



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

NÚMERO DE PERFORACIÓN, NÚMERO CROMÁTICO DE  
HIPERGRÁFICAS Y LA CONJETURA DE KATCHALSKI

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
BERTÍN HERNÁNDEZ TREJO

DIRECTOR DE LA TESIS  
DRA. DÉBORAH OLIVEROS BRANIFF  
IMATE-UNAM

MÉXICO, D.F. ABRIL 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia*

# Agradecimientos

Agradezco a mi directora de tesis Dra. Déborah Oliveros Braniff por todo el tiempo dedicado para la elaboración de este trabajo y por todo su apoyo en cada etapa de mi formación.

Agradezco también a los sinodales Dr. Luis Montejao Peimbert, Dr. Juan José Montellano Ballesteros, Dra. Gabriela Araujo Pardo, Dr. Rafael Villarroel Flores, por sus atinados comentarios y sugerencias para mejorar esta tesis.

Agradezco a todos los profesores que influyeron en mi formación durante mi estancia en la maestría.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca recibida durante la maestría.

Quiero agradecer también a mi familia por todo su apoyo, en especial a mi hermana María del Rosario Hernández Trejo, ya que sin ella no hubiera podido continuar con mis estudios. A mis amigos que siempre han estado al pendiente de mi y sobre todo a mi esposa e hijo que son el motor que mueve mi vida y hacen que todo el esfuerzo valga la pena.



# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Gráficas e hipergráficas</b>	<b>3</b>
1.1. Gráficas . . . . .	3
1.2. Hipergráficas . . . . .	8
<b>2. Teoremas tipo Helly</b>	<b>19</b>
2.1. Teorema de Helly . . . . .	19
2.2. El número de perforación . . . . .	20
2.3. Teoremas tipo Helly para número de perforación . . . . .	21
<b>3. Número de perforación y Número cromático</b>	<b>31</b>
3.1. Atando cabos . . . . .	31
<b>4. Resultados interesantes</b>	<b>35</b>
4.1. Algunos resultados conocidos . . . . .	35
4.2. Hipergráficas prohibidas . . . . .	37
<b>5. Conjeturas y conclusiones</b>	<b>41</b>
5.1. Número de perforación dos para familias de convexos en $\mathbf{R}^2$ . . . . .	41
5.2. Conjeturas y problemas . . . . .	43
5.3. Conclusiones . . . . .	44
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Introducción

Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de conjuntos en  $\mathbf{R}^d$  y  $m$  un entero positivo, decimos que  $\mathcal{F}$  es  $m$ -perforable si existen  $m$  puntos en  $\mathbf{R}^d$  tal que cualquier elemento de  $\mathcal{F}$  contiene al menos uno de estos  $m$  puntos. Al mínimo entero positivo  $m$  para el cual  $\mathcal{F}$  es  $m$ -perforable se le llama número de perforación de  $\mathcal{F}$ . El teorema de Helly (ver [1]) afirma que si  $\mathcal{F}$  es una familia finita de conjuntos convexos en  $\mathbf{R}^d$ , entonces  $\mathcal{F}$  es 1-perforable si y sólo si cualquier subfamilia de  $d + 1$  elementos tiene intersección no vacía o es 1-perforable.

Existen varias generalizaciones de este teorema, una de ellas ha dado lugar a lo que se conoce como teoremas tipo Helly, en los que dada una familia de conjuntos se trata de encontrar (si existe) una constante  $k$  que implique que si cualquier subfamilia de  $k$  elementos es  $m$ -perforable, entonces la familia es  $m$ -perforable.

Este tipo de teoremas son raros en la literatura y en 1982, Danzer y Grünbaum demostraron, que incluso para el caso de la familia de las cajas de dimensión  $d$  (paralelogramos con lados paralelos a los ejes coordenados) este teorema no siempre es cierto, sin embargo probaron que para que el número de perforación sea 2, es suficiente verificar que todo conjunto de  $3d$  cajas sea 2-perforable cuando la dimensión  $d$  es impar y que todo conjunto de  $3d - 1$  cajas lo sea para  $d$  par, es decir en este caso prueban que la constante  $k$  tiene estos valores. De hecho probaron un resultado más general que se verá en la sección 2.3. Posteriormente, en 1996 Meir Katchalski y David Nashtir también llegaron a varios resultados, uno de ellos afirma que si cualquier subfamilia con 9 elementos de una familia de triángulos homotéticos es 2-perforable entonces la familia completa es 2-perforable.

En esta tesis estudiaremos en particular el número de perforación 2 y utilizaremos como herramienta el concepto de número cromático para gráficas e hipergráficas.

Resulta interesante relacionar el número cromático de una gráfica y de una 3-hipergráfica uniforme, de hecho existe en la literatura una demostración alterna para el resultado de Danzer y Grünbaum mencionado anteriormente usando teoría de gráficas, lo que motivó a investigar:

1. La relación estrecha entre el número cromático y el número de perforación.



2. La existencia de características en hipergráficas con número cromático igual a dos.
3. Los problemas que existen en la literatura que relacionan esos temas, en particular el problema de los  $(n, d)$ -cuerpos, del que hablaremos más adelante.

Estudiamos concretamente la conjetura de Katchalski, en la que dada una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos se trata de encontrar un número  $k$  tal que si cualquier subfamilia de  $\mathcal{F}$  con  $k$  elementos es 2-perforable entonces la familia  $\mathcal{F}$  es 2-perforable.

En el capítulo 1 se da una revisión de los conceptos de gráficas e hipergráficas, incluyendo algunos resultados sobre el número cromático, entre ellos los de Lovász y Las Vergnas-Fournier.

En el capítulo 2 se da una introducción a los teoremas tipo Helly, el número de perforación y el problema de Katchalski.

En el capítulo 3 se estudia la relación entre el número cromático y el número de perforación en gráficas e hipergráficas. Se dan también algunas observaciones sobre el número de perforación 2 para familias de conjuntos convexos en  $\mathbf{R}^2$ .

En el capítulo 4 se muestran algunos resultados como el Teorema de Danzer y Grünbaum para cajas en  $\mathbf{R}^2$  con una demostración alterna dada por Pendavingh, Puite y Woeginger usando teoría de gráficas.

# Capítulo 1

## Gráficas e hipergráficas

### 1.1. Gráficas

**Definición 1.** Una *gráfica* es un par ordenado de conjuntos  $G = (V(G), E(G))$ , donde

(i)  $V(G)$  es un conjunto de vértices o puntos de  $G$ .

(ii)  $E(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V(G)$ , denominado conjunto de aristas de  $G$ .

Por simplicidad, al conjunto de vértices de  $G$  se denotará con  $V$  y cuando pueda haber motivo de confusión se denotará por  $V(G)$ . De manera similar, al conjunto de aristas se denotará como  $E$  o como  $E(G)$  si fuera necesario. Si en una gráfica dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  forman una arista, vamos a referirnos a esa arista por  $v_1v_2$  (o  $v_2v_1$ ) y diremos que  $v_1$  es adyacente a  $v_2$ .

Aún cuando el concepto de gráfica es puramente abstracto, podemos hacer un dibujo, tomando como puntos a los vértices y a las aristas como líneas que unen dos puntos. Así, si hay una curva que une dos vértices, se dice que dichos vértices son adyacentes. Muchas veces haremos referencia al dibujo como a la gráfica misma.

**Ejemplo 1.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica, que tiene como conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y conjunto de aristas  $E = \{12, 23, 34, 45, 14, 15, 25, 35, 45\}$ . En la Figura 1 se muestra un dibujo de la gráfica  $G$ .

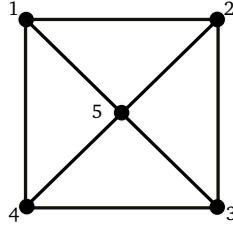


Figura 1.

Es importante mencionar que sólo se trabajará con gráficas simples, es decir, gráficas que no tienen lazos ni aristas múltiples.

**Definición 2.** Sean  $G = (V(G), E(G))$  y  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  dos gráficas. Si  $V(G_1) \subseteq V(G)$  y  $E(G_1) \subseteq E(G)$ , entonces diremos que  $G_1$  es una **subgráfica** de  $G$ .

Retomando el ejemplo 1, si la gráfica  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  es una gráfica tal que  $V(G_1) = V(G)$  y  $E(G_1) = \{12, 23, 34, 14, 15\}$ , entonces  $G_1$  es una subgráfica de  $G$ , ver la Figura 2. Sin embargo, si  $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ , con  $V(G_2) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E(G_2) = \{12, 23, 34, 14, 24\}$  (ver la Figura 3),  $G_2$  no es una subgráfica de  $G$ , porque la arista  $24 \notin E(G)$  y así  $E(G_2) \not\subseteq E(G)$ .

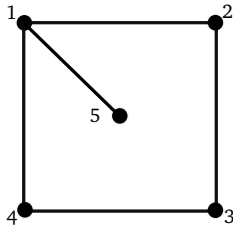


Figura 2.

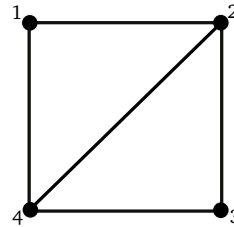


Figura 3.

**Definición 3.** Sea  $G'$  subgráfica de  $G$ . Si  $G'$  contiene todas las aristas  $xy \in E(G)$  con  $x, y \in V(G')$ , diremos que  $G'$  es una **subgráfica inducida** de  $G$ .

En la Figura 4 aparece una gráfica que es una subgráfica inducida de la gráfica  $G$  del ejemplo 1 y la gráfica mostrada en la Figura 2 no es una gráfica inducida de  $G$ .

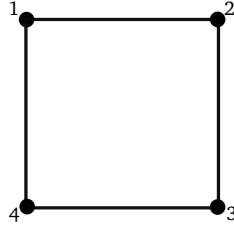


Figura 4.

**Definición 4.** Una *trayectoria* es una gráfica no vacía  $P = (V, E)$  de la forma  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  y  $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ , donde los  $x_i$ 's son todos distintos.

**Definición 5.** Si  $C_n$  es una gráfica con  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$  el conjunto de aristas, decimos que  $V(C_n)$  forma un  $n$ -*ciclo*. Si  $n$  es par, diremos que el ciclo es par, y si  $n$  es impar, diremos que el ciclo es impar.

**Definición 6.** Para  $k \geq 3$ , definimos el *anti-ciclo*  $\overline{C}_k$  como la gráfica con  $k$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , y existe una arista entre  $v_i$  y  $v_j$  con  $i \neq j$  si y sólo si  $2 \leq |i - j| \leq k - 2$ . Un anti-ciclo  $\overline{C}_k$  es impar si  $k$  es impar.

**Definición 7.** Una *gráfica completa* es aquella en la que todo par de vértices están unidos por una arista. La denotaremos por  $K_n$ , donde  $n$  es el número de vértices.

En la siguiente figura se muestra la gráfica completa con 5 vértices  $K_5$ .

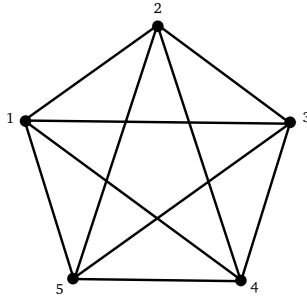


Figura 5.

**Definición 8.** Sea  $G = (V(G), E(G))$  una gráfica. La *gráfica complemento*  $\overline{G}$  de  $G$ , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G)$  y cuyas aristas son los pares de vértices no adyacentes de  $G$ .

Observe que el complemento de un anti-ciclo  $\overline{C}_n$  es el ciclo  $C_n$ .

**Definición 9.** Una gráfica  $G$  es llamada **gráfica de intervalos** o **gráfica de intersección de intervalos** si existe un conjunto  $\{I_v | v \in V(G)\}$  de intervalos en la recta real tal que  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$  si y sólo si  $uv \in E(G)$ .

**Ejemplo 2.** Sea  $G = (V, E)$  la gráfica dada por  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y cuyo conjunto de aristas es  $E = \{12, 23, 34, 13, 24\}$ , ver la Figura 6. La gráfica  $G$  es una gráfica de intervalos, ya que si consideramos los intervalos  $I_1 = [-2, 0]$ ,  $I_2 = [-1, 2]$ ,  $I_3 = [-1, 1]$  e  $I_4 = [-1, 2]$ , observamos que  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ ,  $I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$ ,  $I_3 \cap I_4 \neq \emptyset$ ,  $I_1 \cap I_3 \neq \emptyset$  e  $I_2 \cap I_4 \neq \emptyset$ ; además  $I_1 \cap I_4 = \emptyset$ . Ver la Figura 7.

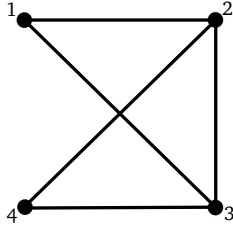


Figura 6.

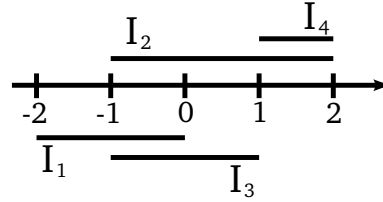


Figura 7.

De manera más general, dada una familia de conjuntos es posible definir su gráfica de intersección.

**Definición 10.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos en  $\mathbf{R}^d$ , la **gráfica de intersección**  $G_{\mathcal{F}}$  asociada a  $\mathcal{F}$ , se define como  $G_{\mathcal{F}} = (V, E)$ , donde

$$V = \mathcal{F} \text{ y } E = \{\{F_i, F_j\} | F_i, F_j \in \mathcal{F} \text{ y } F_i \cap F_j \neq \emptyset\}.$$

Definimos también la **gráfica de no intersección** de  $\mathcal{F}$  como la gráfica complemento  $\overline{G}_{\mathcal{F}}$  de  $G$ .

**Ejemplo 3.** Sea  $R$  el rectángulo  $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$ . Consideremos la familia de rectángulos trasladados del rectángulo  $R$ , dada por

$$\mathcal{F} = \{R_i | R_i = a_i + R, 1 \leq i \leq 4\},$$

donde  $a_1 = (1, 1)$ ,  $a_2 = (0, 2)$ ,  $a_3 = (2, 3)$  y  $a_4 = (6, 2)$ . Ver Figura 8. Sea  $\overline{G}_{\mathcal{F}}$  la gráfica de no intersección de  $\mathcal{F}$ , donde  $V(\overline{G}_{\mathcal{F}}) = \{1, 2, 3, 4\}$  y cada  $i$  es asociado al rectángulo  $R_i$ . Como  $R_1 \cap R_4 = R_2 \cap R_4 = \emptyset$ , entonces  $\{1, 4\}, \{2, 4\} \in E(\overline{G}_{\mathcal{F}})$ , ver la Figura 9. Es fácil ver que no hay otra arista.

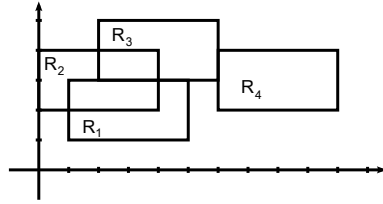


Figura 8.

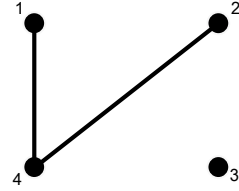


Figura 9.

**Definición 11.** Sean  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  y  $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$  dos gráficas. La *intersección* de  $G_1$  y  $G_2$ , denotada por  $G_1 \cap G_2$  es la gráfica  $G_1 \cap G_2 = (V(G_1) \cap V(G_2), E(G_1) \cap E(G_2))$ .

**Ejemplo 4.** Para las gráficas  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  y  $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ , con  $V(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $E(G_1) = \{x_1x_2, x_3x_4, x_2x_5, x_1x_5\}$ ,  $V(G_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  y  $E(G_2) = \{x_1x_2, x_3x_4, x_3x_5, x_1x_6\}$ . Entonces  $G_1 \cap G_2$  tiene por vértices al conjunto  $V_1$  y por aristas al conjunto  $\{x_1x_2, x_3x_4\}$ . Ver la Figura 10

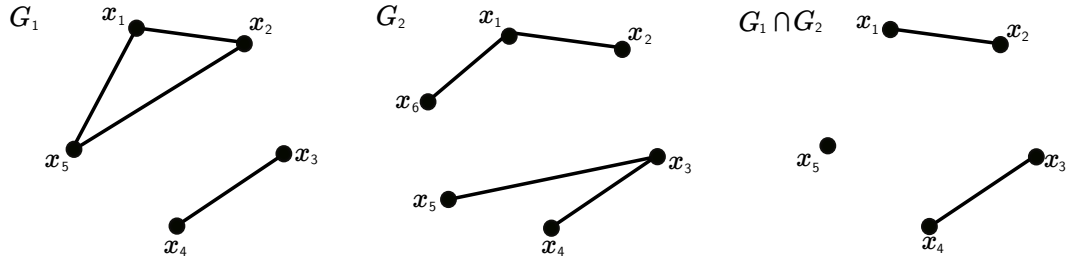


Figura 10.

**Definición 12.** Una *coloración por vértices* de una gráfica  $G = (V, E)$  es un mapeo o asignación  $c : V \rightarrow S$  tal que  $c(v) \neq c(w)$  siempre que  $v$  y  $w$  sean adyacentes. Los elementos del conjunto  $S$  son llamados colores y si  $|S| = k$  diremos que  $G$  tiene una  $k$ -coloración.

En adelante nos vamos a referir a ésta coloración por vértices sólo por coloración.

**Definición 13.** El *número cromático*  $\chi(G)$  de una gráfica  $G$  es el entero más pequeño  $k$ , tal que  $G$  tiene una  $k$ -coloración.

Las siguientes dos afirmaciones son fáciles de observar:

**Afirmación 1.** Todo ciclo par tiene número cromático igual a 2.

**Afirmación 2.** Todo ciclo impar tiene número cromático igual a 3.

Para gráficas con número cromático igual a 2 el siguiente resultado es cierto.

El siguiente teorema fue probado por König en 1936 (ver [10], p. 170) y caracteriza las gráficas cuyo número cromático es 2.

**Teorema 1.** Sea  $G$  una gráfica, entonces  $\chi(G) = 2$  si y sólo si  $G$  no tiene ciclos impares.

## 1.2. Hipergráficas

**Definición 14.** Una hipergráfica es un par  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  tal que

- (i)  $\mathcal{V}(\mathcal{H})$  es un conjunto de vértices o puntos
- (ii)  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$  es una colección de subconjuntos no vacíos de  $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ .

Diremos que  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica en  $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ .

La hipergráfica es simple si  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$  y  $E_1 \subseteq E_2$  implica  $E_1 = E_2$ . Los elementos de  $\mathcal{V}(\mathcal{H})$  son los vértices de la hipergráfica, mientras que los conjuntos de  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$  son las aristas de la hipergráfica.

El orden de la hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  es  $|\mathcal{V}(\mathcal{H})|$ . El número de aristas será denominado por  $m(\mathcal{H})$ . Si  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ , el rango es  $r(\mathcal{H}) = \max_j |E_j|$ .

**Ejemplo 5.** Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  donde  $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$  y  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5x_6, x_7\}$ , entonces  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica simple de orden 7, número de aristas  $m = 4$  y rango  $r(\mathcal{H}) = 3$ , que visualmente puede representarse de la siguiente manera.

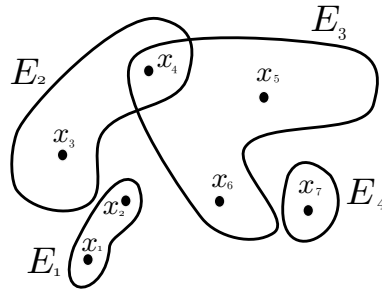


Figura 11.

Una hipergráfica simple tal que  $r = |E_1| = |E_2| = \dots = |E_m|$ , es llamada  $r$ -uniforme; haremos referencia a este tipo de hipergráfica como  $r$ -hipergráfica. En el presente trabajo sólo consideraremos los casos cuando  $r = 2$  y  $r = 3$ . Observe que cuando una hipergráfica es simple y  $r = 2$ , ésta coincide con el concepto de gráfica usual.

Una hipergráfica completa 3-uniforme de orden  $n$ , es una hipergráfica simple con  $n$  vértices en la que cada subconjunto de 3 vértices forma una arista de la hipergráfica y será denotada por  $K_n^3$ .

En la Figura 12 se muestra un ejemplo de una hipergráfica completa 3-uniforme con 4 vértices.

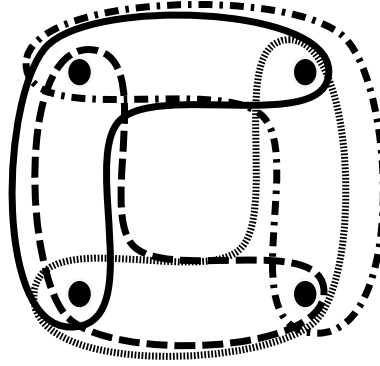


Figura 12.

**Definición 15.** Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  una hipergráfica, decimos que la hipergráfica  $\mathcal{H}' = (\mathcal{V}(\mathcal{H}'), \mathcal{E}(\mathcal{H}'))$  es una **subhipergráfica** de  $\mathcal{H}$  si  $\mathcal{V}(\mathcal{H}') \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{H})$  y  $\mathcal{E}(\mathcal{H}') \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{H})$ .

**Definición 16.** Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica, y sea  $k \geq 2$  un entero. Un **ciclo** de longitud  $k$  es una sucesión  $(x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, x_k, E_k)$  donde:

1.  $E_1, E_2, \dots, E_k$  son aristas distintas de  $\mathcal{H}$ ;
2.  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son vértices distintos de  $\mathcal{H}$ ;
3.  $x_i, x_{i+1} \in E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ );
4.  $x_k, x_1 \in E_k$ .

La sucesión  $x_1, E_1, x_1$  no es considerada un ciclo. Un ciclo de longitud  $k$  con  $k$  impar es llamado un ciclo impar, de manera análoga, un ciclo de longitud  $k$  donde  $k$  es par es llamado un ciclo par.



**Definición 17.** Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  una hipergráfica 3-uniforme. Definimos la 3-hipergráfica complemento de  $\mathcal{H}$ , denotada por  $\overline{\mathcal{H}} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}'(\mathcal{H}))$  como la 3-hipergráfica en la que  $\{x, y, z\} \in \mathcal{E}'(\mathcal{H})$  si y sólo si  $\{x, y, z\} \notin \mathcal{E}(\mathcal{H})$  para  $x, y, z \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$ .

De igual manera como se definió la gráfica de intersección y de no intersección de una familia  $\mathcal{F}$ , definiremos la hipergráfica de intersección y de no intersección para una familia  $\mathcal{F}$  dada.

**Definición 18.** Dada una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos en el plano  $\mathbf{R}^2$ , podemos asignar a  $\mathcal{F}$  una hipergráfica  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ , llamada **3-hipergráfica intersección asociada a la familia  $\mathcal{F}$** , donde para cada miembro de la familia  $\mathcal{F}$  le asignamos un vértice de  $\mathcal{H}$ , y decimos que tres vértices forman una arista de  $\mathcal{H}$  si los elementos de la familia, correspondientes a esos vértices, tienen un punto en común. Es decir,  $\mathcal{V}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$  y  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = \{\{F_i, F_j, F_k\} | F_i \cap F_j \cap F_k \neq \emptyset\}$ . Definimos la **3-hipergráfica de no intersección** como la 3-hipergráfica complemento  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ .

**Ejemplo 6.** Consideremos la familia de rectángulos  $\mathcal{F}$  del ejemplo 3.

Observe que la hipergráfica de no intersección  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  que se forma asignando un vértice  $i$  al elemento  $R_i$  de la familia  $\mathcal{F}$ , cumple  $R_1 \cap R_2 \cap R_4 = \emptyset$ , entonces  $\{1, 2, 4\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}})$ ; de manera similar puede verse que  $\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\} \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}})$  y la arista  $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{E}(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}})$  ya que  $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$ .

En la Figura 13 aparece la familia de rectángulos y en la Figura 14 aparece su hipergráfica de no intersección asociada.

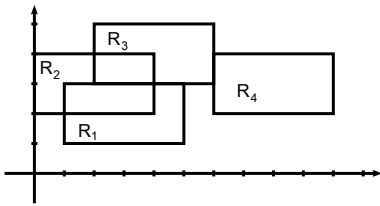


Figura 13.

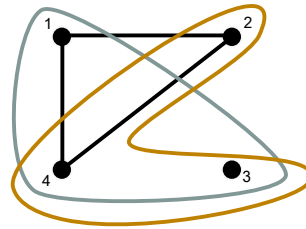


Figura 14.

**Definición 19.** Dada una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , una **coloración débil por vértices** para  $\mathcal{H}$  es un mapeo o una asignación  $C_W : \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , del conjunto de vértices  $\mathcal{V}$  al conjunto de colores  $\{1, 2, \dots, k\}$ , tal que los vértices de cada arista son no monocromáticos o reciben al menos dos colores.

En la literatura existe la noción de coloración fuerte, donde los vértices de una arista son heterocromáticos (todos los vértices de una arista tienen distinto

color) en esta tesis nos vamos a referir sólo a la coloración débil y la llamaremos simplemente coloración. El mínimo  $k$  tal que una hipergráfica  $\mathcal{H}$  admite una coloración con  $k$  colores es llamado el número cromático de  $\mathcal{H}$  y se denota por  $\chi(\mathcal{H})$ . Entenderemos por clase cromática al conjunto de vértices que tienen un mismo color.

En la Figura 15 aparece una hipergráfica donde se han coloreado los vértices usando dos colores, en la que ninguna arista es monocromática, es decir, es una hipergráfica 2-cromática.

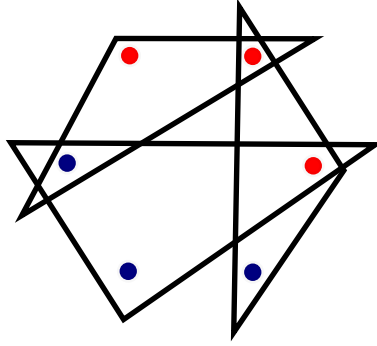


Figura 15.

A continuación daremos algunos resultados para el número cromático de hipergráficas.

**Proposición 1.** Si  $\mathcal{H}'$  es una subhipergráfica de una hipergráfica  $\mathcal{H}$ , entonces

$$\chi(\mathcal{H}') \leq \chi(\mathcal{H}).$$

**Teorema 2.** Si  $K_n^3$  es la hipergráfica completa 3-uniforme con  $n$  vértices, entonces

$$\chi(K_n^3) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

*Demostración.* Probaremos que  $\chi(K_n^3) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Sea  $\mathcal{V}(K_n^3) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Si  $n$  es par  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$ , si  $n$  es impar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$ . Queremos colorear  $K_n^3$  con  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  colores. Sea  $\mathcal{C} : \mathcal{V}(K_n^3) \rightarrow \{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\}$  la coloración dada por

$$\mathcal{C}(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & \text{si } i \text{ es impar} \\ \frac{i}{2} & \text{si } i \text{ es par} \end{cases}$$

por demostrar que ésta es una buena coloración. Sea  $r \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ , claramente existen sólo dos elementos  $x_l, x_s$  en  $\mathcal{V}(K_n^3)$  tales que  $\mathcal{C}(x_l) = \mathcal{C}(x_s) = r$ , por lo tanto no existen 3 vértices con el mismo color.

Supongamos ahora que existe una buena coloración con  $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  colores. Como cada 3 vértices de  $K_n^3$  forman una arista, cada clase cromática tiene a lo más 2 colores, por el principio de las casillas al tener  $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  colores con  $n$  vértices, entonces hay al menos un color asignado a 3 vértices, y por lo tanto una arista monocromática lo cual es una contradicción.  $\square$

**Definición 20.** Dada  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica 3-uniforme, diremos que una subhipergráfica  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}$  forma un **clan**, si  $\mathcal{H}'$  es por si misma una hipergráfica completa. Al orden de la subhipergráfica completa más grande de  $\mathcal{H}$  le llamaremos número de clan, y se representará por  $\omega(\mathcal{H})$ .

**Corolario 1.** Dada una hipergráfica  $\mathcal{H}$  de orden  $n$ ,  $\chi(\mathcal{H}) \geq \lceil \frac{\omega(\mathcal{H})}{2} \rceil$ .

*Demostración.* Por definición de clan, existe una subhipergráfica completa de orden  $\omega(\mathcal{H})$ , a saber  $K_{\omega(\mathcal{H})}^3$  de  $\mathcal{H}$  y por el Teorema 2,  $\chi(K_{\omega(\mathcal{H})}^3) = \lceil \frac{\omega(\mathcal{H})}{2} \rceil$ . Por ser  $K_{\omega(\mathcal{H})}^3$  subhipergráfica de  $\mathcal{H}$ ,  $\chi(\mathcal{H}) \geq \chi(K_{\omega(\mathcal{H})}^3) = \lceil \frac{\omega(\mathcal{H})}{2} \rceil$ .  $\square$

**Definición 21.** Diremos que una hipergráfica tiene la propiedad (1) si en cualquier ciclo impar, existen al menos 3 aristas que tienen un punto en común.

**Definición 22.** Diremos que una hipergráfica tiene la propiedad (2) si

- (i) 3 aristas que forman un ciclo de longitud 3 tienen un punto en común y
- (ii) para todo ciclo impar de longitud mayor que 3, existen dos aristas no consecutivas que se intersecan.

**Lema 1.** Las propiedades (1) y (2) son equivalentes.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) se sigue claramente.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Sea  $\gamma$  un ciclo que contradice (1), es decir, sea  $\gamma$  un ciclo tal que cualesquiera 3 aristas no tienen un punto en común; y sea  $\gamma_0$  el ciclo más pequeño que no cumple la propiedad (1). Entonces  $\gamma_0$  no puede ser de longitud 3. Sea  $\gamma_0 = (x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, x_l, E_l, x_1)$  con  $l > 3$ . De la hipótesis 2 (ii), 2 aristas no consecutivas se intersecan, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $E_1 \cap E_i \neq \emptyset$  para  $i \neq 1, 2, l$ . Sea  $x \in E_1 \cap E_i$ , entonces, por la hipótesis inicial,  $x \neq x_1, x_2, \dots, x_l$ , de modo que uno de los dos ciclos:

$$(x, E_1, x_2, E_2, \dots, x_i, E_i, x)$$

$$(x, E_i, x_{i+1}, E_{i+1}, \dots, x_l, E_l, x_1, E_1, x)$$

es un ciclo impar, contradiciendo la minimalidad de  $\gamma_0$ .  $\square$

El número cromático de gráficas ha sido extensamente estudiado desde su definición y el Teorema 1 determina qué tipo de gráficas tienen número cromático 2, pero para el caso del número cromático de hipergráficas no existe un teorema que dé una caracterización de éste estilo.

**Teorema 3** (Las Vergnas - Fournier [11]). *Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica tal que, siempre que  $E_1, E_2, \dots, E_{2k+1} \in \mathcal{H}$  y  $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$  ( $i = 1, 2, \dots, 2k$ ),  $E_{2k+1} \cap E_1 \neq \emptyset$ , entonces existe un punto que está en tres de las aristas  $E_1, E_2, \dots, E_{2k+1}$ . Entonces  $\mathcal{H}$  es 2-cromática.*

*Demostración.* Usaremos inducción sobre  $m$  (el número de aristas). Para  $m = 3$ , sea  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{E_1, E_2, E_3\}$ . Si existe  $x_0 \in \bigcap_{i=1}^3 E_i$  la coloración  $\mathcal{C} : \mathcal{V}(\mathcal{H}) \rightarrow \{1, 2\}$  dada por  $\mathcal{C}(x_0) = 1$ ,  $\mathcal{C}(x_i) = 2$  para  $x_i \neq x_0$  es una buena coloración. Ahora, si  $\bigcap_{i=1}^3 E_i = \emptyset$ , por hipótesis  $\mathcal{H}$  no tiene 3-ciclos y por consiguiente tiene dos aristas disjuntas, sin pérdida de generalidad supongamos que son  $E_1$  y  $E_2$ ; sea  $E_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ , la coloración  $\mathcal{C}$  dada por  $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(x_2) = 1$  y  $\mathcal{C}(x_i) = 2$  para  $i \neq 1, 2$  es una buena coloración. Por lo tanto  $\mathcal{H}$  es 2-cromática.

Supongamos cierto para  $m$  aristas y lo demostraremos para  $m + 1$ .

Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica con  $m + 1$  aristas y sea  $E_0 \in \mathcal{E}$  tal que  $\mathcal{H}_0 = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \setminus E_0)$  admite una bicoloración  $(A, B)$ .

Supongamos que  $\mathcal{H}$  no es bicromática, entonces podemos suponer que los vértices de  $E_0$  están en  $A$ .

Sean  $S \subseteq A$  y  $T \subseteq B$  tales que  $E_0 \subset S$ ,  $((A \setminus S) \cup T, (B \setminus T) \cup S)$  es una bicoloración de  $\mathcal{H}_0$ , y  $|S|$  es mínima con esas propiedades, es posible encontrar estos conjuntos, pues tomando  $S = A$  y  $T = B$  se satisface lo pedido.

Sea  $x \in E_0$ , definimos los conjuntos

$$U_1 = \{x\}, \mathcal{E}_1 = \{E \in \mathcal{E} \mid E \cap S \subset U_1, E \setminus T \subset A\},$$

$$V_1 = \left( \bigcup_{E \in \mathcal{E}_1} E \right) \cap T.$$

Y para  $i \geq 1$ , definimos

$$\mathcal{F}_i = \left\{ F \in \mathcal{E} \mid F \cap T \subset \bigcup_{k \leq i} V_k, F \cap U_k = \emptyset \text{ para todo } k \leq i, F \setminus S \subset B \right\},$$

$$U_{i+1} = \left( \bigcup_{F \in \mathcal{F}_i} F \right) \cap S,$$

$$\mathcal{E}_{i+1} = \left\{ E \in \mathcal{E} \mid E \cap S \subset \bigcup_{k \leq i+1} U_k, E \cap V_k = \emptyset \text{ para todo } k \leq i, E \setminus T \subset A \right\},$$

$$V_{i+1} = \left( \bigcup_{E \in \mathcal{E}_{i+1}} E \right) \cap T.$$

A partir de los conjuntos anteriores y tomando como base  $S_0 = S$  y  $T_0 = T$ , definimos

$$S_i = S \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq i} U_k, \quad i \geq 1,$$

$$T_i = T \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq i} V_k, \quad i \geq 1.$$

Observamos que, por construcción, cada  $\mathcal{F}_i$  es un conjunto de aristas que tienen un solo color en la bicoloración  $((A \setminus S_i) \cup T_i, (B \setminus T_i) \cup S_i)$ . Además, toda arista con un solo color pertenece a  $\mathcal{F}_i$ .

Del mismo modo,  $\mathcal{E}_{i+1}$  establece aristas con un solo color en

$$((A \setminus S_{i+1}) \cup T_i, (B \setminus T_i) \cup S_{i+1}).$$

Observamos también que los  $U_i$  están incluidos en  $S$  y son disjuntos a pares, del mismo modo los  $V_i$  en  $T$ .

Los términos de la sucesión  $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$  son vacíos a partir de cierto momento. Consideramos el primer término vacío como  $U_{w+1} = \emptyset$ , con  $w \geq 1$ . Entonces  $\mathcal{F}_w = \emptyset$ , porque si  $F \in \mathcal{F}_w$  se tendría  $F \cap S = \emptyset$  y  $F = F \setminus S \subset B$ . Así

$$((A \setminus S_w) \cup T_w, (B \setminus T_w) \cup S_w)$$

es una bicoloración de  $\mathcal{H}_0$ .

Como  $|S_w| < |S|$ , entonces  $E_0 \not\subseteq S_w$ , lo que nos lleva a  $E_0 \cap S_w = \emptyset$ , (de lo contrario,  $\mathcal{H}$  sería bicromática), o de nuevo  $E_0 \subset \bigcup_{1 \leq k \leq w} U_k$ .

Sea  $p_1$  el índice más pequeño mayor que cero tal que  $U_{p_1} \cap E_0 \neq \emptyset$  y sea  $F_1 \in \mathcal{F}_{p_1}$  tal que  $F_1 \cap E_0 \neq \emptyset$ .

Sea  $q_1$  el índice más pequeño mayor que cero tal que  $V_{q_1} \cap F_1 \neq \emptyset$  y sea  $E_1 \in \mathcal{E}_{q_1}$  tal que  $E_1 \cap F_1 \neq \emptyset$ .

Sea  $p_2$  el índice más pequeño tal que  $U_{p_2} \cap F_1 \neq \emptyset$ , y si  $p_2 > 1$ , continuamos el proceso hasta que  $p_{s+1} = 1$  con  $U_{p_{s+1}} \cap E_s \neq \emptyset$  y así,  $E_s \cap E_0 \neq \emptyset$ . Por lo tanto hemos construido un ciclo impar

$$E_0 F_1 E_1 \dots F_s E_s.$$

Si  $s = 1$ , sus tres aristas no pueden tener un punto en común para  $E_0 \subset S$ ,  $F_1 \cap U_{p_1}$  y  $E_1 \cap S \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{p_1+1}$ .

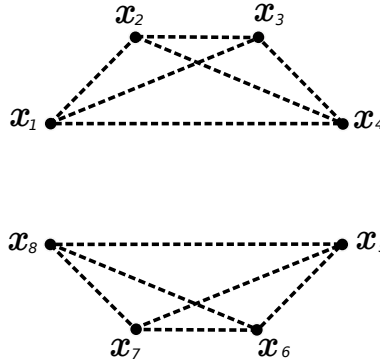
Si  $s > 1$ , dos aristas no consecutivas se intersecan, ambas distintas a  $E_0$ , y sólo se intersecan fuera de  $S$  y  $T$ , pues  $p_1 > q_1 \geq p_2 > q_2 \geq \dots$ . Más aún, ellas son de la misma naturaleza, es decir, las dos de  $E_i$  o las dos de  $F_i$ , porque  $E_i \setminus S \setminus T \subset A$  y  $F_i \setminus S \setminus T \subset B$ .

Supongamos que el ciclo no contradice la condición (ii) del lema 1, y sean dos aristas de índices  $i$  y  $j$  tales que  $|i - j|$  sea mínimo, nombremos a estas aristas  $E_i$  y  $E_j$ . Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $j > i$ , el ciclo impar  $E_i F_i E_{i+1} \dots E_{j+1} E_j$ , si es de longitud 3 contradice la condición (ii) del lema 1; pero  $E_i \setminus S \setminus T$  y  $E_{i+1} \setminus S \setminus T$  son subconjuntos de  $A$ , y  $F_i \setminus S \setminus T \subset B$ , si no, el ciclo contradice la condición (ii) del lema 1, pero  $j - i$  es mínimo con la propiedad de no tener aristas no consecutivas intersecándose.  $\square$

Una de las consecuencias de este teorema es que una hipergráfica sin ciclos impares es 2-cromática. La implicación inversa es falsa, a continuación exhibimos un contraejemplo.

**Ejemplo 7.** Consideremos la hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , dada por el complemento de las dos hipergráficas mostradas en la Figura 16, es decir  $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$  y  $\mathcal{E} = \{\{x_i, x_j, x_k\} : (i \in I; j, k \in J) \text{ o } (i \in J; j, k \in I)\}$ , donde  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $J = \{5, 6, 7, 8\}$ .

Observemos que si  $i, j, k \in I$  o  $i, j, k \in J$  entonces  $\{x_i, x_j, x_k\} \notin \mathcal{E}$ . De este modo al colorear los vértices  $x_1, x_2, x_3, x_4$  con un color y las aristas  $x_5, x_6, x_7, x_8$  con otro color no se tienen aristas monocromáticas, por lo tanto  $\mathcal{H}$  es 2-cromática. Pero  $\mathcal{H}$  tiene un 5-ciclo en el que ningún vértice está en tres aristas, a saber  $C = (x_7, \{x_8, x_1, x_7\}, x_1, \{x_1, x_2, x_8\}, x_2, \{x_2, x_5, x_6\}, x_5, \{x_3, x_4, x_5\}, x_3, \{x_3, x_4, x_7\})$ .



**Figura 16.** Complemento de la hipergráfica  $\mathcal{H}$  del ejemplo 7.

En 2007 David Défossez (ver [13]) mejoró el resultado de Las Vergnas-Fournier. De hecho probó la conjetura de Sterboul que establece que una hipergráfica es bicolorable siempre que no contenga ciertos ciclos específicos. A continuación damos una definición y el resultado principal de su artículo.

**Definición 23.** Un ciclo impar  $(x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, E_k, x_1)$  tal que dos aristas no consecutivas son disjuntas y  $|E_i \cap E_{i+1}| = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ , es llamado un ciclo anti-Sterboul.

**Teorema 4** (D. Défossez). Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica sin ciclos anti-Sterboul, entonces  $\mathcal{H}$  es 2-cromática.

Otro resultado donde se da una condición suficiente para que una hipergráfica tenga número cromático dos fue dado por Lovász que mencionamos a continuación.

Diremos que una hipergráfica tiene la *propiedad de Lovász* si la unión de cualesquiera  $k$  aristas tiene al menos  $k + 1$  vértices.

**Ejemplo 8.** Consideremos las hipergráficas  $\mathcal{H}_1 = (\mathcal{V}(\mathcal{H}_1), \mathcal{E}(\mathcal{H}_1))$ ,  $\mathcal{H}_2 = (\mathcal{V}(\mathcal{H}_2), \mathcal{E}(\mathcal{H}_2))$  y  $\mathcal{H}_3 = (\mathcal{V}(\mathcal{H}_3), \mathcal{E}(\mathcal{H}_3))$  con  $\mathcal{V}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{V}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{V}(\mathcal{H}_3) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_1) = \{\{1, 2, 3\}\}$ ,  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_2) = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ ,  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_3) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ . Para  $\mathcal{H}_1$  podemos tomar sólo  $k = 1$ , y  $|\{1, 2, 3\}| = 3 > 2 = k + 1$ . Para  $\mathcal{H}_2$ , el caso  $k = 1$  se reduce al caso de  $\mathcal{H}_1$ , y cuando  $k = 2$ ,  $|\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4 > 3 = k + 1$ . Para  $\mathcal{H}_3$ , los casos  $k = 1, 2$  son análogos a los de  $\mathcal{H}_2$ ; si  $k = 3$ ,  $|\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 4\}| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4 = k + 1$ . Por lo tanto  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_3$  cumplen la propiedad de Lovász.

**Ejemplo 9.** Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  una hipergráfica, con  $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  y  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{\{x_i, x_j, x_k\} : i, j, k \in I\} \setminus \{x_2, x_4, x_5\}$ , con  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mathcal{H}$  se muestra en la Figura 17, siendo la arista sombreada la única que no está. Sean  $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E_2 = \{x_1, x_2, x_4\}$ ,  $E_3 = \{x_1, x_2, x_5\}$  y  $E_4 = \{x_2, x_3, x_5\}$  en  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ , tomando  $k = 4$ , vemos que  $|E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4| = |\{x_1, x_2, x_3, x_5\}| = 4$  y  $4 < k + 1 = 5$ . Por lo tanto  $\mathcal{H}$  no cumple la propiedad de Lovász.

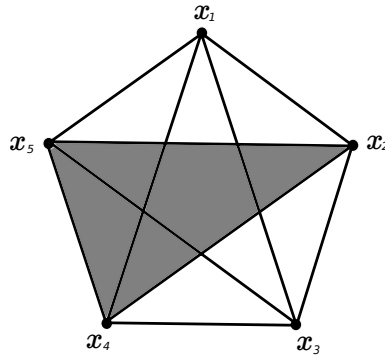


Figura 17.

**Teorema 5** (Lovász [12]). *Si una hipergráfica tiene la propiedad de Lovász entonces es 2-cromática.*

El siguiente ejemplo muestra que la implicación contraria no es válida.

**Ejemplo 10.** La hipergráfica  $\mathcal{H}$  del ejemplo 9 satisface que  $\chi(\mathcal{H}) = 2$  pero no cumple la propiedad de Lovász. Veremos que  $\mathcal{H}$  es 2-cromática. Al estar  $\{x_1, x_2, x_3\}$  en  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ ,  $\chi(\mathcal{H}) \geq 2$ , además al asignarle un mismo color a los vértices  $x_2, x_4, x_5$  y otro color a los vértices  $x_1$  y  $x_3$  de  $V(\mathcal{H})$  se tiene una coloración sin aristas monocromáticas. De manera que  $\chi(\mathcal{H}) = 2$ .





# Capítulo 2

## Teoremas tipo Helly

### 2.1. Teorema de Helly

**Teorema 6** (Teorema de Helly [1]). *Una familia finita de conjuntos convexos compactos en el espacio euclidiano  $d$ -dimensional tiene intersección no vacía si y sólo si cualquier subfamilia de ésta que consista de  $d + 1$  elementos tiene intersección no vacía.*

El Teorema de Helly ha dado lugar a muchas generalizaciones de diversos índoles, una de estas se conoce como problemas tipo Helly o teoremas tipo Helly-Gallai y rescatan la estructura del teorema de Helly.

En el artículo “Helly’s theorem and it’s relatives” [2], uno de los citados más estudiados en geometría discreta, Danzer, Grünbaum y Klee definen un *problema tipo Helly* de la siguiente manera. Suponga que  $X$  es un espacio dado y  $\mathcal{B}$  una propiedad hereditaria de familias de subconjuntos de  $X$ . Esto es,  $\mathcal{B}$  es una clase de familias de subconjuntos de  $X$ , y  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \in \mathcal{B}$  implica  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$ . Para cada cardinal  $\kappa$ , se define la propiedad  $\mathcal{B}_\kappa$  acordando que  $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_\kappa$  siempre que  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$  cuando  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$  y  $|\mathcal{F}| < \kappa + 1$ . Así, un problema tipo Helly es el que consiste en encontrar condiciones bajo las cuales una familia  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\kappa$  implique que  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\lambda$ , donde  $\kappa$  y  $\lambda$  son cardinales con  $\kappa < \lambda$ .

Un problema más general es el llamado *tipo Helly-Gallai*. Suponga que se tienen  $X, \mathcal{B}, \kappa, \lambda$  y condiciones sobre  $\mathcal{F}$ . El hecho de que  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\kappa$  no implica que  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\lambda$ , sin embargo cada  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\kappa$  puede dividirse en subfamilias con la propiedad  $\mathcal{B}_\lambda$ . El problema es determinar el cardinal más pequeño  $\phi$  tal que toda familia  $\mathcal{F}$  que satisface las condiciones dadas y tiene la propiedad  $\mathcal{B}_\kappa$  puede dividirse en  $\phi$  (o menos) subfamilias cada una con la propiedad  $\mathcal{B}_\lambda$ .

Se han considerado en la literatura muchos problemas de este tipo restringidos algunos a subconjuntos convexos de ciertos espacios. En general este tipo de teoremas casi nunca existen.

A continuación discutiremos uno de estos problemas que ha despertado el interés de varios matemáticos.

## 2.2. El número de perforación

**Definición 24.** Dada una familia finita  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos en  $\mathbf{R}^d$ , decimos que  $\mathcal{F}$  es  $m$ -perforable si existe un conjunto de  $m$  puntos, tal que cada miembro de la familia contiene al menos uno de los puntos. El número de perforación  $\Pi(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$ , es el mínimo número  $m$  tal que  $\mathcal{F}$  es  $m$ -perforable.

Para la familia  $\mathcal{F}$  mostrada en la Figura 18, como  $F_3 \cap F_4 \cap F_5 \neq \emptyset$  podemos perforar a estos tres elementos  $\mathcal{F}$  con un solo punto,  $F_1, F_2$  con otro punto y por último  $F_6$  con otro punto, por lo que el número de perforación es a lo más 3, y al ser  $F_1, F_3$  y  $F_6$  disjuntos se necesitan al menos 3 puntos para perforar  $\mathcal{F}$ , así que  $\Pi(\mathcal{F}) = 3$ .

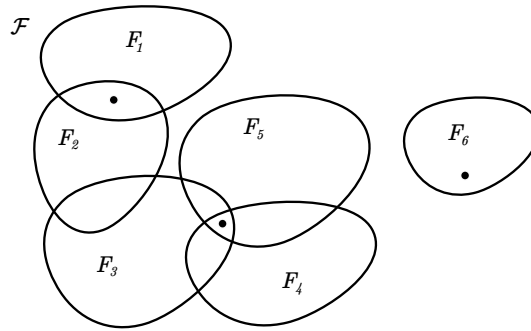


Figura 18.

Una familia de conjuntos es  $\Pi^m$  si  $\Pi(\mathcal{F}) = m$ . Diremos que la familia  $\mathcal{F}$  es  $\Pi_k^m$  si cada subfamilia de tamaño  $k$  o menor, satisface ser  $\Pi^m$ .

Con este concepto, el Teorema de Helly en el plano  $\mathbf{R}^2$  dice que para familias de conjuntos convexos en el plano  $\Pi_3^1$  implica  $\Pi^1$ .

**Definición 25.** Una *caja*  $d$ -dimensional es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados.

La familia del ejemplo 3 es una familia de cajas.

### 2.3. Teoremas tipo Helly para número de perforación

En esta sección daremos un compendio de teoremas tipo Helly para perforación principalmente para perforación dos y tres. Y observaremos que estos teoremas son difíciles de obtener.

En 1982 Danzer y Grünbaum probaron la existencia de teoremas tipo Helly con la propiedad de perforación para cajas en dimensiones 1 y 2, y algunos casos de dimensión  $d$  y probaron en general la no existencia (mediante construcciones) de teoremas tipo Helly para cajas en  $\mathbf{R}^d$ . En particular demostraron el siguiente teorema.

Denotamos por  $h(d, n)$  al entero más pequeño tal que  $\Pi_h^n$  implica  $\Pi^n$ .

**Teorema 7.** *Para  $d$  y  $n$  números enteros positivos se tiene*

- (i)  $h(d, 1) = 2$  para todo  $d(d \geq 1)$ ;
- (ii)  $h(1, n) = n + 1$  para todo  $n$ ;
- (iii)

$$h(d, 2) = \begin{cases} 3d & \text{para } d \text{ impar} \\ 3d - 1 & \text{para } d \text{ par} \end{cases}$$

- (iv)  $h(2, 3) = 16$ ;
- (v)  $h(d, n) = \aleph_0$  para  $d \geq 2, n \geq 3$  y  $(d, n) \neq (2, 3)$ .

En la siguiente tabla aparecen los valores de  $h$ .

d \ n	1	2	3	4	5	6	2m	2m+1
1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	3	5	9	11	15	17	$6m - 1$	$6m + 3$
3	4	16	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
4	5	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
5	6	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
n	$n + 1$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$

**Observación 1.** Es importante recalcar que (i)  $h(d, 1) = 2$  implica que para el caso de cajas basta pedir que de dos en dos se intersequen para que toda la familia se interseque.

En particular nosotros estamos interesados en conjuntos convexos en el plano y tratar de averiguar si existen familias y teoremas tipo Helly para perforación 2 y 3. Así remarcamos que el teorema anterior para dimensión 2 dice lo siguiente:

**Teorema 8.** *Para familias  $\mathcal{F}$  de cajas en  $\mathbf{R}^2$  con lados paralelos a los ejes, si  $\mathcal{F}$  es  $\Pi_5^2$ , entonces  $\mathcal{F}$  es  $\Pi^2$ .*

En el capítulo 4 se da una demostración de este hecho, dada por Rudi Pen-davingh, Quintijn Puite y Gerhard J. Woeginger [7] usando teoría de gráficas.

Más tarde Meir Katchalski y David Nashtir ([4],[5]) abordaron el problema de ver si existe algún  $k$  tal que  $\Pi_k^2$  implique  $\Pi^2$  para familias planares de conjuntos convexos y en 1996 [4] probaron el siguiente Teorema tipo Helly para triángulos homotéticos.

**Teorema 9.** *Si  $\mathcal{A}$  es cualquier familia de triángulos homotéticos en  $\mathbf{R}^2$ , entonces  $\Pi_9^2$  implica  $\Pi^2$ .*

Antes de empezar la demostración definiremos algunos conceptos.

- Dos semiplanos están relacionados si uno de ellos contiene al otro. Dos semiplanos relacionados están ordenados por la inclusión, de este modo el más pequeño está contenido en el más grande.
- Un  $n$ -ágono convexo  $B$  está relacionado a un  $m$ -ágono convexo  $A$  si cada uno de los  $n$ -semiplanos cuya intersección es igual a  $B$ , está relacionado con uno de los  $m$ -semiplanos cuya intersección es igual a  $A$ .
- Una familia  $\mathcal{B}$  está relacionada con  $A$  si cualquier elemento de  $\mathcal{B}$  está relacionado con  $A$ .

Con la notación anterior observamos que un triángulo  $B$  está relacionado a un triángulo  $A$  si y sólo si  $B$  es homotético a  $A$ .

Diremos que un conjunto  $Q$  perfora a un conjunto  $A$  si  $A \cap Q \neq \emptyset$ . El conjunto  $Q$  perfora a la familia de conjuntos  $\mathcal{A}$  si éste perfora a cada conjunto  $A \in \mathcal{A}$ , y  $x$  perfora  $\mathcal{A}$  si  $\{x\}$  perfora  $\mathcal{A}$ . Denotaremos por  $X^+$  al semiplano cuya frontera es la línea  $X$ .

Sea  $\mathcal{A}$  una familia de triángulos relacionados a un triángulo  $T$  dado que satisface  $\Pi_9^2$ .

Sea  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ , con  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $A_i = H_i^+ \cap V_i^+ \cap D_i^+$ , y  $\{H_i^+ : i \in I\}$ ,  $\{D_i^+ : i \in I\}$ ,  $\{V_i^+ : i \in I\}$  son familias de semiplanos relacionados.

Dado  $A = A_i$ , denotemos por  $D^+(A) = D_i^+$ ,  $H^+(A) = H_i^+$  y  $V^+(A) = V_i^+$ .

Para  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ , sean  $D^+(\mathcal{C}) = \min\{D^+(A) : A \in \mathcal{C}\}$ ,  $H^+(\mathcal{C}) = \min\{H^+(A) : A \in \mathcal{C}\}$  y  $V^+(\mathcal{C}) = \min\{V^+(A) : A \in \mathcal{C}\}$ .

Denotemos por  $D^+ = D^+(\mathcal{A})$ ,  $H^+ = H^+(\mathcal{A})$ , y  $V^+ = V^+(\mathcal{A})$ , con  $D^+ = D^+(T_1)$ ,  $H^+ = H^+(T_3)$  y  $V^+ = V^+(T_2)$ , para algún  $T_1, T_2$  y  $T_3$  que cumplen ser mínimo en cada dirección. Ver la Figura 19

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A}$  una familia de triángulos relacionados a un triángulo  $T$  dado que satisface  $\Pi_3^2$ .

Sea  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$  y sean  $a_1 = H \cap V$ ,  $a_2 = H \cap D$  y  $a_3 = V \cap D$ .

Podemos asumir que  $\mathcal{A}$  no es  $\Pi^1$ , ya que si lo fuera se sigue el resultado inmediatamente.

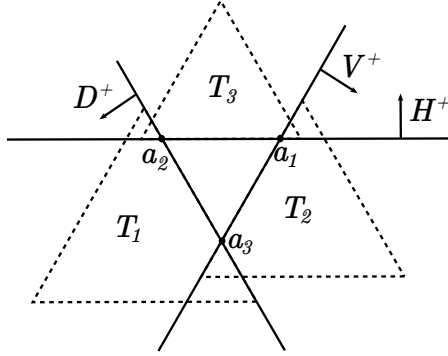


Figura 19.

**Afirmación 1.** Para  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ , existe una subfamilia  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  tal que  $|\mathcal{C}'| \leq 3$  y  $\cap \mathcal{C}' = \cap \mathcal{C}$ .

*Demostración:* Ésta afirmación es cierta, pues  $\cap \mathcal{C} = D^+(\mathcal{C}) \cap H^+(\mathcal{C}) \cap V^+(\mathcal{C})$  y si  $D^+(\mathcal{C}) = D^+(F)$ ,  $H^+(\mathcal{C}) = H^+(G)$ , y  $V^+(\mathcal{C}) = V^+(K)$  con  $\mathcal{C}' = \{F, G, K\} \subset \mathcal{C}$ , entonces  $\mathcal{C}'$  satisface la observación.  $\square$

**Afirmación 2.** Si  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  y  $x$  perfora a una subfamilia  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , con  $\{T_i, T_j\} \subseteq \mathcal{B}$ , entonces  $a_k$  perfora  $\mathcal{B}$ .

*Demostración:* Sin pérdida de generalidad  $x$  perfora  $\mathcal{B}$ , con  $\{T_1, T_2\} \subseteq \mathcal{B}$  y  $A \in \mathcal{B}$  arbitrario, entonces  $x \in A \cap T_1 \cap T_2$ . Entonces  $x \in D^+ \cap V^+$ , y como  $T_1 \cap T_2 \subset D^+ \cap V^+$ , esto implica que  $a_3 \in A$ ; de otro modo  $A \cap D^+ \cap V^+ = \emptyset$  contradiciendo que  $\mathcal{B}$  es 1-perforable. Como  $A \in \mathcal{B}$  fue arbitrario, se sigue la afirmación.  $\square$

Consideremos ahora la familia  $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A} : a_i \in A\}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Notemos que  $T_i \in \mathcal{A}_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Afirmación 3.** Para  $i = 1$  o  $2$  o  $3$ ,  $\mathcal{A}_i$  es  $\Pi^1$ .

*Demostración:* Demostraremos ésta afirmación por contradicción. Supongamos que  $\cap \mathcal{A}_i = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ , de la afirmación 1 se sigue que para  $i = 1, 2, 3$ , existe un  $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ , con  $|\mathcal{C}_i| \leq 3$ , tal que  $\cap \mathcal{C}_i = \cap \mathcal{A}_i = \emptyset$ , y  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ .

Sea  $S = \mathcal{T} \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ . Entonces  $|S| \leq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$  (pues  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ ). Como  $\mathcal{A}$  es  $\Pi_3^2$ ,  $\mathcal{T}$  y  $S$  son  $\Pi^2$ . Por lo tanto un conjunto  $\{x, y\}$  perfora  $S$ .

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que  $x$  perfora  $\{T_1, T_2\}$ . De la afirmación 2,  $\{a_3, y\}$  perfora  $S$  y  $y$  perfora  $\mathcal{C}_3$ , lo cual es una contradicción, pues  $\cap \mathcal{C}_3 = \emptyset$ , quedando demostrada la afirmación.  $\square$

Por último, tenemos que  $\mathcal{A}_i$  es  $\Pi^1$  para  $i = 1$  ó  $2$  ó  $3$ , así el punto que perfora  $\mathcal{A}_i$  junto con  $a_i$  es una 2-perforación para  $\mathcal{A}$ .  $\square$

En la Figura 20 se muestran familias de triángulos equiláteros, las cuales satisfacen  $\Pi_k^2$  para  $k = 4, 5, 6, 7$  pero no satisfacen ser  $\Pi^2$ :

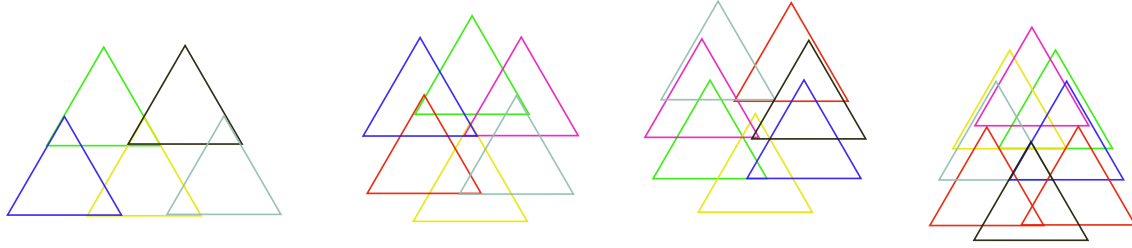


Figura 20.

El caso  $k = 8$  se muestra a continuación.

Sea  $T = \{(x, y) : x \geq 0, y - \sqrt{3}x \geq 0, y + \sqrt{3}x \leq 10\}$  un triángulo equilátero y sea  $\mathcal{F} = \{A_i = a_i + T : 1 \leq i \leq 9\}$  la familia de triángulos equiláteros trasladados del triángulo  $T$ , con

$$\begin{array}{lll} a_1 = \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, 1\right) & a_4 = \left(-\frac{8}{\sqrt{3}}, -2\right) & a_7 = \left(-\frac{7}{\sqrt{3}}, -3\right) \\ a_2 = \left(-\frac{6}{\sqrt{3}}, 0\right) & a_5 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\right) & a_8 = \left(-\frac{3}{\sqrt{3}}, -3\right) \\ a_3 = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right) & a_6 = \left(-\frac{10}{\sqrt{3}}, -3\right) & a_9 = (0, -3) \end{array}$$

Consideremos los puntos

$$\begin{array}{llll} p_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right) & p_3 = \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, 1\right) & p_5 = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right) & p_8 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\right) \\ p_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right) & p_4 = \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, 1\right) & p_6 = (0, 0) & p_9 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\right) \\ & & p_7 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right) & p_{10} = (0, -3) \end{array}$$

Ver la Figura 21. Sean  $\bar{A}(i) = \mathcal{F} \setminus \{A_i\}$ , para  $1 \leq i \leq 9$ . Entonces

$$\begin{array}{lll}
 \{p_6, p_{10}\} \in \overline{A}(1) & \{p_2, p_{10}\} \in \overline{A}(4) & \{p_3, p_7\} \in \overline{A}(7) \\
 \{p_4, p_8\} \in \overline{A}(2) & \{p_1, p_{10}\} \in \overline{A}(5) & \{p_4, p_5\} \in \overline{A}(8) \\
 \{p_3, p_9\} \in \overline{A}(3) & \{p_4, p_6\} \in \overline{A}(6) & \{p_3, p_6\} \in \overline{A}(9)
 \end{array}$$

Así,  $\mathcal{F}$  es  $\Pi_8^2$ . Para ver que  $\mathcal{F}$  no es  $\Pi^2$ , observemos que  $A_1 \cap A_6 \neq \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_9 \neq \emptyset$ ,  $A_6 \cap A_9 = \{p_{10}\}$ , entonces un conjunto  $B$  de dos elementos que perfore  $\mathcal{F}$  contiene uno de los puntos  $x \in A_1 \cap A_6$ ,  $y \in A_1 \cap A_9$  ó  $p_{10}$ . Pero  $(A_1 \cap A_6) \notin (A_3 \cup A_7 \cup A_9)$  y  $A_3 \cap A_7 \cap A_9 = \emptyset$ , así  $x \notin B$  para todo  $x \in A_1 \cap A_6$ ;  $(A_1 \cap A_9) \notin (A_2 \cup A_6 \cup A_8)$  y  $A_2 \cup A_6 \cup A_8 = \emptyset$ , así  $y \notin B$  para todo  $y \in A_1 \cap A_9$ ;  $p_{10} \notin (A_1 \cup A_4 \cup A_5)$  y  $A_1 \cup A_4 \cup A_5 = \emptyset$ , así  $p_{10} \notin B$ . Por lo tanto no existe ningún conjunto de dos elementos que perfore  $\mathcal{F}$ .

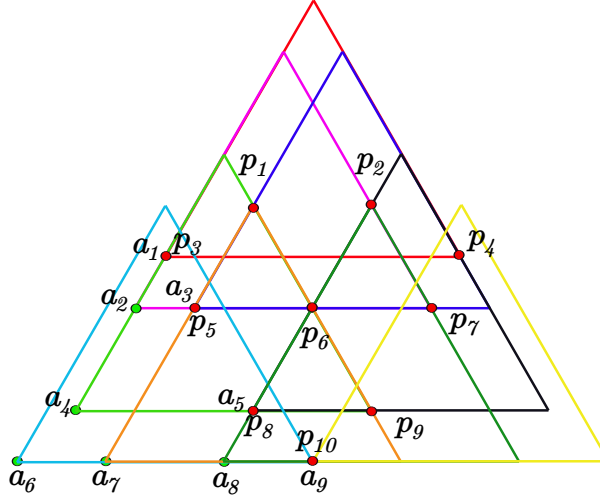


Figura 21.

**Teorema 10.** *Para familias de hexágonos convexos simétricos no existe  $k_0$  tal que  $\Pi_{k_0}^2$  implique  $\Pi^2$ .*

*Demostración.* A continuación se muestra la construcción de una familia de hexágonos trasladados y después veremos que tal familia es  $\Pi_{2k+2}^2$  pero no  $\Pi^2$  para todo  $k$  entero positivo.

Considere un cuadrado de  $2 \times 2$  con lados paralelos a los ejes. Sean  $c$  y  $f$  vértices opuestos con  $f$  arriba y a la derecha de  $c$ . Sean  $a, b, d$  y  $e$  los puntos medios de los cuatro lados del cuadrado con  $a$  arriba de  $d$  y  $e$  a la derecha de  $b$ . Definimos el hexágono  $H$  como el hexágono que se forma con los vértices  $a, b, c, d, e$  y  $f$ . Ver la Figura 22.



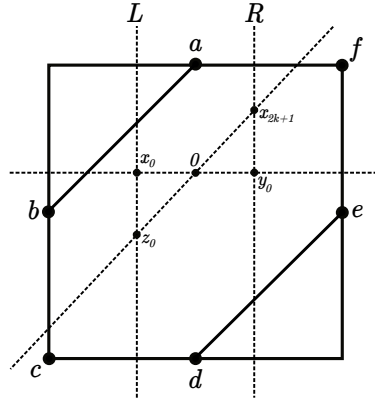


Figura 22.

Sean  $L$  y  $R$  dos líneas verticales, que atraviesan el hexágono, con una separación de 1,  $L$  a la izquierda de  $R$ . Sean  $x_0$  y  $y_0$  dos puntos de una línea horizontal con  $x_0$  en  $L$  y  $y_0$  en  $R$ . Sea  $k$  un entero positivo y sean  $z_0$  en  $L$  y  $x_{2k+1}$  en  $R$  tales que ambos están en la línea de pendiente 1 que contiene al punto medio  $0$  del segmento que une  $x_0$  y  $y_0$ .

Sean  $x_1, \dots, x_k$  en  $L$  entre  $x_0$  y  $z_0$ , con  $x_{i+1}$  por debajo de  $x_i$  para  $1 \leq i \leq k-1$ . Sean  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k}$  en  $R$  entre  $y_0$  y  $x_{2k+1}$ , con  $x_{k+i+1}$  por arriba de  $x_{k+i}$  para  $1 \leq i \leq k$ , ver la Figura 23.

Definimos los hexágonos trasladados  $A_1, A_2, \dots, A_{2k+1}, C_1$  y  $C_2$  de  $H$  como sigue:

El lado  $ab$  de  $A_i$  contiene a  $x_i$  para  $1 \leq i \leq k$ . El lado  $ab$  de  $A_{k+1}$  contiene  $0$ . El lado  $af$  de  $A_1$  contiene  $0$ . El lado  $af$  de  $A_i$  contiene  $x_{i+k-1}$  para  $2 \leq i \leq k+1$ . El lado  $ed$  de  $A_i$  contiene  $x_i$  para  $k+2 \leq i \leq 2k+1$ . El lado  $cd$  de  $A_{k+i+1}$  contiene  $x_{i-1}$  para  $1 \leq i \leq k$ . El vértice  $e$  de  $C_1$  es  $x_k$  y el vértice  $c$  de  $C_2$  es  $x_{k+1}$ .

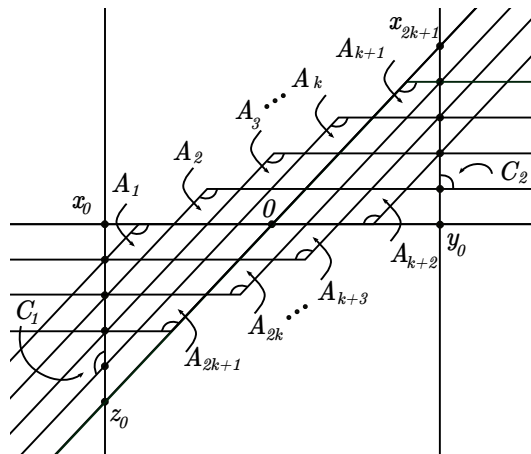


Figura 23.

**Afirmación:** La familia  $\mathcal{A}$  de la construcción anterior es  $\Pi_{2k+2}^2$  pero no  $\Pi^2$ .

Veremos primero que  $\mathcal{A}$  es  $\Pi_{2k+2}^2$ . Observamos que los  $A_i$ 's contienen a 0, así  $\{0, x_{k+1}\}$  perfora  $\mathcal{A} \setminus C_1$  y  $\{0, x_k\}$  perfora  $\mathcal{A} \setminus C_2$ . Además  $A_i$  contiene los puntos del conjunto  $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}\}$  módulo  $2k+1$ , por lo tanto  $\{x_{i+k}, x_{i+2k}\}$  perfora  $\mathcal{A} \setminus \{A_i, C_1, C_2\}$ . Pero  $\{x_{i+k}, x_{i+2k}\}$  perfora  $\mathcal{A} \setminus A_i$  para  $2 \leq i \leq 2k+1$ . Por otro lado,  $\{x_0, x_{k+1}\}$  perfora  $\mathcal{A} \setminus A_1$ . Concluyendo lo deseado.

Falta ver que  $\mathcal{A}$  no es  $\Pi^2$ . Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que un conjunto  $\{x, y\}$  perfora  $\mathcal{A}$ . Como  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $x \in C_1$  y  $y \in C_2$ . Si proyectamos  $x$  sobre  $L$  y  $y$  sobre  $R$ , el conjunto de las proyecciones debe perforar  $\mathcal{A}$ . Pero un punto en  $L \cap C_1$  perfora a lo más  $k$  elementos de  $\{A_1, A_2, \dots, A_{2k+1}\}$ , análogamente para todo punto de  $R \cap C_2$ . Por lo tanto  $\{x, y\}$  perfora a lo más  $2k+2$  elementos de  $\mathcal{A}$ , contradiciendo la hipótesis inicial. Así  $\mathcal{A}$  no puede ser 2-perforable.  $\square$

Más aún, los siguientes resultados son interesantes.

**Teorema 11** ([5]). *Para familias de simplejos homotéticos en  $\mathbf{R}^3$ ,  $\Pi_{25}^2$  implica  $\Pi^3$ , y no existe  $s$  tal que  $\Pi_s^2$  implique  $\Pi^2$  para todas las familias de simplejos en  $\mathbf{R}^3$ .*

**Teorema 12** ([5]). *Para triángulos homotéticos en el plano  $\Pi_6^2$  implica  $\Pi^3$  y  $\Pi_{31}^3$  implica  $\Pi^4$ .*

**Teorema 13** ([4]). *Sea  $P$  un pentágono convexo con dos pares de lados paralelos. Si  $\mathcal{A}$  es cualquier familia planar de conjuntos convexos relacionados con  $P$  y si  $\mathcal{A}$  es  $\Pi_9^2$ , entonces  $\mathcal{A}$  es  $\Pi^2$ .*

En ésta tesis estudiamos el problema de Katchalski sobre encontrar  $k$  tal que  $\Pi_k^2$  implique  $\Pi^2$  para familias de conjuntos convexos en el plano  $\mathbf{R}^2$ , en particular familias de  $n$ -ágonos regulares trasladados.

A continuación introducimos el concepto de  $(n, d)$ -cuerpo que como veremos en el capítulo 3 está relacionado con el número cromático y el número de perforación.

**Definición 26.** *Un  $(n, d)$ -cuerpo  $K$  es una  $n$ -tupla ordenada de conjuntos de dimensión  $d$  denotado por  $K = \langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$ . Los  $K_i$  los llamaremos componentes de  $K$ , y las operaciones como unión, intersección, etc. se definen componente a componente. Un  $(n, d)$ -cuerpo se llama convexo (abierto, cerrado, vacío, etc.) si todas las componentes de  $K$  lo son. Es conveniente pensar los  $(n, d)$ -cuerpos como subconjuntos de un espacio con  $n$  componentes conexas, siendo cada una una copia de  $\mathbf{R}^d$ . Así, la  $i$ -ésima componente de  $K$  es la parte de  $K$  en  $\mathbf{R}_i^d$ .*

**Definición 27.** *Una familia  $\mathcal{F}$  de  $(n, d)$ -cuerpos es llamada **débilmente intersecada** si existe un  $n$ -punto  $\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$  donde todo  $p_i$  es un punto en  $\mathbf{R}_i^d$ , tal que, para cada  $K \in \mathcal{F}$ ,  $K \cap \mathbf{p} \neq \emptyset$ . Es decir, existe un índice  $1 \leq i \leq n$  para el cual  $p_i \in K_i$ .*

**Ejemplo 11.** En la Figura 24 aparece una familia  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$  de  $(3, 2)$ -cuerpos, donde  $K_1 = \{K_{11}, K_{12}, K_{13}\}$  y  $K_2 = \{K_{21}, K_{22}, K_{23}\}$ . Sean  $p_1 \in K_{12} \cap K_{21}$ ,  $p_2 \in K_{22}$  y  $p_3 \in K_{23}$ , entonces  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$  satisface  $\mathbf{p} \cap K_1 \neq \emptyset$  y  $\mathbf{p} \cap K_2 \neq \emptyset$ , siendo así  $\mathcal{K}$  débilmente intersecada.

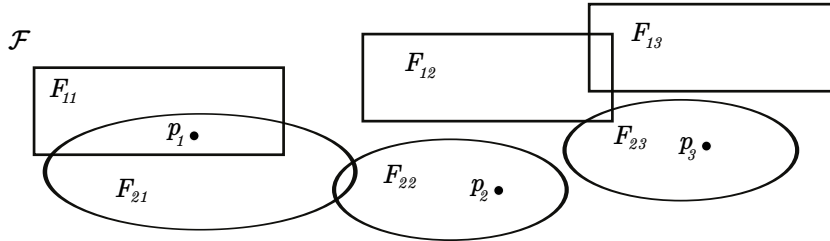


Figura 24.

**Definición 28.** Una familia  $\mathcal{F}$  de  $(n, d)$ -cuerpos es **fuertemente intersecada** si existe un índice  $i$  tal que  $\bigcap_{K \in \mathcal{F}} K_i \neq \emptyset$ .

Realmente nos interesa saber propiedades de intersección débil sobre familias de  $(2, 2)$ -cuerpos.

**Ejemplo 12.** En la siguiente figura aparece una familia de  $(2, 2)$ -cuerpos que es débilmente intersecada, pero no fuertemente intersecada.

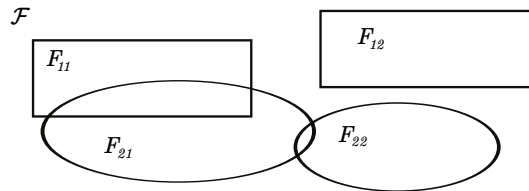


Figura 25.

Se sabe que en general, las familias de  $(2, 2)$ -cuerpos no tienen la propiedad Helly con respecto a la intersección débil. Es decir, no existe una constante  $k$  fija para la cual la familia es débilmente intersecada si y sólo si todas las subfamilias son  $k$  débilmente intersecadas.

Observe que en el caso de intersección fuerte basta pedir que cada subfamilia de tamaño  $n(d + 1)$  sea fuertemente intersecada para que toda la familia sea intersecada.

Un caso especial de  $(n, d)$ -cuerpos son los  $(n, 1)$ -cuerpos, que son llamados  $n$ -intervalos. En 1995, Tardos [6] demostró que si una familia finita  $\mathcal{F}$  de

2-intervalos tiene la propiedad de que no existen  $k$  elementos de  $\mathcal{F}$  que sean disjuntos a pares, entonces existen  $2k$  puntos,  $k$  en cada componente, tal que todo  $F \in \mathcal{F}$  contiene al menos uno de estos puntos. Esto puede enunciarse de la siguiente manera.

**Teorema 14.** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia de 2-intervalos y  $\mathcal{F}$  no contiene  $k+1$  elementos disjuntos a pares, entonces  $\mathcal{F}$  es  $\Pi^{2k}$ .*



## Capítulo 3

# Número de perforación y Número cromático

En esta sección queremos relacionar el número de perforación de una familia finita de conjuntos convexos  $\mathcal{F}$  dada, con el número cromático de el complemento de las gráficas e hipergráficas de intersección.

Recuerde que la  $r$ -hipergráfica de intersección  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  es aquella que tiene como vértices  $\mathcal{V}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$ ; si  $r = 2$  dos vértices son adyacentes si los correspondientes conjuntos se intersecan y si  $r = 3$  tres vértices forman una arista si los correspondientes conjuntos tienen un punto en común.

### 3.1. Atando cabos

La siguiente proposición es cierta para  $k$ -hipergráficas ( $k = 2, 3$ ) y  $\chi(\mathcal{H})$  denota el número cromático para gráficas o número cromático débil para hipergráficas respectivamente.

**Proposición 2.** *Para una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) \leq \Pi(\mathcal{F})$ .*

*Demostración.* Sea  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  la hipergráfica de no intersección asociada a una familia de conjuntos convexos  $\mathcal{F}$ , supongamos  $m = \Pi(\mathcal{F})$ , es suficiente demostrar que existe una buena coloración para  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  con  $|B| = m$  colores. Sea  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  el conjunto de puntos que perforan a  $\mathcal{F}$ , y sea  $\mathcal{C} : \mathcal{F} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  dado por  $\mathcal{C}(T) = j$  si  $x_j \in T$ , siendo  $j$  es el índice más pequeño que lo cumple. Ésta es una buena coloración, supongamos  $k = 3$  y supongamos que existiera  $\{T_i, T_j, T_k\} \in \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  tal que  $\mathcal{C}(T_i) = \mathcal{C}(T_j) = \mathcal{C}(T_k) = r$  así se tendría que  $x_r \in T_i, T_j, T_k$  implicando que la intersección  $T_i \cap T_j \cap T_k \neq \emptyset$  pero por definición esto implicaría que  $\{T_i, T_j, T_k\} \notin \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ , lo que es una contradicción. Análogamente cuando  $k = 2$ .  $\square$

**Ejemplo 13.** Para la familia de hexágonos que aparece en la Figura 23, es fácil ver que su hipergráfica de no intersección asociada a la familia  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , con  $\mathcal{V} = \mathcal{A}$  y  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{\{C_1, C_2, A_i\} \mid A_i \in \mathcal{A}\} \\ \mathcal{E}_2 &= \{C_1, A_{k+1}, A_i \mid A_i \in \mathcal{A}, i \neq k+1\} \\ \mathcal{E}_3 &= \{C_2, A_1, A_i \mid A_i \in \mathcal{A}, i \neq 1\}. \end{aligned}$$

Que resulta ser 2-cromática. Consideremos la coloración  $\mathcal{C} : \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2\}$  dada por  $\mathcal{C}(C_1) = \mathcal{C}(C_2) = 1$  y  $\mathcal{C}(A_i) = 2$  para  $i = 1, 2, \dots, 2k+1$ , esta es una buena coloración ya que los  $A_i$ 's no forman aristas.

Observe que en general la igualdad no se cumple, es decir  $\Pi(\mathcal{F}) > \chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}})$ .

**Ejemplo 14.** Sea  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$  la familia de triángulos en  $\mathbf{R}^2$  de la Figura 26, observe que  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \emptyset$ ,  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = \emptyset$ ,  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_5 = \emptyset$  y  $T_4 \cap T_5 = \emptyset$ . Así, la hipergráfica  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}$  asociada a  $\mathcal{T}$  está dada por  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  (a cada  $T_i$  se le asoció el vértice  $i$ ), y el conjunto de aristas está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{ &\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \\ &\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\} \}. \end{aligned}$$

En la Figura 27 aparece la hipergráfica de intersección, que es el complemento de la gráfica de no intersección asociada a la familia  $\mathcal{T}$ . Al tener  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}$  al menos una arista  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}) \geq 2$ . Como  $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{E}$ , podemos asignar un solo color a esos vértices y otro color para los vértices 4 y 5, teniendo una coloración sin aristas monocromáticas, de modo que  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}) = 2$ . Pero  $\Pi(\mathcal{T}) \neq 2$  pues  $T_1, T_4$  y  $T_5$  son disjuntos a pares y se necesitarían al menos tres elementos para perforar  $\mathcal{T}$ , así  $\Pi(\mathcal{T}) \geq 3$ .

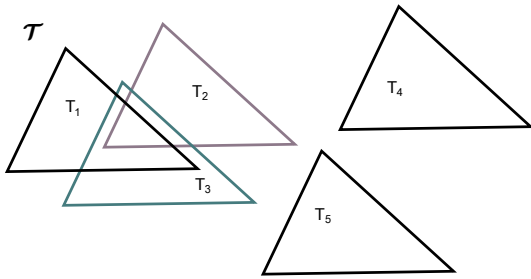


Figura 26.

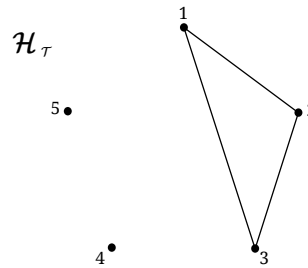


Figura 27.

**Proposición 3.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos convexos en  $\mathbf{R}^2$  y sea  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  su 3-hipergráfica de no intersección. Si toda clase cromática de  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  tiene al menos tres vértices, entonces  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = \Pi(\mathcal{F})$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\Pi(\mathcal{F}) = k$ . Sabemos por la proposición 2 que se cumple  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) \leq \Pi(\mathcal{F}) = k$ , demostraremos que  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) \geq \Pi(\mathcal{F})$ .

Sea  $\mathcal{C} : \mathcal{V}(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  una buena coloración de  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ . Entonces todos los elementos correspondientes a los vértices de cada la clase cromática tienen intersección no vacía, como cada clase cromática tiene al menos tres vértices sabemos por el teorema de Helly en  $\mathbf{R}^2$  que si cada 3 tienen intersección no vacía, entonces toda la familia tiene intersección no vacía. Así, todos los miembros de una clase cromática se intersecan y de esta manera tenemos una perforación de  $\mathcal{F}$  con  $k$  puntos. Por lo tanto  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = \Pi(\mathcal{F})$ .  $\square$

A continuación observaremos que la condición de que cada clase cromática tenga más de 3 elementos no es necesaria para la familia de cajas.

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de cajas en  $\mathbf{R}^2$ , por la observación 1 de la sección 2.3 sabemos que si cada dos cajas en  $\mathbf{R}^2$  se intersecan, entonces la familia  $\mathcal{F}$  se interseca, sea  $\overline{G_{\mathcal{F}}}$  la gráfica de no intersección de cajas y suponga que  $\mathcal{C} : \mathcal{V}(\overline{G_{\mathcal{F}}}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  es una buena coloración de  $\overline{G_{\mathcal{F}}}$ , de esta manera si consideramos una clase cromática sabemos que cada dos elementos de esta clase cromática se intersecan, entonces toda la clase cromática tiene un punto en común, y así  $\Pi(\mathcal{F}) = k$  y la siguiente proposición es cierta.

**Proposición 4.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de cajas en  $\mathbf{R}^d$ , si  $\overline{G_{\mathcal{F}}}$  es su gráfica de no intersección, entonces  $\chi(\overline{G_{\mathcal{F}}}) = \Pi(\mathcal{F})$ .*

**Corolario 2.** *Una familia de cajas en  $\mathbf{R}^2$  es 2-perforable si y sólo si su gráfica de no intersección es 2-coloreable.*

De hecho el siguiente teorema es cierto para familias de convexos en  $\mathbf{R}$ .

**Proposición 5.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de convexos en  $\mathbf{R}$ . Si  $\overline{G_{\mathcal{F}}}$  es su gráfica de no intersección, entonces  $\chi(\overline{G_{\mathcal{F}}}) = \Pi(\mathcal{F})$*





# Capítulo 4

## Resultados interesantes

En este capítulo demostraremos algunos de los resultados expuestos en el capítulo 2, en particular los relacionados con número de perforación dos, como son *iii*) del Teorema 7 utilizando técnicas de teoría de gráficas y las observaciones del capítulo 3, y plantearemos algunos problemas interesantes.

### 4.1. Algunos resultados conocidos

Mostraremos un resultado dado por Danzer y Grünbaum, aunque daremos la demostración realizada por Pendavingh, Puite y Woeginger en [7]. Antes introduciremos algunos conceptos y lemas que ayudarán a la demostración.

Recuerde que  $h(d, n)$  es número entero más pequeño tal que  $\Pi_h^n$  implica  $\Pi^n$ . En particular  $h = h(2, 2)$  es el mínimo número tal que si en una familia se cumple que toda subfamilia de  $h$  elementos es 2-perforable en  $\mathbf{R}^2$  entonces la familia es 2-perforable.

**Lema 2.** *El número  $h(2, 2)$  para una familia  $\mathcal{F}$  de cajas en  $\mathbf{R}^2$  con lados paralelos a los ejes, es igual al impar más grande para el cual  $\overline{C}_k$  es una gráfica de intersección de cajas en  $\mathbf{R}^2$ .*

*Demostración.* Sea  $k$  el impar más grande para el cual  $\overline{C}_k$  es una gráfica de intersección de cajas en  $\mathbf{R}^2$ .

Consideremos una familia  $B$  de cajas en  $\mathbf{R}^2$  cuya gráfica de intersección es  $\overline{C}_k$ . La gráfica complemento de  $\overline{C}_k$  es  $C_k$ , un ciclo impar, y por lo tanto no es 2-coloreable. Observamos que al remover una caja de  $B$ , el complemento de su gráfica de intersección es una trayectoria, que es 2-coloreable. Por el corolario 2,  $B$  no es 2-perforable, pero cualquier subfamilia de  $k - 1$  elementos sí lo es, por lo tanto para tener una familia 2-perforable necesitamos tomar subfamilias con más de  $k - 1$  elementos, así  $h(2, 2) > k - 1$ .

Para probar que  $h(2, 2) \leq k$ , consideremos una familia  $B$  de cajas tal que cada subfamilia con  $k$  elementos es 2-perforable. Sea  $\overline{G}_B$  la gráfica de no intersección de  $B$ , demostraremos que  $\overline{G}_B$  es 2-coloreable. Supongamos que  $\overline{G}_B$  no es 2-coloreable, consideremos el ciclo impar más pequeño  $C$  en  $\overline{G}_B$ . Note que éste ciclo es un ciclo inducido, ya que cualquier otra arista que se tuviera con los vértices de  $C$  formaría un ciclo impar más pequeño.

Observamos que el número de vértices de  $C$  no puede ser mayor a  $k$ , de lo contrario la gráfica de intersección de las cajas correspondientes a los vértices de  $C$  sería un anti-ciclo con al menos  $k+2$  vértices. Pero tampoco puede ser menor o igual que  $k$ , ya que tendríamos una familia con los elementos correspondientes a los vértices de  $C$  de a lo más  $k$  cajas que no es 2-perforable, contradiciendo la elección de  $B$ . Por lo tanto no existe  $C$  con tales características, así  $\overline{G}_B$  es 2-coloreable, y por el corolario 2,  $B$  es 2-perforable.  $\square$

**Lema 3.** *Una gráfica es una gráfica de intersección de cajas en  $\mathbf{R}^2$  si y sólo si ésta es la intersección de 2 gráficas de intersección de cajas en 1 dimensión.*

*Demostración.* Supongamos primero que una gráfica  $G$  es una gráfica de intersección de cajas en  $\mathbf{R}^2$ , entonces basta tomar las proyecciones en los ejes para formar familias de intervalos que tienen gráficas de intersección cuya propiedad es justamente que su intersección es  $G$ .

La otra implicación es clara.  $\square$

**Lema 4.** *Sea  $k \geq 5$ . Si una gráfica de intersección de cajas 1-dimensional con  $k$  vértices contiene  $\overline{C}_k$  como subgráfica, entonces ésta tiene al menos  $\binom{k}{2} - 3$  aristas.*

*Demostración.* Sean  $I_1, I_2, \dots, I_k$  los intervalos correspondientes a los vértices  $v_1, \dots, v_k$  en el anti-ciclo  $\overline{C}_k$  que satisfacen  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$  siempre que  $2 \leq |i - j| \leq k - 2$ . Supongamos que dos intervalos con índices consecutivos  $I_2, I_3$  no se intersecan. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $I_2$  está a la izquierda de  $I_3$ . Sean  $x, y$  los puntos finales derecho de  $I_2$ , e izquierdo de  $I_3$ , respectivamente, puede verse que  $x < y$ . Además, como todos los  $k - 4$  intervalos  $I_5, I_6, \dots, I_k$  intersecan tanto a  $I_2$  como a  $I_3$ , entonces todos contienen a los puntos  $x, y$ . Tenemos los siguientes casos.

Caso 1. Supongamos que  $x \notin I_4$ . Como  $I_4 \cap I_2 \neq \emptyset$ ,  $I_4$  está a la izquierda de  $x$ . Además  $I_1$  interseca los intervalos  $I_3$  e  $I_4$ , entonces  $x \in I_1$ . Por lo tanto todos los intervalos contienen  $x$ , excepto  $I_3$  e  $I_4$ .

Caso 2. Si  $y \notin I_4$ , como  $I_1 \cap I_3 \neq \emptyset$ ,  $I_1$  está a la derecha de  $y$ . Al intersecar  $I_4$  a los intervalos  $I_1$  e  $I_2$ , se sigue que  $y \in I_4$ . Por lo tanto  $y$  está en todos los intervalos excepto en  $I_1$  e  $I_2$ .

Caso 3. Supongamos que  $x \in I_4$ ,  $y \in I_1$ . Como  $I_1 \cap I_4 \neq \emptyset$ ,  $I_1$  e  $I_4$  ambos contienen un punto  $z$  con  $x \leq z \leq y$ , entonces  $z$  está en todos los intervalos excepto en  $I_2$  e  $I_3$ .

En todos los casos hemos identificado un clan con  $k - 2$  vértices en el que a lo más 3 aristas no están en la gráfica de intersección de cajas de una dimensión.  $\square$

**Lema 5.** *Sea  $\overline{C}_k$  un anti-ciclo. Si  $\overline{C}_k$  es una gráfica de intersección de cajas 2-dimensionales, entonces  $k \leq 6$ .*

*Demostración.* Sea  $\overline{C}_k$  un anti-ciclo que es una gráfica de intersección de cajas 2-dimensionales. Por el lema 3,  $\overline{C}_k$  es la intersección de 2 gráficas de intersección que corresponden a las proyecciones en los ejes coordenados. Del lema 4, cada proyección remueve a lo más 3 aristas de la gráfica completa. Como  $\overline{C}_k$  es una gráfica completa menos  $k$  aristas, entonces  $k \leq 6$ .  $\square$

**Teorema 15.** *Para una familia de cajas en el plano  $\mathbf{R}^2$  con lados paralelos a los ejes, se tiene que  $\Pi_5^2$  implica  $\Pi^2$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  una familia de cajas en  $\mathbf{R}^2$  para la cual existe un  $k$  tal que  $\Pi_k^2$  implique  $\Pi^2$ . Por el lema 5,  $k \leq 6$ ; además del lema 2,  $k$  es el impar más grande para el cual el anti-ciclo  $\overline{C}_k$  es una gráfica de intersección de cajas, por lo tanto  $k \leq 5$ . Sea  $R$  el rectángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(2, 1)$ , definimos la familia  $\mathcal{F} = \{R_i | i = 1, 2, \dots, 5\}$ , donde  $R_i = r_i + R$ , con  $a_1 = (0, 0)$ ,  $a_2 = (2, 1)$ ,  $a_3 = (4, 0)$ ,  $a_4 = (-1, 3)$  y  $a_5 = (1, -2)$ . Observamos que cualesquiera tres rectángulos tienen intersección vacía, además  $R_i \cap R_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2, \dots, 4$  y  $R_1 \cap R_5 \neq \emptyset$ , así la gráfica de intersección  $G$  para la familia  $\mathcal{F}$  es  $\overline{C}_5$ . Por lo tanto  $\Pi_5^2$  implica  $\Pi^2$ .  $\square$

## 4.2. Hipergráficas prohibidas

**Definición 29.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos convexos y sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica, diremos que  $\mathcal{H}$  **no es realizable** en la familia  $\mathcal{F}$  si no existe una subfamilia  $\mathcal{F}_1$  de  $\mathcal{F}$  que tenga a  $\mathcal{H}$  como hipergráfica de no intersección asociada.*

Cuando no sea motivo de confusión, sólo diremos que una hipergráfica no es realizable, sin especificar la familia que se está considerando.

**Definición 30.** *Una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es **prohibida** si no es realizable.*

Diremos que una familia de tres conjuntos convexos  $C_1, C_2$  y  $C_3$  tiene la configuración  $\overline{K}_3^3$  si  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset$ , y  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ,  $C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$  y  $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$ . Ver la Figura 28.

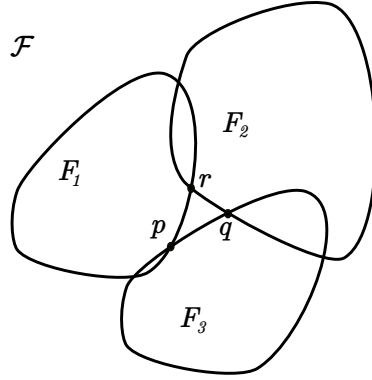


Figura 28.

**Ejemplo 15.** La gráfica  $2K_2$  es prohibida como gráfica de no intersección de intervalos.

Sea  $2K_2 = (V, E)$  con  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{12, 34\}$  y sean  $I_1 = [a_1, b_1]$ ,  $I_2 = [a_2, b_2]$ ,  $I_3 = [a_3, b_3]$  y  $I_4 = [a_4, b_4]$  los intervalos asociados a los vértices de  $2K_2$ . Como  $\{1, 3\}, \{1, 4\} \notin E$  entonces  $I_1 \cap I_3 \neq \emptyset$ ,  $I_1 \cap I_4 \neq \emptyset$ , y como  $\{3, 4\} \in E$  entonces  $I_3 \cap I_4 = \emptyset$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $b_3 < a_4$ , así  $b_3$  y  $a_4$  están en  $I_1$ . De manera análoga puede verse que  $I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$  y  $I_2 \cap I_4 \neq \emptyset$ , de modo que  $I_2$  contiene los puntos  $a_3$  y  $b_4$ , lo cual es una contradicción ya que  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  por ser  $\{1, 2\}$  una arista de  $E$ .

**Observación 2.** Note que el lema 4 afirma que si una gráfica de intersección de cajas 1–dimensional tiene  $\overline{C_k}$  como subgráfica y menos de  $\binom{k}{2} - 3$  aristas es prohibida.

**Teorema 16.** La hipergráfica  $\overline{2K_3}$  es prohibida para una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos convexos en el plano  $\mathbf{R}^2$ .

*Demostración.* Es suficiente demostrar que para una familia de seis conjuntos convexos, ésta familia no puede tener asociada la hipergráfica  $\overline{2K_3}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$  una familia de conjuntos convexos en el plano  $\mathbf{R}^2$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $V(2K_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $\mathcal{E}(2K_3) = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ , donde el vértice  $i$  está asociado a  $F_i$ . Como  $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{H}$ ,  $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$ ; de manera análoga  $F_4 \cap F_5 \cap F_6 = \emptyset$ . Como los conjuntos  $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\} \notin \mathcal{H}$ , entonces  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ ,  $F_1 \cap F_3 \neq \emptyset$  y  $F_2 \cap F_3 \neq \emptyset$ , por lo tanto sólo es posible que  $F_1, F_2, F_3$  tengan la configuración  $\overline{K_3^3}$  (ver la Figura 28), de manera análoga,  $F_4, F_5, F_6$  sólo puede tener la configuración  $\overline{K_3^3}$ .

Sea  $T$  es triángulo formado por los tres puntos de intersección  $p, q$  y  $r$ , que son los puntos internos de intersección de las curvas que definen a los conjuntos

convexos  $F_1, F_2, F_3$ . Observemos que, como  $T_i \cap T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ ,  $T_i \cap T_1 \cap T_3 \neq \emptyset$ ,  $T_i \cap T_2 \cap T_3 \neq \emptyset$ , para  $i \in \{4, 5, 6\}$ , los conjuntos  $F_4, F_5$  y  $F_6$  contienen a  $T$ , así  $F_4 \cap F_5 \cap F_6 \neq \emptyset$  que es una contradicción, ya que  $\{4, 5, 6\} \notin 2\overline{K_3}$ .  $\square$

**Proposición 6.** *Si  $\mathcal{H}$  tiene una subhipergráfica  $K$  prohibida como subhipergráfica inducida, entonces  $\mathcal{H}$  es prohibida.*

*Demostración.* Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que  $\mathcal{H}$  no es prohibida. Como  $\mathcal{H}$  no es prohibida, es realizable, por lo tanto existe una subfamilia  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  tal que tiene a  $\mathcal{H}$  como hipergráfica asociada. Por ser  $K$  inducida, no existe ninguna arista adicional que formen los vértices  $V(K)$ , de modo que  $K$  es realizable en  $\mathcal{F}$ , basta restringirse a los elementos de  $\mathcal{F}'$  que tienen como vértices asociados el conjunto  $V(K)$ . Pero eso es una contradicción, por lo tanto  $\mathcal{H}$  no es realizable.  $\square$



# Capítulo 5

## Conjeturas y conclusiones

### 5.1. Número de perforación dos para familias de convexos en $\mathbf{R}^2$

En el capítulo 1 sección 1 hablamos sobre las características necesarias y suficientes para que una gráfica tenga número cromático 2, así mismo en la sección 2 del mismo capítulo dimos algunas características de las 3–hipergráficas uniformes para saber cuando su número cromático era dos, sin embargo quedó claro en ese momento que a diferencia de las gráficas esta caracterización dista de ser completa.

Por otro lado, como vimos en el capítulo 3 dada una familia de cajas (proposición 3), ésta será dos perforable si y sólo si su gráfica de intersección es 2 coloreable, lo que nos permitió demostrar el teorema de Danzer y Grünbaum (Teorema 7 (iii)) vía el número cromático.

Como ya mencionamos con anterioridad, la idea central de esta tesis es la de encontrar cuándo los teoremas que determinan si una 3–hipergráfica es 2–cromática pueden utilizarse para familias más generales como convexos en  $\mathbf{R}^2$ .

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos convexos en  $\mathbf{R}^2$  y sea  $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$  su 3–hipergráfica de no intersección. Las siguientes observaciones se derivan de la proposición 3.

1. Si  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$  y una de las clases cromáticas tiene más de 3 elementos, entonces  $\Pi(\mathcal{F}) = 2$ .
2. Si  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$  y una de las clases cromáticas tiene un solo elemento y la otra tiene uno o más de tres elementos, entonces  $\Pi(\mathcal{F}) = 2$ .
3. Si  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$  y una de las clases cromáticas tiene exactamente 2 elementos, entonces  $\Pi(\mathcal{F}) \geq 2$ .



¿Qué podemos decir entonces en el caso 3? ¿Será cierto que si  $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$  y la familia satisface  $\Pi_k^2$  para algún  $k$  entonces  $\Pi(\mathcal{F}) = 2$ ?

El siguiente ejemplo muestra que  $k > 5$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, X, Y\}$  una familia de conjuntos convexos que cumplen  $X \cap Y = \emptyset$  y  $A_i \cap X \neq \emptyset$  y  $A_i \cap Y = \emptyset$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ , y  $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 2$ , entonces  $\Pi_5^2$  no implica  $\Pi^2$ . Ver la Figura 29.

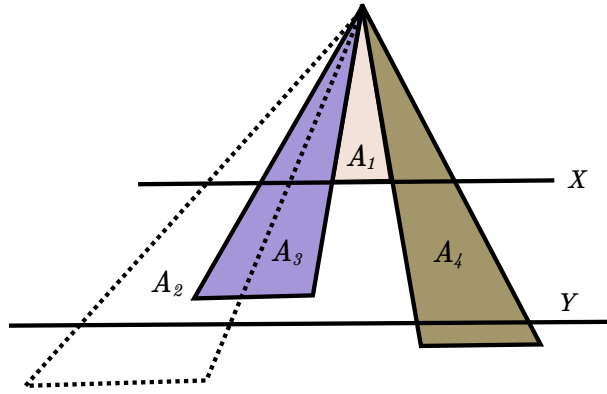


Figura 29.

A continuación hacemos notar que la relación entre el número cromático y el número de perforación está relacionada con los problemas tipo Helly para  $(2, 2)$ -cuerpos, descritos en el capítulo 2.

**Proposición 7.** Si  $\mathcal{F}$  satisface  $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 2$  y  $\Pi_k^2$ , entonces  $\mathcal{F}$  define una familia de  $(2, 2)$ -cuerpos  $\mathcal{F}'$  que tiene la propiedad de que cualesquiera  $k$  elementos son débilmente intersecados.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, X, Y\}$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ . Como  $\mathcal{F}$  es  $\Pi_k^2$ , entonces en todo subconjunto de  $k$  elementos existen 2 puntos que lo perforan, si los  $k$  son elementos en  $\mathcal{F} \setminus \{X, Y\}$ , entonces son  $\Pi^1$  o  $\Pi^2$ . Por lo tanto, podemos asumir que todo subconjunto de  $k$  elementos en  $\mathcal{F}$  contiene a  $X$  y a  $Y$ .

Consideremos el siguiente  $(2, 2)$ -cuerpo  $\mathcal{F}'$ :

$$F_1 = \{A_1 \cap X, A_1 \cap Y\}$$

$$F_2 = \{A_2 \cap X, A_2 \cap Y\}$$

⋮

$$F_{n-2} = \{A_{n-2} \cap X, A_{n-2} \cap Y\}$$

Por demostrar que si  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\} = \mathbf{F} \subset \mathcal{F}'$ , existe  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  tal que para todo  $B_j \in \mathbf{F}$  existe  $i \in \{1, 2\}$  tal que  $p_i \in B_{ji}$ .

Sea  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_{k-2}, X, Y\} \in \mathcal{F}$ , como cada  $G_i \cap X = \emptyset$ , y  $G_i \cap Y = \emptyset$ , podemos construir el siguiente  $(2, 2)$ -cuerpo:

$$\{G_{11}, G_{12}\} = \{G_1 \cap X, G_1 \cap Y\}$$

$$\{G_{21}, G_{22}\} = \{G_2 \cap X, G_2 \cap Y\}$$

$\vdots$

$$\{G_{k-2,1}, G_{k-2,2}\} = \{G_{k-2} \cap X, G_{k-2} \cap Y\}$$

Como  $G$  es  $\Pi_k^2$ , existen 2 puntos  $p, q \in \mathbf{R}^2$  que perforan a  $G$  (uno en  $X$  y otro en  $Y$ ). Esto divide naturalmente a  $G$  en dos conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  de los elementos en  $G$  que contienen  $p$  y los que contienen  $q$ .  $\square$

Como ya se mencionó en el capítulo 2, no se conocen teoremas tipo Helly para  $(2, 2)$ -cuerpos en la literatura, resulta muy interesante saber si dichos teoremas existen.

## 5.2. Conjeturas y problemas

**Conjetura 1.** ¿Existe un teorema tipo Helly para familias de  $(2, 2)$ -cuerpos obtenidas de  $n$ -ágonos regulares?

Lo cual es equivalente a probar la siguiente

**Conjetura 2.** ¿Existe  $k$  tal que  $\Pi_k^2$  y  $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 2$ , implique  $\Pi^2$  para  $n$ -ágonos regulares?

De ser cierto, se podrían utilizar técnicas de coloración de hipergráficas, a saber, los teoremas de Las Vergnas-Fournier y Lovász, para probar algo de este estilo:

**Conjetura 3.** Para toda familia de  $n$ -ágonos regulares, existe un entero  $k$  tal que  $\Pi_k^2$  implique  $\Pi^2$ .

**Pregunta 1.** ¿Es posible dar una familia de hipergráficas prohibidas para familias de hexágonos regulares trasladados?

**Pregunta 2.** ¿Qué propiedad tienen las hipergráficas anteriores que no tienen las de los hexágonos trasladados?

### 5.3. Conclusiones

Como hicimos notar en el transcurso de esta tesis, nuestro interés se basó en la búsqueda de teoremas tipo Helly para perforación dos.

En el capítulo 3 notamos que  $\chi(\overline{G_{\mathcal{F}}})$  acota inferiormente este invariante y de esta manera sugerimos las técnicas de los teoremas de Las Vergnas-Fournier y Lovász, para acotar el número de perforación de estas familias, notamos de hecho que el número cromático y en número de perforación son iguales casi siempre, excepto cuando una de las clases cromáticas tiene exactamente dos elementos, lo que permitió darnos cuenta que es justo éste caso el que nos relaciona con el problema de los  $(2, 2)$ -cuerpos, problema abierto y extremadamente difícil, pero que desde este punto de vista resulta muy interesante.

En este capítulo sugerimos varias conjeturas y planteamos la búsqueda de hipergráficas prohibidas lo cual permitiría encontrar la existencia de ciertos ciclos impares en el sentido de Lovász y Las Vergnas-Fournier.

# Bibliografía

- [1] M. Katchalski and A. Liu, A problem of geometry in  $\mathbf{R}^d$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* **75** (1979), 284 – 288.
- [2] L. Danzer, B. Grünbaum and V. Klee, Helly’s theorem and it’s relatives. *Proc. Symposia in Pure Math.*, vol. VII (Convexity) (1963), 101 – 180. MR **28**:524.
- [3] L. Danzer, B. Grünbaum, Intersection properties of boxes in  $\mathbf{R}^d$ , *Combinatorica* **2**(3) (1982), 237 – 246.
- [4] M. Katchalski and D. Nashtir, On a conjecture of Danzer and Grünbaum *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 3213 – 3218.
- [5] M. Katchalski, D. Nashtir, A Helly Type Conjecture, *Discrete & Computational Geometry* **21**(1) (1999), 37 – 43.
- [6] G. Tardos, Transversals of 2-intervals, a topological approach, *Combinatorica* **15**(1) (1995), 123 – 134.
- [7] R. Pendavingh, Q. Puite y G. J. Woeginger, 2-piercings via graph theory, *Discrete Applied Mathematics* **156** (2008), 3510 – 3512.
- [8] T. Kaiser and Y. Rabinovich, Intersection Properties of Families of Convex  $(n, d)$ -Bodies, *Discrete & Computational Geometry* **21**(2) (1999), 275 – 287.
- [9] F. Harary, Graph Theory, *Addison–Wesley*, 1969.
- [10] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, *Leipzig*, 1936.
- [11] J. C. Fournier, M. Las Vergnas, Une classe d’hypergraphes bichromatiques, *Discrete Math.* **2** (1972), 407 – 410.
- [12] L. Lovasz, Coverings and colorings in hypergraphs, *F. Hoffmann (Ed.), Proc. Forth. S.-E. Conf on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Utilitas Math., Winnipeg (1973), 3 – 12.

- [13] D. Défossez, A sufficient condition for the bicolability of a hypergraph, *Discrete Math.*, **308** (2008), 2265 – 2268.