



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS  
PARA LA ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

MARCO ANTONIO MANSI CASILLAS

ASESORA:

M. EN C. MAYRA LORENA DÍAZ SOSA

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, EDO. DE MÉXICO

MÉXICO, ABRIL DE 2015.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

“ *Ainsi est-il du cœur de l’homme. Le besoin de faire œuvre qui dure, qui lui survive, est le signe de sa supériorité sur tout ce qui vit ici-bas. C’est ce qui a fondé sa domination, et c’est ce qui la justifie dans le monde entier.* ”

---

Jules Verne, *L’Île mystérieuse*, 1874

# Índice general

<b>Resumen y palabras clave</b>	<b>5</b>
<b>Prefacio</b>	<b>6</b>
<b>Introducción</b>	<b>8</b>
Objetivos . . . . .	9
Delimitación . . . . .	10
Exclusiones . . . . .	10
<b>Símbolos y notación</b>	<b>12</b>
<b>1. Contexto</b>	<b>13</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	13
1.2. Ventajas de los procesos de difusión con saltos . . . . .	14
1.3. Estado del arte . . . . .	16
1.4. Valor en riesgo . . . . .	20
1.5. Métricas bibliográficas . . . . .	27
<b>2. Construcción del modelo</b>	<b>30</b>
2.1. Resultados preliminares . . . . .	30
2.2. Modelo . . . . .	32
2.2.1. Rendimiento . . . . .	32
2.2.2. Rendimiento instantáneo . . . . .	33
2.2.3. Generalización para cualquier $t$ . . . . .	34
2.2.4. Introducción de una ecuación diferencial . . . . .	34
2.2.5. Difusión . . . . .	35
2.2.6. Saltos . . . . .	37
<b>3. Aplicación del modelo</b>	<b>42</b>
3.1. Producto financiero . . . . .	42
3.2. Saltos . . . . .	43
3.3. Parámetros . . . . .	44
3.4. Simulación . . . . .	46

<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>49</b>
4.1. Hipótesis . . . . .	49
4.1.1. Resultados preliminares . . . . .	49
4.1.2. Hipótesis nula . . . . .	51
4.1.3. Prueba de hipótesis . . . . .	52
4.2. Cobertura y análisis . . . . .	54
<b>Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>Referencias</b>	<b>67</b>

## Resumen

Se presenta un modelo de difusión con saltos y su implementación para la simulación de valores de una serie financiera en particular, a saber el tipo de cambio EUR/USD; con esos datos se obtienen sucesiones de valores en riesgo, se evalúa su cobertura incondicional para cuatro niveles de confianza y se comparan contra sucesiones obtenidas a través de dos modelos distintos: difusión pura y paramétrico.

**Palabras clave:** procesos de difusión con saltos, valor en riesgo,  $VaR$ , cobertura incondicional, riesgo de mercado, finanzas,  $It\bar{o}$ .

## Abstract

A jump-diffusion process and its implementation for the simulation of values of a particular financial series, namely the foreign exchange rate EUR/USD, are presented; sequences of values at risk using these data are obtained and tested for unconditional coverage with four confidence levels and compared against sequences obtained through two different models: pure diffusion and parametric.

**Keywords:** Jump-diffusion processes, value at risk,  $VaR$ , unconditional coverage, market risk, finance,  $It\bar{o}$ .

# Prefacio

Esta tesis es producto en buena parte de mi deseo de acercar el obtuso mundo de la investigación científica, en particular el de la matemática aplicada, al que en mi humilde opinión le hace falta literatura pragmática; al apurado mundo de los negocios, que pocas veces se detiene a ver los últimos avances científicos que bien podrían beneficiarlo. Después de todo no se debe investigar por investigar persiguiendo únicamente mayor cantidad de publicaciones y citas ni para satisfacer requerimientos burocráticos. Se debe también tener interés en realizar una investigación útil aún cuando resulte un reto mayor; por otro lado el mundo de los negocios haría bien en interesarse más por la investigación pues es lo que nos hace avanzar como civilización: perpetuar el *status quo* puede resultar en consecuencias catastróficas. La perfección no es un estado inalcanzable es un proceso interminable.

El desarrollo que presento, como en la construcción de cualquier otro modelo, se trata no sólo de aplicar operaciones matemáticas a una expresión dada si no también de comprender la interpretación de cada expresión y sus implicaciones en el modelado. Hay que saber qué quiere decir y cuál es la intención de cada expresión matemática; si no podemos comprender no podemos innovar.

Hice el esfuerzo de presentar los temas de esta tesis de una manera didáctica, intuitiva y tratable y no en el popular estilo de los textos escritos por y para los “iniciados” que suelen ser, en mi opinión, excesivamente densos y difíciles de digerir.

Para lograr obtener el mayor provecho de esta obra será conveniente que el lector tenga conocimientos cuando menos básicos de álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, estadística descriptiva e inferencial, ecuaciones diferenciales, procesos estocásticos, cálculo de Itô, finanzas, administración del riesgo, modelos y simulación.

El que usted, mi querido lector, tenga en sus manos esta tesis es testimonio de que dándole la oportunidad a un vástago, que bajo otras corrientes de pensamiento hubiera sido abandonado a su propia suerte, éste puede alcanzar una vida como la de cualquier otra persona, aportar a la sociedad y dejar frutos tras de sí que quizá servirán de semilla para futuras obras en beneficio de la humanidad.

No cabe duda de que la salud y la educación son pilares de la calidad de vida y los impulsores fundamentales de la movilidad social. Por eso quiero dar mi más sincero agradecimiento a la comunidad del Hospital Shriners México por ofrecerme tratamiento médico gratuito sin el cual

no hubiera logrado caminar. De igual manera al pueblo de México por ofrecerme, a través de la UNAM, educación superior gratuita la cual de ninguna otra forma hubiera logrado obtener.

También agradezco a la propia UNAM y su comunidad por abrirme las puertas y educarme, en particular por considerarme meritorio de las becas del Programa de Fortalecimiento de Estudios de Licenciatura 2008-I, 2008-II, 2009-I, 2009-II, 2010-I y 2010-II y del Programa de Movilidad Estudiantil Internacional a Nivel Licenciatura 2011-II.

Extiendo mis agradecimientos a la Reykjavik University, al Útlendingastofnun y a la comunidad de Islandia por permitirme disfrutar una experiencia altamente enriquecedora y fascinante.

Mi tesis no es un mero requisito burocrático para obtener un título o grado. Se dice que la tesis es la última obra como estudiante y la primera como profesional. Para mí es mucho más: es una gran oportunidad, primero como ser humano y después como actuario, de contribuir a nuestro infinito proyecto de civilización.

Esta obra la he escrito no solamente para mí ni para el distinguido jurado, si no para ti profesional del futuro de donde quiera que seas. Espero sirva de apoyo en cualquier obra en beneficio de los demás.

Gracias.

# Introducción

La ocurrencia de eventos atípicos – en particular aquellos denominados extremos también conocidos como cisnes negros (baja frecuencia y alta severidad) – y las consecuencias que estos conllevan ha sido un problema que ha ocupado cada vez más la atención de varios investigadores, banqueros, operadores, accionistas, reguladores y gobiernos.

En los últimos años se ha experimentado una gran volatilidad en los mercados financieros, en particular durante la crisis financiera de 2007 y 2008; esto ha dado lugar a una discusión sobre los masivos fracasos en la medición y administración de riesgos financieros. [Zhang, Zhou y Zhou \(2013\)](#) sentencian que dicha mala administración de riesgos probablemente surge de ignorar y omitir algunos de los principales factores de riesgo como lo es el riesgo de saltos.

De igual manera la medida de riesgo  $VaR$ , que es el actual estándar regulatorio, ha dejado mucho que desear al no lograr capturar adecuadamente los movimientos de los precios particularmente durante momentos de gran volatilidad ([Zhang y otros, 2013](#)).

Frecuentemente, se recurre a la distribución normal para modelar los log-rendimientos de los productos, sin embargo ésta presenta dos distintivas desventajas: su simetría, es decir no contiene el sesgo que caracteriza a las distribuciones de pérdidas de los log-rendimientos de productos financieros y la concentración de su masa cerca de la media (regla 68-95-99.7); considerando que las densidades empíricas de log-rendimientos de series financieras tienen más masa cerca del origen, menos en los flancos y más en la cola que la distribución normal se observa una subestimación de la frecuencia de eventos extremos y en consecuencia subestimaciones en el valor en riesgo ([Dowd, 2005](#); [Sueishi y Nishiyama, 2005](#)).

En el presente trabajo se estudia una de las formas de subsanar dicha subestimación con el objeto de brindar más información para la toma de decisiones tanto para la operación activa de productos financieros como para la gestión y evaluación del riesgo de mercado.

El acercamiento es a través de procesos de difusión con saltos, los cuales modelan el popular movimiento browniano geométrico utilizado frecuentemente para el cálculo del valor en riesgo con un componente de saltos, a saber un proceso Poisson compuesto con variables aleatorias normales; el componente de difusión representa el comportamiento usual de la serie analizada mientras que el componente de saltos modela aquellos periodos de mayor volatilidad que la difusión no alcanza a capturar.

Este acercamiento al cálculo del valor en riesgo puede ser de gran utilidad para prever el impacto de eventos de gran magnitud y menor frecuencia que los movimientos usuales de los log-rendimientos de los productos financieros.

La tesis encuentra su justificación en el vacío que existe en la literatura sobre este tema. Al realizar una búsqueda el 2 de febrero de 2014 en TESIUNAM (UNAM, 2014) se encontraron 32 trabajos de titulación que tratan de valor en riesgo de los cuales sólo 23 estaban disponibles para su consulta en línea a saber: Arechiga Alvarado (2012); Argüello Gómez (2008); Bucio Pacheco (2012); De Jesús Gutiérrez (2008); Espinoza Ávila (2006); González Moreno (2005); Guerrero Galeana (2001); Ibarra Castillo (2005); Lacayo Linares (2007); López Ávila (2013); López Gonzalez (2012); Luna Arias (2006); Martínez Lira (2000); Membrillo Zarco (2011); Mendoza Delgado (2011); Pedraza Albino (2007); Pérez Pérez (2007); Pérez Reséndiz (2012); Ramos García (2005); Reyes Armendáriz (2001); Rueda Balderas (2001); Sánchez Cervantes (2002); Yañez Salinas (2005); en ninguno de ellos se utiliza algún proceso de difusión con saltos.

Realizando otra búsqueda también en TESIUNAM se encontraron 12 tesis que tratan de Procesos de Lévy, a saber (Agoitia Hurtado, 2010; Contro Prado, 2007; Delgado Vences, 2005; Gachuz Atitlán, 2013; Molina Escobar, 2000; Pardo Millán, 2000); Gachuz Atitlán menciona el uso de un proceso de difusión con saltos en teoría de la ruina y en la tesis de Agoitia Hurtado se encuentra una aplicación en riesgo de crédito para un proceso de difusión con saltos pero en ningún caso los utilizan para estimar valor en riesgo.

No se encontró otro trabajo de titulación de la UNAM que versara sobre los procesos de difusión con saltos y tampoco se encontró alguna fuente que desarrollara o presentara un ejemplo concreto del uso de los procesos de difusión con saltos para el cálculo de valor en riesgo.

De manera que la aportación de esta tesis beneficiará a aquel profesional preocupado por el impacto de saltos en su cartera de inversión, al regulador que desee implementar un nuevo requerimiento al mercado, al profesor que esté interesado en un ejercicio de los resultados principales del cálculo de  $It\bar{o}$  utilizados en este trabajo y al estudiante interesado en estos temas.

## Objetivos

### Objetivo general

Determinar si es posible aplicar procesos de difusión con saltos para la obtención de una sucesión de valores en riesgo de un producto financiero específico con base en su cobertura incondicional correcta y, en su caso, comparar la sucesión obtenida contra otras halladas a través de diferentes metodologías.

## Objetivos particulares

1. Indagar sobre los usos de los procesos de difusión con saltos en finanzas.
2. Construir un modelo para simular el rendimiento de un producto financiero utilizando procesos de difusión con saltos.
3. Segregar cambios atípicos de cambios regulares en el rendimiento de un producto financiero.
4. Determinar los parámetros del modelo.
5. Determinar y analizar la cobertura de la sucesión de valores en riesgo.
6. Comparar la sucesión obtenida contra otras halladas a través de diferentes metodologías.

## Delimitación

Esta tesis no tiene la intención de presentar un resumen y mucho menos un compendio de los principales resultados, definiciones y aplicaciones de los procesos de Lévy ni de cálculo de Itô. Se limita a mencionar únicamente aquellos requeridos para cumplir el objetivo el cual es una implementación específica de un proceso particular. Si el lector desea conocer más resultados y ejemplos de las aplicaciones de procesos estocásticos en las finanzas es remitido a [Cont y Tankov \(2004\)](#) y [Steele \(2001\)](#); un relato sistemático de los principales resultados del cálculo de Itô lo puede encontrar en [Gihman y Skorohod \(1972\)](#) aunque los anteriores no son los únicos libros dedicados al tema y no están dirigidos a un público principiante por lo que quizá acudir a literatura introductoria resulte benéfico.

## Exclusiones

Es importante advertir al lector de lo que no encontrará en este trabajo. Esta tesis de ninguna manera es un compendio, una compilación ni un estudio exhaustivo de valor en riesgo en general ni de *backtesting*, *stresstesting* o pruebas de hipótesis en particular. Tampoco es un estudio exhaustivo del cálculo de Itô ni de los procesos de difusión con saltos.

Los siguientes temas no son tratados en esta tesis al estar fuera de su alcance y exceder sus propósitos:

- Otros tipos de riesgo, incluyendo riesgo de crédito.
- Valuación de activos.
- Valuación de pasivos.
- Cálculos de reservas.

- Otros aspectos de los activos financieros: liquidez, eficiencia, costos, accesibilidad, aspectos operacionales, fiscales y aspectos contables (como clasificaciones bajo NIF y IFRS).
- Pronóstico de series de tiempo financieras incluyendo rendimientos de productos financieros, índices bursátiles y variables macroeconómicas.
- Otros métodos matemáticos incluyendo: Box-Jenkins, ARIMA, ARCH, GARCH, innovaciones, teoría de valores extremos, cópulas, Ornstein Uhlenbeck y *mean reversion*.
- Métodos y estrategias de especulación y arbitraje como *day trading* y *speed trading*.
- Análisis de sensibilidad.
- Análisis fundamental.
- Requerimientos y modelado de capital.
- Teoría de la ruina.

La estructura de la tesis es como sigue:

En el capítulo 1 el lector encontrará una breve reseña sobre el origen y usos de los procesos de difusión con saltos en finanzas, sus ventajas y los últimos avances en este campo de investigación; también encontrará la definición e interpretación de valor en riesgo y algunas menciones de este concepto en la regulación financiera; finalmente se presentan algunos valores bibliométricos de estos temas los cuales muestran su relevancia en el mundo académico.

En el capítulo 2 se menciona un par de resultados principales del cálculo de Itô y se presenta el proceso de difusión con saltos partiendo de una función equivalente a la conocida e intuitiva función de interés compuesto hasta llegar a la ecuación diferencial estocástica en cuestión y su solución, proceso estocástico sobre el que gira esta tesis.

En el capítulo 3 se encuentra todo lo necesario para la aplicación del modelo: el producto financiero y la fuente de sus datos, el método para segregar los saltos, la determinación de los parámetros y el algoritmo utilizado para la simulación.

En el capítulo 4 se presenta la hipótesis nula, se exponen los resultados obtenidos y se comparan contra otros modelos.

# Símbolos y notación

$\square$ : fin de definición, fin de demostración, fin de teorema ó fin de corolario.

$\emptyset$ : conjunto vacío.

$\mathbb{R}$ : conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^+$ : subconjunto de los números reales positivos,  $\mathbb{R}^+ \cap \{0\} = \emptyset$ .

$\mathbb{N}$ : conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N} \cap \{0\} = \emptyset$ .

$\mathbb{P}[\bullet]$ : probabilidad.

$\mathbb{E}[\bullet]$ : esperanza (valor esperado).

$\{\bullet\}$ : conjunto.

$|\bullet|$ : valor absoluto.

$\perp$ : independencia.

$[\bullet, \bullet]$ : intervalo cerrado,  $x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ .

$(\bullet, \bullet)$ : intervalo abierto,  $x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$ .

$x \in [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$ .

$x \in (a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$ .

$\sim$ : distribución.

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$ :  $x$  se distribuye normal con media= $\mu$  y varianza= $\sigma^2$ .

$T$ : tamaño del periodo analizado, es decir el número de días observados.

$S_t$ : valor del instrumento financiero en el tiempo  $t$ .

$dX$ : diferencial de  $X$ .

$\frac{\partial f(\bullet)}{\partial X}$ : derivada parcial de  $f(\bullet)$  respecto a  $X$ .

**Supuestos:**

1.  $S_t \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \forall t$ , es decir, se considera que los precios no pueden ser negativos.
2.  $S_t \forall t$  están denominados en EUR, más detalles en la Sección 3.1.
3.  $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ya que las observaciones de los precios son discretos, aunque el modelo se desarrolla con  $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

$l_t = -(S_t - S_{t-1})$ : las pérdidas (ganancias) que hay de  $t - 1$  a  $t$ .

- Si  $l_t > 0$ , hubo pérdida de  $t - 1$  a  $t$ .
- Si  $l_t = 0$ , no hubo cambio de  $t - 1$  a  $t$ .
- Si  $l_t < 0$ , hubo ganancia de  $t - 1$  a  $t$ .

# Capítulo 1

## Contexto

“ Chaos was the law of nature; Order was the dream of man. ”

---

Henry Adams, *The education of Henry Adams*, 1918

### 1.1. Antecedentes

Según [van der Pas \(1971\)](#), fue Jan Ingen-Housz el primero en descubrir, en 1784, un fenómeno cuya consecuente investigación ha desarrollado una de las áreas de la ciencia más amplias y vívidas con cada vez más aplicaciones en biología, química, física y por supuesto finanzas ([Dunkel y Hänggi, 2009](#); [Ingen-Housz, 1784](#)).

Se trata del fenómeno actualmente conocido como **movimiento browniano**, llamado así en honor a Robert Brown, el primero en documentar detalladamente experimentos relacionados con este fenómeno ([Brown, 1828](#)).

De la variedad de procesos estocásticos utilizados en finanzas, los **procesos de Wiener**, es decir, aquellos que modelan el movimiento browniano, han sido los más utilizados y estudiados de todos ([Cont y Tankov, 2004](#)).

Varias décadas después, en 1900, Louis Bachelier propuso utilizar el movimiento browniano para modelar el precio de un activo en la bolsa de París; en 1965 Samuelson toma en consideración que el precio de una acción no puede ser negativo e introduce el **movimiento browniano geométrico** utilizando la distribución log-normal mejorando el modelo ([Bachelier, 1900](#); [Samuelson, 1965](#)).

Eventualmente estos trabajos encaminaron a Fischer Black y Myron Scholes a desarrollar su famoso modelo descrito en el artículo seminal: *Pricing of Options and Corporate Liabilities* ([Black y Scholes, 1973](#)).

En él, Black y Scholes utilizan el supuesto de que el rendimiento del precio de las acciones se distribuye log-normalmente y utilizan el movimiento browniano geométrico para modelar el comportamiento del activo subyacente (acciones) que posteriormente utilizan para valorar opciones. Además se sugiere que este método se puede utilizar también para valorar pasivos corporativos como acciones simples, bonos corporativos y *warrants* e incluso valorar bonos considerando la posibilidad de incumplimiento. Poco tiempo después Robert C. Merton extiende, restringe y da fórmulas explícitas utilizando el modelo de B&S (Merton, 1973).

Un par de años después, Merton (1976a) complementa ese modelo al involucrar un proceso de saltos, a saber, un proceso Poisson compuesto. El argumento que da para esto es que la validez de la fórmula B&S depende de que se satisfaga la condición de que en intervalos pequeños de tiempo los precios de las acciones sólo pueden cambiar en cantidades pequeñas; como estudios empíricos muestran que existen demasiados valores atípicos para considerar únicamente una distribución log-normal de varianza constante, existe una razón para justificar la existencia de dichos saltos. Ese artículo despertó el interés en los ahora denominados **procesos de difusión con saltos** cuya definición se presenta en la Sección 2.1.

La suposición base de que el precio de un activo (generalmente acciones) asemeja un movimiento browniano mezclado con un proceso Poisson compuesto ha sido considerada por varios otros autores, entre ellos: Amin (1993); Andersen y Andreasen (2000); Hilliard y Schwartz (2005); Kou (2002); Matei (2006); Matiussi (2010); Merton (1976b); Naik (1993) y Venegas Martínez (2001).

Estos tipos de procesos forman parte de una categoría más amplia de procesos estocásticos denominados **procesos de Lévy**, en honor al matemático francés Paul Pierre Lévy. Los procesos Lévy son los procesos equivalentes en tiempo continuo a las caminatas aleatorias, son procesos con incrementos independientes y estacionarios; para una definición matemática ver la definición 3.1 en Cont y Tankov (2004).

Ejemplos de otros procesos de Lévy son los procesos de varianza gamma (*variance gamma*), procesos normal inversa gaussiana (*normal inverse gaussian*), procesos CGMY (Carr, Geman, Madan & Yor) también denominados procesos KoBoL (Koponen, Boyarchenko & Levendorskii) y procesos FMLS (*finite moment log-stable*).

## 1.2. Ventajas de los procesos de difusión con saltos

Es común que se utilice la distribución normal para modelar el comportamiento del rendimiento (log-rendimiento) de las carteras de productos financieros. Además de su sencillez otro argumento que se da al uso de este modelo emana del teorema central del límite ya que se arguye que éste aplica por la gran cantidad de productos que generalmente constituyen las carteras de instituciones financieras (Jorion, 2007).

Los procesos de difusión con y sin saltos son ampliamente utilizados para la valuación de diversos instrumentos financieros, la cual es de interés para muchos participantes en el mercado

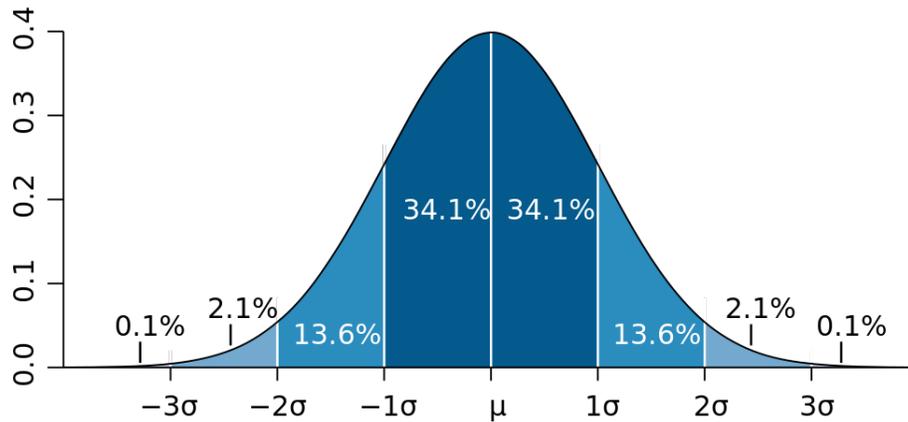


Figura 1.1: Distribución normal. Fuente: [Wikimedia Commons \(2013\)](#)

(bancos de inversión, comerciales y de ahorro, fondos de pensión y de cobertura, aseguradoras, corporaciones financiadas con derivados y muchos otros). Sin embargo se ha documentado el fracaso de la distribución normal para modelar con exactitud el comportamiento de los rendimientos de diversos activos y diferentes investigadores han buscado nuevos modelos ([J.P. Morgan/Reuters, 1996](#); [Nawalkha, Beliaeva y Soto, 2007](#)).

Es intuitivo pensar que pérdidas pequeñas serán más frecuentes que pérdidas medianas y que las pérdidas grandes serán menos frecuentes o incluso raras, pero esta intuición no basta para tener una clara perspectiva de qué es una pérdida grande y qué es raro o frecuente. Por ejemplo, en la distribución normal, 68 % de los valores caen dentro de un rango de una desviación estándar alrededor de la media; 95 %, dentro de un rango de dos desviaciones estándar; y 99.7 %, dentro de un rango de tres desviaciones estándar (Figura 1.1). Esto es, si  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) &\approx 0.6827, \\ \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) &\approx 0.9545, \\ \mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) &\approx 0.9973.\end{aligned}$$

Es decir, utilizar únicamente la distribución normal para modelar el rendimiento de productos financieros puede resultar en una subestimación de la probabilidad de ocurrencia de movimientos menos esperados.

Los procesos de difusión puros (es decir, sin saltos) son útiles para modelar varias series de tiempo económicas y financieras debido a su propiedad de continuidad. Sin embargo, puede resultar poco realista utilizarlos para modelar variables cuyos valores pueden cambiar significativamente en un corto periodo de tiempo, por ejemplo, cuando una noticia o un evento inesperado genera cambios súbitos en los mercados, es decir, un salto ([Penati y Pennacchi, 2001](#)).

Los saltos son estadística y financieramente importantes: cuando se publican sorpresivas noticias sobre la macroeconomía, las curvas de rendimientos de ciertos productos financieros pueden presentar cambios bruscos. De esta forma, los modelos que consideran saltos ofrecen un interesante camino para analizar el impacto de variables macroeconómicas en los rendimientos de los instrumentos financieros (Johannes, 2004).

En series de tiempo financieras, los procesos de difusión con saltos también permiten describir y capturar el impacto de cambios anormales en el precio de activos cuando hay un evento serio e incierto en el mercado como son incumplimientos (*default*), fallas operacionales o siniestros. También son capaces de exhibir fenómenos que los procesos de difusión puros no logran: leptocurtosis y asimetría en la distribución de los rendimientos así como las grandes fluctuaciones generadas en caídas y recuperaciones (*crashes and rallies*), periodos caracterizados por su gran volatilidad (Matei, 2006; Platen y Bruti-Liberati, 2010; Wang, Lin y Fuh, 2009).

Desde el inicio, los procesos Poisson han sido el componente que introduce los saltos en los procesos de difusión y el enfoque de varios investigadores (por ejemplo, Ball y Torous (1983); Beckers (1981); Merton (1976a); Press (1967)) y es también el componente de saltos utilizado en el modelo de esta tesis (véase la Sección 2.2).

Los movimientos violentos en los mercados no deben ser descartados ya que pueden representar una porción importante de las pérdidas o ganancias en un periodo de tiempo largo. Los participantes del mercado realizan estudios considerando la alta variabilidad de las series de tiempo financieras y la perceptible probabilidad de ocurrencia de movimientos violentos en los mercados para calcular valor en riesgo, el cual es obligatorio calcular para ciertas instituciones financieras en algunas jurisdicciones (Cont y Tankov, 2004).

Es claro que los modelos de difusión con saltos tienen grandes posibilidades de aplicación y sus implementaciones siguen siendo investigadas (Aït-Sahalia, 2004), algunas de las cuales son presentadas en la siguiente sección.

### 1.3. Estado del arte

Cada vez son más populares las diferentes formas de modelar factores de riesgo a través de ecuaciones diferenciales estocásticas (véanse por ejemplo los trabajos de Björk, Di Masi, Kabanov y Runggaldier (1997); Duffie, Pan y Singleton (2003); Geman y Roncoroni (2006); Glasserman y Kou (2003)). En particular, las ecuaciones diferenciales estocásticas con saltos ofrecen la infraestructura matemática más flexible y numéricamente accesible para modelar diferentes variables a través del tiempo (Platen y Bruti-Liberati, 2010).

En modelos financieros, económicos, actuariales y de la teoría del riesgo, los procesos de difusión con saltos son comúnmente utilizados para describir la dinámica de variables como pueden ser precios de activos, calificaciones crediticias, índices bursátiles, tasas de interés, tipos de cambio o precios de mercancías (*commodities*). En dichas dinámicas se tiene que

considerar incertidumbres generadas por eventos atípicos específicos en contraposición al comportamiento normal de los factores de riesgo. Varios autores han discutido la presencia de dichos saltos en series de datos financieros (Platen y Bruti-Liberati, 2010).

El incluir el componente de los saltos ayuda a una mejor valuación de ciertos productos financieros, en particular opciones (Jorion, 1988). La valuación de productos derivados y el modelado de curvas de rendimiento (*term structure modelling*) son quizá las áreas de aplicación más avanzadas del cálculo de Itô (Nawalkha y otros, 2007). Específicamente, se han propuesto diferentes acercamientos para la valuación de opciones utilizando procesos de difusión con saltos, por ejemplo:

- Modelado del precio de una acción desde una perspectiva económica viendo el proceso precio de la acción como un proceso producción (Zhang y Zhao, 2006).
- Modelado del precio de mercancías (Blanco y Soronow, 2001).
- Modelado de la probabilidad de caídas en índices bursátiles y tipos de cambio (Andersen y Andreasen, 2000).
- Obtención de la curva de rendimientos de tasas de interés a corto plazo (Johannes, 2004).
- Generación de la “sonrisa” (*smile*) a corto plazo observada en las volatilidades implícitas de precios de opciones (Cont y Tankov, 2004).
- Modelado de eventos crediticios como incumplimientos y cambios en las calificaciones crediticias (Jarrow, Lando y Turnbull, 1997).
- Valuación de opciones reales y sus valores de garantía sobre proyectos de infraestructura, donde los saltos modelan el impacto de incidentes de emergencia y uso de dicha información para mitigar riesgos (Zhang, Guo, Chai, Gong y Wang, 2010).
- Desarrollo de coberturas con opciones sobre acciones (Venegas Martínez, 2001).

Otros autores han extendido la aplicación de estos procesos a otras áreas de las ciencias financieras por ejemplo:

- Modelado y descripción general del comportamiento de diversos factores de riesgo como son:
  - Acciones (Das y Uppal, 2004; Quezada, 2008).
  - Acciones utilizando también la distribución uniforme (Hanson y Westman, 2002b).
  - Tasas de interés (Das, 2002).
  - Factores económicos como tasas de depreciación y devaluación (Rivas Aceves y Venegas Martínez, 2007; Venegas Martínez, 2000, 2005).
  - Tipos de cambio e índices bursátiles (Aït-Sahalia, 2004; Jorion, 1988).

- Modelado de riesgo operacional y valor presente neto (Jarrow, 2008).
- Modelado de estructuras de término de tasas de interés y análisis de la estructura temporal (curva cupón cero) de tasas de interés (Ahn y Thompson, 1988).
- Modelado de precios de activos y curvas cupón cero y generación de coberturas (Runggaldier, 2003).
- Resolución a través de procedimientos computacionales de modelos de mercados LIBOR (Glasserman y Merener, 2003).
- Modelado del comportamiento del valor de una firma y valuación de *securities* con riesgo de incumplimiento (Zhou, 1997).
- Estudio del impacto de los saltos en los pronósticos que realizan analistas para escenarios normales, optimistas y pesimistas, involucrando econometría bayesiana (Louth, Joos, Satchell y Weyns, 2010).
- Modelado de los log-rendimientos del índice S&P 500 durante una década (Hanson y Westman, 2002a).
- Pronósticos de la volatilidad de los rendimientos de activos financieros (Andersen, Bollerslev y Diebold, 2007).
- Cálculo de probabilidades de incumplimiento (Han, 2009).

Algunos autores utilizan los procesos de difusión con saltos en combinación con otras metodologías para realizar pronósticos:

- Mezclados con modelos ARCH para el pronóstico de precios de *commodities* (Bernard, Khalaf, Kichian y McMahan, 2006).
- Mezclados con modelos deterministas como reversión a la media (*mean reversion*) para la descripción de precios al contado (*spot*) y futuros de diferentes activos y la valuación de derivados sobre ellos, en particular activos no almacenables como lo es la electricidad (Geman y Roncoroni, 2006; Straja, 2001; Weron, Bierbrauer y Trück, 2004; Weron y Misiorek, 2008).
- Mezclados con un modelo econométrico estacionario para el pronóstico del valor del oro durante 10 años (Shafiee y Topal, 2010).
- Mezclados con modelos ARCH para el modelado y comparación de pronósticos de densidades del índice S&P 500 basados en precios de opciones e información histórica (Shackleton, Taylor y Yu, 2010).
- Mezclados con modelos GARCH para el modelado y pronóstico de volatilidades de acciones (Visser, 2009).

- Meade (2010) investiga y compara diferentes métodos de pronóstico de densidad para el precio de dos mezclas de petróleo hasta dos años, entre ellos, difusión con saltos, regresión a la media, ARMA y GARCH.

Al poder ver cualquier proceso Lévy como una superposición de procesos Wiener y Poisson es natural que durante los últimos años algunos autores hayan trabajado en aplicar los procesos Lévy en los mismos campos de desarrollo de los de difusión con saltos, incrementando de esta forma su popularidad en finanzas y administración de riesgos en los últimos años (Cont y Tankov, 2004; Sueishi y Nishiyama, 2005):

- Carr y Wu (2004); Tankov y Voltchkova (2007) los han implementado en la valuación de opciones.
- Carr, Geman, Madan y Yor (2002) los han utilizado para el modelado de activos.
- Eberlein y Raible (1999) han trabajado en el modelado de tasas cupón cero.
- Eberlein, Keller y Prause (1998) los usan para la administración de riesgos.
- Lee y Hannig (2010); Sueishi y Nishiyama (2005) han experimentado con procesos de varianza gamma, procesos normal inversa gaussiana y procesos CGMY.
- Madan, Carr y Chang (1998) utilizan los procesos de varianza gamma para valorar opciones.
- Cartea y del Castillo Negrete (2007) trabajan con los procesos CGMY, KoBol y FMLS en valuación de opciones.
- Cont y Tankov (2004); Crosby (2010); Gihman y Skorohod (1972); Steele (2001) contienen estudios generales de los procesos de difusión con saltos y otros procesos de Lévy.

Exceptuando cuando se trabaja con un solo activo, la enorme mayoría de las aplicaciones financieras de los procesos con saltos requiere un modelo que involucre dependencia (correlación) entre los componentes de la cartera (Cont y Tankov, 2004). Algunos ejemplos con este acercamiento multivariado son los trabajos de Johannes, Polson y Stroud (2009); Luciano y Schoutens (2006); Press (1967); Wang y otros (2009).

Es natural considerar que la estimación del valor en riesgo también puede realizarse cuando los instrumentos son modelados a través de procesos de difusión con saltos, tema sobre el cual gira esta tesis. El lector podrá encontrar más ejemplos de trabajos donde se hace esta consideración en las publicaciones de Denis, Fernández y Meda (2009); Dowd (2002); Duffie y Pan (1997, 2001); Gibson (2001); Guan, Xiaoqing y Chong (2004); Wang y otros (2009); Zhang y otros (2013).

## 1.4. Valor en riesgo

El diccionario de la Real Academia Española define **riesgo** como contingencia o proximidad de un daño. En el contexto financiero se puede definir riesgo como una pérdida monetaria potencial generada por uno o varios eventos específicos. Los riesgos a los que está expuesta una entidad financiera se pueden clasificar dependiendo de la naturaleza del evento que podría desencadenar dicha pérdida (Real Academia Española, 2013).

Una de estas categorías es el llamado **riesgo de mercado**, al cual se está expuesto cuando existe la posibilidad de cambios en los parámetros (factores de riesgo) que inciden en la valuación de los instrumentos financieros de los cuales se tiene posesión, es decir, el riesgo de mercado es la posibilidad de cambios en los precios de los instrumentos financieros (BANCERCITO, 2013; Bank for International Settlements, 2003).

Existen otras categorías y sub-categorías del riesgo, las cuales no serán tratadas en esta tesis tales como: riesgo de crédito, de liquidez, operacional, de reputación, legal, fiscal, de cumplimiento y tecnológico. Estas categorías no son ni universalmente exhaustivas ni mutuamente exclusivas. El tratamiento, medición, gestión, categorización y administración que se le den o no a estos riesgos dependerá de las obligaciones y necesidades de cada entidad financiera.

Bajo las definiciones de Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999) una **medida de riesgo** es un mapeo de  $\mathcal{G}$  a  $\mathbb{R}$  donde  $\mathcal{G}$  es el conjunto de todos los riesgos, es decir, el conjunto de todas las funciones reales valuadas en el conjunto de todos los estados de la naturaleza el cual se supone finito. En el citado artículo se encuentra más información sobre las definiciones matemáticas y el tratamiento de **riesgo** y **medida de riesgo**.

No se debe confundir esa definición de medida (*measure*) con las definiciones utilizadas en teoría de la probabilidad (Chow y Teicher, 1997) y en análisis matemático (Bartle, 1995) ni con otros conceptos como *métrica*.

**Valor en riesgo** es una medida de riesgo, en particular para los fines de ésta tesis, de mercado, la cual se ha convertido en una herramienta básica para la administración de riesgos financieros (Berkelaar, Cumperayot y Kouwenberg, 2002).

Usualmente valor en riesgo se denota por  $VaR$  por sus siglas en inglés: *Value at Risk*, aunque puede encontrarse como: *var*,  $VAR$ , *Var*, o  $V@R$ . No confundir valor en riesgo con varianza (*variance*), variable, auto-regresión vectorial (*Vector Autoregression*) u otras siglas y abreviaturas similares que denotan conceptos diferentes.

**Definición 1.1.** Dados  $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $p \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y un **horizonte de tiempo**<sup>1</sup>, el **valor en riesgo** en el tiempo  $t$  para una cartera de productos financieros dada, denotado por  $VaR_q(t)$  es tal que:

$$\mathbb{P}[l_t > VaR_q(t)] \leq p,$$

donde:

- $l_t$  es una variable aleatoria que denota las pérdidas (y ganancias) de una cartera de productos financieros en el tiempo  $t$  para el mismo horizonte de tiempo dado.
- $l_t > 0$  cuando hay pérdidas y en consecuencia  $VaR_q(t)$  se reporta como un número positivo.
- Generalmente se utiliza un  $p$  cercano a 0, por ejemplo: 10 %, 5 %, 1 % ó 0.5 %.
- $q = 1 - p$ . □

Observe que:  $\mathbb{P}[l_t > VaR_q(t)] \leq p \Leftrightarrow \mathbb{P}[l_t \leq VaR_q(t)] \geq 1 - p$ .

Si  $l_t$  es una variable aleatoria continua entonces  $\mathbb{P}[l_t > VaR_q(t)] = p$  y  $\mathbb{P}[l_t \leq VaR_q(t)] = 1 - p$ . En esta tesis se considera el supuesto de que  $l_t$  es continua (aunque en la realidad está restringido a, cuando menos, la divisibilidad de la moneda en la cual están denominados los precios y la precisión de la información utilizada).

$1 - p \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , generalmente  $1 - p = q$  cercano a 1, por ejemplo: 90 %, 95 %, 99 % ó 99.5 %.

$\mathbb{P}[l_t \in (-\infty, VaR_q(t)]] = 1 - p$ , y  $\mathbb{P}[l_t \notin (-\infty, VaR_q(t)]] = \mathbb{P}[l_t \in (VaR_q(t), \infty)] = p$ .

Las observaciones  $l_1, l_2, \dots, l_{t-1}, l_t$  pueden ser vistas como una muestra aleatoria con una distribución  $f(\bullet, \theta)$ ; considérese a  $\tau(\theta)$  como una función real de  $\theta$ ; en particular es posible que  $\tau(\theta) = l_t$ .

Siguiendo esta perspectiva se puede obtener un estadístico  $g(l_1, \dots, l_t)$  para  $\tau(\theta)$  tal que  $\mathbb{P}[\tau(\theta) \leq g(l_1, \dots, l_t)] = \gamma$ , donde  $g(l_1, \dots, l_t) = VaR_q(t)$ , *i.e.*  $VaR_q(t)$  es un **estadístico** para  $l_t$  y  $\gamma = 1 - p$ .

Entonces el intervalo  $(-\infty, VaR_q(t)]$  puede verse como un **intervalo de confianza** para  $l_t$ . En este caso se trata de un intervalo de confianza unilateral (*one-sided confidence interval*) y a  $VaR_q(t)$  se le llama límite superior de confianza para  $l_t$  (*one-sided upper confidence limit*) (Mood, Graybill y Boes, 1974).

---

<sup>1</sup>El horizonte de tiempo es el punto en el tiempo para el cual se están estimando las pérdidas. Por ejemplo, si se elige horizonte de tiempo de un día, cuando se calcula el valor en riesgo en el tiempo  $t$  se está estimando la potencial pérdida al tiempo  $t + 1$ . Véase la definición de  $l_t$  utilizada en esta tesis en la sección de símbolos y notación. Para evitar hacer uso de más supuestos y dada la disponibilidad de información en esta tesis, la muestra aleatoria está compuesta por observaciones diarias, véase el capítulo 3.

A  $1 - p$  se le denomina **probabilidad de cobertura** asociada al intervalo  $(-\infty, VaR_q(t)]$ . Como la probabilidad  $1 - p$  no depende de algún parámetro  $\theta$  de la distribución  $f$  a  $1 - p$  también se le puede llamar **coeficiente de confianza** (*confidence coefficient*) o **nivel de confianza** (*confidence level*) para el intervalo  $(-\infty, VaR_q(t)]$  (Casella y Berger, 2001; Mukhopadhyay, 2000).

Por lo anterior a  $(-\infty, VaR_q(t)]$  se le puede llamar un  $100(1 - p)$  % **intervalo de confianza para  $l_t$** . También es posible ver a  $(VaR_q(t), \infty)$  como un intervalo de confianza para  $l_t$  donde el nivel de confianza es  $p$ . En este caso la probabilidad de cobertura asociada al intervalo  $(VaR_q(t), \infty)$  es  $p$  y a  $VaR_q(t)$  se le llamará límite inferior de confianza para  $l_t$  (*one-sided lower confidence limit*).

A  $p$ , Jorion (2007) le llama **nivel de probabilidad** (*probability level*) mientras que Dowd (2002) le llama nivel de probabilidad a  $1 - p$ . Más allá de los nombres que se le dan a los valores hay que recordar las definiciones matemáticas y que el número cercano a 1 es generalmente la probabilidad de que las pérdidas sean menores o iguales a  $VaR$ .

$VaR_q(t)$  se puede calcular en cualquier momento  $t$  de la existencia de la cartera de productos financieros: puede ser al final de cada día hábil, en el transcurso de cada día hábil, al final del mes, al final de un trimestre, etc.

$VaR_q(t)$  debe tener un horizonte de tiempo dado, puede ser de  $n$  días,  $n$  horas,  $n$  semanas, etc. La elección del horizonte de tiempo y del momento en el que se calcula  $VaR$  depende de: 1) la disponibilidad de información, es decir, la cantidad de observaciones de  $l_t$  tanto en historia (temporalidad, tamaño del periodo) como en frecuencia (cantidad de observaciones en el periodo); y 2) las regulaciones, normatividad y necesidades de la entidad financiera a cargo del cálculo del valor en riesgo.

Recapitulando:

- $VaR$  satisface las definiciones de: medida de riesgo, función, variable aleatoria, estadístico, estimador y límite (superior o inferior) de confianza (que especifica un intervalo de confianza). También bajo definiciones no matemáticas puede ser considerado como un indicador y una herramienta de administración de riesgo.
- A  $p$  y a  $1 - p$  se les puede llamar probabilidad de cobertura, coeficiente de confianza, nivel de confianza y nivel de probabilidad.

$VaR_q(t)$  también satisface la definición del ( $q$ )-ésimo cuantil de las pérdidas<sup>2</sup>.

La información disponible, el valor de  $p$ , el método de cálculo de  $VaR$  y los supuestos que se hagan determinarán si  $VaR_q(t)$  pertenece o no a la muestra aleatoria.

*Ejemplo 1.* El valor en riesgo de la cartera “Alfa” calculado al cierre del 30 de diciembre de 2013 es 1,000 USD a un día con un nivel de confianza del 95 %.

Lo anterior se puede interpretar como: *La probabilidad de que haya una pérdida en la cartera “Alfa” al cierre del día 31 de diciembre de 2013 comparado contra el cierre del día anterior menor o igual a mil dólares es del 95 %.* También como: *Hoy 30 de diciembre de 2013 hay tan sólo un 5 % de probabilidad de que la cartera “Alfa” tenga pérdidas mayores a mil dólares para el cierre del día de mañana.*

En las interpretaciones anteriores se está haciendo una suposición que debe ser contemplada al leer  $VaR$  en los informes financieros generados.  $VaR$  es calculado en un punto del tiempo en particular, sin embargo es común que las entidades financieras modifiquen constantemente la composición de sus carteras por lo que el valor en riesgo de la cartera que será operada dentro del horizonte de tiempo no necesariamente será el mismo que el valor en riesgo de la cartera sobre la que se calculó  $VaR$ . Al primero se le denomina  $VaR$  verdadero (*true VaR*); y al segundo,  $VaR$  hipotético o estimado (*hypothetical VaR* o *estimated VaR*). Generalmente no es posible calcular el valor en riesgo verdadero al no saber qué modificaciones tendrá la cartera en el horizonte de tiempo considerado.

---

2

Mood y otros (1974) definen el  $q$ -ésimo cuantil como:

$$\zeta_q = \inf \{x : \mathbb{P}[X \leq x] \geq q\},$$

misma definición que utiliza Jorion (2007) para construir su definición de  $VaR$ , mientras que Borovkov (1998) lo define como:

$$\zeta_q = \sup \{x : \mathbb{P}[X \leq x] \leq q\}.$$

En particular, para distribuciones continuas se tiene:

$$\zeta_q = \inf \{x : \mathbb{P}[X \leq x] = q\} \tag{1.1}$$

contra

$$\zeta_q = \sup \{x : \mathbb{P}[X \leq x] = q\}. \tag{1.2}$$

Kaas, Goovaerts, Dhaene y Denuit (2008) rechazan la definición de Jorion y definen valor en riesgo como el inverso (recíproco) de la función de distribución de probabilidad acumulativa

$$VaR_q = F^{-1}(q).$$

Aquí es donde se pueden apreciar diferentes opciones para elegir al valor en riesgo. Esta elección dependerá de si se conoce la distribución de las pérdidas, es decir, se supone alguna distribución en particular de la muestra aleatoria, esto es, las observaciones y/o simulaciones con las que se cuente y del criterio de quien calcule el valor en riesgo.

Incluso es posible que la cartera al tiempo  $t$  y al final del horizonte de tiempo sean las mismas pero dentro de ese intervalo pudo haber modificaciones en la cartera que generen pérdidas o ganancias. Por ejemplo: la cartera al cierre del día de ayer y al cierre del día de hoy fue la misma pero por la mañana se adquirieron productos financieros que fueron vendidos horas más tarde y generaron pérdidas en la compañía; en este caso el valor en riesgo no daría información alguna sobre dichas pérdidas.

Estos cambios tienen impacto al realizar *backtesting* al ser un procedimiento que utiliza a las pérdidas para evaluar el valor en riesgo (véase el capítulo 4). En algunos casos, las pérdidas contra las que se evalúa el valor en riesgo también incluyen tarifas y comisiones que no son consideradas riesgo de mercado. El estudio de estos efectos queda fuera del alcance de esta tesis; se remite al lector a [Basel Committee on Banking Supervision \(2011a\)](#) y a las referencias ahí contenidas.

Es indispensable que le haga notar al lector y que toda persona involucrada con la toma de decisiones sobre la cartera en discusión (como pueden ser los operadores, accionistas, oficiales de riesgo, clientes, comités directivos y las autoridades y reguladores financieros) comprendan que el **valor en riesgo no brinda información sobre la magnitud de las pérdidas que pudieran exceder  $VaR$** . Pudieran ser “pequeños” excesos o podrían ser violaciones catastróficas que lleven a la entidad financiera a la ruina.

Lo anterior es uno de los factores que afecta la elección de  $p$ . Esto también habla de la necesidad de saber cómo se calculó  $VaR$ , es decir, cómo se calcularon las pérdidas y finalmente es uno de los argumentos por los cuales el valor en riesgo debe ser considerado únicamente como un indicador de riesgo y no como un criterio absoluto de las decisiones que se deben tomar.

Para la toma de decisiones es sensato considerar otras medidas de riesgo como pudieran ser valores en riesgo calculados de forma diferente u otras medidas que sí den información sobre la magnitud de las pérdidas que puedan exceder  $VaR$ , además de por supuesto, las diversas estadísticas de la cartera.

La Definición 1.1 sigue siendo ambigua ya que no se ha especificado aún qué es una pérdida. Bajo el contexto de riesgo de mercado hay dos definiciones de pérdida: 1) la no concretización de ingresos futuros esperados y 2) la merma de lo que ya se posee. Se expone la diferencia entre estas dos definiciones bajo un sencillo ejemplo.

Suponga que el día de hoy usted tiene en sus manos un Centenario (la moneda de oro acuñada por la Casa de Moneda de México). Usted sabe que el día de hoy puede acudir a su institución financiera de confianza y le darían a cambio 20,000 MXN. Al monitorizar el mercado del oro usted ha determinado que el día de mañana esa misma institución le daría a cambio 21,000 MXN. Al acudir al día siguiente a dicha institución le indican que se lo cambiarán por 19,000 MXN. ¿Cuál fue la pérdida, 1,000 MXN ó 2,000 MXN? Bajo la primera definición la pérdida sería de dos mil pesos mientras que bajo la segunda definición la pérdida sería de tan sólo mil pesos. Claro que usted también podría ser asaltado y despojado de su Centenario pero ese evento ya no pertenece al riesgo de mercado.

Es importante tener claro qué definición de pérdida se está utilizando cuando se calcula y expresa el valor en riesgo. Utilizando la primera definición se está calculando una pérdida potencial con base en el rendimiento esperado y se llama **VaR relativo**. Bajo la segunda definición se está calculando una pérdida potencial con base en cero y se llama **VaR absoluto**. Si el horizonte de tiempo es corto, el rendimiento esperado podría ser pequeño y la diferencia entre ambos valores no sería grande. Sin embargo, a mayor horizonte de tiempo, mayor diferencia habrá entre el relativo y el absoluto.

En esta tesis se trabaja con *VaR* absoluto (véase la definición de  $l_t$  en la tabla de símbolos y notación).

Existen varias formas de estimar el valor en riesgo, incluso nuevas formas siguen siendo desarrolladas al día de hoy. Entre los diferentes métodos se pueden encontrar:

- Métodos de valuación: aquellos donde se hacen valuaciones de los instrumentos que constituyen las carteras tomando en cuenta al menos uno de los parámetros que influyen en su precio (los factores de riesgo de mercado). Ejemplo: métodos de valuación local (*local valuation*) como el método de valuación delta normal (*delta normal valuation*) y los métodos de valuación completa (*full valuation*).
- Métodos paramétricos: donde se hacen suposiciones sobre la distribución de las pérdidas o sobre los factores de riesgo con los cuales se hacen valuaciones de los instrumentos. Se denominan paramétricos ya que se requiere calcular parámetros como son medias y desviaciones estándar de las distribuciones consideradas. Ejemplo: modelos de simulación Monte Carlo.
- Métodos no paramétricos: donde no se hace suposición alguna sobre la distribución de las pérdidas, es decir, se utiliza la distribución empírica. Ejemplo: método histórico.
- Métodos semiparamétricos: donde se hacen suposiciones sobre la distribución de las pérdidas pero estos supuestos sólo aplican a las colas de las distribuciones. Ejemplo: teoría de valores extremos.
- Métodos de variación de tiempo: aquellos que tengan en cuenta modificaciones en el modelo a través del tiempo. Por ejemplo, si la varianza de los rendimientos aumenta a través del tiempo también lo hará el valor en riesgo (*time varying*). Algunas metodologías que toman en cuenta estas variaciones son los métodos de promedios móviles (*moving averages=MA*), modelos de autoregresión condicional de varianza heteroscedástica (*generalized autoregressive conditional heteroskedastic models=GARCH*) y promedios móviles ponderados exponencialmente (*exponentially weighted moving average=EWMA*).

Estas categorías no son mutuamente exclusivas y no se pretende realizar un listado exhaustivo de todos los métodos de cálculo de *VaR*.

En esta tesis se trabaja con procesos de difusión con saltos aplicados directamente sobre los precios del instrumento, es decir, sin considerar los factores que influyen en su valor. Esto es, no se realizan valuaciones. El cálculo del valor en riesgo con procesos de difusión con saltos no es un método de valuación pero sí un método paramétrico. Como se muestra en la Sección 3.3, una vez elegido un horizonte de tiempo los parámetros del modelo permanecen constantes para cada estimación del valor en riesgo. De esta forma, el modelo no considera variación en el tiempo (esto no prohíbe que cada vez que se realice una nueva observación, por ejemplo al transcurrir un día hábil, no se puedan recalcular los parámetros con la nueva información obtenida).

## Legislación *VaR*

Estimar y publicar *VaR* es un requerimiento legal para varias instituciones financieras en diversas jurisdicciones, pero su papel va más allá de ser un simple dato informativo, es también una herramienta reguladora y se utiliza como parámetro para limitar los riesgos que una entidad financiera puede tomar.

Por ejemplo en Estados Unidos hay requerimientos de capital basados en *VaR* (Cuoco y Liu, 2006). En México las instituciones de crédito tienen la obligación de calcular valor en riesgo de sus posiciones e incluirlo en la publicación de sus estados financieros (CNBV, 2013) y las sociedades de inversión deben establecer un límite de valor en riesgo en función de sus activos netos y publicarlo en el prospecto de información al público (CNBV, 2012).

Una de las lecciones de la crisis del 2008 ha sido la necesidad de fortalecer la cobertura de riesgo de la estructura de capital. Uno de los factores clave fue el fracaso de capturar grandes riesgos dentro o fuera del balance general así como exposiciones relacionadas con derivados. En respuesta a estos defectos, el Comité de Regulación Bancaria de Basilea (*Basel Committee on Banking Supervision*) publicó una serie de reformas al marco de Basilea II, las cuales aumentan el requerimiento de capital para las carteras de negociación. Este nuevo tratamiento (que forma parte de las ahora llamadas reglas de Basilea III) introduce un requerimiento de capital basado en valor en riesgo estresado para periodos de estrés significativo (*Basel Committee on Banking Supervision, 2011b*).

Un ejemplo mexicano de la puesta en práctica de estas guías se puede encontrar en las reglas publicadas por la CONSAR para el cálculo del valor en riesgo estresado para las AFORES (CONSAR, 2010; CONSAR, 2013).

La literatura que trata de valor en riesgo es extensa y numerosa. Para una introducción didáctica se refiere al lector a Jorion (2007) y Dowd (2005); para las sugerencias y observaciones sobre regulación financiera basada en *VaR*, las numerosas publicaciones del Comité de Regulación Bancaria de Basilea; para los requerimientos de *VaR*, la legislación de las autoridades financieras en cada jurisdicción; y para el estado del arte, los últimos artículos publicados en las revistas arbitradas, algunos de los cuales son citados en este trabajo.

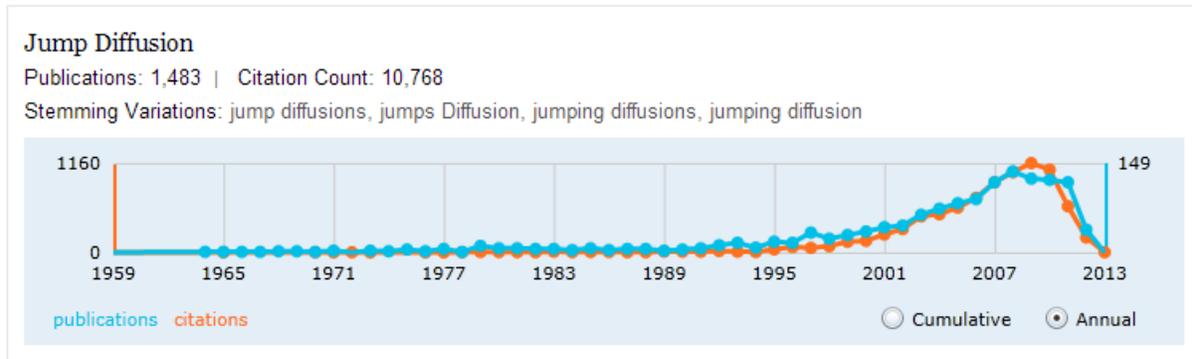


Figura 1.2: Difusión con saltos

## 1.5. Métricas bibliográficas

A partir de la publicación de los artículos seminales de Black, Scholes y Merton una gran cantidad de autores han estudiado los procesos de difusión con saltos. De igual manera, el interés en el valor en riesgo se ha incrementado durante los últimos años. A continuación, se presentan algunas estadísticas que demuestran la relevancia de este campo de estudio.

Se obtuvieron los resultados que se resumen en los Cuadros 1.1 y 1.2 realizando el 14 de noviembre de 2013 consultas en cuatro bases de datos académicas, a saber: *Web of Knowledge*, *Google Scholar*, *Microsoft Academic Search* y *Scopus*.

Citas	WoK	Google Scholar	MSAS	Scopus
Black y Scholes (1973)	5,896	23,503	6,797	N/D
Merton (1973)	2,385	8,747	2,730	2,175
Merton (1976b)	1,055	4,021	1,285	1,091
Kou (2002)	268	922	304	291
Jorion (2007)	N/D	2,916	351	N/D
Christoffersen (1998)	379	1,254	378	411

Cuadro 1.1: Cantidad de citas. Fuentes: Elsevier (2013); Google (2013b); Microsoft (2013); Thomson Reuters (2013).

Resultados de consultas	WoK	Google Scholar	MSAS	Scopus
“jump diffusion”	1,312	19,200	1,647	4,715
“jump diffusion” AND “finance”	93	11,500	286	3,029
“jump diffusion” AND “market risk”	5	1,570	253	177
“value at risk”	2,160	60,600	3,274	7,144
“value at risk” AND “jump diffusion”	24	1,710	110	222

Cuadro 1.2: Cantidad de resultados. Fuentes: Elsevier (2013); Google (2013b); Microsoft (2013); Thomson Reuters (2013).

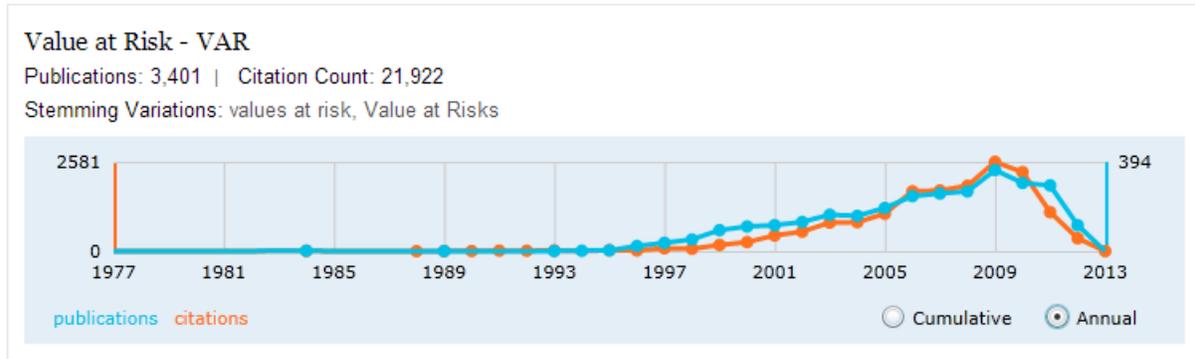


Figura 1.3: Valor en riesgo

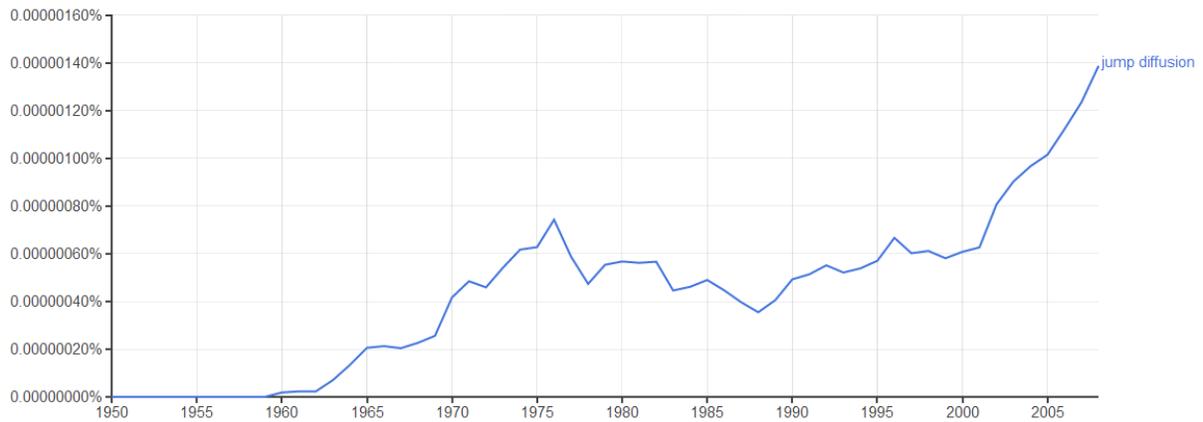


Figura 1.4: Difusión con saltos

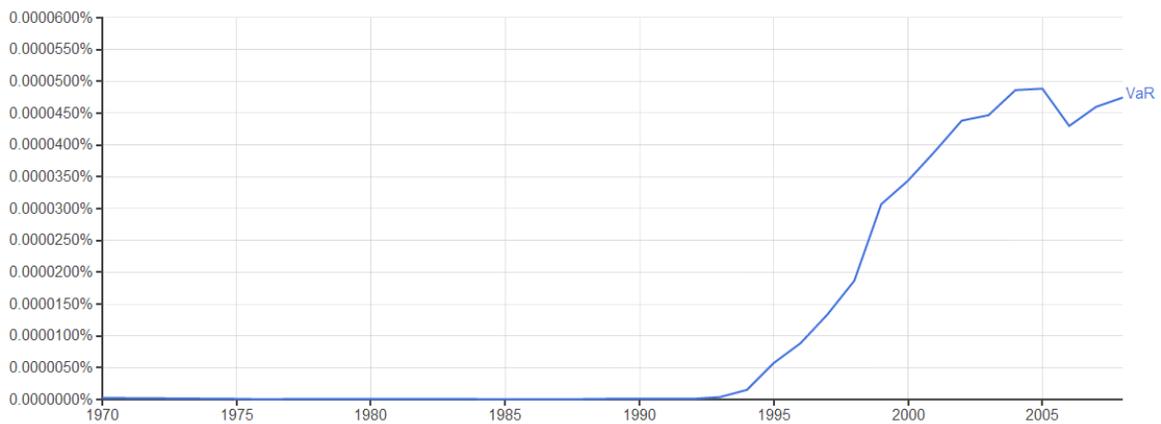


Figura 1.5: Valor en riesgo

Las figuras 1.2 y 1.3 muestran el número de citas y publicaciones de cada año de los temas de que trata esta tesis (Microsoft, 2013). Se puede observar que el interés en el valor en riesgo aumentó después de la crisis financiera de 2008.

Las figuras 1.4 y 1.5 muestran el porcentaje de una muestra de libros en inglés publicados hasta 2008 que contienen dichas palabras. Más detalles de la metodología y datos se encuentran en Google (2013a,c).

# Capítulo 2

## Construcción del modelo

“ ... they ran their heads very hard against wrong ideas, and persisted in trying to fit the circumstances to the ideas, instead of trying to extract ideas from the circumstances. ”

---

Charles Dickens, *Great Expectations*, 1860

### 2.1. Resultados preliminares

En esta sección únicamente se presentan los resultados más importantes que son requeridos para la construcción y desarrollo del modelo. No se presentan demostraciones de estos resultados, en cambio sí sus respectivas referencias.

**Definición 2.1** (Cont y Tankov (2004); Platen y Bruti-Liberati (2010)). Un **proceso de difusión con saltos** también llamado **proceso Itô con saltos** es un proceso de Lévy que tiene como componentes un proceso de Wiener y un proceso Poisson compuesto.  $\square$

**Teorema 2.2** (Gihman y Skorohod (1972); Nawalkha y otros (2007)). Si el proceso  $S_t$  tiene la diferencial estocástica:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t \quad (2.1)$$

y la función  $f(X, t)$  es continua y tiene derivadas  $\frac{\partial f(X, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f(X, t)}{\partial X}$  y  $\frac{\partial^2 f(X, t)}{\partial X^2}$  también continuas, entonces el proceso  $f(S_t, t)$  también posee una diferencial estocástica y

$$df(S_t, t) = \left\{ \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial X} a(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial X^2} [b(S_t, t)]^2 \right\} * dt + \left[ \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial X} b(S_t, t) \right] * dW_t, \quad (2.2)$$

**donde:**

- $S_t$  es un proceso estocástico (conocido como proceso de Itô),
- $W_t$  es un proceso de Wiener,
- $a(\bullet)$  y  $b(\bullet)$  son funciones de  $S_t$  y  $t$ . □

A (2.2) se le llama **Fórmula de Itô**, aunque hay otras versiones y resultados relacionados a los que diferentes autores también les llaman Fórmula de Itô y Lema de Itô (Steele, 2001). Este es uno de los resultados principales del cálculo de Itô y permite resolver ecuaciones diferenciales estocásticas para procesos que cumplen (2.1) siendo la versión equivalente a la regla de la cadena para dichos procesos (Higham, 2001).

**Corolario 2.3** (Crosby (2010); Gihman y Skorohod (1972); Nawalkha y otros (2007)). Si el proceso  $S_t$  tiene la diferencial estocástica:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t + c(J, S_t, t)dN_t \quad (2.3)$$

y la función  $f(X, t)$  es continua y tiene derivadas  $\frac{\partial f(X, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f(X, t)}{\partial X}$  y  $\frac{\partial^2 f(X, t)}{\partial X^2}$  también continuas, entonces el proceso  $f(S_t, t)$  también posee una diferencial estocástica y

$$df(S_t, t) = \left\{ \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial X} a(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial X^2} [b(S_t, t)]^2 \right\} * dt + \left[ \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial X} b(S_t, t) \right] * dW_t + [f(S_t + c(J, S_t, t), t) - f(S_t, t)] * dN_t \quad (2.4)$$

**donde:**

- $S_t$  es un proceso estocástico, en particular es un proceso de difusión con saltos;
- $W_t$  es un proceso de Wiener (para fines de ésta tesis basta saber que  $W_t \sim N(0, t)$  para toda  $t$ );
- $a(\bullet)$  y  $b(\bullet)$  son funciones de  $S_t$  y  $t$ ;
- $c(\bullet)$  es una función de  $S_t$ ,  $t$  y  $J$ ;
- $N_t$  es un proceso Poisson (para fines de esta tesis basta saber que  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  para toda  $t$  con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ );
- $J$  devuelve valores reales y es descrita en la Subsección 2.2.6. □

A (2.4) se le llama **Fórmula de Itô para procesos de difusión con saltos** (véase la fórmula 1.57 en Nawalkha y otros (2007)) y es el caso unidimensional para procesos con saltos de la llamada **Fórmula generalizada de Itô** (véase Gihman y Skorohod (1972)).

Este es el resultado que permite resolver la ecuación diferencial estocástica sobre la que se basa el modelo de esta tesis. Se le llama corolario ya que es un caso especial de la fórmula generalizada de Itô (el Corolario 2.3 no es corolario del Teorema 2.2).

Las definiciones de proceso de Lévy, proceso de Itô, proceso de Wiener, proceso Poisson y proceso Poisson compuesto y en general más información de estos y los procesos de difusión con saltos las puede encontrar el lector en Cont y Tankov (2004); Gihman y Skorohod (1972); Platen y Bruti-Liberati (2010).

## 2.2. Modelo

El precio del instrumento financiero se modela con el siguiente proceso de difusión con saltos:

$$S_t = S_0 \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t} z} \left[ \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) \right] \right]. \quad (2.5)$$

A continuación se presenta una construcción intuitiva de este modelo partiendo de una conocida función agregando componentes con un propósito específico, y se define el significado de cada literal.

Para denotar el precio de un instrumento financiero se utiliza la letra  $S$  como lo hacen otros autores, por ejemplo (Kou, 2002; Merton, 1976a; Wang y otros, 2009), ya que el origen de la aplicación de esta familia de modelos a las finanzas fue la valuación de opciones tomando como instrumento subyacente una acción bursátil, en inglés: *Stock*.

Se utilizan los términos **producto financiero** e **instrumento financiero** de manera intercambiable. De igual manera se utilizan los términos **precio** y **valor** también de forma intercambiable. El instrumento y su precio se definen en la Sección 3.1.

### 2.2.1. Rendimiento

Para comenzar la construcción del modelo se parte de una sencilla igualdad que se basa en la teoría del interés (Kellison, 2000):

$$S_1 = S_0(1 + r), \quad (2.6)$$

donde:

- $S_0$  es el precio del instrumento en el tiempo  $t = 0$ ;
- $S_1$  es el precio del instrumento en el tiempo  $t = 1$ ;
- $r$  es el rendimiento de este instrumento en el intervalo de tiempo  $[t = 0, t = 1]$ .

**Consideraciones:**

- $t = 0$  es el tiempo inicial, es decir, el momento desde el que se empieza a observar la serie  $S_t$ . No necesariamente es el momento en que el producto es concebido o creado, es decir,  $S_0$  es un valor conocido y se le llama valor inicial del  $S_t$  (Glasserman, 2004).
- $r$  es el rendimiento aritmético (lo equivalente a la tasa de interés compuesto efectiva en el periodo de tiempo).

**2.2.2. Rendimiento instantáneo**

Ahora, también de manera equivalente a la teoría del interés, se puede considerar rendimiento instantáneo:

$$(1 + r) = e^\mu, \quad (2.7)$$

donde:

- $\mu$  es el rendimiento instantáneo del producto financiero. En este caso, en el intervalo de tiempo  $[t = 0, t = 1]$ .

**Consideraciones:**

- El rendimiento instantáneo se puede entender como un concepto equivalente a la fuerza de interés utilizada en teoría del interés (Kellison, 2000).
- El precio de un producto financiero no puede ser negativo. Este problema se evita al introducir la función exponencial.
- $\mu \in \mathbb{R}$  lo que indica que sí puede haber rendimiento negativo. Es decir, el precio puede decrementar o incluso el rendimiento puede ser cero; esto es, el precio permanece sin cambios en el periodo contemplado.
- $\mu$  permanece constante en el mismo periodo sobre el cual  $r$  es aplicado. En (2.6) se está considerando que  $r$  es el rendimiento en el intervalo de tiempo  $[t = 0, t = 1]$ . Entonces,  $\mu$  en (2.7) también sería el rendimiento instantáneo que aplica en el periodo de tiempo  $[t = 0, t = 1]$ .
- La consideración anterior se hace por dos motivos:
  - Para fines de simplificación se considera un intervalo de tiempo unitario (de tamaño uno), donde  $t$  puede ser medido en años, días, segundos, etc.
  - Si se considera que el rendimiento se mantendrá constante (será el mismo) en otros intervalos de tiempo ya no es necesario pensar en  $r_1$  como el rendimiento en  $[t = 0, t = 1]$ ,  $r_2$  como el rendimiento en  $[t = 1, t = 2]$ , etc., si no que una sola  $r$  basta para designar a todos ellos (también sólo será necesario una sola  $\mu$ ).

### 2.2.3. Generalización para cualquier $t$

Dada la consideración anterior se concluye que el rendimiento del producto en el periodo  $[t = 0, t = 2]$  puede ser calculado como  $(1+r)(1+r) = (1+r)^2$ . También puede ser calculado como  $e^\mu e^\mu = e^{2\mu}$ . Generalizando el rendimiento del instrumento financiero en un intervalo de tiempo de tamaño  $t$  se tiene que:

$$(1+r)^t = e^{t\mu} \text{ para cualquier valor } t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Entonces;

$$S_t = S_0(1+r)^t$$

y también:

$$S_t = S_0 e^{t\mu}, \tag{2.8}$$

donde:

- $S_t$  es el valor de un instrumento financiero en el tiempo  $t$ ;
- $r$  es el rendimiento de este instrumento en cualquier intervalo de tiempo de tamaño 1;
- $\mu$  es el rendimiento instantáneo de este producto en cualquier punto del intervalo  $[0, t]$ ;
- $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  ya que se está hablando de tiempo (no existen los tiempos negativos). Cabe mencionar que no se ha especificado una condición de discretización, es decir, se está hablando de tiempo continuo.

### 2.2.4. Introducción de una ecuación diferencial

La función (2.8) es la solución a la ecuación diferencial:

$$dS_t = \mu S_t dt, \tag{2.9}$$

con condición inicial  $S_t = S_0$  para  $t=0$ .

**Demostración:** Sea  $S_t = S_0 e^{t\mu}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{dt} &= \frac{d}{dt} (S_0 e^{t\mu}) \\ &= S_0 e^{t\mu} \mu \\ &= S_t \mu. \end{aligned}$$

por ser  $S_0 e^{t\mu} = S_t$ . □

**Observaciones:** Si  $\mu = 0$  entonces (2.8) se reduce a  $S_t = S_0$ , es decir, no hay rendimiento y el precio permanece constante en  $[0, t]$ ; y (2.9) queda como  $dS_t = 0$ , es decir, el tamaño de los incrementos/decrementos infinitesimales del precio del instrumento en ese mismo intervalo de tiempo también es cero.

### 2.2.5. Difusión

Se puede sumar un término estocástico a la ecuación diferencial (2.9) obteniendo como resultado una ecuación diferencial estocástica (*SDE* por sus iniciales en inglés; *Stochastic Differential Equation*):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.10)$$

con condición inicial  $S_t = S_0$  para  $t = 0$ , cuya solución es la siguiente expresión:

$$S_t = S_0 e^{t\mu - t\frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_t} = S_0 e^{t\mu - t\frac{\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z}, \quad (2.11)$$

donde:

- $W_t$  es un proceso estocástico conocido como **proceso de Wiener** y es el que genera la existencia de la difusión, la cual se puede entender como ruido o microsaltos en el rendimiento y cuya magnitud es afectada por el coeficiente de difusión,  $W_t = \sqrt{t}z$  donde  $z \sim N(0, 1)$ , es decir,  $W_t \sim N(0, t)$ .
- A  $\sigma$  se le llama **coeficiente de difusión** (*diffusion coefficient* en inglés). Se puede entender como el equivalente a la desviación estándar para una *SDE* o como el tamaño de los microsaltos;  $\sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .
- En esta ecuación a  $\mu$  se le suele llamar **coeficiente de deriva** o **coeficiente de tendencia** (*drift coefficient* en inglés).

**Observaciones:**

- Note que si  $\sigma = 0$  (y/o de cualquier otra forma se elimina el término estocástico) la *SDE* (2.10) se reduce a (2.9); y su solución (2.11), a (2.8).
- Por otro lado si  $\mu = 0$ ,

$$S_t = S_0 e^{-t\frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_t} = S_0 e^{-t\frac{\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z}.$$

Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces  $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ . Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , luego  $e^X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ . Como  $z \sim N(0, 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{t}z &\sim N(0, t) \\ \sigma\sqrt{t}z &\sim N(0, t\sigma^2) \\ \frac{-t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z &\sim N\left(\frac{-t\sigma^2}{2}, t\sigma^2\right) \\ e^{\frac{-t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z} &\sim \text{Lognormal}\left(\frac{-t\sigma^2}{2}, t\sigma^2\right). \end{aligned}$$

Al ser una variable aleatoria lognormal, su valor esperado es:

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{-t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z}\right] = e^{\frac{-t\sigma^2}{2} + \frac{t\sigma^2}{2}} = e^0 = 1.$$

Como  $S_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ S_0 e^{-\frac{t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z} \right] = S_0 \mathbb{E} \left[ e^{-\frac{t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z} \right] = S_0 1 = S_0.$$

Se puede ver que si el coeficiente de tendencia es cero, entonces, salvo las pequeñas variaciones dadas por la difusión, el valor se mantendrá sin grandes cambios a través del tiempo, esto es, el valor del instrumento no crecerá ni decrecerá de manera considerable.

- En general, se tiene que:

$$e^{t\mu - \frac{t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z} \sim \text{Lognormal} \left( t\mu - \frac{t\sigma^2}{2}, t\sigma^2 \right),$$

$$\mathbb{E} [S_t] = S_0 \mathbb{E} \left[ e^{t\mu - \frac{t\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{t}z} \right] = S_0 \left[ e^{t\mu - \frac{t\sigma^2}{2} + \frac{t\sigma^2}{2}} \right] = S_0 [e^{t\mu}].$$

Es decir, el valor esperado de  $S_t$  en (2.11) es el valor de  $S_t$  en (2.8). Esto es, los pequeños cambios inducidos por la difusión no cambian el comportamiento general del valor del instrumento.

- Finalmente, si tanto  $\mu = 0$  y  $\sigma = 0$ , entonces (2.10) queda como  $dS_t = 0$  y (2.11) se reduce a  $S_t = S_0$  lo que significa que si el rendimiento instantáneo del instrumento es cero – lo que también puede verse por (2.7) como que el rendimiento del precio de los instrumentos es cero en el periodo de tiempo  $[0, t]$  – y si no hay difusión, entonces el precio del instrumento permanece igual en el intervalo de tiempo  $[0, t]$  y el tamaño de los incrementos/decrementos infinitesimales del precio de los instrumentos en ese mismo intervalo de tiempo también es cero.

El proceso estocástico (2.11) es la solución de la *SDE* (2.10).

### Demostración:

La *SDE* a resolver es:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Al comparar (2.10) con (2.1),

$$a(S_t, t) = \mu S_t$$

$$b(S_t, t) = \sigma S_t.$$

Sea  $f(S_t, t) = \ln(S_t)$  con derivadas continuas para  $S_t > 0$ :

$$df(S_t, t) = d \ln(S_t)$$

$$\frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f(S_t, t)}{\partial X} = \frac{1}{S_t}$$

$$\frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial X^2} = \frac{-1}{(S_t)^2}.$$

Sustituyendo en (2.2):

$$d\ln(S_t) = \left\{ 0 + \frac{1}{S_t} \mu S_t + \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{-1}{(S_t)^2} \right] (\sigma S_t)^2 \right\} dt + \left[ \frac{1}{S_t} (\sigma S_t) \right] dW_t$$

y entonces

$$d\ln(S_t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Integrando respecto al tiempo (Movellan, 2011),

$$\int_0^t d\ln(S_\tau) = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) d\tau + \int_0^t \sigma dW_\tau.$$

Como  $\int_0^t dW_\tau = W_t$  (Øksendal, 2000),

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

Como  $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$  con  $a > 0$  y  $b > 0$ , se tiene que

$$\frac{S_t}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t}$$

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

□

### 2.2.6. Saltos

Como refieren Kou (2002); Matei (2006); Penati y Pennacchi (2001); Platen y Bruti-Liberati (2010), al sumar otro término estocástico a la ecuación (2.10) se obtiene la siguiente SDE:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + JS_t dN_t, \quad (2.12)$$

con condición inicial  $S_t = S_0$  para  $t=0$ , cuya solución es la siguiente expresión:

$$S_t = S_0 \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t} \right] \left[ \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) \right] \quad (2.13)$$

donde:

- $N_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  para toda  $t$  es un proceso de conteo que indica la cantidad de saltos ocurridos en un intervalo de tamaño  $t$  o, dicho de otra manera,  $N_t$  indica la cantidad de saltos que han ocurrido desde el tiempo 0 hasta el tiempo  $t$ . En esta tesis se utilizó el proceso Poisson. Para este trabajo basta saber que  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  donde  $\lambda$  es la cantidad promedio de saltos que ocurren en un intervalo de tiempo de tamaño 1. Más detalles del tratamiento que le darán a los saltos en el Capítulo 3.
- $J$  indica el tamaño de los saltos. Dependiendo del modelo, puede considerarse un valor fijo ( $J \in \mathbb{R}$ ) o variable (ya sea una función o una variable aleatoria). En general,  $J_i$  indica el tamaño del  $i$ -ésimo salto. Por ejemplo, si  $N_t = 2$  entonces  $J_1$  es el tamaño del primer salto; y  $J_2$ , el tamaño del segundo. Se considera que  $J_0 = 0$ . De la misma manera  $\{J_i \text{ para } i \geq 1\}$  pueden considerarse constantes (iguales o diferentes entre sí), o variables definidas por una función o variable aleatoria. Dos de los modelos populares para las  $J_i$  son el de Merton (1976b) que utiliza una distribución lognormal y Kou (2002) que utiliza una doble exponencial asimétrica. En esta tesis se ha utilizado la distribución normal con  $J_i \sim \text{Normal}(\nu, \zeta^2)$  tal que  $J_i \geq -1$  de tal forma que se permite la existencia de saltos tanto positivos como negativos y no se permite que los precios de los activos sean menor a cero.

También se considera el supuesto de que todas las  $J_i$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (para cada  $t$ ), es decir, la ocurrencia de un salto en un momento futuro dado no afecta la probabilidad de la ocurrencia ni la magnitud de otro salto en otro momento posterior. Una vez realizadas nuevas observaciones se pueden recalcular los parámetros dada la nueva información observada y en ese caso saltos pasados (ya ocurridos) sí podrían aumentar (o disminuir) la probabilidad de ocurrencia de saltos y/o modificar la magnitud esperada de saltos futuros. Para fines de simplificación en esta tesis se considera la media muestral de los saltos (ver la Sección 3.3).

En este modelo se hace el supuesto de que la frecuencia y severidad de los saltos y la difusión son todas independientes entre sí:  $N_t \perp J_i$ ,  $N_t \perp W_t$  y  $J_i \perp W_t$  para todas  $t$  e  $i$ . Por un lado la difusión y los saltos son independientes (la ocurrencia de un salto/microsalto no afecta la probabilidad de ocurrencia de un microsalto/salto); y por otro lado la frecuencia de los saltos tampoco influye su severidad. El considerar estos supuestos le da mayor flexibilidad al modelo pudiéndose adaptar a saltos de cualquier tamaño y frecuencia sin forzar alguna segregación *a priori*.

**Observaciones:**

- Note que si  $J = 0$  (es decir, el tamaño de los saltos es cero) y/o de cualquier otra forma se elimina el segundo término estocástico, la SDE (2.12) se reduce a (2.10) y su solución (2.13) se reduce a (2.11).
- Observe que si  $N_t = 0$ , entonces  $dN_t = 0$  (es decir, si no ocurren saltos en un intervalo de tamaño  $t$  tampoco ocurrirán saltos en un intervalo de tamaño  $dt$ ) (2.12) de nuevo se convierte en (2.10). Ahora, como  $\prod_{i=0}^0 (1 + J_i) = (1 + J_0) = (1 + 0) = 1$  (2.13) también se convierte en (2.11).

El proceso estocástico (2.13) es la solución de la SDE (2.12).

**Demostración:**

La SDE a resolver es:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + JS_t dN_t.$$

Al comparar con (2.3) se observa que

$$\begin{aligned} a(S_t, t) &= \mu S_t \\ b(S_t, t) &= \sigma S_t \\ c(J, S_t, t) &= JS_t. \end{aligned}$$

Ahora, sea  $f(S_t, t) = \ln(S_t)$  con derivadas continuas para  $S_t > 0$ :

$$\begin{aligned} df(S_t, t) &= d\ln(S_t) \\ \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial X} &= \frac{1}{S_t} \\ \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial X^2} &= \frac{-1}{(S_t)^2} \\ f(S_t + c(J, S_t, t), t) &= \ln(S_t + JS_t). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.4),

$$\begin{aligned} d\ln(S_t) &= \left\{ 0 + \frac{1}{S_t} \mu S_t + \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{-1}{(S_t)^2}\right] (\sigma S_t)^2 \right\} dt + \left[\frac{1}{S_t} (\sigma S_t)\right] dW_t + [\ln(S_t + JS_t) - \ln(S_t)] dN_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t + \ln\left(\frac{S_t + JS_t}{S_t}\right) dN_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t + \ln(1 + J) dN_t. \end{aligned}$$

Integrando respecto al tiempo,

$$\int_0^t d\ln(S_\tau) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) d\tau + \int_0^t \sigma dW_\tau + \int_0^t \ln(1 + J) dN_\tau.$$

Como  $\int_0^t dW_\tau = W_t$  (Øksendal, 2000) y además

$\int_0^t J dN_\tau = \sum_{i=0}^{N_t} J_i$  entonces,  $\int_0^t \ln(1 + J) dN_\tau = \sum_{i=0}^{N_t} \ln(1 + J_i)$ <sup>1</sup>.

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=0}^{N_t} \ln(1 + J_i).$$

Como  $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$  y  $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$  con  $a > 0$  y  $b > 0$ :

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \ln \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i),$$

y entonces

$$\frac{S_t}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + \ln \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i)}.$$

Como  $e^{a+b} = e^a e^b$ ,

$$\frac{S_t}{S_0} = \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right] \left[ e^{\ln \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i)} \right]$$

---

<sup>1</sup> $N_t$  es una variable aleatoria discreta. Como recordará el lector en sus cursos de cálculo integral (de variable real) la integral de Riemann (que desde el punto de vista geométrico se interpreta como la área bajo la curva) se define como el supremo de las sumas inferiores (igual al ínfimo de las sumas superiores), donde dichas sumas pueden entenderse como la área de un rectángulo con altura igual al ínfimo (o supremo) de la función evaluada en el intervalo de las abscisas y base igual al tamaño del intervalo de las abscisas considerado; es decir, integrales de funciones que tomaban valores (dominio) de un subconjunto de los números reales (Haaser, LaSalle y Sullivan, 1990).

La distribución Poisson toma valores de los números naturales (y el cero) de tal forma que, pensando de manera equivalente a la integral de Riemann, cualquier rectángulo con base de tamaño menor a uno tendrá tamaño cero (porque el dominio es un conjunto discreto) y, en consecuencia, área igual con cero. Se puede entender esta integral como la suma de las veces (ocasiones) en que  $N_t \neq 0$  donde cada ocasión es el tamaño del salto  $J_i$ , una suerte de rectángulo discreto. Es decir, no se obtiene una área (base por altura) si no simplemente la suma de las alturas de puntos, donde la cantidad de puntos es la cantidad de saltos y la altura de cada punto es la intensidad de cada salto (véase la Figura 2.1). El lector puede encontrar más información sobre estas integrales de procesos de saltos en las obras de Aït-Sahalia (2004); Cont y Tankov (2004); Primbs (2008); Runggaldier (2003).

Note que  $J$  depende de  $t$  (al depender de  $N_t$ ) aunque en la notación se agrega el subíndice hasta después de integrar. Si se hace el supuesto de que  $J$  no depende de  $t$  (y en consecuencia tampoco de  $N_t$ ), es decir,  $\ln(1 + J)$  no depende de  $N_t$ , se tiene que:

$$\int_0^t \ln(1 + J) dN_\tau = \ln(1 + J) \int_0^t dN_\tau = [\ln(1 + J)] N_t.$$

$\ln(1 + J) N_t = \sum_{i=0}^{N_t} \ln(1 + J_i)$  si y sólo si  $J_i = J$  para todas las  $i$ . No basta con que  $J_i$  sean variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas,  $J$  debe ser un valor real (no una variable aleatoria) para que se cumpla lo anterior. Considerar este supuesto limita a que todos los saltos sean de igual tamaño y el proceso de difusión con saltos quedaría como:

$$S_t = S_0 \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right] (1 + J)^{N_t}.$$

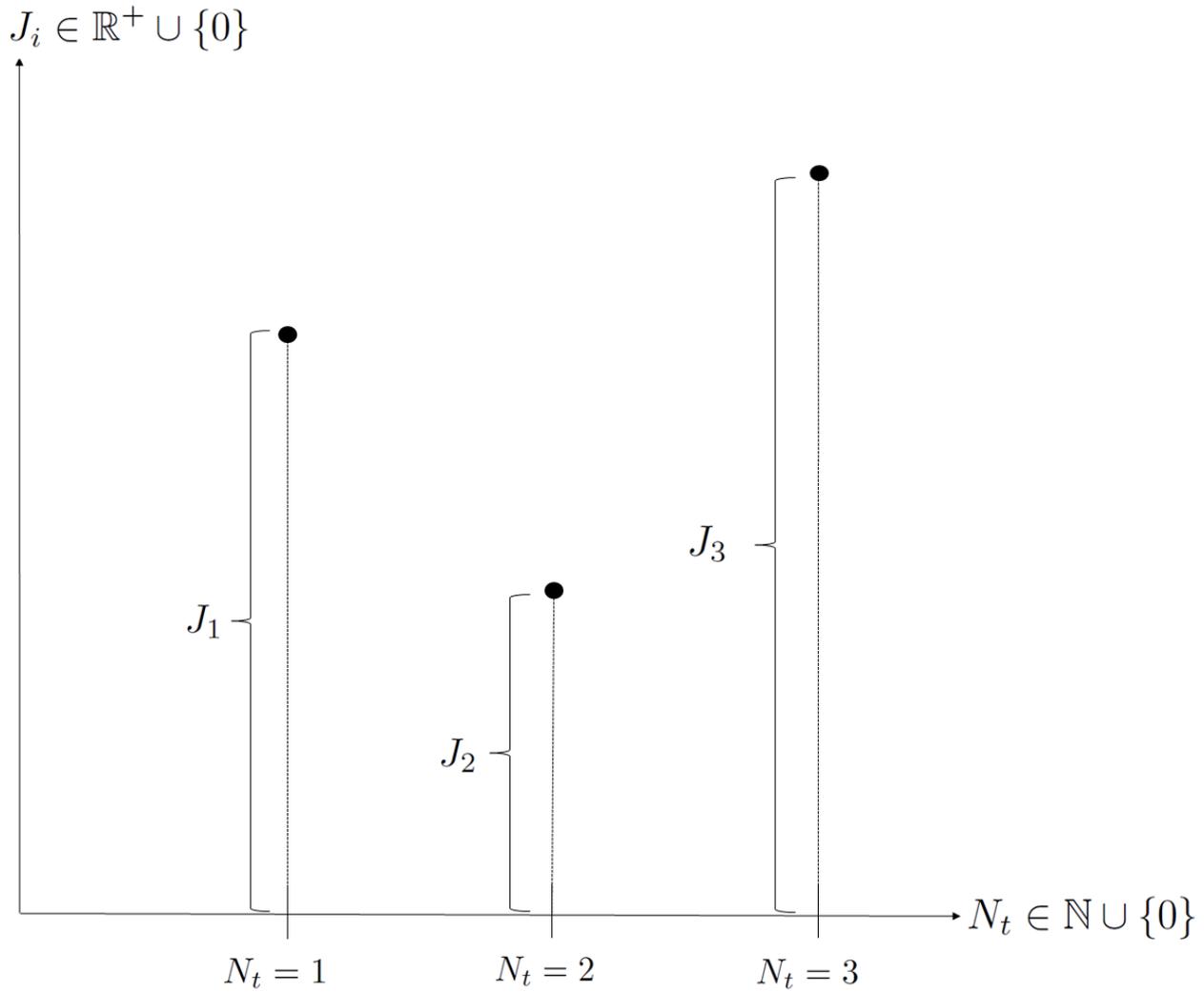


Figura 2.1: Integral de un proceso de saltos. Fuente: Elaboración propia.

y al ser  $e^{\ln(a)} = a$ , entonces

$$\frac{S_t}{S_0} = \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right] \left[ \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) \right].$$

Finalmente:

$$S_t = S_0 \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right] \left[ \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) \right]. \quad \square$$

# Capítulo 3

## Aplicación del modelo

“ *La science, mon garçon, est faite d’erreurs, mais d’erreurs qu’il est bon de commettre, car elles mènent peu à peu à la vérité.* ”

---

Jules Verne, *Voyage au centre de la Terre*, 1864

### 3.1. Producto financiero

Para esta tesis se ha elegido como instrumento financiero al dólar estadounidense teniendo una posición en euros, es decir, se trabaja con un tipo de cambio, a saber el par de divisas EUR/USD.

Suponga que usted tiene en su mano billetes de euros, a usted le conviene que el dólar se deprecie respecto al euro, o lo que es lo mismo, que el euro se aprecie respecto al dólar. Si hoy EUR/USD=1.3 significa que hoy puede cambiar 1 euro por 1 dólar con 30 centavos. A usted le convendría que mañana EUR/USD=1.4, ya que en tal caso su euro le alcanzaría para comprar más dólares. A usted no le convendría que mañana EUR/USD=1.2 porque significaría que su euro sería intercambiado por menos dólares. Siguiendo esta postura se le llama pérdida al caso en el que el valor de EUR/USD disminuye de un día a otro.

- **Dólar estadounidense:** moneda oficial de los Estados Unidos de América; también es utilizado en El Salvador, Panamá, Ecuador, Zimbabwe y Timor Leste. Su código es **USD**.
- **Euro:** moneda oficial de 18 países de la Unión Europea, a saber: Alemania, Austria, Bélgica, Chipre, Eslovaquia, Eslovenia, España, Estonia, Finlandia, Francia, Grecia, Irlanda, Italia, Letonia, Luxemburgo, Malta, Países Bajos y Portugal, también es utilizado en Andorra, Kosovo, Mónaco, Montenegro, San Marino, Vaticano y algunos territorios de los anteriores ([ECB, 2013](#)). Su código es **EUR**.

Además hay varias monedas indexadas tanto al euro como al dólar estadounidense ([Eun y Resnick, 2009](#)). EUR/USD es el par de monedas más operado del mundo. En Abril de 2013

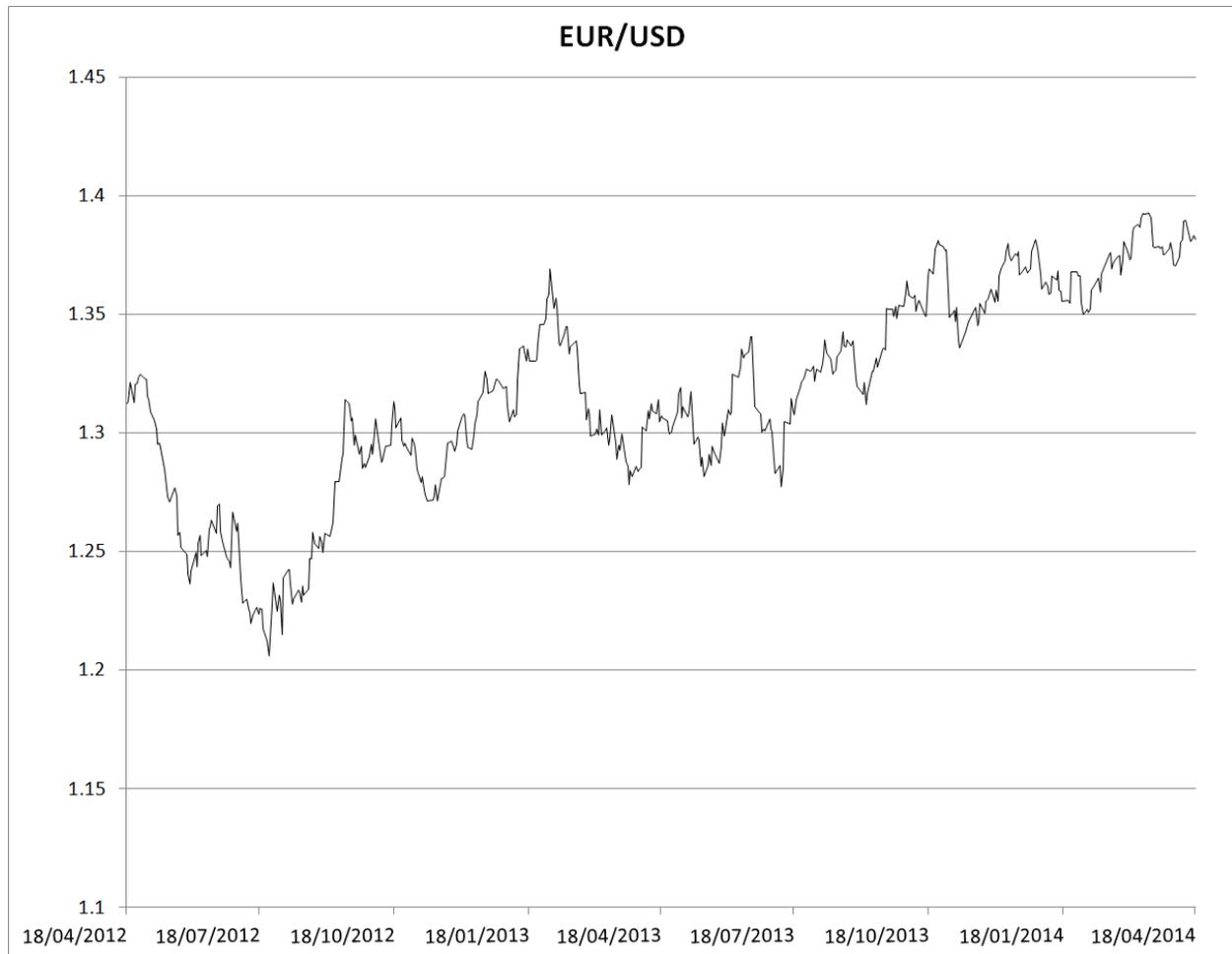


Figura 3.1: EUR/USD. Fuente: Elaboración propia.

se operaban en promedio 1,289 miles de millones de USD al día representando 24.1% del mercado cambiario ([Bank for International Settlements, 2013](#)).

**Origen de los datos:** Se utiliza el tipo de cambio diario al contado (*spot rate*) publicado por el banco central estadounidense (*Federal Reserve System*), el lector puede consultar dicha serie en: [Federal Reserve System \(2014\)](#). Se trabaja con los datos del 3 de abril de 2012 al 21 de abril de 2014 (véase la Figura 3.1).

No se toman en cuenta tarifas, comisiones ni impuestos. De esta forma no hay diferencia entre  $VaR$  verdadero y  $VaR$  estimado (hipotético) ni entre pérdidas verdaderas y pérdidas estimadas (hipotéticas).

## 3.2. Saltos

Cuando se trabaja con procesos de difusión con saltos surge una interrogante fundamental: ¿qué es un salto? De manera intuitiva se puede decir que es un movimiento más grande de

lo normal. Sin embargo, la interrogante persiste: ¿qué tan grande debe ser un movimiento para ser considerado un salto?. [Weron y otros \(2004\)](#) dan una respuesta sencilla pero intuitivamente inmediata y coherente: se considera como salto todo movimiento que exceda 3 distribuciones estándar de todos los movimientos en el precio. Hay otros autores que han trabajado en detección, filtración y separación de saltos y que han desarrollado pruebas de hipótesis y reglas de decisión más sofisticadas (como ejemplo véanse los trabajos de [Aït-Sahalia \(2004\)](#); [Aït-Sahalia y Jacod \(2009\)](#); [Fan y Fan \(2011\)](#); [Johannes y otros \(2009\)](#); [Lee y Hannig \(2010\)](#); [Lee y Mykland \(2008\)](#); [Meade \(2010\)](#); [Tauchen y Zhou \(2011\)](#)).

En esta tesis se utiliza un criterio similar al de [Weron y otros \(2004\)](#): se considera salto aquel log-rendimiento diario negativo que exceda 1, 2 ó 3 desviaciones estándar de los 10 log-rendimientos diarios inmediatamente previos. Se utilizaron desviaciones estándar móviles de tal forma que el criterio de segregación se pueda adaptar a cambios en la volatilidad del mercado de divisas y se consideraron sólo los saltos negativos ya que para fines de *VaR* son las pérdidas los movimientos de interés. Si los movimientos positivos también se consideraran como saltos, la media muestral de la distribución del tamaño de los saltos,  $\nu_t$ , resultaría cercana al cero, lo que reduciría considerablemente el impacto de los saltos (véase la Figura 3.2).

### 3.3. Parámetros

El tratamiento de los datos en esta tesis se realizó de la siguiente manera:

Del 03 de abril de 2012 al 18 de abril de 2014 hay 514 observaciones (días hábiles). Con éstas se pueden calcular 513 log-rendimientos diarios. Los primeros diez (del 03 de abril de 2012 al 17 de abril de 2012) se utilizaron para segregar los saltos.

Así, quedaron 503 log-rendimientos diarios separados en saltos y difusión y ya fue posible obtener los parámetros para calcular *VaR* el día  $t$  para el día  $t+1$ , con los datos conocidos hasta el día  $t$ .

Por ejemplo, suponga que “hoy” es el día jueves 18 de abril de 2013 (para mayor precisión, el final del día). Entonces el día de hoy ya se conoce el tipo de cambio de este día, esto es, la observación más reciente del tipo de cambio es la de hoy 18 de abril de 2013, y el día de hoy se calculará el valor en riesgo para el día de mañana viernes 19 de abril de 2013. Es decir, la información que es de interés calcular el día de hoy es aquella medida de riesgo que dará información sobre las posibles pérdidas del día de mañana. En consecuencia, sólo es posible utilizar la información conocida hasta el día de hoy, inclusive la de hoy mismo que es el dato más reciente.

Siguiendo esta misma lógica, se tendrá que esperar hasta el día de mañana viernes 19 para saber si el *VaR* calculado el día de hoy jueves 18 fue mayor o menor que las pérdidas realmente ocurridas del jueves al viernes.

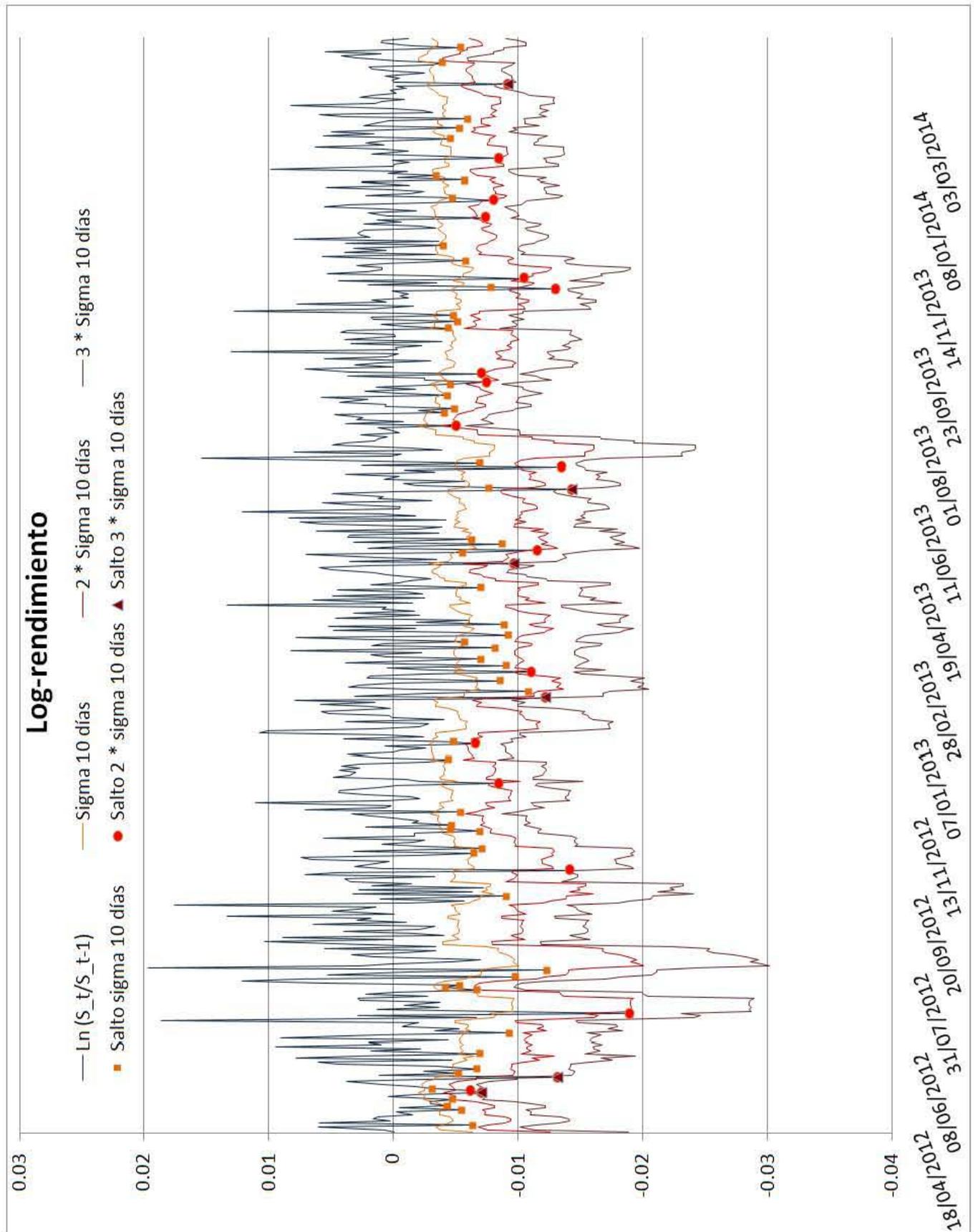


Figura 3.2: Log-rendimientos y saltos. Fuente: Elaboración propia.

A continuación se explica la forma en que se calcularon los parámetros, tomando en cuenta que en el cálculo de los siguientes cinco parámetros al día  $t$  se considera inclusive la información del mismo día actual  $t$ :

- $\mu_t$ : se calculó el promedio (media muestral) de los log-rendimientos de los últimos 10 días sólo cuando no son saltos, es decir, si en los últimos 10 días hubo un salto entonces  $\mu_t$  será el promedio de los 9 log-rendimientos restantes.
- $\sigma_t^2$ : se calculó la varianza muestral de los log-rendimientos de los últimos 10 días sólo cuando no son saltos.
- $\nu_t$ : se calculó el promedio (media muestral) de los log-rendimientos de los últimos 252 días sólo cuando son saltos.
- $\zeta_t^2$ : se calculó la varianza muestral de los log-rendimientos de los últimos 252 días sólo cuando son saltos.
- $\lambda_t$ : se calculó el promedio (media muestral) de la cantidad de saltos ocurridos de los últimos 252 días, para fines de simplificación se consideró una misma probabilidad de ocurrencia de un salto para todos los  $VaR$  siendo ésta el promedio de todas las  $\lambda_t$  a la que se denota por  $\bar{\lambda}$ .

Se eligió un rango de 10 días para los parámetros de la difusión de tal forma que el modelo se adaptara velozmente a cambios en el comportamiento del mercado de divisas. Asimismo se consideraron 252 días para los parámetros de los saltos para evitar que haya parámetros nulos, ya que si en los últimos  $n$  días no hubo saltos entonces  $\nu_t = 0$  y  $\zeta_t^2$  no existe, y también para considerar toda la información histórica disponible (que en este caso es la de un año) como referencia para los saltos que podrían ocurrir en el día  $t$ .

En este modelo sólo es posible simular el valor del producto financiero para aquellos días  $t$  en los que están disponibles los cinco parámetros en ese mismo día. En dichos casos se calcularon sucesiones de 252 valores en riesgo, del 18 de abril de 2013 al 18 de abril de 2014 (todos días hábiles), con la intención de estimar las pérdidas que ocurrirían del 19 de abril de 2013 al 21 de abril de 2014 respecto al día hábil inmediato anterior.

### 3.4. Simulación

Diversos autores calculan  $VaR$  con diferentes valores de  $p$  (por ejemplo, 95 %, 99 % y 99.9 %) a múltiples horizontes de tiempo (como 1, 7, 10 ó 28 días) y utilizando distintos tamaños de muestra (que van de los 252, 500, 510 ó 1000 días hasta 8 años). Usualmente se consideran días hábiles, un año contiene aproximadamente 252. Algunas autoridades determinan los requisitos que deben cumplir las entidades financieras en sus cálculos de  $VaR$  (Basel Committee on Banking Supervision, 1996, 2011c; CCV, 2010; CNBV, 2012; CONSAR, 2013; Jorion, 2007).

Para calcular el valor en riesgo a un día (al día  $t + 1$ ) del producto financiero calculado el día  $t$  (considerando toda la información obtenida hasta el día  $t$ ) que se denota por  $VaR_q(t)$  se siguió el siguiente procedimiento:

1. Se obtuvo la serie de datos, se calcularon los log-rendimientos diarios, se segregaron los saltos y se calcularon los parámetros:  $\mu_t$ ,  $\sigma_t^2$ ,  $\nu_t$ ,  $\varsigma_t^2$  y  $\bar{\lambda}$  como recién se describió.
2. Se obtuvieron 1,000 valores pseudo-aleatorios de  $z_t \sim N(0, 1)$ .
3. Se obtuvieron 1,000 valores pseudo-aleatorios de  $N_t \sim \text{Poisson}(\bar{\lambda})$ , los cuales fueron una sucesión de ceros y unos.
4. Para toda  $i$  se obtuvieron 1,000 valores pseudo-aleatorios de  $J_i \sim N(\nu_t, \varsigma_t^2)$ , los cuales se obtuvieron simulando otros 1,000 valores de  $z_t \sim N(0, 1)$ , donde  $J_i = z_t \varsigma_t + \nu_t$ . En este caso sólo se requirió un solo  $i$  ( $i = 1$ )<sup>1</sup>.
5. Se calcularon los 1,000 valores pseudo-aleatorios de  $S_{t+1}$  siguiendo la siguiente fórmula:

$$S_{t+1} = S_t \left[ e^{(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2) + \sigma_t \sqrt{1} z_t} \right] \left[ \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) \right].$$

El tamaño del periodo es 1 (un día hábil). Como la frecuencia de observación de los datos es diaria, de un día a otro a lo más puede ocurrir un solo salto, esto es:

- cuando de  $t$  a  $t + 1$  sí ocurre un salto,  $N_t = 1$  y  $\prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) = \prod_{i=0}^1 (1 + J_i) = (1 + J_0)(1 + J_1) = (1 + 0)(1 + J_1) = (1 + J_1)$ ; y
- cuando de  $t$  a  $t + 1$  no ocurre un salto,  $N_t = 0$  y  $\prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i) = \prod_{i=0}^0 (1 + J_i) = (1 + J_0) = 1 + 0 = 1$ .

6. Se ordenaron de mayor a menor los 1,000 valores simulados de  $S_{t+1}$ , se tomó el valor 950 más pequeño y le fue restado a  $S_t$  (el último valor conocido hasta  $t$ )<sup>2</sup> obteniendo de esta forma  $VaR_{95\%}(t)$ <sup>3</sup>.

De la misma forma se obtuvieron  $VaR_{99\%}(t)$ ,  $VaR_{99.5\%}(t)$  y  $VaR_{99.9\%}(t)$ .

Posteriormente se “obtuvo” una nueva observación del mercado (como si hubiera transcurrido un día hábil), se calculó el nuevo log-rendimiento, se determinó si era salto o no, se calcularon los nuevos parámetros y se repitió el procedimiento por los restantes 251 días.

De esta forma se obtuvieron cuatro sucesiones de valor en riesgo de 252 elementos cada una:

- $VaR_{95\%}(2013-04-18), \dots, VaR_{95\%}(2014-04-18)$ ,
- $VaR_{99\%}(2013-04-18), \dots, VaR_{99\%}(2014-04-18)$ ,

<sup>1</sup>Como los valores de los productos financieros no pueden ser negativos, en el caso de que  $J_i < -1$  debe considerarse  $J_i = -1$ .

<sup>2</sup>Si se desea tener  $VaR_q(t)$  en términos del valor del instrumento financiero no es necesario hacer dicha resta y se tiene una definición alternativa de valor en riesgo donde  $\mathbb{P}[S_{t+1} < VaR_q(t)] \leq p$ .

<sup>3</sup>De esta forma el cuantil sí forma parte de la muestra aleatoria.

- $VaR_{99.5\%}(2013-04-18), \dots, VaR_{99.5\%}(2014-04-18)$ , y
- $VaR_{99.9\%}(2013-04-18), \dots, VaR_{99.9\%}(2014-04-18)$ .

Estos son los datos que se utilizaron para realizar la prueba de hipótesis de la cual se habla en el siguiente capítulo.

También es posible simular directamente la ecuación diferencial estocástica en lugar de su solución. Para esto se recurre a métodos numéricos. Estos son particularmente útiles cuando la *SDE* no tiene solución analítica. El lector interesado en este tema puede consultar el trabajo de [Higham \(2001\)](#), mientras que puede consultar una extensión del método utilizado en el artículo anterior para ecuaciones que involucren saltos en [Higham y Kloeden \(2005\)](#).

# Capítulo 4

## Resultados y discusión

“ Every fabulist has told how the human mind has always struggled like a frightened bird to escape the chaos which caged it; how — appearing suddenly and inexplicably out of some unknown and unimaginable void; passing half its known life in the mental chaos of sleep; victim even when awake, to its own ill-adjustment, to disease, to age, to external suggestion, to nature’s compulsion; doubting its sensations, and, in the last resort, trusting only to instruments and averages — after sixty or seventy years of growing astonishment, the mind wakes to find itself looking blankly into the void of death. That it should profess itself pleased by this performance was all that the highest rules of good breeding could ask; but that it should actually be satisfied would prove that it existed only as idiocy. ”

---

Henry Adams, *The education of Henry Adams*, 1918

### 4.1. Hipótesis

El **Backtesting** es una herramienta para validar un modelo de *VaR* (Jorion, 2007). En este capítulo se realiza *backtesting* del modelo formalizando con una prueba de hipótesis.

El *backtesting* del valor en riesgo se realiza comparando los estimados de las pérdidas que se esperan al día siguiente con las pérdidas efectivamente ocurridas en ese siguiente día. Una violación ocurre cuando las pérdidas reales exceden el estimado. Distintos métodos de estimación del valor en riesgo se pueden comparar contando las violaciones (Basel Committee on Banking Supervision, 2013).

#### 4.1.1. Resultados preliminares

**Corolario 4.1** (Hoel (1962); Mood y otros (1974); Wilks (1938)). [Teorema de Wilks] Sea  $X_1, \dots, X_T$  una muestra con distribución conjunta  $f_{X_1, \dots, X_T}(x_1, \dots, x_T; \theta)$  donde se hace el

supuesto de que  $\theta$  satisface condiciones de regularidad muy generales. Suponga que el espacio parametral  $\Theta$  es unidimensional. Probando la hipótesis  $H_0 : \theta = \theta_0$ , donde  $\theta_0$  es conocida,  $-2 \ln(\Lambda_T)$  se distribuye aproximadamente  $\chi^2(1)$  cuando  $H_0$  se cumple y el tamaño de la muestra  $T$  es grande, donde:

- $\Lambda_T$  es la variable aleatoria que tiene valores  $\tilde{\lambda}_T = \sup_{\Theta_0} L(\theta; x_1, \dots, x_T) / \sup_{\Theta} L(\theta; x_1, \dots, x_T)$ , el cual es el cociente generalizado de verosimilitud para una muestra de tamaño  $T$ ;
- $\Theta_0$  es el subconjunto de  $\Theta$  especificado por  $H_0$ ;
- $L$  es la función de verosimilitud:  $L(\theta; x_1, \dots, x_T) = \prod_{i=1}^T f(x_i; \theta)$ . □

El principio del cociente generalizado de verosimilitud establece que  $H_0$  debe rechazarse para  $\tilde{\lambda}_T$  pequeña pero, como  $-2 \ln(\tilde{\lambda}_T)$  se incrementa cuando  $\tilde{\lambda}_T$  disminuye, una prueba de hipótesis equivalente a la prueba del cociente generalizado de verosimilitud es una que rechaza  $H_0$  para  $-2 \ln(\tilde{\lambda}_T)$  grande<sup>1</sup>.

En efecto, como  $\tilde{\lambda}_T \in [0, 1]$  cuando  $\tilde{\lambda}_T \rightarrow 1$ , entonces  $H_0$  se cumple y debería aceptarse. Si  $\tilde{\lambda}_T \rightarrow 0$ ,  $H_0$  no se cumple y debería rechazarse.

Además, cuando  $\tilde{\lambda}_T \rightarrow 1$ , entonces  $\ln(\tilde{\lambda}_T) \rightarrow 0$ ; y cuando  $\tilde{\lambda}_T \rightarrow 0$ ,  $\ln(\tilde{\lambda}_T) \rightarrow -\infty$ .

Finalmente, cuando  $\tilde{\lambda}_T \rightarrow 1$ , entonces  $-2 \ln(\tilde{\lambda}_T) \rightarrow 0$ ; y cuando  $\tilde{\lambda}_T \rightarrow 0$ ,  $-2 \ln(\tilde{\lambda}_T) \rightarrow \infty$ .

Ahora, como el corolario da una distribución aproximada de los valores de  $-2 \ln(\tilde{\lambda}_T)$ , cuando  $H_0$  se cumple una prueba de hipótesis de tamaño  $\alpha$  es:

$$\gamma: \text{Rechazar } H_0 \text{ si y sólo si } -2 \ln(\tilde{\lambda}_T) > \chi_{1-\alpha}^2(1),$$

donde  $\chi_{1-\alpha}^2(1)$  es el  $(1 - \alpha)$ -ésimo cuantil de una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad. Es decir, si  $\chi \sim \chi^2(1)$ , entonces  $\mathbb{P}[\chi \leq \chi_{1-\alpha}^2(1)] = 1 - \alpha$ .

Recordar que una prueba de hipótesis es de tamaño  $\alpha$  si<sup>2</sup>:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}[\text{Rechazar } H_0] = \alpha.$$

Es decir, la máxima probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $H_0$  se cumple, también llamada la probabilidad de error tipo I es  $\alpha$ .

---

<sup>1</sup>Se utiliza la tilde en  $\tilde{\lambda}_T$  para distinguirla de  $\lambda_t$ , la intensidad del proceso Poisson  $N_t$  descrita en la Sección 3.3. Tampoco confundir  $\tilde{\lambda}_T$  con  $\bar{\lambda}$ .

<sup>2</sup>No confundir  $p$  con  $\alpha$ .

En efecto:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\text{Rechazar } H_0] &= \mathbb{P}\left[-2\ln(\tilde{\lambda}_T) > \chi_{1-\alpha}^2(1)\right] \\
 &= 1 - \mathbb{P}\left[-2\ln(\tilde{\lambda}_T) \leq \chi_{1-\alpha}^2(1)\right] \\
 &= 1 - (1 - \alpha) \\
 &= \alpha.
 \end{aligned}$$

#### 4.1.2. Hipótesis nula

$$\text{Sea } X_t = \begin{cases} 1 & \text{si } l_t \in (VaR_q(t), +\infty), \\ 0 & \text{si } l_t \notin (VaR_q(t), +\infty). \end{cases}$$

**Definición 4.2.** Se dice que una sucesión de valores en riesgo<sup>3</sup>  $\{(VaR_q(t), +\infty)\}_{t=1}^T$  tiene **cobertura incondicional correcta** si  $\mathbb{P}[X_t = 1] = p$  para toda  $t$  (Christoffersen, 1998; Jorion, 2007)<sup>4</sup>.  $\square$

El objetivo general de esta tesis es determinar si es posible construir  $\{(VaR_q(t), +\infty)\}_{t=1}^T$  con cobertura incondicional correcta, donde  $S_t$  para toda  $t$  se simularon utilizando procesos de difusión con saltos, es decir,  $S_t$  para toda  $t$  están determinadas por (2.5).

Por lo anterior la **hipótesis nula** es:

$$H_0 : \mathbb{P}[X_t = 1] = p \text{ para toda } t.$$

#### Observaciones:

Si se acepta  $H_0$ :

$$\mathbb{P}[X_t = 1] = p \text{ para toda } t, \text{ y}$$

$$\mathbb{P}[X_t = 0] = 1 - p \text{ para toda } t.$$

$$\mathbb{P}[l_t \in (VaR_q(t), +\infty)] = p \text{ para toda } t, \text{ y}$$

$$\mathbb{P}[l_t \notin (VaR_q(t), +\infty)] = 1 - p \text{ para toda } t.$$

$$\mathbb{P}[VaR_q(t) < l_t < +\infty] = p \text{ para toda } t, \text{ y}$$

$$\mathbb{P}[-\infty < l_t \leq VaR_q(t)] = 1 - p \text{ para toda } t.$$

$$\mathbb{P}[l_t > VaR_q(t)] = p \text{ para toda } t, \text{ y}$$

$$\mathbb{P}[l_t \leq VaR_q(t)] = 1 - p = q \text{ para toda } t.$$

<sup>3</sup>A la sucesión de intervalos  $\{(VaR_q(t), +\infty)\}_{t=1}^T$  se le llama **sucesión de valores en riesgo**.

<sup>4</sup>No confundir esta definición de cobertura (*coverage*) con la definición de cobertura de riesgo (*hedge*) (Hull, 2009).

Se comparó esta última igualdad con (1.1) y (1.2).

Se observa que si  $X_t \sim \text{Bernoulli}(\theta)$  para toda  $t$ , entonces  $f(x_t) = \theta^{x_t}(1 - \theta)^{1-x_t}$  para toda  $t$  con  $\theta \in \Theta = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Sea  $\hat{\theta}$  el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ . Por lo anterior, y por ser  $X_1, \dots, X_T$  una muestra aleatoria Bernoulli:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t}{T} = \bar{X}.$$

En particular, cuando se acepta  $H_0: X_t \sim \text{Bernoulli}(p)$  para toda  $t$ , entonces  $f(x_t) = p^{x_t}(1 - p)^{1-x_t}$  para toda  $t$  con  $p = \theta_0 \in \Theta_0 = \{p\} \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  con  $p = \theta_0$  conocida.

### 4.1.3. Prueba de hipótesis

$\gamma$ : Rechazar  $H_0$  si y sólo si  $LR > \chi_{1-\alpha}^2(1)$ ,

donde:

- $\chi_{1-\alpha}^2(1)$  es el  $(1 - \alpha)$ -ésimo cuantil de una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad, es decir, si  $\chi \sim \chi^2(1)$ ,  $\mathbb{P}[\chi \leq \chi_{1-\alpha}^2(1)] = 1 - \alpha$ ;
- $LR = 2 \ln \left[ \bar{X}^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \bar{X})^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right] - 2 \ln \left[ p^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - p)^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right]$ ;
- $\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^T x_t}{T}$ .

$LR = -2 \ln(\tilde{\lambda}_T)$  ya que:<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>LR de las siglas en inglés: *Likelihood Ratio*.

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_T &= \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta; x_1, \dots, x_T)}{\sup_{\Theta} L(\theta; x_1, \dots, x_T)} \\
&= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{t=1}^T f(x_t; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{t=1}^T f(x_t; \theta)} \\
&= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{t=1}^T \theta^{x_t} (1 - \theta)^{1-x_t}}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{t=1}^T \theta^{x_t} (1 - \theta)^{1-x_t}} \\
&= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \left[ \theta^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \theta)^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right]}{\sup_{\theta \in \Theta} \left[ \theta^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \theta)^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right]} \\
&= \frac{p^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - p)^{T - \sum_{t=1}^T x_t}}{\hat{\theta}^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \hat{\theta})^{T - \sum_{t=1}^T x_t}} \\
&= \frac{p^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - p)^{T - \sum_{t=1}^T x_t}}{\bar{X}^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \bar{X})^{T - \sum_{t=1}^T x_t}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2 \ln[\tilde{\lambda}_T] &= -2 \left\{ \ln \left[ \frac{p^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - p)^{T - \sum_{t=1}^T x_t}}{\bar{X}^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \bar{X})^{T - \sum_{t=1}^T x_t}} \right] \right\} \\
&= -2 \left\{ \ln \left[ p^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - p)^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right] - \ln \left[ \bar{X}^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \bar{X})^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right] \right\} \\
&= 2 \ln \left[ \bar{X}^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - \bar{X})^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right] - 2 \ln \left[ p^{\sum_{t=1}^T x_t} (1 - p)^{T - \sum_{t=1}^T x_t} \right] \\
&= LR.
\end{aligned}$$

Note que si no hubo violaciones, entonces  $\bar{X} = 0$  y  $LR$  está indeterminado. En caso de que esto ocurra para un  $p$  que represente uno o menos de un día del periodo analizado, se concluirá que  $H_0$  debe ser aceptada (para 252 días,  $p = 0.5\%$  representa 1.26 días esperados con violación y  $p = 0.1\%$  representa 0.252 días esperados con violación).

Recordar que si hay muchos menos días con violación de los esperados esto puede ser señal de que algo anda mal y, por el valor de  $LR$  que se obtendría,  $H_0$  sería rechazada. Por ejemplo, si  $p = 5\%$ , en 252 días se esperan 12.6 días con violación. En ese caso si se obtuvieran 6 o menos violaciones, entonces  $H_0$  sería rechazada por la prueba de hipótesis.

## 4.2. Cobertura y análisis

Al comparar las cuatro sucesiones de valor en riesgo mencionadas en la Sección 3.4 (considerando saltos) con los movimientos en los valores realmente ocurridos durante ese periodo, se obtienen cuatro sucesiones de  $X_t$  para cada criterio de segregación de saltos con las cuales se puede realizar la prueba de hipótesis.

Se eligió  $\alpha = 0.05$ . Entonces  $\chi_{1-0.05=0.95}^2(1) = 3.84$  (Mood y otros, 1974).

En los cuadros 4.1, 4.2 y 4.3 se resumen el número de violaciones observadas, los estadísticos  $LR$  y los resultados de las pruebas de hipótesis que se obtuvieron para cada valor de  $p$  utilizando el modelo de difusión con saltos cuando estos últimos se definen como aquellos log-rendimientos negativos que exceden una, dos o tres desviaciones estándar (véanse las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 respectivamente).

$p$	Violaciones	$LR$	$H_0$
5 %	11	0.22	Aceptada
1 %	2	0.12	Aceptada
0.5 %	1	0.06	Aceptada
0.1 %	0	Indeterminado	Aceptada

Cuadro 4.1: Con una desviación estándar.

$p$	Violaciones	$LR$	$H_0$
5 %	24	8.68	Rechazada
1 %	2	0.12	Aceptada
0.5 %	0	Indeterminado	Aceptada
0.1 %	0	Indeterminado	Aceptada

Cuadro 4.2: Con dos desviaciones estándar.

$p$	Violaciones	$LR$	$H_0$
5 %	24	8.68	Rechazada
1 %	8	7.64	Rechazada
0.5 %	4	3.79	Aceptada
0.1 %	1	1.26	Aceptada

Cuadro 4.3: Con tres desviaciones estándar.

Se simularon también cuatro sucesiones de valor en riesgo del mismo periodo y para el mismo producto financiero, pero sin considerar la existencia de saltos, donde:

$$S_{t+1} = S_t \left[ e^{(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2)1 + \sigma_t\sqrt{1} z_t} \right].$$

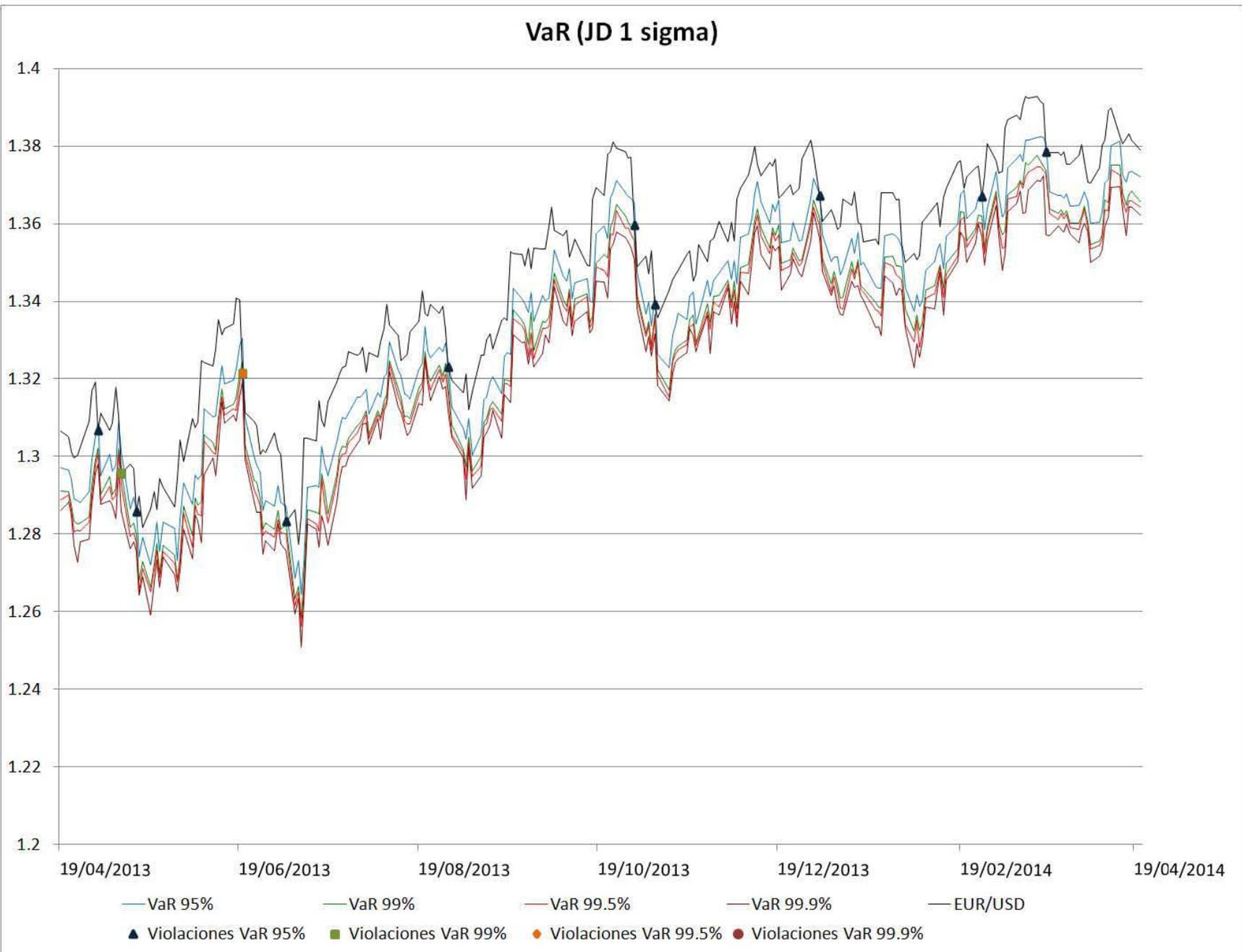


Figura 4.1: VaR difusión con saltos (una desviación estándar). Fuente: Elaboración propia.

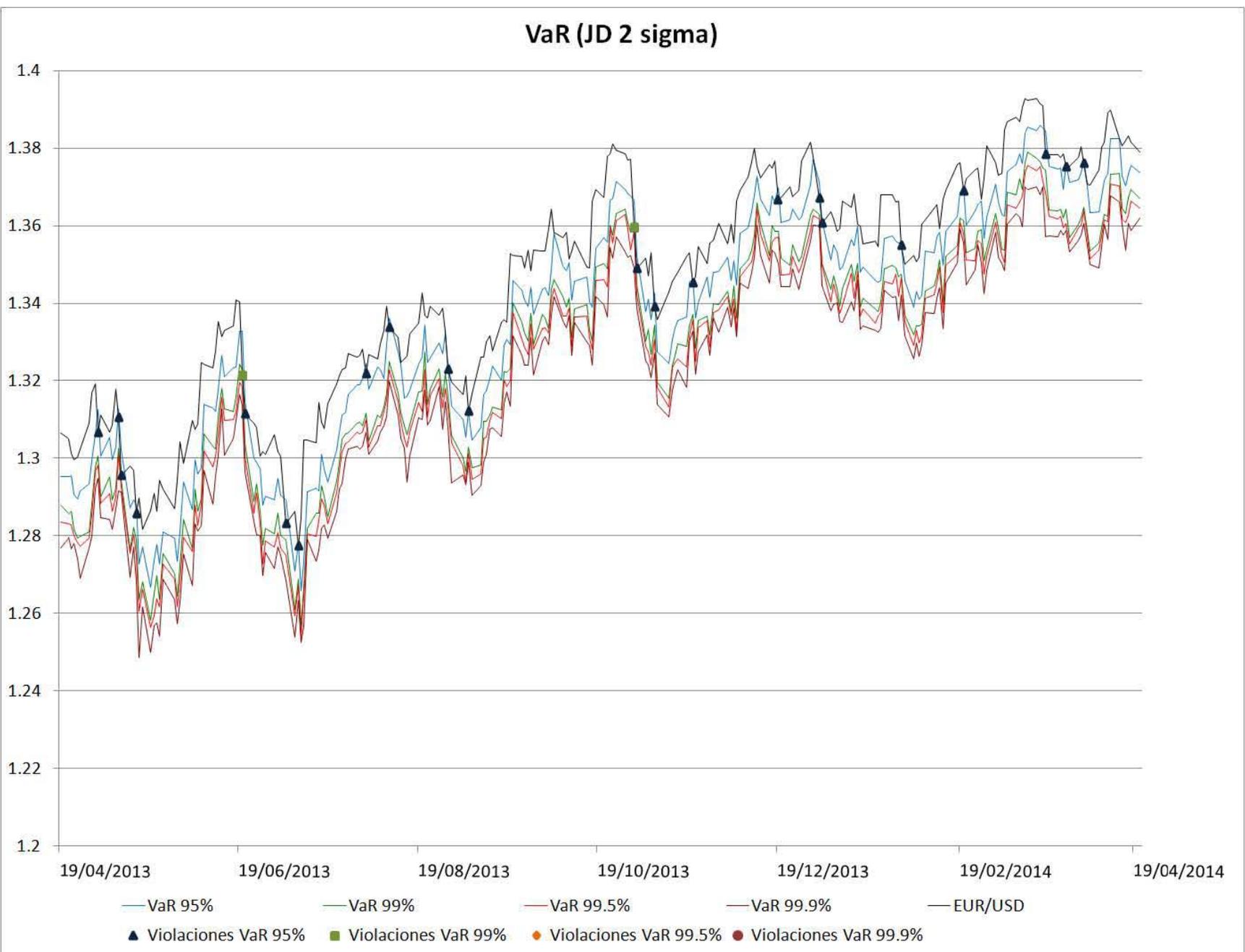


Figura 4.2: *VaR* difusión con saltos (dos desviaciones estándar). Fuente: Elaboración propia.

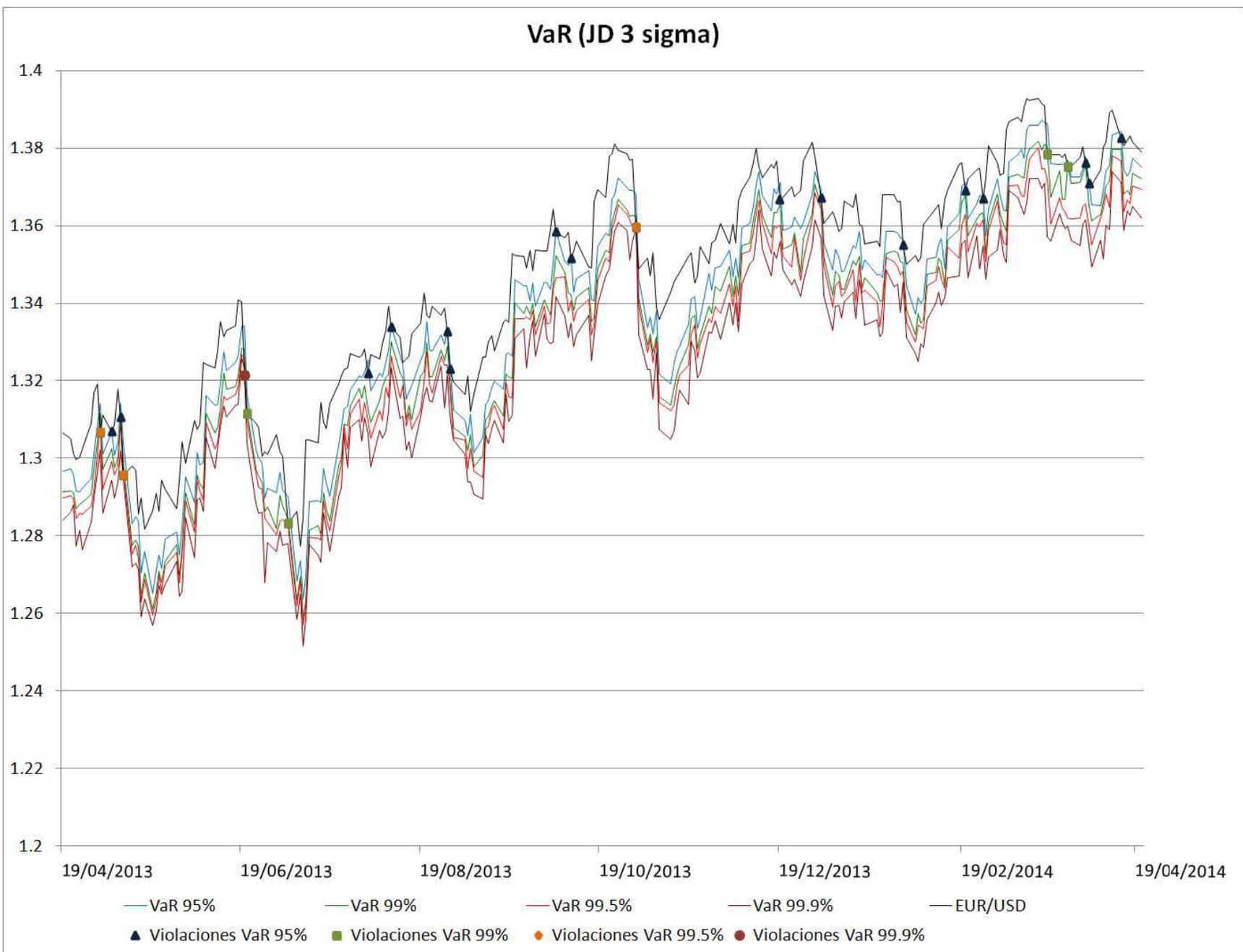


Figura 4.3: VaR difusión con saltos (tres desviaciones estándar). Fuente: Elaboración propia.

Al comparar estos valores con los movimientos en los rendimientos efectivamente ocurridos al día siguiente, considerando la misma prueba de hipótesis, se obtuvieron los resultados descritos en el Cuadro 4.4 (véase la Figura 4.4).

$p$	Violaciones	$LR$	$H_0$
5 %	19	2.98	Aceptada
1 %	6	3.50	Aceptada
0.5 %	6	9.34	Rechazada
0.1 %	3	9.40	Rechazada

Cuadro 4.4: Difusión sin saltos.

También sin considerar la existencia de saltos se calcularon las cuatro sucesiones de valor en riesgo por medio del modelo paramétrico (Duffie y Pan, 1997; Hull, 2009) para los mismos cuatro valores de  $p$ , donde se considera que los log-rendimientos se distribuyen normalmente, esto es:

$$\ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2). \quad (4.1)$$

Se tiene que

$$VaR_q(t) = S_{t-1} - S_{t-1} \left[ e^{z_p \sigma_t + \mu_t} \right], \quad (4.2)$$

donde  $z_p$  es el  $p$ -ésimo cuantil de una distribución  $N(0, 1)$ <sup>6</sup>. Si  $z \sim N(0, 1)$ ,  $\mathbb{P}[z \leq z_p] = p$ .

---

<sup>6</sup> De la Definición 1.1:

$$\mathbb{P}[l_t > VaR_q(t)] \leq p.$$

Como  $l_t = -(S_t - S_{t-1}) = S_{t-1} - S_t$ ,

$$\mathbb{P}[S_{t-1} - S_t > VaR_q(t)] \leq p.$$

Por (4.2):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_{t-1} - S_t > S_{t-1} - S_{t-1} (e^{z_p \sigma_t + \mu_t})] &\leq p \\ \mathbb{P}[-S_t > -S_{t-1} (e^{z_p \sigma_t + \mu_t})] &\leq p \\ \mathbb{P}[S_t < S_{t-1} (e^{z_p \sigma_t + \mu_t})] &\leq p \\ \mathbb{P}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}} < e^{z_p \sigma_t + \mu_t}\right] &\leq p \\ \mathbb{P}\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) < z_p \sigma_t + \mu_t\right] &\leq p \\ \mathbb{P}\left[\frac{\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \mu_t}{\sigma_t} < z_p\right] &\leq p. \end{aligned}$$

Es decir,  $VaR_q(t)$  cumple la definición de cuantil conforme (4.1).

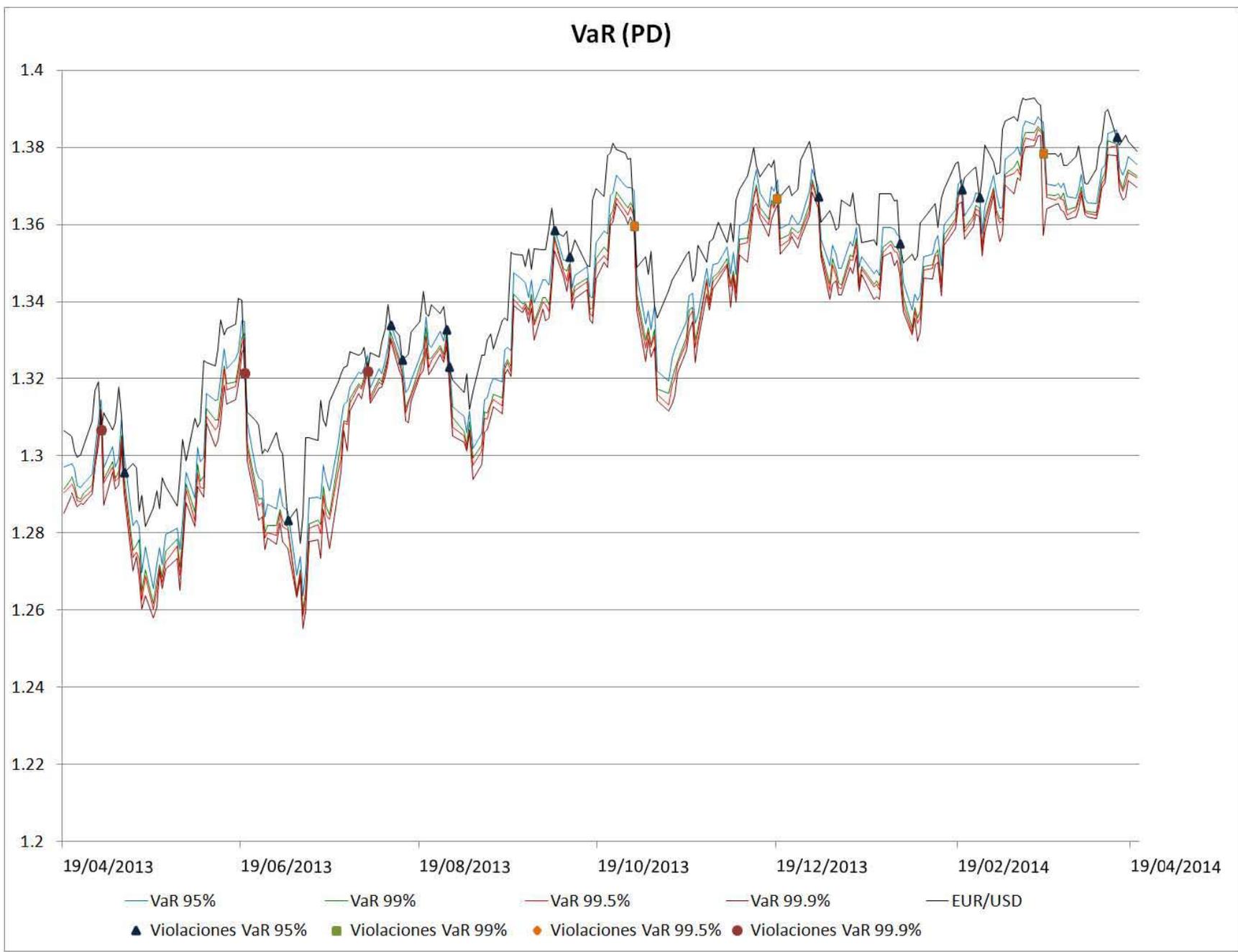


Figura 4.4: VaR difusión pura. Fuente: Elaboración propia.

Asimismo, se comparó de nueva cuenta esos valores con los movimientos en los rendimientos efectivamente ocurridos al día siguiente y se ejecutó la misma prueba de hipótesis obteniendo los resultados del Cuadro 4.5 (véase la Figura 4.5).

$p$	Violaciones	$LR$	$H_0$
5 %	19	2.98	Aceptada
1 %	6	3.50	Aceptada
0.5 %	6	9.34	Rechazada
0.1 %	5	20.47	Rechazada

Cuadro 4.5: Modelo paramétrico.

Además de aceptar o rechazar la hipótesis nula, y en consecuencia el modelo, con esta información también es posible comparar los modelos que sí tengan cobertura incondicional correcta. Es sensato preferir aquel que tenga menor cantidad de violaciones.

$p$	A	B	C
95 %	13	JD $1\sigma$	JD $1\sigma$
1 %	3	JD $1\sigma$ ó $2\sigma$	JD $1\sigma$ ó $2\sigma$
0.5 %	1	JD $1\sigma$	JD $2\sigma$
0.1 %	0	JD $1\sigma$ ó $2\sigma$	JD $1\sigma$ ó $2\sigma$

Cuadro 4.6: Comparación de modelos.

En el Cuadro 4.6,

- La columna A es la cantidad de violaciones esperadas en 252 días;
- La columna B es el modelo con cobertura incondicional correcta y cantidad de violaciones más cercana a las esperadas;
- La columna C es el modelo con cobertura incondicional correcta y menor cantidad de violaciones;
- JD  $1\sigma$  indica el modelo de difusión con saltos considerando una desviación estándar;
- JD  $2\sigma$  indica el modelo de difusión con saltos considerando dos desviaciones estándar;
- JD  $3\sigma$  indica el modelo de difusión con saltos considerando tres desviaciones estándar.

También es posible comparar la magnitud de los valores en riesgo. Se preferirá aquel que se acerque más a la realidad, es decir, aquel cuya magnitud se acerque más a la pérdida realmente ocurrida sin que ésta exceda el  $VaR$ . Por ejemplo, si un modelo determina que el  $VaR$  del día de mañana es de 20 centavos y otro modelo determina un  $VaR$  de 15 centavos y al día siguiente la pérdida realmente ocurrida fue de 10 centavos en ningún modelo hubo violación, pero se preferiría aquel que se acercó más a la pérdida realmente ocurrida, es decir, aquel que pronosticó una pérdida de 15 centavos.

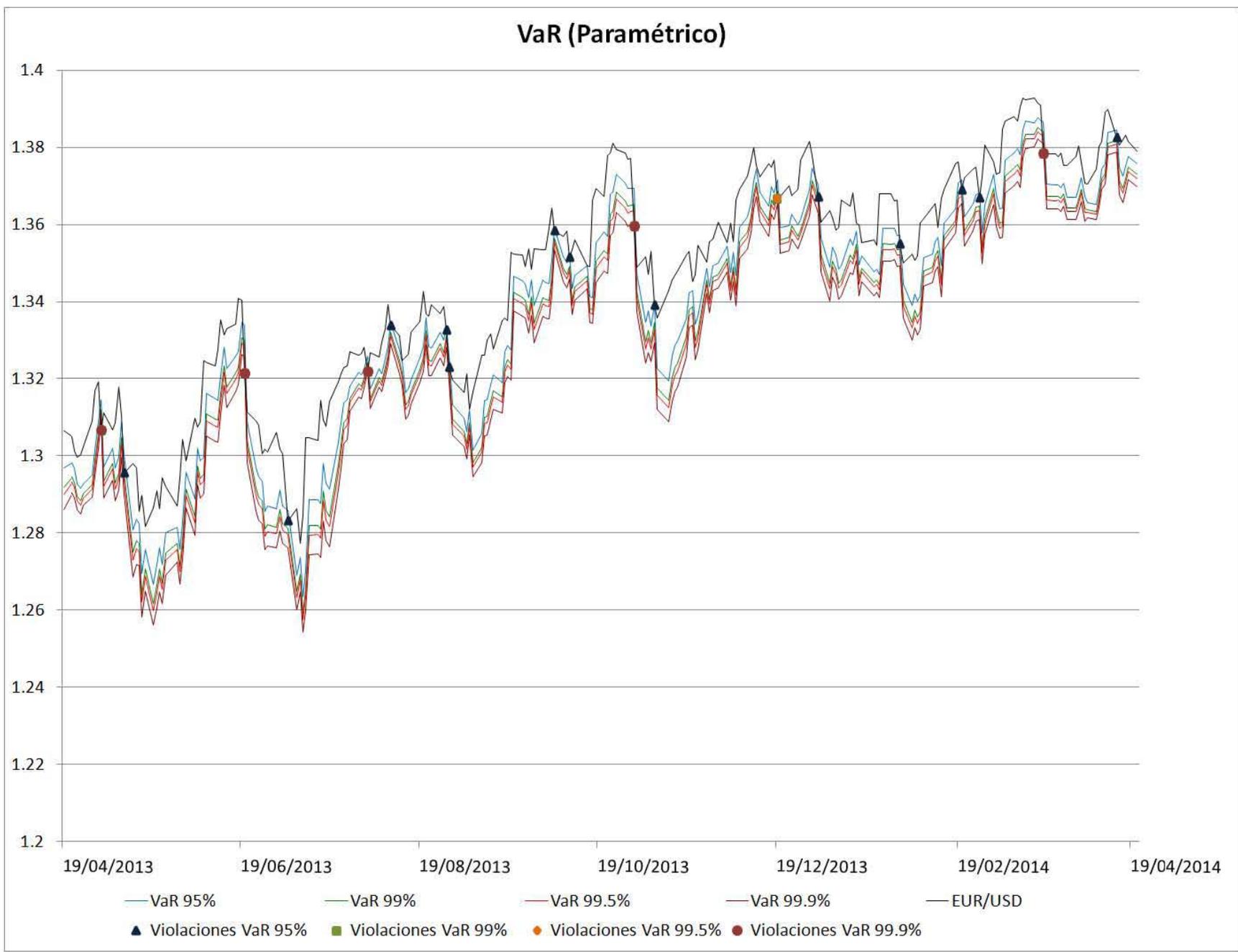


Figura 4.5: VaR paramétrico. Fuente: Elaboración propia.

Para observar esto, en aquellos modelos que sí obtuvieron cobertura incondicional correcta se calculó la distancia promedio del valor simulado al valor realmente ocurrido<sup>7</sup>, es decir,

$$\frac{\sum_{t=1}^{n^*} S_t - [S_{t-1} - VaR_q(t)]}{n^*},$$

donde:

- $S_{t-1}$  y  $S_t$  son los valores realmente ocurridos;
- $S_{t-1} - VaR_q(t)$  es el valor simulado de  $S_t$  al nivel de probabilidad  $p$ ;
- $n^*$  es el número de días, en el periodo de evaluación de 252 días, en los que no hubo violaciones;  $n^* \leq 252$ .

Estos resultados se resumen en el Cuadro 4.7.

$p$	JD $3\sigma$	JD $2\sigma$	JD $1\sigma$	PD	Paramétrico
95 %	NA	NA	0.0118	0.01039	<b>0.01037</b>
1 %	NA	0.0181	0.0172	<b>0.0134</b>	0.0136
0.5 %	<b>0.0176</b>	0.0206	0.0189	NA	NA
0.1 %	0.0226	0.0248	<b>0.0220</b>	NA	NA

Cuadro 4.7: Distancias promedio al valor observado.

NA denota No Aplica (no se calcula cuando no hay cobertura incondicional correcta), mientras que PD significa difusión pura, es decir, el modelo que no considera saltos.

En el mismo cuadro se destaca en negritas el valor más pequeño por nivel de probabilidad, es decir, el modelo que arroja la distancia promedio a las pérdidas reales más pequeña y en consecuencia la más realista por cada nivel de probabilidad para estos datos.

Otro punto a tomar en consideración es el tamaño de las violaciones. Para esto se considera la medida de riesgo conocida como  $VaR$  condicional ( $CVaR$ ) también denominada *expected shortfall* ( $ES$ ), *conditional loss* o *expected tail loss* ( $ETL$ ) definida como lo hacen Artzner y otros (1999) y Jorion (2007):

$$\mathbb{E}[l_t | l_t > VaR_q(t)],$$

la cual habla del tamaño esperado de las violaciones cuando éstas ocurren. Esta medida complementaria suple la desventaja fundamental del  $VaR$ . Los resultados sobre las violaciones se presentan en el Cuadro 4.8. SV significa sin violaciones.

<sup>7</sup>Únicamente se consideran los valores cuando no hubo violaciones, es decir, para aquellos días  $t$  donde  $S_t \geq S_{t-1} - VaR_q(t)$ , entonces  $S_t - (S_{t-1} - VaR_q(t)) \geq 0$ .

$p$	JD $3\sigma$	JD $2\sigma$	JD $1\sigma$	PD	Paramétrico
95 %	NA	NA	<b>0.0030</b>	0.00385	0.00386
1 %	NA	<b>0.0015</b>	0.0018	0.0051	0.0050
0.5 %	0.0026	<b>SV</b>	0.0016	NA	NA
0.1 %	0.0018	<b>SV</b>	<b>SV</b>	NA	NA

Cuadro 4.8:  $VaR$  condicional.

En negritas aparece el  $CVaR$  más pequeño, es decir, el tamaño promedio de las violaciones más pequeño para cada nivel de probabilidad.

Tomando en cuenta todos estos resultados se tiene que para  $q = 95\%$ , el modelo paramétrico es el que predice pérdidas más cercanas a la realidad cuando no hay violaciones. Sin embargo, no es el que obtiene menor cantidad de violaciones ya que subestima la ocurrencia de dichos movimientos, al menos en comparación con los modelos que sí consideran saltos.

Si se deseara adoptar la perspectiva usual del riesgo de mercado del día a día, para este nivel de probabilidad se podría elegir el modelo paramétrico; y el modelo de difusión con saltos que segrega en función de una distribución estándar, para una perspectiva conservadora ya que es en el que se observó menos violaciones y tamaño promedio de violaciones más pequeño.

Para  $q = 99\%$ , el modelo de difusión pura es el que genera valores en riesgo más cercanos a las pérdidas que ocurrieron al día siguiente, pero este modelo tampoco es el que logra menos violaciones. Esa cualidad la obtienen los modelos que sí consideran saltos con base en una o dos distribuciones estándar. De esos dos, el que considera dos desviaciones estándar como criterio para segregar a los movimientos grandes de los pequeños fue el que logró un *expected shortfall* más pequeño.

Si se deseara adoptar la perspectiva usual recién descrita en ese nivel de probabilidad, se podría elegir el modelo de difusión pura; y el de difusión con saltos con dos distribuciones estándar, para una perspectiva que considere la posibilidad de movimientos más extremos.

Para  $q = 99.5\%$  y  $99.9\%$ , los modelos paramétrico y de difusión sin saltos no alcanzaron a obtener cobertura incondicional correcta. La hipótesis nula sólo se aceptó para los modelos que sí le dan un tratamiento separado a los saltos. De estos, el que segrega con base en dos desviaciones estándar no tuvo violaciones en ambos niveles de probabilidad. Sin embargo, para  $p = 99.5\%$ , el que considera tres desviaciones estándar fue el que logró una distancia promedio menor a las pérdidas realmente ocurridas, mientras que para  $p = 99.9\%$  esto lo logró el que sólo considera una desviación estándar y estos dos últimos son los que podrían elegirse.

Por estas razones es coherente, si se están tratando niveles de probabilidad mayores a  $99\%$ , considerar sólo aquellos modelos que sí le dan un tratamiento particular a los saltos.

# Conclusiones

Bajo el paradigma actual de la administración de riesgos financieros, en particular, del riesgo de mercado, el valor en riesgo es uno de los indicadores primordiales de las expectativas del producto financiero. Por eso es fundamental que se comprenda su definición y los elementos utilizados para su cálculo ya que ésta no basta para explicar el origen del valor obtenido.

De acuerdo con la perspectiva que el administrador de riesgo quiera obtener, se puede recurrir a distintas formas de modelar el producto financiero. Es importante determinar en cada caso particular qué modelo es el conveniente según la información disponible y las intenciones del analista.

Un modelo que pronostique consistentemente pérdidas mayores a las efectivamente ocurridas tendrá pocas violaciones y será un modelo conservador. Por el contrario, un modelo que pronostique pérdidas menores quizá tenga mayor número de violaciones y sería un modelo más arriesgado. Este es un importante punto que debe tomarse en cuenta. Si una institución financiera se rige por un modelo conservador, sus requerimientos de capital podrían aumentar y sus límites de operación de instrumentos más riesgosos disminuir, lo que podría representar un excesivo costo de oportunidad para la institución. Por otro lado, si se elige un modelo de valor en riesgo demasiado arriesgado, es posible que el no considerar la posibilidad de ciertas pérdidas genere severas consecuencias a la institución si éstas llegaran a ocurrir.

Este delicado balance de riesgo puede ser influenciado por los intereses de cada parte: los reguladores querrán mayor control mientras que los especuladores no desearán ser tan conservadores. Por esto es importante someter a rigurosos análisis las ventajas y desventajas de cada modelo para cada instrumento, cartera, periodo, nivel de confianza y estado actual de los mercados.

En este caso de estudio en particular se encontró que sí es posible obtener sucesiones de valores en riesgo con cobertura incondicional correcta y son de particular utilidad para niveles de confianza de 99.5% y 99.9%, niveles en los cuales si no se considera la existencia de saltos y se les da un tratamiento por separado no es posible obtener cobertura incondicional correcta con los modelos paramétrico y de difusión pura.

Lo anterior no es sorprendente ya que, por la propia naturaleza de la distribución normal, los movimientos grandes son subestimados y fue esta deficiencia (y el impacto que tiene en las decisiones) una de las motivaciones de esta investigación (véase la Figura 4.6).

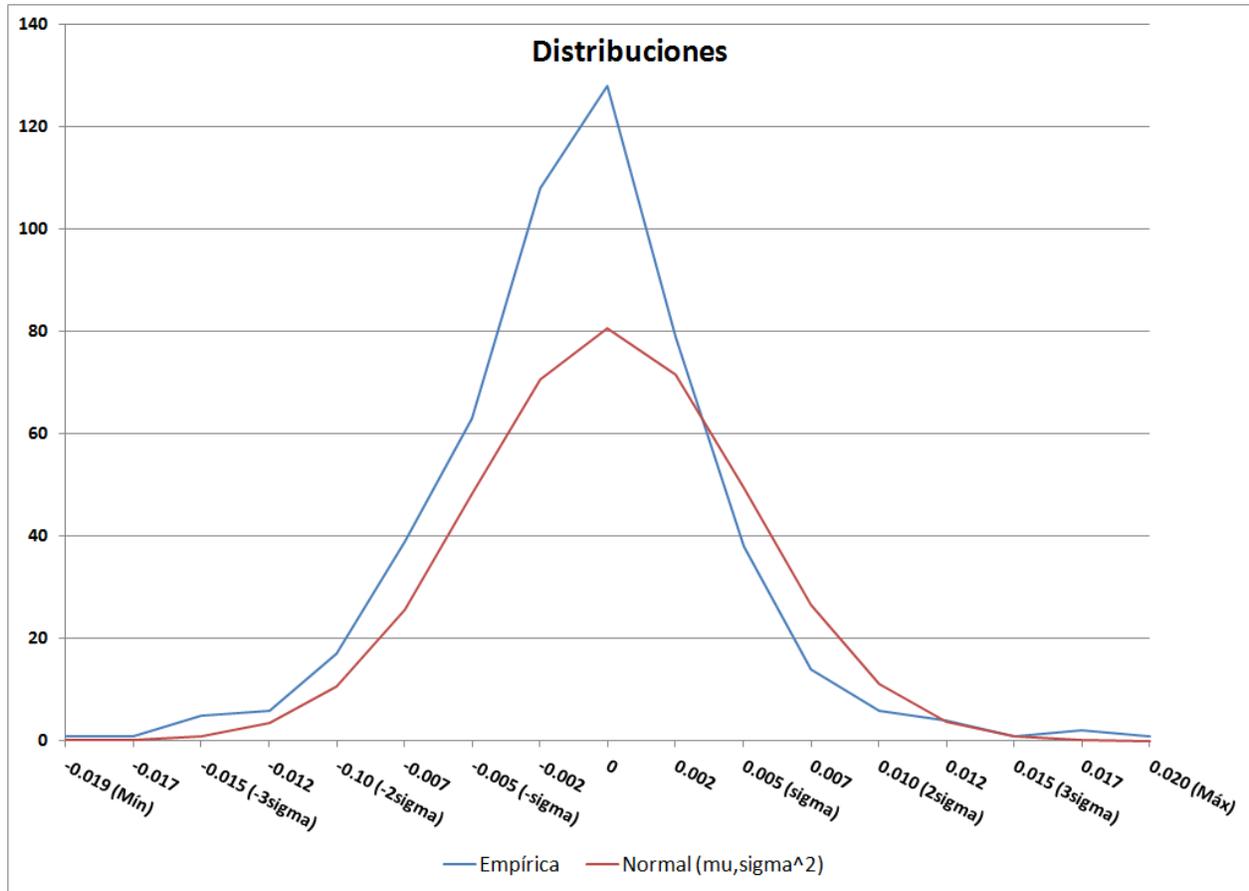


Figura 4.6: Distribución empírica de los log-rendimientos y la distribución normal calculada con la media y varianza de los mismos log-rendimientos. Fuente: Elaboración propia.

La utilidad principal de este modelo es evitar la subestimación del impacto que los saltos pueden tener en el valor del instrumento financiero.

Además de lo ya detallado, cabe destacar que en esta tesis únicamente se utilizó un solo producto financiero. Las carteras de las instituciones financieras usualmente están constituidas por cientos de productos financieros distintos.

El reto inmediato es extender este modelo a un caso multivariado. La dificultad reside principalmente no en la fórmula (el proceso estocástico utilizado) si no en el manejo de las series y la complejidad computacional en almacenamiento y tiempo de ejecución.

Dicho análisis sería de gran interés puesto que podría estudiarse la utilidad de este modelo en otros mercados financieros. Asimismo podría analizarse la correlación de los datos en distintos periodos de mayor o menor volatilidad, tanto en su componente de intensidad de microsaltos como en los componentes de frecuencia e intensidad de saltos. Lo anterior ofrecería una panorámica comprensiva del comportamiento y salud de la cartera, datos sobre los cuales

podrían apoyarse decisiones operativas que tendrían un impacto directo sobre la cartera, la institución financiera, sus acreedores y el mercado financiero. Se deja como propuesta para futuros trabajos de titulación un estudio en esta dirección.

Este modelo podría ser de particular interés para los reguladores financieros para establecer límites de riesgo o requerimientos de capitalización en función de  $VaR$  y  $CVaR$ . Al calcularlos con un modelo de difusión con saltos, en particular para periodos donde se pueda esperar mayor volatilidad y ocurrencia de saltos, se obtendría una alerta temprana de los potenciales riesgos de pérdidas grandes. En el caso de la institución financiera, esta alerta podría ser proporcionada por pruebas de estrés siguiendo una metodología similar.

Otros ejercicios de interés serían cálculos del valor en riesgo considerando muestras aleatorias de diferentes tamaños y frecuencias a distintos horizontes de tiempo, así como la validación de modelos para valores en riesgo utilizando las pruebas de hipótesis descritas por [Berkowitz, Christoffersen y Pelletier \(2011\)](#); [Christoffersen \(1998\)](#); [Christoffersen, Hahn y Inoue \(2001\)](#); [Corradi y Swanson \(2013\)](#); [Giacomini y Komunjer \(2005\)](#). Se sugiere a futuros egresados exploren dichas investigaciones y hagan un ejercicio análogo al presentado para el trabajo de titulación.

# Referencias

- AGOITIA HURTADO, M. (2010). «Modelos de riesgo de crédito en microfinanzas usando procesos de Lévy». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- AHN, C. y THOMPSON, H. (1988). «Jump-diffusion processes and the term structure of interest rates». *The Journal of Finance*, **43**, pp. 155–174.
- AÏT-SAHALIA, Y. (2004). «Disentangling diffusion from jumps». *Journal of Financial Economics*, **74**, pp. 487–528.
- AÏT-SAHALIA, Y. y JACOD, J. (2009). «Testing for jumps in a discretely observed process». *The Annals of Statistics*, **37**, pp. 184–222.
- AMIN, K. (1993). «Jump diffusion option valuation in discrete time». *The Journal of Finance*, **48**, pp. 1833–1863.
- ANDERSEN, L. y ANDREASEN, J. (2000). «Jump-diffusion processes: volatility smile fitting and numerical methods for option pricing». *Review of Derivatives Research*, **4**, pp. 231–262.
- ANDERSEN, T.; BOLLERSLEV, T. y DIEBOLD, F. (2007). «Roughing it up: including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility». *Review of Economics and Statistics*, **89**, pp. 701–720.
- ARECHIGA ALVARADO, C. (2012). «Administración de riesgos: una aplicación del valor en riesgo en el mercado cambiario 2008-2011». Tesis de maestría: Finanzas, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM.
- ARGÜELLO GÓMEZ, C. (2008). «Optimización del valor en riesgo mediante backtesting a modelos de simulación histórica, Markowitz y Monte Carlo considerando el uso de un ponderador volatilidad - tiempo: el caso del riesgo modelo en los futuros de CETES en el Mexder». Tesis de maestría: Finanzas, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J. y HEATH, D. (1999). «Coherent measures of risk». *Mathematical Finance*, **9**, pp. 203–228.
- BACHELIER, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Tesis doctoral, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Traducido al inglés como: The theory of speculation.
- BALL, C. y TOROUS, W. (1983). «A simplified jump process for common stock returns». *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **18**, pp. 53–65.

- BANJERCITO (2013). «Administración integral de riesgos». Fecha de consulta: 2013-11-06. En: [http://www.banjercito.com.mx/PDF/resultados/sep\\_13\\_riesgos.pdf](http://www.banjercito.com.mx/PDF/resultados/sep_13_riesgos.pdf).
- BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS (2003). «A glossary of terms used in payments and settlement systems».
- BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS (2013). «Triennial central bank survey. Foreign exchange turnover in April 2013: preliminary global results».
- BARTLE, R. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (1996). «Overview to the amendment to the capital accord to incorporate market risks». Bank for International Settlements.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2011b). «Basel III: a global regulatory framework for more resilient banks and banking systems». Bank for International Settlements.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2011a). «Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book». Bank for International Settlements.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2011c). «Revisions to the Basel II market risk framework». Bank for International Settlements.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2013). «Regulatory consistency assessment programme, assessment of Basel III regulations». Bank for International Settlements.
- BECKERS, S. (1981). «A note on estimating the parameters of the diffusion-jump model of stock returns». *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **16**, pp. 127–140.
- BERKELAAR, A.; CUMPERAYOT, P. y KOUWENBERG, R. (2002). «The effect of VaR based risk management on asset prices and the volatility smile». *European Financial Management*, **8**, pp. 139–164.
- BERKOWITZ, J.; CHRISTOFFERSEN, P. y PELLETIER, D. (2011). «Evaluating value-at-risk models with desk-level data». *Management Science*, **57**, pp. 2213–2227.
- BERNARD, J-T.; KHALAF, L.; KICHIAN, M. y MCMAHON, S. (2006). «Forecasting commodity prices: GARCH, jumps and mean reversion». *Bank of Canada*, **14**, pp. 1–21.
- BJÖRK, T.; DI MASI, G.; KABANOV, Y. y RUNGALDIER, W. (1997). «Towards a general theory of bond markets». *Finance and Stochastics*, **1**, pp. 141–174.
- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973). «Pricing of options and corporate liabilities». *Journal of Political Economy*, **81**, pp. 637–654.
- BLANCO, C. y SORONOW, D. (2001). «Jump diffusion processes: energy price processes used for derivatives pricing & risk management». *Commodities Now*, **10**, pp. 83–85.
- BOROVKOV, A. (1998). *Mathematical statistics*. Gordon & Breach Science Publishers.

- BROWN, R. (1828). «A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies». *The Philosophical Magazine, or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History and General Science*, **4**, pp. 161–173.
- BUCIO PACHECO, C. (2012). «Dependencia y valor en riesgo: un estudio de cópulas de los mercados de capitales de América». Tesis de doctorado: Economía, Facultad de Economía, UNAM.
- CARR, P.; GEMAN, H.; MADAN, D. y YOR, M. (2002). «The fine structure of asset returns: an empirical investigation». *The Journal of Business*, **75**, pp. 305–332.
- CARR, P. y WU, L. (2004). «Time-changed Lévy processes and option pricing». *Journal of Financial Economics*, **71**, pp. 113–141.
- CARTEA, A. y DEL CASTILLO NEGRETE, D. (2007). «Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **374**, pp. 749–763.
- CASELLA, G. y BERGER, R. (2001). *Statistical inference*. Duxbury Press.
- CCV (2010). «Propuesta de análisis retrospectivo (backtesting), empleado por la CCV a efecto de medir la eficiencia del modelo VaR para la medición de riesgos».
- CHOW, Y. y TEICHER, H. (1997). *Probability theory: independence, interchangeability, martingales*. Springer.
- CHRISTOFFERSEN, P. (1998). «Evaluating interval forecasts». *International Economic Review*, **39**, pp. 841–862.
- CHRISTOFFERSEN, P.; HAHN, J. y INOUE, A. (2001). «Testing and comparing Value-at-Risk measures». *Journal of Empirical Finance*, **8**, pp. 325–342.
- CNBV (2012). «Disposiciones de carácter general aplicables a las sociedades de inversión y a las personas que les prestan servicios».
- CNBV (2013). «Disposiciones de carácter general aplicables a las instituciones de crédito».
- CONSAR (2010). «Adecuaciones a las reglas de inversión de las SIEFORES». Fecha de consulta: 2013-12-28. En: [http://www.consar.gob.mx/boletin\\_estadistico/archivos/Adecuaciones\\_a\\_las\\_reglas\\_de\\_inversion\\_de\\_las\\_Siefores.pdf](http://www.consar.gob.mx/boletin_estadistico/archivos/Adecuaciones_a_las_reglas_de_inversion_de_las_Siefores.pdf).
- CONSAR (2013). «Metodología para el cálculo del valor en riesgo (VaR) a un día usando datos históricos». Fecha de consulta: 2013-11-17. En: [http://www.consar.gob.mx/escenarios\\_var/pdf/AnexoG.pdf](http://www.consar.gob.mx/escenarios_var/pdf/AnexoG.pdf).
- CONT, R. y TANKOV, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC.

- CONTRO PRADO, P. (2007). «Procesos de Lévy, ecuaciones de difusión, e integrales de camino: aplicación a mercados financieros». Tesis de licenciatura: Física, Facultad de Ciencias, UNAM.
- CORRADI, V. y SWANSON, N. (2013). «A survey of recent advances in forecast accuracy comparison testing, with an extension to stochastic dominance». En: *Recent Advances and Future Directions in Causality, Prediction, and Specification Analysis*, Springer.
- CROSBY, J. (2010). «Introduction to jump and Lévy processes». Lecture notes, Oxford University.
- CUOCO, D. y LIU, H. (2006). «An analysis of VaR-based capital requirements». *Journal of Financial Intermediation*, **15**, pp. 362–394.
- DAS, S. (2002). «The surprise element: jumps in interest rates». *Journal of Econometrics*, **106**, pp. 27–65.
- DAS, S. y UPPAL, R. (2004). «Systemic risk and international portfolio choice». *The Journal of Finance*, **59**, pp. 2809–2834.
- DE JESÚS GUTIÉRREZ, R. (2008). «Riesgo y volatilidad en los mercados accionarios emergentes: medición del VaR y CVaR aplicando la teoría de valor extremo». Tesis de doctorado: Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- DELGADO VENCES, F. (2005). «Procesos de Lévy y la descomposición de Lévy-Itô». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- DENIS, L.; FERNÁNDEZ, B. y MEDA, M. (2009). «Estimation of value at risk and ruin probability for diffusion processes with jumps». *Mathematical Finance*, **19**, pp. 281–302.
- DOWD, K. (2002). *Measuring market risk*. John Wiley & Sons, 1ª edición.
- DOWD, K. (2005). *Measuring market risk*. John Wiley & Sons, 2ª edición.
- DUFFIE, D. y PAN, J. (1997). «An overview of value at risk». *The Journal of Derivatives*, **4**, pp. 7–49.
- DUFFIE, D. y PAN, J. (2001). «Analytical value-at-risk with jumps and credit risk». *Finance and Stochastics*, **5**, pp. 155–180.
- DUFFIE, D.; PAN, J. y SINGLETON, K. (2003). «Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions». *Econometrica*, **68**, pp. 1343–1376.
- DUNKEL, J. y HÄNGGI, P. (2009). «Relativistic brownian motion». *Physics Reports*, **471**, pp. 1–73.
- EBERLEIN, E.; KELLER, U. y PRAUSE, K. (1998). «New insights into smile, mispricing and value at risk: the hyperbolic model». *The Journal of Business*, **71**, pp. 371–405.

- EBERLEIN, E. y RAIBLE, S. (1999). «Term structure models driven by general Lévy processes». *Mathematical Finance*, **9**, pp. 31–53.
- ECB (2013). «The euro, introduction». Fecha de consulta: 2013-10-28. En: <http://www.ecb.europa.eu/euro/intro/html/index.en.html>.
- ELSEVIER (2013). «Scopus». Fecha de consulta: 2013-11-14, a través de UNAM. En: <http://pbidi.unam.mx/cgi-bin/ezpmysql.cgi?url=http://www.scopus.com/scopus/home.url>.
- ESPINOZA ÁVILA, A. (2006). «Metodología riskmetrics vs. análisis factorial para la estimación del valor en riesgo». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- EUN, C. y RESNICK, B. (2009). *International financial management*. McGraw-Hill.
- FAN, Y. y FAN, J. (2011). «Testing and detecting jumps based on a discretely observed process». *Journal of Econometrics*, **164**, pp. 331–344.
- FEDERAL RESERVE SYSTEM (2014). «Data download program, foreign exchange rates». Fecha de consulta: 2014-04-29. En: <http://www.federalreserve.gov/datadownload/Choose.aspx?rel=H10>.
- GACHUZ ATITLÁN, R. (2013). «Procesos de Lévy espectralmente negativos con aplicaciones a teoría del riesgo». Tesis de Licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- GEMAN, H. y RONCORONI, A. (2006). «Understanding the fine structure of electricity prices». *The Journal of Business*, **79**, pp. 1225–1261.
- GIACOMINI, R. y KOMUNJER, I. (2005). «Evaluation and combination of conditional quantile forecasts». *Journal of Business & Economic Statistics*, **23**, pp. 416–431.
- GIBSON, M. (2001). «Incorporating event risk into value-at-risk». *Federal Reserve System, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs*, **1**, pp. 1–34.
- GIHMAN, I.I. y SKOROHOD, A. V. (1972). *Stochastic differential equations*. Springer-Verlag. ISBN:0-387-05946-6;.
- GLASSERMAN, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer.
- GLASSERMAN, P. y KOU, S. (2003). «The term structure of simple forward rates with jump risk». *Mathematical Finance*, **13**, pp. 383–410.
- GLASSERMAN, P. y MERENER, N. (2003). «Numerical solution of jump-diffusion LIBOR market models». *Finance and Stochastics*, **7**, pp. 1–27.
- GONZÁLEZ MORENO, L. (2005). «Valor en riesgo: caso práctico mediante la reducción de la matriz de covarianza haciendo uso del coeficiente beta». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.

- GOOGLE (2013a). «Google books ngram viewer». Fecha de consulta: 2013-11-14. En: <https://books.google.com/ngrams>.
- GOOGLE (2013b). «Google Scholar». Fecha de consulta: 2013-11-14. En: <http://scholar.google.com/>.
- GOOGLE (2013c). «What does the ngram viewer do?». Fecha de consulta: 2013-11-14. En: <https://books.google.com/ngrams/info>.
- GUAN, L.; XIAOQING, L. y CHONG, T.K. (2004). «Asymptotic dynamics and value-at-risk of large diversified portfolios in a jump-diffusion market». *Quantitative Finance*, **4**, pp. 129–139.
- GUERRERO GALEANA, F. (2001). «Valor en riesgo: marco económico analítico». Tesis de licenciatura: Economía, Facultad de Economía, UNAM.
- HAASER, N.; LASALLE, J. y SULLIVAN, J. (1990). *Análisis matemático Vol. 1*. Trillas.
- HAN, C. (2009). «Estimating joint default probability by efficient importance sampling with applications from bottom up». *Working paper, National Tsing-Hua University*, **1**, p. 33.
- HANSON, F. y WESTMAN, J. (2002a). «Jump-diffusion stock return models in finance: stochastic process density with uniform-jump amplitude». En: *Proc. 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, volumen 7.
- HANSON, F. y WESTMAN, J. (2002b). «Portfolio optimization with jump-diffusions: estimation of time-dependent parameters and application». En: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 1.
- HIGHAM, D. (2001). «An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations». *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, **43**, pp. 525–546.
- HIGHAM, D. y KLOEDEN, P. (2005). «Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps». *Numerische Mathematik*, **101**, pp. 101–119.
- HILLIARD, J. y SCHWARTZ, A. (2005). «Pricing european and american derivatives under a jump-diffusion process: a bivariate tree approach». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **40**, pp. 671–691.
- HOEL, P. (1962). *Introduction to mathematical statistics*. John Wiley & Sons.
- HULL, J. (2009). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson.
- IBARRA CASTILLO, H. (2005). «La administración de riesgos financieros de mercado mediante el modelo de riskmetrics de valor de riesgo». Tesis de licenciatura: Economía, Facultad de Economía, UNAM.

- INGEN-HOUSZ, J. (1784). «Bemerkungen über den Gebrauch des Vergrößerungsglases». *Vermischte Schriften physischmedizinischen Inhalts*, **2**, pp. 122–126. Traducido al inglés como: Remarks on the use of the microscope.
- JARROW, R. (2008). «Operational risk». *Journal of Banking & Finance*, **32**, pp. 870–879.
- JARROW, R.; LANDO, D. y TURNBULL, S. (1997). «A Markov model for the term structure of credit risk spreads». *The Review of Financial Studies*, **10**, pp. 481–553.
- JOHANNES, M. (2004). «The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models». *The Journal of Finance*, **59**, pp. 227–260.
- JOHANNES, M.; POLSON, N. y STROUD, J. (2009). «Optimal filtering of jump diffusions: extracting latent states from asset prices». *Review of Financial Studies*, **22**, pp. 2759–2799.
- JORION, P. (1988). «On jump processes in the foreign exchange and stock markets». *The Review of Financial Studies*, **1**, pp. 427–445.
- JORION, P. (2007). *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*. McGraw-Hill.
- J.P. MORGAN/REUTERS (1996). «RiskMetrics - Technical document».
- KAAS, R.; GOOVAERTS, M.; DHAENE, J. y DENUIT, M. (2008). *Modern actuarial risk theory using R*. Springer.
- KELLISON, S. (2000). *The theory of interest*. Irwin/McGraw-Hill.
- KOU, S. (2002). «A jump-diffusion model for option pricing». *Management Science*, **48**, pp. 1086–1101.
- LACAYO LINARES, R. (2007). «Valor en riesgo (VaR) y valor en riesgo condicional (CVaR), mas allá de una alternativa para la medición de riesgo de mercado». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- LEE, S. y HANNIG, J. (2010). «Detecting jumps from Lévy jump diffusion processes». *Journal of Financial Economics*, **96**, pp. 271–290.
- LEE, S. y MYKLAND, P. (2008). «Jump in financial markets: a new nonparametric test and jump dynamics». *The Review of Financial Studies*, **21**, pp. 2535–2563.
- LÓPEZ ÁVILA, E. (2013). «Valor en riesgo del peso mexicano y otras divisas latinoamericanas ante eventos de crisis utilizando teoría de valores extremos». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- LÓPEZ GONZALEZ, A. (2012). «Valor en riesgo de un portafolio con tasa libre de riesgo en México durante el 2008». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM.

- LOUTH, R.; JOOS, P.; SATCHELL, S. y WEYNS, G. (2010). «Understanding analysts forecasts». *The European Journal of Finance*, **16**, pp. 97–118.
- LUCIANO, E. y SCHOUTENS, W. (2006). «A multivariate jump-driven financial asset model». *Quantitative Finance*, **6**, pp. 385–402.
- LUNA ARIAS, A. (2006). «Alternativas estadísticas para el cálculo del valor en riesgo VaR». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- MADAN, D.; CARR, P. y CHANG, E. (1998). «The variance gamma process and option pricing». *European Finance Review*, **2**, pp. 79–105.
- MARTÍNEZ LIRA, R. (2000). «Administración de riesgo en los instrumentos a tasa de interés (VAR: valor en riesgo)». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- MATEI, S. (2006). «A multivariate jump-diffusion model and pricing of multi-currency options». Master Thesis of Advanced Studies in Finance, University of Zurich.
- MATIUSI, G. (2010). *Jump-diffusion processes application in finance*. Tesina o Proyecto, Politecnico di Milano.
- MEADE, N. (2010). «Oil prices - brownian motion or mean reversion? A study using a one year ahead density forecast criterion». *Energy Economics*, **32**, pp. 1485–1498.
- MEMBRILLO ZARCO, V. (2011). «Modelos de varianza condicional para estimar el valor en riesgo del mercado». Tesis de maestría: Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- MENDOZA DELGADO, L. (2011). «Portafolio de inversión aplicando análisis de media-varianza y estimación de valor en riesgo». Tesina de licenciatura: Actuaría, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM.
- MERTON, R. (1973). «Theory of rational option pricing». *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, pp. 141–183.
- MERTON, R. (1976a). «The impact on option pricing of specification error in the underlying stock price returns». *The Journal of Finance*, **31**, pp. 333–350.
- MERTON, R. (1976b). «Option pricing when underlying stock returns are discontinuous». *Journal of Financial Economics*, **3**, pp. 125–144.
- MICROSOFT (2013). «Microsoft academic search beta». Fecha de consulta: 2013-11-14. En: <http://academic.research.microsoft.com/>.
- MOLINA ESCOBAR, A. (2000). «Procesos de Lévy en r». Tesis de maestría: Estadística e Investigación de Operaciones, CCH, UNAM.
- MOOD, A.; GRAYBILL, F. y BOES, D. (1974). *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill.

- MOVELLAN, J. (2011). *Tutorial on stochastic differential equations*. MPLab Tutorials, 06.1ª edición.
- MUKHOPADHYAY, N. (2000). *Probability and statistical inference*. Marcel Dekker.
- NAIK, V. (1993). «Option valuation and hedging strategies with jumps in the volatility of asset returns». *The Journal of Finance*, **48**, pp. 1969–1984.
- NAWALKHA, S.; BELIAEVA, N. y SOTO, G. (2007). *Dynamic term structure modeling*. John Wiley & Sons.
- ØKSENDAL, B. (2000). *Stochastic differential equations*. Springer-Verlag.
- PARDO MILLÁN, J. (2000). «Relación entre los procesos de ramificación y los procesos de Lévy». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- PEDRAZA ALBINO, K. (2007). «Implementación de la estimación del valor en riesgo (VAR) de las carteras de inversión de la reserva internacional del Banco de Mexico en el Sistema de Registro de Operaciones». Reporte de trabajo profesional: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- PENATI, A. y PENNACCHI, G. (2001). «Extending diffusion processes to allow for jumps». Class Notes Finance 400, University of Illinois.
- PÉREZ PÉREZ, C. (2007). «Cópulas: modelado y medición de dependencia estocástica bivariada y su aplicación en el cálculo del valor en riesgo». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM.
- PÉREZ RESÉNDIZ, F. (2012). «El modelo var (value at risk) como factor de decisión en el cálculo de riesgos». Tesis de licenciatura: Economía, Facultad de Economía, UNAM.
- PLATEN, E. y BRUTI-LIBERATI, N. (2010). *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance*. Springer.
- PRESS, S. (1967). «A compound events model for security prices». *The Journal of Business*, **40**, pp. 317–335.
- PRIMBS, J. (2008). «Advanced topics in financial engineering». Class notes, Stanford University.
- QUEZADA, G. (2008). «Aplicación de procesos poisson-gaussianos a los activos nacionales: desechando la distribución normal.» *Economics*, **2**, pp. 136–149.
- RAMOS GARCÍA, S. (2005). «Análisis del valor en riesgo de los bonos de desarrollo del gobierno federal». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2013). «Diccionario de la lengua española: riesgo». Fecha de consulta: 2013-11-06. En: <http://lema.rae.es/drae/?val=riesgo>.

- REYES ARMENDÁRIZ, Y. (2001). «Valor en riesgo de instrumentos financieros». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- RIVAS ACEVES, S. y VENEGAS MARTÍNEZ, F. (2007). «Estabilización de precios y expectativas de devaluación: tasas de interés estocásticas». *Análisis Económico*, **23**, pp. 99–110.
- RUEDA BALDERAS, E. (2001). «Mercado mexicano de derivados y el cálculo del valor en riesgo de sus instrumentos». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- RUNGGALDIER, W. (2003). «Jump-diffusion models». *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, **1**, pp. 169–209.
- SAMUELSON, P. (1965). «Rational theory of warrant pricing». *Industrial Management Review*, **6**, pp. 13–39.
- SÁNCHEZ CERVANTES, A. (2002). «Valor en riesgo de un fondo de inversión, el caso St&er D». Caso práctico de maestría: Finanzas, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM.
- SHACKLETON, M.; TAYLOR, S. y YU, P. (2010). «A multi-horizon comparison of density forecasts for the S&P 500 using index returns and option prices». *Journal of Banking & Finance*, **34**, pp. 2678–2693.
- SHAFIEE, S. y TOPAL, E. (2010). «An overview of global gold market and gold price forecasting». *Resources Policy*, **35**, pp. 178–189.
- STEELE, J. (2001). *Stochastic calculus and financial applications*. Springer.
- STRAJA, S. (2001). «Mean-reversion jump-diffusion». Montgomery Investment Technology, Inc..
- SUEISHI, N. y NISHIYAMA, Y. (2005). «Estimation of Lévy processes in mathematical finance: a comparative study». *Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand, MODSIM05*, pp. 953–959.
- TANKOV, P. y VOLTCHKOVA, E. (2007). «Jump-diffusion models: a practitioner’s guide». *Université Paris*, **7**, pp. 1–24.
- TAUCHEN, G. y ZHOU, H. (2011). «Realized jumps on financial markets and predicting credit spreads». *Journal of Econometrics*, **160**, pp. 102–118.
- THOMSON REUTERS (2013). «Web of Knowledge». Fecha de consulta: 2013-11-14, a través de UNAM. En: <http://pbidi.unam.mx/cgi-bin/ezpmysql.cgi?url=http://isiknowledge.com/>.
- UNAM (2014). «TESIUNAM - Tesis del sistema bibliotecario de la UNAM». Fecha de consulta: 2014-02-02. En: <http://tesis.unam.mx/>.
- VAN DER PAS, P. (1971). «The discovery of the brownian motion». *Scientiarum historia*, **13**, pp. 127–132.

- VENEGAS MARTÍNEZ, F. (2000). «On consumption, investment and risk». *Economía Mexicana. Nueva Época*, **9**, pp. 227–244.
- VENEGAS MARTÍNEZ, F. (2001). «Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO». *Estudios Económicos-COLMEX*, **16**, pp. 203–226.
- VENEGAS MARTÍNEZ, F. (2005). «Decisiones para la administración del riesgo macroeconómico». *Denarius. Revista de Economía y Administración*, **10**, pp. 105–130.
- VISSER, M. (2009). *Volatility proxies and GARCH models*. Tesis doctoral, Universiteit van Amsterdam.
- WANG, R.; LIN, S. y FUH, C. (2009). «An importance sampling method to evaluate Value-at-Risk for assets with jump risks». *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, **38**, pp. 745–772.
- WERON, R.; BIERBRAUER, M. y TRÜCK, S. (2004). «Modeling electricity prices: jump diffusion and regime switching». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **336**, pp. 39–48.
- WERON, R. y MISIOREK, A. (2008). «Forecasting spot electricity prices: a comparison of parametric and semiparametric time series models». *International Journal of Forecasting*, **24**, pp. 744–763.
- WIKIMEDIA COMMONS (2013). «Standard deviation diagram». Fecha de consulta: 2013-12-27. En: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard\\_deviation\\_diagram.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_deviation_diagram.svg).
- WILKS, S. (1938). «The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses». *The Annals of Mathematical Statistics*, **9**, pp. 60–62.
- YAÑEZ SALINAS, P. (2005). «Introducción al valor en riesgo». Tesis de licenciatura: Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- ZHANG, C.; ZHOU, Y. y ZHOU, Z. (2013). «Value-at-Risk-based risk management in a jump-diffusion model». *International workshop on pension, insurance and saving*, **11**, pp. 1–30.
- ZHANG, G.; GUO, J.; CHAI, G.; GONG, LI. y WANG, X. (2010). «Using jump-diffusion modeling for valuing real options in infrastructure projects». *Frontiers of Computer Science in China*, **4**, pp. 263–270.
- ZHANG, J. y ZHAO, H. (2006). «Asset pricing under jump-diffusion». School of Economics and Finance, University of Hong Kong.
- ZHOU, C. (1997). «A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities». *Social Science Research Network*, **39800**, pp. 1–49.

