



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA.**

**ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO
NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA:

ULISES HERNÁNDEZ CASTELLANOS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA



México D.F.

2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) Hernández Castellanos Ulises con número de cuenta 410013694 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 17 del mes de abril de 2015 a las 13:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	I.Q. RAUL RAMÓN MORA HERNÁNDEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	M. en C. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ
SUPLENTE	DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

[Firma]
 Edtson E. Herrera Valencia
 Mariano Pérez Camacho
[Firma]

El título de la tesis que se presenta es: **Estudio de la permeabilidad de fluidos no newtonianos en un medio poroso.**

Opción de Titulación: Tesis profesional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
México, D. F. a 17 de marzo de 2015.

[Firma]
DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ
DIRECTOR
ZARAGOZA
DIRECCION

RECIBÍ:
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Vo.Bo. *[Firma]*
I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



AGRADECIMIENTOS

- Carrera de Ingeniería Química, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Dr. Edson Emilio Herrera Valencia por haber creído en mí, aceptarme como su alumno, por sus enseñanzas, consejos y su amistad.
- Dr. Fausto Calderas García por el intercambio de ideas y de opiniones y la asesoría constante en este trabajo.
- Dr. Mariano Pérez Camacho por las sugerencias a este trabajo, el intercambio de opiniones y su experiencia en el área experimental.
- Al Ing. Raúl Ramón Mora Hernández por los comentarios y sugerencias para que este trabajo tenga una aplicación tecnológica.
- Al Ing. Juvenal Guzmán Gómez por los comentarios y sugerencias en este proyecto de Licenciatura.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115615>> << Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



DEDICATORIA.

A mi padre, *Enrique Hernández Salas* que a pesar de la distancia y el tiempo siempre estas cerca de mí para alentarme y guiarme en el camino, por tu cariño, tu amor, por ser un ejemplo a seguir y por todo, gracias por estar siempre conmigo.

A mi madre, *Alejandra Castellanos Pacheco* por darme aliento en los momentos que lo necesitaba, por tu amor, tu paciencia y por estar conmigo en mis triunfos y mis fracasos.

A mis hermanas, *Ruby Jaqueline Hernández Castellanos, Judith Hernández Castellanos, Edith Hernández Castellanos, Yatziry Ruby Hernández* por ser un apoyo en este camino, por los momentos felices que paso a su lado y confiar en mí como un amigo.

A *Haide González Peralta*, por encontrar en ti una amiga, compañera, inspiración y cómplice en cada uno de los proyectos de mi vida y por estar a mi lado en los momentos importantes, con quien conocí el amor.

A mis abuela, *Irma Pacheco Mendoza* por estar siempre cuando te necesite y alentarme a ser mejor y saber que los limites solo existen en uno mismo.

A mi abuelo, *José Tomas Castellanos Ramos* por encontrar fortaleza en sus palabras.

A mi familia, por no dejarme caer en momentos difíciles y alentarme a continuar día a día.

A mis amigos, *Candy, Geovani, Juan, Victoria*, por estar siempre que los necesite y saber que en ustedes encontré lo que es la amistad.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



INDICE.

ÍNDICE DE FIGURAS.	VIII
ÍNDICE DE TABLAS.	IX
NOMENCLATURA.	X
GLOSARIO.	XII
RESUMEN.	VIII
ABSTRACT.	IX
CAPÍTULO I	1
INTRODUCCIÓN	1
1.1 FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS.	2
1.2 MEDIO POROSO.	4
1.3 PERMEABILIDAD INTRÍNSECA.	5
1.4 TRANSPORTE EN MEDIOS POROSOS.	5
CAPÍTULO II	9
ANTECEDENTES	9
2.1 LEY DE DARCY PARA UN FLUIDO NEWTONIANO.	10
2.1.1. MODELO DE DARCY.	11
2.1.2. MODELO BLAKE-KOZENY-CARMAN (BKC).	11
2.1.3. MODELO DE ERGUN	12
2.2 MODELOS NO NEWTONIANOS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL FLUJO EN EL MEDIO POROSO.	12
2.3 LEY DE DARCY PARA UN FLUIDO NO NEWTONIANO.	13
2.4 LEY DE DARCY PARA UN FLUIDO VISCOELÁSTICO (MODELO DE MAXWELL).	14
2.5 LEY DE DARCY EFECTOS DIFUSIVOS.	15
2.6 RESUMEN DE LOS PRINCIPALES PUNTOS ESTUDIADOS EN ESTE CAPÍTULO.	16
2.7 ORGANIZACIÓN DE ESTE PROYECTO DE LICENCIATURA.	16
2.8 OBJETIVOS.	19
2.8.1 OBJETIVO GENERAL.	19
2.8.2 OBJETIVOS PARTICULARES.	19
2.9 HIPÓTESIS.	19



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO III	20
MARCO TEÓRICO	20
3.1 FLUIDOS COMPLEJOS.	21
3.2 MICELAS.	21
3.3 FENÓMENOS DE TRANSPORTE.	23
3.4 LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.	24
3.5 LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE ENERGÍA.	25
3.6 LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE MASA.	25
3.7 REOLOGÍA.	26
3.7.1 TENSOR DE DEFORMACIÓN.	26
3.7.2 TENSOR GRADIENTE DE VELOCIDAD Y SU TRANSPUESTA.	26
3.7.3 TENSOR RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN.	27
3.7.4 TENSOR DE VORTICIDAD.	27
3.7.5 TENSOR DE ESFUERZOS.	28
3.8 TIPOS DE FLUIDOS.	28
3.8.1 FLUIDOS NEWTONIANOS.	28
3.8.2 FLUIDOS NO NEWTONIANOS.	29
3.9 ECUACIONES CONSTITUTIVAS.	29
3.9.1 MODELO DE LEY DE POTENCIA.	30
3.9.2 MODELO DE ELLIS.	30
3.9.3 MODELO DE REINER-PHILIPPOFF.	31
3.10 FUNCIONES MATERIALES.	31
3.10.1 FLUJO CORTANTE EN ESTADO ESTACIONARIO.	31
CAPÍTULO IV	33
PLANTEAMIENTO FÍSICO	33
DEL MODELO	33
4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE FLUJO DE UN LÍQUIDO EN MEDIO POROSO.	34
4.2 CAMPO VECTORIAL DE VELOCIDADES.	35
4.2.1 TENSORES GRADIENTE DE VELOCIDAD.	36
4.2.2 TENSOR RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN.	36
4.2.3 TENSOR DE ESFUERZOS.	36
4.2.4 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.	36
4.2.5 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.	37
4.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS.	37
4.3.1 MODELO DE NEWTON.	37
4.3.2 MODELO OSTWALD DE WAELE.	37
4.3.2 MODELO DE ELLIS.	38



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



4.3.3 MODELO DE REINER PHILIPPOFF.	38
4.4 CONDICIONES DE FRONTERA.	38
4.5 RESUMEN DE ECUACIONES.	39
CAPÍTULO V	40
MODELADO TEÓRICO	40
5.1 PERMEABILIDAD INTRÍNSECA DE FLUIDOS VISCOSOS.	41
5.2 MODELO DE NEWTON.	41
5.2.1 CÁLCULO DEL PERFIL DE VELOCIDAD.	42
5.2.2 CÁLCULO DEL FLUJO VOLUMÉTRICO.	42
5.2.3 CÁLCULO DE LA PERMEABILIDAD INTRINSECA Y VELOCIDAD SUPERFICIAL.	43
5.3 FLUIDOS NO NEWTONIANOS.	44
5.3.1 MODELO OSTWALD DE WAELE.	44
5.3.2 CÁLCULO DEL PERFIL DE VELOCIDAD.	45
5.3.3 CÁLCULO DEL FLUJO VOLUMÉTRICO.	45
5.3.4 CÁLCULO DE LA VELOCIDAD SUPERFICIAL Y VISCOSIDAD APARENTE.	46
5.4 MODELO DE ELLIS.	46
5.4.1 CÁLCULO DEL PERFIL DE VELOCIDAD.	47
5.4.2 CÁLCULO DEL FLUJO VOLUMÉTRICO.	48
5.4.3 CÁLCULO DE LA VELOCIDAD SUPERFICIAL Y VISCOSIDAD APARENTE.	48
5.5 MODELO DE REINER PHILIPPOFF.	49
5.5.1 CÁLCULO DEL PERFIL DE VELOCIDAD.	49
5.5.2 CÁLCULO DEL FLUJO VOLUMÉTRICO Y VISCOSIDAD APARENTE.	51
5.5.3 CÁLCULO DE LA VELOCIDAD SUPERFICIAL.	52
5.6 RESUMEN.	52
CAPÍTULO VI	54
SIMULACIÓN Y ANÁLISIS	54
DE RESULTADOS	54
6.1 PERMEABILIDAD INTRÍNSECA.	55
6.1.1 PERMEABILIDAD INTRÍNSECA VS RADIO DEL PORO.	55
6.1.2 PERMEABILIDAD INTRÍNSECA VS POROSIDAD.	55
6.2 VISCOSIDAD APARENTE.	56
6.2.1 MODELO LEY DE POTENCIA.	56
6.2.2 MODELO DE ELLIS.	57
6.2.3 MODELO DE REINER PHILIPPOFF.	58
6.3 VELOCIDAD AXIAL ADIMENSIONAL	60
6.3.1 MODELO DE ELLIS	60
6.3.2 MODELO DE OSTWALD.	61



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



6.3.3 MODELO DE NEWTON.	62
6.3.4 MODELO DE REINER PHILIPPOFF.	63
6.4 VELOCIDAD SUPERFICIAL.	64
6.4.1 MODELO DE OSTWALD.	64
6.4.2 MODELO DE ELLIS.	64
6.4.3 MODELO DE REINER PHILIPPOFF.	65
6.5 AJUSTE DE DATOS REOMÉTRICOS MEDIANTE EL MODELO DE ELLIS, PARA LAS SOLUCIONES MICELARES ACUOSAS DE CTAT/0.0001 M KBR Y CTAT/0.0001 M (COONA)2.	67
CAPÍTULO VII	70
CONCLUSIONES	70
7.1 RESUMEN Y PRINCIPALES CONTRIBUCIONES.	71
CAPÍTULO VIII	73
TRABAJO FUTURO	73
8.1 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE ORDEN SUPERIOR.	74
BIBLIOGRAFÍA	76



ÍNDICE DE FIGURAS.

Figura 1. Esquema de un medio poroso. 4

Figura 2. Organización del proyecto de tesis. 18

Figura 3. Ilustra un sistema micelar. 21

Figura 4. Diferentes estructuras formadas por la adición de agentes tensoactivos.
..... 22

Figura 5. Muestra la estructura química de un tensactivo. 23

Figura 6. Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde las variables dinámicas del sistema no dependen de la posición). 31

Figura 7. Ilustra la estructura del medio poroso utilizando la teoría del poro promedio. 34

Figura 8. Ilustra el tubo capilar donde pasara el fluido no newtoniano. 35

Figura 9. Permeabilidad intrínseca vs radio del poro en función de la porosidad. 55

Figura 10. Permeabilidad intrínseca vs porosidad en función del radio del poro. . 56

Figura 11. Ilustra la viscosidad aparente como función del esfuerzo en la pared para un fluido adelgazante que es caracterizado con el modelo de Ostwald. 56

Figura 12. Ilustra la viscosidad aparente del modelo de Ellis como función del esfuerzo para un fluido adelgazante. 57

Figura 13. Ilustra la viscosidad aparente del modelo de Reiner Philippoff como función del esfuerzo en la pared para un fluido adelgazante. 58

Figura 14. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radial para diferentes valores del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte. 60

Figura 15. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radia para diferentes valores del índice alfa asociados a los mecanismos adelgazantes. 61

Figura 16. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radial para diferentes valores del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte. 62

Figura 17. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radial para diferentes valores del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte. 63



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Figura 18. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Ostwald vs esfuerzo en la pared adimensional como función del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte. 65

Figura 19. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Ellis vs esfuerzo en la pared adimensional como función del índice alfa asociad a los mecanismos adelgazantes al corte. 66

Figura 20. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Reiner Philippoff vs el esfuerzo en la pared adimensional en función de los mecanismos adelgazantes al corte. 66

Figura 21. Viscosidad vs rapidez de deformación para el tensoactivo CTAT con KBr y COONa..... 67

Figura 22. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Ellis vs el esfuerzo en la pared adimensional en función de los mecanismos asociados al corte. 68

ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso. 11

Tabla 2. Modelos más representantes en la descripción del medio poroso..... 13

Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa relativamente. 24

Tabla 4. Resumen de los resultados principales de este capítulo..... 53

Tabla 5. Muestra los parámetros reométricos utilizados para el cálculo de la permeabilidad intrínseca en el modelo de Ellis. 67



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



NOMENCLATURA.

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
∇V^T	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$D/Dt = \partial/\partial t + V \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]

Variables dimensionales

a	Radio del capilar [m]
L	Longitud del capilar [m]
V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
r	Coordenada radial [m]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]
k	Permeabilidad [m ²]
$\langle V \rangle$	Velocidad Promedio [m/s]
q	Flujo volumétrico en un medio poroso [m ³ /s]



Letras Griegas

Exponente del modelo de Ley de potencia, modelo de Ostwald de Waele [1]

.

$\dot{\gamma}_{rz}$

Rapidez de deformación rz [1/s]

ϕ_0

Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]

ϕ_1

Fluidez a moderada rapidez de deformación
[1/Pas]

σ_{rz}

Componente rz del esfuerzo cortante [Pa]

σ_w

Esfuerzo en la pared [Pa]

Constante que tiene unidad de esfuerzo y que describe los cambios de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo en el modelo de Reiner-Philippoff.

μ

Viscosidad [Pa s]

η_0

Viscosidad a corte bajo [Pa s]

η_∞

Viscosidad a alto corte [Pa s]

ε

Porosidad [1]

η^*

Viscosidad adimensional [1]

σ_r

Esfuerzo reducido [1]



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



GLOSARIO.

Deformación:	Es el cambio de la posición con respecto a otra.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Ecuación Haggen y Poiseuille:	Es la ecuación que relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión.
Esfuerzo en la pared:	Es el esfuerzo evaluado en la pared.
Esfuerzo:	Es el fuerza por una determinada área.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido adelgazante al corte:	Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Fluido engrozante al corte:	Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Fluido:	Es aquel a que aplicarle un esfuerzo cortante se deforma continua e irreversiblemente.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Fracción de potencia:	Consumo de energía asociado a la perturbación pulsátil.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Ley de Darcy:	Es la ecuación que relaciona la velocidad volumétrica superficial en función del gradiente de presión, la cual depende de la permeabilidad estática y la porosidad.
Medio poroso:	Un sólido o arreglo de ellos con suficiente espacio abierto dentro o alrededor de las partículas para permitir el paso de un fluido.
Modelo de Ellis:	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
Modelo de Ostwald de Waele:	Ecuación constitutiva que generaliza el modelo de newton y describe la zona intermedia de la curva viscosidad vs la rapidez de deformación
Modelo de Reiner Philippoff:	Ecuación constitutiva que describe la viscosidad en función del esfuerzo y que contiene tres parámetros materiales asociados a las viscosidades a alta y baja deformación y un parámetro que se asocia las transiciones de mayores a menores viscosidades por efecto del esfuerzo aplicado.
Modelo Newtoniano:	Ecuación constitutiva que describe una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación.
Perfil de velocidad:	La distribución de las velocidades dentro de un sistema en función de la coordenada radial.
Permeabilidad dinámica:	Es una medida de la resistencia a fluir en el espacio de frecuencia (régimen viscoelástico lineal).
Permeabilidad estática:	Es una medida de la resistencia a fluir en un medio poroso.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Porosidad:	Es el volumen de espacios vacíos en un volumen total.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Rapidez de deformación:	Es la derivada temporal de la deformación con respecto al tiempo.
Tensor de esfuerzos:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3X3) en la cual se describe el estado de fuerzas en un elemento de control.
Tensor rapidez deformación:	Es una matriz de 3*3 simétrica que nos describe el cambio temporal del vector desplazamiento.
Teoría del poro promedio:	Teoría que se basa en suponer que todos los poros tiene una geometría regular.
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
Viscosidad:	Es una medida de la resistencia a fluir de un sistema (fluido).
Flujo homogéneo	Es el flujo en el cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
Flujo oscilatorio	Es el flujo que se origina cuando un plato oscila por una función periódica de baja amplitud.
Flujo cortante	Es el flujo que se origina al aplicar una fuerza tangencial al sistema (fluido) deformando continua e irreversiblemente al fluido.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



RESUMEN.

En este proyecto de investigación, se estudia la dinámica no newtoniana a través de la permeabilidad intrínseca del sistema utilizando cuatro ecuaciones constitutivas, llamadas: (i) Modelo de Newton, (ii) Modelo de ley de Potencia, (iii) Modelo de Ellis y (iv) Modelo de Reiner Philippoff. Suponiendo estado estacionario, fluido incompresible, proceso isotérmico y que los mecanismos inercial son despreciables, i.e. número de Reynolds bajos, se obtiene un balance mecánico entre el gradiente de presión y los mecanismos viscosos. Su poniendo que el sistema poroso puede ser descrito por medio de un manojo de capilares de iguales condiciones geométricas, se deducen expresiones para la velocidad axial, flujo volumétrico, velocidad superficial, viscosidad aparente y finalmente una ecuación de Darcy que conduce a la permeabilidad intrínseca del sistema. Se concluye que la permeabilidad intrínseca para el modelo newtoniano solo depende de la porosidad y del cuadrado del radio capilar. Por otra parte, se obtuvo una ecuación modificada de Darcy la cual describe la contribución no newtoniana a través de la viscosidad aparente.

Los resultados implican que la velocidad superficial se ve modificada por efecto de la permeabilidad intrínseca y de las propiedades materiales de los cuatro modelos no newtonianos que describen el flujo y la reología en el sistema. Por último se utilizaron datos reométricos de un tensoactivo con el fin de calcular las propiedades dinámicas del sistema. Los resultados y la predicciones con datos micelares tipo gusano, concuerdan con la teoría antes expuesta.

Palabras clave: Fluido newtoniano, Fluido no newtoniano, Porosidad, Medio Poroso, Fluido de Ley de potencia, Fluido de Ellis, Fluido de Reiner Philippoff, Permeabilidad intrínseca, Sistema micelar.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



ABSTRACT.

In this research project, the non-Newtonian dynamics is studied through permeability of the system, using four constitutive equations, namely: (i) Newton model, (ii) Power law model, (iii) Ellis model, (iv) Reiner Phillipoff model. Assuming steady state, incompressible fluid, isothermal process and that the inertial mechanisms are negligible. i.e. Low Reynolds numbers, a mechanical balance between the pressure gradient and the viscous mechanisms is obtained. Its placing the pore system can be described by means of a bundle of capillaries same geometrical conditions, expressions for the axial velocity, volumetric flow rate and finally and averaged Darcy equation, which leads to the intrinsic permeability of the system are deduced. We concluded that the intrinsic permeability for the Newtonian model only depends on the porosity and capillary radius squared. Moreover, for non-Newtonian fluids permeability depending on the porosity, capillary radius, material properties of the fluid and the wall stress associated with the driving force that deforms continuously and irreversibly fluid associated with the gradient was obtained pressure. The results imply that the intrinsic permeability is greater for a thinner and less fluid shear thickening fluid. This is because the permeability quantities the ease with which the system fluid to flow in an interconnected porous medium. Finally reometric data of a surfactant were used to calculate the dynamic properties of the system. The results and predictions wormlike micellar data consistent with the theories outline above.

Key words: Newtonian Fluid, Non Newtonian Fluid Porosity, Porous Medium, Power-Law Fluid, Ellis Fluid, Reiner Phillipoff Fluid, Intrinsic Permeability, Micellar System.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



1.1 Fluidos en medios porosos.

La descripción de flujo de fluidos en medios porosos tiene una gran aplicación en áreas de la explotación petrolera, el transporte de agua en mantos acuíferos y en los campos geotérmicos, transporte de bio-fluidos en membranas, fluidos electroreológico y en reactores químicos, entre otras ramas de la ciencias naturales (Cuevas & Del Rio 2001, Del Rio & Castrejón-Pita 2003, Del Rio 1993, Del Rio et al. 1998; Herrera-Valencia & Rey 2014). Por otra parte, su estudio es un aparte fundamental de la mecánica de fluidos, termodinámica irreversible y en particular de la reología de fluidos complejos (Sochi 2010; Garcia-Colin & Rodríguez 1991, Barnes et al. 1989, Bird et al. 1987, Bird et al. 2002; Currie 1974). En este contexto una de las aplicaciones más importantes de los medios porosos, es el concepto de permeabilidad la cual, se define como la resistencia que presenta un medio por el que pasa un fluido (Del Rio & Castrejón Pita 1987; Del Rio et al. 1998). Este concepto ha sido muy explotado en reología de la sangre para describir el flujo pulsátil a través de una vena Herrera et al 2009, 2010; Moreno et al. 2015, 2013). Por otra parte, el uso de boquillas oscilantes ha mejorado las condiciones de procesos de materia prima en los extrusores, los cuales se estudian en ciencia de polímeros (Herrera et al. 2009, 2010).

Empecemos presentando las ecuaciones de balance que describen la conservación de la masa y del momento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

Donde ρ es la densidad de masa del fluido, \mathbf{V} el campo de velocidades, p es la presión y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscosos (Bird et al. 2002; Withaker 1976; Bird et al. 1974). La Ec. (1) es la llamada ecuación de continuidad que representa la conservación de masa. La Ec. (2) es la ecuación de balance de cantidad de movimiento. Desde la perspectiva matemática para que este conjunto de ecuaciones sea un problema cerrado hacen falta las condiciones iniciales y de frontera (del Rio & Castrejón 2003). Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones requieren información adicional, una ecuación de estado entre la presión y la densidad y otra relación entre el tensor de esfuerzos y el gradiente de velocidades para se pueda considerarse un sistema cerrado (del Rio & Castrejón 2003). Precisamente, las ecuaciones constitutivas y de estado especifican el tipo de fluido que se pretende describir. Estas relaciones hacen la distinción entre un gas, un fluido incompresible y viscoelástico (Whitaker 1976a, b, 1967, 1987).



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



El agua, es el más común de los fluidos, es un buen ejemplo de un fluido newtoniano incompresible. (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

La aproximación de fluido incompresible no es una restricción muy severa, dado que para la mayoría de los líquidos como el agua es del orden de $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ para cambios de presión del orden de atmosferas (Del Rio & Castrejón, 2003) y por lo tanto, la suposición de incompresibilidad es una aproximación razonable (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991). La clasificación de fluidos newtoniano tiene que ver con la ecuación constitutiva que relaciona el tensor de esfuerzos con el gradiente de velocidades en una forma lineal (bajas deformaciones) y en otra no lineal (altas deformaciones). Para el caso de fluidos newtonianos podemos escribir (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

$$\sigma = 2\mu\mathbf{D} \quad (3)$$

Donde μ es una propiedad material conocida como viscosidad la cual, se puede interpretar como una medida de la resistencia a fluir de un medio (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991). Como se puede apreciar, con esta ecuación se tiene un conjunto de ecuaciones para dos incógnitas, p y \mathbf{V} que dadas las, condiciones iniciales y de frontera puede resolverse. Sin embargo, en este trabajo, estamos interesados en ilustrar que pasa en los fluidos que interviene en la explotación petrolera, en los reactores químicos y los bio-fluidos que presentan características que los hacen ser llamados no newtonianos (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991).

La característica fundamental de los fluidos no-newtonianos es que la ecuación constitutiva ya no es lineal (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991; Del Rio & Castrejón 2003). Algunos de estos fluidos los podemos encontrar en sitios comunes. Por ejemplo, la miel; que al parar de verterla observamos un comportamiento inercial al ver que continua fluyendo por unos instantes más. En algunos procesos químicos industriales los fluidos tienen propiedades diferentes a las del agua y muchas veces son llamados fluidos complejos o exóticos (Del Rio & Castrejón 2003, García-Colín & Rodríguez, 1991; (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; García-Colín & Rodríguez 1991; Del Rio & Castrejón 2003). Los fluidos no newtonianos muestran muchas propiedades diferentes entre ellas la elasticidad. Los fluidos viscoelásticos se caracterizan por ser fluido que presentan comportamiento

Ulises Hernández Castellanos

disipativo como la viscosidad y una propiedad de restitución ante los esfuerzos (la elasticidad antes mencionada). (Del Rio & Castrejón, 2003; Bird et al. 2002).

1.2 Medio poroso.

Hasta aquí, hemos descrito a los fluidos, pero debemos definir un medio poroso como un cuerpo sólido con hoyos interconectados (poros) (Del Rio & Castrejón 2003; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987). Estos poros pueden ser espacios extremadamente pequeños, intersticios moleculares, y otros muy grandes, cavernas (Del Rio & Castrejón 2003). Como se comprende con esta definición se abarca desde membranas muy poco permeables hasta la corteza terrestre en escalas muy diferentes, Fig.1.

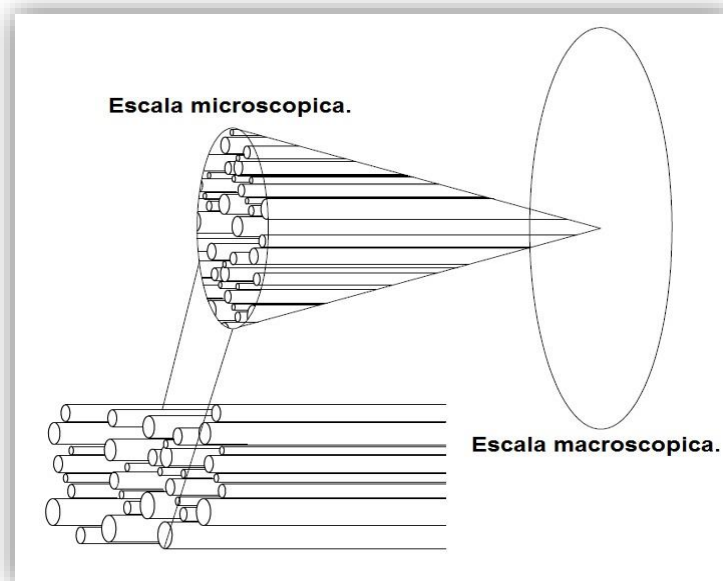


Figura 1. Esquema de un medio poroso.

Para este proyecto de licenciatura, la idea de poro se tomara como el espacio intermedio entre los dos extremos señalados, de tal forma que los espacios sean grandes desde el punto de vista macroscópico, pero pequeños para las escalas del sistema (Del Rio & Castrejón 2003; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). También se abordara el transporte del fluido en medios porosos y por lo tanto este medio debe ser atravesado por un fluido; de esta forma se requiere que podamos encontrar espacios huecos en el material que esta interconectados del medio poroso. Es obvio que el estudio de flujo de materia solo consideran los poros efectivos y los espacios aislados no juegan papel alguno en el transporte de masa (López de Haro et al. 1997). El medio poroso puede ser caracterizado por varias



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



propiedades geométricas, como son la porosidad ε definida como la fracción de espacio vacío con respecto al volumen total, en nuestro caso será el espacio interconectado. Es común que en la literatura se use el termino diámetro promedio de poro, pero esto solo tendría sentido estrictamente si los huecos tuvieran forma cilíndrica o esférica (Del Rio & Castrejón 2003; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987; López de Haro et al. 1997).

1.3 Permeabilidad intrínseca.

La permeabilidad es el término asociado a la conductividad del medio poroso con respecto al fluido y nos indica que tan fácilmente fluye un fluido a través de un medio poroso (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). Se acostumbra definir el Darcy como la unidad de medición de la permeabilidad y su equivalencia en de 9.87 cm., i.e. 1 Darcy = 9.87 cm. Existen muchas formas de modelar un medio poroso, por ejemplo considérese un sólido al que se le barrena en múltiples lugares conservando los ejes de barrenos paralelos, esto sería un manojo de tubos (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987), **esta aproximación es la más simple de todas y se conoce como la teoría del poro promedio.** Otra forma de modelar sería considerar un sistema como un cumulo de esferas solidas fijadas azarosamente distribuidas (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998). Se ha encontrado que algunos medios porosos muestran características de autosimilaridad y por ello también se han tratado de modelar a los medios porosos como fractales (Turcio et al. 2014). Como se observa, describir la microestructura de un medio porosos es un tema abierto y lleno de posibilidades (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987).

1.4 Transporte en medios porosos.

La descripción del transporte en medios porosos presenta dificultades que radican tanto en la compleja estructura del medio poroso como en las propiedades físicas de los fluidos (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia1995; Whitaker 1976a,b, 1967, 1987). Esta complejidad del transporte en medios porosos se presenta claramente al describir el conjunto de ecuaciones de balance y ecuaciones constitutivas, consideradas para modelar el flujo en medios porosos. Antes de comenzar y para centrar nuestra atención en la permeabilidad debemos hacer una aproximación y suponer que el transporte de energía no es importante en el



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



sistema (Del Rio 1993; Del Rio & Castrejón 2003; Del Rio et al. 1998; Ochoa-Tapia et al. 1993; Ochoa-Tapia 1995; Whitaker 1976a, b, 1967, 1987).

Entonces, bajo una situación isotérmica, para describir el flujo a través de un medio poroso se requiere en principio resolver el problema dado por las Ecs. (1) y (2) que deben resolverse bajo las condiciones de frontera que generalmente se toman como la condición de no deslizamiento en la frontera (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991).

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \tag{4}$$

Donde Ω es la superficie del sólido. Evidentemente el desorden de la superficie introduce una complejidad adicional a la no linealidad de la Ec. (2). Por supuesto, también se requiere la condición inicial en todo el campo de velocidades para la solución del problema, esto es otro reto mayor (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991).

Por otro lado, como ya mencionamos, el sistema de Ecs. (1) y (2) no es un sistema cerrado, es necesario introducir dos ecuaciones más que especifiquen el tipo de fluido de trabajo. La primera de las ecuaciones de estado entre la presión y la densidad, la segunda se refiere a la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos viscosos; pero estas podrán ser escogidas entre las Ecs. (3) o (4). Como ya mencionamos, es la selección de esta última ecuación donde centraremos las diferencias entre los fluidos newtonianos y no newtonianos que se estudian en este proyecto de licenciatura (del Rio 2003; Bird et al. 2002; Whitaker 1986). Por lo tanto, bajo la hipótesis de incompresibilidad, el sistema de ecuaciones (1) y (2) se transforma en:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

Estas son las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que tenemos que resolver en la intrincada geometría de la Fig.1. Para resolver estas ecuaciones en un medio poroso, generalmente se utilizan modelos muy simples o se define nuevas variables promedio (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). En este proyecto de licenciatura se tomara como base las siguientes restricciones para modelar el flujo de fluidos no



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



newtonianos en un medio poroso. Las principales restricciones son descritas a continuación:

- A) Para describir el sistema poroso se construyen un manojos de capilares con el mismo radio, es decir, no existe variación en el tamaño del poro, por lo que nuestro sistema se puede describir por la teoría del poro promedio.
- B) Para caracterizar nuestro fluido utilizamos cuatro ecuaciones constitutivas viscosas. La primera de ellas es la de Newton la cual presenta la relación más sencilla entre la rapidez de deformación y el tensor de esfuerzos. La segunda, tercera y cuarta son los modelos no newtonianos de Ostwald (ley de potencia), Modelo de Ellis (Combina el newtoniano y el modelo de ley de potencia) y finalmente el modelo de Reiner Philippoff el cual, es un modelo que describe toda la zona de viscosidad.
- C) Para describir la cinemática del fluido en el medio poroso, utilizamos una ecuación de Darcy generalizada la cual relaciona la velocidad superficial de flujo volumétrico con la permeabilidad intrínseca, la viscosidad aparente y la fuerza motriz asociada con el gradiente de presión.
- D) Un hecho importante en este trabajo, es que la permeabilidad intrínseca es una propiedad del sistema, i.e., es una condición geométrica y tiene que ver con un problema de tipo geométrico de los planos que forma la estructura porosa. Este hecho implica que la permeabilidad es función de la porosidad, diámetro del poro, tortuosidad etc.
- E) Las irregularidades de los poros, i.e, la distribución del tamaño del poro son descartados en el presente trabajo debido a que su complejidad matemática aumenta debido a las variaciones del radio en el poro lo cual induce transiciones de flujo cortante a flujo extensional.
- F) Los mecanismos de transferencia de energía y de masa no son tomados en cuenta, debido a que la complejidad de nuestro sistema aumenta porque hay que acoplar en la ecuación de momento, la de energía y masa.

Finalmente, en esta tesis abordamos de una forma simple la descripción del flujo de cuatro fluidos, uno newtoniano y tres no-newtonianos a través de un medio poroso. Con este análisis capturaremos las características esenciales de los flujos de interés tecnológicos y discutimos la relevancia de contar con aproximaciones analíticas a la compleja problemática real. En el capítulo II abordamos los antecedentes más importantes del flujo en medios porosos,



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Ecuaciones empíricas más importantes en la descripción del medio poroso y ecuaciones reológicas más utilizadas en la caracterización reológica de los fluidos que interviene en estos sistemas.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO II

ANTECEDENTES



2.1 Ley de Darcy para un fluido newtoniano.

El estudio de la mecánica de fluidos (newtonianos y no newtonianos) en medios porosos, es uno de los temas más fascinantes y atractivos para la gente que hace investigación en fenómenos de transporte y reología de todo el mundo. La descripción del transporte de cantidad de movimiento en el medio poroso es bastante complejo, debido a la distribución azarosa de los poros en el medio, la irregularidad del diámetro del poro y la tortuosidad (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Debido a esto, se han implementado diferentes aproximaciones de tipo analítico, con el fin de describir la dinámica en estos sistemas. Uno de los primeros intentos en la descripción del flujo en medios porosos, es el modelo de Darcy (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Esta ecuación empírica se basa en la suposición del poro promedio, i.e. supone que todos los poros tienen el mismo diámetro y que el sistema puede ser descrito por un manojito de capilares. La ecuación de Darcy se representa como:

$$V_0 = \frac{k}{\mu} (-\nabla_z p) \quad (7)$$

La Ec. (7) describe la velocidad promedio superficial V_0 en función de la permeabilidad k la cual, es una medida de la resistencia que presenta el medio poroso al paso de un fluido, la viscosidad μ que representa la resistencia del fluido a ser deformado mediante un esfuerzo cortante y el gradiente de presión $\nabla_z p$ que en este caso, es la fuerza motriz que genera la deformación en el fluido. La Ec. (7) representa el primer intento de describir el flujo en un medio poroso y en particular, para un fluido newtoniano, la permeabilidad k toma la siguiente forma analítica:

$$k(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (8)$$

La permeabilidad intrínseca k solo depende de la porosidad y del cuadrado del radio del tubo y de un factor numérico que resulta de la integral de superficie en el flujo volumétrico. Evidentemente, se ha tratado de obtener ecuaciones empíricas que describan la permeabilidad intrínseca que es una medida de la capacidad que tiene el sistema (fluido), de ser deformado en un medio poroso (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). En la tabla 1 se presenta un resumen de los modelos más utilizados en la investigación de fluido en medios porosos. Los modelos más empleados en la literatura son los de: (i) Darcy, (ii) Blake-Kozeny-Carman y (iii) Ergun.



Modelo	Ecuación
Darcy	$\frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{V_0}{K}$
Blake-Kozeny-Carman	$\frac{\Delta p}{L} = \frac{72C\mu V_0 (1-\epsilon)^2}{D_p^2 \epsilon^3}$
Ergun	$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu V_0 (1-\epsilon)^2}{D_p^2 \epsilon^3} + \frac{1.75\rho V_0 (1-\epsilon)}{D_p \epsilon^3}$

Tabla 1. Modelos más representativos en la descripción del medio poroso.

2.1.1. Modelo de Darcy.

El modelo de Darcy como se explicó, es un modelo que puede ser deducido suponiendo la teoría promedio del capilar, es decir que todos los poros son aproximados por medio de un capilar de radio constante. Este puede ser deducido a partir de las ecuaciones Navier-Stokes de la mecánica clásica, despreciando la inercia del material y suponiendo estado estacionario (Sochi 2010; Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003; García-Colín & Rodríguez 1991). Es importante, comentar que el modelo de Darcy solo es válido para flujo isotérmico, estado estacionario y solo toma en cuenta los mecanismos viscosos. El modelo de Darcy ha sido extendido para tomar en cuenta efectos complejos como los observados en fluidos no newtonianos en situaciones de varias fases termodinámicas. Varias generalizaciones del modelo de Darcy han sido deducidas incluyendo efectos no lineales como la inercia y la elasticidad respectivamente (Sochi et al. 2010; Shenoy 1993; Schowalter 1978).

2.1.2. Modelo Blake-Kozeny-Carman (BKC).

El modelo empírico de Blake-Kozeny-Carman es uno de los más importantes y populares en la dinámica del medio continuo, para describir el flujo a través de los medios porosos. Este modelo empírico incorpora la porosidad del medio ϵ , el diámetro del poro D_p y la tortuosidad del medio C , i.e. el camino libre que siguen los elementos materiales en el medio poroso. Por último, el modelo de BKC ha sido aplicado en flujo laminar a través de columnas empacadas a números de Reynolds pequeños, en donde los efectos cinéticos debido a la tortuosidad del



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

fluido en la cama empacada son despreciables. Extensiones empíricas de este modelo para describir la transición de flujo laminar a turbulento ha sido reportado en la literatura especializada concerniente al tema.

2.1.3. Modelo de Ergun

El modelo de Ergun contiene dos contribuciones principales. La primera de ellas asociada a los mecanismos viscosos y diámetro del poro, el segundo toma en cuenta los mecanismos inerciales a través de la densidad del medio. Es importante comentar que estos modelos son empíricos y la gran mayoría de estos sistemas relacionan la fuerza motriz con las propiedades materiales del medio como son: (i) la viscosidad, (ii) la inercia, (iii) el tamaño de partícula y (iv) la tortuosidad del medio. Otra hipótesis importante, en estas propuestas es la de flujo laminar, i.e., que el número de Reynolds es menor a 200, i.e. $Re < 2100$. Por otra parte si, el número de Reynolds aumenta se tendría que modificar las aproximaciones de flujo debido a que los mecanismos inerciales juegan un papel preponderante en la descripción del flujo turbulento. (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002).

2.2 Modelos no newtonianos para la descripción del flujo en el medio poroso.

Como se explicó en el capítulo 1, los fluidos newtonianos muestran un relación lineal entre el tensor rapidez de deformación y tensor de esfuerzos. Cuando los sistemas complejos presentan una relación no lineal, se necesita introducir ecuaciones empíricas o fenomenológicas que describan con un grado mayor de exactitud el flujo y la reología de estos sistemas. Cuando la viscosidad del fluido presenta una dependencia con la rapidez de deformación, puede ser representada por medio de una función llamada función viscosidad. Si el fluido presenta componentes viscosas y elásticas, este puede ser estudiado incorporando la dinámica de Hook en las ecuaciones constitutivas. Los modelos viscoelásticos pueden ser estudiados en el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones) y en el régimen de viscoelasticidad no lineal (altas deformaciones). En la tabla 2 se muestran algunos de los modelos no newtonianos más empleados en la literatura especializada en fenómenos de transporte y reología.

Modelos	Modelo Reológico	Función Viscosidad
Ley de Potencia	$\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = m \left(n \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \right)$



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Ellis	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{ \boldsymbol{\sigma} }{\sigma_{1/2}}\right)^{\alpha-1}}$
Reinner Phillipoff	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{1}{\varphi_\infty + \frac{\varphi_0 - \varphi_\infty}{1 + \left(\frac{ \boldsymbol{\sigma} }{\sigma_s}\right)^2}}$
Carreau	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + (\lambda \Pi_D)^2\right]^{(1-n)/2}}$
Hershel-Bulkley	$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \frac{\eta_\infty}{\Pi_D} + m(\Pi_D)^{n-1}$
Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
Jeffreys	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
Convectiva Superior de Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano
Oldroyd-B	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0 \left(\mathbf{D} + \lambda_J \overset{\nabla}{\mathbf{D}}\right)$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano

Tabla 2. Modelos más representantes en la descripción del medio poroso.

Es preciso destacar, que esta tesis solo se abordaran fluidos no newtonianos viscosos (Ostwald, Ellis y Reiner Phillipoff), i.e. sin contribución elástica, dejando este tipo de sistemas para estudios posteriores de posgrado (Maestría y Doctorado).

2.3 Ley de Darcy para un fluido no newtoniano.

El modelo de Darcy ha sido modificado para tomar en cuenta los efectos adelgazantes, engrozantes al corte debido a las características no newtonianos de sistemas complejos (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). La diferencia del modelo de Darcy de un fluido newtoniano y uno no newtoniano radica en la viscosidad aparente μ_{ap} . Por ejemplo, para un fluido no newtoniano tipo ley de potencia el modelo de Darcy toma la forma general:



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



$$V_0 = \frac{\varepsilon \langle V \rangle}{A} = \frac{k}{\mu_{NN}} (-\nabla_z p) \quad (9)$$

En donde la viscosidad aparente toma la forma para un fluido tipo ley de potencia tiene la siguiente representación:

$$\mu_{app} = m \left(\frac{\langle V \rangle}{D} \right)^{n-1} \quad (10a)$$

En la Ec. (10) $\langle V \rangle$ es la velocidad promedio del sistema y D es la longitud característica del sistema, m y n son los parámetros del modelo de ley de potencia. Es importante, notar que el cociente $\langle V \rangle / D$ es la rapidez de deformación característica del modelo de ley de potencia. La velocidad promedio para el modelo de ley de potencia:

$$\langle V \rangle = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2m} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (10b)$$

Cuando $n = 1$ se obtiene el modelo de Darcy para el fluido newtoniano.

2.4 Ley de Darcy para un fluido viscoelástico (Modelo de Maxwell).

El modelo generalizado de Darcy ha sido utilizado para la descripción de fluidos viscoelásticos empleados en la descripción del flujo pulsátil sanguíneo y de sistemas micelares en medios porosos (Sochi 2010; Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). El modelo generalizado de Darcy para un fluido viscoelástico toma la forma:

$$V_0 = \frac{\varepsilon \langle V \rangle}{A} = \frac{k}{\mu_{M-I}} (-\nabla_z p) \quad (11a)$$

En donde la permeabilidad dinámica puede ser descrita de la siguiente manera:

$$\mu_{M-I} = \frac{\rho(i\omega)a^2/8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a)/\beta a}{J_0(\beta a)}} \quad (11b)$$

Nótese que la viscosidad (Ec.11b) es una combinación de propiedades materiales que incluyen la densidad del líquido, la frecuencia en el espacio de Fourier y de un parámetro beta β , el cual se puede interpretar como el inverso de



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



una longitud característica. Para un fluido de Maxwell, i.e. el parámetro beta se define en la siguiente forma:

$$\beta^2 = -\frac{\rho(i\omega)}{\eta_0 / (1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (12)$$

Y en el caso de un fluido newtoniano, i.e. cuando el tiempo de relajación de Maxwell tiende a cero $\lambda_0 = 0$, la Ec. (12) se simplifica a:

$$\beta^2 = -\frac{\rho(i\omega)}{\eta_0} \quad (13)$$

Nótese que la función viscosidad que se está manejando corresponde al modelo de Maxwell, y esta puede ser generalizada a cualquier fluido visco-elástico lineal en el régimen de bajas deformaciones (Bird et al. 1987, 2002; Del Rio et al. 1993; Del Rio et al. & Castrejón-Pita 2003; Del Rio et al. 2003). Nótese que al incluir la inercia en el sistema, la permeabilidad intrínseca depende de la frecuencia, de la inercia del fluido y de un cociente de dos funciones de Bessel las cuales pueden inducir un fenómeno de tipo resonante en las curvas de permeabilidad compleja.

2.5 Ley de Darcy efectos difusivos.

En la que ε es la porosidad (es decir la relación entre el volumen de huecos y el volumen total) k es la permeabilidad del medio poroso. La velocidad V_0 que interviene en estas ecuaciones es la velocidad superficial (velocidad volumétrica de flujo a través de la unidad de área de la sección del sólido más el fluido) promediada en una pequeña región del espacio (pequeña con respecto a las dimensiones macroscópicas del sistema de flujo pero grande con respecto al tamaño con respecto al tamaño del poro).

H.C. Brinkman, Appl. Sci. Research, Al. 27-334, 81-86 (1947), ha sugerido la siguiente modificación empírica de la ley de Darcy.

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{V}_0 + \mu \nabla^2 \mathbf{V}_0 + \rho \mathbf{g} \quad (14)$$

El término $\mu \nabla^2 \mathbf{V}_0$ se introduce para tener en cuenta la distorsión de los perfiles de velocidad en las aproximaciones de las paredes.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



2.6 Resumen de los principales puntos estudiados en este capítulo.

En este capítulo, se han discutido algunas de las ecuaciones más empleadas en la generalización del flujo en un medio poroso. La primera aproximación es considerar un manejo de tubos y suponer que la permeabilidad intrínseca puede ser modelada con alguna de las ecuaciones empíricas de la Tabla 1. Por otra parte, si el fluido es no newtoniano, puede ser caracterizado por medio de las ecuaciones constitutivas reológicas de la Tabla 2. En el régimen de viscoelasticidad lineal se puede usar la misma técnica de Del Rio et al. (2003) para llevar al sistema del espacio temporal al de las frecuencias con el fin de deducir una expresión para la permeabilidad compleja (Ver problema 3 V4 de la ref. Bird et al. 2002). EL trabajo de Del Rio et al. (2013) puede ser extendido para cualquier otro modelo viscoelástico (Jeffreys, Burgers, Maxwell Generalizado, etc) con y sin efectos de inercia incluidos.

Hasta este momento, existen varias preguntas que deben ser contestadas las cuales son formuladas a continuación:

- ✓ La permeabilidad intrínseca depende solamente de las propiedades del poro, es decir es independiente del fluido. En este caso, se puede separar el problema en utilizar las ecuaciones empíricas de la Tabla 1 y modelar el fluido con alguna de las ecuaciones constitutivas de la Tabla (2).
- ✓ El efecto de las propiedades del fluido debe influir en la permeabilidad intrínseca combinado con la fuerza motriz, i.e. no solamente las propiedades del poro y geométricas sino las materiales del fluido y el gradiente de presión.
- ✓ Por último la porosidad puede ser considerada como un problema de tipo geométrico y el tamaño del poro puede variar dependiendo de las características fisicoquímicas del mismo, por lo que se necesitan combinar datos geofísicos con reométricos con el fin de caracterizar las propiedades materiales del sistema.

Por otro lado, debido a la búsqueda constante de ecuaciones constitutivas que expliquen y describan las propiedades de flujo y transporte en estos sistemas, así como su aplicación en tecnologías que resuelvan las necesidades de la industria, se justifica plenamente el presente proyecto de licenciatura.

2.7 Organización de este proyecto de licenciatura.

La organización del trabajo es la siguiente: a) La primera sección se dedica a definir los conceptos básicos relacionados con el transporte de fluidos en medios porosos, en la sección (2) se presentan los antecedentes, i.e. los trabajos previos



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



que han sido estudiados en la literatura y que son punto de partida en la presente investigación. En el capítulo III se hace hincapié en las bases de Fenómenos de transporte, ecuaciones constitutivas y reología, los tipos de flujo etc. En el cuarto capítulo se describe el problema físico centrándonos en la descripción del poro promedio. En el quinto capítulo se resuelven las ecuaciones de transporte y reológica en estado estacionario, suponiendo un proceso isotérmico. En este capítulo se obtiene las expresiones dinámicas de la velocidad, flujo volumétrico viscosidad aparente y velocidad superficial asociada con el tipo de ecuación constitutiva. En el sexto capítulo se hacen las simulaciones correspondientes, y se obtienen las respectivas predicciones de nuestro modelo, Por otra parte, para contrastar las predicciones teóricas, se utilizan datos reométricos de una gente tensoactivo, el cual forma estructuras complejas llamadas micelas, la cuales están compuestas de miles o decenas de miles de moléculas de agentes tensoactivos. En el último capítulo se dan las conclusiones de este trabajo, perspectivas futuras y recomendaciones. Finalmente en la Figura 2 se presenta la organización general de este trabajo.

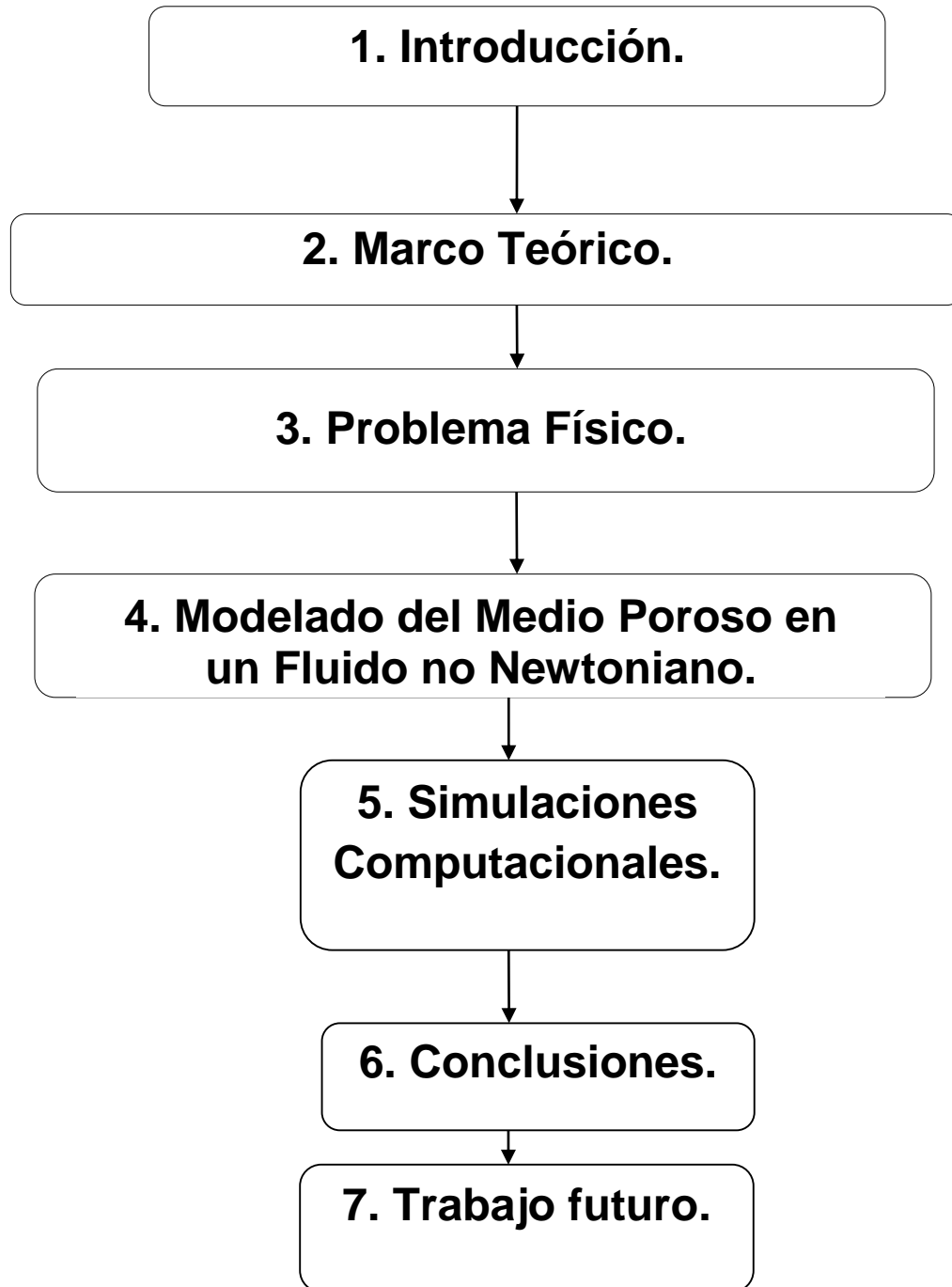


Figura 2. Organización del proyecto de tesis.



2.8 Objetivos.

2.8.1 Objetivo general.

El objetivo esencial del presente trabajo es contribuir al entendimiento la permeabilidad de fluidos no Newtonianos en un medio poroso mediante diferentes ecuaciones constitutivas como lo son: (i) Newtoniano, (ii) No newtonianos (Ley de Ostwald de Waele, modelo de Ellis modelo de Reiner Philippoff).

2.8.2 Objetivos particulares.

- ✓ Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, viscosidad aparente y velocidad superficial.
- ✓ Obtener de los cálculos del flujo volumétrico una expresión análoga a la ley de Darcy, y calcular viscosidad aparente y velocidad superficial.
- ✓ Utilizar datos reométricos de la literatura con el fin de obtener la permeabilidad intrínseca de un sistema complejo que se rompe y destruye bajo flujo.

2.9 Hipótesis.

El medio poroso, puede ser descrito adecuadamente por medio de un conjunto de capilares finitos de radio a y de longitud l , la reología y el flujo del líquido no newtoniano es caracterizado por las ecuaciones constitutivas de los modelos; Newtoniano, ley de potencia, ley de Ellis y Reiner Philippoff, asumiendo estado estacionario.



**ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN
MEDIO POROSO**

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

3.1 Fluidos complejos.

Los fluidos complejos como su nombre lo indica, son aquellos que presentan comportamiento reológicos en estado estacionario y no estacionario, muy interesantes debido a los agentes externos que aplican en ellos (de Gennes & Prost (1994); Rey & Herrera-Valencia (2012a), Rey & Herrera-Valencia (2012b)). Algunos ejemplos de fluidos complejos son los sistemas poliméricos, micelares, fluidos biológicos, cristales líquidos, etc. Los polímeros por ejemplo, son sistemas en donde una unidad llamada monómero se repite y que presentan propiedades físicas complejas debido a las interacciones entre sus cadenas y peso molecular (de Gennes & Prost (1994); Rey & Herrera-Valencia (2012)). Los sistemas micelares contienen miles o decenas de miles de agentes tenso activos (un tensoactivo es un sistema que abate la tensión superficial de los líquidos) y que contienen una parte hidrofobia y una hidrofilia (Rey & Herrera (2012)). Los sistemas micelares dependen de la concentración y dependiendo de esta, pueden pasar de sistema esféricos a cilíndricos por efecto de un agente estos sistemas micelares dependen de la concentración y por agente externo entiéndase una fuerza que se aplica en una área paralela a la fuerza (Rey & Herrera-Valencia (2012^a); Rey & Herrera-Valencia (2012b)). Los cristales líquidos son fluidos anisotrópicos, es decir dependen de la posición y pueden ser orientados a través de campos externos eléctricos y magnéticos (de Gennes & Prost (1994); Rey and Herrera-Valencia (2012), Rey & Herrera-Valencia (2012)).

3.2 Micelas.

La micela es un polímero de asociación en el cual el surfactante alcanza una posición favorable. En solución acuosa la fuerza motriz principal que favorece la formación de micelas es el efecto hidrófobo, es decir, la sustracción de la parte apolar del surfactante del contacto con las moléculas del agua y la formación de un contacto más favorable desde el punto de vista energético con las partes apolares de otras moléculas de surfactante.

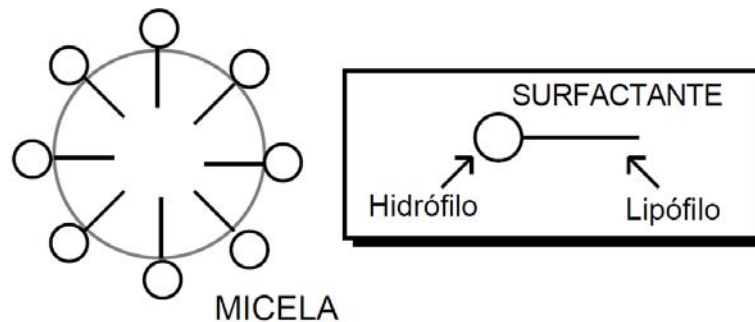


Figura 3. Ilustra un sistema micelar.

Ulises Hernández Castellanos

La micelización es entonces un tipo de microprecipitación en la cual el surfactante se sustrae parcialmente de la fase acuosa. La analogía con un fenómeno de precipitación está reforzada por el hecho de que la micelización se produce a una concentración particular. Sin embargo es conveniente considerar una solución micelar como un coloide y no como una dispersión, ya que el tamaño de las micelas es del orden de 50 a 100 Å. Las soluciones micelares presentan propiedades relativamente similares a las soluciones de polímeros, otros coloides lipofílicos. El fenómeno de la micelización se produce como un compromiso entre dos tipos de efectos: los efectos que tienden a favorecer la formación de una micela, particularmente el efecto hidrófobo, que aumenta con el tamaño de la cadena hidrocarbonada del surfactante. De otra parte, los efectos que tienden a oponerse a la formación de una micela, tal como la repulsión entre los grupos hidrofílicos, particularmente importante en el caso de surfactantes iónicos. La presencia de un alcohol que se intercala entre las moléculas de surfactante en la interfase, o la adición de electrólitos que produce un efecto de pantalla que reduce el campo eléctrico intermolecular, reduce las fuerzas repulsivas y por este efecto favorece la micelización. A veces el tipo de surfactante favorece la formación de una estructura estratificada plana llamada cristal líquido que posee propiedades birefringentes utilizadas en pantallas planas. Estas estructuras y otras menos organizadas tienden a inmovilizar grandes cantidades de solvente para formar geles Fig.4.

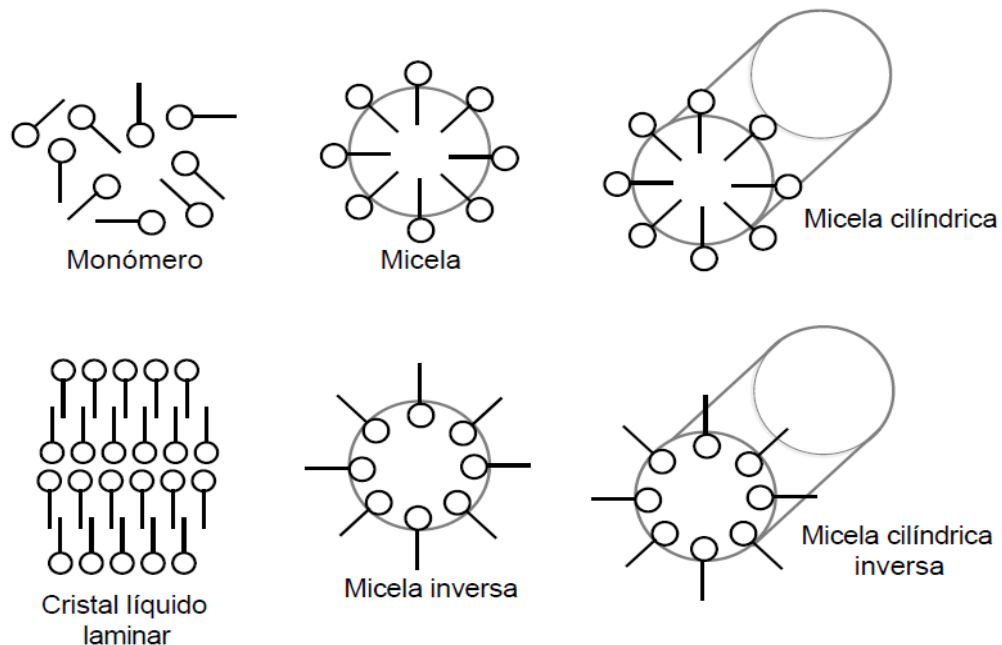


Figura 4. Diferentes estructuras formadas por la adición de agentes tensoactivos.

Ulises Hernández Castellanos

Se puede decir que todas las propiedades y usos de los surfactantes provienen de dos propiedades fundamentales de estas sustancias: de una parte, su capacidad de adsorberse a las interfaces y de otra parte su tendencia a asociarse para formar estructuras organizadas. Todos los surfactantes poseen una molécula que presenta a la vez un grupo polar (o hidrofílico) y un grupo apolar (hidrofóbico o lipofílico). El grupo polar es en general un grupo funcional que contiene heteroátomos (O,S,N,P), mientras que el grupo apolar es en la mayoría de los casos un hidrocarburo parafínico o alquil-aromático. La figura 5 muestra la estructura de un surfactante muy utilizado en los polvos para lavar: el Dodecil Benceno Sulfonato de Sodio



Dodecil benceno sulfonato de sodio

Figura 5. Muestra la estructura química de un tensactivo.

En vista de su dualidad polar-apolar, una molécula de surfactante no puede satisfacer su doble afinidad ni en un solvente polar, ni en un solvente orgánico. Cuando una molécula de surfactante se coloca en una interfase agua-aire o agua-aceite, ella puede orientarse de manera a que el grupo polar esté en el agua, mientras que el grupo apolar se ubica "fuera" del agua, en el aire o en el aceite.

3.3 Fenómenos de transporte.

Los Fenómenos de Transporte, se define como la rama de la Ingeniería Química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987). La ecuación básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material D/Dt (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987):

$$\frac{DX}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (15)$$



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Mecanismo de Transporte	X	Y	f
Momento Newton	ρV	$\Phi = \rho v v + T = \rho v v - pI + \sigma$	ρg
Energía Termodinámica Irreversible	$U = \rho C_p T$	$q = -k \nabla T$	$\sigma : D$
Masa Conservación de los moles en un sistema	C_A	$N_A = -c D_{AB} \nabla x_A + x_A (N_A + N_B)$	R_A
Continuidad Conservación de la masa	ρ	ρV	0

Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa relativamente.

El primer término de la Ec. (15), representa la derivada material de la propiedad X, la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través de la divergencia del flux Y y por último la fuente f (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987).

3.4 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de Newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (16)$$

En la Ec. (16) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, p es el gradiente de presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector



Ulises Hernández Castellanos

aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante. Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (16) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987).

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (17)$$

La Ec. (17) es base para el cálculo de la porosidad y del flujo en un medio poroso.

3.5 La ecuación de transporte de energía.

La ecuación de transporte de energía, se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo si es una variable importante, ya que desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987).

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (18)$$

La Ec. (18) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como función como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002). La Ec. (18) es punto de partida en los cálculos del perfil de temperatura asociado a los procesos moleculares y los disipativos respectivamente.

3.6 La ecuación de transporte de masa.

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = c D_{AB} \nabla^2 X_A - \nabla X_A \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - X_A \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + R_A \quad (19)$$

La Ec. (19) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie A por efecto de los mecanismos difusivos y de las contribuciones de los cambios espaciales a través del movimiento global del fluido. Cuando el movimiento global del fluido se desprecia es decir, los cambios espaciales en el movimiento global del fluido son despreciables y solamente los mecanismos difusivos y el término de generación es obtenido, se tiene lo siguiente (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002);

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 (c X_A) - k_n'' C_A^n = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n'' C_A^n \quad (20)$$



Ulises Hernández Castellanos

La Ec. (20) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente.

3.7 Reología.

La reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002). En su forma más simple, la viscosidad μ es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).

3.7.1 Tensor de deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación, es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera: (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (21)$$

3.7.2 Tensor gradiente de velocidad y su transpuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera: (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).



$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (22)$$

3.7.3 Tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_s$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de Vorticidad (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (23)$$

El tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002). Físicamente nos da información acerca de la rapidez con que es deformado el sistema.

3.7.4 Tensor de vorticidad.

El tensor de vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema:



Ulises Hernández Castellanos

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Es importante notar, que el tensor de vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002). Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo.

3.7.5 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como: (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{xx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

3.8 Tipos de fluidos.

3.8.1 Fluidos newtonianos.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se



Ulises Hernández Castellanos

caracteriza por cumplir la ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre. En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como: (Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).

$$\sigma = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (27)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pas (en SI). En la Ec. (27), el tensor de esfuerzos σ tiene unidades de Pascales y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} tiene inverso de segundo respectivamente. Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (26) son no newtonianos.

3.8.2 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. Estados fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo. Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple de un fluido newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto, la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, pH y la rapidez con la que se deforma.

$$\sigma = 2\eta(\mathbb{I}_D)\mathbf{D} = \eta(\mathbb{I}_D)(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (28)$$

3.9 Ecuaciones constitutivas.

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. En mecánica del medio continuo, una ecuación constitutiva describe la relación entre las variables dinámicas en el sistema, en particular el esfuerzo y la deformación.



3.9.1 Modelo de ley de potencia.

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de ley de Potencia, o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1}\mathbf{D} = 2m(\Pi_D)^{(n-1)/2}\mathbf{D} \quad (29)$$

En donde, Π_D es el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, el cual se obtiene tomando el doble producto punto del tensor rapidez de deformación y posterior a eso, su raíz cuadrada. Este modelo contiene dos parámetros de ajuste k y n son parámetros. El parámetro m es conocido como el índice de consistencia y n es exponente asociado al comportamiento no newtoniano del fluido. Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando $n > 1$ la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrozante al corte). Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de k depende del valor numérico de n , con lo cual valores de k de distintos fluidos no son comparables.

3.9.2 Modelo de Ellis.

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia. Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia. Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$2\mathbf{D} = \varphi_0\boldsymbol{\sigma} + \varphi_1|\boldsymbol{\sigma}|^{n-1}\boldsymbol{\sigma} \quad (30)$$

3.9.3 Modelo de Reiner-Philippoff.

El modelo de Reiner-Philippoff es un modelo inelástico que contiene tres parámetros de ajuste asociados a las propiedades no newtonianas del sistema. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte y (iii) un parámetro asociado a la fluidez del material que tiene unidades de esfuerzo $\{\eta_0, \eta_\infty, \sigma_s\}$. La expresión matemática que describe el modelo de Reiner-Philippoff es la siguiente:

$$\sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$
$$\eta(|\sigma|) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_s}\right)^2} \quad (31)$$

3.10 Funciones materiales.

3.10.1 Flujo cortante en estado estacionario.

El flujo cortante se origina cuando una fuerza tangencial al sistema (fluido) de forma continua e irreversiblemente el fluido. En esta prueba, la muestra es deformada por medio de un esfuerzo cortante el cual se puede representar por medio de dos placas paralelas en las cuales se aplica una fuerza en dirección del flujo de tal manera que la transferencia de momento se da en la componente ortogonal a la velocidad como se muestra en la Fig.6.

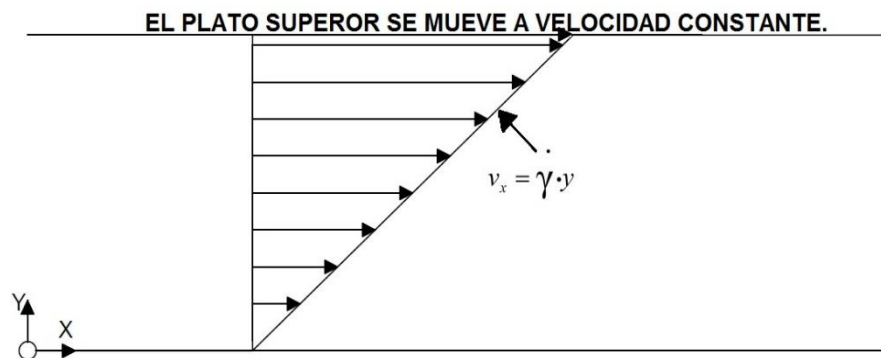


Figura 6. Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde las variables dinámicas del sistema no dependen de la posición).



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

En este caso, las funciones materiales pueden ser descritas a través de la siguiente expresión:

$$\eta \left(\dot{\gamma}_{xy} \right) = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}_{xy}} \quad (32)$$

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\left(\dot{\gamma}_{xy} \right)^2} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\dot{\gamma}_{xy}} \quad (33)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\left(\dot{\gamma}_{xy} \right)^2} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\dot{\gamma}_{xy}} \quad (34)$$

La Ec. (32) representa la función viscosidad que es básicamente la razón entre el esfuerzo que se aplica y la rapidez de deformación. Las Ecs. (33,34) son los coeficientes asociados a la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales. Estos coeficientes, se relacionan con la elasticidad del material. Nótese, que para un fluido newtoniano, los coeficientes $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ valen cero.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO IV

PLANTEAMIENTO FÍSICO

DEL MODELO

Ulises Hernández Castellanos

En este capítulo se modela el flujo de un líquido en un medio poroso en un capilar para un líquido newtoniano (viscosidad constante) y para un líquido no newtoniano (modelo Newtoniano, modelo de ley de potencia, modelo de ley de Ellis y modelo de Reiner Philippoff). En todos los casos, se deduce el perfil de velocidades, flujo volumétrico, velocidad superficial y la viscosidad aparente. Por último, estos resultados nos permitirán comparar la acción que produce el medio poroso.

4.1 Planteamiento del problema de flujo de un líquido en medio poroso.

El sistema físico que se analiza en esta sección se describe a continuación. Con base en la teoría del poro promedio se transformara la geometría del poro de una forma amorfa a un haz de tubos capilares bien definidos por los cuales pasara el fluido no-newtoniana, Fig. 7.

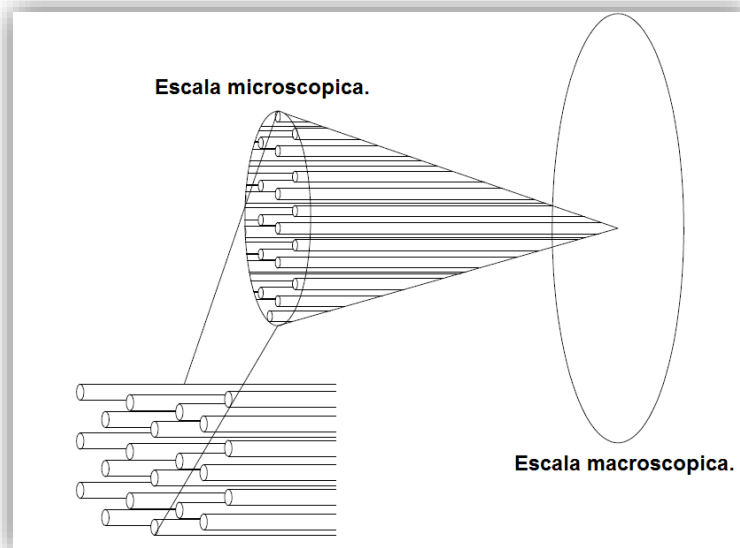


Figura 7. Ilustra la estructura del medio poroso utilizando la teoría del poro promedio.

En este problema se modela el medio poroso como un manojo de tubos con el mismo radio Fig. 7. El análisis, se basa en calcular el flujo volumétrico en un tubo, en el cual fluye un líquido con estructura transitoria, que fluye en la dirección axial en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, bajo la acción de un gradiente de presión constante Fig. 8.

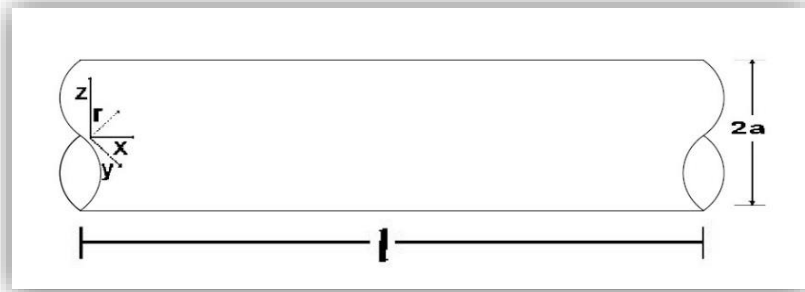


Figura 8. Ilustra el tubo capilar donde pasara el fluido no newtoniano.

Las condiciones de procesos son mencionadas a continuación:

- El proceso es isotérmico (Temperatura constante).
- Estado estacionario (Ninguna característica, atributo o variable dinámica del sistema depende del tiempo).
- Sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) .
- El origen de coordenadas en el centro del capilar (El eje axial se coloca en la dirección del flujo)
- Efectos gravitacionales despreciables, i.e. el vector gravedad en cero: $g = 0$.
- La reología y el flujo del líquido no newtoniano es caracterizado por las ecuaciones constitutivas de los modelos; Newtoniano, ley de potencia, ley de Ellis y Reiner-Philippoff.
- Los efectos inerciales son despreciables, es decir la derivada material del vector velocidad es cero, i.e. $\rho DV/Dt=0$. Físicamente, significa que los mecanismos inerciales son despreciables con respecto a los viscosos.

4.2 Campo vectorial de velocidades.

El vector de velocidad, tensores de gradiente de velocidad, transpuesta del gradiente de velocidad y de tensor de esfuerzos viscoso. Matemáticamente, se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [0, 0, V_z(r, t)] \quad (35)$$



4.2.1 Tensores gradiente de velocidad.

El tensor gradiente de velocidad, transpuesta de tensor gradiente de velocidad y tensor de esfuerzo viscosos toman la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

4.2.2 Tensor rapidez de deformación.

El tensor rapidez de deformación para un flujo cortante, toma la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

4.2.3 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos para un flujo cortante simple y que corresponde al problema que se está analizando, puede ser descrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (38)$$

En (38), $\{\sigma_{rz} = \sigma_{rz}\}$ son los esfuerzos cortantes y $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$ son los esfuerzos normales asociados con la elasticidad del fluido.

4.2.4 Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible (densidad constante) y suponiendo el campo de velocidades descrito en (41), toma la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (39)$$

La Ec. (39) implica que la componente z del vector velocidad no depende de la variable axial z, i.e. no es función de z, y utilizando la hipótesis de simétrica cilíndrica, la componente z del vector velocidad, solo depende de la coordenada radial r, i.e., $V_z = V_z(r,t)$.



4.2.5 Ecuación de movimiento.

A partir de las hipótesis planteadas, la componente z de la ecuación de movimiento, puede ser expresada en la siguiente forma:

$$\nabla p = \nabla \cdot \sigma \quad (40)$$

La Ec. (40) representa un balance de fuerzas entre el gradiente de presión y la divergencia del tensor de esfuerzos. En particular para este problema, la Ec. (40) toma la forma:

$$\nabla_z p = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_{rz}) \quad (41)$$

La Ec. (41) es la simplificación de la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas, suponiendo simetría cilíndrica e invariancia axial, es decir, no hay variaciones del esfuerzo con respecto al ángulo y la longitud axial.

4.3 Ecuaciones constitutivas.

4.3.1 Modelo de Newton.

El modelo Newtoniano es el más simple de todos, este relaciona el tensor de esfuerzos con el tensor rapidez de deformación y solamente contiene una propiedad material conocida como viscosidad cortante.

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} \quad (42)$$

4.3.2 Modelo Ostwald de Waele.

El modelo de ley de potencia es una generalidad del modelo newtoniano, este relaciona dos variables $\{\alpha, \phi_1\}$ en el cual, α es el exponente asociado a la parte no newtoniana que describe los procesos adelgazantes o engrozantes al corte. Un valor de α mayor a 1, i.e. $\alpha \gg 1$ significa que el flujo es adelgazante al corte por lo que la función viscosidad decrece en función de la rapidez de deformación dV_z/dr . Por otra parte, cuando $\alpha \ll 1$ el fluido es engrozante al corte, i.e., aumenta su viscosidad conforme la rapidez de deformación aumenta dV_z/dr . Nótese que cuando el valor del exponente $\alpha=1$, se recupera el modelo newtoniano. El valor de ϕ_1 puede interpretarse como una fluidez generalizada la cual, describe la zona intermedia en un reograma viscosidad vs rapidez de deformación.



$$\dot{\gamma}_{rz} = \varphi_1 |\sigma_{rz}|^{\alpha-1} \sigma_{rz} \quad (43)$$

4.3.2 Modelo de Ellis.

El modelo se puede expresar como una superposición del modelo newtoniano y ley de potencia. El modelo de Ellis contiene tres parámetros materiales $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están asociados a la fluidez a rapidez de deformación baja, rapidez de deformación moderada y el exponente alfa que describe la naturaleza adelgazante o engrosante del líquido no newtoniano.

$$\dot{\gamma}_{rz} = \varphi_0 \sigma_{rz} + \varphi_1 |\sigma_{rz}|^{\alpha-1} \sigma_{rz} \quad (44)$$

4.3.3 Modelo de Reiner Philippoff.

En este modelo se describe la zona newtoniana a bajo y alto corte y una zona intermedia tipo ley de potencia. Esta ecuación tiene tres propiedades materiales $\{\varphi_0, \varphi_\infty, \sigma_s\}$. Las dos primeras propiedades materiales $\{\varphi_0, \varphi_\infty\}$ son las fluides a bajo y alto corte respectivamente y σ_s es un parámetro material con unidades de esfuerzo, el cual está relacionado con la transición de estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo. El modelo matemático de Reiner Phillipoff se expresa en forma escalar de la siguiente forma:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{|\sigma_{rz}|}{\sigma_s}\right)^2}} \sigma_{rz} = \frac{1}{\eta_\infty} \frac{1}{1 + \frac{\eta_0 / \eta_\infty - 1}{1 + \left(\frac{|\sigma_{rz}|}{\sigma_s}\right)^2}} \sigma_{rz} = \varphi_\infty \frac{1}{1 + \frac{\varphi_\infty / \varphi_0 - 1}{1 + \left(\frac{|\sigma_{rz}|}{\sigma_s}\right)^2}} \sigma_{rz} \quad (45)$$

4.4 Condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera que satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de masa, momento y constitutivas, toman la forma:

$$\text{C.F.:} \begin{cases} \mathbf{V}(r=a) = (0,0,V_z(r=a)) = (0,0,V_z(r=a)) \\ \left. \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \right|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (46)$$

La primera condición obedece a la condición de no deslizamiento en la pared, i.e., en la pared el fluido lleva la velocidad del sólido, si el sólido no se mueve con respecto a un sistema de referencia inercial, la velocidad del fluido es cero. Por otra parte, la segunda condición está relacionada con la axi-simetría del



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

flujo. En el siguiente capítulo, se utilizarán las ecuaciones desarrolladas en este capítulo con el fin de deducir los perfiles de velocidad, flujo volumétrico y permeabilidad intrínseca de los fluidos antes expuestos.

4.5 Resumen de ecuaciones.

Desacoplando las ecuaciones diferenciales se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, que permiten plantear el siguiente problema de valor de frontera:

Balance de momento

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\sigma_{rz}) = \frac{dp}{dz} \quad (47)$$

b) Ecuaciones constitutivas

$$\text{E.C.:} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_0 \sigma_{rz} \\ \frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \\ \frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_0 \sigma_{rz} + \varphi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \\ \frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_0 \frac{1}{1 + \frac{1 - (\varphi_0 / \varphi_\infty)}{1 + \left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}} \sigma_{rz} \end{array} \right. \quad (48a-d)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{C.F.:} \left\{ \begin{array}{l} V_z(r=a) = 0 \\ \left. \frac{dV_z(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

En la siguiente sección, se calculará el perfil de velocidades, flujo volumétrico, velocidad superficial y la viscosidad aparente en estado no estacionario para los modelos anteriormente mencionados (modelo newtoniano, modelo de ley de potencia, modelo de ley de Ellis y modelo de Reiner Philippoff).



**ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN
MEDIO POROSO**

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO V

MODELADO TEÓRICO



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

En este capítulo se obtiene las expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, velocidad superficial y la viscosidad aparente en un medio poroso a partir de las ecuaciones generales planteadas en el capítulo anterior.

5.1 Permeabilidad intrínseca de fluidos viscosos.

En esta sección utilizaremos el flujo de Poiseuille para definir un modelo simple para la permeabilidad. Supongamos que tenemos un medio poroso completamente lleno con un fluido newtoniano incompresible de viscosidad μ y cuyos poros tienen un radio promedio a esto es conocido como un medio poroso saturado. Como ya mencionamos, se modelara el medio poroso como un manojito de pequeños tubos capilares construyendo una red con una porosidad ε . Al tener un manojito de tubos, podremos calcular el flujo en un tubo y luego multiplicarse el resultado por el número de tubos para obtener el flujo total que pasa a través del medio poroso, por esta razón es esta sección analizaremos el caso del flujo a través de un tubo obteniendo la bien conocida solución analítica debida a Hagen- Poiseuille y con este resultado introducir el concepto de permeabilidad y facilitar la discusión posterior.

5.2 Modelo de Newton.

Suponiendo que el fluido de estudio puede ser caracterizado por el modelo newtoniano, y que además el sistema se encuentra en estado estacionario y el fluido es incompresible, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\sigma_{rz}) = \nabla_z p \quad (50)$$

Al integrar la Ec. (50) con respecto a coordenada espacial r ,

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r + \frac{C_1}{r} \quad (51)$$

Como el esfuerzo debe de permanecer acotado en todo el intervalo de integración, en particular $r = 0$, la constante C_1 debe ser valor cero (Consistencia física), i.e. $C_1 = 0$:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \quad (52)$$



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

Para un fluido Newtoniano, el esfuerzo es una relación lineal con la rapidez de deformación del sistema, y solo contiene una propiedad material μ denominada viscosidad o viscosidad cortante:

$$\eta_0 \frac{dV_z(r)}{dr} = \sigma_{rz} = \frac{1}{2}(\nabla_z p)r \quad (53)$$

5.2.1 Cálculo del perfil de velocidad.

Integrando la Ec. (53) con respecto a la coordenada radial r y tomando en cuenta los efectos de no deslizamiento en la pared, i.e. que la velocidad en $r = a$ debe ser cero $V_z(r=a) = 0$, se tiene el siguiente resultado, en el sistema:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta_0}(\nabla_z p)r^2 + C_2 \quad (54)$$

Al aplicar en la Ec. (54) la condición de no deslizamiento en la pared $V_z(r=a) = 0$, se obtiene que el valor de la constante $C_2 = -\frac{a^2}{4\eta_0}(\nabla_z p)$ y el perfil de velocidades toma la siguiente forma para un fluido newtoniano:

$$V_z(r) = \frac{a^2}{4\eta_0}(-\nabla_z p) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (55)$$

5.2.2 Cálculo del flujo volumétrico.

Integrando la Ec. (55) con respecto al área de sección transversal,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta = \frac{1}{4\eta_0}(-\nabla_z p) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (56)$$

Para facilitar la integración, se hace el siguiente cambio de variable: $u = r/a$ en la Ec. (56), por lo que el flujo volumétrico para un fluido newtoniano está determinado por la famosa fórmula de Hagen y Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta_0}(-\nabla_z p) \quad (57)$$

La Ec. (57) obtenida se conoce en la literatura como la ecuación de Hagen y Poiseuille el cual fue deducido para estudiar el flujo de un fluido no newtoniano



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



en un medio poroso. Esta ecuación es válida en el régimen laminar, gradiente de presión constante y fluido incompresible.

5.2.3 Cálculo de la permeabilidad intrínseca y velocidad superficial.

A partir de la ecuación de Hagen y Poiseuille (Ec. 57) se puede obtener la permeabilidad intrínseca de un fluido newtoniano, utilizando la teoría del poro promedio. Dividiendo por el área característica de flujo, y multiplicando por la porosidad obtenemos la velocidad superficial:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \varepsilon \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{\varepsilon a^2 / 8}{\eta_0} \nabla_z p = \frac{K}{\eta_0} (-\nabla_z p) \quad (58)$$

La Ec. (58) es la llamada ley de Darcy, muy usada en el transporte de fluido en medios porosos. Físicamente esta ley nos describe el flujo promedio en un medio poroso el cual, es proporcional al gradiente de presión e inversamente proporcional a la viscosidad del sistema. La constante K es conocida como permeabilidad intrínseca en el sistema. Entonces la permeabilidad K nos da una medida de que tan fácilmente un fluido fluye a través de un medio poroso. Una permeabilidad grande significa que el fluido puede fluir libremente y una permeabilidad baja significa que se requiere una mayor presión para producir un flujo equivalente.

$$K(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8} \quad (59)$$

Así podemos resumir las hipótesis que hemos utilizado para obtener la ecuación de Hagen y Poiseuille:

- a) Modelo de tubos capilares infinitos.
- b) Fluido incompresible y newtoniano.
- c) La condición de adherencia se cumple. i.e. no existe velocidad en la pared del capilar.
- d) Estado estacionario.
- e) Proceso Isotérmico.
- f) Flujo laminar.



5.3 Fluidos no newtonianos.

5.3.1 Modelo Ostwald de Waele.

El modelo de ley de potencia es un modelo empírico que describe la zona intermedia en un reograma de viscosidad vs rapidez de deformación. Para un fluido no newtoniano, esta zona está asociada a los procesos adelgazantes y engrosantes debido al flujo. Matemáticamente, este modelo es una generalización del modelo newtoniano. Siguiendo los pasos previos del modelo newtoniano, la ecuación reológica que describe el esfuerzo cortante en dirección radial está dada por:

$$\sigma_{rz} = m \left(\frac{dV_z(r)}{dr} \right)^n \quad (60)$$

El esfuerzo para un fluido, en un tubo sometido a un gradiente de presión y suponiendo que los efectos inerciales y las fuerzas externas son despreciables, es independiente del fluido, i.e.:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \quad (61)$$

Como en el caso newtoniano, el balance de fuerzas nos da la siguiente información:

$$m \left(\frac{dV_z(r)}{dr} \right)^n = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \quad (62)$$

Con el fin de simplificar los cálculos, la Ec. (61) Arreglando la Ec. (61) Simplificando la Ec. (61)

$$\frac{dV_z(r)}{dr} = \left(\frac{1}{m} \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \right)^{1/n} = \phi_1 \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) r \right)^\alpha \quad (63)$$

En donde se han definido la siguiente combinación de parámetros dimensionales:

$$\phi_1 = \left(\frac{1}{m} \right)^{1/n} = \left(\frac{1}{m} \right)^\alpha ; \alpha = 1/n \quad (64)$$



5.3.2 Cálculo del perfil de velocidad.

Integrando, la Ec. (63) con respecto a la coordenada radial r , se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\phi_1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) \right)^\alpha r^{\alpha+1} + C \quad (65)$$

Integrando la Ec. (65), y utilizando la condición de no deslizamiento:

$$C = -\phi_1 \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) \right)^\alpha \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (66)$$

Sustituyendo la Ec. (66) en la Ec. (65), se obtiene el perfil de velocidades para el modelo newtoniano:

$$V_z(r) = -\frac{\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (67)$$

5.3.3 Cálculo del flujo volumétrico.

El flujo volumétrico se calcula de la misma manera que en el caso newtoniano:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta = -\frac{\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) \right)^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right] r dr d\theta \quad (68)$$

Integrando la parte angular y haciendo el siguiente cambio de variable: $u = r/a$, se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) \right)^\alpha \int_0^1 \left[1 - (u)^{\alpha+1} \right] u du \quad (69)$$

Finalmente, integrando la Ec. (69), finalmente, el flujo volumétrico para el modelo de Ley de Potencia, puede expresarse como:

$$Q = -\frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (70)$$

Arreglando la Ec. (70) se puede obtener la siguiente expresión:



Ulises Hernández Castellanos

$$Q = \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left| \frac{1}{2} \nabla_z p \right|^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{2} \nabla_z p \right) = \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (71)$$

5.3.4 Cálculo de la velocidad superficial y viscosidad aparente.

De la misma manera que en el fluido newtoniano, la velocidad promedio en el sistema, se deduce a partir del flujo volumétrico, por lo que:

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2} \nabla_z p \right)^\alpha \quad (72)$$

Multiplicando por la porosidad, se obtiene el equivalente al modelo de Darcy para un fluido no newtoniano que sigue el modelo de Ley de Potencia:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon a^2 / 8}{\eta_{ap}} (-\nabla_z p) = \frac{K}{\eta_{ap}} (-\nabla_z p) \quad (73)$$

En donde la viscosidad efectiva depende del esfuerzo en la pared a través de la siguiente expresión:

$$\eta_{ap} = \frac{\alpha+3}{4\phi_1} \left(-\frac{1}{2} \nabla_z p a \right)^{1-\alpha} = \frac{(\alpha+3)/4}{\phi_1} (\sigma_w)^{1-\alpha} \quad (74)$$

Y el esfuerzo en la pared está definida como:

$$\sigma_w = -\sigma_{rz}|_{r=a} = -\frac{1}{2} \nabla_z p a \quad (75)$$

Esto implica que la K está determinada por la geometría del sistema y que la viscosidad debe ser sustituida por la viscosidad aparente, dependiendo de la ecuación constitutiva con la que se caractericé el fluido. Sin embargo, existe mucha controversia en cuanto a este tema (Bird et al. 1978) y se debe de investigar más al respecto. Por otra parte, este trabajo solo es válido que no contienen efectos de memoria, i.e. que la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales, es igual a cero por lo que se deben de tomar en consideración todos los mecanismos posibles incluyendo los elásticos que puedan afectar al flujo poroso.

5.4 Modelo de Ellis.

El modelo de Ellis, es un modelo empírico que contiene como casos particulares al modelo de Newton y el de ley de Potencia. El modelo se puede



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

expresar como una superposición del modelo newtoniano y ley de potencia, es decir:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \underset{\text{Newtoniano}}{\dot{\gamma}_{rz}} + \underset{\text{Ley de potencia}}{\dot{\gamma}_{rz}} = \frac{1}{\eta_0} \sigma_{rz} + \left(\frac{1}{m}\right)^{1/n} (\sigma_{rz})^{1/n} \quad (76)$$

En donde, se han definido las siguientes variables

$$\varphi_0 = \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{G_0 \lambda_0}; \varphi_1 = \left(\frac{1}{m}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{G_0 \lambda^{1/\alpha}}\right)^\alpha = \frac{1}{G_0^\alpha \lambda}; \alpha=1/n \quad (77)$$

Finalmente, el modelo de Ellis, se puede expresare como:

$$\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = \varphi_0 \sigma_{rz} + \varphi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (78)$$

Despreciando los efectos inerciales y considerando que el sistema fluye debido al gradiente de presión.

$$\frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_0 \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) r\right) + \varphi_1 \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) r\right)^\alpha \quad (79)$$

5.4.1 Cálculo del perfil de velocidad.

Integrando la Ec. (81), se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\varphi_0}{2} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) r^2\right) + \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) r\right)^\alpha r^{\alpha+1} + C_1 \quad (80)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en la pared en la Ec. (80):

$$C_1 = -\frac{\varphi_0}{2} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) a^2\right) - \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} (\nabla_z p) a\right)^\alpha a^{\alpha+1} \quad (81)$$

Combinando la Ec. (81) con la Ec. (80). El perfil de velocidades puede ser expresado como:

$$V_z(r) = -\frac{\varphi_0 a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p\right) \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) - \frac{\varphi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p\right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha+1}\right) \quad (82)$$



5.4.2 Cálculo del flujo volumétrico.

El flujo volumétrico se calcula de la misma manera que en el modelo Newtoniano y ley de potencia:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a Vz(r) r dr d\theta = -\frac{\varphi_0 a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p\right) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] r dr d\theta - \frac{\varphi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p\right)^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha+1}\right] r dr d\theta \quad (83)$$

Integrando la parte angular y haciendo el siguiente cambio de variable: $z = R/a$, se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a Vz(r) r dr d\theta = -\frac{2\pi\varphi_0 a^4}{2} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p\right) \int_0^1 [1-u^2] u du - \frac{2\pi\varphi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \nabla_z p\right)^\alpha \int_0^1 [1-u^{\alpha+1}] u du \quad (84)$$

Integrando la Ec. (84) obtenemos el flujo volumétrico de un fluido que es caracterizado por el modelo de Ellis:

$$Q = Q_N + Q_{NN} = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} (-\nabla_z p) + \frac{\pi\varphi_1 a^{\alpha+3}}{2^\alpha (\alpha+3)} (-\nabla_z p)^{\alpha-1} (-\nabla_z p) \quad (85)$$

5.4.3 Cálculo de la velocidad superficial y viscosidad aparente.

Finalmente, procediendo de la misma manera que en el caso anterior, se tiene la siguiente expresión para el modelo de Ellis.

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \varepsilon \frac{Q}{\pi a^2} = -\left(\frac{\varepsilon a^2 / 8}{\eta_0} + \frac{\varepsilon a^2 a^{\alpha-1} / 8}{2^{\alpha-3} m^\alpha (\alpha+3)} (\nabla_z p)^{\alpha-1} \right) \nabla_z p \quad (86)$$

Factorizando la última expresión, se tiene lo siguiente:

$$V_0 = \frac{K}{\eta_{ap}} (-\nabla_z p) \quad (87)$$

En donde la viscosidad efectiva para el modelo de Ellis toma la forma:

$$\eta_{eff} = \frac{1}{\varphi_0 + \varphi_1 \frac{4}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2} \nabla_z p a\right)^{\alpha-1}} \quad (88)$$

La viscosidad efectiva se puede poner en términos del esfuerzo en la pared, por lo que se tiene lo siguiente:



$$\eta_{\text{eff}} = \frac{1}{\varphi_0 + \varphi_1 \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-1}} \quad (89)$$

En este punto, el principio de superposición se cumple, es decir la permeabilidad intrínseca para el modelo de Ellis está caracterizada por la K newtoniana y la viscosidad aparente, es la suma del modelo newtoniano y del modelo de ley de potencia. El último modelo que se va a analizar es el modelo de Reiner Philippoff y a partir de eso, se compararan las distintas contribuciones de cada uno. Es importante resaltar, que la viscosidad aparente no es la real, debido a que se necesita introducir la corrección de Rabinovitch (Bird et al. 1987).

5.5 Modelo de Reiner Philippoff.

En esta sección, se presenta la velocidad axial, flujo volumétrico, viscosidad aparente y velocidad aparente del modelo de Reiner Philippoff respectivamente. El modelo de Reiner Philippoff es un modelo reológico de tres constantes materiales, dos viscosidades a bajo y alto corte respectivamente y una constante, que tiene unidades de inverso de esfuerzo, la cual cuantifica la transición de estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo.

5.5.1 Calculo del perfil de velocidad.

La Ecuación escalar para la componente rz del modelo de Reiner Philippoff puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_0 \frac{1}{\varphi + \frac{1-\varphi}{1 + \left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}} \sigma_{rz} \quad (90)$$

La Ec. (90) puede ser descrita en términos del esfuerzo en la pared de la siguiente manera:

$$\frac{dV_z(r)}{dr} = \varphi_0 \sigma_s \frac{1}{\varphi + \frac{1-\varphi}{1 + \left(\frac{\sigma_w r}{\sigma_s a}\right)^2}} \frac{\sigma_w r}{\sigma_s a} \quad (91)$$

La Ec. (91) se puede simplificar de la siguiente manera;



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

$$\frac{dVz^*}{d\xi} = \frac{1}{\varphi + \frac{1-\varphi}{1+(\tau\xi)^2}} \tau\xi \quad (92)$$

En donde, se han definido las siguientes cantidades adimensionales

$$\tau = \frac{\sigma_w}{\sigma_s}; \xi = \frac{r}{a}; \varphi = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}; Vz^* = \frac{Vz}{\varphi_0 \sigma_s a} \quad (93)$$

Para resolver la Ec. (92), se hace la división de polinomios, por lo que

$$\frac{dVz^*}{d\tau\xi} = \frac{1}{\tau} \frac{1+(\tau\xi)^2}{1+\varphi(\tau\xi)^2} \tau\xi \quad (94)$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable $u = \tau\xi$, se tiene:

$$\frac{dVz^*}{du} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1+u^2}{1+\varphi u^2} \right) u = \frac{1}{\tau} \left(u + \frac{1-\varphi}{\varphi} \left(u - \frac{u}{1+\varphi u^2} \right) \right) \quad (95)$$

Integrando la Ec. (95) con respecto a la coordenada radial, se tiene lo siguiente:

$$Vz^*(u) = \frac{1}{2\tau\varphi} \left(u^2 - \frac{1-\varphi}{\varphi} \text{Ln}|1+\varphi u^2| \right) + C \quad (96)$$

Aplicando la condición, de no deslizamiento en la Ec. (96)

$$C = -\frac{1}{2\tau\varphi} \left(\tau^2 - \frac{1-\varphi}{\varphi} \text{Ln}|1+\varphi\tau^2| \right) \quad (97)$$

Al sustituir la constante C (Ec. 97) en la Ec. (96) general, se tiene lo siguiente:

$$Vz^*(u) = \frac{1}{2\tau\varphi} \left(\tau^2 (\xi^2 - 1) - \frac{1-\varphi}{\varphi} \text{Ln} \left| \frac{1+\varphi(\tau\xi)^2}{1+\varphi\tau^2} \right| \right) \quad (98)$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Vz^*(\xi; \tau, \varphi) = \frac{1}{2\tau\varphi} \left(\tau^2 (\xi^2 - 1) - \frac{1-\varphi}{\varphi} \text{Ln} \left| \frac{1+\varphi(\tau\xi)^2}{1+\varphi\tau^2} \right| \right) \quad (99)$$



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

La Ec. (99) representa el perfil de velocidades para el modelo de Reiner Philippoff.

5.5.2 Cálculo del flujo volumétrico y viscosidad aparente.

El cálculo del flujo volumétrico puede ser obtenido a partir del perfil de velocidades, sin embargo, procedemos a partir de la definición de rapidez de deformación. Integrando la expresión general del flujo volumétrico se tiene:

$$Q = -\pi \int_0^a \frac{dVz(r)}{dr} r^2 dr \quad (100)$$

Usando las variables adimensionales definidas en la Ec. (93), obtenemos lo siguiente:

$$Q = -\pi \frac{a^2}{\tau^2} \int_0^\tau \frac{dVz(r)}{dz} z^2 dz \quad (101)$$

Sustituyendo la Ec. (100) y la Ec. (101) y realizando la integración, se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi \frac{a^2}{\tau^2} Vc \int_0^\tau \left(1 + \frac{1-\phi}{\phi + z^2} \right) z^2 z dz \quad (102)$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi \frac{a^2}{2\tau^2} Vc \int_0^\tau \left(1 + \frac{1-\phi}{\phi + z^2} \right) z^2 (2z dz) \quad (103)$$

Haciendo el cambio de variable $u = z^2$ se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi \frac{a^2}{2\tau^2} \int_0^{\tau^2} \left(1 + \frac{1-\phi}{\phi + u} \right) u du \quad (104)$$

Haciendo la división de polinomios:

$$Q = \pi \frac{a^2}{2\tau^2} \int_0^{\tau^2} \left(u + 1 - \phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi + u} \right) \right) du = \pi \frac{a^2}{2\tau^2} \int_0^{\tau^2} \left(u + 1 - \phi + \phi^2 \frac{1}{\phi + u} \right) du \quad (105)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

$$Q = \pi \frac{a^2}{2\tau^2} Vc \left(\frac{1}{2} \tau^4 + (1-\phi) \tau^2 + \phi^2 \text{Ln} \left| 1 + \frac{\tau^2}{\phi} \right| \right) \quad (106)$$

Por lo tanto la ecuación de Hagen y Poiseuille para el modelo de Reiner Philippoff está dado por:

$$Q = \pi \frac{a^4}{8\eta_{ap}} (-\nabla_z p) \quad (107)$$

En donde la viscosidad aparente toma la forma:

$$\eta_{eff} = \frac{\eta_0}{\left(\tau^4 + 2(1-\phi) \tau^2 + 2\phi^2 \text{Ln} \left| 1 + \frac{\tau^2}{\phi} \right| \right) / \tau^3} \quad (108)$$

5.5.3 Cálculo de la velocidad superficial.

De la misma manera, se calcular la permeabilidad con la ecuación generalizada de Darcy, por lo que se tiene lo siguiente:

$$V_0 = \varepsilon \langle V \rangle = \varepsilon \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon (a^2 / 8)}{\eta_{ap}} (-\nabla_z p) = \frac{K}{\eta_{ap}} (-\nabla_z p) \quad (109)$$

Finalmente, se tiene le siguiente resumen para la permeabilidad intrínseca. La permeabilidad intrínseca puede ser calculada a partir de los resultados del modelo newtoniano que está basado en la teoría del poro promedio, es decir que todos los poros tienen el mismo diámetro.

5.6 Resumen.

Finalmente, en este capítulo se analizó el flujo de fluido no newtonianos en un medio poroso el cual, fue modelado por un conjunto de capilares de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Suponiendo estado estacionario, régimen laminar, simetría cilíndrica, fluido incompresible, y que la reología y el flujo pueden ser caracterizados con cuatro ecuaciones constitutivas llamadas: (i) Modelo newtoniano, (ii) Modelo de ley de potencia, (iii) Modelo de Ellis y (iv) Reiner Philippoff se obtuvieron los siguientes resultados resumidos en la Tabla 4.

Ecuación	Ecuación	Permeabilidad	Viscosidad
Reológica	de		
	Darcy		Aparente



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



Newton	$V_0 = \frac{K}{\mu_{ap}} (-\nabla_z p)$	$K(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8}$	$\eta_{ap} = \eta_0$
Ostwald de Waelle	$V_0 = \frac{K}{\mu_{ap}} (-\nabla_z p)$	$K(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8}$	$\eta_{ap} = \frac{(\alpha+3)/4}{\varphi_1} (\sigma_w)^{1-\alpha}$
Ellis	$V_0 = \frac{K}{\mu_{ap}} (-\nabla_z p)$	$K(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8}$	$\eta_{ap} = \frac{1}{\varphi_0 + \varphi_1 \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w)^{\alpha-1}}$
Reinner-Phillipoff	$V_0 = \frac{K}{\mu_{ap}} (-\nabla_z p)$	$K(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon a^2}{8}$	$\eta_{ap} = \frac{\sigma_s (a/Vs)}{\left(\tau^4 + 2(1-\varphi)\tau^2 + 2\varphi^2 \text{Ln} \left 1 + \frac{\tau^2}{\varphi} \right \right) / \tau^3}$

Tabla 4. Resumen de los resultados principales de este capítulo.

Es importante resaltar que en este trabajo en donde el medio poroso, es modelado por un conjunto de capilares, el poro puede ser modelado con la aproximación newtoniana de la permeabilidad intrínseca. Por otra parte, la reología y el flujo es encapsulada en la viscosidad aparente del medio.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO VI

SIMULACIÓN Y ANÁLISIS

DE RESULTADOS



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

En este capítulo se presentan las simulaciones de las ecuaciones principales de este trabajo. En particular, se hace énfasis en los perfiles de velocidad, velocidad superficial y viscosidad aparente para los diferentes tipos de fluidos empelados para caracterizar el fluido.

6.1 Permeabilidad intrínseca.

6.1.1 Permeabilidad intrínseca vs radio del poro.

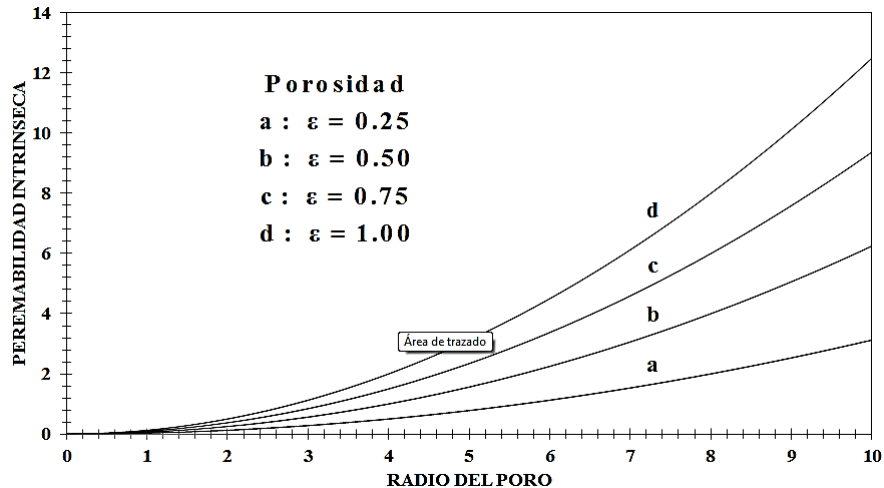


Figura 9. Permeabilidad intrínseca vs radio del poro en función de la porosidad.

La Fig. 9 ilustra el efecto de la permeabilidad como función de la porosidad del medio la cual, es una función del número de huecos en el sistema. Es claro que para este modelo tan sencillo, la permeabilidad muestra un comportamiento monótono creciente en todo el intervalo del radio de poro. Las gráficas se desfasan hacia estados de menor a mayor permeabilidad por efecto de la porosidad. Nótese que un material que tiene un mismo radio de poro puede ser más permeable que otro dependiendo de la porosidad del material.

6.1.2 Permeabilidad intrínseca vs porosidad.

La Fig.10 ilustra el comportamiento de la permeabilidad intrínseca vs porosidad en función del tamaño del radio de poro. Como en la Fig.10 se observa un comportamiento lineal con diferente pendiente dependiendo del tamaño del poro. Es claro que un material con mayor tamaño de poro contribuye a una mayor permeabilidad que otro de menor radio. Sin embargo, en la mayoría de los materiales que existen en la naturaleza el tamaño del poro varía considerablemente, por lo que se tendría una distribución en el tamaño del poro. Por otra parte, la tortuosidad que es un efecto de la trayectoria que siguen las



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

partículas en el medio poroso no es tomada en cuenta en estos cálculos, por lo que es un punto importante a considerar en futuras investigaciones.

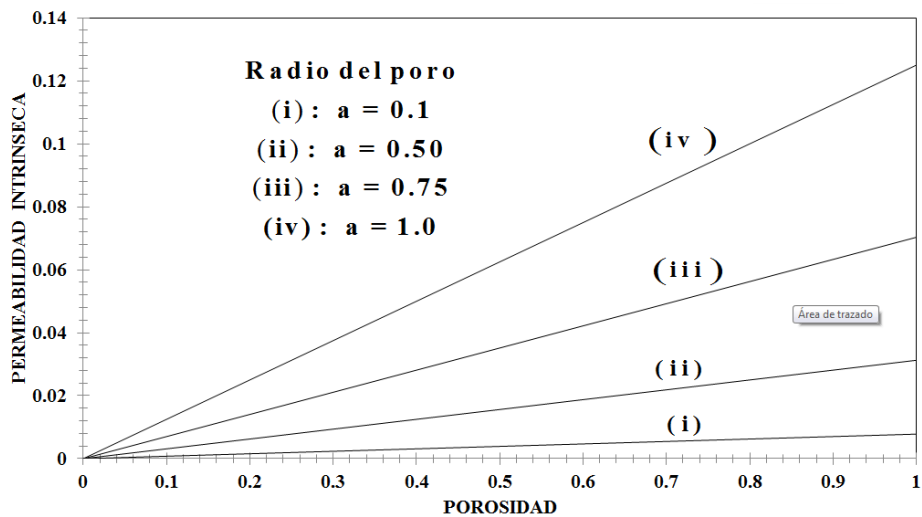


Figura 10. Permeabilidad intrínseca vs porosidad en función del radio del poro.

6.2 Viscosidad aparente.

6.2.1 Modelo Ley de Potencia.

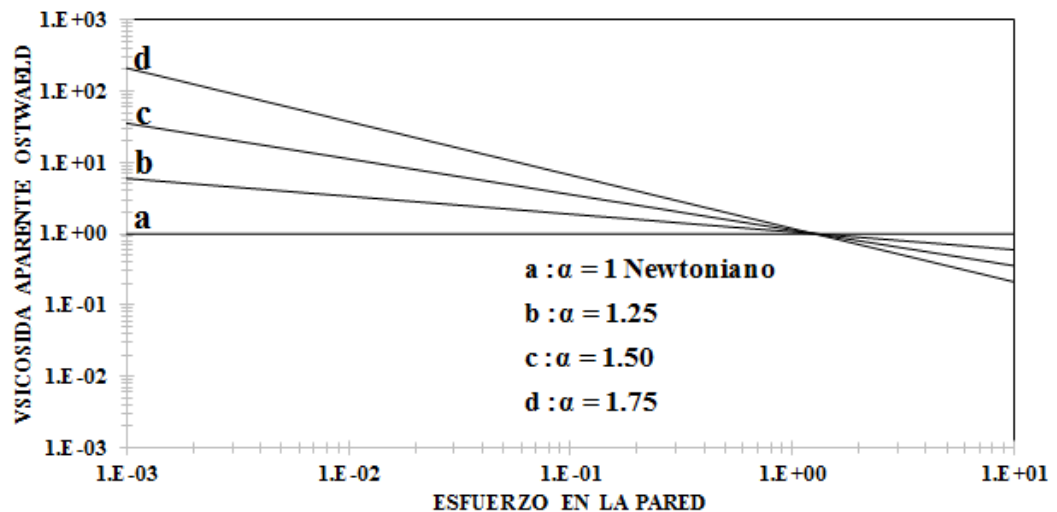


Figura 11. Ilustra la viscosidad aparente como función del esfuerzo en la pared para un fluido adelgazante que es caracterizado con el modelo de Ostwald.

En la Fig. 11 se ilustra la viscosidad aparente como función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del exponente alfa del modelo de Ostwald. Se



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

observa que para alfas distintos de 1, i.e., $\alpha \neq 1$, el sistema muestra un comportamiento lineal decreciente lo que implica que conforme se deforma el material continua e irreversiblemente, la viscosidad aparente del material decrece en toda la ventana de observación. Nótese que al aumentar el valor del exponente alfa, el fluido se hace más adelgazante al corte, i.e. el sistema pasa de estados de mayor a menor viscosidad por efecto del corte inducido por el esfuerzo en la pared que depende a su vez del gradiente de presión. Físicamente, se puede pensar que un líquido entre más adelgazante sea contribuye a que fluya mejor el material por el medio poroso, sin embargo esta relación no es directa y deben tomarse en cuenta otros factores como son: (i) la distribución del poro, (ii) el tamaño de partícula, (iii) los poros interconectados y (v) la naturaleza compleja de la estructura del fluido que se esté analizando.

6.2.2 Modelo de Ellis.

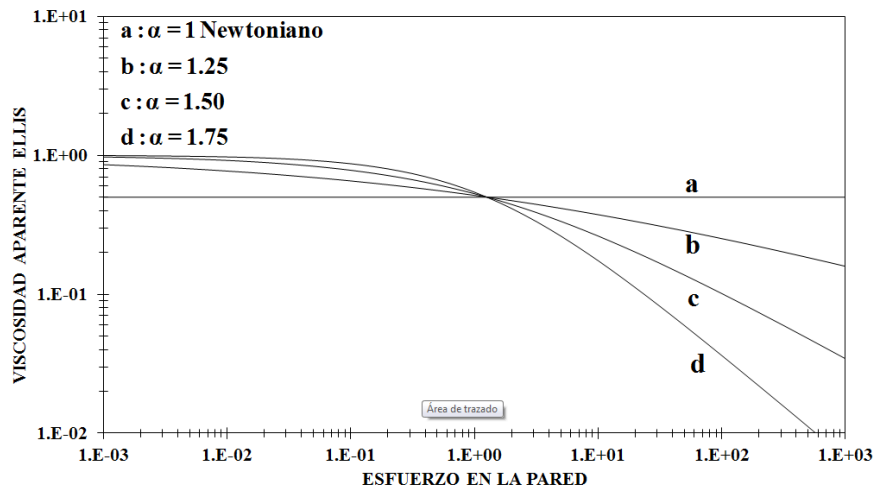


Figura 12. Ilustra la viscosidad aparente del modelo de Ellis como función del esfuerzo para un fluido adelgazante.

La Fig.12 muestra la viscosidad aparente del modelo de Ellis vs esfuerzo en la pared para diferentes valores del exponente α . Para facilitar los cálculos se propusieron el siguiente conjunto de variables adimensionales para la viscosidad y el esfuerzo cortante:

$$\eta_{ap}^* = \frac{\eta_{ap}}{\eta_c} = \frac{\eta_{ap}}{\eta_0} ; \quad \sigma_w^* = \frac{\sigma_w}{\sigma_c} = \frac{\sigma_w}{\alpha^{-1} \sqrt{\phi_0 / \phi_1}}$$

Sustituyendo estas variables en la función viscosidad, se tiene lo siguiente:

$$\eta_{ap}^* = \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}}$$

A valores bajos de esfuerzo en la pared, se observa que el modelo de Ellis presenta una meseta en donde la viscosidad es constante, sin embargo, para un cierto esfuerzo en la pared crítico, la viscosidad aparente del sistema decrece monótonamente hasta un cierto valor finito. Es importante resaltar, que los cambios en las pendientes (b-d) están asociados con las propiedades adelgazantes al corte del fluido. Físicamente, a bajos esfuerzos de la pared el fluido presenta una estructura compacta independiente del esfuerzo en la pared, sin embargo a un cierto esfuerzo en la pared crítico el sistema experimenta constantes rompimiento en su estructura por efecto del flujo. Esta zona intermedia se conoce como zona de ley de potencia, y el modelo de Ellis se reduce al de Ostwald:

$$\eta_{ap}^* \approx \frac{1}{\frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}} = \frac{\alpha+3}{4} (\sigma_w^*)^{1-\alpha}$$

Nótese que cuando el exponente alfa tiende a uno, el valor de la viscosidad aparente tiene a la mitad del valor newtoniano, i.e. $\eta_{ap}^* = 1/2$.

6.2.3 Modelo de Reiner Philippoff.

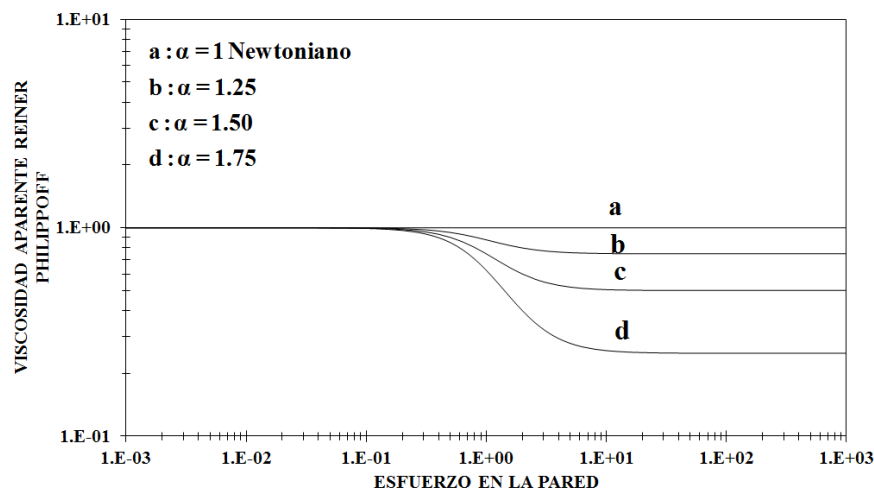


Figura 13. Ilustra la viscosidad aparente del modelo de Reiner Philippoff como función del esfuerzo en la pared para un fluido adelgazante.

La Fig.13 muestra la función viscosidad del modelo de Reiner Philippoff como función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

exponente alfa. Para facilitar los cálculos computacionales y simulaciones al igual que en el modelo de Ellis, se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\eta_{ap}^* = \frac{\eta_{ap}}{\eta_c} = \frac{\eta_{ap}}{\eta_0}; \quad \sigma_w^* = \frac{\sigma_w}{\sigma_c} = \frac{\sigma_w}{\sigma_s}$$

Al sustituir estas variables adimensionales en el modelo de Reiner Philippoff se obtiene la viscosidad aparente adimensional:

$$\eta_{ap}^* = \frac{\sigma_w^{*3}}{\sigma_w^{*4} + 2(1-\varphi)\sigma_w^{*2} + 2\varphi^2 \text{Ln} \left| 1 + \frac{\sigma_w^{*2}}{\varphi} \right|}$$

En la Fig. 13 se observa que a valores bajos de esfuerzo en la pared, la viscosidad aparente muestra dos zonas constantes y una zona intermedia tipo ley de potencia. A valores de esfuerzo en la pared bajos, el modelo de Reiner Philippoff presenta un comportamiento constante. El valor de esta meseta puede ser determinado mediante el siguiente límite:

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} \eta_{ap}^* = \lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} \frac{\sigma_w^{*3}}{\sigma_w^{*4} + 2(1-\varphi)\sigma_w^{*2} + 2\varphi^2 \text{Ln} \left| 1 + \frac{\sigma_w^{*2}}{\varphi} \right|} = 1$$

En este punto, i.e. a valores bajos de esfuerzo en la pared, el sistema presenta una estructura compacta en donde se presenta la mayor cantidad de puntos estructurales en el sistema. Por otra parte, a un cierto esfuerzo crítico, el fluido presenta un comportamiento monótono creciente con una pendiente cercana a la unidad y experimenta constantes cambios y orientación en su estructura inducida por el flujo. Por último, a esfuerzos en la pared elevados, la viscosidad aparente presenta una segunda zona newtoniana en donde la estructura del sistema está completamente destruida y es equiparable a la del solvente. El valor matemático de la viscosidad aparente del modelo de Reiner Philippoff puede ser calculado mediante la siguiente expresión:

$$\lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} \eta_{ap}^* = \lim_{\sigma_w^* \rightarrow 0} \frac{\tau^3}{\tau^4 + 2(1-\varphi)\tau^2 + 2\varphi^2 \text{Ln} \left| 1 + \frac{\tau^2}{\varphi} \right|} = \varphi$$

Esto implica que el valor de límite asintótico a levados esfuerzos está determinado por el número adimensional φ el cual, es un cociente de fluidez.

6.3 Velocidad axial adimensional

En esta sección, se presentan los perfiles de velocidad de los modelos de Ellis y Reiner Philippoff respectivamente. Como caso particular del modelo de Ellis, se discuten los perfiles de velocidad del modelo de Ostwald y de Newton respectivamente.

6.3.1 Modelo de Ellis

Para simular el perfil de velocidades del líquido de Ellis, se utilizan las mismas variables adimensionales definidas en la función viscosidad, por lo que el perfil de velocidades toma la forma:

$$V_z^*(\xi) = \frac{1}{2} \sigma_w^* (1 - \xi^2) + \frac{1}{\alpha + 1} \sigma_w^{*\alpha} (1 - \xi^{\alpha+1})$$

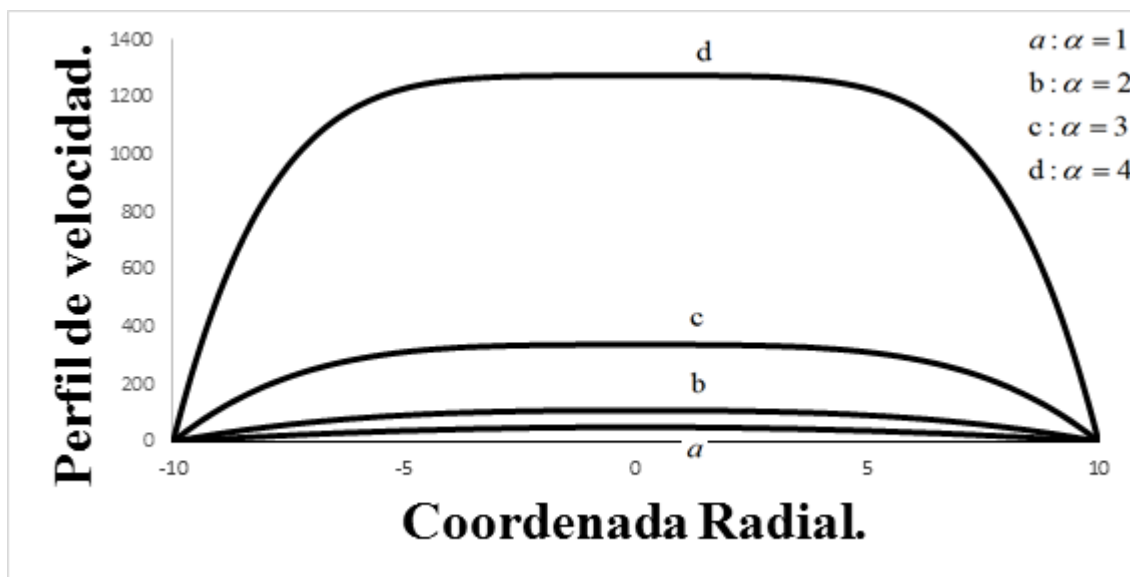


Figura 14. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radial para diferentes valores del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig. 14, se simula la velocidad axial en función de la coordenada radial dimensional para valores distintos del parámetro alfa en el modelo reológico de Ellis. Matemáticamente, en la simulación el perfil es parabólico sin embargo cuando el parámetro alfa aumenta hasta un valor crítico. Observarse que en el intervalo $R = \{-4,4\}$ se forma un frente homogéneo de velocidades, es decir las velocidades de los elementos materiales son las mismas. También es claro, como en el caso newtoniano el fluido en las paredes del capilar, cumple la condición de frontera de adherencia del fluido al sólido. Nótese, que no se observa un máximo puntual como el del caso newtoniano sino que una región de máximos.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

Físicamente, en las paredes del capilar el sistema es dominado por un flujo cortante el cual está determinado por el gradiente de presión y por el valor del radio del capilar, mientras que en el centro el frente homogéneo de velocidad es constante debido a las propiedades materiales del fluido no newtoniano (adelgazamiento al corte). Un punto importante es la diferencia significativa entre el valor máximo del perfil de velocidades de un fluido newtoniano y uno no newtoniano (Ellis).

6.3.2 Modelo de Ostwald.

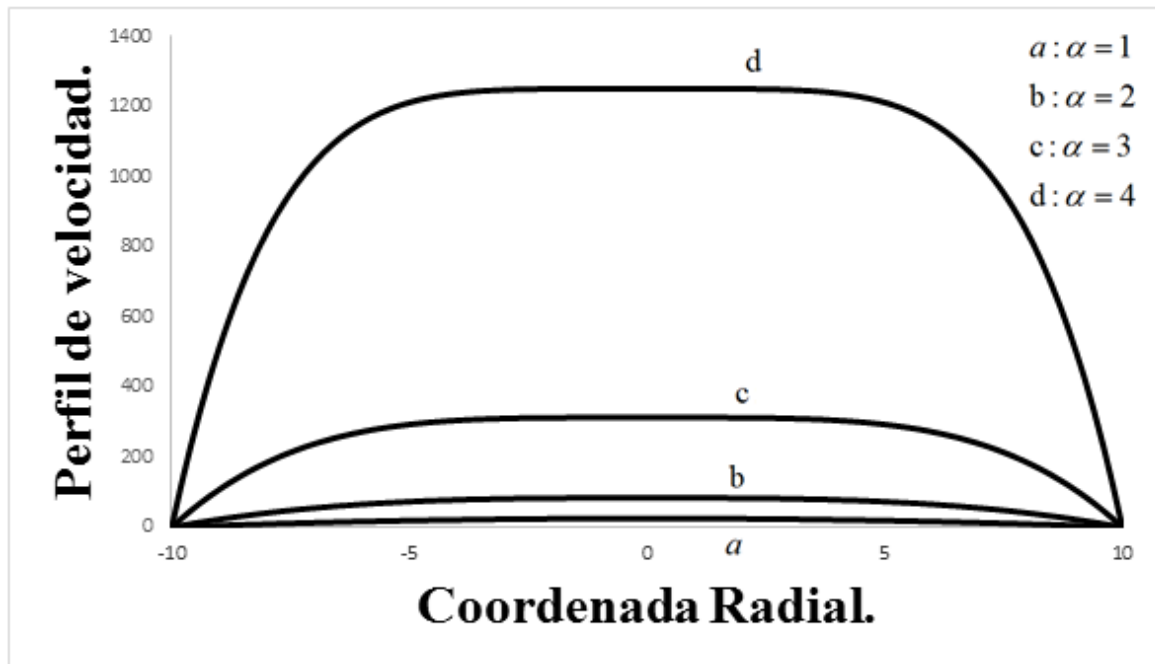


Figura 15. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radia para diferentes valores del índice alfa asociados a los mecanismos adelgazantes.

En la Fig. 15, se simula la velocidad axial en función de la coordenada radial dimensional para valores distintos del parámetro alfa del modelo reológico de Ostwald de Waele.

Matemáticamente, en la simulación el perfil es parabólico sin embargo cuando el parámetro alfa aumenta hasta un valor crítico. Observarse que en el intervalo $R = \{-4,4\}$ se forma un frente homogéneo de velocidades, es decir las velocidades de los elementos materiales son las mismas. También es claro, como en el caso newtoniano el fluido en las paredes del capilar, cumple la condición de frontera de adherencia del fluido al sólido. Nótese, que el perfil de velocidad de Ostwald de Waele y de Ellis muestra un comportamiento cualitativo semejante pero cuantitativamente es diferente. Comparando las gráficas de los dos fluidos,



Ulises Hernández Castellanos

se observan valores mayores de velocidad en el fluido de Ellis en comparación con los de Ostwald de Waele. Esto se debe a que Ellis es la suma de dos contribuciones asociadas al modelo de Newton y al modelo no newtoniano de ley de potencia el cual describe la zona de transición de estados de mayor a menor viscosidad en un curva de flujo. Físicamente, en las paredes del capilar el sistema es dominado por un flujo cortante el cual está determinado por el gradiente de presión y por el valor del radio del capilar, mientras que en el centro el frente homogéneo de velocidad es constante debido a las propiedades materiales del fluido no newtoniano (adelgazamiento al corte). Un punto importante es la diferencia significativa entre el valor máximo del perfil de velocidades de un fluido newtoniano y uno no newtoniano (Ellis).

6.3.3 Modelo de Newton.

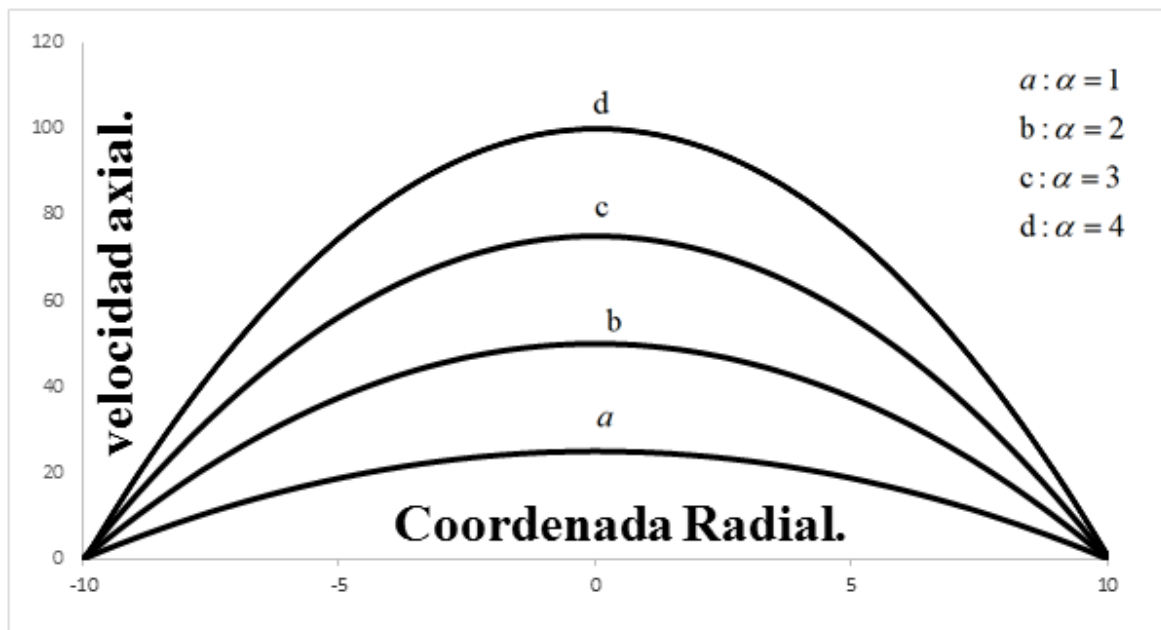


Figura 16. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radial para diferentes valores del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig. 16, se simula la velocidad axial en función de la coordenada radial dimensional para valores distintos del parámetro alfa. Matemáticamente, En todos los casos se observa el clásico perfil parabólico descrito en la vasta literatura de fenómenos de transporte y reología. Es claro que en las paredes del capilar, el fluido cumple la condición de frontera de adherencia del fluido al sólido (condición de no deslizamiento). Obsérvese que en $R=0$ el sistema alcanza el máximo el cual tiene una representación analítica y está determinado completamente por un acoplamiento entre las propiedades newtonianas del sistema, las cuales son el radio del capilar, la viscosidad, inverso de la fluidez y la

Ulises Hernández Castellanos

fuerza motriz asociado al gradiente de presión. Físicamente, el efecto del gradiente de presión induce que las capas de fluido se vayan desfasando en forma de parábolas asociadas con el flujo laminar. Evidentemente en las paredes el sistema es dominado por un flujo cortante el cual está determinado por el gradiente de presión y por el valor del radio del capilar mientras que en el centro donde la velocidad es máxima el esfuerzo es cero debido a que la velocidad es máxima. Este efecto cambia drásticamente la reología y el flujo cuando se trata de un fluido no newtoniano.

6.3.4 Modelo de Reiner Philippoff.

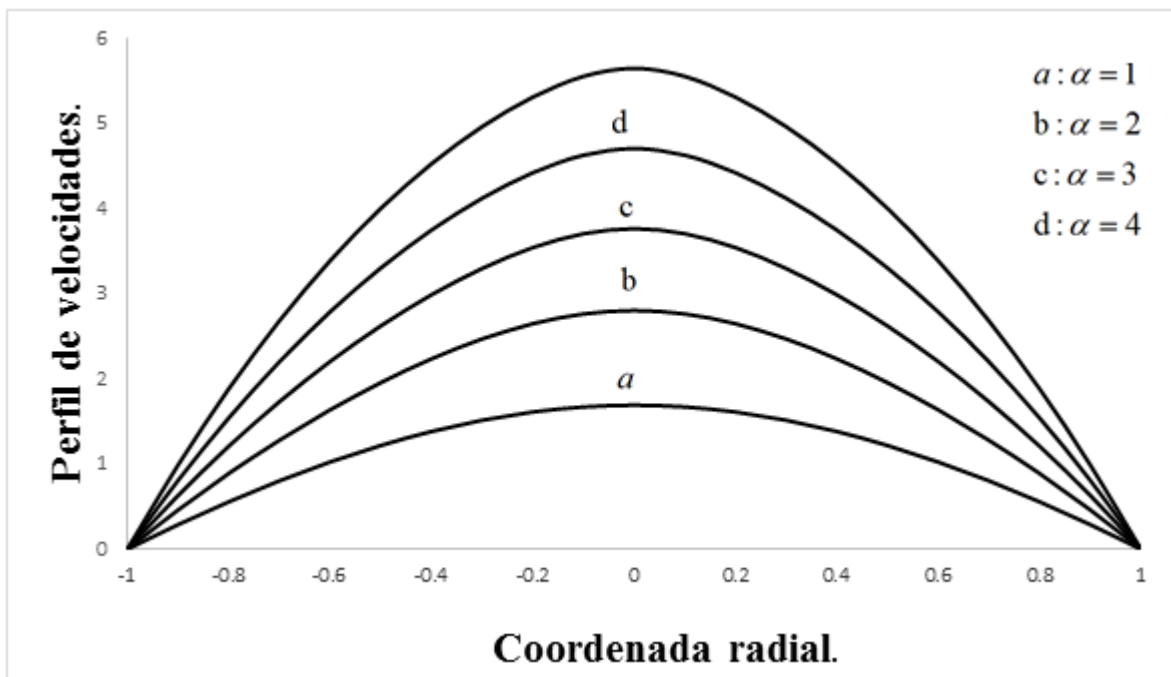


Figura 17. Ilustra la velocidad axial vs coordenada radial para diferentes valores del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte.

En la Fig. 17, se simula la velocidad axial en función de la coordenada radial dimensional para valores distintos del parámetro alfa en el modelo de Reiner Philippoff. Matemáticamente, En todos los casos se observa el clásico perfil parabólico al igual es claro que en las paredes del capilar, el fluido cumple la condición de frontera de adherencia del fluido al solido (condición de no deslizamiento). Obsérvese que en $R=0$ el sistema alcanza el máximo el cual tiene una representación analítica y está determinado completamente por un acoplamiento entre las propiedades newtonianas del sistema, las cuales son el radio del capilar, la viscosidad, y la fuerza motriz asociado al gradiente de presión así como los parámetros η y σ_s que están asociado la fluidez del material. Este modelo describe las dos zonas newtonianas y una zona intermedia tipo ley



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



de potencia. Físicamente, el efecto del gradiente de presión induce que las capas de fluido se vayan desfasando en forma de parábolas asociadas con el flujo laminar. Por otra el parámetro η está asociado con las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte. Si η es mayor que 1 significa que el fluido presenta rompimiento en su estructura por lo tanto el sistema pasa de estados de mayor viscosidad a menor viscosidad por efecto del flujo. Por otra parte, cuando η es mucho menor que 1 la viscosidad a altos cortes es mayor que a menores cortes por lo que el fluido presenta estados de menor velocidad por efectos del flujo. Esto implica que su estructura se compacta más por lo que el número de puntos estructurales o entrecruzamientos físico aumenta y por ende la viscosidad.

6.4 Velocidad superficial.

6.4.1 Modelo de Ostwald.

Las Figs. 18-20 muestran la velocidad superficial V_0 (velocidad volumétrica de flujo a través de la unidad de área de la sección del sólido más el fluido) promediada en una pequeña región del espacio (pequeña con respecto a las dimensiones macroscópicas del sistema de flujo pero grande con respecto al tamaño con respecto al tamaño del poro). La Fig. 18 muestra la velocidad superficial de flujo en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del exponente alfa asociado con las propiedades adelgazantes o engrosantes al corte. Es claro que la velocidad superficial de flujo sigue una relación de tipo lineal con el esfuerzo en la pared y su pendiente está asociada a los mecanismos de tipo adelgazante. A esfuerzos en la pared bajos y moderados, la máxima velocidad superficial se obtiene con el fluido newtoniano. Sin embargo, a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared, los mecanismos adelgazantes contribuyen a la velocidad superficial de flujo y dominan sobre el líquido newtoniano.

6.4.2 Modelo de Ellis.

La Fig. 19 ilustra la velocidad superficial en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del exponente alfa. Como en el modelo de Ostwald, el de Ellis muestra dos zonas predominantes. A bajos valores del esfuerzo en la pared, la relación entre la velocidad superficial y el gradiente de presión es lineal. Es claro, a bajos esfuerzos en la pared los mecanismos adelgazantes no juegan un papel clave en la velocidad superficial de flujo. Sin embargo, a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared, los mecanismos dominantes son los adelgazantes al corte debido a que se tiene un fluido desestructurado lo que facilita el flujo del líquido por el medio poroso.

6.4.3 Modelo de Reiner Philippoff.

Finalmente, la Fig. 20 muestra la velocidad superficial de flujo en función del esfuerzo en la pared para diferentes valores del parámetro φ asociado con las propiedades adelgazantes y engrozantes al corte del fluido. El caso newtoniano (a) muestra una relación lineal entre la velocidad superficial de flujo y el esfuerzo en la pared. En el caso de un fluido adelgazante al corte $\alpha \neq 0$ el sistema, muestra un comportamiento monótono creciente y a un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared, el sistema presenta un cambio de pendiente en donde, la velocidad superficial de flujo aumenta considerablemente su valor seguido de un comportamiento lineal. Se observa que las simulaciones (b-d) tienen comportamientos muy similares y que básicamente los mecanismos adelgazantes contribuyen en la velocidad superficial de flujo. En resumen, se tiene los siguientes puntos importantes:

- a) El fluido newtoniano muestra una relación superficial entre la velocidad volumétrica de flujo y el esfuerzo en la pared.
- b) En los fluidos no newtonianos considerados en esta tesis, existen dos zonas. Una en donde la velocidad de flujo es dominada por los mecanismos viscosos constantes, en donde los esfuerzos en la pared son bajos, y otra en donde los mecanismos adelgazantes al corte promueven aumentos en la velocidad superficial V_0 .

Modelo de Ostwald.

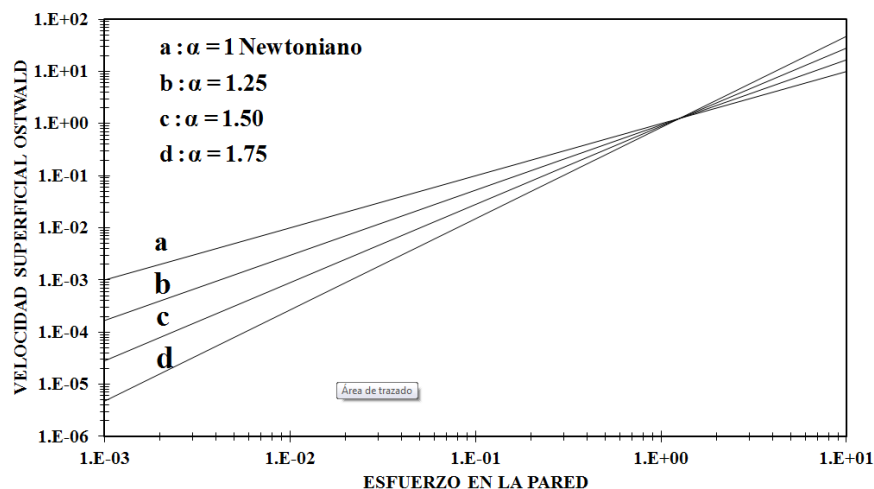


Figura 18. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Ostwald vs esfuerzo en la pared adimensional como función del índice alfa asociado a los mecanismos adelgazantes al corte.



Modelo de Ellis.

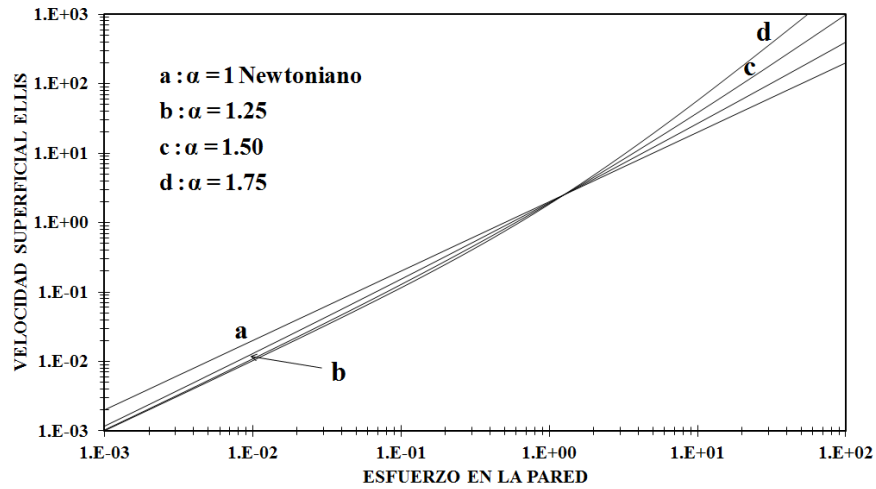


Figura 19. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Ellis vs esfuerzo en la pared adimensional como función del índice alfa asociad a los mecanismos adelgazantes al corte.

Modelo de Reiner Philippoff.

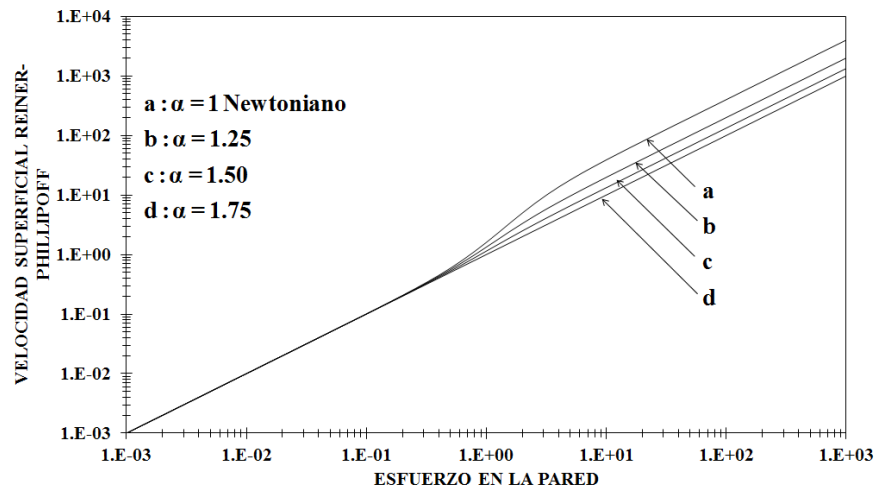


Figura 20. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Reiner Philippoff vs el esfuerzo en la pared adimensional en función de los mecanismos adelgazantes al corte.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

6.5 Ajuste de datos reométricos mediante el modelo de Ellis, para las soluciones micelares acuosas de CTAT/0.0001 M KBr y CTAT/0.0001 M (COONa)₂.

En esta sección se presentan resultados de la velocidad superficial de flujo para un fluido complejo que se estructura y orienta por efecto del flujo. En particular, se analiza un sistema micelar CTAT con dos concentraciones de sal diferentes. Como se describió en el capítulo 2, los sistemas micelares son compuestos de miles de decenas de agente tensoactivo los cuales, forman estructuras dependientes de la concentración micelar crítica.

Concentración	φ_0	φ_1	η_0	α	m	Tipo de fluido
1.1 CTAT (COONa) ₂	13.5869	11.2456	0.5	2	0.2982	Adelgazante
1 CTAT (COONa) ₂	41.6666	34.8383	0.68	1.4705	0.0814	Adelgazante

Tabla 5. Muestra los parámetros reométricos utilizados para el cálculo de la permeabilidad intrínseca en el modelo de Ellis.

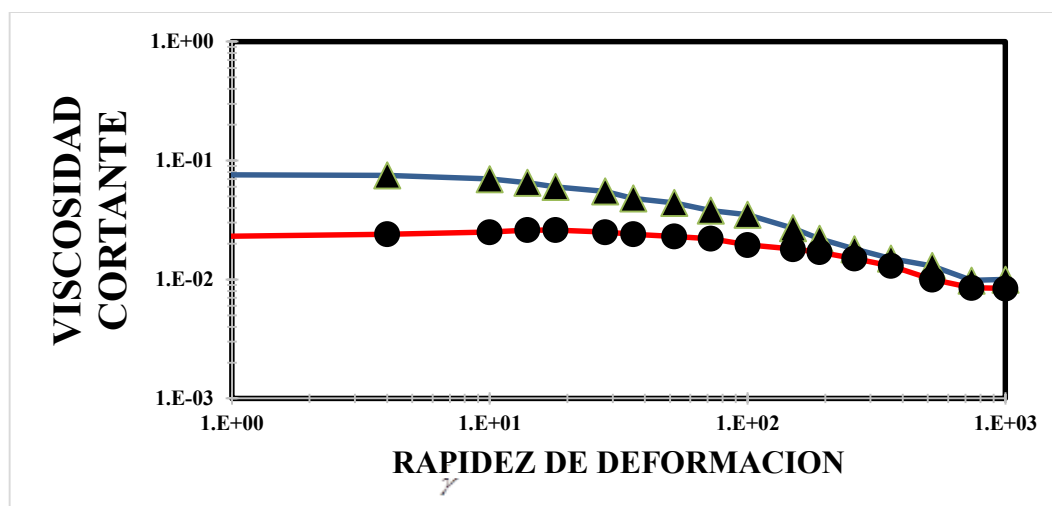


Figura 21. Viscosidad vs rapidez de deformación para el tensoactivo CTAT con KBr y COONa.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

En la fig. 21 se muestran los comportamientos a y b corresponde a un fluido adelgazante al corte, es decir a baja rapidez de deformación el sistema muestra un comportamiento constante. Para un valor crítico en la rapidez de deformación, el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente en donde físicamente el sistema sufre un constante rompimiento en su estructura y por ende su viscosidad decrece de acuerdo a una ley física tipo potencia. Para un segundo valor crítico en el la rapidez de deformación, el sistema presenta otra zona newtoniana, es decir el fluido en este punto tiene un estructura destruida equiparable con la viscosidad del solvente. Por otra parte, las tendencias c y d corresponden a un fluido engrozante al corte, este tipo de fluido muestra un comportamiento constante a baja rapidez de deformación. A su vez para el valor crítico en la rapidez de deformación, el sistema muestra un comportamiento monótono creciente en donde el sistema sufre un rompimiento en su estructura aumentando su viscosidad. Análogamente para el segundo valor crítico en la rapidez de deformación se presenta una zona Newtoniana.

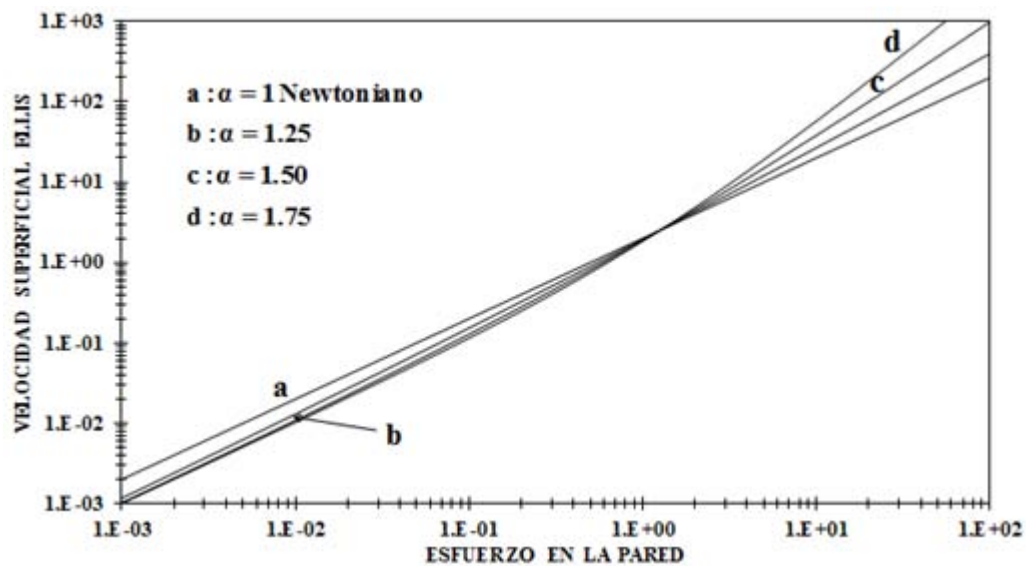


Figura 22. Ilustra la velocidad superficial de flujo del modelo de Ellis vs el esfuerzo en la pared adimensional en función de los mecanismos asociados al corte.

En la Fig. 22, se simula la permeabilidad vs diferencia de presión para diferentes soluciones acuosas de CTAT/0.0001 M KBr y CTAT/0.0001 M (COONa)₂.

Matemáticamente, se observa dos zonas predominantes; una de ellas se presenta cuando el fluido es adelgazante al corte, la permeabilidad intrínseca muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor asintótico, mientras que a valores de alfa menores a uno el comportamiento es monótono



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



decreciente seguido de una asíntota, debido a las propiedades engrosantes al corte. Físicamente, el efecto de los mecanismos no-newtonianos del valor alfa (parámetro relacionado con las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte), esto implica que cuando el fluido es engrosante, la viscosidad aumenta por efecto del corte, por lo que, el valor de la permeabilidad tiende a disminuir conforme aumenta la diferencia de presión y de forma análoga, cuando el fluido es adelgazante su viscosidad disminuye teniendo valores de permeabilidad creciente por la facilidad de fluir debido al efecto de corte.



**ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN
MEDIO POROSO**

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES



7.1 Resumen y principales contribuciones.

En este trabajo se estudió la permeabilidad teniendo mediante un modelo generalizado de Darcy, el cual se basa en la teoría del poro promedio. Esta teoría, considera que todos los poros son iguales y pueden ser modelados por un conjunto de capilares de radio $r = a$ y longitud axial $z = L$. Para caracterizar el sistema (fluidos newtonianos y no newtonianos), se emplean cuatro ecuaciones constitutivas que describe la relación entre el esfuerzo y la deformación, llamadas: (i) Modelo Newtoniano, (ii) Modelo de Ostwald, (iii) Modelo de Ellis, y (iv) Modelo de Reinner Pillippoff. Los modelos empleados, fueron seleccionados primeramente por su simplicidad (modelo Newtoniano) y se continuó con modelos no lineares con el fin, de representar toda la curva de viscosidades de un sistema real y poder visualizar otras propiedades que con modelos simples no es posible (Modelo de Newton). Suponiendo estado estacionario (las propiedades dinámicas del sistema no son función del tiempo), fluido incompresible (densidad constante), fuerzas externas despreciables (efectos gravitacionales y cualquier otra tipo de fuerza), En todos los casos, se deducen expresiones analíticas para: (i) flujo volumétrico, (ii) perfil de velocidades, (iii) velocidad superficial, (iv) viscosidad aparente. Como primera aproximación se modelo el flujo en un medio poroso, suponiendo que el fluido es newtoniano (un fluido newtoniano es aquel que no importa que tan rápido sea deformado su viscosidad permanece constante). En este caso, la permeabilidad de un fluido newtoniano es una función de la porosidad y del cuadrado del poro.

Las propiedades no newtonianas del sistema están encapsuladas en la función viscosidad aparente del modelo generalizado. Para el modelo Newtoniano se observa que es una constante independiente del esfuerzo en la pared. Por otra parte, el modelo de Ostwald describe los mecanismos adelgazantes y engrosantes al corte a través de las propiedades materiales del sistema y de la fuerza motriz asociada con el gradiente de presión y el radio del capilar respectivamente. La función viscosidad del modelo de Ellis acopla el modelo de Newton y el de Ostwald, es decir describe a bajos cortes una zona constante (newtoniana) y una zona adelgazante al corte en donde se presenta una destrucción de la estructura por efecto del flujo respectivamente. Por último la función viscosidad del modelo de Reinner-Phillippoff describe el reograma completo, es decir, dos zonas a baja y alto corte respectivamente y una zona intermedia tipo ley de potencia.

La velocidad superficial V_0 da información acerca del medio poroso. Como se demostró esta variable dinámica depende de la permeabilidad del medio, de la viscosidad aparente y de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión. La función viscosidad nos da información acerca de los mecanismos no newtonianos adelgazantes y engrosantes al corte respectivamente. En el caso de un fluido



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



newtoniano la velocidad superficial describe un comportamiento lineal con respecto al gradiente de presión, sin embargo cuando el fluido presenta adelgazamiento al corte, la pendiente de la velocidad superficial cambia y por ende existe un aumento asociado a las propiedades no newtonianas.

Los resultados implican que la velocidad superficial se ve modificada por efecto de la permeabilidad intrínseca y de las propiedades materiales de los cuatro modelos no newtonianos que describen el flujo y la reología en el sistema. Por último se utilizaron datos reométricos de un tensoactivo con el fin de calcular las propiedades dinámicas del sistema.

Finalmente, los resultados y las predicciones de nuestro modelo han sido alimentados con datos micelares tipo gusano, concuerdan con la teoría antes expuesta. Todos estos cálculos permitieron tener un mejor entendimiento del efecto de las variables en la velocidad superficial al pasar un fluido en un medio poroso.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



CAPÍTULO VIII

TRABAJO FUTURO



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



8.1 Modelos viscoelásticos de orden superior.

En el estudio de la mecánica del medio continuo, los fluidos no newtonianos es un término que incorpora una variedad de fenómenos complejos. Estos fenómenos son extremadamente complejos y requieren un nivel sofisticado de modelos y técnicas para su descripción matemática. Además esta complejidad aumenta cuando se trata de describir el flujo y las propiedades de transporte a través de un medio poroso. El medio poroso, presenta dos dificultades la forma del poro y las interconexiones topológicas. Debido a estos fenómenos, estamos lejos de desarrollar una teoría que se ajuste a la descripción de fluidos no newtonianos. Sin embargo, solo alguno de los modelos mencionados ha tenido éxito en la descripción del flujo en un medio poroso. Esta problemática es difícil que cambie en un futuro y muchos retos están esperando respuesta a esta problemática. En la ausencia de una aproximación general que sea apropiada para todas las situaciones posibles, quizá una combinación de todas estas pueda ayudar a resolver la problemática física en la descripción de fluidos no newtonianos en medios porosos.

Actualmente la descripción del medio poroso mediante redes es la manera más realista de modelar los fluidos no newtonianos en medios porosos. Mientras que esta técnica es capaz de predecir el comportamiento promedio del transporte en estos sistemas complejos, todavía es incapaz de predecir mucho de los fenómenos complejos dependientes e independientes del tiempo como son: (i) Flujo cortante, (ii) Flujo extensional, (iii) Adelgazamiento al corte, (iv) Engrosamiento al corte, (v) Tixotropía, (vi) Reopexia o (vii) inestabilidades de flujo como es el bandeo.

El camino a seguir es mejorar las estrategias en el modelado y las técnicas matemáticas utilizadas. Un camino sería mejorar la definición del espacio que ocupa el poro y su tamaño. Modelar el poro mediante elementos geométricos que puedan describir la convergencia o divergencia del flujo con diferentes geometrías. La realidad actual es que la geometría es amorfa y la interconexión entre los poros debe ser tomada en consideración para una descripción exitosa y realista del campo de velocidades y del flujo en donde, la viscosidad extensional, viscosidad extensional y la combinación de ellas juega un papel importantísimo en la descripción del flujo. Finalmente para describir la física de estos sistemas, se necesita poner el énfasis en la configuración del poro.

En este apartado, se mencionan algunos posibles estudios y aplicaciones de la permeabilidad de fluidos no newtonianos en un medio poroso en diferentes ramas de las ciencias. Estos podrían ser una continuación natural de la presente investigación:



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



- a) Modificar la geometría del sistema de tal modo que el medio poroso llegue a tener una similitud a lo que se presenta en la realidad. Primeramente modificarlo a una geometría no simétrica (amorfa) que se aproximen a lo que se presenta en la naturaleza (referencia fractales en medios porosos; Petroleum engineering science 2014).
- b) Trabajar con diferentes ecuaciones constitutivas en el régimen viscoelástico no lineal (Tanner, Pan-Tien, Oldroyd, Iesekus), para poder obtener resultados que incluyen los efectos elásticos y viscoelásticos del material.
- c) A partir de mediciones reométricas de sistemas micelares (CTAT, EAC) con el fin de predecir el comportamiento de nuestro sistema, con datos extraídos del experimento a través de experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario.
- d) En la extracción de petróleo aplicar el conocimiento adquirido para soluciones micelares de mezclas tensoactivos catiónicos o aniónicos, utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo. Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación. Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación mejorada por métodos químicos se constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recobro en los yacimientos.
- e) Aplicar el conocimiento adquirido (Ecuaciones teóricas) en el modelado de sistema que presentan porosidad. En este punto, se propone extender este trabajo a sistemas biológicos, como son los encontrados en flujo pulsátil sanguíneo y la dinámica oscilatoria de las células ciliadas externas, por citar algunos.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



BIBLIOGRAFÍA



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



- Barnes, H.A., Hutton, J.F., & Walters, K. 1989 An introduction to rheology, Amsterdam: Elsevier.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Calderas, F., Sánchez-Solis, A., Maciel, A. & Manero, O. 2009 The transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite, Macromol Symp. MACROMEX 283-284 354-360.
- Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. Phys. Rev. E. 64, 016313/1-7.
- Currie, I.G, 1974 Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill Press.
- Del Rio J.A 1993 Contribuciones teóricas al estudio de los fenómenos de transporte en medios porosos. Ciencia 44, 527-544.
- Del Rio J.A & Castrejón-Pita J.R. 1987 Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Revista Mexicana de Física. 49, 74-85.
- Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. 1998 Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E. 58, 6323.
- García-Colín, L.S. & Rodríguez, R.F. 1991 Fluidos exóticos, Trillas.
- Greenkorn R.A. 1984 Flow Phenomena in Porous Media: Fundamental and Applications in Petroleum, Water and Food Production. Marcel Dekker, New-York
- Herrera-Valencia E.E. & Rey, A, D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. Phil. Trans. R. Soc. A. 372, 20130369/1-28.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. Rheol. Acta 48 779-800.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 174-183.
- Lopez de Haro, M., Del Rio, J.A. & Whitaker, S. 1996 Flow of Maxwell fluids in Porous Media. Transp. Porous Media 25 167-192.
- Kim J.H., Ochoa J.A. & Whitaker, S. 1987 Diffusion in anisotropic porous media. Transp. Porous Media 2 327-356.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO

Ulises Hernández Castellanos



- Middleman, S. Fundamentals of polymer Processing, McGraw-Hill.
- Moreno, L., Calderas, F., Sánchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sánchez-Solís, A. & Manero, O. 2013 La sangre humana desde el punto de vista de la reología. Mater. Avan. 20 33-37.
- Moreno, L., Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2015 Effect of colesterol and triglycerides levels on the rheological behaviour of the human blood. Korea-Australia Rheology Journal.
- Ochoa-Tapia, Del Rio, J.A. & Whitaker, S. 1993 Bulk and surface diffusion in porous media: An application on the surface-averaging theorem. Chem. Eng. Sci. 48 2061-2082.
- Ochoa-Tapia, J.A, 1995 El método del promedio volumétrico para el estudio de difusión en sistemas de varias componentes. Rev. Mex. Fis. 41 451-470.
- Quintard, M. & Whitaker, S. 1997 Transport In ordered and disordered porous media: volume-averaged equations, closure problems, and comparison with experiment. Transp. Porous Media 14 179-206.
- Quintard, M. & Whitaker, S. 1997 Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties. Advances in Water Resources 20 77-94.
- Quintard, M. & Whitaker, S. 1997 Convection, dispersion, and interfacial transport of contaminants: Homogeneous porous media. Advances in Water Resources 17 221-239.
- Wood, B.D., Quintard, M. & Withaker, S. 2002 Calculation of effective difussivities for biofilms and tissues. Biotechnology and Bioengineering 77 495-516.
- Quintanilla, R & Rajagopal, K.R. 2006 On Burgers fluids.Math.Meth. Appl. Sci. 29 2133-2147.
- Rey, A.D. 2007 Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. Soft Matter 2 1349-1368.
- Rey, A.D. 2010 Liquid crystals models of biological materials and processes. Soft Matter 6 3402-3429.
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012a Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (Eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga).
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012b Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. Biopolymers 97 374-396.
- Kozicki W, Tiu C. 1988 A unified model for non-Newtonian flow in packed beds and porous media. Rheol Acta 27 31-38.



ESTUDIO DE LA PERMEABILIDAD DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN UN MEDIO POROSO



Ulises Hernández Castellanos

Chhabra, R.P., Comiti, J. & Machac, I. 1988 Flow of non-Newtonian flow in packed beds and porous media. Rheol. Acta 27 31-38.

Schowalter, W.R. 1978 Mechanics of non-Newtonian fluids. Pergamon Press Inc.

Shenoy, A.V. 1993 Darcy-Forscheimer natural, forced and mixed convection heat transfer in non-Newtonian power-law fluid-saturated porous media. Trans. Porous Media 11 219-241.

Sochi T. 2010, Non-Newtonian flow in porous media. Polymer 51 5007-5023.

Thruston, S. 1976 The effects of frequency of oscillatory flow the impedance of rigid, blood filled tubes. Biorheology 13 191-199.

Whitaker, S. 1966a The equations of motion in porous media. Chem. Eng. Sci. 21 291-300.

Whitaker, S. 1966b Simultaneous heat, mas and momentum transport in porous media: a theory of drying. Adv. Heat Trans 13 119-203.

Whitaker, S. 1967 Diffusion and dispersion in porous media. AIChE 13 420-427.

Whitaker, S. 1987 Flow in porous media I: a theoretical derivation of the Darcy's Law.