



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJETURAS DE PARTICIONES DE
TRAYECTORIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
PAUL REY VELASCO HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
HORTENSIA GALENA SÁNCHEZ



2015

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

II

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido paterno	Velasco
Apellido materno	Hernández
Nombre(s)	Paul Rey
Teléfono	5529681761
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	408005056
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado	Dra
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galena
Apellido materno	Sánchez
3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado	Mat
Nombre(s)	Ilan Abraham
Apellido paterno	Goldfeder
Apellido materno	Ortíz
4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado	Mat
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez
5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado	Dra
Nombre(s)	María del Rocío
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	López

6.Datos del sinodal 4

Grado

Nombre(s)

Apellido paterno

Apellido materno

6.Datos del sinodal 4

Dra

María del Rocío

Rojas

Monroy

7.Datos del trabajo escrito

Título

Subtítulo

Número de páginas

Año

7.Datos del trabajo escrito

Conjeturas de particiones

de trayectorias

87 p.

2015

*Dedicado a la memoria de
Egdar Ivan Aguilar Hdz.*

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis padres Rey Velasco y Juanita Guadalupe Hernández, por su apoyo, comprensión, y toda la confianza que pusieron mí, ya que gracias a ésta, me impulsó a lograr todo el éxito obtenido. También gracias a mis hermanos Victoria Guadalupe, Yair Emanuel y Jose Luis, por creer en mí.

Esta tesis también es dedicada a mi amigo Edgar Ivan Aguilar (descanse en paz), un excelente matemático que sin duda alguna, estoy muy agradecido con él por todo el apoyo moral que me brindó, sin éste no hubiera sido posible el termino de mí licenciatura.

Gracias a mis amigos de la facultad de ciencias: Bruno, Jonathan, Rogelio, Mario, Eduardo (pooh), Eduardo (apaseo), Sergio, Victor, Allan y Roberto, con ustedes la estancia en la facultad fue muy divertida. No podría dejar sin mención a Victor Manuel, Gerson, Luis Alberto, Roy, Rolando, Germán, Adrián, Alberto, Adriana, Sheik, Jose Arturo, Irma, Roberto, Martín y Elsi, amigos incondicionales con los que he vivido cosas inolvidables.

También quiero mencionar a la Dra. Hortensia Galena Sánchez, por dirigir esta tesis, y por su apoyo profesional durante todo el proceso.

Finalmente, quiero darle las gracias a Jennifer Pacheco, por estar conmigo en las buenas y en las malas, y por compartir conmigo momentos inolvidables.

Índice general

Introducción	1
1. Nociones básicas	3
1.1. Gráficas	3
1.2. Particiones de gráficas	4
1.3. Caminos, trayectorias, paseos y ciclos de gráficas	5
1.4. Digráficas	5
1.5. Particiones de digráficas	7
1.6. Caminos, trayectorias, paseos y ciclos de digráficas	8
1.7. Conexidad	10
1.8. Algunas clases de digráficas	10
2. Conjeturas de particiones de trayectorias	14
2.1. Introducción histórica	14
2.2. Particiones de digráficas con fuente de trayectos	18
2.3. Particiones de digráficas sin ciclos	23
2.4. Particiones de Gallai-Roy-Vitaver	29
2.5. Coloraciones y particiones	35
3. Particiones en generalizaciones de torneos	46
3.1. Generalizaciones de torneos	46
3.2. Teoremas auxiliares	50
3.3. Algunos resultados en generalizaciones de torneos	50
3.4. Más resultados en digráficas localmente in-semicompletas y semicompletas extendidas	74

Introducción

La teoría de gráficas es una rama de las matemáticas relativamente nueva, esto debido a que tuvo su origen en 1736 de la mano del matemático Leonhard Euler. Su objetivo era encontrar una solución al famoso problema de los siete puentes de Königsberg [14] y, dedujo que el problema no tenía solución, para afirmar esto inventó una herramienta matemática relativamente sencilla, pero muy poderosa, la cual se ha ido desarrollando por diversos matemáticos, y es lo que ahora conocemos como la teoría de gráficas.

Posteriormente surge la teoría de digráficas, la cual es una teoría más general, es decir, la teoría de gráficas está contenida dentro de la teoría de digráficas. Como es bien sabido, en estas teorías surgen muchos problemas de sumo interés, aunque regularmente en algunos casos, primero surgen problemas en la teoría de gráficas y luego se generalizan en el contexto de la teoría de digráficas. Por ello, aunque en este texto nos enfocaremos en digráficas, es plausible dar antes una introducción a las gráficas. En el capítulo 1 se estudian las nociones básicas de estas teorías.

En la mayoría de todas las áreas de las matemáticas, surgen muchos problemas relacionados con el concepto de partición y, no es la excepción en las teorías de gráficas y digráficas, debido a esto aparecen conjeturas de mucho interés relacionado con este tema. Aunque en este texto mencionemos más de una conjetura, la principal y de las que se derivan las demás es la siguiente; "Toda digráfica D es λ -particionable", para dar una idea intuitiva de que significa esto, primero encontremos una trayectoria T de máxima longitud en D , el número de vértices de T lo representaremos como λ . Ahora escojamos un par de números positivos a y b , de tal forma que $\lambda = a + b$. Así decir que D es λ -particionable, es decir, que si $\lambda = a + b$, entonces existe una partición de los vértices de D , en dos conjuntos A y B de tal forma que en $D[A]$ y $D[B]$ (las digráficas inducidas por A y B respectivamente), se cumple que una trayectoria de máxima longitud en $D[A]$ tiene a lo más a vértices y una trayectoria de máxima longitud en $D[B]$ tiene a lo más b vértices.

El capítulo 2 trata primeramente sobre una pequeña introducción histórica a las conjeturas principales que se estudian en este texto. Posteriormente se trabaja con las fuentes de trayectos de cada digráfica D (el conjunto de vértices iniciales de todas las trayectorias de máxima longitud en D), después se utiliza lo anterior para probar una conjetura en ciertas clases de digráficas, como son; las que contienen núcleo, las que cualesquiera par de ciclos en D no comparten flecha, entre otras más. Luego se trabaja con digráficas acíclicas (sin ciclos), utilizando una función $m(v)$ que denota el número de vértices de una trayectoria de máxima longitud en D , donde esta trayectoria tiene como vértice terminal o final al vértice v , con esta función m , encontramos una partición de los vértices de D , llamada la partición de Gallai-Roy-Vitaver (GRV). Finalmente trabajamos con coloraciones propias y coloraciones cromáticas (coloración en donde no se repiten colores en cualquier trayectoria) para encontrar diferentes tipos de particiones.

El capítulo 3 trata sobre particiones en generalización de torneos, para ello primero se dan las nociones básicas de estas clases de digráficas. Posteriormente se prueba que para digráficas cuasi-transitivas, semicompletas extendidas y localmente in-semicompletas se cumple una de las conjeturas planteada en esta tesis, y que como colorario de ésta, se cumple que son λ -particionables. Finalmente se prueba otra conjetura (más fuerte que la principal) para digráficas semicompletas extendidas y localmente in-semicompletas.

Capítulo 1

Nociones básicas

En esta sección vamos a introducir algunos conceptos de la teoría de gráficas y digráficas. Vamos a suponer que el lector tiene un conocimiento básico de la teoría de conjuntos.

1.1. Gráficas

Definición 1.1. Una *gráfica* G consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados *vértices*, denotado por $V(G)$, junto con una colección de pares no ordenados de distintos vértices, llamadas las *aristas* de G , denotado por $A(G)$.

Las gráficas se pueden representar mediante puntos que representan los vértices y líneas que unen a parejas de puntos, que representan las aristas. Por ejemplo en la figura 1.1 vemos la representación de una gráfica G , donde:

$$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

y

$$A(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_5x_4, x_5x_6\}$$

Definición 1.2. Definimos el *orden* de una gráfica G como el número de vértices distintos de G .

Definición 1.3. La *vecindad* de un vértice v de una gráfica G , denotada por $N(v)$, se define como el conjunto $\{u \in V(G) \mid uv \in A(G)\}$.

Definición 1.4. El *grado* de un vértice v de una gráfica G , denotado por $gr(v)$, se define como el número $|N(v)|$.

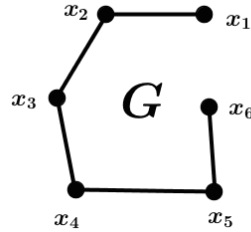


Figura 1.1: Representación geométrica de una gráfica G .

Definición 1.5. Sea G una gráfica. Definimos al grado mínimo de G como el grado mínimo que puede tener un vértice de G y lo denotamos como $\delta(G)$.

Definición 1.6. Sea G una gráfica. Definimos al grado máximo de G como el grado máximo que puede tener un vértice de G y lo denotamos como $\Delta(G)$.

Definición 1.7. Diremos que H es una **subgráfica** de una gráfica G , si H y G son gráficas que satisfacen: $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición 1.8. Sean G una gráfica y $S \subseteq V(G)$. Definimos $G[S]$ como la **gráfica inducida** por S , donde satisface lo siguiente: $V(G[S]) = S$, y para cada par, s y t de vértices en G , $st \in A(G)$ si y sólo si $st \in A(G[S])$.

1.2. Particiones de gráficas

Definición 1.9. Sean G una gráfica y V_1, V_2, \dots, V_n , subconjuntos no vacíos de $V(G)$ y ajenos dos a dos. Decimos que una sucesión (V_1, V_2, \dots, V_n) forma una **n -partición** P de $V(G)$, si cumplen que $V(G) = \bigcup_{k=1}^n V_k$, es decir, la partición P es el conjunto $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$.

Definición 1.10. Sean G una gráfica y A un subconjunto de $V(G)$. Decimos que A es **independiente**, si para cada par de vértices u y v en $V(G)$ se tiene que no existe uv arista en G .

Definición 1.11. Una gráfica G es llamada **k -partita**, si cumple que $V(G)$ tiene una k -partición, donde los k conjuntos son independientes.

Definición 1.12. Una gráfica G es llamada **bipartita**, si cumple que $V(G)$ tiene una 2-partición, donde los dos conjuntos son independientes.

1.3. Caminos, trayectorias, paseos y ciclos de gráficas

Definición 1.13. Un *uv-camino* de una gráfica G es una sucesión α de vértices de G , $\alpha = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v)$, donde $u_i u_{i+1} \in A(G)$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Diremos que α es un *camino cerrado* si $u_n = u$.

Definición 1.14. Un *uv-paseo* de una gráfica G es un *uv-camino* de G , donde no se repiten aristas.

Definición 1.15. Una *uv-trayectoria* de una gráfica G es un *uv-camino* de G , donde no se repiten vértices.

Definición 1.16. La *longitud* de un *uv-camino* (paseo, trayectoria) α es igual a n , si $\alpha = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Definición 1.17. Diremos que $\lambda(G)$ es el orden de una trayectoria de longitud máxima en G .

Observación 1.1. ¡Cuidado!, $\lambda(G)$ no es la longitud máxima de una trayectoria en G , si no el orden, es decir, el número de vértices de una trayectoria de longitud máxima en G .

Definición 1.18. Un *ciclo* γ de una gráfica G es un *uv-camino* en G en el cual la longitud de γ es mayor o igual que 2 y sólo se repiten el primer y el último vértice.

1.4. Digráficas

Definición 1.19. Una *digráfica* D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, denotado por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos vértices, llamadas las flechas de D , denotado por $F(D)$.

Las digráficas se pueden representar mediante puntos que representan los vértices de D y con flechas \rightarrow , donde cada flecha une sólo un par de vértices de D . Notemos que un par ordenado (a, b) , donde a y b son vértices de D , representará una flecha de D , siempre y cuando la flecha comience en el punto a y termine en el punto b . Por ejemplo en la figura 1.2 vemos la representación de una digráfica D , donde:

$$V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

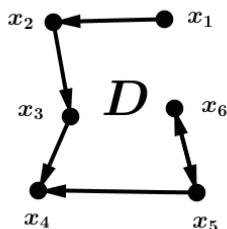


Figura 1.2: Representación geométrica de una digráfica D

y

$$F(D) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_5, x_4), (x_5, x_6), (x_6, x_5)\}$$

Notación. Sea D una digráfica. Si $f = (u, v) \in F(D)$, entonces diremos que v incide desde u y u incide hacia v ; u es adyacente hacia v y v es adyacente desde u ; u **domina** a v y v es **dominado** por u .

Notación. Sean D una digráfica y, S y T , dos conjuntos en $V(D)$. Una **ST -flecha** es una flecha (s, t) donde s está en S y t está en T . También una **sT -flecha** es una flecha donde s está en $V(D)$, t está en T y (s, t) es una flecha de D .

Definición 1.20. Definimos el **orden** de una digráfica D como el número de vértices distintos de D .

Definición 1.21. La **in-vecindad** de un vértice u de una digráfica D , denotado por $N^-(u)$, se define como el conjunto $\{v \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\}$.

Definición 1.22. La **ex-vecindad** de un vértice u de una digráfica D , denotada por $N^+(u)$, se define como el conjunto $\{v \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$.

Definición 1.23. La **vecindad** de un vértice u de una digráfica D , denotada por $N(u)$, se define como el conjunto $N^-(u) \cup N^+(u)$.

Definición 1.24. El **exgrado** de un vértice u de D , denotado por $\delta_D^+(u)$, se define como el número $|N^+(u)|$.

Definición 1.25. El **ingrado** de un vértice u de D , denotado por $\delta_D^-(u)$, se define como el número $|N^-(u)|$.

Definición 1.26. El **grado** de un vértice u de D , denotado por $\delta_D(u)$, se define como el número $\delta_D^+(u) + \delta_D^-(u)$.

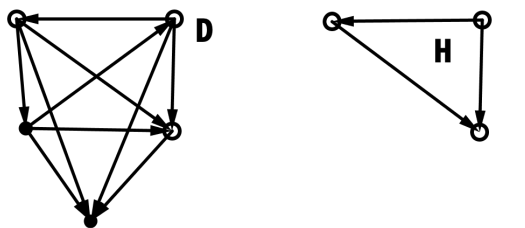


Figura 1.3: Digráfica H inducida por los vértices blancos de la digráfica D

Definición 1.27. Sean D y D' dos digráficas. Definimos a la **unión** de D con D' , como $D \cup D'$, donde satisface lo siguiente: $V(D \cup D') = V(D) \cup V(D')$ y $F(D \cup D') = F(D) \cup F(D')$.

Definición 1.28. Diremos que H es una **subdigráfica** de una digráfica D , si H y D son digráficas que satisfacen: $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Definición 1.29. Sean D una digráfica y H una subdigráfica de D . Si $V(H) = V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$ son iguales, entonces decimos que H es una **subdigráfica generadora** de D .

Definición 1.30. Sean D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. Definimos $D[S]$ como la **subdigráfica inducida** por S , donde satisface lo siguiente: $V(D[S]) = S$, y para cada par, s y t de vértices en S , $(s, t) \in F(D[S])$ si y sólo si $(s, t) \in F(D)$.

Ejemplo 1. En la figura 1.3 se muestran la digráfica D y la digráfica H inducida por los vértices blancos de la digráfica D .

Definición 1.31. Sea D una digráfica. Definimos $UG(D)$ como la **gráfica subyacente** de D , donde $V(UG(D)) = V(D)$ y $F(UG(D)) = \{uv \mid (u, v) \in F(D) \text{ o } (v, u) \in F(D)\}$.

Ejemplo 2. En la figura 1.4 se muestran una digráfica D y $UG(D)$ como la gráfica subyacente de D .

1.5. Particiones de digráficas

Definición 1.32. Sean D una digráfica y V_1, V_2, \dots, V_n , subconjuntos no vacíos de $V(D)$ y ajenos dos a dos. Decimos que la sucesión (V_1, V_2, \dots, V_n) forma una **n -partición** P de $V(D)$, si cumplen que $V(D) = \bigcup_{k=1}^n V_k$, es decir, la partición P es el conjunto $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$.

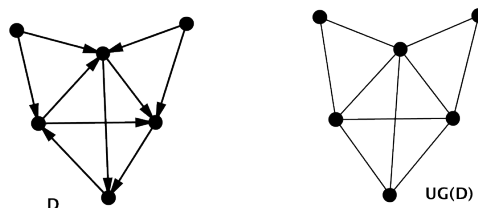


Figura 1.4: D y $UG(D)$

Definición 1.33. Sean D una digráfica y A un subconjunto de $V(D)$. Decimos que A es *independiente*, si para cada par de vértices u y v en $V(D)$ se tiene que no existe flecha entre ellos.

Definición 1.34. Una digráfica D es llamada *k -partita*, si cumple que $V(D)$ tiene una k -partición, donde los k conjuntos son independientes.

Definición 1.35. Una digráfica D es llamada *bipartita*, si cumple que $V(D)$ tiene una 2-partición, donde los dos conjuntos son independientes.

1.6. Caminos, trayectorias, paseos y ciclos de digráficas

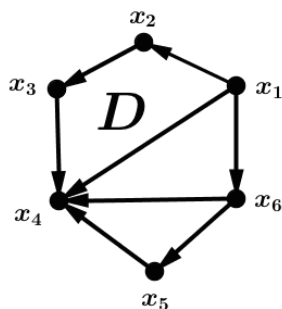
Definición 1.36. Un *uv -camino* de una digráfica D es una sucesión α de vértices de D , $\alpha = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v)$, donde $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$, para $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Diremos que α es un *camino cerrado* si $u_n = u$.

Definición 1.37. Un *uv -paseo* de una digráfica es un uv -camino en D , donde no se repiten flechas.

Definición 1.38. Una *uv -trayectoria* de una digráfica D es un uv -camino en D , donde no se repiten vértices.

Observación 1.2. En la mayoría de los textos acerca de la teoría de digráficas definen de forma más general a un camino (paseo, trayectoria, ciclo), $\alpha = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$, en donde $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$, para $i = 0, 1, \dots, n - 1$, y definen como camino (paseo, trayectoria, ciclo) dirigido, $\alpha = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$, en donde $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$, para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Pero en este texto siempre trabajaremos con caminos (paseos, trayectorias, ciclos) dirigidos, por lo que nos conviene definir a los caminos (paseos, trayectorias, ciclos) dirigidos simplemente como caminos (paseos, trayectorias, ciclos).

Figura 1.5: D y $\lambda(D)$

Definición 1.39. La *longitud* de un uv -camino (paseo, trayectoria) α es igual a n , si $\alpha = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Definición 1.40. Diremos que $\lambda(D)$ es el orden de una trayectoria de longitud máxima en D .

Observación 1.3. ¡Cuidado!, $\lambda(D)$ no es la longitud máxima de una trayectoria en D , si no el orden, es decir, el número de vértices de una trayectoria de longitud máxima en D .

Ejemplo 3. En la figura 1.5 se muestra una digráfica D con dos trayectorias de máxima longitud T_1 y T_2 , ambas de D , donde:

$$T_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \text{y} \quad T_2 = \{x_1, x_6, x_5, x_4\}$$

Notemos que las longitudes de estas trayectorias es 3, pero el orden es 4, por lo tanto $\lambda(D) = 4$.

Definición 1.41. Un *ciclo* γ de una digráfica D es un uv -camino en D en el cual la longitud de γ es mayor o igual que 2 y sólo se repiten el primer y el último vértice.

Definición 1.42. Una digráfica D es llamada *acíclica* si no contiene ciclos.

Presentamos dos resultados básicos, de los cuales su demostración se puede consultar en [13].

Proposición 1. Si existe un uv -camino en una digráfica D , entonces existe una uv -trayectoria en D .

Proposición 2. Si existe un camino cerrado en una digráfica D , entonces existe un ciclo en D .

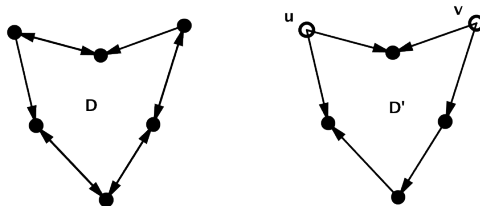


Figura 1.6: D es fuertemente conexa y D' es no fuertemente conexa

1.7. Conexidad

Definición 1.43. Decimos que una gráfica G es **conexa**, si para cada par de vértices u y v en G , existe un uv -camino en G .

Definición 1.44. Decimos que una digráfica D es **débilmente conexa**, si $UG(D)$ es conexa.

Definición 1.45. Decimos que una digráfica D es **unilateralmente conexa**, si para cada par de vértices u y v en D , existe un uv -camino o un vu -camino, ambos en D .

Definición 1.46. Decimos que una digráfica D es **fuertemente conexa**, si para cada par de vértices u y v en D , existe un uv -camino y un vu -camino, ambos en D . Una digráfica es **no fuertemente conexa**, si no es fuertemente conexa.

Definición 1.47. Sean D una digráfica y C una subdigráfica de D . Decimos que C es una **componente fuertemente conexa** de D , si es una subdigráfica fuertemente conexa máxima por contención de D , es decir, con el mayor número posible de vértices y flechas de D , de tal forma que preserve la propiedad de ser fuertemente conexa.

Ejemplo 4. En la Figura 1.6, D es fuertemente conexa y D' es no fuertemente conexa (pues no existe uv -camino en D'), también notemos que D y D' son débilmente conexas y D es unilateralmente conexa, pero D' no es unilateralmente conexa (pues no existe uv -camino en D' y no existe vu -camino en D').

1.8. Algunas clases de digráficas

Definición 1.48. Una digráfica D es **simétrica**, si para cada (u, v) en $F(D)$, entonces (v, u) está en $F(D)$.

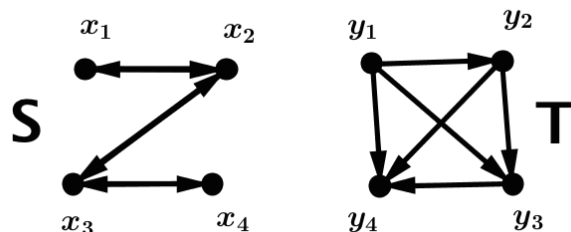


Figura 1.7: S es simétrica y T es transitiva

Definición 1.49. Una digráfica D es *transitiva*, si para tres vértices distintos u, v y w tal que (u, v) y (v, w) están en $F(D)$, entonces (u, w) está en $F(D)$.

Ejemplo 5. En la figura 1.7 se muestran dos digráficas S y T .

Notemos que S es simétrica, pues (x_i, x_{i+1}) y (x_{i+1}, x_i) son flechas de D , para $i \in \{1, 2, 3\}$. Además T es transitiva pues (y_1, y_2) , (y_2, y_3) y (y_1, y_3) son flechas de D , también (y_2, y_3) , (y_3, y_4) y (y_2, y_4) son flechas de D , finalmente como (y_1, y_3) , (y_3, y_4) y (y_1, y_4) son flechas de D , se concluye que T es transitiva.

Definición 1.50. Una digráfica D es llamada *trayectable* o también llamada *hamiltoniana*, si existe una trayectoria en D que pasa por todos los vértices de D .

Observación 1.4. En la mayoría de los textos se usa con mayor frecuencia la definición de digráfica hamiltoniana, en vez de digráfica trayectable, sin embargo, en este texto nosotros sólo acuñaremos la definición de digráfica trayectable.

Ejemplo 6. En la figura 1.7 se ve claramente que S y T son trayectables.

Definición 1.51. Sea G una gráfica. Una *orientación* de G es una digráfica D que cumple que $V(G) = V(D)$ y que $F(D) = \{(u, v) \mid uv \text{ es una arista de } G\}$ y no contiene ciclos de longitud 2.

Ejemplo 7. En la figura 1.8 se muestran una gráfica G y O una orientación de G , pero notemos que L no es una orientación de G pues se forma el ciclo (u, v, u) de longitud 2 en L .

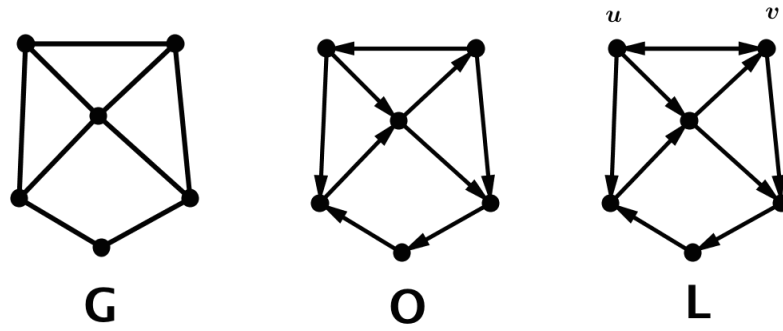


Figura 1.8: Gráfica G, O una orientación de G y L no orientación de G

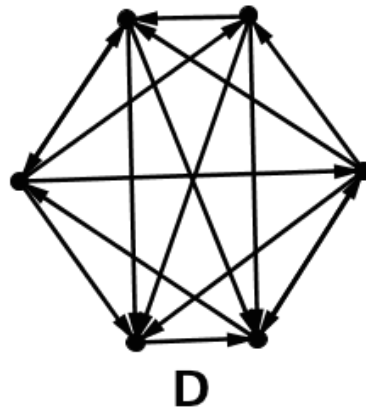


Figura 1.9: Digráfica semicompleta

Definición 1.52. *Una digráfica D es **semicompleta**, si para cualesquiera dos vértices x, y de D , se tiene que (x, y) o (y, x) es flecha de D .*

Ejemplo 8. *En la figura 1.9 se muestra una digráfica D , ésta es semicompleta, ya que cada vértice es adyacente a los restantes.*

Capítulo 2

Conjeturas de particiones de trayectorias

2.1. Introducción histórica

En la teoría de digráficas existen muchos problemas de gran importancia, de los cuales una gran mayoría están relacionados con el concepto de partición.

La historia del problema principal, que estaremos trabajando en este texto, tiene su origen en 1966, en uno de los primeros artículos publicados en [1] por László Lovász donde se presenta el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Si G es una gráfica y a, b , son dos enteros positivos de tal forma que $a + b = \Delta(G) - 1$, entonces existe una partición $\{A, B\}$ de tal forma que $\Delta(G[A]) \leq a$ y $\Delta(G[B]) \leq b$.*

M. Stiebitz en [2] demostró un resultado similar en el que consideraba el grado mínimo δ como parámetro. La conjetura de partición de trayectorias en inglés llamada The Path Partition Conjecture (esta conjetura es la que se mencionó en la introducción) es un problema similar a los dos problemas mencionados anteriormente, la versión no dirigida de esta conjetura fue discutida por primera vez por L. Lovász y P. Mihók en el año de 1981 en Szeged, Hungría; fue mencionada en la tesis de P. Hajnal [3] y J. Vronka [4], y fue presentada por primera vez en 1983 en un artículo de Laborde, Payan y Xuong [5].

Conjetura 2.1. *(J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Xuong [5]). Para cada gráfica G y, a, b dos enteros positivos tales que $a + b = \lambda(G)$, existe una*

partición $A \cup B$ de los vértices de G de tal forma que $\lambda(G[A]) \leq a$ y $\lambda(G[B]) \leq b$.

Sin embargo nosotros nos enfocaremos en conjeturas similares, específicamente, a su estudio en digráficas.

Una conjetura que fue postulada en 1955 por Bondy es la siguiente.

Conjetura 2.2. (Bondy [6]). *Para cada digráfica D y a, b dos enteros positivos tales que $a + b = \lambda(D)$, existe una partición $\{A, B\}$ de los vértices de D de tal forma que $\lambda(D[A]) = a$ y $\lambda(D[B]) = b$.*

Al tomar en cuenta el hecho de que toda gráfica se puede representar como una digráfica simétrica¹, notemos que la conjetura 2.2 generaliza la versión no dirigida (conjetura 2.1), además observemos que las hipótesis son más fuertes como consecuencia de tener la igualdad en el orden de las trayectorias de máxima longitud en cada partición.

En este trabajo también estudiaremos una conjetura más débil, pero antes mencionemos algunas definiciones.

Definición 2.1. *Definimos como un **trayecto** de una digráfica D , a una trayectoria de longitud máxima en D . El **orden de un trayecto** es el número de vértices en el trayecto, es decir, es el número $\lambda(D)$ (recuérdese la definición 1.40).*

Notación. *Diremos que T_y es un **y -trayecto** de una digráfica D , si T_y es un trayecto donde su vértice inicial es y .*

Definición 2.2. *Si a, b es un par de números enteros positivos (en algunos casos alguno de los dos cero), definimos una **(a, b) -partición** $\{A, B\}$ de una digráfica D , como una partición de $V(D)$ en dos conjuntos A y B de tal manera que $\lambda(D[A]) \leq a$ y $\lambda(D[B]) \leq b$. Si para cada par de números enteros positivos a, b tales que $\lambda(D) = a + b$, existe una (a, b) -partición de D , entonces decimos que D es **λ -particionable**.*

Ahora sí, como ya hemos mencionado las definiciones, empecemos con la conjetura prometida anteriormente.

Conjetura 2.3. *Toda digráfica es λ -particionable.*

Un caso particular que llamaremos el caso $a = 1$, es la siguiente conjetura.

¹Una gráfica G se puede ver como una digráfica simétrica D , es decir, si existe una arista uv de G , entonces (u, v) y (v, u) son flechas de D .

Conjetura 2.4. Si D es una digráfica, entonces D tiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición.

Definición 2.3. Sea D una digráfica. Definimos la **fuerza de trayectos** $S(D)$, como el conjunto de vértices iniciales de todos los trayectos de D .

Conjetura 2.5. Si D es una digráfica, entonces D tiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$, donde $A \subseteq S(D)$.

Observación 2.2. Notemos que en el contexto de las conjeturas 2.4 y 2.5, A o B pueden ser vacíos. Por ejemplo cuando D consta de un solo vértice, entonces hacemos: $A = V(D)$ y $B = \emptyset$, y obtenemos así la partición buscada.

Ahora que hemos mencionado algunas conjeturas, vamos a dar unos ejemplos con algunas digráficas específicas para que quede más claro lo que empezaremos a estudiar.

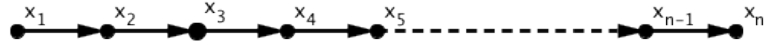
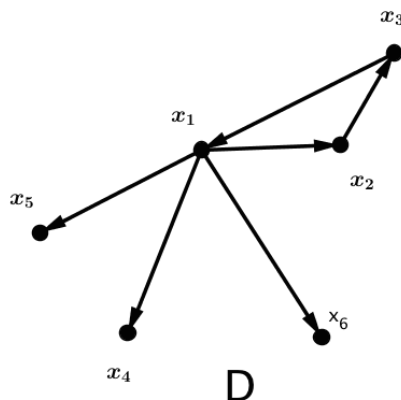


Figura 2.1: T es λ -particionable

Ejemplo 9. Sea T una trayectoria de orden n , como en la figura 2.1. Claramente $\lambda(T) = n$. Si a y b son dos enteros positivos, de tal forma que $n = a + b$, entonces hacemos:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_a\} \quad y \quad B = \{x_{a+1}, x_{a+2}, \dots, x_n\}.$$

Claramente tenemos que $A \cup B = V(D)$ y $\lambda(T[A]) = a$ y $\lambda(T[B]) = n - a = b$. Por lo tanto $\{A, B\}$ es una (a, b) -partición de T , y por lo tanto T es λ -particionable.

Figura 2.2: D es λ -particionable

Ejemplo 10. Sea D una digráfica como en la figura 2.2. Notemos que $\lambda(D) = 4$ y que sus trayectos son los siguientes: $T_i = (x_2, x_3, x_1, x_i)$, para $i \in \{4, 5, 6\}$. Ahora sean, $1 \leq a \leq b$, de tal forma que, $a + b = \lambda(D) = 4$. Tenemos entonces los dos siguientes casos posibles:

Caso 1. Si $a = 1$ y $b = 3$, entonces hacemos:

$$A = \{x_2\} \quad y \quad B = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

Entonces tenemos que $\lambda(D[A]) = 1$ y $\lambda(D[B]) = 3$, esto dado que $D[A]$ es un solo vértice y en $D[B]$ solo se forman los siguientes trayectos $T'_i = (x_3, x_1, x_i)$, para $i \in \{4, 5, 6\}$. Por lo tanto $\{A, B\}$ es una $(1, 3) = (a, b)$ -partición de D .

Caso 2. Si $a = 2$ y $b = 2$, entonces hacemos:

$$A = \{x_1, x_6\} \quad y \quad B = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Entonces tenemos que $\lambda(D[A]) = 2$ y $\lambda(D[B]) = 2$, esto dado que $D[A]$ sólo existe la flecha (x_1, x_6) y en $D[B]$ tenemos la flecha (x_2, x_3) . Por lo tanto $\{A, B\}$ es una $(2, 2) = (a, b)$ -partición de D .

Del caso 1 tenemos que D cumple las conjeturas 2.4, y 2.5, y juntando los 2 casos también tenemos que D es λ -particionable.

2.2. Particiones de digráficas con fuente de trayectos

En esta sección vamos a trabajar con la definición de fuente de trayectos y con las conjeturas 2.4 y 2.5. Vamos a mostrar que estas conjeturas son válidas para ciertas clases de digráficas.

Lema 2.1. *Sea D una digráfica con fuente de trayectos $S(D)$. Si x, y pertenecen a $S(D)$ y $y \in N^+(x)$, entonces x pertenece a cada y -trayecto.*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que x no pertenece a algún y -trayecto T_y , entonces como $y \in N^+(x)$, obtenemos una trayectoria $T = (x, y) \cup T_y$, que es de mayor longitud que T_y , en contradicción con la definición de trayecto, por lo tanto x pertenece a cada y -trayecto en D . \square

Corolario 2.1. *Sea D una digráfica con fuente de trayecto $S(D)$. Consideremos a x un vértice en $S(D)$. Si cada que y esté en $N^-(x)$ se cumpla que x pertenece a cada y -trayecto, entonces eliminando a x de D se eliminan también todos los w -trayectos, donde w está en $N(x) \cap S(D)$.*

Demostración. Sea x un vértice en $S(D)$. Consideremos T_w un w -trayecto con $w \in N(x)$. Tenemos los dos posibles casos:

Caso 1. Si $w \in N^+(x)$, entonces por el lema 2.1 x pertenece a T_w , entonces eliminando x se elimina el w -trayecto.

Caso 2. Si $w \in N^-(x)$, entonces por hipótesis x pertenece a T_w , entonces eliminando x se elimina el w -trayecto. \square

Debido al corolario anterior podemos dar la siguiente definición:

Definición 2.4. *Sea D una digráfica. Decimos que un vértice x en $S(D)$ es un **eliminador local de trayectos**, si cada que y en $N^-(x) \cap S(D)$, entonces cada y -trayecto de D contiene a x .*

Observación 2.3. *Notemos que si x es un eliminador local de trayectos de una digráfica D , entonces x elimina a todos los trayectos de D que tienen como vértice inicial un vértice de la vecindad de x .*

Ejemplo 11. *Consideremos D como en la figura 2.3. Los trayectos de D son los siguientes: $T = (w, x, y_1, y_2, z)$ y $T' = (w, y_1, y_2, z, x)$, por lo que $w \in S(D)$, además como $w \in N^-(x)$ y como T y T' contienen a x , entonces concluimos que x es un eliminador local de trayectos en D , es decir, x elimina a todos los trayectos cuyos vértices iniciales pertenecen a la vecindad de x .*

Como observación notemos que $N(x) = \{z, w\}$, pero como no existen z -trayectos en D entonces se sigue cumpliendo que x es un eliminador local de trayectos.

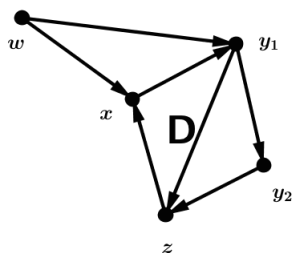


Figura 2.3: w es un eliminador local de trayectos en D

Definición 2.5. Una clase \wp de digráficas se llama una *clase hereditaria (hereditariamente inducida)* de digráficas, si cada subdigráfica (subdigráfica inducida) de \wp pertenece a la clase \wp .

Proposición 3. Supongamos que \wp es una clase hereditariamente inducida de digráficas, con la propiedad de que cada digráfica en \wp tiene un eliminador local de trayectos $x \in S(D)$. Entonces la conjetura 2.5 es válida para la clase \wp .

Demostración. Demostraremos la prueba por inducción sobre el orden de la digráfica. Consideremos los pasos de inducción:

1.- Paso base.

1.1- Si D es de orden 2, entonces $V(D) = \{x, y\}$ donde x es un eliminador local de trayectos, consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1. Si $\lambda(D) = 1$, entonces ponemos $A = \{x, y\}$ y $B = \emptyset$, entonces $\{A, B\}$ es una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición con $A \subseteq S(D)$, pues $\lambda([A]) = 1$ y $\lambda([B]) = 0 = \lambda(D) - 1$.

Caso 2. Si $\lambda(D) = 2$, entonces ponemos $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$, entonces $\{A, B\}$ es una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición con $A \subseteq S(D)$, pues $\lambda([A]) = 1$ y $\lambda([B]) = 1 = \lambda(D) - 1$.

2.- Hipótesis de inducción. Si D es una digráfica en \wp de orden $n - 1$, entonces D contiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$, con $A \subseteq S(D)$.

3.- Paso inductivo. Sea D una digráfica en \wp de orden n , queremos demostrar que D contiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$, con $A \subseteq S(D)$, para ello consideremos a x en $S(D)$ un eliminador local de trayectos en D y consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1. Si $\lambda(D - x) < \lambda(D)$, entonces claramente, $(\{x\}, V(D) - \{x\})$ es una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición de D , con $\{x\} \subseteq S(D)$, pues $\lambda(\{x\}) = 1$ y $\lambda(V(D) - \{x\}) = \lambda(D - x) < \lambda(D)$.

Caso 2. Si $\lambda(D - x) = \lambda(D)$, entonces como \wp es hereditariamente inducida, $D - x \in \wp$, y como el orden de $D - x$ es $n - 1$, entonces por hipótesis de inducción $D - x$ tiene una $(1, \lambda(D - x) - 1)$ -partición (A', B) , con $A' \subseteq S(D - x)$. Como x es un eliminador local de trayectos y $\lambda(D - x) = \lambda(D)$, $N(x) \cap S(D - x) = \emptyset$, esto se cumple dado que al eliminar x se eliminan los w -trayectos, con $w \in N(x)$ -corolario 2.1-, y como $A' \subseteq S(D - x)$, entonces $A = A' \cup \{x\}$ es un conjunto independiente, entonces $\{A, B\}$ es una $(1, \lambda(D - x) - 1)$ -partición de D , con $A \subseteq S(D)$, y como $\lambda(D - x) = \lambda(D)$, entonces $\{A, B\}$ es la partición buscada. \square

Corolario 2.2. Si D es una digráfica con la propiedad de que cualesquiera par de ciclos en D no comparten flechas, entonces D tiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$, con $A \subseteq S(D)$.

Demostración. Sea $S(D)$ la fuente del trayecto de D y supongamos que D tiene un trayecto de orden $\lambda(D)$. Como la propiedad de que cualquier par de ciclos en D no comparten flecha es hereditariamente inducida, entonces basta con probar que D tiene un x -eliminador local de trayectos. Supongamos por contradicción que D no contiene dicho vértice y sea $x_1 \in S(D)$. Entonces como x_1 no es un eliminador local de trayectos, tenemos que existe x_2 en $N^-(x_1) \cap S(D)$ y existe un x_2 -trayecto de tal manera que no contiene a x_1 . Nuevamente como x_2 no es un eliminador local de trayectos, existe x_3 en $N^-(x_2) \cap S(D)$ y existe un x_3 -trayecto que no contiene a x_2 . Continuando con el mismo razonamiento construimos una sucesión x_1, x_2, \dots de elementos de $S(D)$, donde (x_{i+1}, x_i) esta en $F(D)$. Como $S(D)$ es finito, existe un par $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Entonces la subsucesión x_i, x_{i+1}, \dots, x_j contiene un camino cerrado en D , por lo tanto contiene un ciclo C . Ahora sea v un vértice en $V(C)$, y denotemos v^+ y v^- su ex-vecino y su in-vecino respectivamente, ambos en C , así, existe un v -trayecto T_v que no contiene a v^+ . Como v^- está contenido en cada v -trayecto (lema 2.1), entonces tenemos que existe una vv^- -trayectoria T_{vv^-} contenida en T_v , donde v^+ no esta en T_{vv^-} , pero entonces la flecha (v^-, v) es compartida por el ciclo C y el ciclo $C' = (v^-, v) \cup T_{vv^-}$ (véase la figura 2.4), en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto D tiene un x -eliminador local de trayectos y por la proposición 3 se concluye la prueba. \square

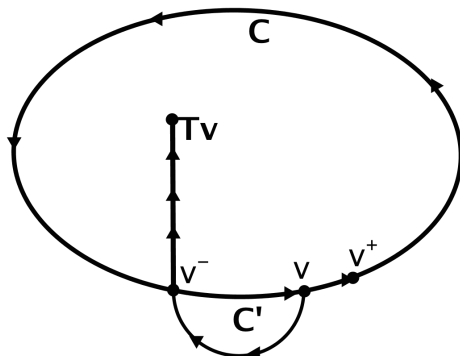


Figura 2.4: Prueba del corolario 2.2

Definición 2.6. Sea D una digráfica. $H \subseteq V(D)$ es **dominante**, si para cada x en $V(D) - H$ existe y en H , de tal forma que (y, x) está en $F(D)$.

Definición 2.7. Sea D una digráfica. $H \subseteq V(D)$ es **absorbente**, si para cada x en $V(D) - H$ existe y en H , de tal forma que (x, y) está en $F(D)$.

Definición 2.8. Sea D una digráfica. $N \subseteq V(D)$ es un **núcleo** de D , si N es independiente y absorbente.

Definición 2.9. Sea D una digráfica. $S \subseteq V(D)$ es un conjunto **solución** de D , si N es independiente y dominante.

Comentario: el concepto de núcleo fue descrito por primera vez en [15] por Von Neumann, la definición original de un núcleo N de una digráfica D , era aquella donde N es independiente y dominante, es decir, un conjunto solución. Cabe mencionar que el artículo donde nos basamos [12], los autores utilizan la definición de núcleo como conjunto solución, pero para mostrar algunos hechos extras, nosotros nos basaremos en la definición 2.8, sin afectar el contenido del artículo [12].

Ejemplo 12. Sea D como en la figura 2.5, entonces $N = \{b_1, b_2, b_3\}$ es un núcleo de D , pues claramente N es independiente, y para cada $a_i \in N - V(D)$, tenemos que $(a_i, b_i) \in F(D)$, para $i \in \{0, 1, 2\}$. Por lo que N es absorbente.

Teorema 2.4. Sea D una digráfica con orden de trayectos $\lambda(D)$ y fuente $S(D)$. Si $D[S(D)]$ tiene al menos un conjunto solución, entonces D tiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$ con $A \subseteq S(D)$.

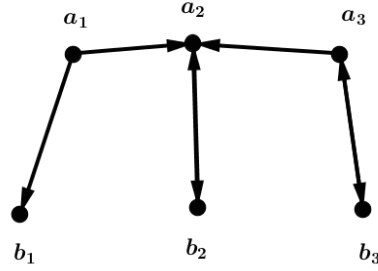


Figura 2.5: Ejemplo de un núcleo $N = \{b_1, b_2, b_3\}$

Demostración. Sean $A = S'$ un conjunto solución de $D[S]$ y $B = V(D) - N$. Supongamos por contradicción que existe una T trayectoria de orden $\lambda(D)$ en $D[B]$. Sea x el vértice inicial de T , claramente $x \in V(D) - S'$ y como S' es dominante, entonces existe y en N de tal forma que (y, x) está en $F(D)$, entonces $(y, x) \cup T$ es una trayectoria de orden $\lambda(D) + 1$, lo cual contradice la definición de trayecto. Por lo tanto $\lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - 1$. Como S' es independiente $\lambda(D[S']) = 1$. Por lo tanto $\{A, B\}$ es una $(1, \lambda(D) - 1)$ partición con $A = S' \subseteq S(D)$. \square

Teorema 2.5. *Sea D una digráfica con orden de trayectos $\lambda(D)$ y fuente $S(D)$. Si $D[S(D)]$ tiene al menos un núcleo, entonces D tiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$ con $A \subseteq S(D)$.*

Demostración. Sean $A = N$ un núcleo de $D[S]$ y $B = V(D) - N$. Supongamos por contradicción que existe una T trayectoria de orden $\lambda(D)$ en $D[B]$. Sea x el vértice final de T , claramente $x \in V(D) - N$ y como N es absorbente, entonces existe y en N de tal forma que (x, y) está en $F(D)$, entonces $T \cup (x, y)$ es una trayectoria de orden $\lambda(D) + 1$, lo cual contradice la definición de trayecto. Por lo tanto $\lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - 1$. Como N es independiente $\lambda(D[N]) = 1$. Por lo tanto $\{A, B\}$ es una $(1, \lambda(D) - 1)$ partición con $A = N \subseteq S(D)$. \square

Teorema 2.6. *(Richardson [17]) Toda digráfica sin ciclos impares (ciclos de longitud impar) tiene al menos un núcleo.*

El teorema anterior fue demostrado por M. Richardson en [17], posteriormente Victor Neumann Lara en [11] hizo una demostración más general, es decir, para digráficas con número de vértices finito o infinito, para ello utilizó un nuevo concepto llamado seminúcleo:

Definición 2.10. Sea D una gráfica y R un conjunto independiente de vértices en D . Decimos que R es un **seminúcleo** si cada que x esté en $V(D) - R$ y exista una Rx -flecha, entonces existe una xR -flecha en D .

Ejemplo 13. Sea D como en la figura 2.5, $R = \{b_2, b_3\}$ es un seminúcleo de D , pues R es independiente y como a_i está en $V(D) - R$, (b_i, a_i) , (a_i, b_i) están en las flechas de D , para $i \in \{2, 3\}$, entonces R es un seminúcleo de D , en otras palabras existe Rb_i flecha y existe Rb_i flecha, para $i \in \{2, 3\}$.

Victor Neumann en [11] enunció y demostró el siguiente resultado:

Teorema 2.7. Si D es una digráfica D en donde cada subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo distinto del vacío, entonces D tiene al menos un núcleo.

Observación 2.8. El resultado anterior sirve para demostrar que las digráficas simétricas, transitivas, bipartitas, o, acíclicas, tienen al menos un núcleo, veamos un ejemplo:

Teorema 2.9. Si D es una digráfica simétrica, entonces D tiene un núcleo.

Demostración. Vamos a utilizar el teorema 2.7, es decir, vamos a demostrar que cualquier subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo distinto del vacío. Si H es una subdigráfica inducida de D simétrica, entonces H es simétrica. Sea $x \in V(D)$ y consideremos $S = \{x\}$. S es seminúcleo de H , pues si $y \in H - S$ y $(y, x) \in F(H)$, entonces por ser H simétrica $(x, y) \in F(D)$, es decir, cada que existe una yS flecha existe una Sy flecha. Por lo tanto S es seminúcleo no vacío y por el teorema 2.7, D tiene al menos un núcleo. \square

Teorema 2.10. Sea D una digráfica con orden de trayectos $\lambda(D)$ y fuente $S(D)$. Si $D[S(D)]$ es acíclica, transitiva, simétrica, o, bipartita, entonces D tiene una $(1, \lambda(D) - 1)$ -partición $\{A, B\}$ con $A \subseteq S(D)$.

Demostración. Sabemos por el teorema 2.6 y la observación 2.8 que en cualquier caso $D[S(D)]$ tiene núcleo y entonces por el teorema 2.5 se sigue la prueba del teorema. \square

2.3. Particiones de digráficas sin ciclos

Definición 2.11. Sea D una digráfica. Definimos la **función** $m: V(D) \rightarrow \mathbb{N}$, donde $m(v)$ es igual al máximo orden de las trayectorias en D con vértice final o terminal v .

Definición 2.12. Sea D una digráfica. La digráfica de condensación DC está definida como sigue: $V(DC) = \{\text{Componentes fuertemente conexas de } D\}$ y $(C_1, C_2) \in F(DC)$ si y sólo si existe una C_1C_2 -flecha en D .

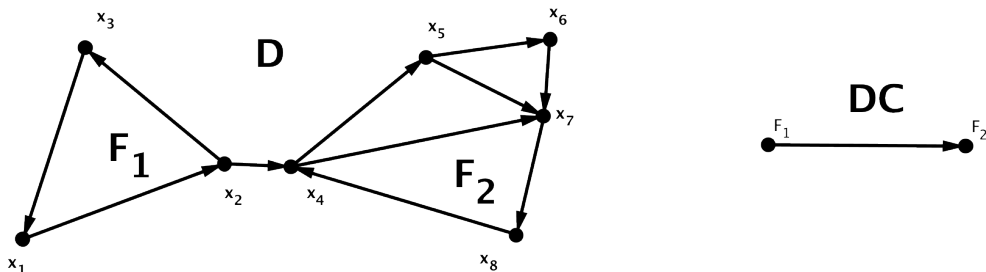


Figura 2.6: D y sus componentes fuertemente conexas F_1 y F_2 , y DC su digráfica de condensación

Ejemplo 14. Sea D como en la figura 2.6. Tenemos que sus componentes fuertemente conexas son $D[\{x_1, x_2, x_3\}] = F_1$ y $D[\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}] = F_2$. Como existe $F_1 F_2$ -flecha en D , entonces DC es la trayectoria mostrada en la figura 2.6.

Definición 2.13. Sean D una digráfica y DC su digráfica de condensación, para cada v en $V(DC)$, definimos la función \bar{m} , donde $\bar{m}(v)$ es igual al máximo orden de las trayectorias en DC con vértice final o terminal v .

Definición 2.14. Sean D una digráfica y DC su digráfica de condensación. Para cada $1 \leq i \leq \lambda(DC)$ definimos el:

$$\text{Nivel } i = \{v \in V(DC) \mid \bar{m}(v) = i\}.$$

Notación. Si consideramos a F una componente fuertemente conexa de D , entonces diremos que cada vértice v de F está sobre el nivel $\bar{m}(F)$.

Ejemplo 15. Sean D y su digráfica de condensación DC como en la figura 2.6. Notemos que $\bar{m}(F_i) = i$, para $i \in \{1, 2\}$. También tenemos que los vértices x_i están sobre el nivel 1, para $i \in \{1, 2, 3\}$, y los vértices x_j están sobre el nivel 2, para $j \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Definición 2.15. Si D es una digráfica, definimos la **altura** $h(D)$ de D , como el número de niveles de DC .

Lema 2.2. Sean D una digráfica y DC su digráfica de condensación, entonces DC es acíclica (sin ciclos).

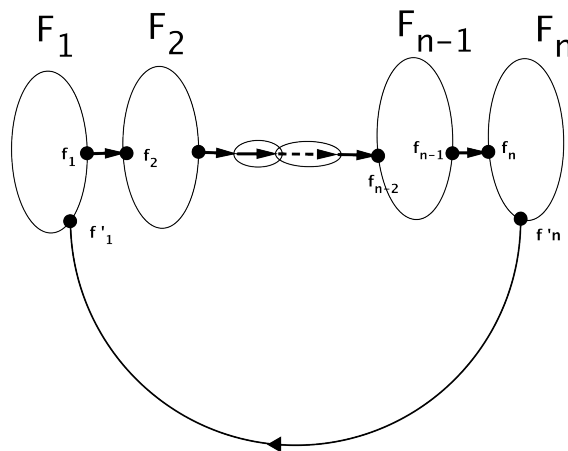


Figura 2.7: Prueba del lema 2.2

Demostración. Sean D una digráfica y DC su digráfica de condensación. Supongamos por contradicción que existe un ciclo $C=(F_1, \dots, F_{n-1}, F_n, F_1)$ en DC , donde F_i es una componente fuertemente conexas de D , para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Definimos:

$F = F_1 \cup (f_1, f_2) \cup F_2 \cup (f'_2, f_3) \cup F_3 \cup \dots \cup F_{n-1} \cup (f'_{n-1}, f_n) \cup F_n \cup (f'_n, f'_1) \cup F_1$, donde cada $f_j \in V(F_j)$, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, cada $f'_j \in V(F_j)$, para $j \in \{2, \dots, n-1\}$, y $f'_j \in F_j$, para $j \in \{1, n\}$, (véase la figura 2.7). Claramente F es una subdigráfica fuertemente conexas de D que contiene propiamente a cada F_i , para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, lo cual es imposible pues cada F_i es una subdigráfica fuertemente conexas máxima por contención en D . Por lo tanto DC no puede contener ningún ciclo. \square

Lema 2.3. *En cada digráfica D se cumple que $h(D) = \lambda(DC)$.*

Demostración. Sean D una digráfica y DC su digráfica de condensación. Sea $T = (x_1, x_2, \dots, x_{\lambda(DC)})$ un trayecto en DC . Observemos que cada x_i está sobre el nivel i , con $1 \leq i \leq \lambda(DC)$, pues de no ser así, existe x_j , con $1 \leq i \leq \lambda(DC)$, donde $m = \overline{m}(x_j) \neq j$. Como (x_1, x_2, \dots, x_i) es una trayectoria de orden i en DC , se tiene que $m > j$. Sea $T' = (y_1, y_2, \dots, y_m = x_j)$ una trayectoria en DC . Ahora notemos que existen h, k , con $1 \leq h \leq m$ y $j < k \leq \lambda(DC)$, donde $y_h = x_k$, pues de lo contrario $T' \cup (x_j, x_{j+1}, \dots, x_{\lambda(DC)})$ sería una trayectoria en DC de mayor orden que T , lo cual es imposible. Entonces se forma el siguiente camino cerrado C en DC , donde $C = (y_h = x_k, y_{h+1}, \dots, y_m = x_j, x_{j+1}, \dots, x_k)$, lo cual es una contradicción pues todo camino cerrado contiene un ciclo, lo cual no puede suceder en DC , pues es acíclica

(lema 2.2). Así que cada x_i está sobre el nivel i y por lo tanto el número de niveles es $\lambda(DC)$ y por lo tanto $h(D) = \lambda(DC)$. \square

Teorema 2.11. *Sea D una digráfica fuertemente conexa con $|V(D)| \geq 2$. D es bipartita si y sólo si D no contiene ciclos impares (de longitud impar).*

Demostración. \Rightarrow Si D es una digráfica fuertemente conexa y bipartita. Sea $\{V_1, V_2\}$ la bipartición de $V(D)$ en conjuntos independientes. Supongamos por contradicción que D contiene un ciclo de longitud impar $C = (x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0)$, también sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 \in V_1$, como $(x_0, x_1) \in F(D)$ y V_1 es independiente, se tiene que $x_1 \in V_2$. Análogamente como $(x_1, x_2) \in F(D)$ y V_2 es independiente, se tiene que $x_2 \in V_1$. Entonces deducimos que los vértices con índice impar quedan en V_1 y los vértices con índice par quedan en V_2 , y entonces en el paso $2k$ obtendremos que $x_{2k} \in V_1$. Ahora como $(x_{2k}, x_0) \in F(D)$ y $x_0 \in V_1$, se tiene que V_1 no es independiente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto D no puede contener ciclos impares.

\Leftarrow Sea D una digráfica fuertemente conexa con $|V(D)| \geq 2$ y sin ciclos dirigidos impares. Consideremos $x \in V(D)$ y definamos:

$$A = \{v \in V(D) \mid \text{existe un } xv\text{-camino de longitud par en } D\}$$

$$B = \{v \in V(D) \mid \text{existe un } xv\text{-camino de longitud impar en } D\}.$$

Notemos que:

1.- A y B son no vacíos.

Demostración. Notemos que $x \in A$, pues siempre existe el camino trivial de longitud cero, por lo tanto $A \neq \emptyset$. Ahora como $|V(D)| \geq 2$, se tiene que existe $v \in V(D)$, con $v \neq x$. Como D es fuertemente conexa existe un xv -camino $C = (x = x_1, x_2, \dots, x_n = v)$ en D y por lo tanto $x_2 \in B$, por lo tanto $B \neq \emptyset$.

2.- $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe v en $A \cap B$, en consecuencia existe C un xv -camino de longitud par y C' un xv -camino de longitud impar ambos en D . Ahora como D es fuertemente conexa, existe C'' un vx -camino. Si C'' tiene longitud par, entonces $C' \cup C''$ es un camino cerrado de longitud impar en D , y si C'' tiene longitud impar, entonces $C \cup C''$ es un camino cerrado de longitud impar en D , en cualquier caso obtenemos un camino cerrado de longitud impar en D , pero todo camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar, lo cual es imposible pues D no contiene ciclos de longitud impar. Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$.

$B = \emptyset$.

3.- $A \cup B = V(D)$.

Demostración. Claramente $A \cup B \subseteq V(D)$. Ahora sea $v \in V(D)$, como D es fuertemente conexa existe un xv -camino de longitud par o de longitud impar en D , entonces $v \in A \cup B$ y por lo tanto $V(D) \subseteq A \cup B$.

4.- A y B son independientes.

Demostración. Supongamos por contradicción que A no es independiente, entonces existen y, z en A de tal forma que $(y, z) \in F(D)$. Como $y \in A$, existe C un xy -camino de longitud par en D , entonces tenemos que $C \cup (y, z)$ es un xz -camino de longitud impar, entonces $z \in A \cap B$, lo cual contradice el punto 2. Por lo tanto A es independiente. Análogamente B es independiente.

De 1, 2, 3 y 4 obtenemos que $\{A, B\}$ es una bipartición de $V(D)$ en conjuntos independientes. Por lo tanto D es bipartita. \square

Teorema 2.12. *Si D es una digráfica con altura $h(D)$ y sin ciclos impares, entonces D tiene una $(h(D), h(D))$ -partición.*

Demostración. Sean F_1, F_2, \dots, F_n las componentes fuertemente conexas de D . Notemos que como D no contiene ciclos impares, entonces cada F_i no contiene ciclos impares. Notemos también que no podemos ocupar directamente el teorema 2.11 a todas las F_i , para $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, pues puede suceder que alguna F_i tenga un solo vértice. Si denotamos $\{A_{F_i}, B_{F_i}\}$ como la bipartición de F_i en conjuntos independientes, tomando en cuenta que si alguna componente F_i tiene un solo vértice, hacemos $B_{F_i} = \emptyset$, entonces obtenemos que cada $\{A_{F_i}, B_{F_i}\}$ es una $(1,1)$ -partición, para $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, pues por la independencia de A_{F_i} y B_{F_i} , tenemos que $\lambda(D[A_{F_i}]) = 1$ y $\lambda(D[B_{F_i}]) \leq 1$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Definimos:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

Observemos que si T es una trayectoria en $D[A]$, entonces T tiene a lo más un vértice de A_i , para $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, pues de lo contrario, existiría $T' = (x_1, \dots, x_m)$ una trayectoria en $D[A]$, donde x_h, x_k es un par de vértices de A_j y $1 \leq h, k \leq m$ y $k = h + r$ (con $0 < r$). Consideremos $T'' = (x_h, x_{h+1}, \dots, x_{h+r-1})$, como A_j es independiente, entonces, $x_{h+1} \in A'_{j+1}$, con $A_j \neq A'_{j+1}$. Ahora $x_{h+2} \in A'_{j+2}$, de nuevo por la independencia de cada conjunto tenemos que $A'_{j+1} \neq A'_{j+2}$. Si $A'_{j+2} = A_j$, entonces se forma el ciclo (A_j, A'_{j+1}, A_j) en DC acíclica por el lema 2.2, lo cual es imposible, de modo que si seguimos con el mismo procedimiento tendremos que $T_{DC} = (A_j, A'_{j+1}, \dots, A'_{j+r-1})$ es una trayectoria en DC , donde, $x_{h+i} \in A'_{j+i}$, para $i \in \{1, 2, 3, \dots,$

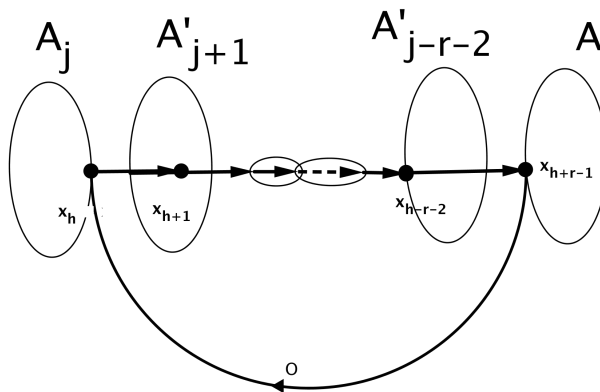


Figura 2.8: Prueba del teorema 2.12.

$r-1\}$. Por lo que $C = T_{DC} \cup (A'_{j+r-1}, A_j)$ es un ciclo en DC (véase la figura 2.8), lo cual es imposible pues DC es acíclica (lema 2.2). Análogamente el resultado es válido para B .

En consecuencia el orden de un trayecto en $D[A]$ es a lo más $\lambda(DC) = h(D)$ (lema 2.3), por lo tanto $\lambda(D[A]) \leq h(D)$. Análogamente $\lambda(D[B]) \leq h(D)$. Por lo tanto $\{A, B\}$ es una $(h(D), h(D))$ -partición de D . \square

Corolario 2.3. *Sea D una digráfica sin ciclos impares. Si D tiene altura $h(D) \leq 2$, entonces D es λ -particionable.*

Demostración. Sean a, b dos números positivos de tal forma que $\lambda(D) = a + b$, entonces $b = \lambda(D) - a$. Consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1: Si $h(D) = 1$, entonces por el teorema 2.12 D contiene una $(1, 1)$ -partición $\{A, B\}$ y como $\lambda(D[A]) \leq 1 \leq a$ y $\lambda(D[B]) \leq 1 \leq b$, se tiene que $\{A, B\}$ es una (a, b) -partición y por lo tanto D es λ -particionable.

Caso 2: Si $h(D) = 2$, entonces por el teorema 2.12 D contiene una $(2, 2)$ -partición $\{A, B\}$. Consideremos los siguientes dos subcasos posibles:

Subcaso 1: Si $a = 1$, entonces como D no contiene ciclos impares por el teorema 2.10 D contiene una $(1, \lambda(D) - 1) = (a, b)$ -partición.

Subcaso 2: Si $a \geq 2$, entonces podemos suponer que $b = \lambda(D) - a \geq 2$, pues

claramente D tiene una (a, b) -partición si y sólo si tiene una (b, a) -partición, así $b \geq 2$, pues de lo contrario tendríamos el subcaso 1. Entonces tenemos que $\{A, B\}$ es una $(a, \lambda(D) - a) = (a, b)$ -partición de D , pues $\lambda(D[A]) \leq 2 \leq a$ y $\lambda(D[B]) \leq 2 \leq b = \lambda(D) - a$.

En cualquier subcaso siempre existe una (a, b) -partición de D y por lo tanto D es λ -particionable. \square

2.4. Particiones de Gallai-Roy-Vitaver

Empezaremos en esta sección definiendo una partición de los vértices de una digráfica D acíclica (sin ciclos), llamada partición de Gallai-Roy-Vitaver (GRV), primero daremos la definición y luego probaremos que en realidad es una partición de los vértices de D y, que es en realidad una partición en conjuntos independientes.

Definición 2.16. *Sea D una digráfica acíclica con orden de trayecto $\lambda(D)$. Definimos la partición GRV de $V(D)$ conformada por los elementos de la sucesión $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(D)})$, donde:*

$$V_i = \{v \in V(D) \mid m(v) = i\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}.$$

Y m es la función de la definición 2.10.

Lema 2.4. *La partición GRV de una digráfica acíclica D está bien definida, es decir, es en realidad una partición de $V(D)$ y además es una partición de conjuntos independientes.*

Demostración. Sean D una digráfica y $B = \bigcup_{k=1}^{\lambda(D)} V_k$, donde: $V_i = \{v \in V(D) \mid m(v) = i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$. Demostraremos que B es una partición de $V(D)$ y que V_i es independiente, para $i = 1, 2, \dots, \lambda(D)$. Para ello probemos los siguientes incisos:

1.- $V_i \neq \emptyset$, para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$.

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$, de tal forma que $V_i = \emptyset$. Sean T un trayecto de D y $T_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ la subtrayectoria de T . Notemos que T_i es una trayectoria de orden i que termina en x_i , y como $V_i = \emptyset$, entonces $m(x_i) > i$. Así existe una trayectoria P que termina en x_i y que es de orden mayor que i . Consideremos al camino $P \cup (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{\lambda(D)})$ y notemos que ésta no es una trayectoria, de lo contrario sería una trayectoria de orden mayor que la de T , lo cual es imposible

pues T es un trayecto. Así este último camino contiene un camino cerrado y por lo tanto un ciclo. Lo cual es una contradicción pues D no contiene ciclos. Por lo tanto $V_i \neq \emptyset$, para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$.

2.- $B = V(D)$.

Demostración. Tenemos que $B \subseteq V(D)$, esto dado que por definición cada $V_i \subseteq V(D)$, para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$. Sea $v \in V(D)$, tenemos que $m(v) = i$, para algún $1 \leq i \leq \lambda(D)$, entonces $v \in V_i$ y por lo tanto $V(D) \subseteq B$.

3.- $V_i \cap V_j = \emptyset$, si $i \neq j$, con $1 \leq i, j \leq \lambda(D)$.

Demostración. Supongamos por contradicción que existe x en $V_i \cap V_j$, con $i \neq j$ y $1 \leq i, j \leq \lambda(D)$. Esto implica que $m(x) = i = j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V_i \cap V_j = \emptyset$.

4.- V_i es independiente, para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$.

Demostración. Sea $1 \leq i \leq \lambda(D)$. Supongamos por contradicción que V_i no es independiente, entonces existen x, y en V_i de tal forma que $(x, y) \in F(D)$. Como $m(x) = i$, existe $T = (x_1, \dots, x_i = x)$ una trayectoria en D . Notemos que $y \in V(T)$, pues de lo contrario $T \cup (x, y)$ es una trayectoria en D de orden $i + 1$ que termina en y , lo cual es imposible pues $m(y) = i$. Entonces existe k con $1 \leq k < i$, donde $x_k = y$, en consecuencia se forma el siguiente ciclo $C = (x_k = y, x_{k+1}, \dots, x_i = x, y)$, lo cual es una contradicción pues D es acíclica. Por lo tanto V_i es independiente, para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$.

De 1, 2 y 3 tenemos que B es una partición de $V(D)$ y de 4 tenemos que es una partición en conjuntos independientes, que es lo que se quería demostrar. \square

Ejemplo 16. Sea D como en la figura 2.9, observemos que D es acíclica, es decir, no tiene ciclos. Por lo tanto podemos considerar su partición GRV. Observemos que $\lambda(D) = 6$, por lo que su partición será de la forma $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_6\}$. El lector puede comprobar fácilmente viendo la figura 2.9 que cada conjunto está definido como sigue:

$$V_i = \{x_i\}, \text{ para } i \in \{1, 2, 6\}.$$

y

$$V_3 = \{x_3, y_3\}, V_4 = \{x_4, y_4, z_4\} \text{ y } V_5 = \{x_5, y_5\}.$$

Y como había de esperarse, cada V_i es independiente, para $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

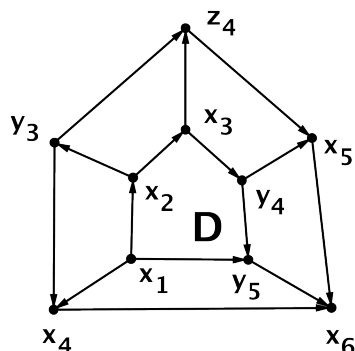
Partición GRV de $V(D)$

Figura 2.9

Lema 2.5. Sea D una digráfica acíclica con orden de trayecto $\lambda(D)$ y partición de GRV $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(D)}\}$:

- 1.- Si $(v_i, v_j) \in F(D)$, con $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$, entonces $i < j$.
- 2.- Si T es una trayectoria en D , entonces

$$|V(T) \cap V_i| \leq 1, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}.$$

Demostración. 1.- Si $(v_i, v_j) \in F(D)$, con $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$, entonces existe $T = (u_1, \dots, u_i = v_i)$ una trayectoria en D . Notemos que $v_j \notin V(T)$, pues de lo contrario $v_j = u_h$ con $1 \leq h < i$, y obtenemos el siguiente ciclo $C = (u_h = v_j, u_{h+1}, \dots, u_i = v_i, v_j)$ en D , lo cual es imposible pues D es acíclica.

Entonces $T' = (u_1, \dots, u_i = v_i, v_j)$ es una trayectoria en D de orden $i + 1$ que termina en v_j , así $m(v_j) = j \geq i + 1$, y por lo tanto $i < j$.

2.- Sea $T = (x_1, \dots, x_h)$ una trayectoria en D y supongamos por contradicción que existe $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$ de tal forma que $|V(T) \cap V_i| \geq 2$. Entonces existen x_k, x_{k+r} en $V(T) \cap V_i$, con $1 \leq k < h$ y $r > 0$. Notemos que $x_{k+r-1} \in V_{m(x_{k+r-1})}$ y $(x_{k+r-1}, x_{k+r}) \in F(D)$. Entonces por 1, tenemos que $m(x_{k+r-1}) < m(x_{k+r}) = i$. Análogamente $m(x_{k+r-2}) < m(x_{k+r-1}) < i$. Si seguimos con el mismo procedimiento en el paso r llegaríamos a que: $m(x_{k+r-r}) = m(x_k) < i$, pero $m(x_k) = i$ y esto es una contradicción y viene de suponer que existe dicho i . Por lo tanto $|V(T) \cap V_i| \leq 1$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$. \square

Corolario 2.4. Sea D una digráfica acíclica. Si $T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ es una trayectoria en D , $1 \leq i, j \leq n$ y además $i < j$, entonces $m(x_i) < m(x_j)$.

Demostración. Si $1 \leq i, j \leq n$, con $i < j$, entonces $j = i + r$, con $r > 0$. Notemos que como $(x_{i+r-1}, x_{i+r}) \in F(D)$, entonces por el lema 2.5, $m(x_{i+r-1}) < m(x_{i+r})$. Análogamente como $(x_{i+r-2}, x_{i+r-1}) \in F(D)$, por el lema 2.5, $m(x_{i+r-2}) < m(x_{i+r-1})$, entonces $m(x_{i+r-2}) < m(x_{i+r})$. Procediendo de manera análoga en el paso r , concluiremos que $m(x_i) = m(x_{i+r-r}) < m(x_{i+r}) = m(x_j)$, que es lo que se quería demostrar. \square

Teorema 2.13. *Cada digráfica acíclica D es λ -particionable.*

Demostración. Sean a y b dos números positivos de tal forma que $\lambda(D) = a + b$. Consideremos la partición de GRV $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(D)}\}$ de $V(D)$. Sean

$$A = \bigcup_{k=1}^a V_k \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{k=a+1}^{\lambda(D)} V_k$$

Por el lema 2.5, cada trayectoria en D tiene a lo más un vértice en cada V_i , entonces $\lambda(D[A]) \leq a$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - a = b$, entonces $\{A, B\}$ es una (a, b) -partición. Por lo tanto D es λ -particionable. \square

Definición 2.17. *Sea D una digráfica. Para cada subdigráfica M acíclica de D , definimos la **función** $m_M: V(M) \rightarrow \mathbb{N}$, donde $m_M(v)$ es el máximo orden las trayectorias en M que terminan en v .*

Observación 2.14. *Si D es una digráfica y M es una subdigráfica acíclica de D , entonces podemos considerar $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(M)})$ para obtener la partición GRV de $V(M)$, pero notemos que $v \in V_i$ si y sólo si $m_M(v) = i$.*

Teorema 2.15. *Cada digráfica D con un único ciclo es λ -particionable.*

Demostración. Sean $C = (u, x_1 = v, x_2, \dots, x_n, u)$ el ciclo de D y a, b dos números positivos de tal forma que $\lambda(D) = a + b$. Sea $M = D - (u, v)$, claramente M es acíclica, pues (u, v) es una flecha del único ciclo C en D , entonces podemos considerar $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(M)}\}$ la partición GRV de $V(M)$. Sabemos que $u \in V_j$ y $v \in V_i$, con $1 \leq i, j \leq \lambda(M)$. Notemos que $i < j$, pues sea $T = (x_1 = v, x_2, \dots, x_n, u)$, notemos también que T es una trayectoria en M , pues C es un ciclo en $D = M \cup (u, v)$, entonces por el corolario 2.4, tenemos que $i = m_M(v = x_2) < m_M(u) = j$. Ahora hagamos una re-etiquetación de índices al conjunto $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(M)}\}$ como $\{V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, \dots, V_{t_{\lambda(M)}}\}$, de tal forma que $V_{t_a} = V_i$ y $V_{t_{a+1}} = V_j$. Definimos:

$$A = \bigcup_{r=1}^a V_{t_r} \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{r=a+1}^{\lambda(M)} V_{t_r}$$

Claramente $A \cup B = V(D)$. Ahora por el lema 2.5, cada trayectoria en D

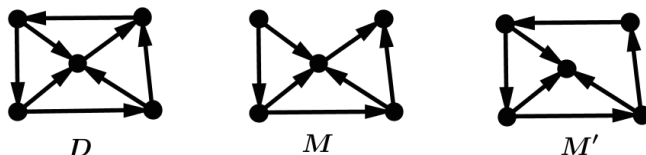


Figura 2.10: M y M' son subdigráficas acíclicas máximas de D

tiene a lo más un vértice en cada V_{tr} , con $1 \leq r \leq \lambda(M)$, entonces $\lambda(M[A]) \leq a$ y $\lambda(M[B]) \leq \lambda(M) - a \leq \lambda(D) - a = b$. Por construcción la flecha (u, v) es una BA -flecha, pues $u \in B$ y $v \in A$, entonces $M[A] = D[A]$ y $M[B] = D[B]$, entonces $\{A, B\}$ es una (a, b) -partición de D . Por lo tanto D es λ -particionable. \square

En vista de la prueba anterior, nos preguntaremos si podremos generalizar la idea, para cualquier digráfica no con un solo ciclo, si no con más, la respuesta es que sí, y entonces comencemos con la siguiente definición:

Definición 2.18. Sean D una digráfica y M una subdigráfica generadora de D . Decimos que M es **acíclica máxima**, si M es acíclica y $F(M)$ es máxima por contención.

Observación 2.16. Si D es acíclica, entonces claramente D es la única digráfica acíclica máxima en D .

Ejemplo 17. Sean D una digráfica y M, M' subdigráficas generadoras de D , como se muestran en la figura 2.10. El lector puede verificar que M y M' son subdigráficas acíclicas máximas de D .

Observación 2.17. Si D es una digráfica que contiene propiamente a M (subdigráfica acíclica máxima), entonces $F(D) - F(M) \neq \emptyset$, esto dado que como M está contenida propiamente en D , entonces existe al menos una flecha en $F(D) - F(M)$.

Lema 2.6. Sean D una digráfica y M una subdigráfica generadora de D . Si M es acíclica máxima, entonces para cada (u, v) en $F(D) - F(M)$, se tiene que (u, v) esta en un ciclo de D .

Demostración. Supongamos que M es acíclica máxima y consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1. Si $F(D) - F(M) = \emptyset$, entonces es claro que se cumple por vacuidad.

Caso 2. Si $F(D) - F(M) \neq \emptyset$, entonces consideremos $(u, v) \in F(D) - F(M)$ y supongamos por contradicción que (u, v) no está en ningún ciclo de D , entonces es claro que si hacemos $M' = M \cup (u, v)$ tendríamos que M' es acíclica, también tendríamos que $F(M)$ está contenido propiamente en $F(M')$, lo cual es una contradicción pues M es acíclica máxima. Por lo tanto cada (u, v) -flecha en $F(D) - F(M)$ pertenece a algún ciclo de D . \square

Lema 2.7. Sean D una digráfica y M una subdigráfica acíclica máxima de D . Si $(u, v) \in F(D) - F(M)$, entonces existe $T = (u_2=v, \dots, u_{n+1}=u)$ una vu -trayectoria en M , donde $C = (u_1=u, u_2=v, \dots, u_{n+1}=u)$ es un ciclo en D que contiene a (u, v) .

Demostración. Supongamos que $(u, v) \in F(D) - F(M)$, entonces por el lema 2.6 tenemos que (u, v) está en un ciclo $C = (u_1 = u, u_2 = v, \dots, u_{n+1} = u)$ de D , afirmamos que C es un ciclo de $M \cup (u, v)$, pues de lo contrario $M \cup (u, v)$ sería acíclica y $F(M)$ estaría contenida propiamente en $F(M \cup (u, v))$, lo cual es imposible pues M es acíclica máxima en D . Entonces sea $T = (u_2 = v, \dots, u_{n+1} = u)$, como C es un ciclo de $M \cup (u, v)$, entonces claramente T es una vu -trayectoria en M . \square

Teorema 2.18. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud 2. Si D contiene una subdigráfica M acíclica máxima con $\lambda(M) \leq 3$, entonces D es λ -particionable.

Demostración. Consideremos los siguientes 2 casos posibles:

Caso 1: Si $\lambda(M) \leq 2$, entonces afirmamos que D es acíclica, pues de lo contrario M está contenida propiamente en D y en consecuencia existe (u, v) en $F(D) - F(M)$ (observación 2.17) y por el lema 2.6, (u, v) está en un ciclo C y como D no contiene ciclos de longitud 2, entonces C tiene longitud mayor que 2, así por el lema 2.7 existiría una vu -trayectoria de orden mayor que 2 en M , lo cual es imposible pues $\lambda(M) \leq 2$. Finalmente como D es acíclica por el teorema 2.15 tenemos que D es λ -particionable.

Caso 2: Si $\lambda(M) = 3$, entonces como M es acíclica consideremos $\{V_1, V_2, V_3\}$ su GRV partición de M . Por el lema 2.6, podemos considerar para cada $(u, v) \in F(D) - F(M)$ el ciclo C de D , donde $C = (u, u_1 = v, \dots, u_i, u)$, con $2 \leq i$ (pues D no contiene ciclos de longitud 2). Por el lema 2.7 $T = (u_1 = v, \dots, u_i, u)$ es una vu -trayectoria en M de orden ≥ 3 y como $\lambda(M) = 3$, entonces $i = 2$ y $m_M(u) = 3$, entonces $u \in V_3$. Por el corolario 2.4 tenemos que $m_M(u_2) < m_M(u) = 3$, y como (u_1, u_2) es una trayectoria de orden 2

en M que termina en u_2 obtenemos que $m_M(u_2) = 2$. Análogamente por el corolario 2.4 tenemos que $m_M(u_1 = v) < m_M(u_2) = 2$, entonces $m_M(v) = 1$ y por lo tanto $v \in V_1$. Definimos:

$$A = V_1 \quad \text{y} \quad B = V_2 \cup V_3.$$

Claramente $A \cup B = V(D)$. Ahora nuevamente por el lema 2.5 cada trayectoria en M tiene a lo más un vértice en cada V_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$, en consecuencia $\lambda(M[A]) \leq 1$ y $\lambda(M[B]) \leq 2$. Como $u \in V_3$ y $v \in V_1$, se tiene que cada flecha (u, v) , es una BA -flecha en D . Como D es la unión de M junto con el conjunto de las (u, v) -flechas, entonces $M[A] = D[A]$ y $M[B] = D[B]$ y así $\{A, B\}$ es una $(1, 2)$ -partición de D .

Ahora sean a, b dos números enteros positivos de tal forma que $\lambda(D) = a + b$, sabemos que $3 = \lambda(M) \leq \lambda(D) = a + b$, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $1 \leq a$ y $2 \leq b$, en consecuencia $\{A, B\}$ es una (a, b) -partición de D , pues $\{A, B\}$ es una $(1, 2)$ -partición de D y entonces $\lambda(D[A]) \leq 1 \leq a$ y $\lambda(D[B]) \leq 2 \leq b$. Por lo tanto D es λ -particionable. \square

Observación 2.19. *Nótese que en la prueba anterior, obtuvimos que, si M es una subdigráfica acíclica máxima de alguna digráfica D , donde $\lambda(M) \leq 3$, entonces D sólo contiene ciclos de longitud a lo más 3.*

2.5. Coloraciones y particiones

En esta sección definiremos el concepto de coloración para poder mostrar que bajo cierta coloración, las digráficas son λ -particionables, empecemos entonces con la siguiente:

Definición 2.19. *Una k -coloración de una digráfica D , es una partición $\{C_1, \dots, C_k\}$ de $V(D)$, donde a cada $v \in C_i$ se le asigna el color i , con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.*

Definición 2.20. *Una k -coloración $\{C_1, \dots, C_k\}$ de una digráfica D es propia, si cada conjunto C_i es independiente, con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Diremos que D es k -colorable propiamente si existe una k -coloración de los vértices de D .*

Ejemplo 18. *Sea D como en la figura 2.11, tenemos que $A = \{x_1, \dots, x_4\}$ y $B = \{y_1, \dots, y_4\}$ son independientes, por lo que le asignamos a cada vértice de A el color 1 y a cada vértice de B el color 2 (véase la figura 2.11), obtenemos así un 2-coloración propia de los vértices de D .*

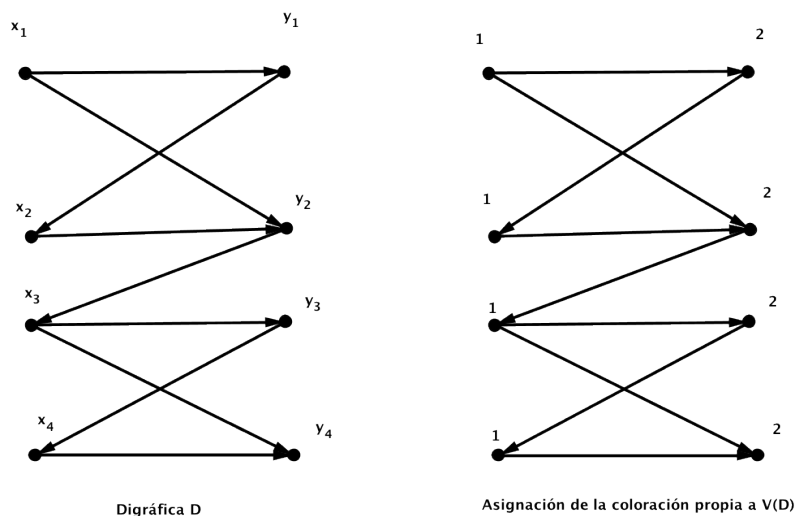


Figura 2.11

Definición 2.21. El número cromático $\chi(D)$ de una digráfica D es el mínimo número k de colores para que D sea k -colorable propiamente.

Ejemplo 19. Sea D como en la figura 2.11. En el ejemplo 18 obtuvimos una 2-coloración de $V(D)$, así $\chi(D) \leq 2$. Ahora es claro que D no puede tener una 1-coloración propia en sus vértices, pues el conjunto $V(D)$ no es independiente. entonces cualquier coloración propia de $V(D)$ tiene que tener más de un color, y entonces $\chi(D) \geq 2$. Por lo tanto $\chi(D) = 2$.

Teorema 2.20. (Gallai-Roy-Vitaver) Para cada digráfica D se tiene que $\chi(D) \leq \lambda(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica y M una subdigráfica acíclica máxima de D . Consideremos $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(M)})$ su GRV partición de $V(M)$. Por el lema 2.2 tenemos que cada V_i es independiente, para $i \in \{1, 2, 3, \dots, \lambda(M)\}$. Entonces si le asignamos a cada vértice de V_i el color i , obtenemos así una $\lambda(M)$ -coloración K propia de $V(M) = V(D)$ en M . Por el lema 2.6 podemos considerar para cada (u, v) en $F(D) - F(M)$ el ciclo C de D , donde $C = (u_1 = u, u_2 = v, \dots, u_i = u)$. Consideremos también $T = (u_2 = v, \dots, u_i = u)$ y por el lema 2.7 T es una vu -trayectoria en M . Ahora por el corolario 2.4 $h = m_M(u_2 = v) < m_M(u_i = u) = k$, entonces $v \in V_h$ y $u \in V_k$, con $h < k$, es decir u y v no están en un mismo elemento de GRV), por lo que al agregar la flecha (u, v) , cada conjunto V_i preserva su independencia en D , para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(M)\}$. Finalmente como D está conformada por M

junto con las flechas de la forma (u, v) , entonces se concluye que K también es una $\lambda(M)$ -coloración propia para $V(M) = V(D)$ en D . Por lo tanto $\chi(D) \leq \lambda(M) \leq \lambda(D)$. \square

Definición 2.22. Una k -coloración prismática de una digráfica D es una k -coloración propia de D donde cualquier par de vértices sobre una misma trayectoria tienen distinto color. Diremos que D es k -colorable prismática si existe una k -coloración prismática de los vértices de D .

Definición 2.23. El número prismático $\varphi(D)$ de una digráfica D es el mínimo número k de colores para que D sea k -colorable prismática.

Ejemplo 20. Sean D y su 4-coloración prismática asignada a $V(D)$, como se muestra en la figura 2.12. Entonces obtenemos que $\varphi(D) \leq 4$. Ahora como D contiene al menos una trayectoria de orden 4, entonces cualquier coloración tiene que tener por lo menos 4 colores, entonces $4 \leq \varphi(D)$. Finalmente entonces $\varphi(D) = 4$.

Proposición 4. Sea $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ una k -coloración propia de una digráfica D . C es prismática si y sólo si para cada trayectoria T en D se tiene que:

$$|V(T) \cap C_i| \leq 1, \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}.$$

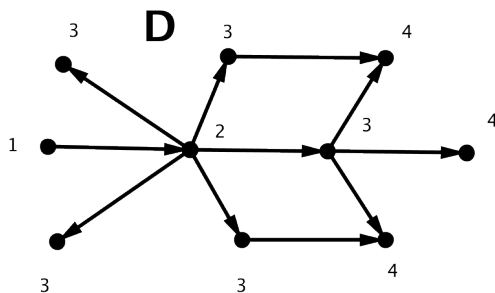
Demostración. \Rightarrow Supongamos que C es prismática y consideremos T una trayectoria en D . Sea $1 \leq i \leq k$, como C es una coloración prismática, tenemos que cada vértice de T tiene a lo más un vértice de C_i , y en consecuencia $|V(T) \cap C_i| \leq 1$.

\Leftarrow Procedamos por el método contrapositivo. Si C no es prismática, entonces existe T una trayectoria en D , donde dos vértices distintos x, y de T tienen el mismo color j , con $1 \leq j \leq k$, en consecuencia $|V(T) \cap C_j| \geq 2$. \square

Proposición 5. Si D es una digráfica con $\varphi(D) = \lambda(D)$ entonces D es λ -particionable.

Demostración. Sean a y b dos enteros positivos de tal forma que $\lambda(D) = a + b$. Sea $\{C_1, \dots, C_{\lambda(D)}\}$ una $\lambda(D)$ -coloración prismática de D . Definimos:

$$A = \bigcup_{i=1}^a C_i \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{i=a+1}^{\lambda(D)} C_i$$



Coloración prismática de $V(D)$

Figura 2.12

Por la proposición 4 tenemos que cada trayectoria en D tiene a lo más un vértice en cada C_i , en consecuencia $\lambda(D[A]) \leq a$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - a = b$, en consecuencia $\{A, B\}$ es una (a, b) -partición y por lo tanto D es λ -particionable. \square

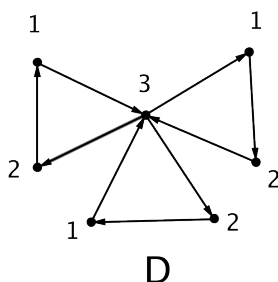
Proposición 6. Para cada digráfica D se cumple que:

$$\chi(D) \leq \lambda(D) \leq \varphi(D).$$

Demostración. Sea D una digráfica. Por el teorema 2.20 $\chi(D) \leq \lambda(D)$. Sea C una $\varphi(D)$ -coloración prismática de $V(D)$ y consideremos T una trayectoria de orden $\lambda(D)$ en D , es claro que como C es prismática, cada par de vértices de T tienen distinto color, en consecuencia C tiene asignado al menos $\lambda(D)$ colores. Por lo tanto $\lambda(D) \leq \varphi(D)$. \square

Ejemplo 21. En este ejemplo mostraremos que las desigualdades de la proposición 6, pueden ser estrictas. Sea D y su 3-coloración propia, como se muestra en la figura 2.13. Notemos que D no admite una 2-coloración propia, por lo tanto $\chi(D) = 3$. También notemos que $\lambda(D) = 5$. Ahora también notemos que, entre cualquier par de vértices de D , existe una trayectoria entre ellos, por lo que para colorear prismáticamente a $V(D)$ necesitamos que cada par vértices de D tengan asignados distintos colores, y en consecuencia necesitamos al menos 7 colores y viceversa con 7 colores es claro que podemos colorear prismáticamente a $V(D)$. Por lo tanto $\varphi(D) = 7$. Finalmente concluimos que:

$$\chi(D) < \lambda(D) < \varphi(D).$$

Figura 2.13: $\chi(D) < \lambda(D) < \varphi(D)$

Corolario 2.5. Si D es una digráfica acíclica entonces $\lambda(D) = \varphi(D)$.

Demostración. Si D es una digráfica acíclica, podemos considerar $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{\lambda(D)}\}$ la GRV partición de $V(D)$. Por el lema 2.2 cada V_i es independiente, por lo que asignándole el color i a cada vértice de V_i , con $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$, obtenemos una $\lambda(D)$ -coloración propia C de $V(D)$, además por el lema 2.5 y la proposición 4 C es una $\lambda(D)$ -coloración prismática, y entonces $\varphi(D) \leq \lambda(D)$. Por la proposición 6 $\lambda(D) \leq \varphi(D)$. Por lo tanto $\lambda(D) = \varphi(D)$. \square

Definición 2.24. Una digráfica D es llamada *trayecto-perfecta*, si para cada subdigráfica inducida D' de D , se cumple que $\chi(D') = \lambda(D')$.

Lema 2.8. D es una digráfica con $\chi(D) = n = |V(D)|$ si y sólo si D es semicompleta.

Demostración. \Rightarrow Sea $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Procedamos por el método contrapositivo: Si D no es semicompleta, entonces existen v_i, v_j en $V(D)$, con $1 \leq i < j \leq n$ de tal forma que no hay flecha entre ellos, entonces le asignamos el color i a ese par de vértices y coloreamos los demás vértices con $n - 2$ colores distintos, así obtenemos una $(n - 1)$ -coloración propia de $V(D)$, y por lo tanto $\chi(D) \neq n$.

\Leftarrow Supongamos que D es semicompleta de orden n . Sea C una $\chi(D)$ -coloración propia de $V(D)$, como D es semicompleta, entonces entre cualquier par de vértices existe flecha y como C es propia se tiene que C tiene por lo menos n colores distintos, entonces $n \leq \chi(D)$. Ahora si le asignamos dos colores distintos a cada par de vértices de D , obtenemos una n -coloración propia, por lo que $\chi(D) \leq n$. Por lo tanto $\chi(D) = n$. \square

Corolario 2.6. *Una digráfica D es trayecto-perfecta si y sólo si en cada trayectoria T en D , se tiene que la subdigráfica inducida por $V(T)$ es semi-completa.*

Demostración. \Rightarrow Supongamos que D es una digráfica trayecto-perfecta. Sea T una trayectoria en D y sea n el orden de T , notemos que dado que en $D[V(T)]$ hay exactamente n vértices y como T es una trayectoria de orden n en $D[V(T)]$, se tiene que $\lambda(D[V(T)]) = n$, entonces por hipótesis $\lambda(D[V(T)]) = \chi(D[V(T)]) = n$, en consecuencia por el lema 2.8 $D[V(T)]$ es semicompleta.

\Leftarrow Sean D' una subdigráfica inducida de D y T una trayectoria en D' de orden $\lambda(D')$, entonces por hipótesis $D[V(T)]$ es semicompleta de orden $\lambda(D')$ y por el lema 2.8 tenemos que $\chi(D[V(T)]) = \lambda(D')$. Como $\chi(D[V(T)]) \leq \chi(D')$, se tiene que $\lambda(D') \leq \chi(D')$. Por proposición 6 tenemos que $\chi(D') \leq \lambda(D')$. Por lo tanto $\chi(D') = \lambda(D')$. Por lo tanto D es trayecto-perfecta. \square

Corolario 2.7. *Si D es una digráfica trayecto-perfecta, entonces $\chi(D) = \lambda(D) = \varphi(D)$.*

Demostración. Sean C una $\chi(D)$ -coloración propia de $V(D)$ y T una trayectoria en D , como D es trayecto-perfecta, entonces por la proposición 2.6, se tiene que $D[V(T)]$ es semicompleta, y entonces por el lema 2.8 cada par de vértices tienen distintos colores, por lo que C es prismática, en consecuencia $\varphi(D) \leq \chi(D)$. Por la proposición 6 tenemos que $\chi(D) \leq \lambda(D) \leq \varphi(D)$, en consecuencia, $\chi(D) = \lambda(D) = \varphi(D)$. \square

Teorema 2.21. *Cada digráfica D trayecto-perfecta es λ -particionable.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del corolario 2.5 y de la proposición 5. \square

Lema 2.9. *Toda digráfica transitiva D es trayecto-perfecta.*

Demostración. Consideremos $T = (x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria en D . Sea $x_i \in V(T)$, con $1 \leq i \leq n$, tenemos que (x_i, x_{i+1}) , (x_{i+1}, x_{i+2}) están en $F(D) \cap F(D[V(T)])$ y como D es transitiva, entonces las flechas $(x_i, x_{i+2}) \in F(D) \cap F(D[V(T)])$. Análogamente como las flechas (x_i, x_{i+2}) , (x_{i+2}, x_{i+3}) están en $F(D) \cap F(D[V(T)])$, entonces las flechas $(x_i, x_{i+3}) \in F(D) \cap F(D[V(T)])$. Siguiendo este mismo razonamiento tenemos que x_i es adyacente hacia x_j , para $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$. Si las flechas (x_{i-2}, x_{i-1}) y (x_{i-1}, x_i) están en $F(D)$, entonces las flechas $(x_{i-2}, x_i) \in F(D) \cap F(D[V(T)])$, esto por ser D transitiva. Siguiendo este mismo razonamiento obtenemos que x_i es adyacente hacia x_j , $j \in \{i-1, i-2, \dots, 1\}$. Por lo tanto tenemos que x_i

es adyacente a todos los vértices de T , esto se cumple para $1 \leq i \leq n$, por lo que $D[V(T)]$ es semicompleta y por la caracterización del corolario 2.6 obtenemos que D es trayecto-perfecta. \square

Teorema 2.22. *Cada digráfica D transitiva es λ -particionable.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del lema 2.5 y el teorema 2.21. \square

Definición 2.25. *Una digráfica D es llamada **camionable**, si existe un camino en D que pasa por todos los vértices de D .*

Definición 2.26. *Sea D una digráfica. Para cada subdigráfica D' de D definimos el número $\eta(D')$, donde $\eta(D') = |V(D')|$.*

Lema 2.10. *Sea D una digráfica. Si C es un camino en D , entonces para cualquier par y, z en $V(C)$, se tiene que existe una yz -trayectoria o una zy -trayectoria, ambas en C .*

Demostración. Sea $C = (x_1, \dots, x_n)$ un camino en D . Sean y, z en $V(C)$, entonces, $y = x_i$ y $z = x_j$, con, $1 \leq i, j, \leq n$. Consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1. Si $i < j$, entonces $C' = (y = x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = z)$, es un yz -camino en C , y como todo yz -camino contiene una yz -trayectoria, se concluye que existe una yz -trayectoria en C .

Caso 2. Si $j < i$, entonces $C' = (z = x_j, x_{j+1}, \dots, x_i = y)$. Análogamente a la prueba del caso 1, existe una zy -trayectoria en C .

Por lo tanto siempre existe una yz -trayectoria o una zy -trayectoria, ambas en C . \square

Corolario 2.8. *En cada digráfica D camionable, se cumple que $\varphi(D) = \eta(D)$.*

Demostración. Sea D una digráfica camionable, entonces existe un camino C , que pasa por todos los vértices de D , y por lo tanto C tiene orden $\eta(D)$. Supongamos por contradicción que D admite una K coloración prismática, con menos colores que $\eta(D)$, entonces existe un par de vértices x, y en $V(D) = V(C)$, que tienen el mismo color, y por el lema 2.10, tenemos que x, y están sobre una trayectoria T en C , y como T también es una trayectoria en D y como x, y tienen el mismo color, se tiene que K no es prismática, lo cual es una contradicción. Entonces cualquier coloración prismática necesita al menos $\eta(D)$ -colores y por lo tanto $\eta(D) \leq \varphi(D)$. Claramente se cumple que $\varphi(D) \leq \eta(D)$. Por lo tanto $\varphi(D) = \eta(D)$. \square

Corolario 2.9. *Si D es una digráfica y H es una subdigráfica camionable de D , entonces $\varphi(H) = \eta(H)$.*

Demostración. Como H es una digráfica caminable el resultado es consecuencia inmediata del colorario 2.8. \square

Lema 2.11. *Sea D una digráfica. Si F_{i_1} y F_{i_2} son dos componentes fuertemente conexas del nivel i de D , entonces no existe flecha entre ambas componentes.*

Demostración. Supongamos por contradicción y sin pérdida de generalidad, que existe una $F_{i_1}F_{i_2}$ -flecha. Ahora como $\bar{m}(F_{i_1}) = i$, entonces existe $T = (X_1, X_2, \dots, X_i = F_{i_1})$ una trayectoria en DC . Ahora F_{i_2} esta en $V(T)$, pues de lo contrario $T \cup (F_{i_1}, F_{i_2})$ sería una trayectoria en DC que termina en F_{i_2} y de mayor orden que i , lo cual es imposible, pues $\bar{m}(F_{i_2}) = i$. Ahora entonces, existe, $1 \leq j < i$, de tal forma que $F_{i_2} = X_j$, en consecuencia se forma el ciclo $C = (X_j = F_{i_2}, X_{j+1}, \dots, X_i = F_{i_1}, F_{i_2})$ en DC , lo cual contradice el lema 2.2. Por lo tanto no existe flecha entre ambas componentes. \square

Definición 2.27. *Una componente **camionable** W de una digráfica D es una subdigráfica inducida camionable máxima por contención en $V(D)$.*

Observación 2.23. *Notemos que si D es una digráfica fuertemente conexas, entonces contiene un camino cerrado que pasa por todos sus vértices, esto dado que si x_1, \dots, x_n son los vértices de D , entonces por ser fuertemente conexas, existe una x_1x_2 -trayectoria, entonces también existe una x_2x_3 -trayectoria, seguimos así hasta abarcar todos sus vértices y unimos estas trayectorias, así finalmente obtenemos un camino C que pasa por todos sus vértices, ahora nos fijamos en el vértice x_n , y al ser fuertemente conexas, existe una x_nx_1 -trayectoria T , entonces $C' = C \cup T$ es el camino cerrado buscado.*

Lema 2.12. *Sean D una digráfica y D_2 la subdigráfica inducida por los vértices de los niveles 1 y 2. Si $T = (F_1, F_2)$ es una trayectoria en DC , donde F_i es una componente fuertemente conexas del nivel i , para $i \in \{1, 2\}$, entonces $D[V(F_1) \cup V(F_2)]$ contiene una componente camionable de D_2 .*

Demostración. Sea $T = (F_1, F_2)$ una trayectoria en DC con las propiedades de las hipótesis. Como F_i es una componente fuertemente conexas del nivel i , entonces contiene un camino cerrado que pasa por todos los vértices de F_i (observación 2.23), para $i \in \{1, 2\}$. Entonces como T contiene una F_1F_2 -flecha de DC se tiene que $D[V(F_1) \cup V(F_2)]$ contiene un camino W que pasa por todos sus vértices. Ahora notemos que W es una componente camionable de D_2 , pues nos lo garantiza el hecho de que DC sea acíclica (lema 2.2) y el lema 2.11. \square

Lema 2.13. Sean D una digráfica y D_n la subdigráfica inducida por los primeros n niveles. Si $T = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ es una trayectoria en DC , donde F_i es una componente fuertemente conexa del nivel i , para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $D[\cup_{i=1}^n V(F_i)]$ contiene una componente caminable de D_n .

Demostración. La prueba es exactamente de la misma manera que el lema 2.12. Pues si $T = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ es una trayectoria en DC , con las propiedades de las hipótesis, entonces $D[\cup_{i=1}^n V(F_i)]$ contiene un camino W que pasa por todos sus vértices, y entonces W será la componente buscada. \square

Observación 2.24. Es claro que si le pedimos al lema 2.13, la condición de que $\cup_{i=1}^n F_i$ contenga el mayor número de vértices de D_n , entonces W será una componente caminable de máximo orden de D_n .

Teorema 2.25. Si D es una digráfica, entonces:

$$\varphi(D) = \max \{ \eta(W) \mid W \text{ es una componente caminable de } D \}$$

(donde $\varphi(D)$ es el número prismático).

Demostración. Primero definimos D_i como la subdigráfica de D inducida por todos los vértices que están en los primeros i niveles de D . Notemos que si D tiene h niveles, entonces $D_h = D$.

Definimos:

$$W(D_i) = \max \{ \eta(W) \mid W \text{ es una componente caminable de } D_i \}$$

Vamos a construir una coloración prismática con exactamente $W(D_h) = W(D)$ colores, de la siguiente manera:

Sea F una componente fuertemente conexa de D_1 y coloreemos sus vértices con colores $1, 2, 3, \dots, \eta(F)$. Hacemos este mismo procedimiento para todas las componentes fuertemente conexas de D_1 (usando este mismo conjunto de colores mientras se pueda). Como $W(D_1) = \max\{\eta(F) \mid F \text{ es una componente fuertemente conexa de } D_1\}$ y como no existe flecha entre cada par de componentes (lema 2.11), podemos usar $W(D_1)$ -colores para colorear propiamente a los vértices de D_1 . Ahora para colorear a D_2 usamos el hecho de que D_1 ha sido coloreada propiamente con $W(D_1)$ -colores. Sea S una componente fuertemente conexa del nivel 2, primero consideremos a las componentes caminables de D_1 que tienen vecinos en S . Sea r el mayor número usado para colorear estas componentes. Coloreamos los vértices de S con colores $r + 1, r + 2, \dots, r + \eta(S)$ (véase la figura 2.14). Hacemos lo mismo para cada componente fuertemente conexa del nivel 2. Obtenemos así por los lemas 2.11 y 2.12, y la observación 2.24, una coloración propia

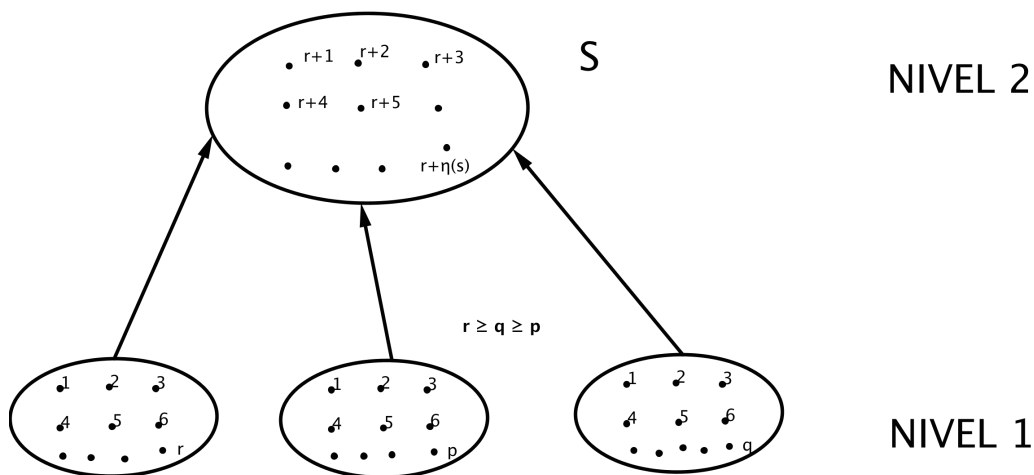
Componentes caminables de D_1 que tienen vecindad en S

Figura 2.14

de D_2 con $W(D_2)$ colores. Seguimos así con la iteración y supongamos que D_{h-1} ha sido coloreada propiamente con $W(D_{h-1})$ -colores. Consideremos a S' una componente fuertemente conexa del nivel h , también consideremos a las componentes caminables de D_{h-1} que tienen una vecindad en S' . Sea r' el mayor número usado para colorear estas componentes. Coloreamos los vértices de S' con colores $r' + 1, r' + 2, \dots, r' + \eta(S')$. Hacemos lo mismo para cada componente fuertemente conexa del nivel h . Obtenemos así por los lemas 2.11 y 2.13, y la observación 2.24, una C coloración propia de $D_h = D$, con $W(D_h) = W(D)$ -colores. Por construcción, cada par de vértices en una misma componente tienen distintos colores y como dos vértices están sobre la misma trayectoria, si están sobre la misma componente caminable. Entonces se concluye que C es una $W(D)$ -coloración prismática. Por lo tanto tenemos que $\varphi(D) \leq W(D)$. Ahora por el corolario 2.9, tenemos que cualquier coloración prismática de D necesita al menos $W(D)$ colores, por lo que $W(D) \leq \varphi(D)$. Por lo tanto $\varphi(D) = W(D) = \max \{n(W) \mid W \text{ es una componente caminable de } D\}$. \square

Corolario 2.10. *Si D es una digráfica de tal manera que al menos una de sus componentes caminables de mayor orden es trayectable, entonces D es λ -particionable.*

Demostración. Sea D una digráfica, y supongamos que W es una compo-

nente caminable de mayor orden de D , donde W es trayectable, entonces W contiene una trayectoria que pasa por todos los vértices de W , y en consecuencia $\lambda(D) = \eta(W)$, pues de lo contrario cualquier trayecto T en D , sería una componente caminable de mayor orden que W . Por lo tanto por el teorema 2.25, tenemos que $\varphi(D) = \eta(W)$, y en consecuencia $\lambda(D) = \varphi(D)$. Entonces por la proposición 5 D es λ -particionable. \square

Capítulo 3

Particiones en generalizaciones de torneos

En la primera parte de esta sección vamos a trabajar con una nueva conjetura, más general que las conjeturas de la unidad 2, ésta probaremos que será válida para las digráficas cuasitransitivas, semicompletas extendidas y localmente insemicompletas. En la segunda parte de esta sección probaremos que la conjetura 2.2 (mencionada en el capítulo 2), es cierta para digráficas localmente insemicompletas y semicompletas extendidas.

3.1. Generalizaciones de torneos

Definición 3.1. *Un torneo es una digráfica semicompleta sin ciclos de longitud 2 (es decir, una orientación de una gráfica completa).*

Definición 3.2. *Una digráfica D es **cuasi-transitiva**, si siempre que tres vértices distintos x, y, z de $V(D)$, cumplan que (x, y) y (y, z) sean flechas de D , entonces (x, z) o (z, x) es una flecha de D .*

Definición 3.3. *Una subdigráfica de **k -trayectorias- q -ciclos** (factor de k -trayectorias- q -ciclos) Γ de una digráfica D es una colección (generadora) de k trayectorias y q ciclos en D , ajenos dos a dos.*

*Cuando $k = 0$, Γ es una subdigráfica de **q -ciclos** (y un factor de q -ciclos si es generadora) y cuando $q = 0$, Γ es una subdigráfica de **k -trayectorias** (y un factor de k -trayectorias si es generadora).*

*Una subdigráfica de k -trayectorias- q -ciclos en donde q puede ser arbitrario (incluyendo el cero) es llamada una **subdigráfica k -trayectorias-ciclos**.*

Ejemplo 22. *En la figura 3.1 mostramos una digráfica D , con una subdigráfica de 2-trayectorias de D y como también es una subdigráfica generadora,*

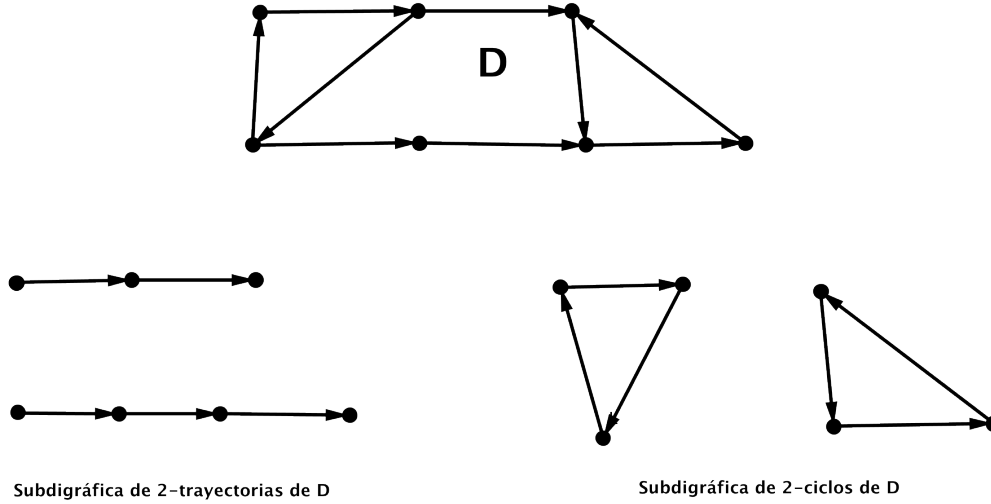


Figura 3.1: Ejemplos de digráficas de 2-trayectorias y 2-ciclos de D

entonces también es un factor de 2-trayectorias de D . También mostramos una subdigráfica de 2-ciclos de D , pero como no es subdigráfica generadora de D , entonces no es un factor de 2-ciclos de D .

Definición 3.4. Para una digráfica D denotaremos $\lambda_k(D)$ al máximo número de vértices contenidos en una subdigráfica de k -trayectorias de D .

Definición 3.5. Una subdigráfica de k -trayectorias de una digráfica D , que cubre $\lambda_k(D)$ vértices es llamada una **subdigráfica de k -trayectorias máxima** de D .

Ejemplo 23. En la figura 3.1 la subdigráfica de 2-trayectorias de D es claramente una subdigráfica de 2-trayectorias máxima de D .

Observación 3.1. Notemos que $\lambda_1(D) = \lambda(D)$, esto dado que el máximo número de vértices que puede contener una subdigráfica de 1-trayectorias de D es claramente $\lambda(D)$.

Observación 3.2. Si $k \in \{1, 2, \dots, |V(D)|\}$, entonces $\lambda(D) \leq \lambda_k(D)$. Esto dado que si T es un trayecto, entonces $\lambda(D) = |V(T)|$. Consideremos los 2 siguientes casos posibles:

Caso 1. Si $k \geq \lambda(D)$, entonces claramente cualquier digráfica de k -trayectorias contiene más de $\lambda(D)$ vértices y por lo tanto $\lambda(D) \leq \lambda_k(D)$.

Caso 2. Si $k < \lambda(D)$, entonces vamos a construir una digráfica de k -trayectorias con $\lambda(D)$ vértices, de la siguiente manera. Si $T = (x_1, \dots, x_{\lambda(D)})$, definimos $T_i = \{x_i\}$, para $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, y sea $T_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{\lambda(D)})$, entonces $D_k = \cup_{j=1}^k T_j$ es claramente una subdigráfica de k -trayectorias en D de orden $\lambda(D)$, y entonces $\lambda(D) \leq \lambda_k(D)$.

Observación 3.3. Análogamente a la observación 3.2 también obtenemos que si $h \leq k$, entonces $\lambda_h(D) \leq \lambda_k(D)$.

Definición 3.6. Para una digráfica R con conjunto de vértices $V(R) = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ y digráficas H_1, H_2, \dots, H_r , donde $V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$ ($i \neq j$). Definimos $D = R[H_1, \dots, H_r]$ donde $V(D) = V(H_1) \cup \dots \cup V(H_r)$ y donde $(x, y) \in F(D)$ si y sólo si $x \in V(H_i)$, $y \in V(H_j)$ y $(u_i, u_j) \in F(R)$, para $i \neq j$, y si $i = j$, entonces $(x, y) \in F(H_i)$. En otras palabras, D se obtiene a partir de R , sustituyendo la digráfica H_i por los vértices u_i , para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Notación. En la definición anterior diremos que, $D = R[H_1, \dots, H_r]$, es la composición de R con H_1, H_2, \dots, H_r .

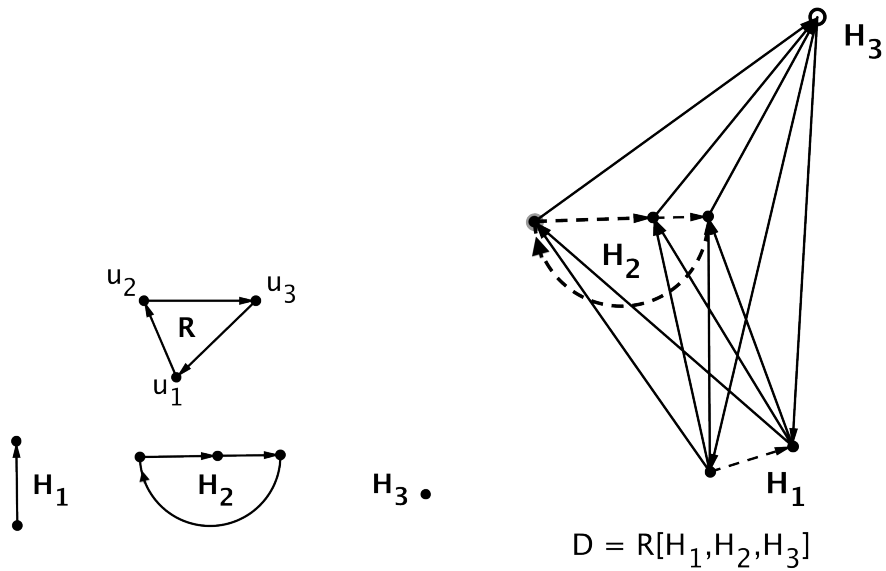
Ejemplo 24. En la figura 3.2 (a) mostramos una digráfica R y digráficas, H_1, H_2, H_3 . En la figura 3.2 (b) mostramos $D = R[H_1, H_2, H_3]$ como la composición de R con H_1, H_2, H_3 .

Definición 3.7. Sean D y R digráficas. Decimos que D es una **extensión** de R , si existe una composición $D = R[H_1, \dots, H_r]$, donde $r = |V(R)|$ y cada conjunto $V(H_i)$ es independiente, para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Definición 3.8. D es una digráfica **semicompleta extendida**, si es la extensión de una digráfica semicompleta S . Es decir si existen una digráfica semicompleta S y conjuntos independientes, E_1, E_2, \dots, E_s , donde $s = |V(S)|$ y $D = S[E_1, E_2, \dots, E_s]$.

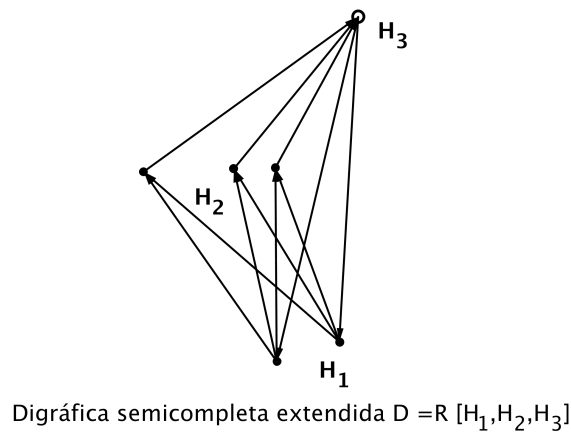
Ejemplo 25. En la figura 3.2 (b) si le quitamos todas las flechas a las digráficas H_1, H_2, H_3 y la componemos con R (semicompleta), obtenemos así una digráfica semicompleta extendida $D = R[H_1, H_2, H_3]$ (véase la figura 3.2 (c)).

Definición 3.9. Una digráfica D es **localmente in-semicompleta**, si la in-vecindad de cada vértice de D induce una digráfica semicompleta.



(a) Digráficas sin componer.

(b) Composición de digráficas.



(c)

Figura 3.2: Composición de digráficas

3.2. Teoremas auxiliares

En esta sección enunciaremos ciertos resultados de los cuales no daremos su demostración, la demostración el lector la podrá consultar en la bibliografía, sin embargo, estos resultados los utilizaremos en la siguiente sección.

Teorema 3.4. (Bang-Jensen y Huang [8]). *Sea D una digráfica cuasitransitiva.*

(a) *Si D no es fuertemente conexa, entonces $D = T[H_1, \dots, H_t]$, para alguna gráfica orientada T , donde cada digráfica H_i es una componente fuertemente conexa de D , para $i = 1, 2, \dots, t$.*

(b) *Si D es fuertemente conexa, entonces $D = S[Q_1, \dots, Q_s]$, para alguna digráfica semicompleta fuertemente conexa S , donde Q_i es una de las subdigráficas de D , de tal manera que $UG(Q_i)$ es una de las componentes conexas de $UG(D)$. Cada Q_i es o bien una digráfica cuasi-transitiva no fuertemente conexa o un solo vértice, y si (q_i, q_j, q_i) es un ciclo de longitud 2 en S , entonces Q_i y Q_j ambas son un solo vértice.*

Teorema 3.5. (Bang-Jensen et al. [9]). *Sea $D = S[E_1, \dots, E_s]$ una digráfica semicompleta extendida fuertemente conexa. Si m_i denota el máximo número de vértices de E_i de tal manera que puedan ser cubiertos por un ciclo de D , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Entonces cada ciclo de máxima longitud de D contiene precisamente m_i vértices de E_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.*

3.3. Algunos resultados en generalizaciones de torneos

En esta sección vamos a probar algunos resultados que se asemejan a la conjetura 2.3, sólo que de forma más general. Primero vamos a empezar con el siguiente:

Teorema 3.6. *Si D es una digráfica trayectable y q un entero positivo, entonces existe una partición $\{A, B\}$ de $V(D)$ de tal forma que se cumple lo siguiente:*

- (i) $\lambda(D[A]) \leq q$;
- (ii) $\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q$, para cada $k = 1, 2, \dots, |V(B)|$, siempre que $\lambda_k(D) - q \geq 0$.

Demostración. Sean D una digráfica trayectable, con $|V(D)| = n$ y $q \geq 1$. Como D es trayectable entonces existe una trayectoria $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

que pasa por todos los vértices de D . Consideremos los siguientes 2 casos posibles:

Caso 1. Si $q \geq n$, entonces definimos $A = V(D)$ y $B = \emptyset$. Notemos que $\lambda(D[V(D)]) = \lambda(D) = n \leq q$, y en este caso $|V(B)| = 0$, entonces la afirmación ii se cumple por vacuidad. Por lo tanto $\{A, B\}$ cumplen con las condiciones i y ii del teorema.

Caso 2. Si $q \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, entonces definimos $A = (x_1, T, x_q)$ (la subtrayectoria de T que une a x_1 con x_q) y $B = (x_{q+1}, T, x_n)$ (es decir la subtrayectoria de T que une x_{q+1} con x_n). Claramente $\{A, B\}$ es una partición de $V(D)$ y $\lambda(D[V(A)]) = \lambda((x_1, T, x_q)) = q$ y $\lambda(D[V(B)]) = \lambda((x_{q+1}, T, x_n)) = \lambda(D) - q$, y por la observación 3.2: $\lambda(D) \leq \lambda_k(D)$ para $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$, entonces $\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q$. Por lo tanto $\{A, B\}$ cumple las condiciones i y ii del teorema. \square

Lema 3.1. Sea $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde S es una digráfica semicompleta fuertemente conexa y cada Q_i es un único vértice o una digráfica cuasitransitiva no fuertemente conexa. Denotemos los vértices de S por $V(S) = \{1, 2, \dots, s\}$, donde cada vértice i ha sido expandido a Q_i en D . Si $C = (c_1, c_2, \dots, c_z, c_1)$ es un ciclo en $S_l = S[\{1, 2, 3, \dots, l\}]$ (es decir la subdigráfica inducida por $\{1, 2, 3, \dots, l\}$ en S), con $l \leq s$, y $|V(Q_{c_1})| \leq |V(Q_{c_j})|$, para $j \in \{2, 3, \dots, z\}$. Entonces existe un ciclo C' en D que pasa por todos los vértices de Q_{c_1} .

Demostración. Sea $C = (c_1, c_2, \dots, c_z, c_1)$ un ciclo en S_l , con $l \leq s$ y $|V(Q_{c_1})| \leq |V(Q_{c_j})|$, para $j \in \{2, 3, \dots, z\}$. Si $q = |V(Q_{c_1})|$, es claro que como (c_1, c_2, \dots, c_z) es una trayectoria en S_l y como $q = |V(Q_{c_1})| \leq |V(Q_{c_j})|$, para $j \in \{2, 3, \dots, z\}$, entonces al expandir cada vértice c_i a Q_{c_i} en D , para $i \in \{1, 2, \dots, z\}$, obtenemos una subdigráfica T_q de q -trayectorias en D , donde $T_q = \cup_{j=1}^q T_j$, T_j es una trayectoria en D , cada par de trayectorias son ajenas, y cada vértice inicial de T_j es un vértice de Q_{c_1} y cada vértice final de T_j es un vértice de Q_{c_2} . Consideremos x_j el vértice inicial de T_j y y_j el vértice final de T_j , para $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. Ahora como (c_z, c_1) es una flecha de S_l , entonces al expandir estos vértices a Q_{c_1} y Q_{c_z} , respectivamente en D , se forman las siguientes flechas en D , (y_j, x_{j+1}) y (y_q, x_1) , con $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, y entonces se forma el siguiente ciclo $C' = \cup_{j=1}^{q-1} (T_j \cup (y_j, x_{j+1})) \cup (T_q \cup (y_q, x_1))$ en D (véase la figura 3.3). Donde claramente C' es un ciclo que pasa por todo los vértices de Q_{c_1} . \square

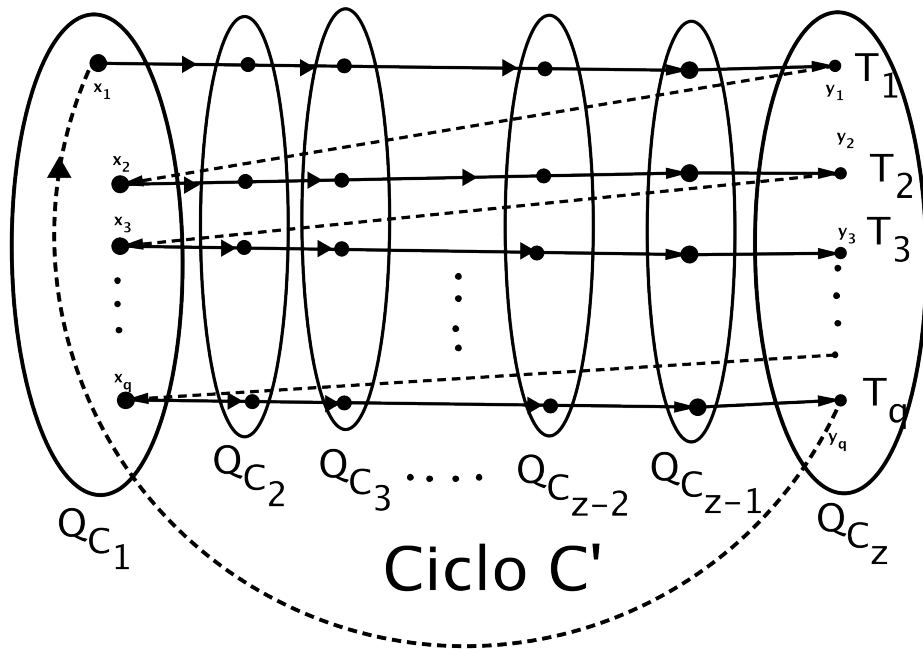


Figura 3.3

Lema 3.2. *Sea $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde S es una digráfica semicompleta fuertemente conexa y cada Q_i es un único vértice o una digráfica cuasitransitiva no fuertemente conexa. Denotemos los vértices de S por $V(S) = \{1, 2, 3, \dots, s\}$, donde cada vértice i ha sido expandido a Q_i en D . Si $r \leq s$ y $S_r = S[\{1, 2, 3, \dots, r\}]$ (es decir la subdigráfica inducida por $\{1, 2, 3, \dots, r\}$ en S) es un torneo acíclico, entonces $\lambda(D[A]) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2) + \dots + \lambda(Q_{r-1}) + \lambda(Q_r)$, donde $A = V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup \dots \cup V(Q_{r-1}) \cup V(Q_r)$.*

Demostración. Si S_r es un torneo acíclico, entonces contiene una trayectoria que pasa por todos sus vértices, entonces sin pérdida de generalidad suponemos que $T = (1, 2, 3, \dots, r)$ es una trayectoria en S_r que pasa por todos sus vértices (pues de otra manera simplemente haríamos una re-etiquetación a sus vértices). Ahora vamos a definir una trayectoria de orden $\lambda(Q_1) + \lambda(Q_2) + \dots + \lambda(Q_{r-1}) + \lambda(Q_r)$ en $D[A]$ de la siguiente manera: Sea T_{Q_i} un trayecto en Q_i , para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Notemos que como $(i, i+1)$ es una flecha de S_r , entonces al expandir estos vértices Q_i y Q_{i+1} respectivamente en D , tenemos que existe una flecha en D (y por lo tanto en $D[A]$) que une a los trayectos T_{Q_i} y $T_{Q_{i+1}}$, para $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$. Entonces es claro que la unión de estos trayectos con la respectiva flecha que los une forma una trayectoria de orden $\lambda(Q_1) + \lambda(Q_2) + \dots + \lambda(Q_{r-1}) + \lambda(Q_r)$ en $D[A]$.

Observemos que no puede existir una trayectoria de mayor orden, pues de lo contrario se formaría un ciclo en S_r (que es un torneo acíclico). Entonces finalmente concluimos que $\lambda(D[A]) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2) + \dots + \lambda(Q_{r-1}) + \lambda(Q_r)$.

□

Lema 3.3. *Sea $D = S[E_1, \dots, E_s]$ una digráfica semicompleta extendida fuertemente conexa. Si $l_{i,k}$ denota el máximo número de vértices de E_i de tal manera que puedan ser cubiertos por una subdigráfica de k -trayectorias en D , para $i = 1, 2, \dots, s$. Entonces cada subdigráfica de k -trayectorias máxima de D cubre exactamente $l_{i,k}$ vértices de E_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.*

Demostración. Sea D' la digráfica semicompleta extendida, obtenida a partir de D , agregando un nuevo conjunto independiente de vértices E_{s+1} donde $E_{s+1} = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ y cada s_i es un ex-vecino y un in-vecino de cada vértice de D (es decir cada vértice s_i forma un 2-ciclo con cada vértice de D), para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Claramente por construcción D' es una digráfica semicompleta extendida fuertemente conexa. Notemos que el máximo número de vértices de E_i de los cuales se encuentran en un ciclo de D' es $l_{i,k}$, para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, y k para $i = s+1$. Esto último dado que por la construcción de D' siempre podemos formar un ciclo C con $l_{i,k}$ vértices de E_i y k vértices de E_{s+1} , la construcción es como sigue:

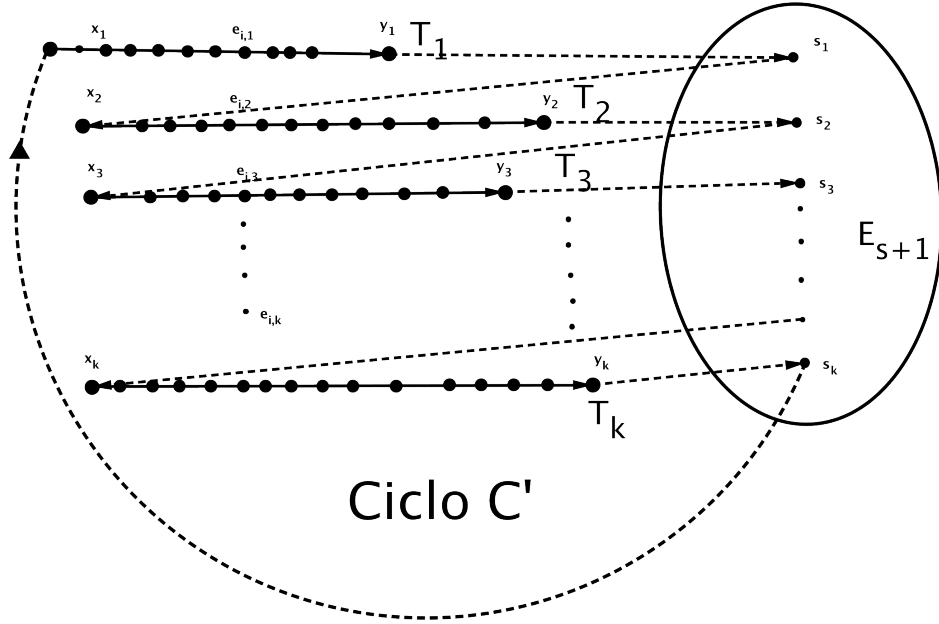


Figura 3.4

Consideramos una subdigráfica $T_{E_i} = \cup_{j=1}^k T_j$ de k -trayectorias que cubre exactamente $l_{i,k}$ vértices de E_i , donde T_j es una trayectoria en D y cada par de trayectorias son ajenas, para $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Consideremos x_j como el vértice inicial de T_j y y_j como el vértice final de T_j , para $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ahora por la construcción de D' , notemos que se forma el siguiente ciclo $C' = \cup_{j=1}^{k-1} (T_j \cup (y_j, s_j, x_{j+1})) \cup (T_k \cup (s_k, x_1))$ en D' (véase la figura 3.4). Donde $+ C'$ cubre exactamente $l_{i,k}$ vértices de E_i y k vértices de E_{s+1} , y como claramente no puede existir un número mayor que $l_{i,k}$ de vértices de E_i que puedan ser cubiertos por un ciclo de D' , esto para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, entonces se sigue entonces lo anteriormente afirmado.

Ahora si consideremos una subdigráfica T de k -trayectorias máxima de D , notemos que por construcción de D' , formamos un ciclo C de máxima longitud en D' , donde $V(C) = V(T) \cup V(E_{s+1})$, y entonces por el teorema 3.5 tenemos que C contiene exactamente $l_{i,k}$ vértices de E_i y por lo tanto T contiene también exactamente $l_{i,k}$ vértices de E_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. \square

Lema 3.4. Sea $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde S es una digráfica semicompleta fuertemente conexa y cada Q_i es un solo vértice o es una digráfica cuasitransitiva no fuertemente conexa. Para cada $k \in \{1, 2, \dots, |V(D)|\}$ e

$i \in \{1, 2, \dots, s\}$, existe un número entero $v_{i,k}$ de tal manera que cada subdigráfica de k -trayectorias máxima D_k de D satisface que: $|V(Q_i) \cap V(D_k)| = v_{i,k}$ y cualquier subdigráfica de k -trayectorias de D no contiene más de $v_{i,k}$ vértices de Q_i .

Demostración. Sea $D' = S[E_1, E_2, \dots, E_s]$, donde E_i es un conjunto independiente de vértices de cardinalidad $|V(Q_i)|$, para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Claramente D' es una digráfica semicompleta extendida. Definimos $l_{i,k}$ como el máximo número de vértices de E_i de tal manera que puedan ser cubiertos por una subdigráfica de k -trayectorias en D' , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Por el lema 3.3, cada subdigráfica de k -trayectorias máxima W_k en D' contiene exactamente $l_{i,k}$ vértices de E_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Sea $v_{i,k}$ el máximo número de vértices en una subdigráfica de $l_{i,k}$ -trayectorias en Q_i .

Afirmación 1. Cualquier digráfica de k -trayectorias en D , no puede contener mas de $v_{i,k}$ vértices de Q_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Supongamos por contradicción que existen Q_j , con $1 \leq j \leq s$ y una subdigráfica de k -trayectorias T_k de D , de tal forma que T_k cubre al menos $v_{j,k} + 1$ vértices de Q_j . Como $v_{j,k}$ es el máximo número de vértices que puede ser cubierto por una subdigráfica de $l_{j,k}$ -trayectorias en Q_j , entonces al menos un vértice de los $v_{j,k} + 1$ vértices de Q_j no puede ser cubierto por $l_{j,k}$ trayectorias (ajenas) de Q_j , y entonces tampoco puede ser cubierto por $l_{j,k}$ trayectorias (ajenas) de T_k , lo cual nos dice que T_k cubre al menos $l_{j,k} + 1$ vértices de E_j , lo cual contradice a la definición del número $l_{j,k}$.

Afirmación 2. Si W_k es una digráfica de k -trayectorias máxima en D' , entonces puede ser extendida a una digráfica de k -trayectorias en D que cubre exactamente $v_{i,k}$ vértices de Q_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Vamos a construir dicha digráfica de la siguiente manera: para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, consideramos $\{e_1, \dots, e_{l_{i,k}}\}$ los $l_{i,k}$ vértices de E_i que son cubiertos por W_k , también consideremos $D_{l_{i,k}} = \cup_{j=1}^{l_{i,k}} T_j$ una digráfica de $l_{i,k}$ -trayectorias máxima en Q_i . Ahora sabemos que cada vértice e_j de E_i es cubierto por una trayectoria P_j de W_k . Sea y_j el vértice de P_j que está antes que e_j en la sucesión P_j (nótese que y_j puede ser igual a e_j), para $j \in \{1, 2, \dots, l_{i,k}\}$. Notemos que si $y_j \neq e_j$, entonces y_j no es vértice de E_i , pues E_i es independiente, para $i \in \{1, 2, \dots, l_{i,k}\}$. Ahora sea x_i el vértice inicial de T_i , notemos que si y_i es adyacente hacia e_i , y como D es una composición, entonces y_i es adyacente hacia x_i , esto para $j \in \{1, 2, \dots, l_{i,k}\}$. Ahora finalmente sustituyendo cada vértice e_j por la trayectoria T_j , para $j \in \{1, 2, \dots, l_{i,k}\}$, se forma así una

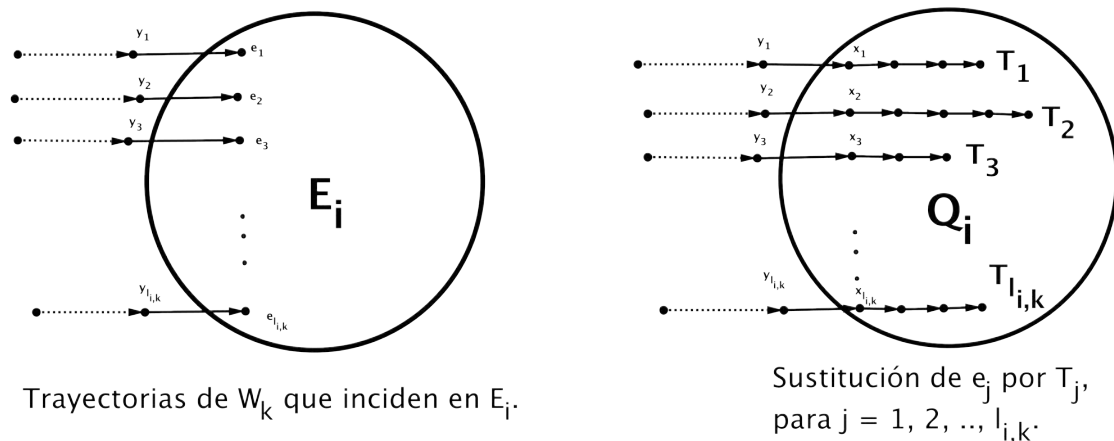


Figura 3.5

digráfica W'_k de k -trayectorias en D (véase la figura 3.5) que cubre exactamente $v_{i,k}$ vértices de Q_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Utilizando las afirmaciones 1 y 2 podemos asegurar que si D_k es una digráfica de k -trayectorias máxima en D , entonces cubre exactamente $v_{i,k}$ vértices de Q_i , pues por la afirmación 1 sabemos que cada digráfica de k -trayectorias de D cubre a lo más $v_{i,k}$ vértices de Q_i , y por la afirmación 2 se sigue que existe una gráfica que cubre al menos $v_{i,k}$ vértices de Q_i , para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Entonces al ser D_k máxima se concluye que D_k cubre exactamente $v_{i,k}$ vértices de Q_i . \square

Observación 3.7. En el lema 3.4 si D_k es una subdigráfica de k -trayectorias máxima en D , entonces es claro que $|V(D_k)| = v_{1,k} + v_{2,k} + \dots + v_{s,k}$. En particular si D_1 es un trayecto en D (es decir una subdigráfica de 1-trayectorias máxima en D), entonces $\lambda(D) = \lambda_1(D) = |V(D_1)| = v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{s,1}$.

Observación 3.8. En el lema 3.4 se cumple que: $v_{i,1} \leq v_{i,k}$ para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Pues supongamos por contradicción que existe un $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, de tal forma que $v_{i,1} > v_{i,k}$. Consideremos D_1 un trayecto en D (es decir una subdigráfica de 1-trayectorias en D), entonces sabemos por el lema 3.4 que $|(V(D_1) \cap V(Q_i))| = v_{i,1}$ y como en la prueba de la observación 3.2 vimos que siempre podemos construir una subdigráfica D_k de k -trayectorias de orden mayor o igual que $|V(D_1)|$ que contiene a todos los vértices de D_1 . Entonces se cumple que $|V(D_k) \cap V(Q_i)| \geq v_{i,1} > v_{i,k}$, pero esto es una

contradicción pues por el lema 3.4 sabemos que $|V(D_k) \cap V(Q_i)| \leq v_{i,k}$. Por lo tanto $v_{i,1} \leq v_{i,k}$ para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Observación 3.9. De forma más general y análoga a la observación 3.8, si $h \leq k$, utilizando la observación 3.3 obtenemos que $\lambda_h(Q_i) \leq \lambda_k(Q_i)$ y entonces podemos concluir que $v_{i,h} \leq v_{i,k}$, para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Observación 3.10. Con las hipótesis del lema 3.4 y debido a este lema, es inmediato que si $\{A, B\}$ es una partición de $V(D)$ y si $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$ y D_k es una subdigráfica de k -trayectorias de $D[B]$, y si para algún $r \in \{1, 2, \dots, s\}$, $D_k \cap Q_r$ consiste de b trayectorias ajenas. Entonces $v_{r,k} \geq \lambda_b(Q_r)$.

Teorema 3.11. Si D es una digráfica cuasitransitiva y q un entero positivo, entonces existe una partición $\{A, B\}$ de $V(D)$ de tal forma que se cumple lo siguiente:

- (i) $\lambda(D[A]) \leq q$;
- (ii) $\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q$, para cada $k = 1, 2, \dots, |V(B)|$, siempre que $\lambda_k(D) - q \geq 0$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre $|V(D)| = n$.

1.- **Paso base:** Si $|V(D)| = 1$, entonces hacemos $\{A, B\} = \{V(D), \emptyset\}$, la cual es la partición buscada, pues claramente $\lambda(D[V(D)]) = \lambda(D) = 1 \leq q$, y en este caso $|V(B)| = 0$, entonces la afirmación ii se cumple por vacuidad.

2.- **Hipótesis de inducción:** Si q es un entero positivo y D' es una digráfica cuasitransitiva, con $|V(D')| < n$, entonces D' contiene una $\{A', B'\}$ partición de $V(D')$, de tal forma que esta partición cumple i y ii.

3.- **Paso inductivo:** Sea D una digráfica cuasitransitiva con $|V(D)| = n$. Consideremos los 2 siguientes casos posibles:

Caso 1 : Si D es fuertemente conexa.

Por el teorema 3.4 de la definición de semicompleta extendida nosotros podemos afirmar que $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde S es una digráfica semicompleta fuertemente conexa y cada Q_i es o bien una digráfica cuasitransitiva no fuertemente conexa o un único vértice, para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Sea $v_{i,k}$, el número como en la definición del lema 3.4, es decir, $v_{i,k}$ es el número entero de tal manera que cada subdigráfica de k -trayectorias máxima D_k de D satisface que $|V(Q_i) \cap V(D_k)| = v_{i,k}$.

Si existe una trayectoria que pasa por todos los vértices de D , entonces por

el teorema 3.6 se concluiría la prueba. Entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $v_{j,1} < |V(Q_j)|$, para $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, y $v_{j,1} = |V(Q_j)|$, para $j \in \{l+1, l+2, \dots, s\}$, es decir, no existe un trayecto en D que pase por todos los vértices de Q_j , para $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, pero si existe un trayecto en D que pase por todos los vértices de Q_j , para $j \in \{l+1, l+2, \dots, s\}$.

Sea q un entero positivo, si $q \geq v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{s,1}$, entonces $\{A, B\} = \{V(D), \emptyset\}$ es la partición asignada, pues $\lambda(D[V(D)]) = \lambda(D) = \lambda_1(D)$ y por la observación 3.7 $\lambda(D) = v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{s,1} \leq q$, y en este caso $|V(B)| = 0$, entonces la afirmación ii se cumple por vacuidad. Podemos suponer entonces que $q < v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{s,1}$. Así podemos definir entonces r y γ_r de tal forma que las siguientes desigualdades se cumplan:

$$\gamma_r = v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r-1,1} < q \leq v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r,1}.$$

Consideremos los siguientes dos subcasos posibles:

Subcaso 1: Si $r \leq l$, entonces supongamos que el orden de Q_r es menor que el orden de D , de otra manera $D = Q_r$. Como Q_r es una digráfica no fuertemente conexa o un solo vértice y como D es fuertemente conexa, entonces D consistiría de un solo vértice, lo cual se reduce al caso base.

Sea $q' = q - \gamma_r > 0$. Podemos usar la hipótesis de inducción para Q_r y q' , así existe una partición $\{A_r, B_r\}$ de tal forma que se cumple que $\lambda(Q_r[A_r]) \leq q'$ y $\lambda_b(Q_r[B_r]) \leq \lambda_b(Q_r) - q'$, para $b = 1, 2, \dots, |V(B_r)|$, siempre que $\lambda_b(Q_r) - q' \geq 0$. Sean $A = V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup \dots \cup V(Q_{r-1}) \cup A_r$ y $B = B_r \cup V(Q_{r+1}) \cup V(Q_{r+2}) \cup \dots \cup V(Q_s)$. Claramente $\{A, B\}$ es una partición de $V(D)$, mostraremos que A y B cumplen con las propiedades i y ii del teorema:

Afirmación 1. Una trayectoria en $D[A]$ tiene a lo más q vértices.

Denotemos a los vértices de S por $V(S) = \{1, 2, 3, \dots, s\}$, donde cada vértice i ha sido expandido Q_i en D . Definamos $S_l = S[\{1, 2, \dots, l\}]$, la subdigráfica inducida por $\{1, 2, 3, \dots, l\}$ en S . Afirmamos que S_l es acíclica, de no ser así contendría un ciclo $C = (c_1, c_2, \dots, c_z, c_1)$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|V(Q_{c_1})| \leq |V(Q_{c_j})|$, para $j \in \{2, 3, \dots, z\}$. Entonces al expandir cada vértice c_i a Q_{c_i} en D por el lema 3.1 obtenemos que se forma un ciclo C' (en consecuencia una trayectoria T'_C) en D que pasa por todos los vértices de $V(Q_{c_1})$, y así por el lema 3.4 tenemos que $|V(Q_{c_1}) \cap V(T'_C)| = v_{c_1,1} = |V(Q_{c_1})|$, lo cual contradice la forma de definir el número l . Entonces como S_l es acíclica tenemos que $S_r = S[\{1, 2, \dots, r\}]$ es un torneo acíclico y entonces por el lema 3.2:

$\lambda(D[A]) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2) + \dots + \lambda(Q_{r-1}) + \lambda(Q_r[A_r])$ y por la observación

3.10 sabemos que $\lambda(Q_i) \leq v_{i,1}$, para $i = 1, 2, \dots, r-1$, y por la hipótesis de inducción $\lambda(Q_r[A_r]) \leq q'$, entonces obtenemos que:

$$\lambda(D[A]) \leq v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r-1,1} + q' = \gamma_r + q' = (q - q') + q' = q.$$

Afirmación 2. Una trayectoria en $D[B]$ tiene a lo más $\lambda_k(D) - q$ vértices.

Sean k y D_k una subdigráfica de k -trayectorias máxima de $D[B]$, con $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$, y supongamos que $D_k \cap Q_r$ consiste de b trayectorias ajenas, con $b \geq 0$, por la observación 3.10 obtenemos que $v_{r,k} \geq \lambda_b(Q_r)$ (donde definimos $\lambda_0(D) = 0$). Consideremos ahora los siguientes dos casos posibles:

Caso B1. Si $b > 0$, entonces siempre que $\lambda_b(Q_r) - q' \geq 0$ se tiene por hipótesis de inducción que $\lambda_b(Q_r[B_r]) \leq \lambda_b(Q_r) - q' \leq v_{r,k} - q'$.

Sabemos por el lema 3.4 que como $D_k[B]$ es una subdigráfica de k -trayectorias máxima de $D[B]$, entonces $|V(Q_i) \cap V(D_k[B])| \leq v_{i,k}$, para $i \in \{r+1, r+2, \dots, s\}$, y como $|V(Q_r[B_r]) \cap V(D_k[B])| \leq \lambda_b(Q_r[B_r])$ (pues $D_k \cap Q_r$ consiste de b trayectorias), entonces para cada $b > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\lambda_k(D[B]) = |V(D_k[B])| \leq \lambda_b(Q_r[B_r]) + v_{r+1,k} + \dots + v_{s,k} \leq (v_{r,k} - q') + v_{r+1,k} + \dots + v_{s,k} = v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r-1,1} + v_{r,k} + v_{r+1,k} + \dots + v_{s,k} - q.$$

Por la observación 3.8: $v_{i,1} \leq v_{i,k}$, para $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, entonces}:

$$\lambda_k(D[B]) \leq v_{1,k} + v_{2,k} + \dots + v_{r-1,k} + v_{r,k} + v_{r+1,k} + \dots + v_{s,k} - q.$$

Por la observación 3.7: $\lambda_k(D) = v_{1,k} + v_{2,k} + \dots + v_{r-1,k} + v_{r,k} + v_{r+1,k} + \dots + v_{s,k}$, entonces se concluye que:

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

Caso B2. Si $b = 0$, entonces tenemos que $\lambda_0(Q_r[B_r]) = 0$, y como $v_{r,k} - q' \geq v_{r,1} - q' = v_{r,1} - q + \gamma_r \geq v_{r,1} - (v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r,1}) + \gamma_r = v_{r,1} - (\gamma_r + v_{r,1}) + \gamma_r = 0$, entonces $v_{r,k} - q' \geq 0$ y el lector puede verificar que se siguen cumpliendo las desigualdades del caso B1 .

Por lo tanto de las afirmaciones 1 y 2 se concluye que A y B cumplen con las propiedades i y ii del teorema.

Subcaso 2. Si $r \geq l$, entonces sea $q' = q - \gamma_r > 0$. Sabemos por definición del número l que existe una trayectoria que pasa por los todos los vértices

de Q_r , entonces sean A_r una subdigráfica de Q_r con q' vértices de tal manera que exista una trayectoria que pase por todos sus vértices y $B_r = Q_r - A_r$. Definimos $A = V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup \dots \cup V(Q_{r-1}) \cup A_r$ y $B = B_r \cup V(Q_{r+1}) \cup V(Q_{r+2}) \cup \dots \cup V(Q_s)$.

Ahora vamos a demostrar que A y B cumplen con las propiedades i y ii del teorema.

Afirmación 1. Una trayectoria en $D[A]$ tiene a lo más q vértices.

Sabemos por el lema 3.4, que si $D_1[A]$ es una subdigráfica de 1-trayectorias máxima (es decir un trayecto) de $D[A]$, entonces $|V(Q_i) \cap V(D_1[A])| \leq v_{i,1}$, para $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, y además claramente $|V(A_r) \cap V(D_1[A])| \leq |V(A_r)| = q'$. Entonces concluimos lo siguiente:

$$\lambda(D[A]) = |V(D_1[A])| \leq v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r-1,1} + q' = \gamma_r + (q - \gamma_r) = q.$$

Afirmación 2. Una trayectoria en $D[B]$ tiene a lo más $\lambda_k(D) - q$ vértices.

Sea $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$. Sabemos por el lema 3.4 que si D_k es una subdigráfica de k -trayectorias máxima de $D[B]$, entonces $|V(Q_i) \cap V(D_k)| \leq v_{i,k}$, para $i \in \{r+1, r+2, \dots, s\}$, y además claramente, $|V(B_r) \cap V(D_k)| \leq |V(B_r)|$. Entonces concluimos lo siguiente:

$$\lambda_k(D[B]) = |V(D_k)| \leq |V(B_r)| + v_{r+1,k} + v_{r+2,k} + \dots + v_{s,k}.$$

Como existe una trayectoria que pasa por todos los vértices de Q_r , se tiene que $v_{r,1} = |V(Q_r)|$, y como $v_{r,1} \leq v_{r,k}$, en consecuencia $|V(Q_r)| \leq v_{r,k}$, pero $v_{r,k} \leq |V(Q_r)|$, así $|V(Q_r)| = v_{r,k}$. De lo anterior llegamos a que $|V(B_r)| = |V(Q_r - A_r)| = v_{r,k} - q'$, y entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$\lambda_k(D[B]) \leq (v_{r,k} - q') + v_{r+1,k} + v_{r+2,k} + \dots + v_{s,k}.$$

Como $q' = q - \gamma_r = q - (v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r-1,1})$, en consecuencia:

$$\lambda_k(D[B]) \leq v_{1,1} + v_{2,1} + \dots + v_{r-1,1} + v_{r,k} + \dots + v_{s,k} - q.$$

Por la observación 3.8: $v_{i,1} \leq v_{i,k}$, para $i = 1, 2, \dots, r-1$, así que:

$$\lambda_k(D[B]) \leq v_{1,k} + v_{2,k} + \dots + v_{r-1,k} + v_{r,k} + \dots + v_{s,k} - q.$$

Por la observación 3.7:

$\lambda_k(D) = v_{1,k} + v_{2,k} + \cdots + v_{r-1,k} + v_{r,k} + v_{r+1,k} + \cdots + v_{s,k}$, entonces se concluye que:

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

Por lo tanto de las afirmaciones 1 y 2, A y B cumplen las propiedades i y ii del teorema.

Así queda demostrado el caso donde D es fuertemente conexa, ahora demostremos el:

Caso 2. Si D no es fuertemente conexa, entonces por el teorema 3.4, existen una gráfica orientada transitiva T y digráficas fuertemente conexas, H_i ($i = 1, 2, \dots, t$), de tal forma que $D = T[H_1, H_2, \dots, H_t]$. Definimos los siguientes parámetros:

* p_i^{in} es el máximo número de vértices de una trayectoria en $D - V(H_i)$ de tal forma que el vértice terminal domina a un vértice de H_i , el vértice terminal de la trayectoria es adyacente hacia un vértice de H_i .

* p_i^{end} es el máximo número de vértices en una trayectoria en D de tal manera que el vértice terminal de la trayectoria pertenece a H_i .

Observación 3.12. *Notemos que una trayectoria en $D - H_i$ donde el vértice final domina a un vértice de H_i induce una nueva trayectoria con orden $p_i^{in} + 1$ que termina en un vértice de H_i , y por lo tanto $p_i^{in} + 1 \leq p_i^{end}$, y entonces $0 \leq p_i^{in} < p_i^{end}$.*

Vamos a construir dos subconjuntos de vértices A y B de $V(D)$ con las siguientes características:

- (a) Si $p_i^{end} \leq q$, entonces colocamos $V(H_i)$ en A .
- (b) Si $p_i^{in} \geq q$, entonces colocamos $V(H_i)$ en B .
- (c) Si $p_i^{in} < q < p_i^{end}$, entonces sea $q'_i = q - p_i^{in} > 0$, entonces el orden de H_i es menor que el orden de D , pues de lo contrario $D = H_i$, pero D no es fuertemente conexa y H_i es fuertemente conexa. Entonces podemos usar la hipótesis de inducción para cada H_i , así existe una partición con elementos de (A_i, B_i) de $V(H_i)$, de tal forma que $\lambda(H_i[A_i]) \leq q'_i$ y $\lambda_k(H_i[B_i]) \leq \lambda_k(H_i) - q'_i$, para $k = 1, 2, \dots, |V(B_i)|$, coloquemos A_i en A , y B_i en B .

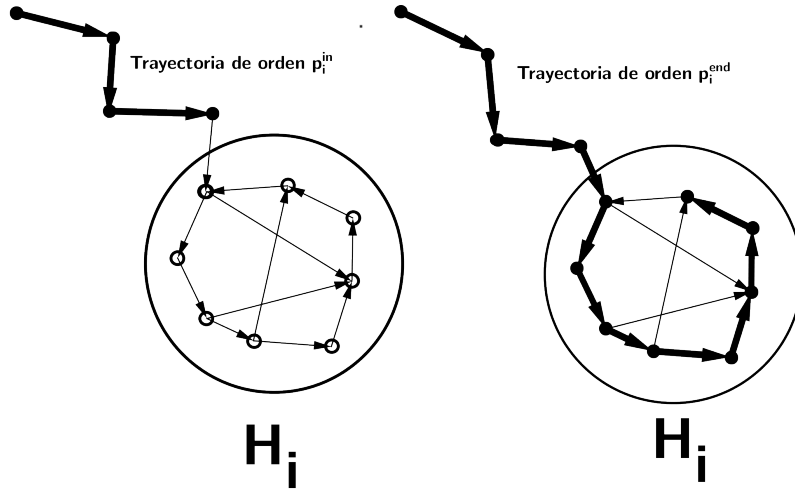


Figura 3.6: Componente y sus parámetros

Más precisamente, definimos $A' = \{x \in V(D) \mid x \in V(H_i) \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } p_i^{end} \leq q\}$, $B' = \{x \in V(D) \mid x \in V(H_i) \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } p_i^{in} \geq q\}$. Notemos que A' y B' son disjuntos, esto último lo garantiza la observación 3.12. Consideremos también $J = \{i \mid p_i^{in} < q < p_i^{end}\}$, donde J es el conjunto de índices de las particiones $\{A_i, B_i\}$ de $V(H_i)$, definidas en c.

Como una simple observación notemos que si $i \notin J$, entonces $V(H_i) \subset A'$ o $V(H_i) \subset B'$, si $x \in A'$, $p_i^{end} \leq q$, entonces $y \in A'$ para cada $y \in V(H_i)$, y si $x \in B'$, $p_i^{in} \geq q$, entonces $y \in B'$ para cada $y \in V(H_i)$.

Así A y B quedan definidos de la siguiente manera:

$$A = A' \cup \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \text{ y } B = B' \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right).$$

Por lo anteriormente dicho A y B forman una partición de $V(D)$, ahora veamos que cumplen las condiciones i y ii del teorema.

Afirmación 1. Una trayectoria en $D[A]$ tiene a lo más q vértices.

Sea $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ una trayectoria de máxima longitud en $D([A])$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x_k \in H_i$. Consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso A1. Si $i \notin J$, entonces como $x_k \in A$, entonces $x_k \in A'$, entonces $p_i^{end} \leq q$. Como P es una trayectoria donde su vértice final está en H_i , entonces $\lambda(D[A]) = |V(P)| \leq p_i^{end} \leq q$.

Caso A2. Si $i \in J$, entonces notemos primero que si existe una $H_i H_j$ -flecha (con $i \neq j$), entonces $H_j \subseteq B$, pues si P_{xy} es una xy -trayectoria de orden p_i^{end} en D con $y \in V(H_i)$, entonces afirmamos que $V(P_{xy}) \cap V(H_j) = \emptyset$, pues de lo contrario existiría una $H_j H_i$ -trayectoria en D , y al ser T transitiva existiría una $H_j H_i$ -flecha en D (véase la prueba del lema 2.9), y por lo tanto como existe $H_i H_j$ -flecha en D , entonces se formaría un ciclo de longitud 2 en T que es una orientación, esto es una contradicción. Como existe una $H_i H_j$ -flecha en D y como D es composición en particular existe un vértice h_j de H_j , de tal forma que y domina a h_j , entonces P_{xy} es una trayectoria en $D - V(H_j)$ de orden p_i^{end} donde su vértice final domina a un vértice de H_j , por lo que $p_j^{in} \geq |V(P_{xy})| = p_i^{end} > q$, y por lo tanto $H_j \subseteq B$.

Utilizando este último hecho podemos concluir que $P \cap H_i[A] = (x_h, x_{h+1}, \dots, x_k) = (x_h, P, x_k)$ para algún $h \in \{1, 2, \dots, k\}$, pues de otra manera P contendría al menos una $H_i H_j$ -flecha (para algún $j \neq i$), y por lo tanto un vértice de B , pero esto es imposible pues P es una trayectoria en $D[A]$.

Entonces (x_1, P, x_{h-1}) es una trayectoria cuyo vértice domina a x_h que es un vértice de H_i , por lo que $|V((x_1, P, x_{h-1}))| \leq p_i^{in}$ y claramente:

$|V((x_h, P, x_k))| \leq \lambda(H_i[A_i]) = q'_i = q - p_i^{in}$ (véase la figura 3.7). Entonces: $\lambda(D[A]) = |V(P)| = |V((x_1, P, x_{h-1}))| + |V((x_h, P, x_k))| \leq p_i^{in} + (q - p_i^{in}) = q$.

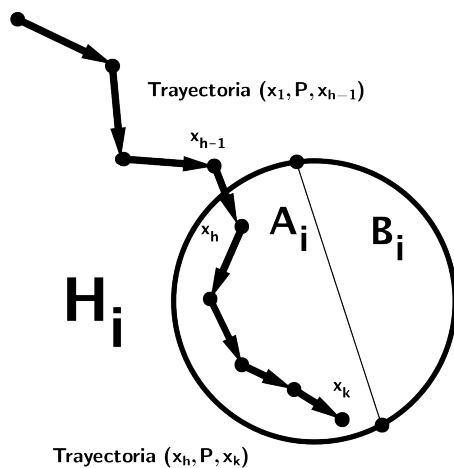


Figura 3.7: Figura caso A2

Afirmación 2. Una trayectoria en $D[B]$ tiene a lo más $\lambda_k(D) - q$ vértices Sean $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$ y $W_k = \cup_{j=1}^k T_j$ una subdigráfica de k -trayectorias de $D[B]$ de tal forma que $|V(W_k)| = \lambda_k(D[B])$. Sea $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que i es el primer índice de tal manera que una trayectoria de W_k comienza en $V(H_i)$. Consideremos $P = T_s$, para algún $s \in \{1, 2, \dots, k\}$, donde el vértice inicial x de P comienza en $V(H_i)$. Consideremos los siguientes casos posibles:

Caso B1. Si $i \notin J$, entonces existe una trayectoria P' en $D - V(H_i)$, de tal forma que $p_i^{in} = |V(P')| \geq q$ y el vértice terminal domina a un vértice de H_i , y al ser D una composición así que también domina a x , en consecuencia $P' \cup P = P''$ es una trayectoria de orden mayor o igual que $q + |V(P')|$, la prueba de que P'' es una trayectoria es similar a la prueba del caso A2, es decir, de no ser así se formaría un ciclo de longitud 2 en T , así que consideramos una nueva digráfica W'_k de k -trayectorias de D conformada por P'' , y las otras $k - 1$ trayectorias de $W_k - P$ (véase la figura 3.8) de orden $\lambda_k(D[B]) + |V(P')|$ y como $|V(P')| \geq q$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\lambda_k(D) \geq |V(W'_k)| = \lambda_k(D[B]) + |V(P')| \geq \lambda_k(D[B]) + q, \text{ en consecuencia:}$$

$$\lambda_k(D) \geq \lambda_k(D[B]) + q, \text{ a lo que:}$$

$$- \lambda_k(D) \leq - \lambda_k(D[B]) - q, \text{ y así finalmente:}$$

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

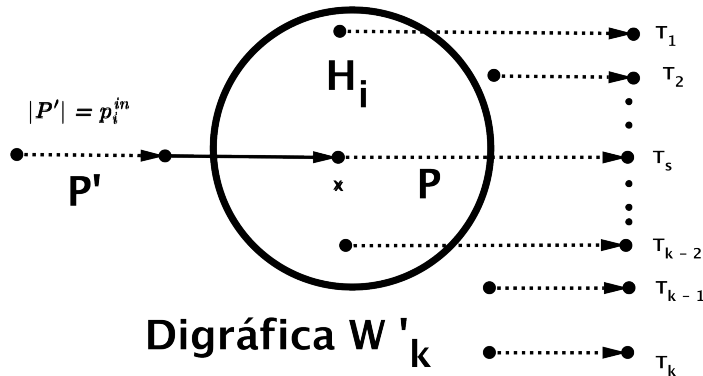


Figura 3.8: Figura caso B1

Caso B2. Si $i \in J$, entonces supongamos que b trayectorias de W_k empiezan en $H_i[B_i]$ y sin pérdida de generalidad supongamos que T_1, T_2, \dots, T_b son dichas trayectorias, denotemos y_i al primer vértice de T_i que no está en H_i (si es que existe).

Vamos a construir una subdigráfica W'_k de k trayectorias en D de orden $p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i]))$ de la siguiente manera:

Consideremos T'_1, T'_2, \dots, T'_b las trayectorias ajenas de una digráfica de b trayectorias en H_i de orden $\lambda_b(H_i)$, si x_i es el vértice final de la trayectoria T'_i , para $i \in \{1, 2, \dots, b\}$, notemos que como D es composición, entonces x_i es adyacente hacia y_i (si es que existe), para $i \in \{1, 2, \dots, b\}$, entonces así podemos sustituir cada trayectoria T_i por la trayectoria T'_i , y si consideramos a una trayectoria P de orden p_i^{in} en $D - H_i$, donde su vértice final domina un vértice de H_i , entonces en particular domina al vértice inicial de T'_1 (véase la figura 3.9), así formamos la digráfica W'_k de k -trayectorias de D , en otras palabras W'_k se forma sustituyendo las b trayectorias de $H_i[B_i]$ por las b trayectorias ajenas en H_i de orden $\lambda_b(H_i)$ y anteponiendo una trayectoria de orden p_i^{in} a exactamente una de las trayectorias, donde claramente $|V(W'_k)| = p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i]))$, entonces:

$$\lambda_k(D) \geq |V(W'_k)| = p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i])).$$

Y por hipótesis de inducción sabemos que:

$$\lambda_b(H_i[B_i]) \leq \lambda_b(H_i) - q'_i, \text{ en consecuencia:}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k(D) &\geq p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i])) \geq \\ &\geq p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + |V(W_k)| - \lambda_b(H_i) + q'_i = p_i^{in} + |V(W_k)| + q'_i \\ &= p_i^{in} + |V(W_k)| + q - p_i^{in} = |V(W_k)| + q = \lambda_k(D[B]) + q, \text{ así que:} \end{aligned}$$

$$\lambda_k(D) \geq \lambda_k(D[B]) + q, \text{ entonces:}$$

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

De las afirmaciones 1 y 2 obtenemos que A y B cumplen las condiciones i y ii del teorema.

□

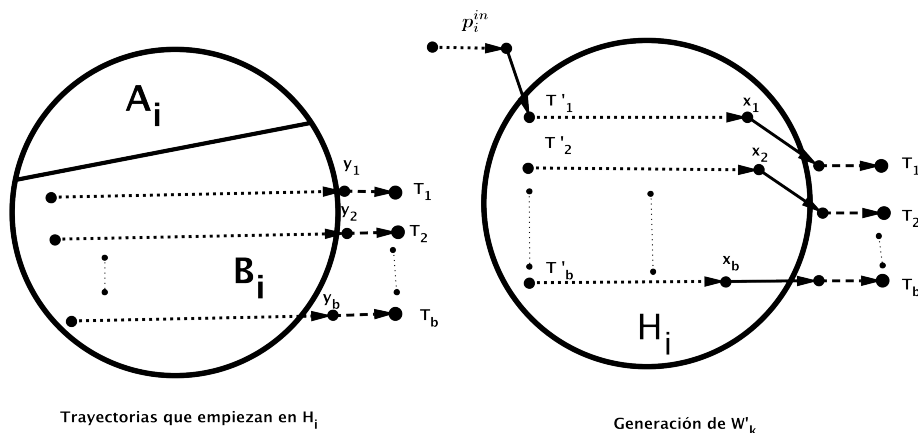


Figura 3.9: Figura caso B2

Corolario 3.1. Si $D = S[E_1, \dots, E_s]$ es una digráfica semicompleta extendida y q un entero positivo, entonces existe una partición de $V(D)$ con elementos de (A, B) , de tal forma que se cumple lo siguiente:

- (i) $\lambda(D[A]) \leq q$;
- (ii) $\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q$, para cada $k = 1, 2, \dots, |V(B)|$, siempre que $\lambda_k(D) - q \geq 0$.

Demostración. Consideremos los 2 siguientes casos posibles:

Caso 1: D es fuertemente conexa.

La prueba es la misma que en el caso 1 del teorema 3.11.

Caso 2: D no es fuertemente conexa.

Sean S_1, S_2, \dots, S_l , de tal forma que si $i < j$, entonces existe $S_i S_j$ -flecha y cada S_i es una digráfica fuertemente conexa o una gráfica k -partita en D .

Definimos a $T_i = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_i$.

Sea $r \in \{2, \dots, l + 1\}$ y consideremos los dos siguientes casos posibles:

Subcaso 1: Si $\lambda(D[T_{r-1}]) = q$, entonces hacemos $A = T_{r-1}$ y $B = V(D) - A$, donde $A \cup B$ es la partición asignada que cumplen las condiciones i y ii del teorema.

Subcaso 2: Si $\lambda(D[T_{r-1}]) < q < \lambda D[T_r]$, entonces primero notemos que S_r es semicompleta extendida fuertemente conexa, entonces por el teorema 3.6, tenemos que existe una partición de $V(S_r)$, con elementos de (A_r, B_r) ,

donde $\lambda(D[A_r]) \leq q - \lambda(D[T_{r-1}])$, y $\lambda_b(D[B_r]) \leq \lambda_b(S_r) - (q - \lambda(D[T_{r-1}]))$, para $b \in 1, 2, \dots, |V(B_r)|$.

Ahora la prueba es completamente igual a la prueba del teorema 3.6, es decir definimos:

$$A = T_{r-1} \cup A_r \text{ y } B = V(D) - A.$$

Para probar la propiedad i, observamos que un trayecto en A está conformado por un trayecto en $D[T_{r-1}]$ más un trayecto en A_r , es decir, un trayecto en A tiene orden $\lambda(D[T_{r-1}]) + \lambda(D[A_r]) \leq \lambda(D[T_{r-1}]) + (q - \lambda(D[T_{r-1}])) = q$, es decir, $\lambda(D[A]) \leq q$.

Para probar la propiedad ii, primero sea W_k una digráfica de k -trayectorias de $D[B]$ y supongamos que intersecta en b -trayectorias ($b > 0$) a $D[B_r]$, nuevamente como lo hicimos en la prueba del teorema anterior, formamos una nueva digráfica W'_k de k -trayectorias, remplazando estas b -trayectorias por una digráfica máxima de b -trayectorias de $D[S_r]$ y anteponiendo a una de estas trayectorias una de orden $\lambda(D[T_{r-1}])$. Entonces obtenemos que:

$$|V(W'_k)| = \lambda_k(D([B])) + (\lambda_b(S_r) - \lambda_b(D[B_r])) + \lambda(D[T_{r-1}]).$$

Y como $\lambda_b(D[B_r]) \leq \lambda_b(S_r) - (q - \lambda(D[T_{r-1}]))$, se sigue que:

$$\lambda_b(S_r) \geq \lambda_b(D[B_r]) + q - \lambda(D[T_{r-1}]), \text{ luego:}$$

$$\begin{aligned} |V(W'_k)| &\geq \\ &\geq \lambda_k(D([B])) + \lambda_b(D[B_r]) + q - \lambda(D[T_{r-1}]) - \lambda_b(D[B_r]) + \lambda(D[T_{r-1}]) = \\ &= \lambda_k(D[B]) + q. \end{aligned}$$

Y como $\lambda_k(D) \geq |V(W'_k)|$, entonces:

$$\lambda_k(D) \geq \lambda_k(D[B]) + q, \text{ y finalmente concluimos que:}$$

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

□

Teorema 3.13. *[[10]] Si D es una digráfica in-semicompleta fuertemente conexa, entonces D es trayectable.*

Lema 3.5. *[Ban Jensen et. al [16]] Sean D una digráfica localmente in-semicompleta y X y Y dos componentes fuertemente conexas de D . Si un vértice $x \in X$ domina a algún vértice de Y , entonces x domina a Y (es decir x es adyacente hacia todo vértice de Y).*

Demostración. Sean X y Y dos componentes fuertemente conexas de D , y supongamos que existe (x, y) una XY -flecha en D . Sea $y' \in V(B) - \{y\}$, vamos a demostrar que x domina a y' . Como Y es fuertemente conexa, existe $(y' = y_1, y_2, \dots, y_n = y)$ una $y'y$ -trayectoria en Y . Ahora notemos que x y y_{n-1} son in-vecinos de $y_n = y$. Como existe una XY -flecha en D , entonces por el lema 2.2 sabemos que no existe YX -flecha en D y como D es localmente in-semicompleta, entonces obtenemos que x es adyacente hacia y_{n-1} , es decir x domina a y_{n-1} , análogamente como x y y_{n-2} son in-vecinos de y_{n-1} , entonces x domina a y_{n-2} , procediendo de manera análoga obtendremos claramente que x domina a $y_1 = y'$. Finalmente como y' fue arbitrario y x domina a y , entonces concluimos que x domina a Y . \square

Lema 3.6. *Sean D una digráfica localmente in-semicompleta y H una componente fuertemente conexa de D . Si $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una trayectoria en D con $x_k \in V(H)$, entonces $P \cap H = (x_h, x_{h+1}, \dots, x_k)$ para algún $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ (es decir $P \cap H$ es una trayectoria que contiene a x_k).*

Demostración. Supongamos por contradicción que $P \cap H$ consiste de al menos 2 trayectorias ajenas, y entonces consideremos P_1 y P_2 la penúltima y última trayectoria respectivamente en $P \cap H$ (la última trayectoria en $P \cap H$ es la que contiene al vértice x_k), también como H es fuertemente conexa entonces contiene un camino cerrado C que pasa por todos sus vértices (observación 2.23), si (P_1, P, P_2) es la trayectoria P_1 junto con la subtrayectoria de P que une P_1 con P_2 y la trayectoria P_2 , entonces $(P_1, P, P_2) \cup C$ es un camino cerrado en D y por lo tanto es una digráfica fuertemente conexa que contiene propiamente a H (pues $V((P_1, P, P_2)) \neq V(H)$, ya que P_1 y P_2 son ajenas), lo cual es una contradicción ya que H es componente fuertemente conexa. Por lo tanto $P \cap H = (x_h, x_{h+1}, \dots, x_k)$ para algún $h \in \{1, 2, \dots, k\}$. \square

Lema 3.7. *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta fuertemente conexa. Entonces para cada vértice $v \in V(D)$, existe un trayecto que pasa por todos los vértices de D y este trayecto tiene como vértice terminal a v (es decir $m(v) = |V(D)|$).*

Demostración. Sea $v \in V(D)$, primero sabemos por el teorema 3.13 que D es trayectable, entonces cada trayecto de D contiene a todos los vértices de D . Sea $T = (x_1, \dots, x_n)$ un trayecto. Consideremos los dos siguientes casos:

Caso 1: Si $x_n = v$ entonces claramente se cumple.

Caso 2: Si $x_n \neq v$, entonces vamos a construir un trayecto cuyo vértice

terminal será v , de la siguiente manera:

Sea $1 \leq r < n$, donde $x_r = v$. Consideremos $A = \{x_1, \dots, x_r\}$ y $B = \{x_{r+1}, \dots, x_n\}$. Claramente $A \cup B = V(D)$ y como D es fuertemente conexa existe al menos una BA -flecha.

Sea $i \in \{r+1, r+2, \dots, n\}$ de tal forma que x_i sea in-vecino de A .

Sea $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ el primer índice para el cual $(x_i, x_j) \in F(D)$. Como x_{j-1} y x_i son in-vecinos de x_j , entonces por ser D localmente in-semicompleta y por la definición de j , entonces $(x_{j-1}, x_i) \in F(D)$. Consideremos $T' = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) \cup (x_{j-1}, x_i) \cup (x_i, x_j) \cup (x_j, x_{j+1}, \dots, x_r = v)$ una trayectoria que termina en v . Actualizamos $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_i, x_j, \dots, x_r\}$ y $B = \{x_{r+1}, \dots, x_n\} - \{x_i\}$ (véase la figura 3.10).

Si $B = \emptyset$, entonces T' es la trayectoria buscada, de otra manera volvamos al inicio con esta nueva actualización de A y B .

Como D es una digráfica finita, podemos proceder de esta misma manera hasta que $B = \emptyset$, y así encontramos dicho trayecto T' que tiene como vértice terminal a v . □

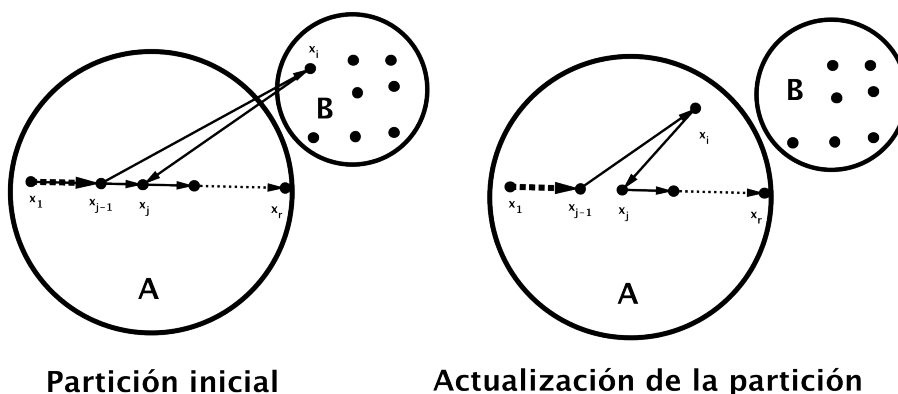


Figura 3.10

Lema 3.8. *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta fuertemente conexa y P_1, P_2, \dots, P_b , b -trayectorias ajenas en D . Si x_i denota el vértice final de P_i , para $i \in \{1, 2, \dots, b\}$, entonces existe un b -factor en D cuyos vértices terminales son precisamente x_i , para $i \in \{1, 2, \dots, b\}$.*

Demostración. Sabemos que como D es in-semicompleta y fuertemente conexa, entonces por el lema 3.7 tenemos que D contiene un trayecto T que pasa por todos los vértices de D y su vértice final es x_b . Supongamos sin pérdida de generalidad que x_i está antes que x_{i+1} en T , para $i \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Denotemos $T_1 = (T, x_1)$ la subtrayectoria de T que comienza en el

vértice inicial de T y termina en x_1 , ahora denotemos también $T_i = (T, x_i)$ la subtrayectoria de T que comienza en el vértice que es dominado por x_{i-1} en T y termina en x_i , para $i \in \{2, 3, \dots, b\}$. Claramente $\cup_{j=1}^k T_j$, es un b -factor (es decir una digráfica de b -trayectorias generadora), con vértices terminales x_i , para $i \in \{1, 2, \dots, b\}$. □

Teorema 3.14. *Si D una digráfica localmente in-semicompleta y q un número entero positivo, entonces existe una partición $\{A, B\}$ de $V(D)$, de tal forma que se cumple lo siguiente:*

- (i) $\lambda(D[A]) \leq q$;
- (ii) $\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$, siempre que $\lambda_k(D) - q \geq 0$.

Demostración. Consideremos los 2 siguientes casos posibles:

Caso 1: Si D es fuertemente conexa, entonces por el teorema 3.13 D es trayectable y entonces por el teorema 3.6, entonces se concluye la prueba.

Caso 2: Si D no es fuertemente conexa, entonces la idea de la demostración es como la prueba del teorema 3.6, es decir, si H_1, H_2, \dots, H_s son las componentes fuertemente conexas de D , entonces para cada H_i , definimos los parámetros p_i^{in} y p_i^{end} (como se definieron en la prueba del teorema 3.7). Vamos a construir dos subconjuntos de vértices A y B de $V(D)$, con las siguientes características:

- (a) Si $p_i^{end} \leq q$, entonces colocamos $V(H_i)$ en A .
- (b) Si $p_i^{in} \geq q$, colocamos $V(H_i)$ en B .
- (c) Si $p_i^{in} < q < p_i^{end}$, entonces sea $q'_i = q - p_i^{in} > 0$, como H_i es in-semicompleta y fuertemente conexa, entonces por el teorema 3.13 es trayectable, y entonces análogamente al caso 1 existe una partición de $V(H_i)$, conformado por los elementos de (A_i, B_i) de tal forma que $\lambda(H_i[A_i]) = q'_i$ y $\lambda_k(H_i[B_i]) = |V(H_i)| - q'_i = \lambda_k(H_i) - q'_i$, para $k \in \{1, 2, \dots, |V(B_i)|\}$. Coloquemos A_i en A y B_i en B .

Más precisamente, definimos como $A' = \{x \in V(D) \mid x \in V(H_i) \text{ para alguna } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } p_i^{end} \leq q\}$ y como $B' = \{x \in V(D) \mid x \in V(H_i) \text{ para alguna } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } p_i^{in} \geq q\}$. Notemos que A' y B' son disjuntos esto lo garantiza la observación 3.7. Consideremos también $J = \{i \mid p_i^{in} < q < p_i^{end}\}$, donde J es el conjunto de índices de las particiones, conformada por los elementos de (A_i, B_i) de $V(H_i)$ definidas en c.

Como una simple observación notemos que si $i \notin J$, entonces $V(H_i) \subset A'$ o $V(H_i) \subset B'$ (si $x \in A'$, $p_i^{end} \leq q$, entonces $y \in A'$ para cada $y \in V(H_i)$, y si $x \in B'$, $p_i^{in} \geq q$, entonces $y \in B'$ para cada $y \in V(H_i)$). Así A y B quedan definidos de la siguiente manera:

$$A = A' \cup \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \text{ y } B = B' \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right).$$

Por lo anteriormente dicho A y B forman una partición de $V(D)$, ahora veamos que cumplen las condiciones i y ii del teorema.

Afirmación 1. Una trayectoria en $D[A]$ tiene a lo más q vértices.

Sea $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ una trayectoria de máxima longitud en $D([A])$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x_k \in H_i$, ahora tenemos los dos siguientes casos posibles:

Caso A1. Si $i \notin J$, entonces como $x_k \in A$, entonces $x_k \in A'$, entonces $p_i^{end} \leq q$. Como P es una trayectoria donde su vértice final está en H_i , entonces $\lambda(D[A]) = |V(P)| \leq p_i^{end} \leq q$.

Caso A2. Si $i \in J$, entonces por el lema 3.6 tenemos que $P \cap H_i = (x_h, x_{h+1}, \dots, x_k)$ para algún $h \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ahora (x_1, P, x_{h-1}) es una trayectoria cuyo vértice domina a x_h (que es un vértice de H_i), por lo que $|V((x_1, P, x_{h-1}))| \leq p_i^{in}$ y claramente $|V((x_h, P, x_k))| \leq \lambda(H_i[A_i]) = q'_i = q - p_i^{in}$. Entonces:

$$\lambda(D[A]) = |V(P)| = |V((x_1, P, x_{h-1}))| + |V((x_h, \dots, x_k))| \leq p_i^{in} + (q - p_i^{in}) = q.$$

Afirmación 2. Una trayectoria en $D[B]$ tiene a lo más $\lambda_k(D) - q$ vértices.

Sean $k \in \{1, 2, \dots, |V(B)|\}$ y $W_k = \bigcup_{j=1}^k T_j$ una subdigráfica de k -trayectorias de $D[B]$, de tal forma que $|V(W_k)| = \lambda_k(D[B])$.

Sea $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que i es el primer índice de tal manera que una trayectoria de W_k comienza en $V(H_i)$. Consideremos $P = T_s$, para algún $s \in \{1, 2, \dots, k\}$, donde el vértice inicial x de P comienza en $V(H_i)$. Consideremos los siguientes casos posibles:

Caso B1. Si $i \notin J$, entonces existe una trayectoria P' en $D - V(H_i)$ de tal forma que $p_i^{in} = |V(P')| \geq q$ y el vértice terminal domina un vértice de H_i , y así por el lema 3.5 domina a x , en consecuencia $P' \cup P = P''$ es una trayectoria de orden mayor o igual que $q + |P'|$, la prueba de que P'' es una trayectoria es igual a la prueba del lema 3.5, pues de lo contrario se formaría una digráfica fuertemente conexa que contiene propiamente a

H_i -componente fuertemente conexa-, así que podemos considerar una nueva digráfica W'_k de k -trayectorias de D conformada por P' y las otras $k - 1$ trayectorias de $W_k - P$ (véase la figura 3.11), por lo que el orden de W'_k es $\lambda_k(D[B]) + |P'|$ y entonces:

$$\lambda_k(D) \geq |V(W'_k)| = \lambda_k(D[B]) + |P'| \geq \lambda_k(D[B]) + q, \text{ y así:}$$

$$\lambda_k(D) \geq \lambda_k(D[B]) + q, \text{ luego:}$$

$$- \lambda_k(D) \leq - \lambda_k(D[B]) - q, \text{ finalmente:}$$

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

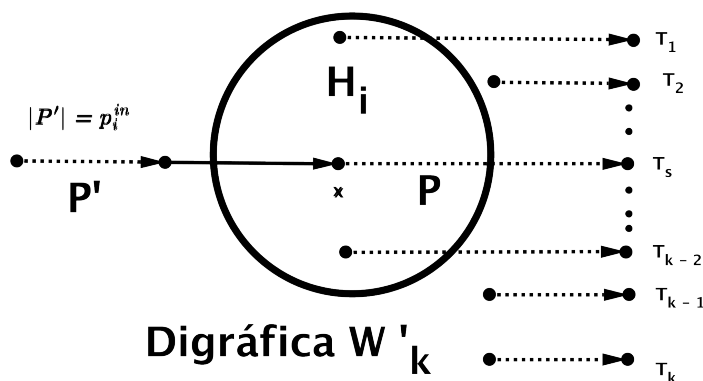


Figura 3.11: Figura caso B1

Caso B2. Si $i \in J$, entonces supongamos que b trayectorias de W_k empiezan en $H_i[B_i]$ y sin pérdida de generalidad supongamos que T_1, T_2, \dots, T_b , son dichas trayectorias. Denotemos x_j como el último vértice de la trayectoria $T_j \cap H_i$, para $j \in \{1, 2, \dots, b\}$.

Vamos a construir una subdigráfica W'_k de k trayectorias en D de orden $p_i^{in} + |V(H_i)| + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i]))$ de la siguiente manera:

Por el lema 3.6 H_i contiene un b -factor, es decir, una subdigráfica de b -trayectorias de orden $|V(H_i)|$, cuyos vértices terminales de estas trayectorias son precisamente x_1, x_2, \dots, x_b . Consideremos T'_1, T'_2, \dots, T'_b las trayectorias de dicho b -factor de H_i , donde x_i es el vértice final de T'_j , para $j \in \{1, 2, \dots, b\}$. Sustituyendo $T_j \cap H_i$ por T'_j , para $j \in \{1, 2, \dots, b\}$ y considerando una trayectoria P de orden p_i^{in} en $D - H_i$, donde su vértice final domina a un vértice de H_i , entonces por el lema 3.5 en particular domina al vértice ini-

cial de T'_1 , y si unimos también P con T'_1 , entonces generamos W'_k (véase la figura 3.12), donde claramente el orden de esta digráfica es $p_i^{in} + |V(H_i)| + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i]))$, entonces:

$$\lambda_k(D) \geq |V(W'_k)| = p_i^{in} + |V(H_i)| + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i])).$$

Y como $|V(H_i)| = \lambda_b(H_i)$, luego:

$$\lambda_k(D) \geq p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + (|V(W_k)| - \lambda_b(H_i[B_i])).$$

Y como $i \in J$, tenemos que $\lambda_b(H_i[B_i]) = \lambda_b(H_i) - q'_i$, así que:

$$\lambda_k(D) \geq p_i^{in} + \lambda_b(H_i) + |V(W_k)| - \lambda_b(H_i) + q'_i = p_i^{in} + |V(W_k)| + q'_i = p_i^{in} + |V(W_k)| + q - p_i^{in} = |V(W_k)| + q = \lambda_k(D[B]) + q, \text{ por lo que:}$$

$\lambda_k(D) \geq \lambda_k(D[B]) + q$, entonces:

$$\lambda_k(D[B]) \leq \lambda_k(D) - q.$$

□

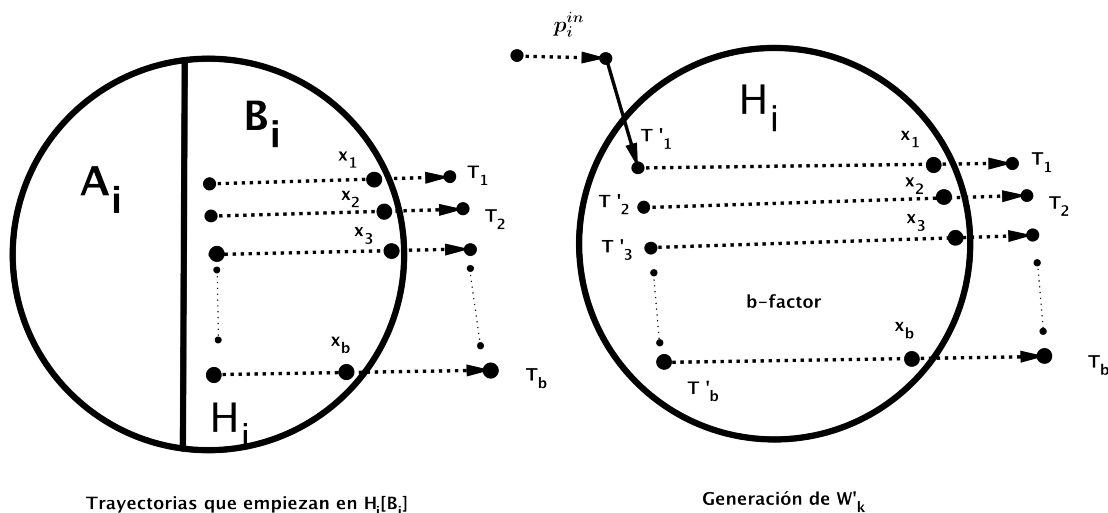


Figura 3.12: Figura caso B2

3.4. Más resultados en digráficas localmente in-semicompletas y semicompletas extendidas

En esta sección siguiendo con las mismas ideas del capítulo anterior, vamos a probar la conjetura 2.2 (mencionada en el capítulo 2) para las digráficas localmente in-semicompletas y semicompletas extendidas.

Teorema 3.15. *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta. Si a, b es un par de enteros positivos, tales que $\lambda(D) = a + b$, entonces existe una partición $\{A, B\} = V(D)$, de tal forma que cumplen lo siguiente:*

- (i) $\lambda(D[A]) = a$
- (ii) $\lambda(D[B]) = b$.

Demostración. Sea a, b un par de enteros positivos, tales que $\lambda(D) = a + b$. Consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1: D es fuertemente conexa.

Por el teorema 3.13 D es trayectable y entonces la prueba es igual al Ejemplo 2 del capítulo 2.

Caso2: D no es fuertemente conexa.

Siguiendo con las mismas ideas de la prueba del teorema 3.14, sean H_1, H_2, \dots, H_s las componentes fuertemente conexas de D .

Vamos a construir dos subconjuntos de vértices A y B de $V(D)$, con las siguientes características:

- (a) Si $p_i^{end} \leq a$, entonces colocamos $V(H_i)$ en A .
- (b) Si $p_i^{in} \geq a$, entonces colocamos $V(H_i)$ en B .
- (c) Si $p_i^{in} < a < p_i^{end}$, entonces sea $a'_i = a - p_i^{in} > 0$, como H_i es in-semicompleta y fuertemente conexa, entonces por el teorema 3.13 es trayectable, y entonces análogamente a la prueba del teorema 3.6 existe una partición de $V(H_i)$, con elementos de (A_i, B_i) , de tal forma que $\lambda(H_i[A_i]) = a'_i$ y $\lambda(H_i[B_i]) = |V(H_i)| - a'_i = \lambda(H_i) - a'_i$, coloquemos A_i en A y B_i en B .

Más precisamente, definimos $A' = \{x \in V(D) \mid x \in V(H_i) \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } p_i^{end} \leq a\}$, $B' = \{x \in V(D) \mid x \in V(H_i) \text{ para algún } i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } p_i^{in} \geq a\}$. Notemos que A' y B' son disjuntos pues lo garantiza la observación 3.7. Consideremos también $J = \{i \mid p_i^{in} < a < p_i^{end}\}$, donde J es el conjunto de índices de las particiones $\{A_i, B_i\}$ de $V(H_i)$,

definidas en (c).

Así A y B quedan definidos de la siguiente manera:

$$A = A' \cup \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \text{ y } B = B' \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right).$$

En la prueba del teorema 3.14 vimos que A y B forman una partición de $V(D)$, y también si hacemos $k = 1$, y $q = a$, entonces obtenemos que:

$$\lambda(D[A]) \leq a \text{ y } \lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - a = b.$$

Entonces es claro que si exhibimos una trayectoria de orden a y b , en A y B respectivamente, concluiríamos la prueba. Vamos a exhibir dichas trayectorias de la siguiente manera:

Sea P un trayecto en D y supongamos sin pérdida de generalidad que P pasa por las componentes fuertemente conexas H_1, H_2, \dots, H_t , para algún $t \in \{1, 2, \dots, s\}$, de otra manera haríamos una re-etiquetación a cada H_i .

En el lema 3.8 vimos que $P \cap H_i$ es una trayectoria, para $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Denotemos x_i el vértice terminal de $P \cap H_i$, para $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, y también recordemos la definición 2.11 del capítulo 2, es decir la función m , donde $m(v)$ denota el máximo número de vértices de una trayectoria en D que termina en el vértice v .

Observación 01: Si $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, entonces $m(x_i) = p_i^{end}$.

Sea $P_{m(x_i)}$ una trayectoria de orden $m(x_i)$ que termina en $x_i \in H_i$, entonces claramente $m(x_i) = |V(P_{m(x_i)})| \leq p_i^{end}$.

Sea P_i una trayectoria de orden p_i^{end} con vértice terminal en H_i , sabemos por el lema 3.6 que $P_i - (P_i \cap H_i)$ es una trayectoria cuyo vértice final domina a un vértice de H_i , y entonces por el lema 3.5 domina a todo H_i . También por el lema 3.7 existe un trayecto en H_i que pasa por todos sus vértices y tiene como vértice final x_i , entonces es claro que la unión de $P_i - (P_i \cap H_i)$ con este último trayecto de H_i es una trayectoria de orden p_i^{end} que termina en x_i , y por lo tanto $p_i^{end} \leq m(x_i)$.

Observación 02; Si $1 \leq i \leq t$, entonces $P \cap (H_1, H_2, \dots, H_i)$ es una trayectoria de orden $m(x_i)$.

Si $T = P \cap (H_1, H_2, \dots, H_i)$, entonces sabemos que $P \cap (H_1, H_2, \dots, H_i)$ es una trayectoria con vértice final x_i , entonces el orden de T es menor o igual que $m(x_i)$. Ahora supongamos por contradicción que existe una trayectoria T' de orden mayor que el orden de T cuyo vértice final es x_i y consideremos $P' = P \cap (H_{i+1}, \dots, H_t)$, entonces $T \cup P'$ es una trayectoria, ya que si no es una trayectoria entonces se formaría al menos una componente fuertemente conexa que contiene propiamente alguna H_k , con $k \in \{i+1, \dots, t\}$, lo cual no es posible, pero entonces $T \cup P'$ es una trayectoria en D de orden mayor que

el orden de P , lo cual es una contradicción. Así el orden de T es igual a $m(x_i)$.

Observación 03: Si $i > 1$, entonces $m(x_{i-1}) \leq p_i^{in}$.

Por la observación O2 podemos considerar $P_{m(x_{i-1})}$ la subtrayectoria de P de orden $m(x_{i-1})$ que termina en x_{i-1} , notemos que $V(P_{m(x_{i-1})}) \cap V(H_i) = \emptyset$, pues supongamos que existe un $h_i \in V(P_{m(x_{i-1})}) \cap V(H_i)$ y como $x_{i-1} \in V(P_{m(x_{i-1})}) \cap V(H_{i-1})$, entonces existe una subtrayectoria P' de $P_{m(x_{i-1})}$, que empieza en un vértice de H_i y termina en un vértice de H_{i-1} , pero como P pasa por H_{i-1} y H_i (en ese orden), entonces existe una $H_{i-1}H_i$ -flecha, lo cual es imposible pues se formaría una componente fuertemente conexa que contiene H_{i-1} y H_i (véase el lema 2.2). Así $P_{m(x_{i-1})}$ es una trayectoria en $D - H_i$ cuyo vértice final x_{i-1} domina a un vértice de H_i , entonces $m(x_{i-1}) \leq p_i^{in}$.

Observación 04: Si $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, entonces $|V(P \cap H_1)| + |V(P \cap H_2)| + \dots + |V(P \cap H_i)| = m(x_i)$.

Esto es una consecuencia inmediata de la observación O2.

Observación 05: Si $i < t$, entonces $m(x_i) = p_{i+1}^{in}$. Sabemos por la observación O3 que $m(x_i) \leq p_{i+1}^{in}$.

Supongamos que $m(x_i) < p_{i+1}^{in}$, entonces existe una trayectoria T_{i+1}^{in} de orden $p_{i+1}^{in} > m(x_i)$ cuyo vértice final z^{in} domina a un vértice h_{i+1} de H_{i+1} . Notemos primero que si $j \in \{i+2, i+3, \dots, s\}$, entonces $V(T_{i+1}^{in}) \cap V(H_j) = \emptyset$, pues supongamos que existe $j \in \{i+2, i+3, \dots, s\}$, de tal forma que $y \in V(T_{i+1}^{in}) \cap V(H_j)$, entonces como el vértice final z^{in} de T_{i+1}^{in} domina al vértice h_{i+1} de H_{i+1} , entonces existe una H_jH_{i+1} trayectoria. Como P pasa por $H_{i+1}, H_{i+2}, \dots, H_j$, entonces existe una $H_{i+1}H_j$ -trayectoria, y así entonces se forma una componente fuertemente conexa que contiene H_j y H_{i+1} (véase el lema 2.2), lo cual es una contradicción.

Así T_{i+1}^{in} es una trayectoria que está en $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_i$ de orden $p_{i+1}^{in} > m(x_i)$ y como su vértice final z^{in} domina al vértice h_{i+1} de H_{i+1} , entonces por el lema 3.5, z^{in} domina al vértice inicial de la trayectoria $P \cap H_{i+1}$. Por la observación O4 y como $p_{i+1}^{in} > m(x_i)$, entonces sustituyendo la trayectoria $(P \cap H_1) \cup (P \cap H_2) \cup \dots \cup (P \cap H_i)$ por la trayectoria T_{i+1}^{in} , obtenemos una nueva trayectoria de mayor orden que la de P , lo cual es una contradicción.

Afirmación A1: Si $H_i \subseteq A$, con $i \in \{2, 3, 4, \dots, t\}$, entonces $H_{i-1} \subseteq A$.

Si $H_i \subseteq A$, entonces $p_i^{end} \leq a$. Por las observaciones O1 y O3, tenemos que, $p_{i-1}^{end} = m(x_{i-1}) = p_i^{in} < p_i^{end} \leq a$.

Entonces finalmente $p_{i-1}^{end} \leq a$, y así $H_{i-1} \subseteq A$.

Afirmación A2: Si $H_i \subseteq B$, con $i \in \{1, 2, 3, \dots, t-1\}$, entonces $H_{i+1} \subseteq B$.

Si $H_i \subseteq B$, entonces $p_i^{in} \geq a$. Por las Observaciones O1 y O3, tenemos que $p_{i+1}^{in} = m(x_i) = p_i^{end} > p_i^{in} \geq a$.

Entonces finalmente $p_{i+1}^{in} > a$, y así $H_{i+1} \subseteq B$.

Sea H_i , con $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, y consideremos los siguientes casos posibles:

Subcaso 1: Si $i \notin J$, entonces $V(H_i) \subseteq A$ o $V(H_i) \subseteq B$ y por las afirmaciones A1 y A2 podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, de tal forma que $(H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_j) \subseteq A$ y $(H_{j+1} \cup H_{j+2} \cup \dots \cup H_t) \subseteq B$.

Por la observación O5 $P_a = (P \cap H_1) \cup (P \cap H_2) \cup \dots \cup (P \cap H_j)$, es una trayectoria en A de orden $m(x_j)$ (por observación O5) $= p_{j+1}^{in}$ (por el inciso b) $\geq a$, pero ya sabemos que cualquier trayectoria en A tiene a lo más orden a , y por lo tanto concluimos que:

$$\lambda(D[A]) = |V(P_a)| = a.$$

Claramente si $P_b = (P \cap H_{j+1}) \cup (P \cap H_{j+2}) \cup \dots \cup (P \cap H_t)$, entonces $|V(P_b)| = |V(P)| - |V(P_a)| = \lambda(D) - a = b$, y como habíamos probado que cualquier trayectoria en B tiene orden a lo más $\lambda(D) - a = b$, entonces concluimos que:

$$\lambda(D[B]) = |V(P_b)| = \lambda(D) - a = b.$$

Así entonces queda demostrado el subcaso 1, ahora vamos a la prueba del:

Subcaso 2: Si $i \in J$, entonces $p_i^{in} < a < p_i^{end}$.

Afirmación C1.1: Si $i > 1$, entonces $H_{i-1} \subseteq A$.

Por las observaciones O1 y O2 sabemos que $m(x_{i-1}) = p_{i-1}^{end}$ y $m(x_{i-1}) \leq p_i^{in} < a$, entonces $p_{i-1}^{end} < a$, y así $H_{i-1} \subseteq A$.

Afirmación C1.2: Si $i < t$, entonces $H_{i+1} \subseteq B$.

Por las observaciones O5 y O1, tenemos que $p_{i+1}^{in} = m(x_i)$ y $m(x_i) = p_i^{end}$, entonces $p_{i+1}^{in} = p_i^{end} > a$, y entonces $H_{i+1} \subseteq B$.

Así de las afirmaciones C1.1, C1.2, A1, y A2 podemos asegurar que $(H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{i-1}) \subseteq A$ y $(H_{i+1} \cup H_{j+2} \cup \dots \cup H_t) \subseteq B$.

Como $i \in J$, entonces podemos considerar a la partición $\{A_i, B_i\}$ de $V(H_i)$

(véase el inciso c), donde P_a es una trayectoria en A_i de orden $a'_i = a - p_i^{in}$, y P_b una trayectoria en B_i de orden $|V(H_i)| - a'_i$, donde P_b tiene como vértice terminal x_i (esto último se puede hacer debido al lema 3.7).

Vamos a construir 2 trayectorias en A y B de la siguiente manera:

* Sabemos nuevamente por el lema 3.5, que x_{i-1} domina a todo vértice de H_i , en particular domina al vértice inicial de P_a , entonces $P'_a = (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{i-1}) \cup P_a$, es claramente una trayectoria en A , donde $|V(P'_a)| = (|V(P \cap H_1)| + |V(P \cap H_2)| + \dots + |V(P \cap H_{i-1})|) + |V(P_a)| = m(x_{i-1}) + a'_i$ (esta última igualdad por la observación O4).

Y como $a'_i = a - p_i^{in}$ y $m(x_{i-1}) = p_i^{in}$, entonces:

$$|V(P'_a)| = p_i^{in} + a - p_i^{in} = a.$$

Entonces P'_a es una trayectoria en A de orden a , pero ya sabemos que cualquier trayectoria en A tiene a lo más orden a , y por lo tanto concluimos que:

$$\lambda(D[A]) = |V(P_a)| = a.$$

* Sabemos que x_i domina al vértice inicial de la trayectoria $P \cap H_{i+1}$, entonces $P'_b = P_b \cup (H_{i+1} \cup H_{i+2} \cup \dots \cup H_t)$ es claramente una trayectoria en B , donde $|V(P'_b)| = |V(P)| - |V(P_a)| = \lambda(D) - a$, y como habíamos probado que cualquier trayectoria en B tiene a lo más $(\lambda(D) - a = b)$ vértices, entonces concluimos que:

$$\lambda(D[B]) = |V(P_b)| = b.$$

Por lo tanto queda demostrado el subcaso 2 y así concluimos la prueba. \square

Recordemos que en el lema 3.3, definimos el número $l_{i,k}$, para una digráfica $D = S[E_1, E_2, \dots, E_s]$ semicompleta extendida, donde $l_{i,k}$ es el máximo número de vértices de E_i que cubre una digráfica de k -trayectorias, en este nuevo contexto, vamos a trabajar con trayectos, es decir digráficas de 1-trayectorias de D , por lo que denotaremos $l_{i,1}$ como l_i y será el máximo número de vértices de E_i que puede cubrir una trayectoria de D .

Definición 3.10. Sean D una digráfica y T, T' un par de trayectorias en D . Si T y T' tienen sólo como vértices en común a su vértice inicial y a su vértice final, entonces diremos que T y T' son **internamente ajenas**.

Definición 3.11. Sea D una digráfica. Un (s, t) -**separador** es un subconjunto $Z \subseteq V(D) - \{s, t\}$, de tal forma que $D - Z$ no contiene st -trayectorias.

Definición 3.12. Sean D una digráfica y H una subdigráfica de D . Un **HH-separador** es un subconjunto $Z \subseteq V(D) - V(H)$, de tal forma que D

– Z no contiene st -trayectorias, para cada par s, t de vértices distintos en H (es decir $D - Z$ no contiene HH -trayectorias no triviales).

Proposición 7. Sean $D = S[E_1, E_2, \dots, E_s]$ una digráfica semicompleta extendida e $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Si eliminando k vértices de D se eliminan todas las $E_i E_i$ -trayectorias (no triviales), entonces una trayectoria de D contiene a lo más $k + 1$ vértices de E_i (es decir $l_i \leq k + 1$).

Demostración. Supongamos por contradicción que existe una trayectoria T en D , que cubre al menos $(k + 2)$ vértices, llamemos a estos vértices $1, 2, \dots, k, k + 1, k + 2, \dots, n$ (suponiendo que en ese orden están en T).

Eliminemos k vértices de T y elijamos dos vértices distintos i y r de los sobrantes. Sea $(i, T, i + 1)$ la subtrayectoria de T que une i con $i + 1$.

Si $(i, T, i + 1) = (i = x_1, x_2, \dots, x_t = i + 1)$, entonces como E_i es independiente podemos considerar al primer índice j ($j \in \{3, \dots, t\}$) para el cual $x_j \in V(E_i)$, así $x_{j-1} \notin V(E_i)$.

Como x_{j-1} domina a $x_j \in V(E_i)$, entonces por ser D composición, x_{j-1} domina al vértice $r \in V(E_i)$, y por lo tanto $(i = x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) \cup (x_{j-1}, r)$ es una $E_i E_i$ -trayectoria de orden mayor que 2, en contradicción con la hipótesis. □

Lema 3.9. Sean $D = S[E_1, E_2, \dots, E_s]$ una digráfica semicompleta extendida e $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Si existen k $E_i E_i$ -trayectorias (no triviales) internamente ajenas, donde $|V(E_i)| > k$, entonces existe un ciclo en D que contiene $k + 1$ vértices de E_i .

Demostración. Sean T_1, T_2, \dots, T_k k $E_i E_i$ -trayectorias (no triviales) internamente ajenas en D . Denotemos x_j y y_j el vértice inicial y terminal respectivamente de T_j , y también denotemos como $T'_j = T_j - \{x_j, y_j\}$ (la trayectoria T_j menos su vértice inicial y su vértice final), para $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ (notemos que estas trayectorias son claramente ajenas dos a dos).

Vamos a construir un ciclo de la siguiente manera:

Sean $z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}$ $k + 1$ vértices distintos de E_i . Notemos que como x_j domina al vértice inicial de T'_j , entonces por ser D composición z_j domina al vértice inicial de T'_j . Análogamente por ser D composición el vértice final de T'_j domina al vértice z_{j+1} , para $j \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$. Así $\cup_{j=1}^k (z_j, T'_j, z_{j+1}) \cup (z_{k+1}, T'_k, z_1)$ es un ciclo en D que pasa por $k + 1$ vértices de E_i . □

Teorema 3.16. (Teorema de Menger) [10, teorema 7.3.1 (b)] Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$ un par de vértices distintos. Si la flecha (u, v) no está en $F(D)$, entonces el máximo número de uv -trayectorias internamente ajenas es igual al mínimo número de vértices en un (u, v) -separador.

Lema 3.10. Sean $D = S [E_1, E_2, \dots, E_s]$ una digráfica semicompleta extendida e $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Si $l_i < |V(E_i)|$, entonces existe un E_i -separador Z_i de cardinalidad $l_i - 1$.

Demostración. Supongamos por contradicción que con $l_i - 1$ vértices de $V(D) - V(E_i)$ no podemos eliminar a todas las $E_i E_i$ -trayectorias no triviales, entonces el mínimo número de vértices en un uv -separador es al menos l_i , con u, v un par de vértices distintos en E_i , entonces por el teorema 3.16 D contiene l_i $E_i E_i$ -trayectorias internamente ajenas y entonces por el lema 3.9 tenemos que D contiene un ciclo C que pasa por l_i vértices de E_i .

Sean $x \in V(C) \cap V(E_i)$ y z el predecesor de x en el ciclo C . Como $l_i < |V(E_i)|$, entonces existe $y \in V(E_i) - V(C)$. Notemos que como z domina a $x \in V(E_i)$, entonces al ser D una composición tenemos que z domina a y . Así si T_{xz} es la xz -subtrayectoria de C , entonces $T_{xz} \cup (z, y)$ es claramente una trayectoria de D que pasa por $(l_i + 1)$ vértices de E_i , lo cual contradice al lema 3.3. Por lo tanto existe un conjunto Z_i de cardinalidad $l_i - 1$ de tal forma que $D - Z_i$ no contiene una trayectoria no trivial que conecte dos vértices de E_i . \square

Lema 3.11. Sea P un trayecto en D . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, tal que $l_i < |V(E_i)|$, se cumple que el conjunto $V(P) - V(E_i)$ contiene un E_i -separador de cardinalidad $l_i - 1$.

Demostración. Sea $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ tal que $l_i < |V(E_i)|$, entonces por el lema 3.10, tenemos que existe Z_i un E_i -separador de cardinalidad $l_i - 1$.

Por el Lema 3.3 P contiene l_i vértices de E_i y entonces claramente para cortar todas las $E_i E_i$ -trayectorias que son inducidas por P , se necesitan $l_i - 1$ vértices de $P - E_i$. Por lo tanto P contiene todos los $l_i - 1$ vértices de Z_i . \square

Teorema 3.17. Sea D una digráfica semicompleta extendida. Si a, b es un par de enteros positivos, tales que $\lambda(D) = a + b$, entonces existe una partición $\{A, B\}$ de tal forma que cumplen lo siguiente:

- (i) $\lambda(D[A]) = a$
- (ii) $\lambda(D[B]) = b$.

Demostración. Sea a, b un par de enteros positivos tales que $\lambda(D) = a + b$. Consideremos los dos siguientes casos posibles:

Caso 1: D es trayectable.

La prueba es igual al ejemplo 2 del capítulo 2.

Caso2: D no es trayectable.

Sean P un trayecto en D y a, b un par de enteros positivos, tales que $|V(P)| = \lambda(D) = a + b$.

Si $P = (x_1, x_2, \dots, x_a, x_{a+1}, \dots, x_{\lambda(D)})$, entonces sean $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_a)$ y $P_2 = (x_{a+1}, \dots, x_{\lambda(D)})$ dos trayectorias.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, definimos:

* $E_{i,1}$ como el conjunto de vértices de E_i que están en la trayectoria P_1 .

* $E_{i,2}$ como el conjunto de vértices de E_i que están en la trayectoria P_2 .

* $\eta_{i,j} = |E_{i,j}|$, para $j \in \{1, 2\}$.

Como D no es trayectable, podemos considerar $I = \{1, 2, \dots, s\}$ como el conjunto de índices i de tal forma que P no cubre todos los vértices E_i .

Por el lema 3.11 para cada $i \in I$, tenemos que $V(P)$ contiene un E_i -separador, Z_i de orden $l_i - 1$. Sean:

$$I_1 = \{i \in I \mid |Z_i \cap V(P_1)| \leq \eta_{i,1} - 1\} \quad \text{y} \quad I_2 = I - I_1.$$

Observación 01: Si $i \in I_2$, entonces $|Z_i \cap V(P_2)| \leq \eta_{i,2} - 1$.

Si $i \in I_2$, entonces $|Z_i \cap V(P_1)| \geq \eta_{i,1}$. Supongamos por contradicción que $|Z_i \cap V(P_2)| \geq \eta_{i,2}$, entonces $|Z_i| = |Z_i \cap V(P_1)| + |Z_i \cap V(P_2)| \geq \eta_{i,1} + \eta_{i,2} = l_i$, lo cual es imposible pues $|Z_i| = l_i - 1$.

Definimos $U_1 = \bigcup_{i \in I_1} (V(E_i) - V(P))$ y $U_2 = \bigcup_{i \in I_2} (V(E_i) - V(P))$, y también definimos:

$$A = V(P_1) \cup U_1 \quad \text{y} \quad B = V(P_2) \cup U_2.$$

Notemos que por construcción $\{A, B\}$ es una partición de $V(D)$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, definimos:

* $E'_{i,1} = E_i \cap A$

* $E'_{i,2} = E_i \cap B$

De la misma manera a la prueba de la proposición 6 y los lemas 3.10 y 3.11, se siguen las siguientes observaciones:

Observación A1: Si $i \in I_1$, entonces $Z_i \cap V(P_1)$ es un $E'_{i,1}$ -separador de orden a lo más $\eta_{i,1} - 1$.

Observación A2: Si $i \in I_2$, entonces $Z_i \cap V(P_2)$ es un $E'_{i,2}$ -separador de orden a lo más $\eta_{i,2} - 1$.

Ahora vamos a probar las siguientes afirmaciones para concluir la prueba del teorema:

Afirmación 1: $\lambda(D[A]) = a$.

Primero notemos que por definición P_1 es una trayectoria en $D[A]$ de orden $(\eta_{1,1} + \eta_{2,1} + \dots + \eta_{s,1} = a)$.

Por la observación A1 tenemos que, $Z_i \cap V(P_1)$ es un $E'_{i,1}$ -separador de orden a lo más $\eta_{i,1} - 1$, entonces por la proposición 6 tenemos que cualquier trayectoria en $D[A]$ cubre a lo más $\eta_{i,1}$ vértices de $E'_{i,1}$, para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Entonces finalmente concluimos que P_1 es un trayecto en $D[A]$ de orden a .

Afirmación 2: $\lambda(D[B]) = b$.

Primero notemos que por definición P_2 es una trayectoria en $D[B]$ de orden $(\eta_{1,2} + \eta_{2,2} + \dots + \eta_{s,2} = \lambda(D) - a = b)$.

Por la observación A2 tenemos que $Z_i \cap V(P_2)$ es un $E'_{i,2}$ -separador de orden a lo más $\eta_{i,2} - 1$, entonces por la proposición 6 tenemos que cualquier trayectoria en $D[B]$ cubre a lo más $\eta_{i,2}$ vértices de $E'_{i,2}$, para $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Entonces finalmente concluimos que P_2 es un trayecto en $D[B]$ de orden b .

□

Bibliografía

- [1] L. Lovász, On decomposition of graphs, *Studia Sci. Math, Hungar*, 1, 237 - 238, 1996.
- [2] M. Stiebitz, Decomposition graphs under degree constraints. *J. Graph Theory* 23 (1996), 321 - 324.
- [3] P. Hajnal, Graph partitions, Thesis, J.A. University, Szeged, 1984 (supervisada por L. Lovász).
- [4] J. Vronka, Vertex sets of graphs with prescribed properties Thesis, P.J. Sararik University, Kosice, 1986 (supervisada por P. Mihók).
- [5] J.M. Laborde, C. Payan y N.H. Wuong, *Independent sets and longest paths in digraphs*, Graphs and other combinatorial Topics, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium of Graph Theory, 1982, 173-177.
- [6] J.A. Bondy, Basic graph theory: paths and circuits, in: R.L. Graham, M. Grötschel y L. Lovász (Eds.), *Handbook of Combinatorics*, vol. 1, The MIT press, Cambridge MA, 1995, 3-110.
- [7] V. N. Lara, Seminúcleos de una digráfica, *Anales del instituto de matemáticas UNAM*, 1971.
- [8] J. Bang-Jensen, J. Huang, Quasi-transitive digraphs, *J. Graph Theory* 20 (1995) 141 - 161.
- [9] J. Bang-Jensen, J. Huang, A. Yeo, Strongly connected spanning subgraphs with the minimum number of arcs in quasi-transitive digraphs, *SIAM J. Discrete Math.* 16 (2003) 335 - 343.
- [10] Jørgen Bang-Jensen and Gregory Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer Verlag, London (2001).
- [11] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph theory*, 2008, Springer.

-
- [12] S. Van Aardt, G. Dlamini, J. Dunbar, M. Frick, O. Oellermann, The directed path partition conjecture, *Discussiones Math. Graph Theory* 25 (3) (2005) 331 - 343.
- [13] Jørgen Bang-Jensen and Morten Hegner Nielsen and Anders Yeo, Longest path-partitions in generalizations of tournaments, *Discrete Mathematics* 306 (2006) 1830 -1839.
- [14] L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae* 8 (1736), 128?140, *Opera Omnia Series* 1-7 (1766), 1?10.
- [15] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [16] J. Bang-Jensen, J. Huang, E. Prisner, In-tournament digraphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* 59 (2) (1993) 267?287. Elsevier.
- [17] M. Richardson, Solutions of irreflexive relations, *Annals of Math.* 58 (1953) 573?590.