = u$  para  $u' \in Q$ , entonces  $\hat{f} : H \rightarrow G$  envía  $\Phi(u')$  sobre  $\Phi(u)$  y  $\Phi^0(u')$  sobre  $\Phi^0(u)$ .*

*Demostración.*

- i) Tomamos  $u' \in Q$  y  $a \in G$  de tal manera que  $u = f(u')a$  y definimos el espacio horizontal en  $T_uP$  como  $\Gamma_u := dR_a \circ df(\Gamma'_{u'})$ .  
Veamos que  $\Gamma_u$  no depende del representante. Supongamos que  $u = f(v')b$  para  $v' \in Q$  y  $b \in G$ ; dado que  $f$  es fibrada y  $\bar{f}$  es un isomorfismo sabemos que existe  $c' \in H$  tal que  $u' = v'c'$ . Definiendo  $c = \hat{f}(c')$  tenemos que

$$u = f(u')b = f(v'c')b = f(u')\hat{f}(c')b = f(u')cb,$$

por lo tanto  $a = cb$ . De la definición de  $\Gamma_u$  tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} dR_b \circ df(\Gamma'_{v'}) &= dR_b \circ df(\Gamma'_{u'c'}) = dR_b \circ df(dR_{c'}(\Gamma'_{u'})) \\ &= dR_b \circ dR_{\hat{f}(c')} \circ df(\Gamma'_{u'}) = dR_b \circ dR_c \circ df(\Gamma'_{u'}) \\ &= dR_a \circ df(\Gamma'_{u'}). \end{aligned}$$

De modo que el espacio horizontal está bien definido.

Ahora para ver que  $\Gamma$  es una conexión notamos primero que para  $b \in G$

$$\Gamma_{ub} = dR_{ab} \circ df(\Gamma'_{u'}) = dR_b(dR_a \circ df(\Gamma'_{u'})) = dR_b(\Gamma_u)$$

Por último veamos que  $T_uP = \Gamma_u + G_u$ :

Considerando la trivialidad local de haces fibrados sólo hace falta ver que  $d_u\pi_P : \Gamma_u \rightarrow T_xM$  es un isomorfismo lineal ( $\pi_P(u) = x$ ). Por hipótesis  $d_{u'}\pi_Q : \Gamma_{u'} \rightarrow T_yN$  con  $\pi_Q(u') = y$  y  $d_y\bar{f} : T_yN \rightarrow T_xM$  son isomorfismos lineales, además  $\Gamma$  es invariante por la acción de  $G$ .

$$\begin{array}{ccc} \Gamma'_{u'} & \xrightarrow{d_{u'}f} & \Gamma_u \\ d\pi_Q \downarrow & & \downarrow d\pi_P \\ T_yN & \xrightarrow{d_y\bar{f}} & T_xM \end{array}$$

Por lo que

$$d\pi_P \circ d_{u'}f(\Gamma'_{u'}) = d_y\bar{f} \circ d\pi_Q(\Gamma'_{u'}) = d_y\bar{f}(T_yN) = T_xM$$

y de esta manera  $d_u\pi_P$  es un isomorfismo lineal entre  $\Gamma_u$  y  $T_xM$

ii) Veamos primero que  $\omega(d_{u'}f(Y)) = \check{f}(\omega'(Y))$  se cumple para cualquier  $Y \in T_{u'}Q$ . Considerando los casos para  $Y$  horizontal o vertical, el primero se cumple trivialmente debido a que  $df$  manda el espacio horizontal de  $Q$  en el espacio horizontal de  $P$ . Para el caso vertical se tiene que  $Y = B^*$  en  $u'$  donde  $B \in \mathfrak{h}$  y definimos  $A = \check{f}(B) \in \mathfrak{g}$ , de esta manera  $d_{u'}f(Y) = A^*$  en  $f(u')$  ya que si tomamos  $b_t$  el grupo uniparamétrico asociado a  $B$  se cumple que  $f(u'b_t) = f(u')\hat{f}(b_t)$  y entonces  $d_{u'}f(Y) = \frac{d}{dt}f(u')\hat{f}(b_t)|_{t=0} = A^*$ , donde  $\hat{f}(b_t)$  es el subgrupo uniparamétrico asociado a  $A^*$ . Por lo tanto

$$\omega(d_{u'}f(Y)) = \omega(A^*) = A = \check{f}(B) = \check{f}(\omega'(B^*)) = \check{f}(\omega'(Y)).$$

Dado que  $f^*\omega = \check{f}\omega'$  y aplicando el operador derivada tenemos que  $d(f^*\omega) = d(\check{f}\omega')$ . Además tenemos por la ecuación 1.6 del primer capítulo que  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$  y  $d(\check{f}\omega') = \check{f}d(\omega')$ . Utilizando la ecuación estructural llegamos a que

$$-\frac{1}{2}f^*([\omega, \omega]) + f^*\Omega = -\frac{1}{2}\check{f}([\omega', \omega']) + \check{f}\Omega'$$

y así obtenemos que  $f^*\Omega = \check{f}\Omega'$  ya que

$$f^*([\omega, \omega]) = [f^*\omega, f^*\omega] = [\check{f}\omega', \check{f}\omega'] = \check{f}([\omega', \omega']).$$

iii) Sea  $\tau$  un lazo en  $x = \pi(u)$  y  $\tau' = \bar{f}^{-1}(\tau)$  el lazo en  $y = \bar{f}^{-1}(x)$ . Si consideramos el levantamiento horizontal de  $\tau'$  que comienza en  $u' \in \pi^{-1}(y)$  entonces  $f(\tau')$  es el levantamiento horizontal que comienza en  $f(u')$  de la curva  $\tau$  por unicidad y concluimos que  $\hat{f}$  manda  $\Phi(u')$  en  $\Phi(u)$  y  $\Phi^0(u')$  en  $\Phi^0(u)$ .  $\square$

Esto nos dice que para el ejemplo 2.2.5 dada una conexión  $\Gamma$  en  $L(M)$  existe una única conexión  $\tilde{\Gamma}$  en  $A(M)$  tal que  $d\gamma(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$ . Veamos primero un resultado que nos ayudará a identificar mejor la forma que tienen las conexiones en el haz de marcos afines con respecto a conexiones en el haz lineal.

**Proposición 2.6.4.** *Sea  $Q(M, H)$  un subhaz de  $P(M, G)$  donde  $H \leq G$  es un subgrupo de Lie. Supongamos que existe un subespacio  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  y que  $\text{ad}(H)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$  (recordemos que  $\text{Ad}(a)(C) = dR_{a^{-1}}(C)$  para toda  $a \in H$  y  $C \in \mathfrak{m}$ ) donde  $\mathfrak{h}$  es el álgebra de Lie del subgrupo  $H$ . Entonces cualquier 1-forma de conexión  $\omega$  en  $P$ , la  $\mathfrak{h}$ -componente  $\omega'$  de  $\omega$  es una 1-forma de conexión en  $Q$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in \mathfrak{g}$  dada como  $A = B + C$  donde  $B \in \mathfrak{m}$  y  $C \in \mathfrak{h}$ , por lo que  $A^* = B^* + C^*$  dado que  $A^* = \sigma(A)$  y  $\sigma$  es un morfismo de álgebras de Lie. De esta manera  $\omega(A^*) = \omega(B^*) + \omega(C^*)$ , donde  $\omega'(A^*) = \omega(C^*)$  es la  $\mathfrak{h}$ -componente y  $\varphi(A^*) = \omega(B^*)$  la  $\mathfrak{m}$ -componente. Si restringimos  $\varphi$  la  $\mathfrak{m}$ -componente de  $\omega$  a  $Q$  tenemos para cada  $X \in TQ$  y  $a \in H$  que

$$\omega(dR_a X) = \omega'(dR_a X) + \varphi(dR_a X)$$

y por otro lado

$$Ad(a^{-1})\omega(X) = Ad(a^{-1})\omega'(X) + Ad(a^{-1})\varphi(X).$$

Como los valores del lado izquierdo de ambas ecuaciones coinciden y por hipótesis  $Ad(a^{-1})\varphi(X)$  sigue siendo un elemento en  $\mathfrak{m}$ , concluimos que las  $\mathfrak{h}$ -componentes de las dos ecuaciones coinciden y por lo tanto  $\omega'$  es una 1-forma de conexión definida en  $Q$ .  $\square$

Si ahora consideramos el encaje  $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow A_n(\mathbb{R})$  dado por

$$\xi \mapsto \begin{pmatrix} 0_{n^2} & \bar{\xi} \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $0_{n^2}$  denota la matriz cero en  $M_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$  y  $\hat{\beta} : A_n(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  como

$$\begin{pmatrix} A & \bar{\xi} \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix} \mapsto A,$$

tenemos que  $ker(\hat{\beta}) = Im(\hat{\alpha})$ . Consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{\hat{\alpha}} A_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\hat{\beta}} GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow 1,$$

además la función  $\hat{\gamma}$  del ejemplo 2.2.5 cumple que  $\hat{\beta} \circ \hat{\gamma}$  es la función identidad en  $GL_n(\mathbb{R})$ . Tomando la sucesión exacta de sus respectivas álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R}^n \xrightarrow{\hat{\alpha}} \mathfrak{a}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\hat{\beta}} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow 0,$$

obtenemos que  $\hat{\beta} \circ \hat{\gamma}$  es la identidad en  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  el álgebra de Lie de  $GL_n(\mathbb{R})$  y es por eso que la sucesión exacta se escinde, *i.e.*,

$$\mathfrak{a}_n(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) + \mathfrak{R}^n \tag{2.4}$$

donde  $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{R}^n$ . Sea ahora  $\tilde{\omega}$  una forma de conexión en  $A(M)$  y tomamos la 1-forma  $\gamma^*\tilde{\omega}$  en  $L(M)$  definida como  $\gamma^*\tilde{\omega}(X) = \tilde{\omega}(d\gamma(X))$  si  $X \in \mathfrak{X}(L(M))$ . Gracias a la identidad (2.4) y que  $Ad(GL_n(\mathbb{R}))(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  (ya que la operación viene dada por multiplicación de matrices a vectores columna) tenemos que existen  $\omega$  1-forma definida en  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  y  $\varphi$  1-forma definida en  $\mathfrak{R}^n$  tal que

$$\gamma^*\tilde{\omega} = \omega + \varphi \tag{2.5}$$

y por la proposición 2.6.4  $\omega$  es una 1-forma de conexión en el haz de marcos lineales.

**Proposición 2.6.5.** *Si  $\beta : A(M) \rightarrow L(M)$  es la transformación entre haces dada por  $\beta(x, v_x, \mathcal{B}_x) = (x, \mathcal{B}_x)$  y  $\tilde{\Gamma}$  es la conexión generada por la forma de conexión  $\tilde{\omega}$  entonces  $\beta$  manda  $\tilde{\Gamma}$  en la conexión  $\Gamma$  generada por la forma de conexión  $\omega$*

*Demostración.* Sea  $\tilde{X} \in T_{\tilde{u}}A(M)$ ,  $u = \beta(\tilde{u})$  y  $X = d\beta(\tilde{X})$ . La transformación  $\beta : A(M) \rightarrow L(M)$  está asociada al homomorfismo de grupos  $\hat{\beta} : A_n(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  y tomando  $GL_n(\mathbb{R})$  como el cociente  $A_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}^n$  obtenemos a  $L(M)$  como el cociente  $A(M)/\mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbb{R}^n$  actúa

sobre  $A(M)$  considerando sus elementos en  $A_n(\mathbb{R})$  a través del homomorfismo  $\hat{\alpha}$ . Como  $X = \beta(X) = \beta(\tilde{X})$ , existen  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n \subset A_n(\mathbb{R})$  y  $A \in \mathfrak{X}^n \subset \mathfrak{a}_n(\mathbb{R})$  tal que

$$\tilde{X} = dR_{\bar{a}}(X) + A_u^*.$$

Si consideramos  $\tilde{X}$  como vector horizontal con respecto a la conexión  $\tilde{\Gamma}$  obtenemos que

$$0 = \tilde{\omega}(\tilde{X}) = \tilde{\omega}(dR_{\bar{a}}X) = \tilde{\omega}(A_u^*) = ad(\bar{a}^{-1})\tilde{\omega}(X) + A.$$

Por lo que del primer y último término se concluye que  $\tilde{\omega}(X) = ad(\bar{a})A$  y de la ecuación 2.5 se tiene que  $ad(\bar{a})A = \omega(X) + \varphi(X)$ . Tanto  $\varphi(X)$  y  $ad(\bar{a})A$  son elementos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\omega(X)$  de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ , por lo que  $\omega(X)$  debe de anularse y así  $\beta(X)$  es horizontal con respecto a la conexión  $\Gamma$ . □

Llamaremos **conexión lineal** a una conexión definida en el haz de marcos lineales. Definimos la **1-forma canónica**  $\theta$  sobre  $L(M)$  que toma valores en  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$\theta(X) = u^{-1}(d_u\pi(X)) \text{ para } X \in T_uL(M)$$

y de la definición se infiere que  $\theta(X) = \theta(hX)$ , en otras palabras,  $\theta$  es horizontal con respecto a cualquier conexión.

**Definición 2.6.6.** Sea  $\tilde{\omega}$  una forma de conexión definida en  $A(M)$  y  $\tilde{\Gamma}$  su respectiva conexión. Diremos que la conexión  $\tilde{\Gamma}$  es una **conexión afín** si la 1-forma  $\varphi$  definida a partir de  $\tilde{\omega}$  es la forma canónica  $\theta$ .

**Teorema 2.6.7.** *La transformación entre haces  $\beta : A(M) \rightarrow L(M)$  manda toda conexión afín en  $M$  en una conexión lineal en  $M$ . Más aún, la correspondencia entre conexiones afines y conexiones lineales es biunívoca.*

Este resultado es consecuencia del Teorema 2.6.3 y de la Proposición 2.6.5.



## Capítulo 3

# Conexiones Riemannianas

### 3.1. Transporte paralelo en haces asociados

Como vimos en el capítulo anterior, el haz asociado tiene una estructura diferenciable gracias a la trivialidad local del espacio. De esta forma la proyección  $\tilde{\pi} : P(M, G) \times F^k \rightarrow E(P, F)$  es diferenciable en el sentido usual. Si consideramos una conexión  $\Gamma$  en  $P(M, G)$ , ésta define un subespacio horizontal y uno vertical en  $E(P, F)$  de la siguiente manera: Primero definimos el espacio vertical  $V_{u\xi}$  en el punto  $u\xi$  como el tangente a la fibra  $F_x$  para  $\pi(u) = x$ . Denotamos ahora  $\tilde{\pi}_\xi$  la restricción a un valor fijo de  $F^k$  de la proyección. Por lo que el subespacio horizontal estará dado como la imagen del subespacio horizontal en  $u$  bajo  $d_u\tilde{\pi}_\xi$ , i.e.,  $\Gamma_{u\xi}^E = d_u\tilde{\pi}_\xi(\Gamma_u)$ . Como la función  $\tilde{\pi}$  es suprayectiva y el espacio vertical es simplemente la imagen de  $T_\xi F^k$  bajo  $d_\xi\tilde{\pi}_u$  (la restricción a un valor fijo  $u$  en  $P$ ) concluimos que la dimensión de la imagen de  $\Gamma_u$  bajo  $d_u\tilde{\pi}_\xi$  tiene dimensión  $n$  ya que  $d\tilde{\pi}$  es también suprayectiva y por la construcción de los subespacios vertical y horizontal obtenemos

$$T_{u\xi}E = \Gamma_{u\xi}^E \oplus V_{u\xi}.$$

Una consecuencia de la construcción del subespacio horizontal en  $E$  es que la imagen bajo  $\pi_\xi$  de cualquier curva horizontal es una curva horizontal, más aún:

**Proposición 3.1.1.** *Dada una curva  $x_t$  en  $M$  y  $u_0\xi_0$  existe una única curva horizontal  $\nu_t$  en  $E$  tal que  $\nu_0 = u_0\xi_0$ .*

*Demostración.* La prueba de existencia de una curva horizontal es análoga a la prueba para conexiones en haces principales. Sea  $u_t$  el levantamiento horizontal en  $u_0$  de  $x_t$  y tomemos la curva en  $E$   $u_t\xi_0$  que es horizontal por la construcción anterior y que además  $\pi_E(u_t\xi_0) = x_t = \pi_E(\nu_t)$ . Por la unicidad de levantamiento horizontal de curvas en  $P$  obtenemos que  $\nu_t = u_t\xi_0$ .  $\square$

De la misma forma en la que obtuvimos la función inducida por una curva  $\tau = x_t$  en  $M$  (vía levantamiento único de curvas horizontales), definimos el transporte paralelo

$$\tau_b^a : \pi_E^{-1}(x_a) \rightarrow \pi_E^{-1}(x_b),$$

que también es una biyección entre fibras. Si consideraremos  $F^k = \mathbb{F}^k$  para  $\mathbb{F}$  un campo, el transporte paralelo definido en  $E$  es un isomorfismo lineal.

**Definición 3.1.2.** Sea  $\tau = x_t : I \rightarrow M$  una curva en  $M$  y  $\varphi_t : I \rightarrow E$  una sección sobre la curva, es decir,  $\pi \circ \varphi_t = x_t$  para toda  $t \in I$ . Para cada  $t$  definimos  $\nabla_{\dot{x}_t} \varphi_t$  la derivada covariante de  $\varphi_t$  en la dirección de  $\dot{x}_t$  como el elemento en  $\pi_E^{-1}(x_t)$  dado por

$$\nabla_{\dot{x}_t} \varphi_t = \frac{d}{dh} \tau_t^{t+h}(\varphi_{t+h}) \Big|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_t^{t+h}(\varphi_{t+h}) - \varphi_t]. \quad (3.1)$$

Notemos que para cualquier sección  $\varphi : M \rightarrow E$  y cualquier curva  $\tau = x_t$ , la curva  $\varphi(x_t)$  es una sección sobre  $\tau$ . Tomando un flujo local  $x_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  alrededor de  $x \in M$ , es decir  $x = x_0$ , para un campo vectorial  $X$  sobre  $M$ , definimos la derivada covariante de la sección  $\varphi$  en la dirección del campo  $X$  como

$$\nabla_X \varphi(x) := \nabla_{\dot{x}_0} \varphi(x_0).$$

Veamos ahora un resultado que nos ayudará a manejar la derivada covariante de manera más sencilla.

**Proposición 3.1.3.** Sea  $X \in T_x M$ ,  $u \in \pi^{-1}(x)$  y  $X^* \in T_u P$  horizontal tal que  $d\pi(X^*) = X$  y definimos la función diferenciable  $f : P \rightarrow \mathbb{F}^k$  como  $f(u) = u^{-1} \varphi(\pi(u))$ . Entonces la derivada covariante de la sección  $\varphi$  en la dirección de  $X$  se ve como

$$\nabla_X \varphi = u(df(X^*)). \quad (3.2)$$

*Demostración.* Supongamos que  $x_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  es un flujo local del campo  $X$  alrededor de un punto  $x$  y consideramos  $u_t$  su levantamiento horizontal con  $u_0 = u$ . De la definición de levantamiento horizontal sabemos que  $\dot{u}_0 = X^*$ , por lo que

$$\begin{aligned} df(X^*) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(u_h) - f(u)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u_h^{-1} \varphi(x_h) - u_0^{-1} \varphi(x_0)] \end{aligned}$$

y entonces

$$u(df(X^*)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u \circ u_h^{-1} \varphi(x_h) - \varphi(x_0)],$$

de donde sólo hace falta ver que

$$u \circ u_h^{-1} \varphi(x_h) = \tau_0^h(\varphi(x_h)).$$

Sea  $\xi = u_h^{-1} \varphi(x_h)$  y consideremos la curva horizontal  $\nu_t = u_t \xi$  en  $E$ . Por definición de transporte paralelo sabemos que  $\tau_t^0(\nu_0) = \nu_t$  para cada  $t$ ; como  $\varphi(x_h) = u_h \xi$  y  $\nu_0 = u_0 \xi = u \circ u_h^{-1}(\varphi(x_h))$  se tiene que

$$\tau_0^h(u_h \xi) = \tau_0^h(\varphi(x_h)) = u \circ u_h^{-1} \varphi(x_h).$$

□

Diremos que una sección  $\varphi$  es paralela con respecto a la conexión si para cualquier curva  $\tau = x_t$  se cumple que  $\tau_t^0(\varphi(x_0)) = \varphi(x_t)$  para todo  $t$ , como consecuencia de esto  $\varphi$  es paralela (con respecto a la conexión) si para cualquier vector  $X$  en  $TM$  se tiene que  $\nabla_X \varphi = 0$ .

La función  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathcal{S}(E)$  definida como  $\nabla(X, \varphi) = \nabla_X \varphi$  tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 3.1.4.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $g \in C(M)^\infty$  y  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(E)$ , entonces la función  $\nabla$  cumple:

1.  $\nabla_{X+Y} \varphi = \nabla_X \varphi + \nabla_Y \varphi$ ,
2.  $\nabla_X(\varphi + \psi) = \nabla_X \varphi + \nabla_X \psi$ ,
3.  $\nabla_{gX} \varphi = g \nabla_X \varphi$ ,
4.  $\nabla_X(g\varphi) = g \nabla_X \varphi + (Xg)\varphi$ .

*Demostración.*

(1) Por la Ecuación 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y} \varphi &= u(df((X+Y)^*)) = u(df(X^* + Y^*)) \\ &= u(df(X^*) + df(Y^*)) = u(df(X^*)) + u(df(Y^*)) \\ &= \nabla_X \varphi + \nabla_Y \varphi. \end{aligned}$$

(2) Se deduce del hecho de que el transporte paralelo es un isomorfismo lineal en cada fibra, i.e., de la Ecuación 3.1 se tiene que

$$\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h}) + \psi(x_{t+h})) = \tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) + \tau_t^{t+h}(\psi(x_{t+h})).$$

(3) Nuevamente por la Ecuación 3.2

$$\begin{aligned} \nabla_{gX} \varphi &= u(df((gX)^*)) = u(df(g^* X^*)) \\ &= u(g^* df(X^*)) = u((g \circ \pi) df(X^*)) \\ &= g \cdot u(df(X^*)) = g \cdot \nabla_X \varphi. \end{aligned}$$

(4) Al igual que una regla del producto

$$\begin{aligned} \nabla_X(g\varphi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ g(x_{t+h}) \tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - g(x_t) \varphi(x_t) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} g(x_t) [\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t)] + \varphi(x_t) [g(x_{t+h}) - g(x_t)] \\ &\quad + \frac{1}{h} (\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t)) (g(x_{t+h}) - g(x_t)) \\ &= g(x_t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t) \right] \\ &\quad + \varphi(x_t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(x_{t+h}) - g(x_t)] + 0 \\ &= g \nabla_X \varphi + (Xg)\varphi. \end{aligned}$$

□

La manera en la que definimos la derivada covariante en un haz vectorial  $E$  sobre  $M$  es equivalente a la definición de conexión afín sobre la variedad  $M$ , es decir, al considerar  $P(M, G) = L(M)$  el haz de marcos lineales, notamos que el haz asociado es el haz tangente  $TM$ , por lo que las secciones sobre éste son  $\mathfrak{X}(M)$  los campos vectoriales sobre  $M$ . Por lo tanto podemos analizar las conexiones afines sobre una variedad a través de conexiones lineales en el haz  $L(M)$ .

### 3.2. Geodésicas y desarrollos

**Definición 3.2.1.** Sea  $\Gamma$  una conexión lineal en  $L(M)$  y  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Definimos el **campo vectorial horizontal estándar** asociado a  $\xi$  como el único campo vectorial horizontal  $B(\xi)$  en  $P$  tal que  $d\pi(B(\xi)_u) = u\xi$ .

**Proposición 3.2.2.** Sea  $B(\xi)$  el campo vectorial horizontal estándar asociado al vector  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in GL_n(\mathbb{R})$  y  $\theta$  la forma canónica, entonces:

- 1)  $\theta(B(\xi)) = \xi$ .
- 2)  $dR_a(B(\xi)) = B(a^{-1}\xi)$ .
- 3)  $B(\xi + c \cdot \eta) = B(\xi) + c \cdot B(\eta)$  con  $\eta \in \mathbb{R}^n$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Además  $B(\xi) \neq 0$  siempre que  $\xi \neq \bar{0}$ .

*Demostración.*

(1) Por definición  $\theta(B(\xi)_u) = u^{-1}d_u\pi(B(\xi)_u) = u^{-1} \circ u(\xi) = \xi$ .

(2) Notemos primero lo siguiente:

Si  $X_u \in T_uL(M)$  es horizontal y  $a \in GL_n(\mathbb{R})$  y tomando el vector  $d_uR_a(X_u)$  en  $T_{ua}P$  se tiene que

$$\begin{aligned} (R_a^*\theta)(X_u) &= \theta(d_uR_a(X_u)) = (ua)^{-1}(d\pi_{ua} \circ d_uR_a(X_u)) \\ &= a^{-1}u^{-1}(d\pi_{ua} \circ d_uR_a(X_u)) = a^{-1}u^{-1}(d_u\pi(X_u)) \\ &= a^{-1}(\theta(X_u)). \end{aligned}$$

La igualdad del segundo renglón se cumple gracias a que  $d_uR_a(X_u)$  vuelve a ser un vector horizontal por la invariancia del subespacio horizontal bajo la acción del grupo. Por lo anterior obtenemos que

$$\theta(dR_a(B(\xi))) = a^{-1}\xi = \theta(B(a^{-1}\xi))$$

y por la propiedad única de los campos vectoriales horizontales estándar se concluye que  $dR_a(B(\xi)) = B(a^{-1}\xi)$ .

(3) La primera parte es consecuencia directa de la linealidad de  $d_u\pi$  y  $u^{-1}$ . Para la segunda parte sabemos que  $d_u\pi(B(\xi)_u) = u\xi$  de la definición de  $\theta$  y como  $u$  es un isomorfismo lineal se tiene que  $u(\xi) = 0$  sólo si  $\xi = 0$ .  $\square$

**Observación 3.2.3.** Así como los campos vectoriales verticales  $\{A_1^*, \dots, A_{n_2}^*\}$  (donde  $A_j \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ ) forman una base en cada fibra en  $L(M)$ , considerando los vectores canónicos  $e_1, \dots, e_n$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{B(e_1), \dots, B(e_n)\}$  es una base de campos vectoriales horizontales para el subespacio horizontal  $\Gamma_u$  en cada punto  $u$ .

Como vimos en el capítulo anterior, el haz tangente afín  $A[M]$  es isomorfo al haz tangente  $TM$ , donde la función  $\tilde{p}$  del Ejemplo 2.3.2 define la fibra  $A_x M$ , que cuando fijamos un elemento  $\rho_x \in T_x M$  la fibra tiene la forma  $\{\rho_x + X | X \in T_x M\}$  isomorfa a  $T_x M$  para cada punto  $x \in M$ . Notemos además que si  $\rho_x = 0_x$  entonces podemos hablar de  $A_x M$  simplemente como  $T_x M$ .

Considerando  $\tilde{\tau}$  el levantamiento horizontal en  $A(M)$  de una curva  $\tau$  en  $M$ , obtenemos el transporte paralelo afín en las fibras  $A_{x_t} M$  de su haz asociado, es decir,

$$\tilde{\tau}_s^t : A_{x_t} M \rightarrow A_{x_s} M$$

donde  $\tau = x_t$ . Si tomamos una sección  $\tilde{Z}$  llamada **campo puntual** en el haz asociado y consideramos  $\tilde{\tau}_0^t : A_{x_t} M \rightarrow A_{x_0} M$ , entonces,

$$\tilde{\tau}_0^t(\tilde{Z}_{x_t}) : [0, 1] \rightarrow A_{x_0} M$$

define una curva en la fibra  $A_{x_0} M$ . Además tenemos que existe una correspondencia bi-unívoca entre campos vectoriales y campos puntuales.

**Definición 3.2.4.** Sea  $\tau = x_t$  una curva en  $M$  y  $\tilde{Z} = 0_x$  el campo puntual que le corresponde al campo vectorial cero sobre  $M$ . El **desarrollo** de la curva  $\tau$  en el espacio tangente afín es la curva en  $A_{x_0} M$  dada por la expresión  $\tilde{\tau}_0^t(0_{x_t})$ .

Mostraremos ahora la relación que hay entre los desarrollos y el transporte paralelo lineal, esto, por supuesto, viene dado por la relación entre la conexión afín y la conexión lineal.

**Teorema 3.2.5.** Sea  $\tau = x_t$  una curva en  $M$  y definimos  $Y_t = \tau_0^t(\dot{x}_t)$  la curva en  $T_{x_0} M$  dada por el transporte paralelo lineal en  $TM$ . Si  $C_t$  es el desarrollo de la curva  $\tau$  en  $A_{x_0} M$  de tal manera que  $C_0 = 0_x$ , entonces  $\frac{d}{dt} C_t = Y_t$ .

*Demostración.* Sean  $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ ,  $u_t$  el levantamiento horizontal en  $L(M)$  a través de  $u_0$  y  $\tilde{u}_t$  el levantamiento horizontal en  $A(M)$  con respecto a la conexión afín que pasa por  $\tilde{u}_0 = u_0$  (visto como elemento en  $L(M)$ ). Como habíamos visto en la última sección del capítulo anterior, el haz de marcos lineales se ve como el cociente  $A(M)/\mathbb{R}^n$  vía la transformación entre haces  $\beta : A(M) \rightarrow L(M)$ , por lo que el levantamiento en  $A(M)$  de la curva  $x_t$  tiene la forma  $\tilde{u}_t = u_t a_t$ , donde  $a_t \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\hat{\alpha}} A(M)$ . Como en la prueba de levantamiento único de curvas horizontales derivamos y obtenemos

$$\dot{\tilde{u}}_t = \dot{u}_t a_t + u_t \dot{a}_t.$$

Por lo que al aplicar a este vector la 1-forma  $\tilde{\omega}$  asociada la conexión afín  $\tilde{\Gamma}$  y utilizando que  $\tilde{\omega} = \omega + \theta$  se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\omega}(\dot{\tilde{u}}_t) = Ad(a_t^{-1})(\tilde{\omega}(\dot{u}_t)) + a_t^{-1} \dot{a}_t \\ &= Ad(a_t^{-1})(\omega(\dot{u}_t) + \theta(\dot{u}_t)) + a_t^{-1} \dot{a}_t = Ad(a_t^{-1})(\theta(\dot{u}_t)) + a_t^{-1} \dot{a}_t \end{aligned}$$

por lo tanto  $\theta(\dot{u}_t) = -\dot{a}_t a_t^{-1}$ .

De la Proposición 3.1.3 sabemos que  $\tau_0^t(\dot{x}_t) = u_0 \circ u_t^{-1}(\dot{x}_t)$  y de esta forma

$$\begin{aligned} Y_t &= \tau_0^t(\dot{x}_t) = u_0 \circ u_t^{-1}(\dot{x}_t) = u_0(\theta(\dot{u}_t)) \\ &= -u_0(\dot{a}_t a_t^{-1}) = -u_0(\dot{a}_t). \end{aligned}$$

Por otro lado la curva  $C_t$  cumple que

$$C_t = \tilde{\tau}_0^t(0_{x_t}) = u_0(\tilde{u}_t(0_{x_t})) = u_0(a_t^{-1}(u_t^{-1}(0_{x_t}))) = u_0(a_t^{-1}(0_{x_t}))$$

y por lo tanto

$$\frac{dC_t}{dt} = -u_0(\dot{a}_t) = Y_t.$$

□

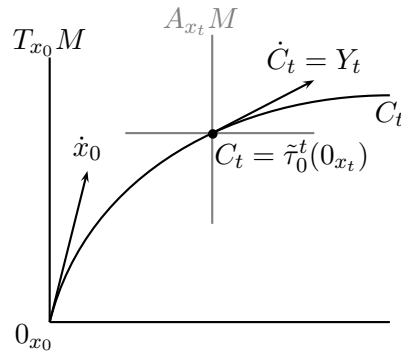


Figura 3.1: Desarrollo de la curva  $\tau$  expresado en términos del transporte paralelo.

Como consecuencia de este resultado obtenemos que

**Corolario 3.2.6.**  $C_t$  es un segmento de recta que comienza en el origen si y sólo si el campo  $\dot{x}_t$  es paralelo a lo largo de  $\tau$ .

*Demostración.* Si  $\dot{x}_t$  es paralelo con respecto a la curva  $\tau$ , entonces por el resultado anterior sabemos que  $Y_t = \tau_0^t(\dot{x}_t) = \dot{x}_0$  y como  $\dot{C}_t = Y_t$  se tiene que  $C_t = t\dot{x}_0$  es un segmento de recta. Si ahora  $C_t = tv_0$  para algún vector  $v_0 \in T_{x_0}M$ , entonces  $v_0 = \dot{C}_t = Y_t$ , por lo que  $v_0 = \tau_0^t(\dot{x}_t)$  para todo  $t$  y así  $\dot{x}_t$  es paralelo con respecto a  $\tau$ . □

Diremos que  $\tau = x_t$  es una **geodésica** con respecto a una conexión lineal si el  $\dot{x}_t$  es paralelo a lo largo de  $\tau$ . Observemos que  $x_t$  es geodésica si y sólo si  $\nabla_{\dot{x}_t}\dot{x}_t = 0$  para todo  $t$  y por el corolario 3.2.6 sabemos que el desarrollo de una geodésica es un segmento de recta.

Además si  $x_t$  y  $y_s$  son dos parametrizaciones de una geodésica  $\tau$ , entonces  $s = s(t)$  es una reparametrización de la curva, *i.e.*,  $y_{s(t)} = x_t$ , de donde se obtiene por la regla de la

cadena que  $\dot{y}_{s(t)} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{x}_t$  y como el transporte paralelo no depende de la parametrización de la curva  $\tau$  tenemos que

$$\dot{y}_0 \cdot \frac{ds}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{x}_0 = \tau_0^t(\dot{x}_t) = \tau_0^{s(t)}(\dot{y}_{s(t)} \cdot \frac{ds}{dt}) = \tau_0^{s(t)}(\dot{y}_{s(t)}) \cdot \frac{ds}{dt},$$

por lo que  $\frac{ds}{dt}$  es una constante distinta de cero y así  $s(t) = at + b$ . Veamos ahora la relación entre geodésicas y campos horizontales estándar.

**Proposición 3.2.7.** *Consideremos  $\Gamma$  una conexión lineal en  $L(M)$ . Sea  $B(\xi)$  el campo vectorial horizontal (con respecto a  $\Gamma$ ) asociado al vector  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_t$  una curva integral para  $B(\xi)$  y  $\tau = x_t$  una geodésica con respecto a la conexión  $\Gamma$ . Entonces*

(i)  $\pi(b_t)$  es una geodésica con respecto a la conexión en  $L(M)$ .

(ii)  $\tau$  es la proyección de una curva integral para un campo vectorial estándar.

*Demostración.*

(i) Si  $\pi(b_t) = x_t$ , entonces  $d\pi(\dot{b}_t) = \dot{x}_t$  para todo  $t$ , como  $b_t$  es una curva integral se tiene que  $\dot{b}_t = B(\xi)_{b_t}$  y por la definición de  $B(\xi)$  obtenemos que

$$\dot{x}_t = d\pi(\dot{b}_t) = d\pi(B(\xi)_{b_t}) = b_t\xi.$$

La curva  $b_t\xi$  es el levantamiento horizontal de  $\tau$  en  $TM$  ya que  $b_t$  es levantamiento horizontal en  $L(M)$ . Por notación, consideraremos  $\tau_a^b$  el transporte paralelo en  $L(M)$  y  $\bar{\tau}_a^b$  el transporte paralelo en  $TM$ , ambos sobre la curva  $\tau$ . De esta manera  $\bar{\tau}_0^t(b_t\xi) = \tau_0^t(b_t)\xi = b_0\xi$  ya que  $\xi$  es independiente de  $t$ , por lo que  $\dot{x}_t$  es paralelo a lo largo  $\tau = x_t$  y de esta forma  $\tau$  es una geodésica.

(ii) Si ahora  $\tau = x_t$  es una geodésica, consideramos  $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$  y definimos  $\xi := u_0^{-1}(\dot{x}_0)$ . Tomamos  $u_t$  el levantamiento horizontal en  $L(M)$  de  $\tau$  a través de  $u_0$  y consideramos la curva horizontal  $u_t\xi$  en  $TM$  que nuevamente es el levantamiento horizontal en  $TM$  de  $\tau$ , que además cumple que  $\dot{x}_0 = u_0\xi$ . Como  $\dot{x}_t$  es paralela a lo largo de  $\tau$  por ser una geodésica obtenemos que

$$\dot{x}_t = \bar{\tau}_t^0(\dot{x}_0) = \bar{\tau}_t^0(u_0\xi) = \tau_t^0(u_0)\xi = u_t\xi,$$

por lo que  $\dot{x}_t = u_t\xi$  (de nuevo porque  $\xi$  es independiente de  $t$ ). Aplicando la forma canónica  $\theta$  a  $\dot{u}_t$  se tiene

$$\theta((\dot{u}_t)_{u_t}) = u_t^{-1}d_{u_t}\pi(\dot{u}_t) = u_t^{-1}(\dot{x}_t) = \xi.$$

Por lo que  $u_t$  es una curva integral para el campo vectorial horizontal estándar  $B(\xi)$ .  $\square$

Como consecuencia directa del resultado anterior, obtenemos la unicidad de geodésicas dada una condición inicial en cualquier punto.

**Teorema 3.2.8.** *Para  $(x, v_x) \in TM$  existe una única geodésica  $\tau = x_t$  en  $M$  con respecto a una conexión lineal en  $L(M)$  tal que  $x_0 = x$  y  $v_x = \dot{x}_0$ .*

*Demostración.* Considerando  $u_0 \in \pi^{-1}(x)$  y  $\xi = u_0^{-1}(v_x)$ , tomamos como geodésica la proyección de  $b_t$ , la curva integral que pasa por el  $u_0$  del campo  $B(\xi)$ . Si tomamos  $u_1 \in \pi^{-1}(x)$  distinto de  $u_0$  entonces  $u_0 = u_1 a$  para algún  $a \in GL_n(\mathbb{R})$ , por lo que

$$\xi = u_0^{-1}(v_x) = (u_1 a)^{-1}(v_x) = a^{-1} u_1^{-1}(v_x)$$

y en consecuencia  $a\xi = u_1^{-1}(v_x)$ . Tomando el campo  $B(a\xi) = dR_{a^{-1}}B(\xi)$ , sabemos que la curva integral  $\bar{b}_t$  que pasa por  $u_1$  cumple que  $\bar{b}_t = b_t a$  y como ambas son horizontales se tiene que  $\pi(\bar{b}_t) = \pi(b_t)$ , de donde obtenemos la unicidad de la geodésica.  $\square$

**Observación 3.2.9.** Como sabemos, la existencia de una curva integral  $b_t$  se obtiene solamente para  $-\varepsilon < t < \varepsilon$ , por lo que diremos que una **conexión lineal** es **completa** en  $L(M)$  si toda geodésica  $x_t = \pi(b_t)$  está definida para  $t \in \mathbb{R}$ . Esto implica que cualquier campo vectorial horizontal estándar es completo, *i.e.*, todas sus curvas integrales  $b_t$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

Para cualquier condición inicial  $(x, v_x)$ , denotaremos  $Exp(t \cdot v_x) = x_t$  como el **mapeo exponencial** donde  $x_t$  es geodésica para  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  y  $x_0 = x$ . Consideremos  $\bar{0}$  el campo vectorial nulo en  $TM$  para tomar así a  $M$  como subconjunto de  $TM$ , es decir,  $M = \{(x, \bar{0}_x) \mid x \in M, \bar{0}_x \in T_x M\}$ .

**Teorema 3.2.10.** *Existe una vecindad de  $M$ ,  $\mathcal{U}$  en  $TM$  tal que el mapeo exponencial  $Exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  es diferenciable.*

*Demostración.* Definimos el campo vectorial diferenciable

$$B : L(M) \times \mathbb{R}^n \rightarrow TL(M) \times \mathbb{R}^n \text{ como } (u, \bar{a}) \mapsto (\sum_{i=1}^n a_i B(e_i)_u, \bar{a})$$

donde  $B(e_i)$  es el campo vectorial horizontal estándar asociado al vector canónico  $e_i$  y  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Para el campo  $B$  consideramos  $\phi(u, \xi, t)$  curva integral definida en  $W \times I_\delta$ , donde  $W$  es un abierto de  $L(M) \times \mathbb{R}^n$  y  $I_\delta = (-\delta, \delta)$ .

Consideramos los conjuntos  $K = \bar{B}_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$  compacto y  $U^* \subset L(M)$  abierto tales que  $U^* \times K \subset W$  y definimos  $\varphi = p_1 \circ \phi$ , es decir,  $\varphi(u, \xi, t)$  es la proyección sobre el primer factor en el producto  $L(M) \times \mathbb{R}^n$ .

Por lo tanto las curvas  $\varphi(u, \xi, t)$  son curvas integrales para el campo vectorial horizontal estándar  $B(\xi)$  que comienzan en el punto  $u$ , de esta forma  $\pi(\varphi(u, \xi, t))$  son geodésicas con condición inicial  $(\pi(u), u\xi)$ . Consideramos el conjunto

$$U = \{u(t\xi) \mid (u, \xi, t) \in U^* \times K \times I_\delta\} \subset TM.$$

Donde definimos el mapeo exponencial que viene expresado precisamente como

$$Exp(t \cdot u(\xi)) := \pi(\varphi(u, \xi, t)).$$

Por otro lado, notamos que el conjunto  $V = \{t\xi \mid (\xi, t) \in K \times I_\delta\}$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $U^* \times V$  es abierto en el producto  $L(M) \times \mathbb{R}^n$  y utilizando la proyección  $\tilde{\pi} : L(M) \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$  obtenemos que  $\tilde{\pi}(U^* \times V)$  es abierto en  $TM$  ya que  $\tilde{\pi}$  es una función abierta,



$$\begin{array}{ccccc}
 (u, t\xi) & \longleftarrow & (u, \xi, t) & \longrightarrow & \psi(u, \xi, t) \\
 U^* \times V & \longleftarrow & U^* \times K \times I_\delta & \longrightarrow & L(M) \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \text{---} & & \downarrow \pi_L \\
 TM & \longleftarrow & U & \xrightarrow{\text{Exp}} & M
 \end{array}$$

pero justamente  $\tilde{\pi}(U^* \times V) = U$ , por lo que  $U$  es abierto en  $TM$  justo donde el mapeo exponencial está definido por lo que la expresión

$$\text{Exp}(1 \cdot u(t\xi)) = \pi(\varphi(u, t\xi, 1))$$

define igualmente el mapeo exponencial. Como la elección del abierto  $U$  fue arbitrario consideramos  $\mathcal{U}$  como la unión de todos los abiertos  $U$ .

El mapeo exponencial está bien definido en la intersección de los abiertos  $U$  gracias al hecho de ser considerado como la proyección de curvas integrales de campos vectoriales.  $\square$

Por el teorema anterior, se cumple que para cada  $(x, \bar{0}_x)$  en  $M$  existe una vecindad  $U_x$  en  $T_xM$  de  $\bar{0}_x$ , tal que el mapeo exponencial es un difeomorfismo a alguna vecindad abierta  $W_x$  de  $x$  en  $M$ . Esto gracias a que, como se definió en la Proposición 3.2.2, el mapeo exponencial está definido a base de curvas integrales de campos vectoriales estándar que nunca se anulan y por lo tanto, la derivada del mapeo exponencial tampoco se anula.

De esta forma,  $\text{Exp}| : U \cap T_xM \rightarrow M$  es biyectiva para  $(x, \bar{0}_x) \in U$  y por el teorema de la función inversa existen  $U_x$  y  $W_x$  vecindades de  $\bar{0}_x$  y  $x$  en  $T_xM$  y  $M$  respectivamente tal que  $\text{Exp}_x : U_x \rightarrow W_x$  es un difeomorfismo.

Considerando  $\text{Exp}_x : U_x \rightarrow W_x$  tenemos que para cualesquiera  $y \in W_x$  y  $u = (x, X_1, \dots, X_n)$  en  $L(M)$  existe un vector  $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$ , tal que la geodésica  $\text{Exp}(tY) = x_t$  cumple que  $x_0 = x$  (por definición) y  $x_1 = y$ . De esta forma podemos tomar en  $W_x$  un sistema de coordenadas llamado **sistema normal de coordenadas**, i.e. para todo  $y \in W_x$

$$y = \sum_{j=1}^n \text{Exp}_x(t(a_j \cdot X_j))$$

dada la descomposición del vector  $Y$  en  $T_xM$ .

### 3.3. Conexiones Riemannianas

Para continuar el vínculo que hemos hecho hasta ahora con la teoría de conexiones  $\Gamma$  en haces principales y conexiones  $\nabla$  en variedades, diremos que una métrica fibrada  $g$  en un haz vectorial  $E$  es un producto interior en cada fibra  $E_x$  con  $x \in M$  que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: si  $\varphi$  y  $\psi$  son secciones (diferenciables) de  $E$ , entonces  $g_x(\varphi(x), \psi(x))$  es diferenciable como función sobre  $M$ . De esta manera una métrica riemanniana es particularmente una métrica fibrada en el haz tangente  $TM$ .

**Definición 3.3.1.** Sean un haz principal  $P(M, G)$  y  $g$  una métrica fibrada en el haz asociado  $E(P, F)$ . Una conexión  $\Gamma$  definida en  $P$  es llamada **conexión métrica** si el transporte paralelo en  $E$  preserva la métrica, *i.e.*, para cualquier curva  $\tau = x_t$  con  $0 \leq t \leq 1$  se tiene que el transporte paralelo  $\tau : \pi_E^{-1}(x_0) \rightarrow \pi_E^{-1}(x_1)$  es una isometría.

En términos de variedades riemannianas esta definición nos indica que una conexión lineal en  $L(M)$  es una conexión métrica con respecto a una métrica riemanniana  $g$ , si la conexión afín  $\nabla$  que se construye a partir de  $\Gamma$  cumple la propiedad de ser compatible con la métrica  $g$ .

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $g$  una métrica fibrada en  $TM$ , el haz vectorial asociado a  $L(M)$  y consideremos el subhaz  $O(M)$ , la reducción del haz definido por la métrica  $g$  (Ejemplo 2.3.5). Una conexión  $\Gamma$  en  $L(M)$  es reducible a una conexión en  $O(M)$  si y sólo si  $\Gamma$  es una conexión métrica.*

*Demostración.* Consideremos  $x_t$  una curva en  $M$ ,  $u_t$  su levantamiento horizontal que pasa por  $u_0 \in O(M)$  y para  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$  tomamos los levantamientos horizontales  $u_t\xi$  y  $u_t\eta$  en  $E$ . Si  $\Gamma$  es reducible a una conexión en  $O(M)$  se tiene que  $u_t \in O(M)$  para toda  $t$  y por lo tanto

$$g(u_0(\xi), u_0(\eta)) = \langle \xi, \eta \rangle = g(u_t(\xi), u_t(\eta))$$

y así llegamos a que  $\Gamma$  es una conexión métrica.

Si ahora  $\Gamma$  es una conexión métrica se tiene que

$$g(u_0(\xi), u_0(\eta)) = \langle \xi, \eta \rangle = g(u_t(\xi), u_t(\eta)),$$

y por definición de  $O(M)$  se concluye que  $u_t \in O(M)$ , lo que significa  $\Gamma$  es reducible a una conexión en  $O(M)$ .  $\square$

Este resultado será de gran utilidad más adelante donde todas las conexiones lineales definidas en  $L(M)$  serán reducidas al haz de marcos ortonormales  $O(M)$ .

**Proposición 3.3.3.** *Sean  $A^*$  un campo vectorial fundamental de  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  sobre  $L(M)$  y  $B(\xi)$  un campo vectorial horizontal estándar (con respecto a una conexión lineal) asociado al vector  $\xi$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $[A^*, B(\xi)] = B(A\xi)$ .*

*Demostración.* Sea  $a_t$  el subgrupo uniparamétrico correspondiente a  $A$ . Por la ecuación 1.7

$$[A^*, B(\xi)] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{B(\xi) - dR_{a_t} B(\xi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{B(\xi) - B(a_t^{-1}\xi)}{t},$$

esta última igualdad por el punto (2) de la Proposición 3.2.2. Notemos que la correspondencia  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con el vector  $B(\xi)_u \in \Gamma_u M$  es lineal, por lo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{B(\xi) - B(a_t^{-1}\xi)}{t} = B \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi - a_t^{-1}\xi}{t} \right) = B(A\xi).$$

$\square$

Definimos la **forma de torsión**  $\Theta := D\theta$  y probaremos la siguiente ecuación estructural:

**Teorema 3.3.4.** *Si  $\omega$  es la 1-forma de conexión asociada a una conexión lineal, entonces la forma de torsión tiene la siguiente expresión:*

$$\Theta(X, Y) = d\theta(X, Y) + \frac{1}{2}(\omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)). \quad (3.3)$$

*Demostración.* Por la bilinealidad de las 2-formas consideraremos de nuevo los casos en los que  $X$  y  $Y$  sean horizontales y/o verticales. Los casos para los cuales  $X$  y  $Y$  son ambos horizontales o verticales son triviales ya que ambos lados de la ecuación se anulan gracias a que  $\omega(X)\theta(Y) = 0 = \omega(Y)\theta(X)$ .

Consideremos ahora  $X$  horizontal y  $Y$  vertical, por la observación anterior sólo basta tomar  $Y = A^*$  y  $X = B(\xi)$ . Por definición  $\Theta(B(\xi), A^*) = 0$  y  $\omega(B(\xi)) = 0 = \theta(A^*)$ , por lo que la ecuación se reduce a

$$0 = d\theta(B(\xi), A^*) - \frac{1}{2}\omega(A^*)\theta(B(\xi)),$$

de donde se obtiene primero que  $-\frac{1}{2}\omega(A^*)\theta(B(\xi)) = -\frac{1}{2}A\xi$ . Por otro lado, de la ecuación (1.5) del primer capítulo y de la Proposición 3.3.3 obtenemos

$$d\theta(B(\xi), A^*) = -\frac{1}{2}\theta([B(\xi), A^*]) = \frac{1}{2}\theta([A^*, B(\xi)]) = \frac{1}{2}\theta(B(A\xi)) = \frac{1}{2}A\xi,$$

por lo que la expresión de teorema se cumple.  $\square$

**Definición 3.3.5.** Sea  $X, Y \in T_x M$  y  $X^*, Y^* \in T_u L(M)$  con  $u \in \pi^{-1}(x)$  tal que  $d_u \pi(X^*) = X$  y  $d_u \pi(Y^*) = Y$ . Definimos el **tensor de torsión**  $T$  como

$$T(X, Y) = u(2\Theta(X^*, Y^*)).$$

Notemos primero que  $T$  no depende de la opción de  $u \in \pi^{-1}(x)$ . Tomando  $v \in \pi^{-1}(x)$  distinto de  $u$  existe  $a \in GL_n(\mathbb{R})$ , tal que  $u = va$ , por lo que la expresión anterior se ve como

$$v(2\Theta(X_v^*, Y_v^*)) = ua^{-1}(2\Theta(X_v^*, Y_v^*)) = u(2\Theta(dR_a X_v^*, dR_a Y_v^*)),$$

esto gracias a que  $a^{-1}\theta(X) = \theta(dR_a X)$ ,  $ad(a^{-1})\omega(X) = \omega(dR_a X)$  y que  $d_u \pi(dR_a X_v^*) = X$  (de igual forma para  $Y_v^*$ ).

**Proposición 3.3.6.** *El tensor de torsión en términos de la derivada covariante se ve como*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (3.4)$$

*Demostración.* Por la proposición 3.1.3,  $\nabla_X Y = u(df(X^*)) = u(X^*(f))$  donde  $f(u) = u^{-1}(Y_{\pi(u)})$ , i.e.,  $f$  tiene la expresión en términos de la forma canónica  $\theta$  dada como  $f(u) = \theta(Y_u^*)$ . Por lo que  $\nabla_X Y = u(X^*\theta(Y_u^*))$  y de esta forma:

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= u(2\Theta(X^*, Y^*)) = u(X^*\theta(Y^*) - Y^*\theta(X^*) - \theta[X^*, Y^*]) \\ &= u(X^*\theta(Y^*)) - u(Y^*\theta(X^*)) - u(\theta[X^*, Y^*]) \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - u(\theta[X^*, Y^*]), \end{aligned}$$

donde  $u(\theta[X^*, Y^*]) = u \circ u^{-1}(d_u \pi[X^*, Y^*]) = [d_u \pi(X^*), d_u \pi(Y^*)] = [X, Y]$ .  $\square$

Con este resultado tenemos que dentro de todas las conexiones lineales  $\Gamma$ , podemos considerar las conexiones (lineales) métricas con respecto a una métrica riemanniana  $g$  y tomar aquella cuya torsión sea cero. Esta conexión  $\Gamma$  define a través de la derivada covariante la conexión (afín) de Levi-Civita  $\nabla$ , es decir,  $\nabla$  es simétrica y compatible con  $g$ .

Ahora para una variedad conexa y completa probaremos una equivalencia relacionada directamente con la teoría de desarrollo de curvas.

**Teorema 3.3.7.** *Sea  $(M, g, \nabla)$  una variedad riemanniana conexa junto con la conexión de Levi-Civita. Entonces,  $(M, g, \nabla)$  es completa si y sólo si para cualquier punto  $x \in M$  y cualquier curva  $C_t$  en  $T_x(M)$  que comience en el origen  $\bar{0}_x$  existe una única curva  $\tau$  en  $M$  que tiene por desarrollo la curva  $C_t$ .*

*Demostración.* Sea  $C_t$  una curva en  $T_x M$  para un punto fijo en la variedad, como el mapeo exponencial está definido en todo  $T_x M$  y considerando la construcción de éste (dado como la proyección de curvas solución para campos vectoriales horizontales asociados a un vector) definimos la curva

$$\text{Exp}_x(u\xi_t) = \pi \circ \varphi(u, \xi_t, 1) = x_t,$$

donde  $C_t = u\xi_t$  para algún elemento  $u$  en la fibra  $\pi^{-1}(x)$  en  $L(M)$  y  $\xi_t$  es una curva en  $\mathbb{R}^n$  que comienza en el origen. Por cuestiones de diferenciabilidad supondremos que  $C_t$  está definida en una vecindad abierta del cero  $(-a, a)$  por lo que  $\xi_t$  tendrá el mismo dominio de definición.

Afirmamos que  $x_t$  tiene por desarrollo a la curva  $C_t$ . En efecto, por construcción  $u_t = \varphi(u, \xi_t, 1)$  es el levantamiento horizontal de la curva  $x_t$  que comienza en  $u_0 = u$  y además

$$\dot{x}_t = d\pi(B(\xi_t)_{u_t}) = u_t \dot{\xi}_t$$

por definición, pues  $B(\xi_t)_{u_t} = \frac{d}{dt}\varphi(u_0, \xi_t, 1)$ . Tomando la curva

$$Y_t := \tau_0^t(\dot{x}_t) = u_0 \dot{\xi}_t,$$

obtenemos que  $\frac{d}{dt}C_t = Y_t$ , por lo tanto  $x_t$  es una curva cuyo desarrollo es exactamente  $C_t$ . Inversamente, si cualquier curva en el espacio tangente  $T_x M$  cumple con las hipótesis, se tiene en particular que las rectas son el desarrollo de una curva en  $M$ , es decir, para todo vector  $v_x$ ,  $C_t = tv_x$  es el desarrollo de una geodésica con  $t \in \mathbb{R}$  y por lo tanto  $M$  es completo.  $\square$

La expresión  $(M, g, \nabla)$  significa tomar la conexión de Levi-Civita de la métrica  $g$ , pero a partir de ahora sólo hablaremos de una variedad riemanniana  $(M, g)$ , donde la conexión de Levi-Civita viene implícita en esta notación.

### 3.4. Grupo de Holonomía Lineal

Para esta última sección del capítulo consideraremos el grupo de holonomía lineal  $\Psi(x)$  correspondiente a una conexión en  $L(M)$  en cada punto  $x$ , que nos será muy útil en la

prueba de último capítulo.

Notemos primero que  $\Psi(x)$  actúa sobre el espacio tangente  $T_xM$ , esto viene dado por el transporte paralelo sobre los elementos en  $C(x)$  (los lazos con punto inicial y final  $x$ ) como sigue:

El grupo de holonomía lineal se define como

$$\Psi(x) = \{f_\tau : \pi_L^{-1}(x) \longrightarrow \pi_L^{-1}(x) | \tau \in C(x)\},$$

donde  $f_\tau$  es una biyección  $GL_n(\mathbb{R})$ -equivariante en  $\pi_L^{-1}(x) \cong GL_n(\mathbb{R})$ , es decir, si  $\tau = x_t$  es un elemento de  $C(x)$ , tenemos que para cada  $u \in \pi_L^{-1}(x)$  existe un único levantamiento horizontal  $u_t$  en  $L(M)$ , tal que  $u_0 = u$  y  $u_1 = ug$  y de esta manera tomamos  $f_\tau(u) = ug$ . Definimos para cada  $u \in L(M)$  la función

$$f_\tau(u) : T_xM \longrightarrow T_xM$$

como  $f_\tau(u)(v_x) = u(g\xi)$ , donde  $v_x = u\xi$ . Esta operación viene dada simplemente como la evaluación del levantamiento horizontal de  $\tau$  en  $TM$ , pues tomando, como antes,  $v_x = u\xi$  y  $u_t$  el levantamiento horizontal tal que  $u_0 = u$ , definimos la curva horizontal  $\nu_t = u_t\xi$  en  $TM$ , donde  $\nu_0 = v_x$  y  $\nu_1 = u(g\xi)$ .

Veremos ahora los subespacios invariantes de  $T_xM$  para los cuales la acción bajo cada elemento en  $\Psi(x)$  los deja invariantes. Supongamos que  $T_xM$  es reducible bajo la acción del grupo  $\Psi(x)$ , *i.e.*, existe  $T'_x$  un subespacio no trivial que es invariante bajo la acción de  $\Psi(x)$ . Sea  $T'_y$  la imagen de  $T'_x$  bajo el transporte paralelo de una curva  $\tau = x_t$ , tal que  $x_0 = x$  y  $x_1 = y$ . La opción de esta curva es irrelevante ya que, tomando  $\mu$  otra curva con estas características hacemos el lazo  $\tau * \mu^{-1}$  que por el supuesto inicial deja invariante al subespacio  $T'_x$  y de esta manera concluimos que  $\tau(T'_x) = \mu(T'_x)$ . Gracias a que el transporte paralelo es un isomorfismo de espacios vectoriales, podemos considerar la distribución  $T'$  tomando a  $M$  conexo por trayectorias. En estos términos diremos que  $(M, g)$  es reducible o irreducible si la acción del grupo  $\Psi(x)$  sobre  $T_xM$  lo es.

Por último, gracias al Teorema 3.3.2 utilizaremos que toda conexión en  $L(M)$  se puede reducir a  $O(M)$  y que  $\Psi(x)$  es un subgrupo  $O(n)$ , por lo que la acción de cada elemento en el grupo de holonomía lineal es una transformación ortogonal en cada espacio tangente con respecto a la métrica riemanniana.

### Proposición 3.4.1.

- i) La distribución  $T'$  es involutiva.*
- ii) Sea  $M'$  la subvariedad integral maximal de  $T'$  (a través de un punto en  $M$ ). Entonces  $M'$  es totalmente geodésica.*
- iii) Si  $M$  es completa entonces  $M'$  también lo es con respecto a la métrica inducida.*

*Demostración.*

- (i) Considerando un sistema de coordenadas locales alrededor de algún punto  $x$  en la variedad  $M$  dado por el mapeo exponencial, sabemos que para cualquier punto  $y$  en  $W_x$  existe un vector  $Y$ , tal que  $Exp_x(tY) = y$  en  $t = 1$  y tomando  $X_1(x), \dots, X_k(x)$  base para  $T'_x$

obtenemos  $X_1, \dots, X_k$  campos vectoriales dados como  $X_j(y) = \tau_t^0(X_j(x))$  los transportes paralelos de los vectores a lo largo de la geodésica que une a  $x$  con  $y$ .

Para ver que  $T'$  es involutiva basta ver que  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$  es elemento de  $T'$  si tanto  $X$  como  $Y$  lo son. Sea  $\tau = x_t$  una curva integral para el campo  $X$ . Como vimos anteriormente

$$\nabla_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\tau_0^t(Y_{x_t}) - Y_x],$$

donde  $\tau_0^t(Y_{x_t})$  sigue siendo un elemento de  $T'_x$  ya que el transporte paralelo a lo largo de  $\tau$  deja invariantes a los elementos de  $T'$ , por lo que  $\nabla_X Y \in T'$  y análogamente para  $\nabla_Y X$ . Por lo que  $[X, Y] \in T'$

(ii) Sea  $\tau = x_t$  geodésica en  $M$  con condición inicial  $(y, X)$ , donde  $X \in T'_y$ . Supongamos que existe una carta  $(\chi, U)$  con coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  alrededor del punto  $y \in M$ , tal que  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_k$  generan a  $T'$  (esta carta será construida en el siguiente teorema), donde  $k = \dim(T')$ , por lo que existe  $0 < \varepsilon < 1$ , tal que la curva  $\tau$  tiene la forma  $x_t = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , donde

$$X = \dot{x}_0 = \sum_{j=1}^k \frac{dx^j}{dt} \Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Como  $\tau$  es geodésica tenemos que los vectores  $\dot{x}_t$  son paralelos a lo largo del transporte paralelo de  $\tau$  ( $\tau_t^0(\dot{x}_0) = \dot{x}_t$ ) lo que significa que  $\dot{x}_t \in T'_{x_t}$ . Por lo que  $\frac{dx^j}{dt} = 0$  para  $k < j \leq n$  y  $0 \leq t < \varepsilon$ , lo que significa que  $x_t \in M'$ .

(iii) Sea  $\tau = x_t$  una geodésica en  $M$  con condición inicial  $(y, X)$ , donde  $X \in T'_x$ . Como  $M'_y$  es totalmente geodésica se tiene que  $\tau \in M'_y$ . Supongamos que  $\tau$  es una geodésica minimizante, entonces existe una vecindad normal alrededor de  $x_0 = y$  (con un sistema normal de coordenadas), tal que  $d(y, x_t) = \text{Long}(x_t)|_0^t$  para  $0 \leq t < a$ , donde  $d$  es la función distancia definida por  $g$ . Dado que la distancia  $d(y, x_t)$  se define como el ínfimo de las longitudes de todas las geodésicas en  $M$  que unen a  $x_0 = y$  con  $x_t$ , tenemos para la función distancia  $d'$  inducida por la métrica riemanniana  $g'$  en  $M'_x$  que

$$\text{Long}(x_t)|_0^t = d(y, x_t) \leq d'(y, x_t),$$

por lo que  $\tau = x_t$  también es una geodésica minimizante para la función distancia  $d'$  donde  $0 \leq t < a$ . Haciendo la misma construcción en el punto  $x_a$ , concluimos que  $\tau$  es una geodésica minimizante para  $M'_x$ .  $\square$

No perdamos de vista que las transformaciones inducidas por el grupo de holonomía son ahora ortogonales, por lo que para cada  $x \in M$ , consideraremos  $T''_x$  el complemento ortogonal de  $T'_x$ . Similarmente, esta asignación generará una distribución involutiva, ortogonal y complementaria a  $T'$ .

**Teorema 3.4.2.** *Para cada punto  $x$  en  $M$  existe una carta  $(\chi, \mathcal{U})$  con un sistema de coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $\mathcal{U}$ , tal que  $\{\partial_{x_i}\}_{i=1}^k$  y  $\{\partial_{x_j}\}_{j=k+1}^n$  son bases locales para  $T'$  y  $T''$  respectivamente, donde  $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in M$  y  $M'_x$  la subvariedad integral maximal de  $T'$  en  $x$  y supongamos que la dimensión de  $T'$  es  $k$ . Dado que  $M'_x$  es una variedad por si misma tomamos una carta  $(\chi_1, V)$  de  $M'_x$  alrededor de  $x$  con coordenadas  $(y_1, \dots, y_k)$ , por lo que los vectores  $\{(\partial/\partial y_i)_x\}_{i=1}^k$  generan el subespacio  $T'_x$ , completamos este conjunto a una base de  $T_x M$  con  $n - k$  vectores  $X_{k+1}(x), \dots, X_n(x)$ . Tomando el sistema normal de coordenadas generada por la base

$$\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_k, X_{k+1}(x), \dots, X_n(x)\},$$

obtenemos una nueva carta  $(\chi', U')$  con coordenadas locales  $(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  alrededor de  $x$ . Para cada  $q \in U'$  tenemos que

$$\chi'^{-1}(q) = (y_1(q), \dots, y_k(q), x_{k+1}(q), \dots, x_n(q)).$$

Análogamente también  $T''$  es una distribución involutiva y existe una carta  $(\chi'', U'')$  con coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ , tales que el conjunto  $\{\partial/\partial z_j\}_{j=k+1}^n$  es una base para  $T''$  y de la misma forma para  $q \in U''$

$$\chi''^{-1}(q) = (x_1(q), \dots, x_k(q), z_{k+1}(q), \dots, z_n(q)).$$

Suponiendo que las dos cartas están definidas en una vecindad abierta del cero de  $\mathbb{R}^n$ , podemos suponer que las vecindades son la misma tomando la intersección  $W = \chi'(U') \cap \chi''(U'')$ , de esta manera  $\chi'$  y  $\chi''$  tienen el mismo dominio de definición.

Definimos las funciones diferenciables

$$F = \pi_k \circ \chi''^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

dada por  $F(q) = (x_1(q), \dots, x_k(q))$ , donde  $\pi_k : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  es la proyección sobre las primeras  $k$  coordenadas y

$$G = \pi_{n-k} \circ \chi'^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

como  $G(q) = (x_{k+1}(q), \dots, x_n(q))$ , donde  $\pi_{n-k} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  es la proyección sobre las últimas  $n - k$  coordenadas.

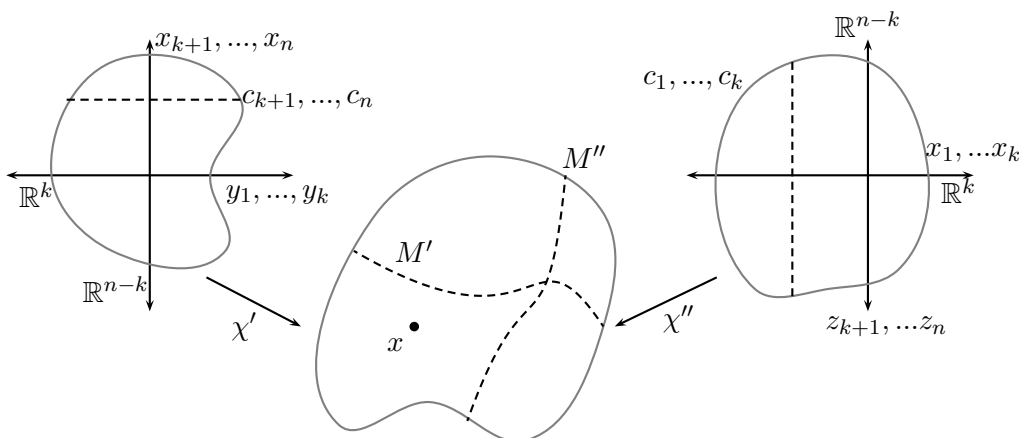
Observamos para cada vector fijo  $(c_1, \dots, c_k)$  en  $\mathbb{R}^k$  que  $F^{-1}(c_1, \dots, c_k)$  es una subvariedad integral de  $T''$  y para cada vector  $(c_{k+1}, \dots, c_n)$  en  $\mathbb{R}^{n-k}$ ,  $G^{-1}(c_{k+1}, \dots, c_n)$  es una subvariedad integral para  $T'$  por construcción.

Definimos la función  $\chi^{-1} = (F, G) : W \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  dada como  $\chi^{-1}(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$  diferenciable, pues tanto  $F$  como  $G$  lo son. Hace falta ver que  $\chi$  es una carta local.

En efecto: Por construcción la diferencial de  $\chi^{-1}$  en un punto  $q \in W$  se ve como

$$d_q \chi^{-1} = d_q F + d_q G,$$

además  $d_q F$  y  $d_q G$  son suprayectivas y  $\ker(d_q F) + \ker(d_q G) = T_q M$  ya que  $\ker(d_q F) = T''_q$  y  $\ker(d_q G) = T'_q$ , por lo que  $d_q \chi^{-1}$  es un isomorfismo lineal. De esta manera existe una vecindad abierta  $\mathcal{U}$  de  $x \in M$  tal que  $\chi : W \rightarrow \mathcal{U}$  es un difeomorfismo y entonces  $(\chi, \mathcal{U})$  es la carta local buscada.  $\square$

Figura 3.2: Construcción de la carta  $(\chi, \mathcal{U})$ .

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.4.3.** *Sea  $x \in M$  y sean  $M'_x$  y  $M''_x$  las subvariedades integrales maximales de las distribuciones  $T'$  y  $T''$  respectivamente. Entonces existe una vecindad de  $x$  en  $M$  de la forma  $V = V' \times V''$ , tal que  $V' \subset M'_x$  y  $V'' \subset M''_x$  son vecindades de  $x$  en  $M'$  y  $M''$  respectivamente, además la métrica riemanniana  $g$  en  $V$  es el producto de las métricas  $g'$  y  $g''$  en  $V'$  y  $V''$  respectivamente.*

*Demostración.* Consideramos la carta  $(\chi, \mathcal{U})$  construida en el Teorema 3.4.2 y tomando  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $Q_c^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < c\} \subset \mathcal{U}$ , definimos  $V' = \chi(Q_c^k \times \{0\})$  y  $V'' = \chi(\{0\} \times Q_c^{n-k})$ . Por construcción  $V' \subset M'$  y  $V'' \subset M''$ , por lo tanto  $V = V' \times V''$  es la vecindad deseada. Veamos ahora que  $g$  es el producto directo de  $g'$  y  $g''$ , es decir, que  $g(X_i, X_j)$  es independiente de las coordenadas  $x_{k+1}, \dots, x_n$  para  $1 \leq i, j \leq k$ , de la misma forma, que  $g(X_i, X_j)$  es independiente de  $x_1, \dots, x_k$  para  $k+1 \leq i, j \leq n$  y que  $g(X_i, X_j) = 0$  si  $X_i \in T'$  y  $X_j \in T''$ . Esta última se cumple trivialmente pues las distribuciones  $T'$  y  $T''$  son ortogonales por construcción. Para probar la primera parte sabemos que  $[X_i, X_m] = 0$  para  $1 \leq i \leq k$  y  $k+1 \leq m \leq n$  por construcción de la carta  $(\chi, \mathcal{U})$  y dado que la torsión es nula

$$0 = \nabla_m X_i - \nabla_i X_m - [X_i, X_m] = \nabla_m X_i - \nabla_i X_m,$$

de esta forma  $\nabla_m X_i = \nabla_i X_m$ . Del inciso (i) de la Proposición 3.4.1 se tiene que  $\nabla_m X_i \in T'$  y  $\nabla_i X_m \in T''$ , por lo tanto  $\nabla_m X_i = \nabla_i X_m = 0$ . Además sabemos que para cualesquiera tres campos  $X_i, X_j$  y  $X_m$  que la métrica cumple

$$X_m(g_{i,j}) = g(\nabla_{X_m} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_m} X_j).$$

Tomando  $X_i, X_j \in T'$  y  $X_m \in T''$  y utilizando la expresión anterior tenemos que  $X_m(g_{i,j}) = 0$ , por lo que la métrica  $g'$  definida en  $M'_x$  es independiente de las coordenadas  $x_{k+1}, \dots, x_n$  y como la prueba es análoga para  $g''$ , concluimos que  $g = (g', g'')$  en la vecindad  $V$ .  $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Si  $T'$  y  $T''$  son las distribuciones involutivas complementarias y ortogonales definidas por el grupo de holonomía  $\Psi(x)$ , entonces  $\Psi(x)$  se descompone como*



el producto de dos subgrupos normales  $\Psi(x)'$  y  $\Psi(x)''$ , tal que  $\Psi(x)'$  actúa trivialmente en  $T_x''$  y  $\Psi(x)''$  actúa trivialmente en  $T_x'$ .

*Demostración.* Sea  $\tau$  un elemento de  $C(x)$  y consideremos su correspondiente elemento en el grupo de holonomía lineal  $f_\tau \in \Psi(x)$  y  $u = (x, \{X_1, \dots, X_n\})$  en  $O(M)$ , de tal manera que  $\{X_1, \dots, X_k\}$  es base para  $T_x'$  y  $\{X_{k+1}, \dots, X_n\}$  es base para  $T_x''$ . Si tomamos  $v' \in T_x'$  entonces existe  $\xi' \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u(\xi') = v'$ , por lo que  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)$  es un elemento del subespacio  $\mathbb{R}^k \times \{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^n$  y mediante la acción de  $f_\tau(u)$  existe  $A \in O(n)$ , tal que

$$f_\tau(u)(v') = u(A\xi') \in T_x' \Leftrightarrow A\xi' \in \mathbb{R}^k \times \{\bar{0}\}.$$

Esto implica que la matriz  $A$  deja invariante el subespacio  $\mathbb{R}^k \times \{\bar{0}\}$ . Utilizando el mismo argumento para vectores en  $T_x''$  tenemos que  $A$  también deja invariante el subespacio  $\{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Por lo que la matriz tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = g_1 \cdot g_2,$$

donde  $a \in O(k)$  y  $b \in O(n-k)$ . Suponiendo que la curva  $\tau$  está contenida en una vecindad de la forma  $V' \times V''$ , obtenemos la descomposición de la curva como  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ , donde  $\tau_1 \in V'$  y  $\tau_2 \in V''$ .

Por la misma razón  $f_\tau(u)$  se descompone como el par ordenado  $(f_1(u_1), f_2(u_2))$ , donde

$$f_1(u_1) : T_x M' \longrightarrow T_x M' \text{ y } f_2(u_2) : T_x M'' \longrightarrow T_x M''$$

para  $u_1 = (x, X_1, \dots, X_k) \in O(M_x')$  y  $u_2 = (x, X_{k+1}, \dots, X_n) \in O(M_x'')$ , definidas como  $f_1(u_1)(v_1) = u_1(a\xi_1)$  para  $\xi_1 \in \mathbb{R}^k \times \{\bar{0}\}$ , tal que  $u_1(\xi_1) = v_1$  y  $f_2(u_2)(v_2) = u_2(b\xi_2)$  para  $\xi_2 \in \{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^k$ , tal que  $u_2(\xi_2) = v_2$ .

Las curvas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  pueden ser consideradas curvas en la variedad  $M$ , por lo que tomando  $f_{\tau_1}(u_1, u_2)$  el isomorfismo generado por la curva  $\tau_1$  tenemos que éste se ve como  $(f_1, Id_{T_x M''})(u_1, u_2)$  y análogamente el isomorfismo  $f_{\tau_2}(u_1, u_2)$  para la curva  $\tau_2$  se ve como  $(Id_{T_x M'}, f_2)(u_1, u_2)$ , donde  $f_{\tau_2}(u_1, u_2)$  le corresponde la matriz  $g_1$  y  $g_2$  a  $f_{\tau_2}(u_1, u_2)$ , obteniendo una descomposición del elemento  $f_\tau$  como

$$f_\tau(u) = f_{\tau_1}(u_1, u_2) \cdot f_{\tau_2}(u_1, u_2),$$

y mediante la construcción de estos sabemos que  $f_{\tau_1}$  deja invariante a  $T_x''$  y  $f_{\tau_2}$  deja invariante a  $T_x'$  llegando a que  $\Psi(x) = \Psi'(x) \times \Psi''(x)$ .

En el caso general (y considerando que la variedad en la que trabajamos es simplemente conexa) la curva puede descomponerse en producto de curvas de este tipo. Tomamos una homotopía  $H(t, s)$  que contrae al lazo  $\tau$  al punto  $x$ , es decir,  $H(t, 0) = x$  y  $H(t, 1) = x_t$ , de tal manera que  $H(0, s) = H(1, s) = 0 = x$ . Cubriendo  $H([0, 1] \times [0, 1])$  con una cantidad finita de abiertos de la forma  $V' \times V''$ , podemos encontrar una subdivisión en  $m^2$  cuadrados de  $[0, 1] \times [0, 1]$  cuya imagen esté totalmente contenidos en cada uno de los abiertos mencionados. Consideramos la curva imagen bajo  $H$  de la curva que une a los puntos en el siguiente orden:

$$(0, 0) \rightarrow (0, k+1) \rightarrow (j+1, k+1) \rightarrow (j+1, k) \rightarrow (j, k) \rightarrow (j, k+1),$$

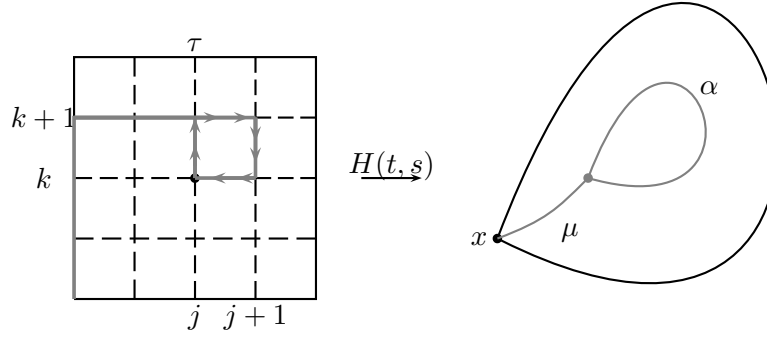


Figura 3.3: Curva  $\lambda(j, k)$  como unión de  $\mu$  y  $\alpha$  en la vecindad  $V' \times V''$ .

donde la imagen del cuadrado  $[j, j + 1] \times [k, k + 1]$  es una curva  $\alpha$  en una vecindad  $V'' \times V''$  y  $\mu$  una curva que une a  $x$  con el punto donde está basada  $\alpha$ . Definimos el lazo  $\lambda(j, k) = \mu * \alpha * \mu^{-1}$  y utilizando la trivialidad local de  $\alpha$ , obtenemos la descomposición  $\alpha = (\alpha', \alpha'')$  en  $V'' \times V''$ , por lo que la curva  $\lambda(j, k)$  se descompone como

$$\lambda'(j, k) = \mu * \alpha' * \mu^{-1} \text{ y } \lambda''(j, k) = \mu * \alpha'' * \mu^{-1},$$

y a cada una de estas curvas les corresponde  $f_{\lambda'}$  y  $f_{\lambda''}$  en  $\Psi'(x)$  y  $\Psi''(x)$  respectivamente (porque el transporte paralelo sobre  $\mu$  deja invariante los espacios  $T'$  y  $T''$ ).

La curva  $\tau$  es el producto de todas las curvas  $\lambda(j, k)$  ya que todas las curvas definidas dentro del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  se anulan unas a otras y lo mismo para sus respectivos transportes paralelos. Así concluimos que el grupo de holonomía lineal es el producto de  $\Psi'(x)$  y  $\Psi''(x)$ .  $\square$

## Capítulo 4

# Teorema de descomposición de De Rham

Como vimos en el capítulo anterior, una variedad  $(M, g)$  es irreducible si no existen subespacios propios del tangente en un punto que sean invariantes bajo la acción del grupo de holonomía. En el caso contrario consideramos  $T'_x$  un subespacio propio invariante bajo la acción de  $\Psi(x)$  y a partir de este consideramos su complemento ortogonal  $T''_x$  que también cumple con ser invariante bajo la acción de  $\Psi(x)$ . Con esta hipótesis probamos que  $\Psi(x)$  se descompone como producto de subgrupos normales  $\Psi(x)'$  y  $\Psi(x)''$  que justamente son los grupos de holonomía de  $M'_x$  y  $M''_x$  (las subvariedades integrales maximales provenientes de las distribuciones involutivas  $T'$  y  $T''$ ) y que por si solas son variedades riemannianas.

El teorema de descomposición de De Rham establece que una variedad  $(M, g)$  simplemente conexa y completa se descompone de manera única en producto de subvariedades irreducibles, salvo orden y  $(M, g)$  es isométrica a este producto. Esto significa que el teorema es un corolario del desarrollo de la teoría que vimos en los capítulos anteriores, ya que al considerar la variedad  $(M', g')$  aplicamos nuevamente el mismo proceso que hicimos al principio para descomponerla hasta encontrar todas las subvariedades irreducibles y hacemos lo mismo con  $(M'', g'')$ . Por lo tanto, la descomposición sólo se verá afectada por la elección de los subespacios propios invariantes bajo la acción del grupo de holonomía de la respectiva variedad en cada paso.

El objetivo del capítulo es encontrar la isometría entre la variedad  $M$  y  $M'_x \times M''_x$ , fijando un elemento  $0$  en la variedad  $M$  consideramos las subvariedades integrales  $M'$  y  $M''$  a través de este. La idea de la prueba consiste en encontrar proyecciones  $p' : M \rightarrow M'$  y  $p'' : M \rightarrow M''$  de tal manera que  $p = (p', p'')$  sea la isometría buscada. Las proyecciones se definirán utilizando la holonomía de la variedad y haciendo la construcción de la proyección  $p'$  se verá que la construcción de  $p''$  es simétrica.

Consideremos  $\mathcal{C}_M^0 = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = 0\}$  el conjunto de curvas en  $M$  que tienen punto inicial en  $0$ , tomando un elemento  $\tau = z_t$  en este conjunto, consideramos el desarrollo de esta curva en el punto  $0$ , es decir, la única curva  $C_t$  en  $T_0M$ , tal que  $C_0 = \bar{0}$ ,

$\dot{C}_0 = \dot{z}_0$  y

$$\frac{d}{dt}C_t = \tau_0^t(\dot{z}_t).$$

El siguiente paso es descomponer el desarrollo de la curva como  $C_t = A_t + B_t$ , donde  $A_t \in T'_0$  y  $B_t \in T''_0$  para toda  $t$ , sabemos que  $T'_0 = T'_0M'$ , de modo que la curva  $A_t$  es una curva en el tangente a  $M'$  en 0 y como vimos en el capítulo anterior existe una correspondencia biunívoca entre curvas en una variedad y los desarrollos de éstas en su punto inicial. Por lo tanto existe una única curva  $\bar{\tau} = x_t$  en  $M'$ , tal que  $\frac{d}{dt}A_t = \bar{\tau}_0^t(\dot{x}_t)$ . Tomando  $P' : \mathcal{C}_M^0 \rightarrow \mathcal{C}_{M'}^0$  como  $P'(z_t) = x_t$ , nuestra meta es probar que el punto final  $x_1$  de la curva proyección  $x_t$  depende solamente del punto final de la curva  $z_t$ , es decir, si  $w_t \in \mathcal{C}_M^0$ , tal que  $z_1 = w_1$ , entonces  $x_1 = \bar{x}_1$ , donde  $P'(w_t) = \bar{x}_t$  y de esta forma definir la función  $p := (p', p'') : M \rightarrow M' \times M''$  como la evaluación en el punto final de ambas curvas  $p(z) = (x_1, y_1)$  (donde la construcción de la curva  $y_t$  es análoga). Esta prueba se realizará mediante una lista de pasos que nos ayudarán a reducir el problema a cuestiones locales.

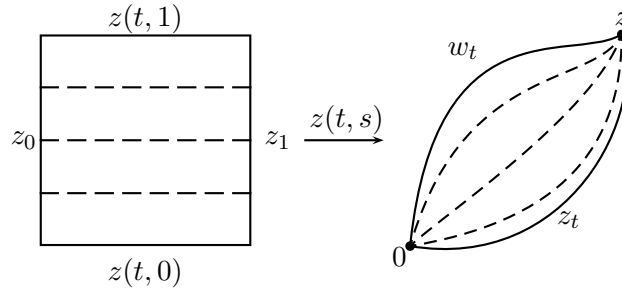


Figura 4.1: Homotopía entre las curvas  $z_t$  y  $w_t$ .

**Observación 4.0.5.** Si dos curvas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  tienen un mismo punto inicial y final entonces  $\tau_2^{-1} \circ \tau_1$  es un lazo que es contraíble y por tanto existe una homotopía  $z(t, s)$  que en particular puede ser tomada como  $z(t, 0) = \tau_1$ ,  $z(t, 1) = \tau_2$ ,  $z(0, s) = 0$  y  $z(1, s) = z$ .

A continuación mostraremos una proposición que reducirá el caso de las dos curvas  $z_t$  y  $w_t$ .

**Proposición 4.0.6.** *La proyección de las curvas  $\tau_1 = z_t$  y  $\tau_2 = w_t$  sobre  $M'$  se reduce a proyectar dos curvas  $\kappa * \mu * \eta$  y  $\kappa * \nu * \eta$  para  $\mu$  y  $\nu$  totalmente contenidas en una vecindad de la forma  $V = V' \times V''$ , donde el punto inicial de  $\eta$  es 0 y el punto final de  $\kappa$  es  $z_1 = w_1$ .*

*Demostración.* Recordemos que la vecindad  $V$  cumple con que  $V' \subset M'_z$  y  $V'' \subset M''_z$  para todo  $z \in M$ . Entonces para un número natural  $m$  podemos subdividir  $I \times I$  en  $m^2$  cuadrados de tal manera que la imagen de cada cuadrado bajo la homotopía  $z : I \times I \rightarrow M$  está totalmente contenida en una vecindad  $V = V' \times V''$ . Consideramos uno de estos rectángulos

$$\mathbf{R} = \{(t, s) | t_1 \leq t \leq t_2, s_1 \leq s \leq s_2\}$$

para  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$  y  $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$ , donde el punto  $H(t_1, s_1)$  es en centro de la vecindad  $V' \times V''$  que contiene a  $H(\mathbf{R})$ . Ahora consideramos  $\bar{\tau}_2$  la imagen bajo  $z(t, s)$  de la curva que

consta de unir los puntos  $(0, s_1)$ ,  $(t_1, s_1)$ ,  $(t_1, s_2)$  y  $(1, s_2)$  como se muestra en la imagen. Las curvas  $w_t$  y  $\bar{\tau}_2$  tienen mismo punto final e inicial y por lo tanto son homotópicas

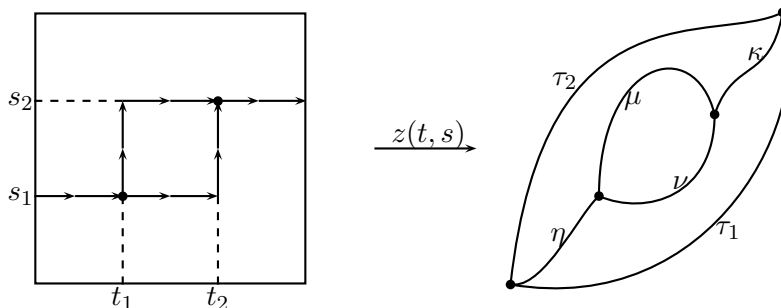


Figura 4.2: Las nuevas curvas son homotópicas a las originales.

por la observación anterior, al igual que  $\tau_1$  y  $\bar{\tau}_1$  la curva que proviene de la imagen bajo  $z(t, s)$  que consta de unir los puntos  $(0, s_1)$ ,  $(t_2, s_1)$ ,  $(t_2, s_2)$  y  $(1, s_2)$ , por lo tanto  $\bar{\tau}_1$  y  $\bar{\tau}_2$  son homotópicas entre si y además cumplen con las propiedades requeridas. Definiendo  $\eta$  como  $z(t, s_1)$  con  $0 \leq t \leq t_1$  y  $\kappa$  como  $z(t, s_2)$  con  $t_2 \leq t \leq 1$ , tenemos que  $\mu$  y  $\nu$  están en la vecindad  $V$  al ser contruidas a través de los lados del rectángulo  $\mathbf{R}$ , es decir, para  $t_1 \leq t \leq t_2$  y  $s_1 \leq s \leq s_2$ ,  $\mu = z(t, s_2) * z(t_1, s)$  y  $\nu = z(t, s_1) * z(t_2, s)$ .  $\square$

A partir de ahora el problema se reduce a considerar las nuevas curvas encontradas, pues  $\mu$  y  $\nu$  son homotópicas y pertenecen a una vecindad “cuadrada”. Más adelante veremos que la proyección natural en  $V$  y  $p'$  coinciden si se tiene este caso, pero ahora probaremos una propiedad de la función  $p'$  donde no se requieren consideraciones locales. Antes de esto debemos señalar que la construcción de la proyección  $p = (p', p')$  es independiente del punto  $0 \in M$ , es decir, para cualquier punto  $z$  en  $M$  existe  $p_z = (p'_z, p''_z) : M \rightarrow M'_z \times M''_z$ .

**Proposición 4.0.7.** *Sea  $\tau = z_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , una curva en  $M$  con  $z_0 = 0$  y  $a \in (0, 1)$ . Si  $\tau_1 = z_t^1$  la curva  $\tau$  restringida al intervalo  $[0, a]$ ,  $\tau_2 = z_t^2$  la curva  $\tau$  restringida al intervalo  $[a, 1]$  y  $\tau'_2$  su proyección sobre la subvariedad integral maximal  $M'(z_a)$  de  $T'$  a través de  $z_a$ , entonces la proyección sobre  $M'_0$  de las curvas  $\tau$  y  $\zeta = \tau'_2 * \tau_1$  es la misma.*

*Demostración.* Observamos que la proyección sobre la subvariedad  $M'_0$  de cualquier curva está dada por su respectivo desarrollo (único) y que si  $X_t$  es la  $T'$ -componente del vector  $\dot{z}_t$ , entonces  $\tau_0^t(X_t) = (\tau')_0^t(\dot{x}_t)$ , donde  $\tau' = x_t$  es la proyección de la curva. Sea  $\zeta = w_t$ , hay que probar que los transportes paralelos de las  $T'$ -componentes de los vectores de las curvas  $\tau$  y  $\zeta$  sobre si mismas al punto inicial 0 coinciden para cualquier  $t$ , es decir,  $\tau_0^t(X_t) = \zeta_0^t(\dot{X}_t)$ . Esto se cumple trivialmente si  $t \in [0, a]$  pues las curvas coinciden en ese intervalo, si  $a < t \leq 1$  sabemos que  $\dot{w}_t$  coincide con su  $T'$ -componente pues  $\tau'_2$  es la proyección de la curva  $\tau_2$  y por la primera observación tenemos que  $(\tau_2)_a^t(X_t) = (\tau'_2)_a^t(\dot{w}_t)$ . Por lo tanto  $(\tau_1)_0^a(\tau_2)_a^t(X_t) = (\tau_1)_0^a(\tau'_2)_a^t(\dot{w}_t)$  y como  $(\tau_1)_0^a(\tau_2)_a^t = \tau_0^t$  y  $(\tau_1)_0^a(\tau'_2)_a^t = \zeta_0^t$ , tenemos que  $p'(\tau) = p'(\tau'_2 * \tau_1)$ .  $\square$

**Proposición 4.0.8.** *Sea  $\tau = z_t$  una curva en  $M$  totalmente contenida en una vecindad de la forma  $V = V' \times V''$  y  $\pi_1 : V \rightarrow V'$  la proyección natural, entonces  $P'(z_t) = \pi_1(z_t)$ .*

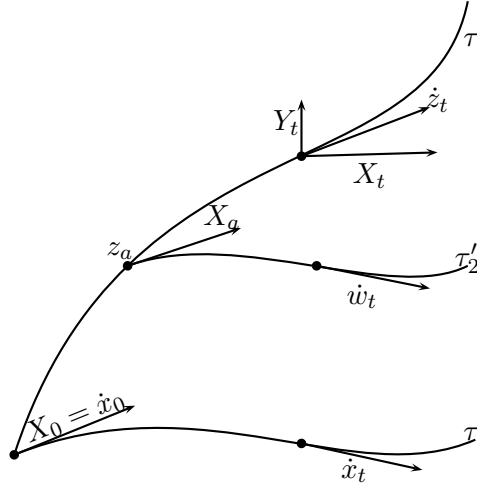


Figura 4.3: la proyección de  $\tau$  y  $\zeta$  es la misma.

*Demostración.* Sea  $z_t \in V$ , entonces existen curvas  $w_t \in V'$  y  $y_t \in V''$ , tal que  $z_t = (w_t, y_t)$  donde  $w_0 = 0 \in M'$  y  $y_0 = 0 \in M''$ . Sea  $\bar{x}_t = (w_t, 0)$  la proyección de la curva  $z_t$  en  $V$ . Al igual que en la proposición anterior, probaremos que  $\tau_0^t(X_t) = (\bar{\tau})_0^t(\dot{\bar{x}}_t)$ , donde  $\bar{\tau}_0^t$  es el transporte paralelo sobre la curva  $\bar{x}_t$  y por unicidad se concluye que  $x_t = \bar{x}_t$ . Dado que la curva inicial se descompone en un par ordenado de curvas y como la métrica en  $M$  está dada por el producto de las métricas de  $M'$  y  $M''$  en la vecindad  $V$  ( $g = (g', g'')$ ), tenemos que el transporte paralelo de  $z_t$  es el transporte paralelo de cada una de sus entradas, es decir, si  $\zeta = w_t$  y  $\gamma = y_t$  se tiene que  $\tau_0^t = (\zeta_0^t, \gamma_0^t)$  y el vector velocidad de  $\tau$  está dado como  $\dot{z}_t = (\dot{w}_t, 0)_{z_t} + (0, \dot{y}_t)_{z_t}$ , donde la  $T'$ -componente de  $z_t$  es el primer sumando y  $\dot{\bar{x}}_t = (\dot{w}_t, 0)_{\bar{x}_t}$ , por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \tau_0^t(X_t) &= (\zeta_0^t, \gamma_0^t)(\dot{w}_t, 0)_{z_t} = (\zeta_0^t(\dot{w}_t), \gamma_0^t(0)) \\ &= (\zeta_0^t(\dot{w}_t), 0) = (\zeta_0^t, 0)(\dot{w}_t, 0)_{\bar{x}_t} \\ &= (\bar{\tau})_0^t(\dot{\bar{x}}_t) \end{aligned}$$

y así concluimos que  $P'(z_t) = \pi_1(z_t)$ .  $\square$

Para los siguientes resultados necesitaremos las siguientes definiciones: como ya utilizamos anteriormente, para cualquier curva  $z_t$ ,  $\dot{z}_t$  se descompone como suma de vectores  $X_t \in T'_{z_t}$  y  $Y_t \in T''_{z_t}$  que llamamos su  $T'$ -componente y  $T''$ -componente respectivamente. Diremos que  $z_t$  es una  $T'$ -curva si  $Y_t = 0$  o  $T''$ -curva si  $X_t = 0$ , además si tenemos  $z : I \times I \rightarrow M$  una función diferenciable, definimos  $z(t, 0) = x_t$  y  $z(0, s) = y^s$  y para valores fijos  $s_0, t_0 \in I$  denotamos  $z(t, s_0)$  como  $z_{s_0}(t)$  y  $z(t_0, s)$  como  $z_{t_0}(s)$ . Si  $\bar{\tau} = x_t$  y  $\bar{\tau} = y^s$  definimos  $\bar{\tau}_{s_0} = z_{s_0}(t)$  y  $\bar{\tau}_{t_0} = z_{t_0}(s)$ .

**Proposición 4.0.9.** *Sea  $z : I \times I \rightarrow M$  una función diferenciable, donde  $z(I \times I)$  está contenida en una vecindad  $V = V' \times V''$ . Si para todo  $s_0, t_0 \in I$   $z_{s_0}(t)$  es una  $T'$ -curva y  $z_{t_0}(s)$  es una  $T''$ -curva, entonces el transporte paralelo de las curvas  $\bar{\tau}_{s_0}$  es el mismo para toda  $s_0$  al igual que  $\bar{\tau}_{t_0}$  para toda  $t_0$ .*

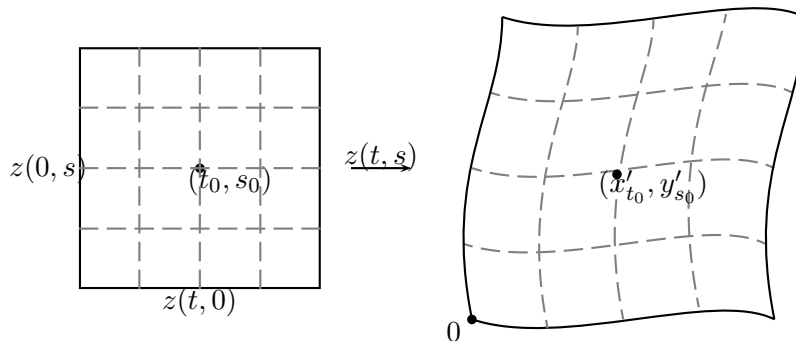


Figura 4.4: La función  $z(t, s)$  vista como un par ordenado  $(x'_t, y'_s)$  en la vecindad  $V' \times V''$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_0 = y^0 = 0$ , dado que la imagen de  $z$  está en  $V$ , tenemos que  $x_t = (x'_t, 0)$  por ser una  $T'$ -curva y de la misma manera  $y^s = (0, y'_s)$ . En este sentido  $z(t, s) = (x'_t, y'_s)$  puede ser vista como una función con coordenadas diferenciables para ciertas curvas  $x_t \in V'$  y  $y_s \in V''$ . Ahora, si tomamos  $\zeta = x'_t$ ,  $\gamma = y'_s$  y  $s_0, t_0 \in I$ , obtenemos que  $\bar{\tau}_{s_0} = (\zeta, y'_{s_0})$  y  $\bar{\tau}_{t_0} = (x'_{t_0}, \gamma)$ . Por lo tanto tenemos que los transportes paralelos de las curvas están dadas como  $(\bar{\tau}_{s_0})_{t_2}^{t_1} = (\zeta_{t_2}^{t_1}, Id_{T''})$  y  $(\bar{\tau}_{t_0})_{s_2}^{s_1} = (Id_{T'}, \gamma_{s_2}^{s_1})$  como en la proposición anterior. Por lo tanto el transporte paralelo de las  $T'$ -curvas es el mismo para todas al igual que el de las  $T''$ -curvas definidas por la función  $z(t, s)$ .  $\square$

**Corolario 4.0.10.** *Con la notación de la proposición anterior:*

1. El transporte paralelo a lo largo del “paralelogramo” dado por la curva cerrada  $\bar{\tau}^{-1} \circ \bar{\tau}_{s_1}^{-1} \circ \bar{\tau}_{t_1} \circ \bar{\tau}$  para  $0 \leq t_1 \leq 1$  y  $0 \leq s_1 \leq s_0$ , es trivial.
2. Para cualquier  $t$  y  $s$ ,  $\dot{z}_s(t)$  es paralelo a  $\dot{x}_t$  a lo largo de la curva  $z_t(s)$ , es decir,  $(\bar{\tau}_t)_s^0(\dot{x}_t) = \dot{z}_s(t)$ .
3. Para cualquier  $s$  y  $t$ ,  $\dot{z}_t(s)$  es paralelo a  $\dot{y}^s$  a lo largo de la curva  $z_s(t)$ , es decir,  $(\bar{\tau}_s)_t^0(\dot{y}^s) = \dot{z}_t(s)$ .

En el capítulo anterior probamos que el transporte paralelo sobre una  $T'$ -curva mantiene fijo a todo  $T''$ -vector, el transporte paralelo de todo  $T''$ -vector sobre una  $T''$ -curva sigue siendo un  $T''$ -vector. Usando que  $\bar{\tau}_{s_1}^{-1} = \bar{\tau}^{-1}$  y  $\bar{\tau}_{t_1} = \bar{\tau}$  (como transportes paralelos), la primera afirmación se cumple al anularse cada uno de los transportes paralelos y análogamente para  $T'$ -vectores. Para la segunda afirmación (la tercera es totalmente análoga) tenemos que  $(\bar{\tau}_t)_s^0(\dot{x}_t) = (Id_{T'}, \gamma_s^0)(\dot{x}'_t, 0) = (\dot{x}'_t, 0) = \dot{z}_s(t)$  por lo anterior. Enseguida construiremos dicha función a partir de isometrías locales que podremos extender más allá de una vecindad de la forma  $V' \times V''$ , pero antes definiremos  $\mathcal{U}_r''(z) = \{w \in M''_z \mid d''(z, w) < r\}$  donde  $d''$  es la función distancia definida por la métrica  $g''$  en  $M''$ .

**Proposición 4.0.11.** *Sea  $\bar{\tau} = x_t$  una  $T'$ -curva. Entonces existe  $r \in \mathbb{R}^+$  y una familia de isometrías  $\mathfrak{F} = \{f_t : \mathcal{U}_r''(x_0) \rightarrow \mathcal{U}_r''(x_t)\}$ , tal que la diferencial de  $f_t$  en  $x_0$  coincide con el transporte paralelo de la curva  $\tau' = x_t$  de 0 a  $t$ , es decir,  $d_{x_0} f_t = \bar{\tau}_t^0$ .*

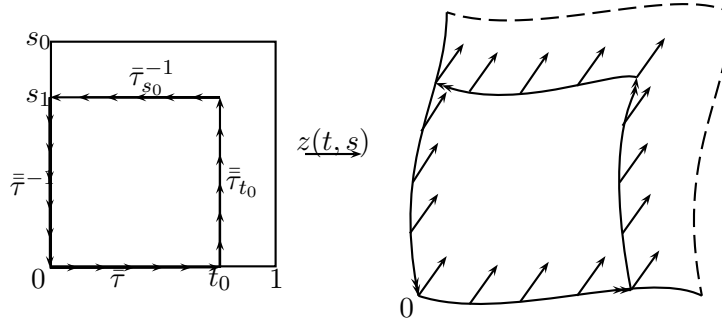


Figura 4.5: El transporte paralelo de cualquier vector a lo largo de la curva cerrada es trivial al considerarlo como suma de sus componentes en  $T'$  y  $T''$ .

*Demostración.* Supongamos por ahora que la curva  $x_t$  está contenida en una vecindad de la forma  $V = V' \times V''$  con origen en  $x_0$  y que existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\mathcal{U}_r''(x_t) \subset V''$ , tomando  $\bar{\tau} = (x_t, 0)$  definimos  $f_t : \mathcal{U}_r''(x_0) \rightarrow \mathcal{U}_r''(x_t)$  como  $f_t(x_0, y) = (x_t, y)$ .

Si  $(\bar{0}, Y)$  es un vector en  $T_0''$ , existe una curva  $(x_0, y^s) : I_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}_r''(x_0)$  tal que  $\dot{y}^0 = Y$  por lo que

$$\begin{aligned} d_{x_0} f_t(\bar{0}, Y) &= \frac{d}{ds} f_t \circ y^s|_{s=0} = \frac{d}{ds} f_t(x_0, y^s)|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} (x_t, y^s)|_{s=0} = (\bar{0}, \dot{y}^s) \\ &= (\bar{0}, Y). \end{aligned}$$

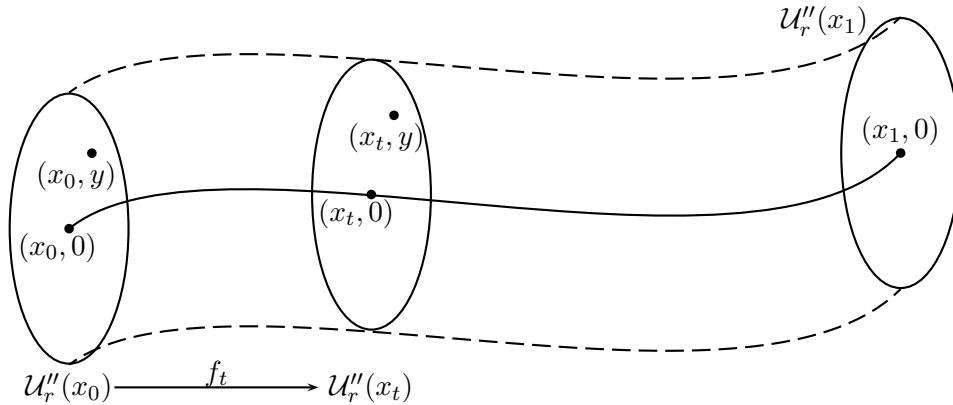


Figura 4.6: Isometría  $f_t$  definida en una vecindad  $V = V' \times V''$ .

Como  $\bar{\tau}$  es una  $T'$ -curva tenemos que el transporte paralelo de un  $T''$ -vector en  $x_0$  es constante, *i.e.*,  $\bar{\tau}_t^0(\bar{0}, Y) = (\bar{0}, Y)$ . Además tenemos como consecuencia que

$$g_{x_t}(d_{x_0} f_t(Y_1), d_{x_0} f_t(Y_2)) = g_{x_0}(Y_1, Y_2).$$



□

Para el caso más general, en el que la curva  $\bar{\tau}$  no tenga la particularidad que tomamos en la proposición anterior, utilizaremos el siguiente hecho: sabemos que para cada valor de  $t \in [0, 1]$  tenemos vecindades  $V_{x_t} = V'_{x_t} \times V''_{x_t}$  que cubren a la curva. Como es compacta, existe un número finito de vecindades  $V_0, V_1, \dots, V_l$  que cubren la curva en su totalidad y una  $r \in \mathbb{R}^+$  donde las bolas  $\mathcal{U}_r''$  están totalmente contenidas en cada una de las vecindades  $V_k''$  para  $0 \leq k \leq l$ .

A cada una de ellas le corresponden su respectiva familia de isometrías  $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_l$ , de esta manera si tomo  $t$  en  $[0, 1]$  arbitrario, definiremos la isometría  $f_t : \mathcal{U}_r''(x_0) \rightarrow \mathcal{U}_r''(x_t)$  como  $f_t = f_{t_k} \circ \dots \circ f_{t_1} \circ f_0$ , donde cada  $f_{t_j}$  pertenece a la familia  $\mathfrak{F}_j$  para  $0 \leq j \leq k \leq l$ .

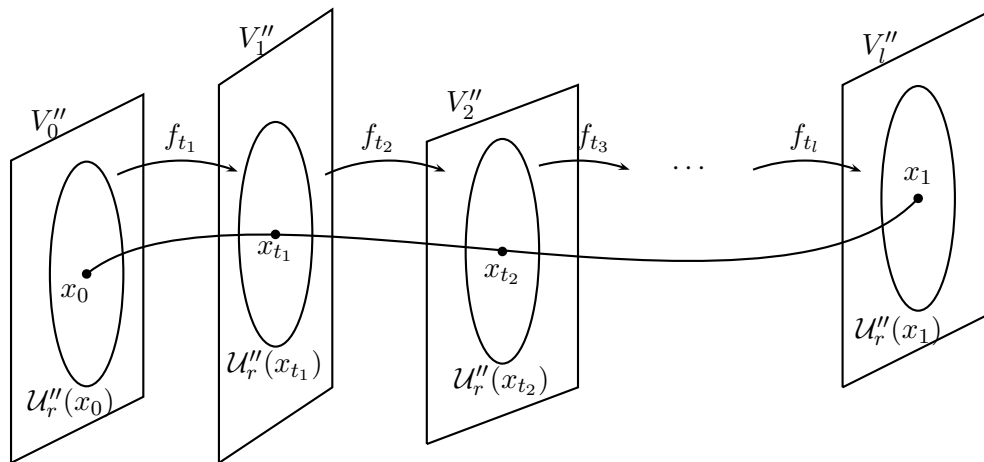


Figura 4.7: Isometría  $f_t$  definida como composición de isometrías locales.

Si ahora tomamos  $\bar{\tau} = y^s$  una  $T''$ -curva, donde  $y^0 = x_0$  que esté contenida en  $\mathcal{U}_r''(x_0)$  definimos  $z : [0, 1] \times [0, s_1] \rightarrow M$  como  $z(t, s) = f_t(y^s)$ , de modo que la homotopía  $z(t, s)$  satisface las propiedades de la Proposición 4.0.9 y por lo tanto el Corolario 4.0.10.

**Proposición 4.0.12.** *Utilizando la notación anterior se tiene que la proyección de la curva  $\bar{\tau} * \bar{\tau}^{-1}$  en la subvariedad  $M(y^{s_0})$  coincide con la curva  $\bar{\tau}_{s_0} = z_{s_0}(t)$ .*

*Demostración.* Como la  $p'_{y^{s_0}}$  proyección de la  $T''$ -curva  $\bar{\tau}^{-1}$  se reduce al punto  $y^{s_0}$ , veamos solamente que el transporte paralelo de los vectores tangentes a las curvas  $\bar{\tau}_{s_0}$  y  $\bar{\tau} * \bar{\tau}^{-1}$  sobre si mismas al punto  $y^{s_0}$  es el mismo. Esto se cumple trivialmente por los primeros dos puntos del Corolario 4.0.10 ya que para cada  $t$ , el transporte paralelo de  $\dot{x}_t$  a  $y^{s_0}$  sobre  $\bar{\tau} * \bar{\tau}^{-1}$  es el mismo que el transporte paralelo de  $\dot{z}_{s_0}(t)$  a lo largo de  $\bar{\tau}_{s_0}$  a  $y^{s_0}$ . □

**Proposición 4.0.13.** *Sea  $\bar{\tau} = x_t$  una  $T^l$ -curva y  $\bar{\tau} = y^s$  una  $T''$ -geodésica parametrizada por longitud de arco (p.l.a) donde  $x_0 = y^0$ . Si  $Y_0 = \dot{y}^0$  y  $Y_t = \bar{\tau}_t^0(\dot{y}^0)$ , entonces la función  $z(t, s) = f_t(y^s)$  está determinada de manera única como  $\exp_{x_t}(sY_t)$ .*

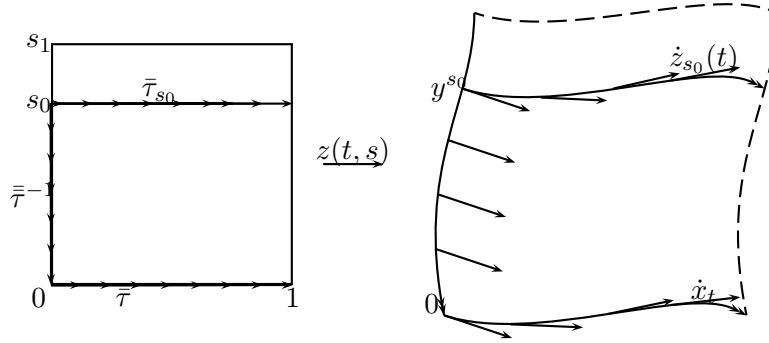


Figura 4.8: Los transportes paralelos al punto inicial  $y^{s_0}$  coinciden.

*Demostración.* Sabemos que para  $s = 0$ ,  $\exp_{x_t}(\bar{0}) = x_t$  y si  $t = 0$  tenemos que  $\exp_{x_0}(s\dot{y}^0) = y^s$  por ser  $\bar{\tau}$  una geodésica p.l.a. Ahora tomamos  $\exp_{x_{t_0}}(sY_{t_0})$  y  $z_{t_0}(s)$ , ambas son  $T''$ -curvas con la mismas condiciones iniciales en  $s = 0$ , por lo tanto existe  $0 \leq \delta_{t_0} \leq s_0$  tal que  $\exp_{x_{t_0}}(sY_{t_0}) = z_{t_0}(s)$  en  $[0, \delta_{t_0})$ . Utilizando nuevamente que la curva  $\bar{\tau}$  es compacta, existe  $0 \leq \delta \leq s_0$  de tal manera que  $\exp_{x_t}(sY_t) = z_t(s)$  en  $[0, 1] \times [0, \delta)$ . Sea  $a$  el supremo de las  $\delta$ 's que cumple con lo anterior y probemos que  $a = s_0$ . Supongamos que  $a < s_0$ , en primer lugar  $z_a(t)$  es una  $T'$ -curva ya que

$$\lim_{s \rightarrow a} \dot{z}_s(t) = \dot{z}_a(t)$$

y además el transporte paralelo de  $\bar{\tau}_a$  es el límite del transporte paralelo de  $\bar{\tau}_s$  cuando  $s \rightarrow a$ . Consideramos ahora la  $T''$ -geodésica  $y^u$  para  $r > 0$ , donde  $u \in [-r, r]$ ,  $u = a - s$  (por lo que  $s \in [a - r, a + r]$ ) y definimos la función diferenciable  $w(t, u) = f_t(y^u)$  en  $[0, 1] \times [-r, r]$ . Notemos que  $w(t, u) = z(t, s)$  para  $s \in [a - \varepsilon, a]$  y utilizando el argumento anterior para la  $w(t, u)$  definida en  $[0, 1] \times [0, r]$  tenemos que  $w(t, u)$  coincide con  $\exp_{z_a(t)}(uY_t)$  para  $u \in [0, \varepsilon)$  con  $0 < \varepsilon < r$ , i.e.,  $w(t, a - s) = \exp_{z_a(t)}((a - s)Y_t)$  para  $s \in [0, 1] \times [a, a + \varepsilon)$ , por lo que tenemos una extensión de  $z(t, s)$ , es decir,  $z(t, s) = \exp_{x_t}((s)Y_t)$  para  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, a + \varepsilon)$  lo que contradice la hipótesis de haber considerado a  $a$  como el supremo de los números que satisfacen la igualdad y por lo tanto  $a = s_0$ .  $\square$

Gracias a que la variedad riemanniana  $(M, g)$  es completa se tiene que la homotopía  $z(t, s) = \exp_{x_t}(sY_t)$  está definida para  $s \in \mathbb{R}$ , esto significa que las isometrías locales  $f_t$  sólo fueron objetos auxiliares de modo que podemos abarcar esa construcción más allá de las consideraciones locales que hicimos en un principio. Sin más preámbulos, mostraremos a partir de los resultados previos que la proyección  $p'$  está bien definida y es una isometría.

**Proposición 4.0.14.** *La proyección  $p'$  del punto final de las curvas  $\kappa * \mu * \eta$  y  $\kappa * \nu * \eta$  descritas anteriormente es el mismo.*

*Demostración.* Sea  $z_1$  el punto final de la curva  $\eta$ ,  $z_2$  el punto inicial de la curva  $\kappa$  y llamemos solamente  $z$  al punto final de  $\kappa$ . La prueba se llevará a cabo mediante los siguientes pasos:

- 1 Sea  $\kappa'$  la proyección de  $\kappa$  sobre la subvariedad  $M'(z_2)$ . Por la Proposición 4.0.7 sabemos que la proyección de la curva  $\kappa * \mu * \eta$  coincide con la proyección de  $\kappa' * \mu * \eta$  sobre la subvariedad  $M'(z_1)$ .

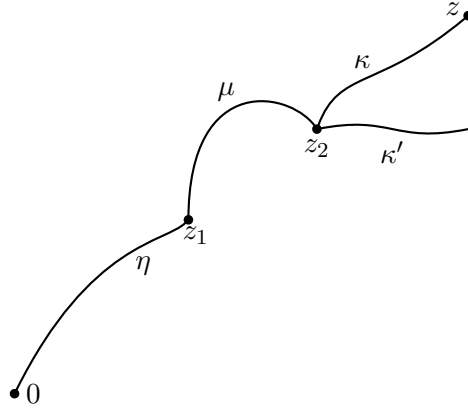


Figura 4.9: La proyección sobre  $M'$  de  $\kappa * \mu * \eta$  es la misma que la de  $\kappa' * \mu * \eta$  por la Proposición 4.0.7.

2. Utilizando la Proposición 4.0.8 a la curva  $\mu$  se tiene que  $\mu = (\mu', \mu'')$ . Ahora tomemos  $\zeta^*$ ,  $T''$ -geodésica que une a  $z_2$  con el punto final de la curva  $\mu'$ . Si  $X$  es un  $T'$ -vector en  $z_2$  sabemos que el transporte paralelo a lo largo de la curva  $\mu^{-1}$  es igual que hacer el transporte paralelo sobre  $(\mu')^{-1} * \zeta^*$ , porque el transporte paralelo de los  $T'$ -vectores a lo largo de  $\mu''$  y  $\zeta^*$  es el mismo.

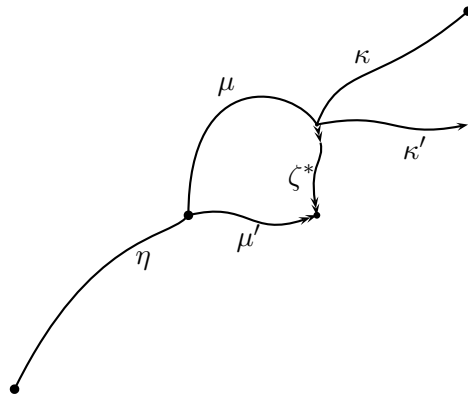


Figura 4.10: Tomamos la proyección de  $\mu$  en  $V'$  por la Proposición 4.0.8 y sustituimos su  $V''$ -proyección por una geodésica  $\zeta^*$ .

3. Ahora consideramos la función  $z(t, s)$  a partir de las curvas  $\xi^*$  y  $\kappa'$  y utilizando la Proposición 4.0.12 tenemos que la proyección de la curva  $\kappa' * \mu$  sobre la subvariedad  $M'(z_1)$  es  $\bar{\kappa}' * \mu'$ , donde  $\bar{\kappa}'$  es la curva obtenida a partir de la función  $z(t, s)$  de la  $T'$ -curva  $\kappa'$  y la  $T''$ -geodésica  $\xi^*$ . Esto gracias a que la proyección se define a través del transporte paralelo de los vectores tangentes al punto inicial. Como habíamos visto en el

paso anterior, todos los vectores tangentes en  $\kappa'$  recorridos a lo largo de la misma curva son nuevamente  $T'$ -vectores y es lo mismo transportarlos a lo largo de  $\mu = (\mu', \mu'')$  que a lo largo de  $(\mu')^{-1} * \xi^*$ .

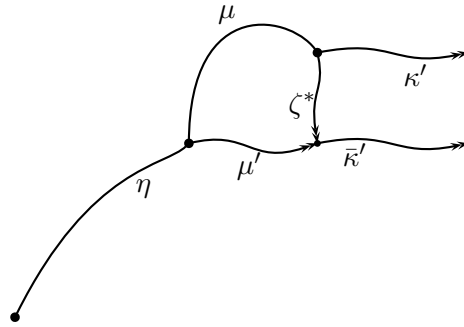


Figura 4.11:  $\bar{\kappa}'$  se obtiene de la función  $z(t, s)$  por la Proposición 4.0.12, es decir  $\bar{\kappa}' = z(t, 1)$ .

4. Usando el mismo argumento para la curva  $\nu$  tenemos que la proyección de la curva  $\kappa' * \nu$  es  $\bar{\kappa}' * \nu'$ , donde  $\nu = (\nu', \nu'')$  en  $V = V' \times V''$ .

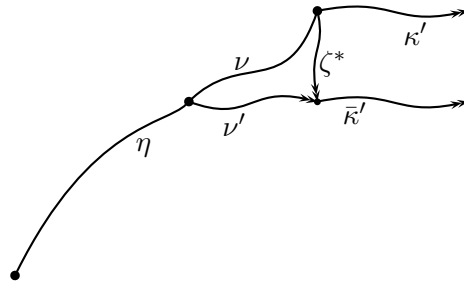


Figura 4.12: La proyección de la curva  $\nu'$  se obtiene de la misma forma.

5. Utilizando que  $\eta$  es compacta podemos suponer que existen  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$  curvas tales que  $\eta_j \in V_j = V_j' \times V_j''$ , donde las vecindades  $V_j$  cubren a la curva  $\eta$  y  $\eta = \eta_k * \dots * \eta_1$ .

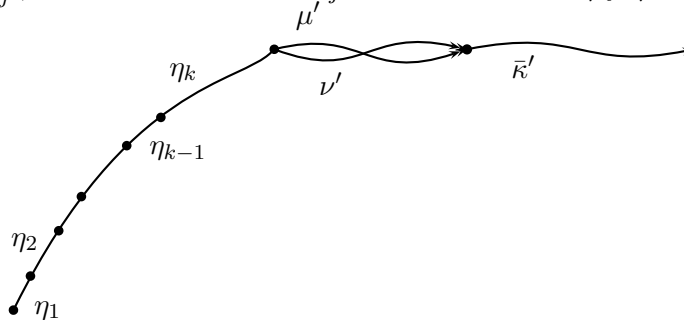


Figura 4.13: Las dos proyecciones  $\mu'$  y  $\nu'$  en  $M'(z_1)$  y la división de  $\eta$  por pedazos.

6. Haciendo el mismo proceso, tomamos  $\eta_k = (\eta'_k, \eta''_k)$  y sea  $\zeta_k^*$  la  $T''$ -geodésica que une el punto inicial de  $\mu'$  con el punto final de  $\eta'_k$ , entonces la proyección de la curva  $\bar{\kappa}' * \mu' * \eta_k$  es  $\kappa_k * \mu_k * \eta'_k$ , donde  $\kappa_k * \mu_k$  es la curva que se obtiene de tomar la función  $z(t, s)$  a partir de las curvas  $\zeta_k^*$  y  $\bar{\kappa}' * \mu'$ . Igualmente para  $\nu'$  tenemos la proyección  $\kappa_k * \nu_k * \eta'_k$ . Las funciones  $z(t, s)$  fueron construidas a partir del transporte paralelo del vector tangente de la geodésica  $\zeta_k^*$  al punto inicial a lo largo de  $\bar{\kappa}' * \mu'$  o  $\bar{\kappa}' * \nu'$ .

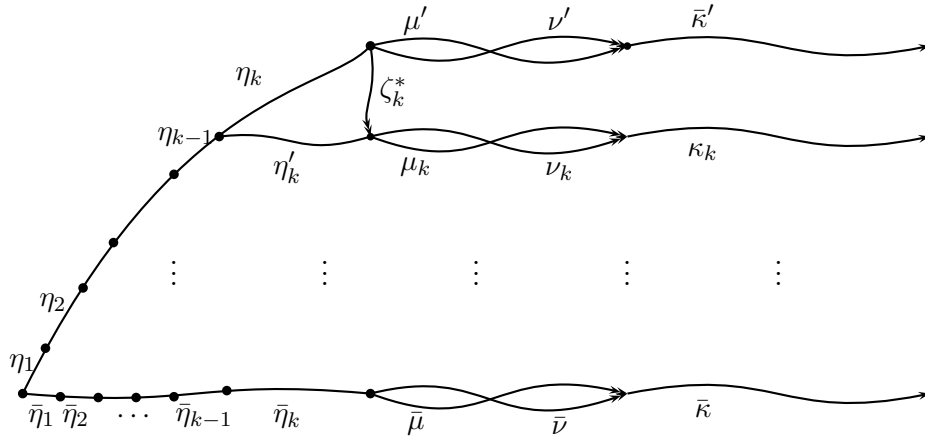


Figura 4.14: Las dos proyecciones son curvas que tienen mismo punto final.

Como  $(\nu')^{-1} * \mu'$  es una curva cerrada en  $V'$ , sabemos que el transporte paralelo a lo largo de esta curva es trivial para  $T''$ -vectores, en particular para el vector tangente inicial a  $\zeta_k^*$ , lo que significa que al hacer el transporte paralelo de este vector sobre estas dos curvas obtenemos el mismo vector resultante y de esta manera las curvas  $\mu_k$  y  $\nu_k$  inician y terminan en los mismos puntos (terminan en el punto inicial de  $\kappa_k$ , curva que se obtiene de la función  $z(t, s)$  de la  $T'$ -curva  $\bar{\kappa}'$  y una  $T''$ -geodésica que termina en el punto final de  $\mu_k$  o  $\nu_k$ ) por lo que aplicamos el argumento del paso 3.

Continuamos con este proceso con las curvas  $\eta_1, \dots, \eta_{k-1}$  y obtenemos las  $T'$ -curvas  $\bar{\kappa} * \bar{\mu} * \bar{\eta}_k * \bar{\eta}_{k-1} * \dots * \bar{\eta}_1$  y  $\bar{\kappa} * \bar{\nu} * \bar{\eta}_k * \bar{\eta}_{k-1} * \dots * \bar{\eta}_1$  en  $M'$  con el mismo punto final.  $\square$

Ahora que la función  $p'$  está bien definida tomamos  $F = (p', p'')$ , donde la construcción de la segunda es simétrica. Basta ver que  $p'$  es diferenciable para que  $F : M \rightarrow M' \times M''$  lo sea. La diferenciable de  $p'$  se cumple gracias a su construcción, es decir, para cualquier punto  $z \in M$ , tomamos  $z' = p'(z)$  y  $\gamma_t$  la única geodésica minimizante que une estos puntos. Utilizando que la subvariedad  $M''$  es completa, obtenemos que  $\gamma_t$  es una  $T''$ -geodésica, de modo que haciendo la misma construcción de la Proposición 4.0.11, obtenemos una función diferenciable  $f$  local que coincide con  $p'$  de  $V'_z \times V'_z$  a  $\mathcal{U}'_r(z') \subset V'_{z'} \times V'_{z'}$ , por lo que  $p'$  es

diferenciable y así  $F$  lo es. Para ver que  $F$  es una isometría, es decir, que para todo  $z \in M$  y dados  $Z_1, Z_2 \in T_z M$  se tiene que

$$g_z(Z_1, Z_2) = g'_{z'}(d_z p'(Z_1), d_z p'(Z_2)) + g''_{z''}(d_z p''(Z_1), d_z p''(Z_2)),$$

basta analizar los casos para los cuales  $Z_1$  y  $Z_2$  son  $T'$ -vectores (o  $T''$ -vectores). Supongamos que existen  $\alpha_s$  y  $\beta_s$   $T'$ -curvas, tales que  $\alpha_0 = \beta_0 = z$  y  $\dot{\alpha}_0 = Z_1$  y  $\dot{\beta}_0 = Z_2$ , de modo que al proyectar estas curvas y luego derivarlas obtengo  $d_z p'(Z_1)$  y  $d_z p'(Z_2)$  respectivamente. Como la proyección  $p'$  es independiente de la curva que esté considerando, tomo  $\alpha * \gamma * \tau'$ , donde  $\tau'$  es una  $T'$ -curva que une a 0 con  $z'$ , por lo que al proyectar obtengo  $\bar{\alpha} * \gamma * \tau'$ , donde  $\bar{\alpha}_s$  es la curva que se obtiene de la homotopía  $z(t, s)$  que proviene de  $\alpha_s$  y  $\gamma_t$ . Esta construcción sirve para notar que el vector  $d_z p'(Z_1)$  se obtiene precisamente del transporte paralelo de  $\dot{\alpha}_0$  a lo largo de la  $T''$ -geodésica  $\gamma$ , es decir,  $d_z p'(Z_1) = \dot{\bar{\alpha}}_0 = \gamma_0^1(\dot{\alpha}_0)$ . Como el transporte paralelo es una isometría entre fibras obtengo que

$$g_{z'}(\dot{\bar{\alpha}}_0, \dot{\bar{\beta}}_0) = g_z(\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0).$$

Observemos que si alguno de estos es un  $T''$ -vector, entonces la proyección se colapsa a un solo punto, por lo que la diferencial de la proyección se anula y es por eso que la igualdad se cumple. Es así como concluimos que  $M$  es isométrica al producto  $M' \times M''$ , donde suponemos que  $M'$  y  $M''$  son irreducibles.

**Ejemplo 4.0.15.** Veamos que  $\mathbb{S}^n$  es irreducible para toda  $n \geq 2$ , claro está que para  $n = 1$  las hipótesis del teorema no se cumplen dado que  $\mathbb{S}^1$  no es simplemente conexo, sin embargo, esta variedad es de dimensión uno, por lo que la descomposición es trivial y el grupo de holonomía es  $\{1\}$ . Probemos que  $G_n$  el grupo de holonomía de la  $n$ -esfera es  $SO(n)$ , esto se hará por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 2$  basta observar el transporte paralelo de los círculos pasan por el punto  $N$ , considerando  $\mathbb{S}^2$  como subvariedad de  $\mathbb{R}^3$  y que el grupo de holonomía es básicamente el mismo para cualquier punto. Como sabemos, si dos subvariedades son tangentes a lo largo de una curva, entonces el transporte paralelo definido en cada una de las subvariedades de un vector tangente a ambas variedades a lo largo de dicha curva es exactamente el mismo. Para  $\tau$ , la circunferencia inscrita en la esfera, consideramos el cono  $\mathbf{C}_\tau$  que intersecta tangencialmente a la esfera. Tomando cualquier vector tangente  $X$ , el transporte paralelo a lo largo de  $\tau$  de este vector,  $\tau(X)$  tiene una rotación sobre el espacio tangente  $T_N \mathbb{S}^2$ , esto gracias a que el cono es isométrico a un plano (y el transporte paralelo sobre plano es una función constante), por lo que el transporte paralelo de este vector sobre el cono tiene una rotación que depende del ángulo que forma el cono con la recta que une al origen y el vértice del cono.

Por lo que el grupo de holonomía del punto  $N$  es todo  $SO(2)$ . Supongamos ahora que el grupo de holonomía de  $\mathbb{S}^{n-1}$  es  $SO(n-1)$  y que el punto  $N$  es el  $(n+1)$ -ésimo vector canónico  $\vec{e}_{n+1}$ . Primero que nada, sabemos que  $G_{n-1}$  es un subgrupo de  $G_n$  visto como

$$G_{n-1} = \begin{pmatrix} SO(n-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq G_n.$$

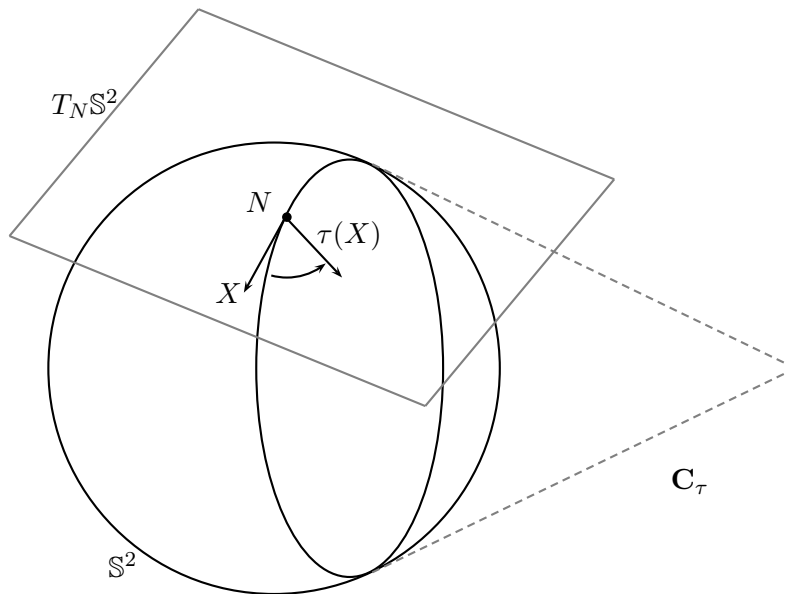


Figura 4.15: El transporte paralelo sobre  $\tau$  no es trivial

Tomando  $A \in SO(n)$ , sabemos que este elemento tiene la forma  $A = (\vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_n)$ , donde  $\vec{\alpha}_k$  son vectores (columna) unitarios y ortogonales entre sí. Consideramos ahora el subespacio  $W_1 = \langle \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{n-1} \rangle$ , el complemento ortogonal de  $\vec{\alpha}_n$  en  $T_N \mathbb{S}^n$  y  $W_2$  el complemento ortogonal de  $\vec{e}_n$  en  $T_N \mathbb{S}^n$ .

Como  $\langle \vec{\alpha}_n, \vec{e}_n \rangle \cap \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^2$ , existe  $g \in G_n$  tal que  $g(\vec{e}_n) = \vec{\alpha}_n$  y por lo tanto  $g(W_2) = W_1$  por la hipótesis de inducción, es decir,  $g(\vec{e}_k) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{jk} \vec{\alpha}_j$ , esto significa que el elemento  $g$  tiene la forma

$$g = A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por lo que } g \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

De esta forma llegamos a que  $A \in G_n$  y así concluimos que  $SO(n) = G_n$ .

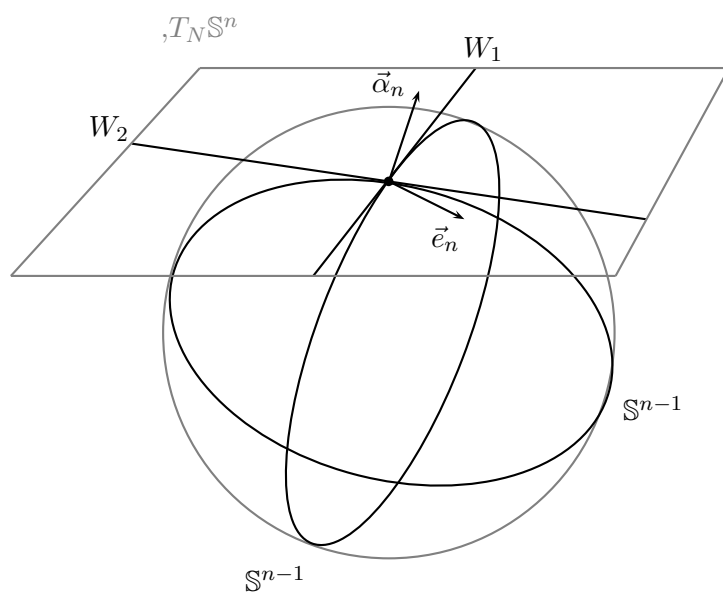


Figura 4.16: El grupo de holomía de la esfera es  $SO(n)$



# Bibliografía

- [1] KOBAYASHI, S. y NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry Vol.I*, Interscience, New York, 1963.
- [2] DO CARMO, M., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [3] HUSEMOLLER, D., *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New York, 1994.