



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

SINGULARIDADES KLENIANANAS
Y LA CORRESPONDENCIA DE MCKAY

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
DIEGO CORRO TAPIA

JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO, UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. ABRIL 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado:

Xavier Gómez-Mont

José Luis Cisneros

Javier Elizondo

Jawad Snoussi

Noé Bárcenas

Singularidades Kleninanas y la Correspondencia de McKay

Diego Corro Tapia
Maestria en Ciencias Matemáticas
Instituto de Matemáticas
Unidad Cuernavaca
Universidad Nacional Autónoma de México
`dcorro@matcuer.unam.mx`

Abril 2015

Tesis escrita y editada por
Diego Corro Tapia
`dcorro@matcuer.unam.mx`
utilizando el lenguaje \LaTeX
y el paquete *TikZ* para las gráficas.

*Dedicado a:
Lourdes, Leonardo y Xavier*

Agradecimientos

Este trabajo es el fruto de dos años de trabajo, durante los cuales adquirí no solo nuevos conocimientos, sino que además conocí nueva gente de la cual aprendí mucho. Quiero agradecer a José Luis por su paciencia, y el apoyo que me brindó cuando se me abrieron oportunidades. En especial le agradezco a Agustín sus consejos, observaciones y conocimiento que me aportó mientras escribí este trabajo, además de las buenas discusiones con los Simpsons de fondo en Cuernavaca. Agradezco la compañía y apoyo de la gente que conocí en la unidad de Cuernavaca, del instituto de matemáticas: Cristina por su cariño y sus bromas (además de los postres que compartía) y a Isaac y Ángeles por toda la risa y su compañía.

Agradezco a la pandilla, Iker Luigi, Citlatli, David, Mafer, Lau, Lalo y Susana por su continuo apoyo, en los momentos en que más deprimido me sentí, así como a los amigos que conocí en el IMPA en especial a Simon Piga. También mi familia fue clave a la hora de animarme y apoyarme en mi crecimiento. Por último agradezco a Rebeca su compañía y apoyo a lo largo del proceso de esta tesis y el reto de obtener el grado.

Lista de Contenidos

1. Representaciones de grupos	3
1.1. Representación de grupos (finitos)	3
1.2. Representaciones irreducibles	7
1.3. Teorema de Maschke	9
1.4. Caracteres de una representación	18
1.5. El carcaj de McKay	24
2. El carcaj de McKay para grupos finitos de SU(2)	41
2.1. Subgrupos finitos de SO(3) y SL(2, \mathbb{C})	41
2.2. Tablas de caracteres de subgrupos finitos de SO(3)	45
2.3. Tablas de Caracteres	52
2.4. La grafica de McKay para los grupos finitos de SU(2)	58
3. Singularidades	61
3.1. $\mathbb{C}^2/G \cong V(C)$	61
3.2. Singularidades	64
3.3. Resolución de singularidades	66
3.4. Número de intersección	83
3.5. Gráfica dual	84
3.6. Algoritmo de la Gráfica Dual	86
4. Conclusión	115

LISTA DE CONTENIDOS

Introducción

Este trabajo es una exposición introductoria a la teoría de las representaciones y la teoría de la resolución de singularidades. La historia comienza con el gran matemático alemán Felix Klein, quien en su trabajo [13] clasificó de manera geométrica los grupos finitos G de $SU(2)$, que son los grupos cíclicos, los grupos binarios diédricos, el binario octaédrico, el binario dodecaédrico y el binario icosaédrico.

Al considerar la acción natural del grupo G sobre \mathbb{C}^2 obtenemos una superficie $X = \mathbb{C}^2/G$ la cual tiene una singularidad aislada. Estas singularidades se conocen como singularidades klenianas o singularidades de Du Val, ya que fueron estudiadas por el matemático británico Patrick Du Val en [26], [27] y [28]. Tomando una resolución de X , es decir una variedad suave \widetilde{X} y un morfismo (en alguna categoría adecuada) de \widetilde{X} a X que es un difeomorfismo en todos lados, excepto el punto singular y su preimagen, la cual es una curva algebraica que se conoce como el divisor excepcional y puede estar compuesto de varias componentes irreducibles. En este trabajo nos interesa una resolución en particular, que se conoce como la resolución mínima, la cual es única y cuyo divisor excepcional tiene el menor número de componentes. La información de como se intersectan las componentes del divisor excepcional de la resolución mínima se codifica en una gráfica conocida como la gráfica mínima de la resolución y Du Val mostró que esta gráfica corresponde a los diagramas de tipo ADE .

Después el matemático británico John McKay observó en [16] que la gráfica de tipo ADE asociada con la singularidad kleniana de \mathbb{C}^2/G puede ser obtenida únicamente mediante las representaciones irreducibles de G y la representación inducida por la inclusión $G \subset GL(2, \mathbb{C})$. A esta observación se le conoce como la correspondencia de McKay.

Aunque este hecho pueda parecer una simple coincidencia, en 1983 el matemático Uruguayo Gerardo González-Sprinberg y el matemático francés Jean-Louis Verdier mostraron en [9] que hay una razón geométrica detrás de la observación de McKay.

En este trabajo empezamos en el capítulo 1 dando una introducción a la teoría de representaciones lineales (en espacios vectoriales complejos) de grupos finitos, para al final del capítulo definir el carcaj de McKay, el cuál es una gráfica dirigida. Para los grupos finitos de $SU(2)$ el carcaj resulta ser una gráfica (no dirigida), pero para

LISTA DE CONTENIDOS

obtener la gráfica es necesario conocer los caracteres irreducibles de los grupos finitos de $SU(2)$, lo cual exponemos rápida y superficialmente en el segundo capítulo.

En el tercer capítulo comenzamos dando una introducción a la teoría de resolución de singularidades, concentrándonos en la técnica de resolución mediante explosiones, dando una corta introducción a los conceptos y técnicas. Como ejemplos, construimos con cuidado las gráficas de las resoluciones de las singularidades asociadas a los grupos cíclicos y los grupos binarios diédricos. Pero nos topamos con una complicación: demostrar que las gráficas que obtenemos corresponden a la resolución mínima, para lo cual necesitamos calcular los números de intersección de las componentes del divisor excepcional.

Para resolver esto consideramos un algoritmo expuesto en [20] y probado en [19] por András Némethi con el cual, obtenemos la gráfica con número de intersección a partir de la gráfica de la resolución de una curva. Con este algoritmo calculamos las gráficas de la resolución mínima de las singularidades asociadas a los grupos finitos de $SU(2)$, y obtenemos, como observo McKay, las gráficas del final del capítulo 2.

Capítulo 1

Representaciones de grupos

En este capítulo trabajaremos con representaciones lineales de grupos finitos, que no es otra cosa que ver al grupo G como un subgrupo de matrices de $GL(n, \mathbb{F})$, donde \mathbb{F} es el campo de los números reales o complejos. Aunque se dan definiciones para los dos campos, realmente sólo nos interesan los resultados que hay para representaciones sobre el campo de los números complejos.

Notamos que toda representación se descompone en representaciones irreducibles, y que para un grupo finito sólo hay un número finito de representaciones irreducibles. Veremos que las representaciones sólo dependen de su carácter, que es una función del grupo en el campo \mathbb{C} .

Para los caracteres definimos un producto interior, con el cual, por el teorema de ortogonalidad de Schur, los caracteres irreducibles son ortonormales. Más aun notamos que el conjunto de caracteres forma un espacio vectorial, y los caracteres irreducibles son una base, la cual está en biyección con las clases de conjugación de G .

Al considerar los subgrupos finitos G de $SL(2, \mathbb{C})$ tenemos una representación natural dada por la inclusión de G en el grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Tomamos el carácter χ asociado, y utilizando el producto interior podemos descomponer a los caracteres $\chi \otimes \chi_i$, donde χ_i son los caracteres irreducibles, en una suma de caracteres irreducibles. Utilizando estas descomposiciones obtenemos una digráfica, que se conoce como el carcaj de McKay.

1.1. Representación de grupos (finitos)

Sean G un grupo, \mathbb{F} el campo de números reales \mathbb{R} o el campo de números complejos \mathbb{C} y V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} de dimensión finita. Denotemos por $\text{Aut}(V)$ el grupo de automorfismos de V . Una representación de G nos da una forma de ver al grupo G como un grupo de transformaciones lineales de V . Las representaciones permiten convertir problemas de teoría de grupos en problemas de álgebra lineal, la cual es más fácil trabajar.

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Definición 1.1 (Representación)

Una *representación* de G en V sobre el campo \mathbb{F} es un homomorfismo de grupos

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V).$$

El *grado* de la representación ρ es la dimensión n de V .

Como $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es un homomorfismo de grupos, tenemos las siguientes dos propiedades:

$$\begin{aligned}\rho(e) &= \text{Id}_V, \\ \rho(gh) &= \rho(g)\rho(h) \quad \text{para todo } g, h \in G,\end{aligned}$$

donde e es el elemento neutro de G , y Id_V es el automorfismo identidad de V .

Ejemplo 1.2

Consideramos cualquier grupo G , y cualquier espacio vectorial V . Definimos la representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ como

$$\rho(g) = \text{Id}_V \quad \text{para todo } g \in G.$$

Esto muestra que todo grupo tiene una representación de grado arbitrario.

Ejemplo 1.3 (La representación trivial)

La representación $1_G: G \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{F}) = \text{Aut}(\mathbb{F})$ dada por

$$1_G(g) = (1) \quad \text{para todo } g \in G,$$

es llamada la *representación trivial* de G .

Ejemplo 1.4

Sean G el grupo diédrico $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ y $V = \mathbb{C}^2$; entonces tenemos que $\text{Aut}(V) = \text{GL}(2, \mathbb{C})$. Consideremos las siguientes matrices en $\text{GL}(2, \mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil corroborar que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}A^k &= \begin{pmatrix} e^{2i\pi k/n} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi k/n} \end{pmatrix}, \\ A^n &= B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B^{-1}AB &= A^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/n} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Definimos una representación de grado dos $\rho: G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$ como:

$$\rho(a^i b^j) = A^i B^j.$$

1.1. REPRESENTACIÓN DE GRUPOS (FINITOS)

Definición 1.5

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ dos representaciones de G sobre \mathbb{F} . Un morfismo lineal $\vartheta: V \rightarrow W$ es G -equivariante si para todo $g \in G$ y todo $v \in V$ se cumple lo siguiente

$$\sigma(g)(\vartheta(v)) = \vartheta(\rho(g)(v)).$$

Definición 1.6

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ dos representaciones de G sobre \mathbb{F} . Decimos que ρ es *equivalente* a σ si existe un isomorfismo $\alpha: V \rightarrow W$ que es G -equivariante.

Proposición 1.7

La equivalencia de representaciones es una relación de equivalencia ya que para cualesquiera representaciones ρ , σ y τ de G sobre \mathbb{F} se cumple:

- (a) ρ es equivalente a ρ ;
- (b) si ρ es equivalente a σ entonces σ es equivalente a ρ ;
- (c) si ρ es equivalente a σ y σ es equivalente a τ , entonces ρ es equivalente a τ .

Demostración. (a) Tómese $\alpha = \text{Id}_V$.

(b) Ya que $\sigma(g) = \alpha^{-1}\rho(g)\alpha$ para todo $g \in G$, entonces tenemos que $\rho(g) = \alpha\sigma(g)\alpha^{-1}$ para todo $g \in G$. Así σ es equivalente a ρ .

(c) Tenemos que $\sigma(g) = \alpha^{-1}\rho(g)\alpha$ y $\tau(g) = \beta^{-1}\sigma(g)\beta$ para todo $g \in G$. Entonces $\tau(g) = \beta^{-1}\alpha^{-1}\rho(g)\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1}\rho(g)(\alpha\beta)$ para todo $g \in G$. Así se sigue que ρ es equivalente a τ . \square

A continuación, en el siguiente ejemplo, vemos que si tenemos una representación de G , entonces podemos ver a los elementos de G como matrices y la multiplicación de G como multiplicación de matrices.

Ejemplo 1.8

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G en V sobre \mathbb{F} . Consideremos una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V y el isomorfismo $\alpha: V \rightarrow \mathbb{F}^n$ dado por

$$\alpha(v_i) = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)}_{i\text{-ésima posición}} \in \mathbb{F}^n$$

Entonces la representación $\sigma: G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$ definida como

$$\sigma(g) = \alpha\rho(g)\alpha^{-1}$$

es equivalente a ρ .

Con este último ejemplo notamos que usualmente existen varias (al menos tantas como elecciones de base) representaciones equivalentes a una representación ρ dada.

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

También con el último ejemplo notamos que cada representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de grado n es equivalente (mediante la elección de una base de V) a una representación $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$.

Como una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es un homomorfismo de grupos, podemos considerar el núcleo

$$\text{Ker } \rho = \{g \in G \mid \rho(g) = \text{Id}_V\}$$

el cual es un subgrupo normal de G .

Definición 1.9

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es *fiel* si $\text{Ker } \rho = \{e\}$. Es decir, si ρ es un monomorfismo de grupos.

Observación 1.10

Como se tiene que $\alpha^{-1}\rho(g)\alpha = \text{Id}_V$ si y sólo si $\rho(g) = \text{Id}_V$, entonces se sigue que todas las representaciones que son equivalentes a una representación fiel, son fieles.

La siguiente representación nos será de gran utilidad más adelante.

Ejemplo 1.11 (Representación regular)

Sea $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo finito. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{F}G$ libremente generado por G , es decir

$$\mathbb{F}G = \{\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \mid \lambda_i \in \mathbb{F}\}$$

con la suma y la multiplicación naturales; esto es, si tenemos que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \quad y \quad v = \sum_{i=1}^n \mu_i g_i$$

son elementos de $\mathbb{F}G$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces definimos

$$u + v := \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) g_i,$$
$$\lambda v := \sum_{i=1}^n (\lambda \mu_i) g_i.$$

Con estas operaciones $\mathbb{F}G$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} con base $\{g_1, \dots, g_n\}$, y por lo tanto de dimensión n .

Podemos definir para cada $g \in G$ un automorfismo de $\mathbb{F}G$ utilizando la multiplicación de grupo de G . Como $gg_i = g_j$ para algún índice $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que

1.2. REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

multiplicar por un elemento fijo g , manda la base en si misma. Entonces por extensión lineal tenemos un automorfismo de $\mathbb{F}G$

$$\begin{aligned}\alpha_g: \mathbb{F}G &\rightarrow \mathbb{F}G, \\ \sum_i \lambda_i g_i &\rightarrow \sum_i \lambda_i (gg_i).\end{aligned}$$

Definición 1.12

Con esto tenemos una representación de G en $\mathbb{F}G$ sobre \mathbb{F} . La representación $\rho_{\text{reg}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}G)$, es llamada la *representación regular*, y está definida de la siguiente manera

$$\rho_{\text{reg}}(g) = \alpha_g.$$

La representación regular es fiel debido a que si para algún $g \in G$ se tiene que $\rho_{\text{reg}}(g) = \text{Id}_{\mathbb{F}G}$, entonces para todo $v \in \mathbb{F}G$ tenemos que $\rho_{\text{reg}}(g)(v) = v$. Suponiendo sin pérdida de generalidades que $g_1 = e$ (si no, reordenemos a los elementos de G), tenemos que $e = g_1 = \rho_{\text{reg}}(g)(g_1) = gg_1 = ge = g$, y por tanto $\text{Ker } \rho_{\text{reg}} = \{e\}$.

Proposición 1.13

Una representación ρ de un grupo finito G es fiel si y sólo si $\text{Im } \rho$ es isomorfa a G .

Demostración. Por el primer teorema de isomorfismo de grupos sabemos que $\text{Im } \rho \cong G/\text{Ker } \rho$. Por lo que si ρ es fiel, i.e. $\text{Ker } \rho = \{e\}$, entonces tenemos que $G \cong \text{Im } \rho$. De manera recíproca, utilizando el hecho de que

$$|\text{Im } \rho| = |G|/|\text{Ker } \rho|,$$

si $G \cong \text{Im } \rho$ entonces $|\text{Ker } \rho| = 1$. Por lo que $\text{Ker } \rho = \{e\}$. □

Ejemplo 1.14

La representación trivial $1_G: G \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{F})$ es fiel si y sólo si $G = \text{Ker } \rho = \{e\}$.

1.2. Representaciones irreducibles

Como estamos trabajando con espacios vectoriales de dimensión finita, si tenemos dos espacios vectoriales V y W de la misma dimensión n , entonces fijando una base en cada espacio vectorial obtenemos un isomorfismo $\alpha: V \rightarrow W$. Si tenemos una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ podemos definir una nueva representación $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ vía el isomorfismo α como

$$\sigma(g) = \alpha\rho(g)\alpha^{-1}.$$

Debido a que V y W son arbitrarios, esto nos dice que hay una forma de comparar las representaciones.

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Definición 1.15

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G en V sobre \mathbb{F} . Decimos que un subespacio $W \subset V$ es G -invariante si para todo $g \in G$ sucede

$$\rho(g)(W) \subset W$$

Ejemplo 1.16

Los subespacios $\{0\}$ y V de V son invariantes para cualquier grupo G y cualquier representación ρ .

Ejemplo 1.17

Consideremos $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = e \rangle$, $V = \mathbb{F}G$ y la representación regular $\rho_{\text{reg}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}G)$. Como $G = \{e, a, a^2\} = \{g_1, g_2, g_3\}$ y V tiene como base a $\{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_i = g_i$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho(e)(v_1) &= v_1, & \rho(e)(v_2) &= v_2, & \rho(e)(v_3) &= v_3, \\ \rho(a)(v_1) &= v_2, & \rho(a)(v_2) &= v_3, & \rho(a)(v_3) &= v_1, \\ \rho(a^2)(v_1) &= v_3, & \rho(a^2)(v_2) &= v_1, & \rho(a^2)(v_3) &= v_2. \end{aligned}$$

Tomando $w = v_1 + v_2 + v_3$ y considerando $W = \text{span}(\{w\})$ el subespacio vectorial de dimensión 1 de V generado por w . Como

$$\begin{aligned} \rho(e)(w) &= \rho(e)(v_1 + v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + v_3 = w, \\ \rho(a)(w) &= \rho(a)(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3 + v_1 = w, \\ \rho(a^2)(w) &= \rho(a^2)(v_1 + v_2 + v_3) = v_3 + v_1 + v_2 = w, \end{aligned}$$

tenemos entonces que W es un subespacio vectorial G -invariante de V .

Proposición 1.18

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ dos representaciones de G sobre \mathbb{F} y sea $\vartheta: V \rightarrow W$ un morfismo lineal G -equivariante. Entonces los subespacios $\text{Ker } \vartheta$ y $\text{Im } \vartheta$ son G -invariantes.

Demostración. Sean $v \in \text{Ker } \vartheta$ y $\rho(u) \in \text{Im } \vartheta$. Entonces para todo $g \in G$ como ϑ es G -equivariante se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(g)(\vartheta(v)) = \vartheta(\rho(g)(v)) \text{ y} \\ \sigma(\vartheta(u)) &= \vartheta(\rho(g)(u)), \end{aligned}$$

por lo tanto $\rho(g)(v) \in \text{Ker } \vartheta$ y $\sigma(g)(\vartheta(u)) \in \text{Im } \vartheta$. Con esto al ser $g \in G$, $v \in \text{Ker } \vartheta$ y $\rho(u) \in \text{Im } \vartheta$ arbitrarios obtenemos el resultado. \square

Definición 1.19

Una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es *irreducible* si no es de grado cero y los únicos subespacios vectoriales de V que son G -invariantes son $\{0\}$ y V .

Una representación es *reducible* si no es irreducible. Es decir existe un subespacio G -invariante no trivial.

Observación 1.20

Cualquier representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de grado 1 es irreducible, ya que al tener $\dim(V) = 1$, los únicos subespacios de V son $\{0\}$ y V .

Ejemplo 1.21

Como la representación trivial $\rho: G \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C})$ de un grupo finito es irreducible al ser de grado 1, concluimos que todo grupo finito tiene una representación irreducible.

Definición 1.22

Dada una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$, diremos que un subespacio vectorial G -equivariante U de V es *irreducible* si la representación $\rho|_U: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ definida como

$$\rho|_U(g)(u) = \rho(g)(u),$$

es irreducible.

Ejemplo 1.23

Para una representación reducible $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$, tomando una base $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ del subespacio vectorial G -invariante W y extendiéndola a una base $\tilde{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de V , obtenemos una representación equivalente $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$ y para todo $g \in G$ tenemos

$$(1.1) \quad \sigma(g) = \left(\begin{array}{c|c} X(g) & 0 \\ \hline Y(g) & Z(g) \end{array} \right),$$

para unas matrices $X(g)$, $Y(g)$ y $Z(g)$, donde $X(g)$ es una matriz de $k \times k$.

Una representación de grado n es reducible si y sólo si es equivalente a una representación de la forma (1.1).

Observación 1.24

Las funciones $g \rightarrow X(g)$ y $g \rightarrow Y(g)$ en (1.1) son representaciones de G en $\text{GL}(k, \mathbb{F})$ y en $\text{GL}(n - k, \mathbb{F})$ respectivamente.

1.3. Teorema de Maschke

Aplicando las mismas ideas del ultimo ejemplo de la sección anterior, notamos que para una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$, si tenemos que

$$V = U \oplus W,$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

con U y W subespacios vectoriales G -invariantes de V , tomando $B_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base de U y $B_2 = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base de W , obtenemos una base $B = \{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k\}$ para V . Con esta base obtenemos una representación $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(m+k, \mathbb{F})$ que es equivalente a ρ , dada por

$$\sigma(g) = \left(\begin{array}{c|c} X(g) & 0 \\ \hline 0 & Y(g) \end{array} \right),$$

con $X(g) \in \text{GL}(m, \mathbb{F})$ y $Y(g) \in \text{GL}(k, \mathbb{F})$.

Más generalmente, si $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, es una suma directa de subespacios vectoriales G -invariantes U_i , y B_i es una base de U_i , entonces podemos amalgamar B_1, \dots, B_r para obtener una base B de V y una representación, que es equivalente a ρ , $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$ definida como

$$\sigma(g) = \begin{pmatrix} X_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_r(g) \end{pmatrix}.$$

El teorema de Maschke nos dice que siempre podemos descomponer al espacio vectorial V de una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ en subespacios vectoriales G -invariantes irreducibles, y tiene como consecuencia directa el hecho de que cada representación es equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles.

Definición 1.25

Dada una familia finita de representaciones $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$ con $i \in \{1, \dots, r\}$, tomando $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ definimos la *suma directa de representaciones* $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_r: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de la siguiente manera: tomando $g \in G$ y $v = v_1 + \dots + v_r \in V$ con $v_i \in V_i$ para $i \in \{1, \dots, r\}$ tenemos que

$$(\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_r)(g)(v) = \rho_1(g)(v_1) + \dots + \rho_r(g)(v_r)$$

Ejemplo 1.26

Sean dos representaciones, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{F})$. Denotemos

$$\rho(g) = X(g) \quad \text{y} \quad \sigma(g) = Y(g).$$

Usando el hecho de que \mathbb{F}^{n+m} es isomorfo a $\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m$, y que vía este isomorfismo tenemos que $\text{GL}(n+m, \mathbb{F})$ es isomorfo a $\text{GL}(n, \mathbb{F}) \oplus \text{GL}(m, \mathbb{F})$, obtenemos que $\rho \oplus \sigma$ es equivalente a la representación $\tau: G \rightarrow \text{GL}(n+m, \mathbb{F})$ dada por

$$\tau(g) = \left(\begin{array}{c|c} X(g) & 0 \\ \hline 0 & Y(g) \end{array} \right)$$

Observación 1.27

La suma directa de representaciones $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ es reducible ya que cada V_i es G -invariante, y $V_i \neq \{0\}$, $V_i \neq V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.

Teorema 1.28 (Teorema de Maschke)

Sean G un grupo finito, y $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{F} . Si U es un subespacio vectorial G -invariante de V , entonces existe un subespacio vectorial G -invariante W de V tal que

$$V = U \oplus W.$$

Demostración. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interior en V . Este producto existe ya que si la dimensión de V es n , entonces V es isomorfo a \mathbb{F}^n y en el espacio vectorial \mathbb{F}^n , con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, siempre existe el producto interior canónico.

A continuación construimos un producto interior que es invariante por la representación de G y está definido en $u, v \in V$ como

$$\langle u, v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)(u), \rho(g)(v) \rangle.$$

Este producto es invariante bajo los automorfismos $\rho(x)$ con $x \in G$, ya que si el índice g corre sobre todo el grupo G , entonces el índice $h = gx$ corre sobre todo G y así

$$\begin{aligned} \langle \rho(x)(u), \rho(x)(v) \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(x)(u), \rho(g)\rho(x)(v) \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle \rho(h)(u), \rho(h)(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle_G. \end{aligned}$$

Sea W el complemento ortogonal de U respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$, entonces tenemos que $V = U \oplus W$. Como U es G -invariante entonces para $g \in G$ y $u \in U$ tenemos que $\rho(g)(u) \in U$, y tomando $w \in W$ tenemos por construcción que

$$0 = \langle w, u \rangle_G = \langle \rho(g)(w), \rho(g)(u) \rangle_G.$$

Por lo tanto tenemos que para $g \in G$ y $w \in W$ arbitrarios $\rho(g)(w)$ es ortogonal a U respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ y por tanto $\rho(g)(w) \in W$. Así tenemos que W es un subespacio vectorial G -invariante y esto completa la prueba del teorema de Maschke. \square

Observación 1.29

Por el teorema de Maschke tenemos que ρ es equivalente a la representación $\sigma \oplus \tau$ donde $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ y $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ están dadas por

$$\sigma(g) := \rho(g)|_U \quad \text{y} \quad \tau(g) := \rho(g)|_W.$$

Entonces ρ es reducible, es equivalente a una suma directa de representaciones.

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Definición 1.30

Decimos que una representación $\rho: G \rightarrow V$ es *completamente reducible* si ρ es equivalente a $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$, donde cada $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$ es una representación irreducible.

Por el siguiente teorema vemos que toda representación es completamente irreducible.

Teorema 1.31

Si G es un grupo finito, entonces cada representación no cero ($V \neq \{0\}$), $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de G sobre \mathbb{F} , es completamente reducible.

Demostración. Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación no cero. La demostración es por inducción sobre el grado de la representación ρ . Si $\deg(\rho) = \dim(V) = 1$ entonces $\{0\}$ y V son los únicos subespacios vectoriales de V . Por lo tanto ρ es irreducible. Supongamos que el resultado es cierto para representaciones de grado menor que n , lo cual es nuestra hipótesis de inducción.

Si ρ es irreducible entonces el resultado es cierto, así que supongamos que ρ es reducible. Entonces V tiene un subespacio vectorial G -invariante U distinto de $\{0\}$ y V . Por el teorema de Mascke existe un subespacio vectorial G -invariante W tal que $V = U \oplus W$.

Como en la observación 1.29, dos representaciones $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ y $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(W)$, tales que ρ es equivalente a $\sigma \oplus \tau$. Como $\deg(\sigma) = \dim(U) < \dim(V) = \deg(\rho)$ y $\deg(\tau) = \dim(W) < \dim(V) = \deg(\rho)$, tenemos entonces por la hipótesis de inducción que σ es equivalente a una representación de la forma

$$\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_r,$$

donde cada $\sigma_i: G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$ es irreducible; y también de manera análoga τ es equivalente a una representación de la forma

$$\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_s,$$

donde cada $\tau_j: G \rightarrow \text{Aut}(W_j)$ es irreducible.

Así tenemos que ρ es equivalente a la representación

$$\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_r \oplus \tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_s,$$

y hemos probamos el resultado. □

Este último teorema nos dice que cada representación es equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles. Por lo tanto para estudiar a las representaciones, nos concentramos en las representaciones irreducibles.

Primero que nada damos todas las representaciones irreducibles de grupos finitos abelianos sobre \mathbb{C} , vía el Lema de Schur (1.32).

Teorema 1.32 (Lema de Schur)

Tomemos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y sea G un grupo finito. Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ dos representaciones irreducibles de G sobre \mathbb{F} .

- (1) Si $\vartheta: V \rightarrow W$ es un morfismo lineal G -equivariante de espacios vectoriales, entonces se tiene que ϑ es un isomorfismo que hace a ρ y σ equivalentes, ó $\vartheta(v) = 0$ para todo $v \in V$.
- (2) Si $\vartheta: V \rightarrow V$ es un isomorfismo G -equivariante entonces ϑ es un múltiplo escalar del morfismo identidad.

Demostración. (1) Supongamos que $\text{Im } \vartheta \neq \{0\}$. Recordemos que por la proposición 1.18 tenemos que $\text{Im } \vartheta$ es un subespacio vectorial G -invariante de W y como W es irreducible, obtenemos que $\text{Im } \vartheta = W$. Igualmente tenemos por la proposición 1.18 que $\text{Ker } \vartheta$ es un subespacio vectorial G -invariante y además sabemos que $\text{Ker } \vartheta \neq V$. Juntando esto con el hecho de que V es irreducible, entonces $\text{Ker } \vartheta = \{0\}$ y así ϑ es un isomorfismo.

(2) Tomando una base B de V tenemos que V es isomorfo a \mathbb{F}^n , con $n = \dim(V)$, y $\text{Aut}(V)$ es isomorfo a $\text{GL}(n, \mathbb{F})$. Sea $A \in \text{GL}(n, \mathbb{F})$ la matriz asociada a ϑ vía el isomorfismo. Debido a que $\det(A - tI_n)$ es un polinomio de una variable con coeficientes en \mathbb{C} , entonces tiene una raíz en \mathbb{C} . Por lo tanto existe un valor propio $\lambda \in \mathbb{F}$ de ϑ , así que $\text{Ker}(\vartheta - \lambda \text{Id}_V) \neq \{0\}$. También tenemos para $v \in V$, que

$$\rho(g)(\vartheta(v) - \lambda v) = \vartheta(\rho(g)(v)) - \lambda \rho(g)(v),$$

y por tanto $\text{Ker}(\vartheta - \lambda \text{Id}_V)$ es un subespacio vectorial G -invariante no trivial de V . Como V es irreducible tenemos que $\text{Ker}(\vartheta - \lambda \text{Id}_V) = V$. Por lo tanto

$$(\vartheta - \lambda \text{Id}_V)(v) = 0 \quad \text{para todo } v \in V.$$

Es decir, $\vartheta = \lambda \text{Id}_V$, como se deseaba. □

La parte (2) del Lema de Schur tiene la siguiente proposición inversa.

Proposición 1.33

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G en V sobre \mathbb{C} , y supongamos que todo morfismo lineal de V a V que es G -equivariante es un múltiplo escalar de Id_V . Entonces ρ es irreducible.

Demostración. Supongamos que ρ es reducible, así que existe un subespacio vectorial G -invariante U de V distinto de $\{0\}$ y V . Por el teorema de Maschke, hay un subespacio vectorial G -invariante W de V tal que

$$V = U \oplus W.$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Entonces al proyección $\pi: V \rightarrow V$ definida como $\pi(u + w) = u$ para todo $u \in U$, $w \in W$, es G -equivariante, ya que para todo $g \in G$ se cumple

$$\pi(\rho(g)(u + w)) = \pi(\rho(g)(u)) + \pi(\rho(g)(w)) = \rho(g)(u) = \rho(g)(\pi(u + w)).$$

Claramente π no es un múltiplo escalar de Id_V , lo cual es una contradicción de nuestras hipótesis. Por lo tanto ρ es irreducible. \square

Proposición 1.34

Si G es un grupo abeliano finito, entonces toda representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ irreducible sobre \mathbb{C} tiene grado 1.

Demostración. Sean G un grupo abeliano finito, $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación irreducible sobre \mathbb{C} y $x \in G$. Como G es abeliano se tiene para todo $v \in V$, $g \in G$ lo siguiente

$$\rho(g)(\rho(x)(v)) = \rho(gx)(v) = \rho(xg)(v) = \rho(x)(\rho(g)(v)),$$

y por lo tanto el automorfismo $\rho(x): V \rightarrow V$ es G -equivariante. Por el Lema de Schur (2) (teorema 1.32), este automorfismo es un múltiplo escalar del morfismo identidad Id_V , es decir $\lambda_x \text{Id}_V$. Entonces

$$\rho(x)(v) = \lambda_x v \quad \text{para todo } v \in V.$$

Esto implica que todo subespacio vectorial de V es G -invariante. Como ρ es irreducible, deducimos que $\deg(\rho) = \dim(V) = 1$. \square

Utilizando el siguiente resultado de teoría de grupos (ver [11, pp. 100]).

Teorema 1.35

Todo grupo abeliano finito G es isomorfo a un producto directo de grupos cíclicos

$$C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}.$$

Es claro que para conocer las representaciones irreducibles de grupos abelianos finitos basta conocer las representaciones irreducibles de productos de grupos cíclicos.

Sea $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ y para $i \in \{1, \dots, r\}$ sea c_i un generador de C_{n_i} . Tomemos

$$g_i = \underbrace{(e, \dots, c_i, \dots, e)}_{i\text{-ésima posición}}.$$

Entonces

$$G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle, \text{ con } g_i^{n_i} = e \text{ y } g_i g_j = g_j g_i \text{ para todo } i, j.$$

1.3. TEOREMA DE MASCHKE

Consideremos ahora una representación irreducible $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ de G sobre \mathbb{C} . Por la proposición 1.34, vemos que $n = 1$, así que para $i \in \{1, \dots, r\}$ existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que

$$\rho(g_i) = (\lambda_i)$$

(donde (λ_i) es una matriz de 1×1). Como g_i tiene orden n_i , entonces se sigue que $\lambda_i^{n_i} = 1$; esto es, λ_i es una n_i -raíz de la unidad. También, los valores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ determinan ρ , ya que para $g \in G$, tenemos $g = g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r}$ para ciertos enteros i_1, \dots, i_r , y así

$$(1.2) \quad \rho(g) = \rho(g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r}) = (\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_r^{i_r}) \in \text{GL}(1, \mathbb{C}).$$

Denotemos a una representación ρ de G que satisface (1.2) para todo i_1, \dots, i_r , como

$$\rho = \rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}.$$

De manera recíproca, dadas cualesquiera n_i -raíces de la unidad λ_i con $i \in \{1, \dots, r\}$, la función

$$g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r} \rightarrow (\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_r^{i_r})$$

es una representación de G . Existen $n_1 \cdots n_r$ representaciones que son de esta forma, y cualesquiera dos distintas de ellas no son equivalentes.

Con esto hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1.36

Sea G un grupo abeliano finito $C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$. Las representaciones $\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ de G construidas anteriormente son irreducibles y tienen grado 1. Hay $|G|$ de estas representaciones, y cada representación irreducible de G sobre \mathbb{C} es equivalente a exactamente una de ellas.

Consideremos $H = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n generado por g , y sea $\rho: H \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación. Por el teorema 1.31 podemos suponer sin pérdida de generalidades que

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r,$$

es una suma directa de representaciones irreducibles $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$ sobre \mathbb{C} . Cada representación ρ_i tiene grado 1, por la proposición 1.34; sea u_i un vector que genera a U_i . Tomemos $\omega = e^{2\pi i/n}$. Entonces para cada i , existe un entero m_i tal que

$$\rho_i(g)(u_i) = \omega^{m_i} u_i.$$

Así para la base $\{u_1, \dots, u_r\}$ de $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ tenemos que la matriz asociada al automorfismo $\rho(g)$ es de la forma

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega^{m_r} \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado es consecuencia directa de esto.

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Proposición 1.37

Sea G un grupo finito y $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{C} . Si $g \in G$, entonces existe una base B de V para la cual la matriz $A(g)$ asociada al automorfismo $\rho(g)$ respecto a B es diagonal. Si g tiene orden n , entonces las entradas en la diagonal de la matriz $A(g)$ son n -raíces de la unidad.

Demostración. Sea $H = \langle g \rangle < G$. Como $\rho|_H: H \rightarrow \text{Aut}(V)$ es una representación de H sobre \mathbb{C} , el resultado se sigue de (1.3). \square

Por último veamos que un grupo finito G tiene un número finito de representaciones irreducibles. Para esto consideraremos la representación fiel $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}G)$ y el hecho de que toda representación es completamente reducible.

Proposición 1.38

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ dos representaciones de G sobre \mathbb{C} , y sea $\vartheta: V \rightarrow W$ un morfismo lineal G -equivariante. Entonces existe un subespacio vectorial G -invariante U de V tal que $V = \text{Ker } \vartheta \oplus U$ y $U \cong \text{Im } \vartheta$.

Demostración. Como $\text{Ker } \vartheta$ es por la proposición 1.18 un subespacio vectorial G -equivariante de V , entonces existe por el teorema de Maschke un subespacio vectorial G -invariante U de V tal que $V = \text{Ker } \vartheta \oplus U$. Definamos una función $\bar{\vartheta}: U \rightarrow \text{Im } \vartheta$ como

$$\bar{\vartheta}(u) = \vartheta(u).$$

Veamos que $\bar{\vartheta}$ es un isomorfismo G -equivariante entre U y $\text{Im } \vartheta$. Claramente al ser ϑ un morfismo lineal G -equivariante, entonces $\bar{\vartheta}$ es un morfismo lineal G -equivariante. Si $u \in \text{Ker } \bar{\vartheta}$ entonces $u \in \text{Ker } \vartheta \cap U = \{0\}$; por lo que $\text{Ker } \bar{\vartheta} = \{0\}$. Ahora sea $w \in \text{Im } \vartheta$; por lo que $w = \vartheta(v)$ para algún $v \in V$. Escribiendo a $v = k + u$ con $k \in \text{Ker } \vartheta$, $u \in U$ tenemos que

$$w = \vartheta(v) = \vartheta(k) + \vartheta(u) = \vartheta(u) = \bar{\vartheta}(u).$$

Por lo tanto $\text{Im } \bar{\vartheta} = \text{Im } \vartheta$. Con esto hemos establecido que $\bar{\vartheta}: U \rightarrow \text{Im } \vartheta$ es un isomorfismo lineal G -equivariante. \square

Proposición 1.39

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{C} , y escribamos a

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r,$$

como una suma directa de representaciones irreducibles $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$ de G sobre \mathbb{C} . Si U es cualquier subespacio vectorial G -equivariante irreducible de V , entonces $U \cong U_i$ para algún i .

1.3. TEOREMA DE MASCHKE

Demostración. Como V es isomorfo de manera G -equivariante a $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, podemos suponer sin pérdida de generalidades que

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r.$$

Así para $u \in V$, tenemos que $u = u_1 + \cdots + u_r$ para vectores únicos $u_i \in U_i$. Definimos $\pi_i: U \rightarrow U_i$ como

$$\pi_i(u) = u_i.$$

Entonces $\pi_i: U \rightarrow U_i$ es un morfismo lineal G -equivariante ya que $\rho(g)(u) = \rho_1(g)(u_1) + \cdots + \rho_r(g)(u_r)$ para todo $g \in G$, y por tanto

$$\pi_i(\rho(g)(u)) = \rho_i(g)(u_i).$$

Como $\rho|_U$ y ρ_i son irreducibles, y $\pi_i \neq 0$, entonces el Lema de Schur (1) (teorema 1.32) implica que π_i es un isomorfismo G -equivariante. Por lo tanto $U \cong U_i$. Es decir $\rho|_U$ es equivalente a ρ_i . \square

Teorema 1.40

Consideremos la representación regular $\rho_{reg}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}G)$, y escribamos

$$\rho_{reg} = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r,$$

como una suma directa de representaciones donde cada $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$ es una representación irreducible de G sobre \mathbb{C} . Entonces toda representación irreducible $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ de G sobre \mathbb{C} es equivalente a alguna de las representaciones ρ_i .

Demostración. Sea $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ una representación irreducible de G sobre \mathbb{C} , y sea $w \in W$ un vector no cero. Suponiendo que $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, notemos que $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i)(w) \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\}$ es un subespacio vectorial G -invariante de W ; como σ es irreducible, se sigue entonces que

$$(1.4) \quad W = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i)(w) \mid \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Definamos ahora $\vartheta: \mathbb{C}G \rightarrow W$ como

$$\vartheta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i)(w).$$

Claramente ϑ es un morfismo lineal, e $\text{Im } \vartheta = W$, por (1.4). Más aun, ϑ es un morfismo lineal G -equivariante, ya que para $g \in G$, tenemos

$$\vartheta\left(\rho_{reg}(g)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\right)\right) = \vartheta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g g_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g g_i)(w) = \sigma(g)\left(\vartheta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\right)\right).$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Por la proposición 1.38, existe un subespacio vectorial G -equivariante U de $\mathbb{C}G$ tal que

$$\mathbb{C}G = U \oplus \text{Ker } \vartheta \text{ y } U \cong \text{Im } \vartheta = W.$$

Lo último nos dice que $\rho_{\text{reg}}|_U$ es equivalente a σ , y al ser σ irreducible, entonces también lo es $\rho_{\text{reg}}|_U$. Por la proposición 1.39 tenemos que $\rho_{\text{reg}}|_U$ es equivalente a alguna ρ_i . Por lo tanto σ es equivalente a alguna de las representaciones ρ_i . \square

Este teorema nos dice que existe un conjunto finito de representaciones irreducibles de G sobre \mathbb{C} tal que toda representación irreducible de G sobre \mathbb{C} es equivalente a alguna de ellas. Esto último es expresado en el siguiente corolario.

Corolario 1.41

Si G es un grupo finito, entonces existen un número finito de representaciones irreducibles no equivalentes entre sí.

Más adelante daremos una forma de saber cuantas representaciones irreducibles hay.

1.4. Caracteres de una representación

A continuación estudiaremos los caracteres de un grupo, los cuales nos dicen básicamente como se comportan las representaciones, y son más sencillas de obtener.

Definición 1.42

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G en V sobre \mathbb{C} , y sea B una base de V . Un *carácter* de G (o el carácter de ρ) es la función $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\chi(g) = \text{tr}(A(g)),$$

donde $A(g)$ es la matriz asociada al automorfismo $\rho(g)$ respecto a B . Más aún, χ es un carácter *irreducible* de G si es el carácter de una representación irreducible; y χ es *reducible* si es el carácter de una representación reducible.

El carácter de la representación no depende de la elección de la base B , ya que si \tilde{B} es otra base de V , entonces para la matriz $\tilde{A}(g)$ asociada al automorfismo $\rho(g)$ respecto a la base \tilde{B} , tenemos

$$\tilde{A}(g) = T^{-1}A(g)T$$

donde T es la matriz de cambio de base y por lo tanto

$$\text{tr}(\tilde{A}(g)) = \text{tr}(T^{-1}A(g)T) = \text{tr}(A(g)).$$

1.4. CARACTERES DE UNA REPRESENTACIÓN

Ejemplo 1.43

Sea G un grupo cíclico de orden n generado por g . Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una n -ésima raíz de la unidad. Por el teorema 1.36 y por (1.3) tenemos que hay n representaciones irreducibles ρ_1, \dots, ρ_n que son de la forma

$$\rho_i(g) = (\omega^i).$$

Por lo tanto hay n caracteres irreducibles χ_1, \dots, χ_n que son de la forma

$$\chi_i(g) = \omega^i.$$

Proposición 1.44

- (1) *Representaciones equivalentes tienen el mismo carácter.*
 (2) *Si x y y son elementos conjugados en el grupo G , entonces*

$$\chi(x) = \chi(y).$$

Demostración. (1) Sean $\vartheta: V \rightarrow W$ un isomorfismo de espacios vectoriales G -invariante y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces $\tilde{B} = \{\vartheta(v_1), \dots, \vartheta(v_n)\}$ es una base de W ; así, si $A(g)$ es la matriz asociada a $\rho(g)$ respecto a B y $\tilde{A}(g)$ es la matriz asociada a $\sigma(g)$ respecto a \tilde{B} , como $\vartheta(\rho(g)(v_i)) = \sigma(g)(\vartheta(v_i))$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces se cumple que

$$A(g) = \tilde{A}(g).$$

Por lo tanto el carácter de ρ coincide con el carácter de σ al no depender de las bases. (2) Supongamos que x y y son elementos conjugados en G , así que $x = g^{-1}yg$ para algún elemento $g \in G$. Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{C} , y sea B una base de V . Entonces para las matrices asociadas a los automorfismos tenemos

$$A(x) = A(g^{-1}yg) = A(g^{-1})A(y)A(g),$$

ya que $\rho(g^{-1}yg) = \rho(g^{-1})\rho(y)\rho(g)$ y $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$. Por lo tanto tenemos que $\chi(x) = \chi(y)$. □

Definición 1.45

Si χ es el carácter de la representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de G sobre \mathbb{C} , entonces la dimensión de V es llamada el *grado* de χ .

Ejemplo 1.46

Si $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es cualquier representación de G sobre \mathbb{C} de grado 1, entonces para cada $g \in G$ existe un número complejo λ_g tal que

$$\rho(g)(v) = \lambda_g v \quad \text{para todo } v \in V.$$

El carácter χ de ρ está dado por

$$\chi(g) = \lambda_g$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

y χ tiene grado 1. Los caracteres de grado 1 son llamados caracteres *lineales*; estos son, claramente, caracteres irreducibles.

Notemos que el teorema 1.36 nos da todos los caracteres irreducibles de grupos abelianos finitos; en particular, todos son caracteres lineales.

Todo carácter lineal de G es un homomorfismo de grupos de G al grupo multiplicativo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Ejemplo 1.47

El carácter de la representación trivial $1_G: G \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C})$, con $1_G(g) = (1)$ es un carácter lineal, llamado el carácter *trivial* de G . Lo denotamos también por 1_G .

Entonces

$$1_G: g \rightarrow 1 \quad \text{para todo } g \in G.$$

Así dado cualquier grupo G , conocemos al menos uno de los caracteres irreducibles de G , a saber el carácter trivial.

Proposición 1.48

Sea χ el carácter de una representación $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ de G sobre \mathbb{C} . Supongamos que $g \in G$ tiene orden m , y $e \in G$ es el elemento neutro de G . Entonces

- (1) $\chi(e) = \dim(V)$;
- (2) $\chi(g)$ es una suma de m -raíces de la unidad;
- (3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$;
- (4) $\chi(g)$ es un número real, si g es conjugado a g^{-1} .

Demostración. (1) Sea $n = \dim(V)$, y sea B una base de V . Entonces la matriz asociada al automorfismo $\rho(e) = \text{Id}_V$, es la matriz identidad I_n . De manera consecuente

$$\chi(e) = \text{tr}(I_n) = n,$$

y por tanto $\chi(e) = \dim(V)$.

(2) Por la proposición 1.37 existe una base B de V tal que la matriz asociada al automorfismo $\rho(g)$ es

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

donde cada ω_i es una m -raíz de la unidad. Por lo tanto tenemos que

$$\chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

1.4. CARACTERES DE UNA REPRESENTACIÓN

es una suma de m -raíces de la unidad.

(3) De manera análoga por la proposición 1.37 tenemos que la matriz asociada al automorfismo $\rho(g^{-1})$ es

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix}$$

y por tanto $\chi(g^{-1}) = \omega_1^{-1} + \cdots + \omega_n^{-1}$. Cada m -raíz de la unidad compleja ω satisface $\omega^{-1} = \bar{\omega}$, ya que para todo real t ,

$$(e^{it})^{-1} = e^{-it},$$

que es el conjugado complejo de e^{it} . Por lo tanto

$$\chi(g^{-1}) = \bar{\omega}_1 + \cdots + \bar{\omega}_n = \overline{\chi(g)}.$$

(4) Si g es conjugado a g^{-1} entonces $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ por la proposición 1.44 (2). También $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ por (3), y por tanto $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$; esto es, $\chi(g)$ es real. \square

El siguiente teorema nos da una primera idea de la importancia de los caracteres, mostrando que podemos determinar el núcleo de una representación a partir de conocer su carácter.

Teorema 1.49

Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ una representación de G y sea χ el carácter de ρ .

(1) Para $g \in G$,

$$|\chi(g)| = \chi(e) \text{ si y sólo si } \rho(g) = \lambda I_n \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C}.$$

(2) $\text{Ker } \rho = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$.

Demostración. (1) Sea $g \in G$, y supongamos que g tiene orden m . Si $\rho(g) = \lambda I_n$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λ es una m -raíz de la unidad, y $\chi(g) = \lambda n$, así que por lo tanto $|\chi(g)| = n = \chi(e)$.

De manera recíproca, supongamos que $|\chi(g)| = \chi(e)$. Por la proposición 1.37, existe una base B de \mathbb{C}^n de manera que la matriz asociada a $\rho(g)$ con respecto a esta base es

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

donde cada ω_i es una m -raíz de la unidad. Entonces

$$(1.5) \quad |\chi(g)| = |\omega_1 + \cdots + \omega_n| = n = \chi(e).$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Notemos que por la desigualdad del triángulo, para cualesquiera números complejos z_1, \dots, z_n tenemos que

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|,$$

con igualdad solamente cuando los argumentos z_1, \dots, z_n son todos iguales.

Como $|\omega_i| = 1$ para todo i , entonces de (1.5) tenemos que $\omega_i = \omega_j$ para todo i, j . Así

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_1 \end{pmatrix} = \omega_1 I_n.$$

Entonces para todas las bases B' de \mathbb{C}^n tenemos que la matriz asociada a $\rho(g)$ es $\omega_1 I_n$, y por lo tanto $\rho(g) = \lambda I_n$.

(2) Si $g \in \text{Ker } \rho$ entonces $\rho(g) = I_n$, y por tanto $\chi(g) = n = \chi(e)$. Supongamos ahora que $\chi(g) = \chi(e)$. Entonces por (1) tenemos que $\rho(g) = \lambda I_n$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Esto implica que $\chi(e) = \chi(g) = \lambda \chi(e)$, y por tanto $\lambda = 1$. Con esto $\rho(g) = I_n$, y entonces $g \in \text{Ker } \rho$. Así que hemos probado (2). \square

Definición 1.50

Si χ es el carácter de G , entonces el *núcleo* de χ , denotado por $\text{Ker } \chi$, está definido como

$$\text{Ker } \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}.$$

Decimos que χ es *fiel* si $\text{Ker } \chi = \{e\}$. Por el teorema 1.49 (2), si ρ es una representación de G sobre \mathbb{C} con carácter χ , entonces $\text{Ker } \rho = \text{Ker } \chi$, y por lo tanto el carácter χ de una representación ρ es fiel si y sólo si ρ es fiel.

Ejemplo 1.51

Sea G un grupo cíclico de orden n generado por $g \in G$. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una n -ésima raíz de la unidad, y consideremos la representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C})$ dada por $\rho(g^k) = (\omega^k)$. Entonces el carácter χ de ρ está dado por $\chi(g^k) = \omega^k$, y por tanto tenemos que $\omega^k = \chi(g^k) = \chi(e) = \chi(g^n) = \omega^n = 1$, si y sólo si $k = n$, y por tanto $g = e$. Entonces este carácter es fiel.

Proposición 1.52

Sea χ un carácter de G . Entonces $\bar{\chi}$ es un carácter de G . Si χ es irreducible, entonces $\bar{\chi}$ también lo es.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidades que χ es el carácter de una representación $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ (tomando posiblemente una base). Por lo cual

$$\chi(g) = \text{tr}(\rho(g)).$$

1.4. CARACTERES DE UNA REPRESENTACIÓN

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{C} , definimos la matriz conjugada $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$. Notemos que si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{C} , entonces

$$(1.6) \quad \overline{AB} = \overline{A} \overline{B},$$

ya que la entrada ij -ésima de $\overline{A} \overline{B}$ es

$$\sum_{k=1}^n \overline{a_{ik}} \overline{b_{kj}},$$

que es igual al conjugado complejo de $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, la ij -ésima entrada de AB .

Se sigue de (1.6) que la función $\overline{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, definida como

$$\overline{\rho}(g) = \overline{\rho(g)},$$

es una representación de G . Debido a que

$$\text{tr}(\overline{\rho}(g)) = \text{tr}(\overline{\rho(g)}) = \overline{\text{tr}(\rho(g))} = \overline{\chi(g)},$$

tenemos que el carácter de la representación $\overline{\rho}$ es $\overline{\chi}$.

Es claro que si ρ es reducible entonces $\overline{\rho}$ es reducible. Por lo tanto χ es irreducible si y sólo si $\overline{\chi}$ es irreducible. \square

Definición 1.53

El carácter *regular* de G es el carácter de la representación regular $\rho_{\text{reg}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}G)$. Lo denotamos como χ_{reg} .

El carácter regular es fiel ya que la representación regular es fiel.

Proposición 1.54

Si χ_{reg} es el carácter regular de G , entonces

$$\begin{aligned} \chi_{\text{reg}}(e) &= |G| \text{ y} \\ \chi_{\text{reg}}(g) &= 0 \text{ si } g \neq e. \end{aligned}$$

Demostración. Sean g_1, \dots, g_n los elementos del grupo finito G , y sea B la base $\{g_1, \dots, g_n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{C}G$. Por la proposición 1.48 (1), $\chi_{\text{reg}}(e) = \dim(\mathbb{C}G) = |G|$.

Tomemos ahora $g \in G$ distinto de $e \in G$. Entonces para $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $g_i g = g_j$ para algún j con $j \neq i$. Por lo tanto bajo la base B la matriz asociada al automorfismo $\rho_{\text{reg}}(g)$, dado por

$$\rho_{\text{reg}}(g)(g_i) = g g_i = g_j,$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

tiene puros ceros en el renglón i -ésimo excepto en la columna j -ésima; en particular la entrada ii -ésima es cero para todo i . Se sigue entonces que

$$\chi_{\text{reg}}(g) = 0.$$

□

Proposición 1.55

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{C} , y supongamos que

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r,$$

es una suma directa de representaciones irreducibles $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$. Entonces el carácter de ρ es igual a la suma de los caracteres de las representaciones ρ_1, \dots, ρ_r .

Demostración. Tomando bases B_1, \dots, B_r de los espacios U_i obtenemos que $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ es equivalente a la representación $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ dada por

$$\sigma(g) = \begin{pmatrix} X_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_r(g) \end{pmatrix}$$

donde $X_i(g)$ es la matriz asociada al automorfismo $\rho_i(g)$ respecto a la base B_i .

De esto se sigue que, si χ es el carácter de ρ y χ_i es el carácter de ρ_i , entonces $\chi(g) = \chi_1(g) + \cdots + \chi_r(g)$. □

1.5. El carcaj de McKay

El conjunto de todas las funciones $\vartheta: G \rightarrow \mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , definiendo la suma de dos funciones ϑ y ϕ como

$$(\vartheta + \phi)(g) = \vartheta(g) + \phi(g) \quad \text{para todo } g \in G,$$

y definiendo el producto escalar para $\lambda \in \mathbb{C}$ como

$$(\lambda\vartheta)(g) = \lambda(\vartheta(g)) \quad \text{para todo } g \in G.$$

A continuación estudiemos este espacio vectorial para conocer cuantas representaciones irreducibles puede tener un grupo finito G .

Definición 1.56

A este espacio vectorial le podemos definir un producto interno de la siguiente manera. Supongamos que ϑ y ϕ son funciones de G a \mathbb{C} . Definimos

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g) \overline{\phi(g)}.$$

Para cada pareja ϑ, ϕ , de funciones de G a \mathbb{C} , el número complejo $\langle \vartheta, \phi \rangle$ satisface las siguientes condiciones:

$$(1.7) \quad \langle \vartheta, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \vartheta \rangle}$$

esto sucede por que tenemos que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g) \overline{\phi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{(\phi(g) \vartheta(g))} = \overline{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \vartheta(g) \right)};$$

también para cualesquiera funciones ϑ_1, ϑ_2 y ϕ de G a \mathbb{C} se tiene para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ lo siguiente

$$(1.8) \quad \langle \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2, \phi \rangle = \lambda_1 \langle \vartheta_1, \phi \rangle + \lambda_2 \langle \vartheta_2, \phi \rangle$$

debido a que para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\lambda_1 \vartheta_1(g) + \lambda_2 \vartheta_2(g)) \overline{\phi(g)} = \lambda_1 \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta_1(g) \overline{\phi(g)} \right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta_2(g) \overline{\phi(g)} \right);$$

por último para toda función no cero ϑ , el producto interior es positivo

$$(1.9) \quad \langle \vartheta, \vartheta \rangle > 0$$

y esto último por que para todo $g \in G$, se tiene que $\vartheta(g) \overline{\vartheta(g)} = |\vartheta(g)|^2 \geq 0$ y al ser ϑ no cero, se tiene que $|\vartheta(h)| > 0$ para algún $h \in G$. Por lo tanto

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g) \overline{\vartheta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\vartheta(g)|^2 > 0.$$

Notemos que la condición (1.7) implica que $\langle \vartheta, \vartheta \rangle$ es siempre un número real, y que las condiciones (1.7) y (1.8) nos dan

$$\langle \phi, \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle \phi, \vartheta_1 \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle \phi, \vartheta_2 \rangle$$

para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y para cualesquiera funciones $\vartheta_1, \vartheta_2, \phi$ de G a \mathbb{C} .

Al ser los caracteres funciones $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$, con el producto interno definido arriba, obtenemos un producto interno de caracteres que cumple lo siguiente.

Proposición 1.57

Sean χ y ψ caracteres de G . Entonces se tiene que

$$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}),$$

y por lo tanto $\langle \chi, \psi \rangle$ es un número real

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Demostración. Por la proposición 1.48 (3) tenemos $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$ para todo $g \in G$. Por lo tanto

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

Como $\{g^{-1} \mid g \in G\} = G$, también tenemos, haciendo un cambio en el índice en la suma, que

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}.$$

Por lo tanto $\langle \chi, \psi \rangle$ es un número real. \square

Más aun el número real $\langle \chi, \psi \rangle$ es un entero, y usando el Lema de Schur (teorema 1.32), obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.58 (Relación de ortogonalidad de Schur)

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ dos representaciones irreducibles no isomorfas de G sobre \mathbb{C} , con caracteres χ y ψ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= 1, \quad y \\ \langle \chi, \psi \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Para demostrarlo, consideramos primero los siguientes resultados, que son consecuencia directa del Lema de Schur (teorema 1.32).

Corolario 1.59

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ representaciones irreducibles de G sobre \mathbb{C} , y sea $h: U \rightarrow V$ un morfismo lineal G -equivariante. Entonces el morfismo lineal $\tilde{h}: U \rightarrow V$ definido como

$$\tilde{h} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) h \rho(g)$$

es G -equivariante y cumple lo siguiente.

(a) Si ρ y σ no son equivalentes, entonces $\tilde{h} = 0$.

(b) Si $V = U$ y $\rho = \sigma$ entonces $\tilde{h} = (1/n) \text{tr}(h) \text{Id}_U$, donde $n = \dim(U)$.

Demostración. Primero notemos que \tilde{h} es G -equivariante ya que para $x \in G$, y observando que si $g \in G$ corre sobre todo G entonces también lo hace $y = gx$, tenemos que

$$\sigma(x^{-1}) \tilde{h} \rho(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(x^{-1} g^{-1}) h \rho(gx) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \sigma(y^{-1}) h \rho(y) = \tilde{h}$$

y por tanto para todo $x \in G$ obtenemos $\tilde{h} \rho(x) = \sigma(x) \tilde{h}$; es decir \tilde{h} es un morfismo lineal G -equivariante.

La parte (a) se sigue aplicando el Lema de Schur (teorema 1.32) a la función \tilde{h} . Para la parte (b) del corolario tenemos que por el Lema de Schur (teorema 1.32) que $\tilde{h} = \lambda \text{Id}_U$ para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$. Más aun en este caso tenemos por un lado que

$$\text{tr}(\tilde{h}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\rho(g^{-1})h\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(h) = \text{tr}(h),$$

y por otro lado tenemos $\text{tr}(\tilde{h}) = \text{tr}(\lambda \text{Id}_U) = n\lambda$. Juntando las dos igualdades obtenemos que $\lambda = (1/n)\text{tr}(h)$. \square

Tomando $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de U y $B' = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V obtenemos representaciones $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ equivalente a ρ , y $\tilde{\sigma}: G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ equivalente a σ .

Reinterpretemos el corolario 1.59 para las representaciones $\tilde{\rho}$ y $\tilde{\sigma}$. Las entradas de las matrices $(a_{ij}(g)) = \tilde{\rho}(g)$ y $(b_{kl}(g)) = \tilde{\sigma}(g)$ están dadas como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(g)(u_j) &= \sum_i a_{ij}(g)u_i \text{ y} \\ \tilde{\sigma}(g)(v_l) &= \sum_k b_{kl}(g)v_k. \end{aligned}$$

Las entradas de la matriz (x_{ki}) asociada al morfismo lineal $h: U \rightarrow V$ respecto a las bases B y B' están dados por

$$h(u_i) = \sum_k x_{ki}v_k,$$

y de manera análoga las entradas de la matriz (\tilde{x}_{ki}) asociada al morfismo G -equivariante \tilde{h} están dados por

$$(1.10) \quad \tilde{h}(u_i) = \sum_k \tilde{x}_{ki}v_k.$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Pero por como definimos \tilde{h} tenemos entonces para $u_i \in B$ lo siguiente

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad \tilde{h}(u_i) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) h \rho(g)(u_i) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) h \left(\sum_j a_{ji}(g) u_j \right) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) \left(\sum_j a_{ji}(g) \sum_l x_{lj} v_l \right) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{l,j} x_{lj} a_{ji}(g) \left(\sum_k b_{kl}(g^{-1}) v_k \right) \\
 &= \sum_k \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j,l \\ g \in G}} b_{kl}(g^{-1}) x_{lj} a_{ji}(g) \right) v_k
 \end{aligned}$$

Así juntando (1.10) y (1.11) obtenemos que

$$(1.12) \quad \tilde{x}_{ki} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j,l \\ g \in G}} b_{kl}(g^{-1}) x_{lj} a_{ji}(g).$$

Si $\tilde{\rho}$ y $\tilde{\sigma}$ son representaciones irreducibles no isomorfas, entonces $\tilde{h} = 0$ y por tanto

$$(1.13) \quad 0 = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j,l \\ g \in G}} b_{kl}(g^{-1}) x_{lj} a_{ji}(g).$$

Corolario 1.60

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ representaciones irreducibles no isomorfas de G sobre \mathbb{C} . Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de U y sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ base de V . Tomando $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ la representación equivalente a ρ , y $\tilde{\sigma}: G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ la representación equivalente a σ , con $\tilde{\rho}(g) = (a_{ij}(g))$ y $\tilde{\sigma}(g) = (b_{kl}(g))$, entonces para cualesquiera i, j, k, l tenemos

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{kl}(g^{-1}) a_{ij}(g) = 0.$$

Demostración. Como ρ y σ son irreducibles y no isomorfas, entonces $\tilde{\rho}$ y $\tilde{\sigma}$ son irreducibles y no isomorfas. Sea $h: U \rightarrow V$ el morfismo lineal definido por la matriz (x_{ki}) con la entrada $x_{lj} = 1$ y el resto igual a cero. Entonces por la ecuación (1.13) tenemos que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{kl}(g^{-1}) a_{ji}(g) = 0,$$

para todos los índices i, j, k, l . □

Corolario 1.61

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(U)$ una representación irreducible de G sobre \mathbb{C} y sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de U . Entonces tomando $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ la representación equivalente a ρ con $\tilde{\rho}(g) = (a_{ij}(g))$ tenemos

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{kl}(g^{-1})a_{ji}(g) = \frac{1}{n} \delta_{ki} \delta_{lj} = \begin{cases} 1/n & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde δ_{ki} es la delta de Kronecker.

Demostración. Tomando (x_{lj}) una matriz de $n \times n$ tenemos un morfismo lineal $h: U \rightarrow U$, y de ésta tenemos un morfismo G -equivariante $\tilde{h}: U \rightarrow U$. Por el corolario 1.59 (b) tenemos que $\tilde{h} = (1/n) \text{tr}(h) \text{Id}_U$, es decir si (\tilde{x}_{ki}) es su matriz asociada tenemos que

$$\tilde{x}_{ki} = \frac{1}{n} \text{tr}(h) \delta_{ki} = \frac{1}{n} \sum_{l,j} \delta_{lj} x_{lj} \delta_{ki}.$$

Juntando esto con la ecuación (1.12) obtenemos

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j,l \\ g \in G}} a_{kl}(g^{-1}) x_{lj} a_{ji}(g) = \frac{1}{n} \text{tr}(h) \delta_{ki} = \frac{1}{n} \sum_{l,j} \delta_{lj} x_{lj} \delta_{ki}.$$

Tomando la matriz (x_{lj}) con $x_{lj} = 1$ y el resto de los coeficientes cero obtenemos que, para todos los índices i, j, k, l , sucede

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{kl}(g^{-1}) a_{ji}(g) = \frac{1}{n} \delta_{ki} \delta_{lj}.$$

□

Con estos resultados ya podemos probar el teorema de relación de ortogonalidad de Schur.

Demostración de la relación de ortogonalidad de Schur. Como dos representaciones equivalentes tienen el mismo carácter, tomemos $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de U y $\{v_1, \dots, v_m\}$ base de V . Sean $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ la representación equivalente a ρ , con $\tilde{\rho}(g) = (a_{ij}(g))$ y $\tilde{\sigma}: G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ la representación equivalente a σ con $\tilde{\sigma}(g) = (b_{kl}(g))$. Entonces para el carácter χ de ρ y el carácter ψ de σ tenemos $\chi(g) = \text{tr}(\tilde{\rho}(g))$ y $\psi(g) = \text{tr}(\tilde{\sigma}(g))$. Así obtenemos que el producto interno de caracteres cumple por el corolario 1.61 lo

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

siguiente

$$\begin{aligned}
 \langle \chi, \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\chi(g) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\tilde{\rho}(g^{-1}))\text{tr}(\tilde{\rho}(g)) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_j a_{jj}(g^{-1}) \right) \left(\sum_i a_{ii}(g) \right) \\
 &= \sum_{i,j} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{jj}(g^{-1})a_{ii}(g) \right) \\
 &= \sum_{i,j} \left(\frac{1}{n} \delta_{ji} \delta_{ji} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=i} \delta_{ji}^2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Y por ultimo por el corolario 1.60 tenemos que se cumple

$$\begin{aligned}
 \langle \chi, \psi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g^{-1})\chi(g) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\tilde{\rho}(g^{-1}))\text{tr}(\tilde{\sigma}(g)) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_j b_{jj}(g^{-1}) \right) \left(\sum_i a_{ii}(g) \right) \\
 &= \sum_{i,j} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{jj}(g^{-1})a_{ii}(g) \right) \\
 &= \sum_{i,j} \frac{1}{|G|} \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

El teorema 1.40 nos dice que para un grupo finito G existen un número finito de representaciones irreducibles ρ_1, \dots, ρ_r de G sobre \mathbb{C} . Si χ_i es el carácter de ρ_i , entonces por el teorema 1.58, tenemos que

$$(1.14) \quad \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{para todo } i, j.$$

En particular, esto último implica que los caracteres irreducibles χ_1, \dots, χ_r son todos distintos.

Tomemos ahora ρ una representación de G sobre \mathbb{C} . Por el teorema 1.28, ρ es equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles de G sobre \mathbb{C} . Cada una de estas representaciones es equivalente a alguna ρ_i , por lo que existen enteros no negativos d_1, \dots, d_r tales que

$$(1.15) \quad \rho \cong (\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_1) \oplus (\rho_2 \oplus \dots \oplus \rho_2) \oplus \dots \oplus (\rho_r \oplus \dots \oplus \rho_r),$$

donde para cada i , hay d_i factores ρ_i .

Por lo tanto el carácter ψ de ρ está dado por

$$(1.16) \quad \psi = d_1\chi_1 + \dots + d_r\chi_r.$$

Usando (1.14), obtenemos de esto último que

$$(1.17) \quad \langle \psi, \chi_i \rangle = \langle \chi_i, \psi \rangle = d_i, y$$

$$(1.18) \quad \langle \psi, \psi \rangle = d_1^2 + \dots + d_r^2.$$

En resumen hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1.62

Sea χ_1, \dots, χ_r los caracteres irreducibles de G . Si ψ es cualquier carácter de G , entonces

$$\psi = d_1\chi_1 + \dots + d_r\chi_r$$

para algunos enteros no negativos d_1, \dots, d_r . Además se tiene que,

$$d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle, y$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^r d_i^2.$$

Observación 1.63

El teorema 1.58 también nos dice que en el espacio vectorial que consiste de funciones de G a \mathbb{C} los caracteres irreducibles de G , χ_1, \dots, χ_k , son linealmente independientes, ya que si

$$\lambda_1\chi_1 + \dots + \lambda_k\chi_k = 0,$$

tenemos por (1.14) que

$$0 = \langle \lambda_1\chi_1 + \dots + \lambda_r\chi_r, \chi_i \rangle = \lambda_i.$$

El siguiente teorema nos da un método efectivo para determinar si una representación es irreducible o no.

Teorema 1.64

Sea $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{C} con carácter ψ . Entonces ρ es irreducible si y sólo si $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Demostración. Si ρ es irreducible entonces por el teorema 1.58 tenemos que $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

De manera recíproca, supongamos que $\langle \psi, \psi \rangle = 1$. Además tenemos que

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_r\chi_r$$

para enteros no negativos d_i , y por (1.17), tenemos

$$1 = \langle \psi, \psi \rangle = d_1^2 + \cdots + d_r^2.$$

Se sigue que uno de los enteros d_i es 1 y el resto cero. Entonces por (1.15), $\rho = \rho_i$ para algún i , y por lo tanto es irreducible. \square

Con todo esto podemos probar que toda representación ρ de G sobre \mathbb{C} está completamente determinada por su carácter.

Teorema 1.65

Supongamos que ρ y σ son representaciones de G sobre \mathbb{C} , con caracteres χ y ψ , respectivamente. Entonces ρ y σ son equivalentes si y sólo si $\chi = \psi$.

Demostración. En la proposición 1.44 vimos que representaciones equivalentes tienen el mismo carácter. Lo que nos falta demostrar es la parte recíproca de esta proposición.

Así que supongamos que $\chi = \psi$. De nuevo supongamos que ρ_1, \dots, ρ_r son las representaciones irreducibles de G sobre \mathbb{C} , con caracteres χ_1, \dots, χ_r . Sabemos por (1.15) que existen enteros no negativos c_i, d_i tales que

$$\rho = (\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_1) \oplus (\rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_2) \oplus \cdots \oplus (\rho_r \oplus \cdots \oplus \rho_r)$$

con c_i factores ρ_i para cada i , y

$$\sigma = (\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_1) \oplus (\rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_2) \oplus \cdots \oplus (\rho_r \oplus \cdots \oplus \rho_r)$$

con d_i factores ρ_i para cada i . Por (1.17) tenemos que

$$c_i = \langle \chi, \chi_i \rangle, \quad d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle.$$

Como $\chi = \psi$, se sigue que $c_i = d_i$ para todo i , y por tanto ρ es equivalente a σ . \square

Ya con todo esto podemos calcular el número de representaciones irreducibles de un grupo finito G sobre \mathbb{C} , calculando el número de caracteres irreducibles. Para esto último nos apoyaremos en las clases de conjugación de G .

Definición 1.66

Sea G un grupo finito y sean $x, y \in G$. Decimos que x es *conjugado* a y en G si

$$y = g^{-1}xg \quad \text{para algún } g \in G.$$

El conjunto de todos los elementos conjugados a x en G es

$$x^G = \{g^{-1}xg \mid g \in G\},$$

y es llamado la *clase de conjugación* de x en G .

Como todo elemento $x \in G$ está en la clase de conjugación x^G , entonces G es unión de clases de conjugación. Por el siguiente resultado tenemos que las clases de conjugación de G forman una partición de G .

Proposición 1.67

Para un grupo finito G , si $x, y \in G$, entonces sucede que $x^G = y^G$ o $x^G \cap y^G$ es vacío.

Demostración. Supongamos que $x^G \cap y^G$ es no vacío, y tomemos $z \in x^G \cap y^G$. Entonces existen $g, h \in G$ tales que

$$z = g^{-1}xg = h^{-1}yh.$$

Por lo tanto $x = gh^{-1}yhg^{-1} \in y^G$ y por tanto $x^G \subset y^G$. De manera análoga despejando y obtenemos que $y^G \subset x^G$, y así tenemos que $x^G = y^G$. \square

Definición 1.68

Una función de clase sobre G es una función $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi(x) = \psi(y)$ cuando x y y son elementos conjugados de G (es decir, ψ es constante en clases de conjugación).

Observación 1.69

Los caracteres son funciones de clase por la proposición 1.44 (2).

El espacio C de funciones de clase forman un subespacio vectorial del espacio vectorial formado por todas las funciones de G a \mathbb{C} , ya que si $\psi, \phi \in C$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces tenemos para x y y conjugados en G lo siguiente

$$\begin{aligned} (\psi + \phi)(x) &= \psi(x) + \phi(x) = \psi(y) + \phi(y) = (\psi + \phi)(y), \text{ y} \\ (\lambda\psi)(x) &= \lambda\psi(x) = \lambda\psi(y) = (\lambda\psi)(y). \end{aligned}$$

Observación 1.70

Por cada clase de conjugación x^G de G podemos definir una función de clase dada por

$$\phi_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in x^G, \\ 0 & \text{si } y \notin x^G. \end{cases}$$

Si tenemos que

$$G = x_1^G \sqcup \cdots \sqcup x_l^G$$

entonces dada una función de clase $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}$ tomando $a_i = \phi(x_i)$ tenemos entonces que

$$\phi = a_1\phi_{x_1} + \cdots + a_l\phi_{x_l}.$$

Entonces como claramente las funciones ϕ_{x_i} son linealmente independientes (al ser las clases de conjugación disjuntas) tenemos que forman una base de C y así tenemos que

$$(1.19) \quad \dim(C) = l,$$

donde l es el número de clases de conjugación de G .

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Proposición 1.71

Sea $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}$ una función de clase, y sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación irreducible de G sobre \mathbb{C} , con carácter χ y grado n . Sea $\rho_\phi \in \text{Aut}(V)$ definido como

$$\rho_\phi = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho(g).$$

Entonces $\rho_\phi = \lambda \text{Id}_V$, con

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g).$$

Demostración. Notemos primero que

$$\rho(x^{-1}) \rho_\phi \rho(x) = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho(x^{-1}) \rho(g) \rho(x) = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho(x^{-1} g x).$$

Tomando $u = x^{-1} g x$, esta última expresión se convierte en

$$\rho(x^{-1}) \rho_\phi \rho(x) = \sum_{u \in G} \phi(x u x^{-1}) \rho(u) = \sum_{u \in G} \phi(u) \rho(u) = \rho_\phi.$$

Entonces tenemos que para todo $x \in G$ se cumple que $\rho(x) \rho_\phi = \rho_\phi \rho(x)$, es decir ρ_ϕ es G -equivariante, y por el Lema de Schur (2) (teorema 1.32), existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\rho_\phi = \lambda \text{Id}_V$. Entonces tenemos que

$$\lambda n = \text{tr}(\lambda \text{Id}_V) = \text{tr}(\rho_\phi) = \sum_{g \in G} \phi(g) \text{tr}(\rho(g)) = \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g).$$

□

Teorema 1.72

Los caracteres irreducibles forman una base del subespacio de funciones de clase C .

Demostración. Por la observación 1.63 tenemos que los caracteres irreducibles son linealmente independientes en el espacio vectorial de funciones de G a \mathbb{C} , y son elementos de C por la observación 1.69. Así que sólo falta ver que generan al subespacio C .

Consideremos V_1 el subespacio vectorial generado por los caracteres irreducibles y utilizando el producto interior dado en la definición 1.56, tomemos V_2 el complemento ortogonal a V_1 en C . Demostremos que V_2 es vacío; supongamos que no lo es, y tomemos $\phi \in V_2$. Recordemos además que los caracteres $\bar{\chi}_i$ son irreducibles. Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación arbitraria de G sobre \mathbb{C} de grado n , y tomemos

$$\rho_\phi = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho(g).$$

Por (1.15) tenemos que ρ es una suma directa de las representaciones irreducibles $\rho_i: G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$ para subespacios $V_i \subset V$. Entonces ρ es de la forma

$$\rho = \underbrace{\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_1}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\rho_r \oplus \cdots \oplus \rho_r}_{d_r},$$

por lo que

$$\rho_\phi = \underbrace{\rho_{1\phi} \oplus \cdots \oplus \rho_{1\phi}}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\rho_{r\phi} \oplus \cdots \oplus \rho_{r\phi}}_{d_r}.$$

Aplicando la proposición 1.71 a cada $\rho_{i\phi}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= d_1 \lambda_1 \text{Id}_{V_1} + \cdots + d_r \lambda_r \text{Id}_{V_r} \\ &= d_1 \frac{1}{n_1} \langle \phi, \bar{\chi}_1 \rangle + \cdots + d_r \frac{1}{n_r} \langle \phi, \bar{\chi}_r \rangle. \end{aligned}$$

Como ϕ es ortogonal a todos los $\bar{\chi}_i$ entonces tenemos que $\rho_\phi = 0$.

Aplicando esto a la representación regular $\rho_{\text{reg}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}G)$, y calculando el valor de $(\rho_{\text{reg}})_\phi$ en el vector de la base $e \in \mathbb{C}G$, tenemos

$$0 = (\rho_{\text{reg}})_\phi(e) = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho_{\text{reg}}(g)(e) = \sum_{g \in G} \phi(g)g,$$

y al ser los vectores g linealmente independientes en $\mathbb{C}G$, al ser una base, concluimos que $\phi(g) = 0$ para todo $g \in G$.

Por lo tanto el complemento ortogonal en C del subespacio generado por los caracteres $\bar{\chi}_i$, que es el mismo que el generado por los caracteres irreducibles χ_i , es el subespacio trivial. Así concluimos que los caracteres irreducibles son una base de C . \square

Corolario 1.73

El número de representaciones irreducibles de un grupo finito G , sobre \mathbb{C} , es el número de clases de conjugación de G .

A continuación vemos por último otra construcción algebraica entre representaciones de G sobre \mathbb{C} .

Definición 1.74

Si $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ son dos representaciones de G sobre \mathbb{C} , podemos definir el producto tensorial de las representaciones $\rho \otimes \sigma: G \rightarrow \text{Aut}(V \otimes W)$ como sigue

$$(\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \sigma(g)(w).$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Proposición 1.75

Sean $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(W)$ dos representaciones con caracteres χ y ψ , respectivamente. Entonces el carácter de $\rho \otimes \sigma$ es el carácter producto $\chi\psi$, donde

$$(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g).$$

Demostración. Sea $g \in G$. Por la proposición 1.37 podemos elegir una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de V y una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de W tales que

$$\rho(g)(v_i) = \lambda_i v_i \text{ y } \sigma(g)(w_j) = \mu_j w_j$$

para algunos λ_i, μ_j . Entonces

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^m \lambda_i, \quad \psi(g) = \sum_{j=1}^n \mu_j.$$

Entonces para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, $(\rho \otimes \sigma)(g)(v_i \otimes w_j) = \rho(g)(v_i) \otimes \sigma(g)(w_j) = \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$. Como los vectores $v_i \otimes w_j$ forman una base de $V \otimes W$, si ϕ es el carácter de $\rho \otimes \sigma$ entonces

$$\phi(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_i \lambda_i \right) \left(\sum_j \mu_j \right) = \chi(g)\psi(g).$$

□

Lema 1.76

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son números complejos distintos, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{r-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \alpha_r & \alpha_r^2 & \cdots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

es invertible

Demostración. Supongamos que x_1, \dots, x_r son variables indeterminadas, y consideremos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_r & x_r^2 & \cdots & x_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

Si $i \neq j$ y $x_i = x_j$ entonces dos filas de la matriz son iguales y por tanto $\Delta = 0$. De esto se sigue que Δ es divisible por

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (x_i - x_j) &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_r) \\ &\quad \times (x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_r) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \times (x_{r-1} - x_r). \end{aligned}$$

Notemos que el coeficiente del término $x_1^{r-1} x_2^{r-2} \cdots x_{r-1}$ en este producto es 1, ya que por la forma en que hemos escrito el producto el término x_1^{r-1} proviene de todos los factores en la primera fila, el término x_2^{r-2} proviene de todos los factores en la segunda fila, y así sucesivamente. Por otro lado para obtener el término $x_1^{r-1} x_2^{r-2} \cdots x_{r-1}$ en la expansión del determinante Δ , debemos tomar x_1^{r-1} de la primera fila de la matriz, x_2^{r-2} de la segunda fila y así sucesivamente. Por lo tanto el coeficiente de $x_1^{r-1} x_2^{r-2} \cdots x_{r-1}$ en Δ es ± 1 . Se sigue que

$$\Delta = \pm \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Para obtener el resultado, sustituimos los valores α_i en la matriz y concluimos que la matriz A tiene determinante distinto de cero. \square

Teorema 1.77

Sea χ un carácter fiel de G , y supongamos que χ toma exactamente r valores distintos sobre G . Entonces todo carácter irreducible de G es una componente de alguna de las potencias $\chi^0, \chi^1, \dots, \chi^{r-1}$.

Demostración. Supongamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son los valores que toma χ sobre G . Para $1 \leq i \leq r$ definimos

$$G_i = \{g \in G \mid \chi(g) = \alpha_i\}.$$

Supongamos sin pérdida de generalidades que $\alpha_1 = \chi(e)$ (en caso contrario un cambio en el índice basta), para tener $G_1 = \text{Ker } \chi$. Como χ es fiel, entonces $G_1 = \{e\}$. Tomemos ahora ψ un carácter irreducible de G . Basta demostrar que $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$ para alguna $j \in \{0, \dots, r-1\}$. Para $1 \leq i \leq r-1$, sea

$$\beta_i = \sum_{g \in G_i} \overline{\psi(g)},$$

y notemos que $\beta_1 = \psi(e) \neq 0$. Así obtenemos que para todo $j \geq 0$ se cumple

$$\langle \chi^j, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi(g))^j \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i.$$

CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Sea A la matriz de $r \times r$ cuya entrada ij -ésima es $(\alpha_i)^{j-1}$, y sea b el vector horizontal con entradas β_i . Como A es una matriz invertible por el lema 1.76, y $b \neq 0$ ya que $\beta_1 \neq 0$ concluimos que $bA \neq 0$. Pero la entrada $(j+1)$ -ésima en el vector horizontal bA es igual a $|G|\langle \chi^j, \psi \rangle$, así tenemos que $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$, para algún $j \in \{1, \dots, r-1\}$, como se deseaba probar. \square

Con esto ya podemos definir el carcaj de McKay.

Definición 1.78 (Carcaj de McKay)

Sea $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{C} , con carácter χ . Sean ρ_1, \dots, ρ_d las representaciones irreducibles de G . Si χ_1, \dots, χ_d son los caracteres irreducibles entonces tomando

$$n_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi_i(g) \chi_j(g^{-1})$$

tenemos que

$$\rho \otimes \rho_i = \sum_j n_{ij} \rho_j.$$

El *carcaj de McKay* de la representación ρ es la gráfica dirigida Γ_ρ , que se obtiene de la siguiente manera:

- (a) En Γ_ρ por cada representación irreducible tenemos un vértice;
- (b) si $n_{ij} > 0$ ponemos existe una flecha de ρ_i a ρ_j , con peso n_{ij} .

Observación 1.79

Como el número de representaciones irreducibles de G sobre \mathbb{C} es el número de clases de conjugación de G , entonces Γ_ρ tiene un número finito de vértices y flechas.

Si ϕ es el carácter de la representación $\rho \otimes \rho_i$ entonces

$$n_{ij} = \langle \phi, \chi_j \rangle.$$

Ejemplo 1.80

Ya vimos en el teorema 1.36 que las representaciones irreducibles de los grupos cíclicos $C_n = \langle b \mid b^n = e \rangle$ son

$$\rho_i(b^k) = (\omega^{ki}),$$

donde ω es una n -raíz de la unidad. Entonces los caracteres irreducibles son

$$\chi_i(b^k) = \omega^{ik}.$$

La representación $\rho_0: G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}^2)$ dada por la inclusión de G en $\text{SU}(2)$ está dada por

$$\rho_0(b^k) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix},$$

1.5. EL CARCAJ DE MCKAY

y de esto concluimos que para el carácter χ_0 de ρ_0 se cumple

$$\chi_0 = \chi_1 + \chi_{n-1}.$$

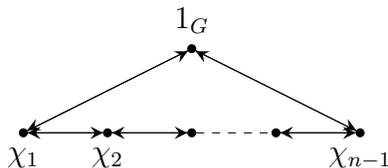
Así obtenemos que para cualquier otro carácter irreducible se tiene

$$\chi_0 \chi_i = (\chi_1 + \chi_{n-1}) \chi_i = \chi_{i+1} + \chi_{n-1+i}.$$

Cabe recordar que los índices son todos modulo n , con $\chi_n = 1_G$. Con esto cuando tomamos el producto interior de $\chi_0 \chi_i$ con un carácter irreducible χ_j obtenemos utilizando el teorema 1.58 que

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \text{ ó } i = j - 1 \\ 0 & \text{si otros casos} \end{cases}$$

Al final nos queda el siguiente carcaj de McKay



CAPÍTULO 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS

Capítulo 2

El carcaj de McKay para grupos finitos de $SU(2)$

Como en este trabajo nos interesan los grupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$, en el comienzo de este capítulo empezamos viendo rápidamente que los grupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$ son conjugados a los grupos finitos de $SU(2)$ y como obtener los grupos finitos de $SU(2)$, a partir de los grupos finitos de $SO(3)$; para una discusión más detallada de esto se recomienda ver [14, Capítulos I,II].

Después nos concentramos en calcular las tablas de los caracteres irreducibles de los grupos finitos de $SO(3)$, para a partir de estos caracteres, ver algunas formas de obtener las tablas de los caracteres irreducibles de los grupos finitos de $SU(2)$, pero sin hacer todos los cálculos. Ya con las tablas de los caracteres irreducibles de los grupos finitos de $SU(2)$ vemos en la última sección que el carcaj de McKay es de hecho una gráfica para estos grupos, y presentamos la gráfica de McKay para cada grupo finito de $SU(2)$.

2.1. Subgrupos finitos de $SO(3)$ y $SL(2, \mathbb{C})$

Los subgrupos finitos que son de nuestro interés son los subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$. Pero por el siguiente resultado basta conocer los caracteres irreducibles de $SU(2)$.

Proposición 2.1

Todo subgrupo finito G de $SL(2, \mathbb{C})$ es conjugado en $SL(2, \mathbb{C})$ a un subgrupo de $SU(2)$.

Para demostrar este resultado es útil probar el siguiente lema.

Lema 2.2

Dados dos productos hermitianos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_$ en \mathbb{C}^2 , existe $T \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{C}^2$ se cumple*

$$\langle x, y \rangle_* = \langle T(x), T(y) \rangle.$$

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

Demostración. Usando Graham-Schmidt, sean $B = \{e_1, e_2\}$ una base de \mathbb{C}^2 que es ortonormal con respecto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $B^* = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ una base ortonormal con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. Existe una matriz de cambio de base $T \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$, que manda B^* en B . Además para todo i, j se cumple que

$$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle_* = \delta_{i,j} = \langle T(\tilde{e}_i), T(\tilde{e}_j) \rangle,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kroneker. Por linealidad tenemos entonces el resultado \square

Demostración de la proposición 2.1. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto hermitiano usual de \mathbb{C}^2 , entonces el siguiente producto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ es invariante respecto a G , y está definido para $u, v \in \mathbb{C}^2$ como

$$\langle u, v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \langle A(u), A(v) \rangle.$$

Es un producto hermitiano, ya que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto hermitiano, y claramente es invariante respecto a G , ya que para $B \in G$ tenemos que el índice $C = AB$ corre sobre todo G al correr el índice A sobre todo G y por tanto

$$\langle B(u), B(v) \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \langle (AB)(u), (AB)(v) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} \langle C(u), C(v) \rangle = \langle u, v \rangle_G.$$

Por el lema 2.2 tenemos que existe una matriz $T \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ tal que para todo $u, v \in \mathbb{C}^2$ tenemos

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle_G,$$

y por lo tanto TGT^{-1} está en $\text{U}(2)$, ya que para una matriz $A \in G$ se cumple lo siguiente, para todo $u, v \in \mathbb{C}^2$

$$\langle TAT^{-1}(u), TAT^{-1}(v) \rangle = \langle AT^{-1}(u), AT^{-1}(v) \rangle_G = \langle T^{-1}(u), T^{-1}(v) \rangle_G = \langle u, v \rangle.$$

Podemos suponer sin perdida de generalidades que $\det(T) = 1$, ya que si no el resultado sigue siendo valido para $\tilde{T} = (1/\det(T))T$. Con esto vemos que G es conjugado en $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ a un subgrupo de $\text{SU}(2)$. \square

El problema es ahora conocer quienes son los subgrupos finitos de $\text{SU}(2)$. Para resolverlo es de gran utilidad el siguiente teorema que nos da una relación entre los grupos finitos de $\text{SU}(2)$ y los grupos finitos de $\text{SO}(3)$.

Teorema 2.3

Existe un homomorfismo de grupos de $\text{SU}(2)$ sobre $\text{SO}(3)$ con núcleo $\{\pm I_2\}$.

Demostración. Tomando la siguiente caracterización del grupo especial unitario,

$$(2.1) \quad \text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ con } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\},$$

2.1. SUBGRUPOS FINITOS DE $SO(3)$ Y $SL(2, \mathbb{C})$

tenemos el siguiente morfismo $\phi: SU(2) \rightarrow \mathbb{H}$ entre el grupo especial unitario y el grupo de cuaterniones \mathbb{H} , definido como

$$\phi \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = z_1 + z_2 j.$$

Al tener que la norma en el grupo de cuaterniones está definida para $q = z_1 + z_2 j$ como

$$|q|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2,$$

entonces tenemos que ϕ manda a $SU(2)$ de manera isomorfa sobre los cuaternios unitarios.

Sea \mathbb{H}^- el subconjunto de cuaterniones con parte real igual a cero, y definamos un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre \mathbb{H}^- como

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \text{tr}(q_1 \bar{q}_2).$$

Con este producto interior \mathbb{H}^- es isométrico a \mathbb{R}^3 , y es invariante bajo la conjugación qvq^{-1} por los cuaternios unitarios $|q| = 1$.

Así tenemos un homomorfismo de grupos $\pi: SU(2) \rightarrow O(3)$, el cual es continuo. Como $SU(2)$ es conexo entonces realmente tenemos un homomorfismo continuo de grupos

$$\pi: SU(2) \rightarrow SO(3).$$

Este morfismo tiene como núcleo a $\{-I_2, I_2\}$.

Para una demostración más detallada ver [14, 4] □

A los subgrupos finitos G de $SU(2)$ para los cuales existe un subgrupo finito Γ de $SO(3)$ de manera que $G = \pi^{-1}(\Gamma)$ se les conoce como *grupos binarios*.

Entonces conociendo los grupos finitos de $SO(3)$ ya conocemos varios grupos finitos de $SU(2)$ vía el homomorfismo π . El siguiente resultado nos dice quienes son exactamente los subgrupos finitos de $SO(3)$.

Teorema 2.4

Los grupos finitos de $SO(3)$ son, salvo conjugación, los grupos cíclicos de orden n , C_n , los grupos diédricos de orden $2n$, D_n , el grupo alternante A_4 , el grupo simétrico S_4 y el grupo alternante A_5 .

Demostración. Ver [14, 4] □

Tenemos la siguiente tabla que nos da las presentaciones de subgrupos finitos de $SO(3)$:

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

$\Gamma \subset \text{SO}(3)$	Generadores	Relación
C_n	β	$\beta^n = e$
D_n	β, γ	$\beta^2 = \gamma^n = (\beta\gamma)^2 = e$
A_4	β, γ	$\beta^3 = \gamma^3 = (\beta\gamma)^2 = e$
S_4	β, γ	$\beta^3 = \gamma^4 = (\beta\gamma)^2 = e$
A_5	β, γ	$\beta^3 = \gamma^5 = (\beta\gamma)^2 = e$

Tabla 2.1: Presentaciones de grupos finitos de SO(3)

Observación 2.5

Al grupo S_4 en la literatura se le conoce también como el grupo Tetraédrico, al grupo S_4 se le conoce como el grupo Octaédrico, y por último al grupo A_5 se le conoce como el grupo Icosaédrico. Esto es por que son la rotaciones de \mathbb{R}^3 que dejan invariante al tetraedro, octaedro e icosaedro respectivamente.

Por ultimo falta ver quienes son los grupos finitos de SU(2) que no son binarios, es decir que no son preimagen de algún subgrupo finito de SO(3). Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.6

Si $A \in \text{SU}(2)$ tiene orden 2 entonces $A = -I_2$.

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces como $A^2 = I_2$, entonces $A^{-1} = A$ y por tanto

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $a = d$ y $b = c = 0$, y como $\det(A) = ad = 1$ obtenemos que $a = d = \pm 1$. \square

Proposición 2.7

Sea G un grupo finito de SU(2), entonces $G = \pi^{-1}(\Gamma)$, para algún subgrupo finito Γ de SO(3) si y sólo si G no es cíclico de orden impar.

Demostración. Supongamos que G no es preimagen de algún subgrupo finito Γ de SO(3), entonces $-I_2 \notin G$. Entonces π manda G de manera isomorfa sobre $\pi(G)$. Si $\pi(G)$ tuviera un elemento de orden 2, entonces G tendría un elemento de orden 2 y por el lema 2.6 se tendría que $-I_2$ está en G . Por lo tanto $\pi(G)$ no tiene elementos de orden 2. Como un grupo diédrico, un grupo cíclico de orden par, el grupo tetraédrico, el grupo octaédrico y el grupo icosaédrico tienen un elemento de orden 2, entonces a $\pi(G)$ solo le queda ser cíclico de orden impar. Por lo tanto G es cíclico de orden impar. \square

2.2. TABLAS DE CARACTERES DE SUBGRUPOS FINITOS DE SO(3)

Por último el siguiente resultado nos dice que ya no hay más subgrupos de SU(2) que sean finitos.

Teorema 2.8

Todos los subgrupos finitos de SU(2) son los binarios, y el cíclico de orden impar.

Demostración. Ver [14, 4] □

Para terminar esta sección damos la siguiente tabla, que es obtenida de la tabla 2.1, tomando $b = \pi(\beta)$ y $c = \pi(\gamma)$, para tener las siguientes presentaciones de los subgrupos finitos de SU(2):

$G \subset \text{SU}(2)$	Notación	Generadores	Relación
Cíclico de orden n	C_n	b	$b^n = e$
Binario n -diédrico	\widetilde{D}_n	b, c	$b^2 = c^n = (bc)^2 = I_2$
Binario Tetraédrico	\widetilde{A}_4	b, c	$b^3 = c^3 = (bc)^2 = I_2$
Binario Octaédrico	\widetilde{S}_4	b, c	$b^3 = c^4 = (bc)^2 = I_2$
Binario Icosaédrico	\widetilde{A}_5	b, c	$b^3 = c^5 = (bc)^2 = I_2$

Tabla 2.2: Presentaciones de grupos finitos de SU(2)

2.2. Tablas de caracteres de subgrupos finitos de SO(3)

Por el corolario 1.73 tenemos que hay tantos caracteres irreducibles de G como clases de conjugación de G . Para encontrar los caracteres, antes veamos quienes son las clases de conjugación de los subgrupos finitos G de SO(3).

Proposición 2.9

Un grupo cíclico $G = C_n$ de orden n tiene n clases de conjugación.

Demostración. Como los grupos cíclicos son abelianos entonces para cualquier elemento $x \in G$ se tiene que para todo elemento $g \in G$ se cumple

$$gxg^{-1} = gg^{-1}x = x.$$

Por lo tanto la clase de conjugación consiste de un solo elemento. □

Como el grupo $G = C_n$ tiene exactamente n elementos, concluimos que las clases de conjugación son de la forma $\{g^i\}$ con $i \in \{0, \dots, n-1\}$, donde g es el generador de G .

Para conocer las clases de conjugación de los grupos D_n , A_4 , S_4 y A_5 nos serán de gran utilidad los siguientes conceptos y resultados.

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

Definición 2.10

Sea $x \in G$. El *conmutador* de x en G , denotado por $C_G(x)$, es el subgrupo de G que consiste de los elementos de G que conmutan con x ; es decir

$$C_G(x) = \{g \in G \mid xg = gx\}.$$

Teorema 2.11

Sea $x \in G$. Entonces el tamaño de la clase de conjugación x^G está dado por

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|.$$

En particular $|x^G|$ divide a $|G|$.

Demostración. Notemos primero que para $g, h \in G$, tenemos que $g^{-1}xg = h^{-1}xh$, si y sólo si $hg^{-1}xgh^{-1} = x$, es decir, si y sólo si $hg^{-1} \in C_G(x)$. Con esto la función f que va de x^G a las clases laterales derechas de $C_G(x)$ en G , dada por

$$g^{-1}xg \rightarrow C_G(x)g,$$

es inyectiva. Como f es claramente suprayectiva, tenemos que f es una biyección, probando que $|x^G| = |G : C_G(x)|$. \square

Definición 2.12

El centro de G , denotado por $Z(G)$, está definido como

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ para todo } g \in G\}.$$

Observación 2.13

Tenemos $|x^G| = 1$ si y sólo si $g^{-1}xg = x$ para todo $g \in G$, es decir, si y sólo si $x \in Z(G)$.

Con esto podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 2.14 (Ecuación de clase)

Sean x_1, \dots, x_l los representantes de las clases de conjugación de G . Entonces

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|.$$

Demostración. Como G es la unión disjunta de las clases de conjugación x_i^G , entonces tenemos que

$$G = \sum_{x_i} |x_i^G| = \sum_{x_i \in Z(G)} |x_i^G| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|.$$

Pero como $|Z(G)| = \sum_{x_i \in Z(G)} |x_i^G|$, entonces obtenemos el resultado. \square

2.2. TABLAS DE CARACTERES DE SUBGRUPOS FINITOS DE SO(3)

Ahora podemos conocer quienes son las clases de conjugación de D_n . Esto es más sencillo hacerlo con dos casos distinguiendo cuando n es par, y cuando n es impar.

Teorema 2.15

El grupo diédrico $G = D_n$ con n impar tiene exactamente $\frac{1}{2}(n+3)$ clases de conjugación:

$$\{e\}, \{\gamma, \gamma^{-1}\}, \dots, \{\gamma^{(n-1)/2}, \gamma^{-(n-1)/2}\}, \{\beta, \gamma\beta, \dots, \gamma^{n-1}\beta\},$$

donde γ y β son los generadores dados en la presentación de la tabla 2.1.

Demostración. Consideremos primero γ^i con $0 \leq i \leq n-1$. Como $C_G(\gamma^i)$ contiene a $\langle \gamma \rangle$, el subgrupo generado por γ , entonces

$$|G : C_G(\gamma^i)| \leq |G : \langle \gamma \rangle| = 2.$$

También tenemos que $\beta^{-1}\gamma^i\beta = \gamma^{-i}$, entonces $\{\gamma^i, \gamma^{-i}\} \subset (\gamma^i)^G$. Como n es impar, $\gamma^i \neq \gamma^{-i}$ y por tanto $|(\gamma^i)^G| \geq 2$. Usando el teorema 2.11, tenemos que

$$2 \geq |G : C_G(\gamma^i)| = |(\gamma^i)^G| \geq 2.$$

Por lo tanto tenemos igualdad, y así

$$(\gamma^i)^G = \{\gamma^i, \gamma^{-i}\}.$$

A continuación, $C_G(\beta)$ contiene $\{e, \beta\}$; y como $\beta^{-1}\gamma^i\beta = \gamma^{-i}$, entonces ningún elemento de la forma γ^i ó $\gamma^i\beta$ con $0 \leq i \leq n-1$ conmuta con β . Por lo tanto

$$C_G(\beta) = \{e, \beta\}.$$

Aplicando el teorema 2.11 tenemos que $|\beta^G| = n$. Como todos los elementos γ^i ya están en alguna de las clases $(\gamma^i)^G$, entonces β^G debe contener a los n elementos restantes de G .

Es decir,

$$\beta^G = \{\beta, \gamma\beta, \dots, \gamma^{n-1}\beta\}.$$

□

Teorema 2.16

El grupo diédrico $G = D_n$ con $n = 2m$ par tiene exactamente $m+3$ clases de conjugación:

$$\{e\}, \{\gamma^m\}, \{\gamma, \gamma^{-1}\}, \dots, \{\gamma^{m-1}, \gamma^{-m+1}\}, \{\gamma^{2j}\beta \mid 0 \leq j \leq m-1\}, \{\gamma^{2j+1}\beta \mid 0 \leq j \leq m-1\},$$

donde γ y β son los generadores dados en la presentación de la tabla 2.1.

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

Demostración. Como $\beta^{-1}\gamma^m\beta = \gamma^{-m} = \gamma^m$, el conmutador de γ^m en G contiene a γ y β , y por tanto $C_G(\gamma^m) = G$. Por lo tanto la clase de conjugación de γ^m en G es simplemente $\{\gamma^m\}$. Como en la demostración anterior, tenemos $(\gamma^i)^G = \{\gamma^i, \gamma^{-i}\}$ para $0 \leq i \leq m-1$.

Para cada entero j tenemos que

$$\gamma^j\beta\gamma^{-j} = \gamma^{2j}\beta, \quad \gamma^j(\gamma\beta)\gamma^{-j} = \gamma^{2j+1}\beta.$$

Se sigue que

$$\beta^G = \{\gamma^{2j}\beta \mid 0 \leq j \leq m-1\}, \quad (\gamma\beta)^G = \{\gamma^{2j+1}\beta \mid 0 \leq j \leq m-1\}.$$

□

Ahora prosigamos a conocer las clases de conjugación de S_4 en general. Antes nos va a ser de gran ayuda los siguientes resultados más generales.

Proposición 2.17

Sea x un k -ciclo $(i_1 i_2 \dots i_k) \in S_n$, y sea $g \in S_n$. Entonces gxg^{-1} es el k -ciclo $(g(i_1) g(i_2) \dots g(i_k))$.

Demostración. Sea $A = \{i_1, \dots, i_k\}$. Para $i_r \in A$,

$$(gxg^{-1})(g(i_r)) = gx(i_r) = g(i_r + 1) \text{ (o en su caso } g(i_1) \text{ si } r = k).$$

También para $1 \leq i \leq n$ y $i \notin A$,

$$(gxg^{-1})(g(i)) = gx(i) = g(i).$$

Por lo tanto $g(i_1 i_2 \dots i_k)g^{-1} = (g(i_1) g(i_2) \dots g(i_k))$, y así hemos probado la proposición. □

Consideremos ahora cualquier permutación $x \in S_n$. Escribamos a x como un producto de ciclos disjuntos

$$x = (a_1 \dots a_{k_1})(b_1 \dots b_{k_2}) \dots (c_1 \dots c_{k_s}),$$

con $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s$. Por la proposición 2.17 tenemos para $g \in S_n$ lo siguiente

$$(2.2) \quad \begin{aligned} gxg^{-1} &= g(a_1 \dots a_{k_1})g^{-1}g(b_1 \dots b_{k_2})g^{-1} \dots g(c_1 \dots c_{k_s})g^{-1} \\ &= (g(a_1) \dots g(a_{k_1}))(g(b_1) \dots g(b_{k_2})) \dots (g(c_1) \dots g(c_{k_s})). \end{aligned}$$

2.2. TABLAS DE CARACTERES DE SUBGRUPOS FINITOS DE $SO(3)$

Llamamos a (k_1, \dots, k_s) la *forma de ciclo* de x , y notamos que x y gxg^{-1} tienen la misma forma de ciclo. Por otro lado, dadas dos permutaciones x y y con la misma forma de ciclo, digamos

$$x = (a_1 \dots a_{k_1})(b_1 \dots b_{k_2}) \dots (c_1 \dots c_{k_s}),$$

$$y = (a'_1 \dots a'_{k_1})(b'_1 \dots b'_{k_2}) \dots (c'_1 \dots c'_{k_s}),$$

existe un $g \in S_n$ que manda $a_1 \rightarrow a'_1, \dots, c_{k_s} \rightarrow c'_{k_s}$, y por (2.2) tenemos que

$$gxg^{-1} = y.$$

Con esto hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.18

Para $x \in S_n$, la clase de conjugación x^{S_n} de x en S_n consiste de todas las permutaciones en S_n que tienen la misma forma de ciclo que x .

Así ya podemos conocer las clases de conjugación de S_4 ya que sólo tenemos las siguientes formas de ciclo:

$$(1), (2), (3), (2, 2), (4).$$

Entonces existen exactamente cinco clases de conjugación de S_4 con los siguientes representantes:

$$e, (12), (123), (12)(34), (1234).$$

Para calcular el tamaño de las clases de conjugación, simplemente contamos el número de 2-ciclos, 3-ciclos y así continuamos. El número de 2-ciclos es igual al número de parejas que se pueden elegir de $\{1, 2, 3, 4\}$, el cual es $\binom{4}{2} = 6$. El número de 3-ciclos es $8 = 4 \times 2$ (4 al elegir el elemento que se queda fijo y dos porque hay 2 3-ciclos que fijan un elemento dado). De manera similar, existen seis elementos con forma de ciclo $(2, 2)$ y existen seis 4-ciclos. Por lo tanto para $G = S_4$, los representantes g de las clases de conjugación, los tamaños de las clases de conjugación $|g^G|$ y los órdenes de los conmutadores $|C_G(g)|$ (obtenidos usando el teorema 2.11) son como sigue:

Representante	e	(12)	(123)	$(12)(34)$	(1234)
Tamaño de la clase	1	6	8	3	6
Orden del representante	1	2	3	2	4

Tabla 2.3: Tamaño clases de conjugación de S_4

A continuación calculemos más generalmente las clases de conjugación de A_n . Dada una permutación par $x \in A_n$, probamos en el teorema 2.18 que la clase de conjugación

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

x^{S_n} consiste de todas la permutaciones en S_n que tienen la misma forma de ciclo que x . La clase de conjugación x^{A_n} de x en A_n definida como

$$x^{A_n} = \{g x g^{-1} \mid g \in A_n\},$$

esta claramente contenida en x^{S_n} ; sin embargo x^{A_n} puede que no sea igual a x^{S_n} . Un ejemplo donde la igualdad no se da es considerar $x = (123) \in A_3$; en este caso $x^{A_3} = \{x\}$, mientras que $x^{S_3} = \{x, x^{-1}\}$.

El siguiente resultado determina precisamente cuando x^{A_n} y x^{S_n} son iguales, y que sucede cuando la igualdad no se da.

Proposición 2.19

Sea $x \in A_n$ con $n > 1$. (1) Si x conmuta con alguna permutacion impar en S_n , entonces $x^{S_n} = x^{A_n}$. (2) Si x no conmuta con ninguna permutacion par en A_n entonces x se descompone en dos clases de conjugación en A_n del mismo tamaño, con representantes x y $(12)x(12)^{-1}$.

Demostración. (1) Supongamos que x conmuta con cualquier permutación impar g . Sea $y \in x^{S_n}$, así que $y = h x h^{-1}$ para algún $h \in S_n$. Si h es par entonces $y \in x^{A_n}$; y si h es impar entonces $hg \in A_n$ y además

$$y = h x h^{-1} = h g x g^{-1} h^{-1} = (hg) x (hg)^{-1},$$

así que de nuevo $y \in x^{A_n}$. Por lo tanto $x^{S_n} \subset x^{A_n}$, y así $x^{S_n} = x^{A_n}$. (2) Supongamos que x no conmuta con ninguna permutación impar. Entonces

$$C_{S_n}(x) = C_{A_n}(x).$$

Por lo tanto por el teorema 2.11, como $|A_n| = (1/2)|S_n|$ tenemos

$$\begin{aligned} |x^{A_n}| &= |A_n : C_{A_n}(x)| = \frac{1}{2} |S_n : C_{A_n}| \\ &= \frac{1}{2} |S_n : C_{S_n}| = \frac{1}{2} |x^{S_n}|. \end{aligned}$$

A continuación observemos que

$$\{h x h^{-1} \mid h \text{ es impar}\} = ((12)x(12)^{-1})^{A_n}$$

ya que toda permutación impar tiene la forma $a(12)$ para algún $a \in A_n$. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} x^{S_n} &= \{h x h^{-1} \mid h \text{ es par}\} \cup \{h x h^{-1} \mid h \text{ es impar}\} \\ &= x^{A_n} \cup ((12)x(12)^{-1})^{A_n}. \end{aligned}$$

Como $|x^{A_n}| = (1/2)|x^{S_n}|$, las clases de conjugación x^{A_n} y $((12)x(12)^{-1})^{A_n}$ deben de ser disjuntas, y del mismo tamaño, como queríamos probar. \square

2.2. TABLAS DE CARACTERES DE SUBGRUPOS FINITOS DE $SO(3)$

Ahora encontremos las clases de conjugación de A_4 . Los elementos de A_4 son la identidad e , junto con las permutaciones con forma de ciclo $(2, 2)$ y (3) . Como $(1\ 2)(3\ 4)$ conmuta con la permutación impar $(1\ 2)$ la proposición 2.19 implica que

$$(1\ 2)(3\ 4)^{A_4} = (1\ 2)(3\ 4)^{S_4} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Sin embargo el 3-ciclo $(1\ 2\ 3)$ no conmuta con ninguna permutación impar: ya que si $g(1\ 2\ 3)g^{-1} = (1\ 2\ 3)$ entonces $(1\ 2\ 3) = (g(1)\ g(2)\ g(3))$ por la proposición 2.17, así que g tiene que ser e , $(1\ 2\ 3)$ o $(1\ 3\ 2)$, una permutación par. Por lo tanto por la proposición 2.19, tenemos que $(1\ 2\ 3)^{S_4}$ se descompone como dos clases de conjugación de A_4 de tamaño 4, con representantes $(1\ 2\ 3)$ y $(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)^{-1} = (1\ 3\ 2)$.

Por lo tanto las clases de conjugación de A_4 son:

Representante	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
Tamaño de la clase	1	3	4	4
Orden del representante	1	2	3	3

Tabla 2.4: Clases de conjugación de A_4

Por último calculamos las clases de conjugación de A_5 . Las permutaciones pares distintas de la identidad en S_5 son aquellas que tienen forma de ciclo (3) , $(2, 2)$ y (5) . Los elementos $(1\ 2\ 3)$ y $(2\ 3)(4\ 5)$ conmutan con la permutación impar $(4\ 5)$; pero $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ no conmuta con ninguna permutación impar: ya que si $g(1\ 2\ 3\ 4\ 5)g^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ y por la proposición 2.17 tenemos que $(g(1)\ g(2)\ g(3)\ g(4)\ g(5)) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$. Por lo que g tiene que ser e , $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$. Por la proposición 2.19 las clases de conjugación de A_5 están representadas por e , $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ y $(1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2)^{-1} = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)$. Usando la proposición 2.19 (2), vemos que los tamaños de las clases de conjugación y los órdenes de los conmutadores son como sigue:

Representante	e	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	$(1\ 3\ 4\ 5\ 2)$
Tamaño de la clase	1	20	15	12	12
Orden del representante	1	3	2	5	5

Tabla 2.5: Tamaño de las clases de conjugación de A_5

2.3. Tablas de Caracteres

Ya con las clases de conjugación de los subgrupos finitos de SO(3) concentrémonos en calcular los caracteres irreducibles de los grupos finitos de SO(3), ya que con estos, por la siguiente proposición, conocemos algunos caracteres irreducibles de los grupos finitos de SU(2).

Proposición 2.20

Supongamos que N es un subgrupo normal de G , y sea $\tilde{\chi}$ un carácter del grupo G/N . Definimos $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ en $g \in G$ como

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(gN).$$

Entonces χ es un carácter de G , que tiene el mismo grado que $\tilde{\chi}$ y es llamado el levantamiento de $\tilde{\chi}$

Demostración. Sea $\tilde{\rho} : G/N \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ una representación de G/N asociada a $\tilde{\chi}$. La función $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ que está dada por la composición

$$g \rightarrow gN \rightarrow \tilde{\rho}(gN)$$

es un homomorfismo de grupos. Por lo tanto ρ es una representación de G . El carácter χ de ρ satisface para todo $g \in G$ lo siguiente

$$\chi(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(\tilde{\rho}(gN)) = \tilde{\chi}(gN).$$

Y más aún, como $\chi(e) = \tilde{\chi}(N)$, se tiene que χ y $\tilde{\chi}$ tienen el mismo grado. □

Así vía el homomorfismo de grupos $\pi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, podemos levantar caracteres irreducibles en el caso de los grupos binarios. Cabe notar que en general calcular los caracteres irreducibles de un grupo en general no es trivial. Comencemos con el caso más sencillo que es el de los grupos cíclicos.

En el capítulo 1 se calcularon las representaciones irreducibles ρ_j de los grupos cíclicos $G = C_n$ y todas tienen grado 1. Tomando ω una n -ésima raíz de la unidad estas representaciones están definidas como

$$\rho_j(g) = \omega^j,$$

donde g es el generador de G . Entonces los caracteres irreducibles χ_j son de la forma

$$\chi_j(g) = \omega^j.$$

2.3. TABLAS DE CARACTERES

Como el resto de los grupos finitos de $SU(2)$ son los binarios, enunciaremos primero los caracteres irreducibles de los grupos finitos de $SO(3)$ y después calcularemos los caracteres irreducibles de los grupos binarios. Para demostraciones sobre como obtener estos caracteres se invita al lector a consultar [12] la cual es una excelente referencia.

Los caracteres irreducibles del grupo diédrico D_n con n impar son los siguientes:

Representante	e	γ^r ($1 \leq r \leq (n-1)/2$)	β
1_G	1	1	1
χ_2	1	1	-1
ψ_j ($1 \leq j \leq (n-1)/2$)	2	$\omega^{jr} + \omega^{-jr}$	0

Tabla 2.6: Caracteres irreducibles del grupo diédrico D_n con n impar
 ω es una n -raíz de la unidad

Los caracteres irreducibles de D_n en el caso en que $n = 2m$ son los presentados en la siguiente tabla:

Representante	e	γ^m	γ^r ($1 \leq r \leq m-1$)	β	$\gamma\beta$
1_G	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	1	-1
χ_4	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	-1	1
ψ_j ($1 \leq j \leq m-1$)	2	$2(-1)^j$	$\omega^{jr} + \omega^{-jr}$	0	0

Tabla 2.7: Caracteres irreducibles del grupo diédrico D_n con n par
 ω es una n -raíz de la unidad

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

Los caracteres irreducibles del grupo tetraédrico A_4 son los siguientes, usando los elementos generadores γ y β dados en la sección anterior en la tabla 2.1:

Representante	e	$\gamma\beta$	γ	β
1_G	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

Tabla 2.8: Caracteres irreducibles de A_4
 ω es una 3-raíz de la unidad

De manera análoga definiendo γ y β como en la tabla 2.1 tenemos que los caracteres irreducibles de S_4 son:

Representante	e	$\beta^2\gamma$	β	$\beta\gamma$	γ
1_G	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

Tabla 2.9: Caracteres irreducibles de S_4

Por último damos los caracteres irreducibles de A_5 tomando otra vez a γ y β como en la sección anterior los caracteres irreducibles son:

Representante	e	β	$\beta\gamma$	γ^3	γ
1_G	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	0	-1	-1
χ_3	5	-1	1	0	0
χ_4	3	0	-1	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$
χ_5	3	0	-1	$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Tabla 2.10: Caracteres irreducibles de A_5

2.3. TABLAS DE CARACTERES

Conociendo todos los caracteres irreducibles de los subgrupos finitos de $SO(3)$, podemos levantar estos caracteres a $SU(2)$ para obtener caracteres de los subgrupos finitos de $SU(2)$. Es decir si $\tilde{\chi}$ es un carácter de Γ subgrupo finito de $SO(3)$ entonces para $G = \pi^{-1}(\Gamma)$ podemos considerar el carácter χ que se define en $g \in G$ como sigue

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(\pi(g)).$$

Notemos que si $\tilde{\chi}$ es irreducible, entonces χ es irreducible ya que como por cada elemento h en Γ tenemos dos elementos en G , $\pi^{-1}(h) = \{g, -g\}$ entonces escogiendo un representante de la preimagen bajo π obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{2|\Gamma|} 2 \sum_{h \in \Gamma} \tilde{\chi}(h)\tilde{\chi}(h^{-1}) \\ &= \langle \tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle. \end{aligned}$$

Entonces podemos a partir de la representación ρ_0 inducida por la inclusión de $SU(2)$ en $GL(2, \mathbb{C})$ podemos encontrar algunos caracteres irreducibles que no teníamos antes, aunque no hay un algoritmo bueno a seguir.

Por ejemplo calculemos los caracteres irreducibles de \tilde{A}_4 . Primero necesitamos calcular el carácter χ_0 . Como el grado de ρ_0 es 2, entonces $\chi_0(I_2) = 2$ y $\chi_0(-I_2) = -2$. Además bc es de orden 2 por lo que $\chi_0(bc)$ es una suma de 1 y -1; como además es congruente con 0 modulo 2, entonces $\rho_0(bc) = 0$. Por último por [14, Capítulo II, Sección 2] la traza de un elemento g de $SU(2)$ es $2 \cos(\varphi)$ donde en el caso del binario tetraédrico por la sección 3 del mismo capítulo φ es $\pi/2$ o es $\pi/3$. Como $\cos(\pi/2) = 0$ entonces tenemos que $\chi_0(b) = 1 = \chi_0(c)$.

Como χ_0 es irreducible y $\chi_0 = \chi_0 1_G$ donde 1_G es el carácter trivial, tenemos por la proposición 2.21 que $\chi_0 \chi_0 = 1_G + \chi_4$ donde χ_4 es otra representación. Con esto obtenemos la siguiente tabla de caracteres irreducibles

Por último agregamos las tablas de los caracteres irreducibles de los demás grupos, que se obtienen de manera similar, tomando b y c los generadores de la tabla 2.2. Para el caso del binario octaédrico se sugiere revisar [21].

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

Representante	I_2	$-I_2$	bc	b	$-b$	c	$-c$
1_G	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω	ω^2	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω^2	ω	ω
χ_0	2	-2	0	1	-1	1	-1
χ_4	3	3	-1	0	0	0	0
$\chi_5 = \chi_0\chi_3$	2	-2	0	ω^2	$-\omega^2$	$-\omega$	$-\omega$
$\chi_6 = \chi_0\chi_2$	2	-2	0	ω	$-\omega$	ω^2	$-\omega^2$

Tabla 2.11: Caracteres irreducibles de \tilde{A}_4
 ω es una 3-raíz de la unidad

Representante	I_2	$-I_2$	b^2c	b	$-b$	bc	c	$-c$
1_G	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	0	-1	-1	2	0	0
χ_4	3	3	1	0	0	-1	-1	-1
χ_5	3	3	-1	0	0	-1	1	1
χ_0	2	-2	0	1	-1	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\chi_6 = \chi_0\chi_4 - \chi_0$	4	-4	0	-1	1	0	0	0
$\chi_7 = \chi_0\chi_2$	2	-2	0	1	-1	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Tabla 2.12: Caracteres irreducibles de \tilde{S}_4

2.3. TABLAS DE CARACTERES

Representante	I_2	$-I_2$	b	$-b$	bc	c^3	$-c^3$	c	$-c$
1_G	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	4	4	1	1	0	-1	-1	-1	-1
χ_3	5	5	-1	-1	1	0	0	0	0
χ_4	3	3	0	0	-1	$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$
χ_5	3	3	0	0	-1	$\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$
χ_0	2	-2	1	-1	0	$\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$	$-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	$-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$
χ_7	2	-2	1	-1	0	$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	$-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$	$\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$	$-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$
χ_8	4	-4	-1	1	0	1	-1	1	-1
χ_9	6	-6	0	0	0	-1	1	-1	1

Tabla 2.13: Caracteres irreducibles de \tilde{A}_5

Representante	I_2	$-I_2$	$c^r (1 \leq r \leq (n-1))$	b	cb
1_G	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	$(-1)^r$	1	-1
χ_4	1	-1	$(-1)^r$	-1	1
ψ_j	2	$(-2)^j$	$\omega^{jr} + \omega^{-jr}$	0	0

Tabla 2.14: Caracteres irreducibles de \tilde{D}_n con n impar
 ω es una $2n$ -raíz de la unidad

Representante	I_2	$-I_2$	$c^r (1 \leq r \leq n-1)$	b	cb
1_G	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	$(-1)^r$	i	$-i$
χ_4	1	-1	$(-1)^r$	$-i$	i
ψ_j	2	$(-2)^j$	$\omega^{jr} + \omega^{-jr}$	0	0

Tabla 2.15: Caracteres irreducibles de \tilde{D}_n , con n par
 ω es una $2n$ -raíz de la unidad

2.4. La grafica de McKay para los grupos finitos de SU(2)

La proposición que demostramos a continuación nos permite ver que para la representación de un subgrupo finito G de SU(2) dada por la inclusión de G en SU(2), los n_{ij} son simétricos respecto a los índices.

Proposición 2.21

Para la representación $\rho_0 : G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$, inducida por la inclusión de G en SU(2), con carácter χ_0 , tenemos que si χ_i y χ_j son caracteres irreducibles de G entonces $\langle \chi_0 \chi_i, \chi_j \rangle \neq 0$ si y sólo si $\langle \chi_0 \chi_j, \chi_i \rangle \neq 0$.

Demostración. Como todo elemento de SU(2) tiene traza real, entonces para todo $g \in G$ se tiene que $\chi_0(g)$ es un número real y por tanto

$$\begin{aligned} \langle \chi_0 \chi_i, \chi_j \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g) \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_0(g) \chi_j(g)} \\ &= \langle \chi_i, \chi_0 \chi_j \rangle \\ &= \langle \chi_0 \chi_j, \chi_i \rangle. \end{aligned}$$

□

Para subgrupos finitos de SU(2) tenemos por la siguiente proposición que el carcaj de McKay de la representación dada por la inclusión de G en SU(2) es una gráfica.

Proposición 2.22

Para G un subgrupo finito de SU(2), si consideramos al espacio vectorial \mathbb{C}^2 y consideramos la representación $\rho_0 : G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$, dada por la inclusión del grupo G en SU(2), entonces tenemos que para todo par de índices i, j se cumple

$$n_{ij} = n_{ji} \leq 1, \text{ y}$$

$$n_{ii} = 0.$$

Demostración. Por la demostración de la proposición 2.21, para ρ_0 tenemos que $n_{ij} = n_{ji}$. Para ver que $n_{ii} = 0$ notemos que

$$n_{ii} = \langle \chi_0 \chi_i, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g) |\chi_i(g)|^2.$$

2.4. LA GRAFICA DE MCKAY PARA LOS GRUPOS FINITOS DE SU(2)

Si G es de orden par es decir binario, entonces contiene a $-\text{Id}$, y entonces para todo $g \in G$ se tiene que $-g \in G$. Como $\chi_0(g) = -\chi_0(-g)$ obtenemos que

$$2n_{ii} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g)(|\chi_i(g)|^2 - |\chi_i(-g)|^2) = 0.$$

En el caso en que G tiene orden impar sabemos por 2.7 que G es cíclico. Sea $a \in G$ el generador, entonces sabemos que $a \neq I_2$ y $a^n = I_2$ donde I_2 es la matriz identidad de $\text{SU}(2)$. Esto último nos dice que se cumple

$$(2.3) \quad (I_2 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})(I_2 - a) = 0.$$

Como $a \in \text{SU}(2)$ entonces tenemos que

$$\det(I_2 - a) = \det \begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & 1 - \bar{\alpha} \end{pmatrix} = 1 - (\alpha + \bar{\alpha}) + |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 2 - 2\text{Re}(\alpha).$$

Para que $\det(I_2 - a) = 0$ se debe de cumplir que la parte real de α sea 1; pero como $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ al estar $a \in \text{SU}(2)$, esto implica que $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Por lo tanto $\text{Id} - a$ es invertible, y tenemos por (2.3) que $(I_2 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = 0$. Con esto último y recordando que los caracteres de los grupos cíclicos son potencias de raíces de la unidad vemos que

$$n_{ii} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g) |\chi_i(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g) = \frac{1}{|G|} \text{tr}(I_2 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = 0.$$

Por último notemos que $n_{ij} = 1$ ó $n_{ij} = 0$ debido a que n_{ij} es entero positivo y además sucede

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_0(g) \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} \leq \frac{1}{|G|} \sqrt{\sum_{g \in G} |\chi_0(g)|^2 |\chi_i(g)|^2} \sqrt{\sum_{g \in G} |\chi_j(g)|^2} \\ &< \frac{1}{|G|} \sqrt{4 \sum_{g \in G} |\chi_i(g)|^2} \sqrt{\sum_{g \in G} |\chi_j(g)|^2} \\ &= \frac{2}{|G|} \sqrt{|G| \langle \chi_i, \chi_i \rangle} \sqrt{|G| \langle \chi_j, \chi_j \rangle} \\ &= \frac{2}{|G|} \sqrt{|G|} \sqrt{|G|} = 2. \end{aligned}$$

□

Usando estas propiedades y las tablas de caracteres calculadas en el apéndice tenemos que para los grupos finitos de $\text{SU}(2)$ la representación ρ_0 tiene los siguientes diagramas:

CAPÍTULO 2. EL CARCAJ DE MCKAY PARA GRUPOS FINITOS DE SU(2)

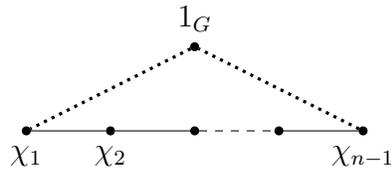


Figura 2.1: Gráfica de McKay del grupo C_n , con n vértices

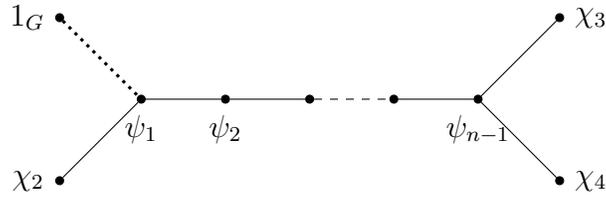


Figura 2.2: Gráfica de McKay del grupo \widetilde{D}_n , con $n + 3$ vértices

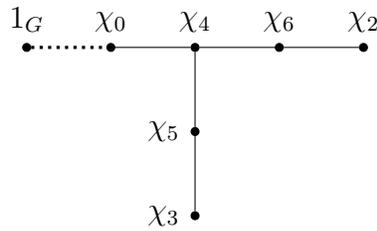


Figura 2.3: Gráfica de McKay del grupo \widetilde{A}_4 , con 7 vértices

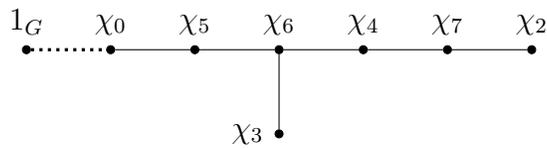


Figura 2.4: Gráfica de McKay del grupo \widetilde{S}_4 , con 8 vértices

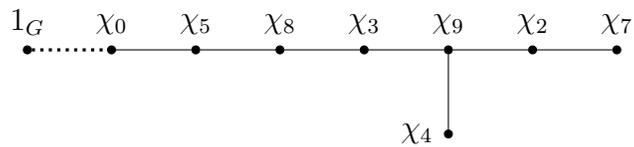


Figura 2.5: Gráfica de McKay del grupo \widetilde{A}_5 , con 9 vértices

Capítulo 3

Singularidades

En este capítulo comenzamos probando el resultado que dio Felix Klein en [13], el cual dice que al considerar G un grupo finito de $SU(2)$, entonces los polinomios sobre \mathbb{C}^2 que son G -invariantes, están generados por tres polinomios x , y y z que cumplen una relación polinomial $R(x, y, z) = 0$. Con esto damos un homeomorfismo entre el cociente de \mathbb{C}^2 por la acción de G y la variedad algebraica definida por R .

Después damos una breve introducción a la teoría de las singularidades y su resolución vía explosiones, viendo varios ejemplos para dejar claro las nociones geométricas. Analizamos el concepto de una resolución mínima y mencionamos el criterio de Castelnuovo. Con éste criterio podemos saber cuando una resolución es mínima sólo fijándonos en los números de intersección del divisor excepcional.

Lo siguiente es dar la noción de la gráfica dual o la gráfica de la resolución, la cual codifica información sobre el divisor excepcional, y vemos los casos de los grupos cíclicos y los grupos binarios tetraédricos. Como la correspondencia se da para la gráfica de la resolución mínima, falta corroborar que efectivamente la resolución es mínima.

Para esto consideramos un algoritmo de András Nemethi, el cual nos da una fórmula para calcular los números de intersección a partir de las multiplicidades de las componentes del divisor excepcional, y además nos da un método para obtener la gráfica mínima de una singularidad de una superficie de la forma $z^n + f(x, y) = 0$, a partir de la gráfica de la resolución de la singularidad de la curva $f(x, y) = 0$. Con este algoritmo calculamos la gráfica dual de la resolución mínima para todos los grupos finitos de $SU(2)$.

3.1. $\mathbb{C}^2/G \cong V(C)$

Dado un grupo finito G de $SU(2)$ podemos definir una acción derecha de G sobre el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ como sigue, tomando a $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $g \in G$ una

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

matriz y $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ un polinomio,

$$(fg)(z) := f(g^{-1}(z)).$$

Claramente esto es una acción ya que

$$\begin{aligned} (f Id)(z) &= f(z), \\ (f(gh))(z) &= f((gh)^{-1}(z)) = f(h^{-1}g^{-1}(z)) \\ &= (fh)(g^{-1}(z)) = ((fh)g)(z) \end{aligned}$$

Definición 3.1

Un polinomio $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ es G -invariante si para todo $g \in G$ se cumple que

$$fg = f.$$

El conjunto de polinomios G -invariantes es denotado por S^G y es una subálgebra de $\mathbb{C}[z_1, z_2]$.

Observación 3.2

Si f es un polinomio homogéneo de grado n entonces para todo $g \in G$ se tiene que fg es homogéneo de grado n , ya que tomando

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

entonces para $z = (z_1, z_2)$ se tiene que

$$g^{-1}(z) = (\bar{\alpha}z_1 - \bar{\beta}z_2, \beta z_1 + \alpha z_2).$$

Además f es de la forma

$$f = \sum_{i+j=n} a_{ij} z_1^i z_2^j.$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} (fg)(z) = f(g^{-1}(z)) &= \sum_{i+j=n} a_{ij} \left(\sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{i}{l} \bar{\alpha}^{i-l} z_1^{i-l} \bar{\beta}^l z_2^l \right) + \left(\sum_{k=1}^j \binom{j}{k} \beta^{j-k} z_1^{j-k} \alpha^k z_2^k \right) \\ &= \sum_{i+j=n, k, l} \binom{i}{l} \binom{j}{k} \bar{\alpha}^{i-l} z_1^{i-l} \bar{\beta}^l z_2^l \beta^{j-k} z_1^{j-k} \alpha^k z_2^k. \end{aligned}$$

y en esta última expresión cada término tiene grado $i - l + l + j - k + k = i + j = n$.

Así como un polinomio se descompone en una suma de polinomios homogéneos, y esta descomposición no cambia bajo la acción entonces un polinomio es G -invariante si y sólo si cada uno de sus componentes homogéneas es G -invariante.

Por esta última observación basta fijarse en los polinomios homogéneos que son invariantes bajo G para conocer los polinomios G -invariantes.

Siguiendo las técnicas de [14, Capítulo II, Secciones 6,7,8] y [13, 18] obtenemos que para los grupos finitos G de $SU(2)$ los polinomios invariantes están generados por tres polinomios G invariantes $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, los cuales dependen del grupo, y además cumplen una relación polinomial. En la siguiente tabla presentamos las relación asociada a cada grupo G :

Grupo	Relación
Cíclico C_n	$f_1^n + f_3 f_2$
Binario dihédrico \widetilde{D}_n	$f_3^2 + f_1(f_2^2 + f_1^n)$
Binario Tetraédrico \widetilde{A}_4	$f_1^4 + f_2^3 + f_3^2$
Binario Octaédrico \widetilde{S}_4	$f_3^2 + f_1(f_2^3 + f_1^2)$
Binario Icosaédrico \widetilde{A}_5	$f_1^5 + f_2^3 + f_3^2$

Así tomando $\phi: \mathbb{C}[x, y, z] \rightarrow S^G$ un homomorfismo de álgebras, definido como $\phi(x) = f_1$, $\phi(y) = f_2$, $\phi(z) = f_3$. Por la tabla se tiene que si llamamos h a el polinomio generado por la relación, entonces el núcleo de ϕ es el ideal generado por h . Así tenemos que

$$\mathbb{C}[x, y, z]/\langle h \rangle \cong S^G.$$

Con esto tenemos una función $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definido como

$$F = (f_1, f_2, f_3).$$

Observación 3.3

La función F nos define un homomorfismo de álgebras $\psi: \mathbb{C}[x, y, z] \rightarrow S^G$ definido para $p \in \mathbb{C}[x, y, z]$ como

$$\psi(p) = p \circ F.$$

El polinomio $p \circ F$ es G -invariante ya que para todo $g \in G$ y todo $z \in \mathbb{C}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} ((p \circ F)g)(z) &= (p \circ F)(g^{-1}(z)) = p(f_1(g^{-1}(z)), f_2(g^{-1}(z)), f_3(g^{-1}(z))) \\ &= p((f_1g)(z), (f_2g)(z), (f_3g)(z)) = p(f_1(z), f_2(z), f_3(z)) \\ &= p \circ F(z). \end{aligned}$$

Este homomorfismo es sobreyectivo y el núcleo es el ideal generado por h . Entonces ψ nos da el isomorfismo

$$\mathbb{C}[x, y, z]/\langle h \rangle \cong S^G.$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Definiendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid h(x, y, z) = 0\}$ una variedad algebraica afín tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4

Esta función $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ cumple las siguientes propiedades:

- (1) $F(\mathbb{C}^2) = V$.
- (2) $F(z) = F(w)$ si y sólo si $w = gz$ para algún $g \in G$.
- (3) F es propia y cerrada.
- (4) La función $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ es abierta.

Demostración. Ver el [14, Capítulo II, Sección 9]. □

Con esta proposición tenemos que la función F es continua al ser cerrada e induce una función $\tilde{F}: \mathbb{C}^2/G \rightarrow V$ que es continua. Además como $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ es abierta, entonces es una función cociente y por lo tanto \tilde{F} es un homeomorfismo. Es decir usando la proposición 3.4 hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.5

La función continua F induce un homeomorfismo $\tilde{F}: \mathbb{C}^2/G \cong V$ entre el espacio de órbitas \mathbb{C}^2/G y la variedad algebraica afín V .

3.2. Singularidades

Definición 3.6

Un subconjunto V de \mathbb{C}^n es un *conjunto algebraico* si V es el lugar geométrico de los ceros comunes a una colección $S \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ de polinomios.

Sea $I(V) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal que consiste de los polinomios que se anulan en todo V . El teorema de ‘bases’ de Hilbert (o Nullstellensatz de Hilbert) nos dice que todo ideal visto como un $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -módulo está finitamente generado. Para una exposición de esto ver [22, Apéndice Algebraico, Sección 6] y [1, Capítulo 6, pp. 67,69]. De esto se sigue que todo conjunto algebraico puede ser definido utilizando una familia finita de ecuaciones polinomiales.

Observación 3.7

La unión $V \cup V'$ de dos conjuntos algebraicos V y V' en \mathbb{C}^n es otra vez un conjunto algebraico en \mathbb{C}^n , ya que si V está definido por la colección de polinomios $\{f_1, \dots, f_s\}$ y V' está definido por la colección de polinomios $\{g_1, \dots, g_k\}$, entonces $V \cup V'$ está definido por la colección de polinomios $\{f_i, g_j\}$.

Definición 3.8

Un conjunto algebraico no vacío V es una *variedad algebraica* si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos algebraicos propios.

Proposición 3.9

Una variedad es irreducible si y sólo si $I(V)$ es un ideal primo.

Demostración. Ver [22, Capítulo 1, Sección 3, pp. 35]. □

Las variedades algebraicas V que vamos a estar estudiando están definidas por un solo polinomio h , y se les conoce como *hipersuperficies*. El gradiente ∇h tiene rango uno o cero.

Definición 3.10

Un punto $p \in V$ es llamado *no singular* si

$$\text{rango}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(p)\right) = 1.$$

En caso contrario (i.e. que tenga rango cero) decimos que p es un punto *singular*.

Observación 3.11

El gradiente ∇h tiene rango cero en un punto p si y solo si $\nabla h(p) = (0, \dots, 0)$, y esto sucede si y sólo si $\partial h/\partial x_i$ se anula en p para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Como h es un polinomio entonces todas las parciales $\partial h/\partial x_i$ son polinomios.

Por lo tanto concluimos que el *conjunto singular* $\text{Sing}(V)$, que consiste de todos los puntos singulares, es un subconjunto algebraico de V .

Teorema 3.12

El conjunto $V \setminus \text{Sing}(V)$ de puntos no singulares de V es una variedad diferenciable no vacía. De hecho esta variedad es una variedad analítica compleja de dimensión $n - 1$.

Demostración. Para ver una demostración consultar [17, Capítulo 2, Teorema 2.3]. □

Observación 3.13

Una variedad compleja nunca puede ser una variedad suave en una vecindad de un punto singular. Una demostración de este hecho aparece en [17, Capítulo 2, pp. 13].

En la siguiente tabla vemos que el polinomio h que define las superficies tiene en todos los casos un solo punto singular en el origen. A estos puntos singulares se les conoce como *singularidades Klenianas*, al ser Felix Klein el primero en estudiarlas en [13].

Grupo	∇h
Cíclico C_n	(nx^{n-1}, z, y)
Binario Dihédrico \tilde{D}_n	$(y^2 + (n+1)x^n, 2xy, 2z)$
Binario Tetrahédrico \tilde{A}_4	$(4x^3, 3y^2, 2z)$
Binario Octahédrico \tilde{S}_4	$(y^3 + 3x^2, 3xy^2, 2z)$
Binario Icosahédrico \tilde{A}_5	$(5x^4, 3y^2, 2z)$

3.3. Resolución de singularidades

Definición 3.14

Dadas dos variedades algebraicas $V \subset \mathbb{C}^n$ y $W \subset \mathbb{C}^m$ decimos que $f: V \rightarrow W$ es una función *regular* si es de la forma

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

donde cada f_i pertenece a $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ y además para cada $x \in V$ se tiene que $f(x) \in W$.

El espacio proyectivo \mathbb{P}^{n-1} es el espacio cociente obtenido de $\mathbb{C}^n \setminus \overline{0}$ con la relación de equivalencia \sim definida como $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$. Denotamos a las clases de equivalencia como $[x_1 : \dots : x_n]$. Notemos que si se tiene f un polinomio homogéneo, entonces si f es cero en (x_1, \dots, x_n) se tiene que f es cero en toda la clase de equivalencia $[x_1 : \dots : x_n]$. Así podemos definir la topología de Zariski en \mathbb{P}^n pero ocupando ahora polinomios homogéneos.

Utilizando las cartas coordenadas usuales de \mathbb{P}^n tenemos que el espacio proyectivo es localmente isomorfo \mathbb{C}^n . Una discusión más detallada de esto está dada en [10, Capítulo 1, Sección 2, Proposición 2.2]. Utilizando estas cartas se tiene la siguiente noción de función regular:

Definición 3.15

Una función $f: V \rightarrow W$ entre variedades casi-proyectivas afines, con $V \subset \mathbb{P}^n$ es regular si para todo punto $p \in V$ la función inducida entre vecindades coordenadas U de p y U' de $f(p)$, $f: U \rightarrow U'$ es regular.

Definición 3.16

El campo de funciones racionales sobre V consiste de funciones de la forma f/g con $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$.

Definición 3.17

Una función $f: V \rightarrow W$ entre variedades algebraicas $V \subset \mathbb{C}^n$ y $W \subset \mathbb{C}^m$ es una

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

función *racional* si es de la forma

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

donde cada función es f_i está en el campo de funciones racionales de V .

Una función racional la cual es invertible con inversa racional es llamada una función *birracional*.

De manera análoga a la definición de funciones regulares para el caso proyectivo, se definen las funciones racionales entre variedades algebraicas proyectivas utilizando las cartas coordenadas de los espacios proyectivos.

Definición 3.18

Una *resolución* de la variedad singular V consiste de una variedad suave \tilde{V} y una función birracional propia $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ la cual define un isomorfismo sobre $V \setminus \text{Sing}(V)$.

Definición 3.19

El *divisor excepcional* de la resolución $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ es

$$\phi^{-1}(\text{Sing}(V)).$$

En las superficies V que obtenemos de las acciones de los grupos finitos de $\text{SU}(2)$ el conjunto $\text{Sing}(V)$ consiste de un solo punto, así para obtener una resolución iremos explotando puntos en estas superficies.

Definición 3.20

La explosión B de el origen \bar{O} en \mathbb{C}^n es la siguiente variedad algebraica en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$:

$$B = \left\{ \left((x_1, \dots, x_n), [t_1 : \dots : t_n] \right) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x_i t_j = x_j t_i \right\}.$$

Observación 3.21

También podemos explotar un punto (a, b, c) distinto de \bar{O} , tomando un cambio de coordenadas dado por $\tilde{x} = x + a$, $\tilde{y} = y + b$ y $\tilde{z} = z + c$.

Observación 3.22

Notemos que tenemos una función regular $\pi: B \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por

$$\pi\left((x_1, \dots, x_n), [t_1 : \dots : t_n]\right) = (x_1, \dots, x_n).$$

Además notemos que las cartas coordenadas de \mathbb{P}^{n-1} nos inducen cartas coordenadas B_i de B .

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Definición 3.23

Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín que contiene al punto \overline{O} . Sea B la explosión de \overline{O} en \mathbb{C}^n y sea $\pi: B \rightarrow \mathbb{C}^n$ la función definida en la observación 3.22. La *explosión* de \overline{O} en V está definida como

$$\tilde{V} = \overline{\pi^{-1}(V \setminus \overline{O})} \subset B.$$

Restringiendo π a \tilde{V} obtenemos una función racional $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$.

Proposición 3.24

La función racional $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ define un isomorfismo entre $V \setminus \overline{O}$ y $\tilde{V} \setminus \pi^{-1}(\overline{O})$

Demostración. Definimos $\rho: \mathbb{C}^n \setminus \overline{O} \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ como

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \left((x_1, \dots, x_n), [x_1 : \dots : x_n] \right).$$

Claramente ρ está bien definida y es la inversa de π . Como además es una función regular, entonces al restringir obtenemos el resultado. \square

Definición 3.25

Sean $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín, B la explosión de \overline{O} en \mathbb{C}^n y \tilde{V} la explosión de \overline{O} en V . El *divisor excepcional* de la explosión es $E = \pi^{-1}(\overline{O}) \cap \tilde{V}$.

Observación 3.26

En cada explosión obtenemos un nuevo divisor excepcional, el cual puede constar de varias componentes irreducibles. Cuando obtenemos una resolución explotando, al final nos queda la unión de todos los divisores excepcionales al cual también denotamos por E y es llamado el *divisor excepcional de la resolución*.

Definición 3.27

En el caso en que V es una superficie o una curva con singularidad aislada, una *buena resolución* \tilde{V} consiste de una resolución en la cual las componentes irreducibles E_i del divisor excepcional de la resolución $E = E_1 \cup \dots \cup E_k$, son todas suaves y se intersectan de manera *transversal*. Es decir, la suma directa de sus espacios tangentes nos da el espacio tangente de la variedad algebraica \tilde{V} . Además pedimos que

$$E_i \cap E_j \cap E_l = \emptyset.$$

Observación 3.28

Si tenemos una resolución $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ que no es buena, entonces pueden suceder tres cosas:

- (1) Alguna componente E_i del divisor excepcional E tiene un punto p singular.
- (2) Dos componentes no se intersectan transversalmente en un punto p ; es decir se intersectan de manera tangente.

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

- (3) Existe un punto p que está en tres componentes irreducibles distintas del divisor excepcional E .

En los tres casos podemos utilizar la observación 3.21 para ir explotando el punto p . Al final en un número finito de pasos obtenemos a partir de nuestra resolución $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ una buena resolución

Antes de proseguir veamos algunos ejemplos, pero antes de adentrarnos en las superficies $V = V(h)$ que tenemos, empecemos con algo más manejable: curvas.

Ejemplo 3.29

El caso de $h(x, y) = y^2 - x^3$ Entonces obtenemos la siguiente curva:

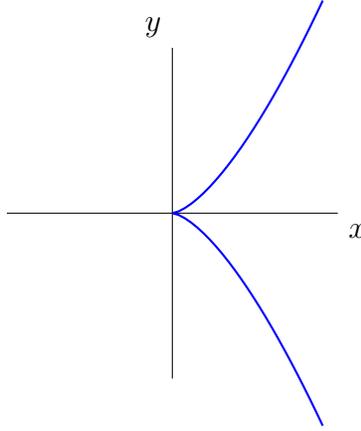


Figura 3.1: Imagen real de la curva $y^2 - x^3$

Como se tienen dos cartas $B_i = \{(x, y), [t_1 : t_2] \in B \mid t_i \neq 0\}$, comenzamos con $t_1 \neq 0$. Tomamos $u = t_2/t_1$ obtenemos $y = xu$ y así tenemos

$$0 = h(x, y) = h(x, xu) = x^2u^2 - x^3 = x^2(u^2 - x).$$

Esto sucede si y solo si $x = 0$ ó $u^2 - x = 0$, pero si $x = 0$, entonces $u = 0$. Así en la primera carta obtenemos que

$$B_1 \cap \tilde{V} = V(u^2 - x)$$

y como el gradiente de $u^2 - x$ es

$$(-1, 2u) \neq (0, 0)$$

tenemos que en esta carta \tilde{V} es una curva suave. Además el divisor excepcional es

$$E \cap B_1 = \{(x, y, u) \in B_1 \cap \tilde{V} \mid x = 0\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

En la segunda carta se tiene $t_2 \neq 0$ y tomando $v = t_1/t_2$ obtenemos $x = yv$. Con esto vemos que

$$0 = h(x, y) = h(yv, y) = y^2 - y^3v^3 = y^2(1 - yv^3).$$

Esto se cumple si y sólo si $y = 0$ ó $1 - yv^3 = 0$. Si $y = 0$, entonces $x = 0$. Entonces en la segunda carta se tiene que

$$B_2 \cap \tilde{V} = V(1 - yv^3).$$

y el gradiente de $1 - yv^3$ es

$$(-3v^2y, -v^3)$$

el cual solo se anula en el $(0, 0)$, pero éste no es un punto en $B_2 \cap \tilde{V}$ y por lo tanto tenemos que la curva en esta carta es no singular. El divisor excepcional está dado por

$$E \cap B_2 = \{(v, y) \in B_2 \cap \tilde{V} \mid y = 0\} = \emptyset.$$

Ahora veamos algunos ejemplos de superficies. Empecemos con el polinomio $h(x, y, z) = x^n + yz$ que asociado al grupo cíclico C_n .

Observación 3.30

En la segunda carta tomando $x = v_1y$ y $z = v_3y$ el polinomio h se convierte en $y^2(v_1^n y^{n-2} + v_3)$. Así la superficie \tilde{V} está dada por la ecuación

$$v_1^n y^{n-2} + v_3 = 0.$$

En esta carta no tenemos singularidades ya que el gradiente de $v_1^n y^{n-2} + v_3$ es

$$(nv_1^{n-1}y^{n-2}, (n-2)y^{n-3}v_1^n, 1) \neq (0, 0, 0).$$

Además en esta carta el divisor excepcional $E \cap B_2$ consiste de los puntos que cumplen $y = 0$ y $v_1^n y^{n-2} + v_3 = 0$. Esto sucede si y sólo si $v_3 = 0$ y v_1 es libre. Por lo tanto

$$E \cap B_2 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

En la tercera carta tampoco aparecen singularidades ya que de manera análoga a la segunda carta obtenemos una superficie definida por el polinomio

$$w_1^n z^{n-2} + w_2$$

el cual tiene el siguiente gradiente

$$(nw_1^{n-1}z^{n-2}, 1, (n-2)z^{n-3}w_1^n) \neq (0, 0, 0).$$

Igualmente de manera análoga obtenemos que en esta carta el divisor excepcional se ve como

$$E \cap B_3 = \{(w_1, 0, 0) \mid w_1 \in \mathbb{C}\}.$$

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

Además bajo el cambio de coordenadas notamos que la curva que encontramos en la primera carta, la cual forma parte del divisor excepcional, es distinta a la curva que encontramos en la segunda carta, la cual también forma parte del divisor excepcional. Así vemos que el divisor excepcional tiene dos componentes irreducibles.

La singularidad aparece en la primera carta, en la cual tomando $y = u_2x$ y $z = u_3z$ el polinomio h se convierte en $x^2(x^{n-2} + u_2u_3)$. La superficie generada por el polinomio

$$x^{n-2} + u_2u_3$$

y es justamente la superficie asociada al grupo cíclico C_{n-2} . Además el divisor excepcional en esta carta es

$$E \cap B_1 = \{(0, u_2, 0) \mid u_2 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, 0, u_3) \mid u_3 \in \mathbb{C}\}.$$

La curva $\{(0, u_2, 0) \mid u_2 \in \mathbb{C}\}$ es enviada por el cambio de coordenadas de B_1 a B_2 a la curva $\{(v_1, 0, 0) \mid z_1 = 0\}$, y la curva $\{(0, 0, u_3) \mid u_3 \in \mathbb{C}\}$ es enviada por el cambio de coordenadas $B_1 \rightarrow B_3$ a la curva $\{(w_1, 0, 0) \mid w_1 \in \mathbb{C}\}$. Además estas dos componentes se intersectan de manera transversal.

Por lo tanto si $n = 2k + 1$ es impar podemos, mediante $k - 1$ explosiones, reducir la resolución de la singularidad de C_n a simplemente resolver la singularidad de C_3 . En el caso de $n = 2k$ par, esto se traduce, mediante $k - 1$ explosiones, a resolver la singularidad de C_2 .

Ejemplo 3.31

Demos la resolución de la singularidad de la superficie V asociada a C_2 definida por $x^2 + yz$. En la primera carta tomando $y = u_2x$ y $z = u_3x$ tenemos que el polinomio se convierte en el polinomio $x^2(1 + u_2u_3)$. La superficie $\tilde{V} \cap B_1$ definida por el polinomio

$$1 + u_2u_3$$

tiene el siguiente gradiente

$$(0, u_3, u_2)$$

el cual es cero si y sólo si $u_2 = u_3 = 0$, pero estos puntos no pertenecen a $\tilde{V} \cap B_1$. Su divisor excepcional en esta carta está dado por los puntos $x = 0$ y $1 + u_2u_3 = 0$. Entonces el divisor excepcional en esta carta se ve como

$$E \cap B_1 = \left\{ \left(0, t, -\frac{1}{t}\right) \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{\overline{0}\} \right\}.$$

En la segunda carta obtenemos que h se convierte en el siguiente polinomio $y^2(v_1^2 + v_3)$. La superficie en esta carta está definida por el polinomio

$$v_1^2 + v_3$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

el cual tiene el siguiente gradiente

$$(2v_1, 0, 1) \neq (0, 0, 0).$$

Entonces $\tilde{V} \cap B_2$ no tiene puntos singulares, y el divisor excepcional en esta carta consiste de los puntos $y = 0$ y $v_1^2 + v_3 = 0$, entonces el divisor excepcional en esta carta es

$$E \cap B_2 = \{(t, 0, -t^2) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Como $v_1 = 1/u_2$, $v_3 = u_3/u_2$ y $y = u_2x$, entonces la curva $(0, t, -1/t)$ en B_1 bajo las coordenadas de B_2 es $(1/t, 0, -1/t^2)$ que es exactamente la curva $E \cap B_2$.

El caso de la tercera carta es análogo, solo hay que escribir $w_1 = v_1$, $z = y$ y $w_2 = v_3$. Entonces la nueva superficie no tiene puntos singulares y el divisor excepcional tiene una sola componente.

Así para el caso de n par tenemos una buena resolución para las superficies asociadas a C_n .

Ejemplo 3.32

Consideremos el caso de la superficie V generada por el polinomio $x^3 + yz$, asociada al grupo cíclico $G = C_3$, la cual tiene una singularidad en $\bar{O} = (0, 0, 0)$. En la primera carta tomando $y = u_2x$ y $z = u_3x$ tenemos que el polinomio se convierte en el polinomio $x^2(x + u_2u_3)$. La superficie entonces está definida por la ecuación polinomial

$$x + u_2u_3 = 0$$

y el polinomio $x + u_2u_3$ tiene como gradiente a

$$(1, u_3, u_2) \neq (0, 0, 0).$$

Entonces en esta carta no hay puntos singulares. El divisor excepcional en esta carta consiste de los puntos $x = 0$ y $x + u_2u_3 = 0$, y esto se cumple en los puntos de la forma $(0, u_1, 0)$ y $(0, 0, u_3)$. Por lo tanto

$$E \cap B_1 = \{(0, t, 0 \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Además notemos que en esta carta las componentes irreducibles del divisor excepcional se intersectan de manera transversal. En la segunda carta obtenemos que el polinomio $x^3 + yz$ se convierte en $y^2(v_1^3y - v_3)$, y así la superficie en esta carta está definida por la ecuación

$$v_1^3y + v_3 = 0$$

y el polinomio $v_1^3y + v_3 = 0$ tiene gradiente

$$(2v_1^2, v_1^3, 1) \neq (0, 0, 0).$$

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

El divisor excepcional en esta carta está definido por las ecuaciones $y = 0$ y $v_1^3 y + v_3 = 0$, y esto se cumple para los puntos de la forma $(v_1, 0, 0)$. Por lo tanto

$$E \cap B_2 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Bajo el cambio de coordenadas $x = v_1 y$, $u_2 = 1/v_1$ y $u_3 = v_3/v_1$ esta curva es enviada a la curva $\{(0, 1/t, 0)\}$ en la carta B_1 , y por tanto es una de las componentes de $E \cap B_1$. En la última carta tomando $x = w_1 z$ y $y = w_2 z$, el polinomio $x^3 + yz$ se convierte en el polinomio $z^2(w_1^3 z + w_2)$, y la superficie está definida por el polinomio

$$w_1^3 z + w_2$$

el cual tiene gradiente

$$(3w_1^2 z, 1, w_1^3) \neq (0, 0, 0).$$

El divisor excepcional en esta carta está dado por las ecuaciones $z = 0$ y $w_1^3 z + w_2 = 0$, las cuales solo satisfacen puntos de la forma $(w_1, 0, 0)$. Entonces

$$E \cap B_3 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Bajo el cambio de coordenadas $x = w_1 z$, $u_2 = w_2/w_1$ y $u_3 = 1/w_1$ la curva $\{(t, 0, 0)\}$ es enviada a la curva $\{(0, 0, 1/t)\}$ que es la otra componente de $E \cap B_1$. Así tenemos una superficie sin singularidades, y el divisor excepcional tiene dos componentes.

Con esto concluimos que en general para los grupos cíclicos podemos obtener buenas resoluciones de los puntos singulares de las superficies asociadas.

Otro ejemplo similar es el caso de las superficies obtenida por la acción del grupo binario dihédrico \widetilde{D}_n .

Observación 3.33

La superficie V asociada al grupo binario dihédrico \widetilde{D}_n está definida por el polinomio $z^2 + x(y^2 + x^n) = z^2 + xy^2 + x^{n+1}$. En la primera carta (haciendo un abuso de notación) tomando $y = yx$ y $z = zx$ el polinomio $z^2 + xy^2 + x^{n+1}$ se convierte en el siguiente polinomio $x^2(z^2 + xy^2 + x^{n-1})$. La superficie \widetilde{V} en esta carta está definida por

$$z^2 + xy^2 + x^{n-1} = 0.$$

El polinomio $z^2 + xy^2 + x^{n-1}$ nos define la superficie asociada al grupo dihédrico \widetilde{D}_{n-2} y tiene gradiente

$$(y^2 + (n-1)x^n - 2, 2xy, 2z)$$

que se anula únicamente en \overline{O} . El divisor excepcional está dado por las ecuaciones $x = 0$ y $z^2 + xy^2 + x^{n-1} = 0$, las cuales se cumplen solo para puntos de la forma $(0, y, 0)$. Entonces

$$E_1 \cap B_1 = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

En la segunda carta tomando $x = xy$ y $z = zy$ el polinomio $z^2 + xy^2 + x^{n+1}$ se convierte en el polinomio $y^2(z^2 + xy + x^{n+1}y^{n-1})$, y la superficie \tilde{V} en esta carta está definida por

$$z^2 + xy + x^{n+1}y^{n-1} = 0$$

y el polinomio $z^2 + xy + x^{n+1}y^{n-1}$ tiene el siguiente gradiente

$$\left(y(1 + (n+1)x^ny^{n-2}), x(1 + (n-1)x^ny^{n-2}), 2z \right).$$

el cual se anula solamente en \bar{O} ; notemos que esta singularidad es distinta de la singularidad encontrada en la primera carta, ya que el cambio de coordenadas de la primera carta a la segunda está definido sólo para los puntos donde la primera entrada es distinta de cero. El divisor excepcional está dado por las ecuaciones $y = 0$ y $z^2 + xy + x^{n+1}y^{n-1} = 0$ y estas ecuaciones se cumplen sólo en los puntos $(x, 0, 0)$. Entonces

$$E_1 \cap B_2 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

lo cual es otra componente del divisor excepcional, por las mismas razones que se expusieron para ver que tenemos otra singularidad en esta carta.

Por último en la tercera carta tomando $x = zx$ y $y = yz$ el polinomio $z^2 + xy^2 + x^{n+1}$ se convierte en el polinomio $z^2(1 + xy^2z + x^{n+1}z^{n-1})$. La superficie que obtenemos de explotar en esta carta está definida por la ecuación

$$1 + xy^2z + x^{n+1}z^{n-1} = 0$$

y el polinomio $1 + xy^2z + x^{n+1}z^{n-1}$ tiene gradiente

$$\left(xy^2z + (n+1)x^nz^{n-1}, 2xyz, (n-1)x^{n+1}z^{n-2} \right).$$

Entonces el gradiente se anula cuando $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$. Pero los puntos $(0, y, z)$ y $(x, y, 0)$ no están en la superficie y el caso $y = 0$ implica en la primera componente del gradiente que $z = 0$ o $x = 0$. Por lo tanto los puntos donde el gradiente no tiene rango 1 no están sobre la superficie, y así concluimos que la superficie es suave. El divisor excepcional está definido, en esta carta, por las ecuaciones $z = 0$ y $1 + xy^2z + x^{n+1}z^{n-1} = 0$, pero la colección de puntos que cumplen estas dos ecuaciones es vacío, es decir

$$E_1 \cap B_3 = \emptyset.$$

Así en esta explosión tenemos dos puntos singulares, donde cada uno aparece sólo en una carta. La superficie en la primera carta es la superficie asociada al grupo binario dihédrico \tilde{D}_{n-2} , así que nos enfocamos en el segundo punto.

Este punto está en la superficie definida por el polinomio $z^2 + xy + x^{n+1}y^{n-1}$, entonces

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

en la primera carta tomando $y = yx$ y $z = zx$ se convierte en el polinomio $x^2(z^2 + y + x^{2n-2}y^{n-1})$ y así nuestra nueva superficie está definida por la ecuación

$$z^2 + y + x^{2n-2}y^{n-1} = 0.$$

El polinomio $z^2 + y + x^{2n-2}y^{n-1}$ tiene el siguiente gradiente

$$\left((2n-2)x^{2n-3}y^{n-1}, 1 + (n-1)x^{2n-2}y^{n-2}, 2z \right),$$

el cual nunca se anula. El divisor excepcional en esta carta está dado por las ecuaciones $x = 0$ y $z^2 + y + x^{2n-2}y^{n-1} = 0$. Entonces

$$E_2 \cap B_1 = \{(0, -t^2, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

El divisor excepcional que tenemos de la primera explosión está definido por las ecuaciones $y = 0$ y $z^2 + y + x^{2n-2}y^{n-1} = 0$, entonces en esta carta se ve como

$$E_1 \cap B_1 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

y por tanto las dos curvas se intersectan de manera transversal.

En la segunda carta obtenemos una superficie definida por la ecuación polinomial

$$z^2 + x + x^{n+1}y^{2n-2} = 0.$$

El polinomio $z^2 + x + x^{n+1}y^{2n-2}$ tiene gradiente

$$\left(1 + (n+1)x^n y^{2n-2}, (n-2)x^{n+1}y^{2n-3}, 2z \right),$$

el cual nunca se anula, y por lo tanto no hay puntos singulares. El divisor excepcional en esta carta está dada por las ecuaciones polinomiales $y = 0$ y $z^2 + x + x^{n+1}y^{2n-2} = 0$, de esto concluimos que

$$E_2 \cap B_2 = \{(0, -t^2, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Bajo un cambio de coordenadas vemos que este divisor se corresponde con el que se encontró en la primera carta.

Para terminar, en la tercera carta la superficie está definida por la ecuación polinomial

$$1 + xy + x^{n+1}y^{n-1}z^{2n-2} = 0.$$

El polinomio $1 + xy + x^{n+1}y^{n-1}z^{2n-2}$ tiene gradiente

$$\left(y + (n+1)xy^{n-1}z^{2n-2}, x + (n-1)x^{n+1}y^{n-2}z^{2n-2}, (2n-2)x^{n+1}y^{n-1}z^{2n-3} \right),$$

el cual se anula cuando $x = 0$ ó $y = 0$, ó $z = 0$. Pero notemos que los puntos con $x = 0$ ó $y = 0$ no están en la superficie y el caso $z = 0$ implica que $y = 0$ y $x = 0$.

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Por lo tanto, no tenemos puntos singulares. El divisor excepcional está definido por las ecuaciones $z = 0$ y $1 + xy + x^{n+1}y^{n-1}z^{2n-2} = 0$ por lo cual concluimos que

$$E_2 \cap B_3 = \left\{ \left(\frac{1}{t}, -t, 0 \right) \right\}.$$

Esto corresponde bajo el cambio de coordenadas a la misma componente que encontramos en las otras dos cartas. Además, el divisor excepcional que se obtuvo en la primera explosión en esta carta está definido por las ecuaciones $y = 0$ y $1 + xy + x^{n+1}y^{n-1}z^{2n-2} = 0$. De esto concluimos que

$$E_1 \cap B_3 = \emptyset.$$

Al final de estas explosiones tenemos que el divisor excepcional está conformado por dos curvas que se intersectan transversalmente.

Con el ejemplo anterior vemos que de manera análoga a los grupos cíclicos, la resolución de las superficies asociadas al grupo binario dihédrico \widetilde{D}_n se reduce a resolver la superficie asociada a \widetilde{D}_2 cuando n es par, y a resolver la superficie dada por \widetilde{D}_3 cuando n es impar. Estos dos casos son nuestros siguientes ejemplos. Estas resoluciones van a ser también buenas resoluciones.

Ejemplo 3.34

En el caso de \widetilde{D}_2 la superficie está definida por la ecuación

$$z^2 + xy^2 + x^3 = 0.$$

Para la primera carta tomamos $y = xy$ y $z = zx$ para obtener la superficie $\widetilde{V}_1 \cap B_1$ dada por la ecuación

$$z^2 + xy^2 + x = 0.$$

El polinomio $z^2 + xy^2 + x$ tiene gradiente

$$(y^2 + 1, 2xy, 2z),$$

el cual sólo se anula en los puntos $(0, i, 0)$ y $(0, -i, 0)$, los cuales sí están sobre la superficie. El divisor excepcional dado por $x = 0$ y $z^2 + xy^2 + x = 0$ está dado como

$$E_1 \cap B_1 = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

En la segunda carta tenemos tomando $x = xy$ y $z = zy$, que la superficie $\widetilde{V}_1 \cap B_2$ está definida por la ecuación polinomial

$$xy + yx^3 + z^2 = 0.$$

El polinomio $xy + yx^3 + z^2$ tiene gradiente

$$(y(1 + 3x^2), x(1 + x^2), 2z),$$

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

el cual se anula en \overline{O} , $(i, 0, 0)$ y $(-i, 0, 0)$ que son puntos en la superficie. El divisor excepcional está definido por $y = 0$ y $xy + yx^3 + z^2 = 0$ y es de la forma

$$E_1 \cap B_2 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Bajo un cambio de coordenadas vemos que éste se corresponde con el divisor que tenemos en la primera carta.

En la tercera carta tenemos tomando $x = xz$ y $y = yz$, que la superficie $\tilde{V}_1 \cap B_3$ está definida por la igualdad

$$1 + zxy^2 + x^3z = 0.$$

Esta superficie no tiene puntos singulares ya que el gradiente de $1 + zxy^2 + x^3z$ es

$$(zy^2 + 3zx^2, 2xyz, xy^2 + x^3),$$

el cual se anula solamente cuando $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$. Pero los puntos con $x = 0$ ó $z = 0$ no están en la superficie y el caso de $y = 0$ implica que $x = 0$. El divisor excepcional está dado por las ecuaciones $z = 0$ y $1 + zxy^2 + x^3z = 0$, pero ningún punto las satisface a las dos por lo tanto

$$E_1 \cap B_3 = \emptyset.$$

En la superficie $\tilde{V}_1 \cap B_2$ es donde nos aparecen todos los puntos singulares siendo uno de estos \overline{O} . Así explotando esta superficie $\tilde{V}_1 \cap B_2$ definida por $xy + yx^3 + z^2$ en \overline{O} obtenemos en la primera carta una superficie $\tilde{V}_2 \cap B_1$ definida por la igualdad

$$y + yx^2 + z^2 = 0.$$

El polinomio $y + yx^2 + z^2$ tiene como gradiente a

$$(2xy, 1 + x^2, 2z),$$

el cual solo se anula en los puntos $(i, 0, 0)$ y $(-i, 0, 0)$ los cuales sí están en la superficie. El divisor excepcional está dado por $x = 0$ y $y + yx^2 + z^2 = 0$ y por lo tanto tenemos

$$E_2 \cap B_1 = \{(0, -t^2, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

El divisor que ya tenemos de la primera explosión está definido por $y = 0$ y $y + yx^2 + z^2 = 0$ entonces en esta carta se ve como $E_1 \cap B_1 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}$, y por tanto estas dos curvas se intersectan transversalmente. En la segunda carta obtenemos la superficie $\tilde{V}_2 \cap B_2$ definida por la ecuación

$$x + y^2x^3 + z^2 = 0.$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

El polinomio $x + y^2x^3 + z^2$ tiene como gradiente a

$$(1 + 2y^2x^2, 2yx^3, 2z),$$

el cual nunca se anula, es decir no hay singularidades en $\tilde{V}_2 \cap B_2$. El divisor excepcional está dado por las ecuaciones $y = 0$ y $x + y^2x^3 + z^2 = 0$, y por lo tanto tenemos

$$E_2 \cap B_2 = \{(-t^2, 0, t) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

que bajo el cambio de coordenadas de B_2 a B_1 es enviado a $E_1 \cap B_2$.

En la tercera carta tenemos la superficie $\tilde{V}_2 \cap B_3$ definida por la ecuación

$$xy + x^3yz^2 + 1 = 0.$$

El polinomio $xy + x^3yz^2 + 1$ tiene el siguiente gradiente

$$(y(1 + 3x^2z^2), x(1 + x^2z^2), 2x^3yz),$$

el cual sólo se anula si $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$. Los puntos con $x = 0$ ó $y = 0$ no están en $\tilde{V}_2 \cap B_3$, y en el caso $z = 0$ tenemos $y = 0$ y $x = 0$, pero \bar{O} tampoco está en $\tilde{V}_2 \cap B_3$. Así que $\tilde{V}_2 \cap B_3$ es una superficie suave. El divisor excepcional en esta carta está definido por $z = 0$ y $xy + x^3yz^2 + 1 = 0$. Pero ningún punto satisface simultáneamente las dos ecuaciones. Así concluimos que

$$E_2 \cap B_3 = \emptyset.$$

El divisor E_1 está dado, en esta carta, por las ecuaciones $y = 0$ y $xy + x^3yz^2 + 1 = 0$, las cuales no se cumplen al mismo tiempo para ningún punto y por tanto

$$E_1 \cap B_3 = \emptyset.$$

En la primera carta de la superficie \tilde{V}_2 nos aparecen dos singularidades $(i, 0, 0)$ y $(-i, 0, 0)$ distintas de \bar{O} . Por la observación 3.21 podemos explotar en alguna de ellas, pero antes hay que hacer un cambio de variable. Tomando $x = x - i$, como $\tilde{V}_2 \cap B_2$ está definida por el polinomio $y + yx^2 + z^2$ al sustituir nos queda el siguiente polinomio

$$yx^2 - 2ixy + z^2.$$

En la primera carta obtenemos la superficie $\tilde{V}_3 \cap B_1$ definida por

$$yx - 2iy + z^2 = 0.$$

El gradiente del polinomio $yx - 2iy + z^2$ es

$$(y, x - 2i, 2z),$$

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

el cual se anula solamente en el punto $(2i, 0, 0)$ el cual si está en $\tilde{V}_3 \cap B_1$. El divisor excepcional en esta carta está definido por $x = 0$ y $yx - 2iy + z^2 = 0$, y así concluimos que

$$E_3 \cap B_1 = \{(0, -\frac{t^2 i}{2}, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

En la segunda carta tenemos la superficie $\tilde{V}_3 \cap B_2$ definida por la ecuación

$$x^2 y - 2ix + z^2 = 0.$$

Ésta superficie no tiene puntos singulares ya que el gradiente del polinomio $x^2 y - 2ix + z^2$ es

$$(2xy - 2i, x^2, 2z),$$

ya que los polinomios $2xy - 2i$ y x^2 no se pueden anular simultáneamente. El divisor excepcional está definido por $y = 0$ y $x^2 y - 2ix + z^2 = 0$. Entonces

$$E_3 \cap B_2 = \{(-\frac{it^2}{2}, 0, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Bajo el cambio de coordenadas este divisor se corresponde con el que obtuvimos en la primera carta. El divisor E_2 está definido en esta carta por $x = 0$ y $x^2 y - 2ix + z^2 = 0$ entonces está dado como

$$E_2 \cap B_2 = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

y por tanto los divisores E_2 y E_3 se intersectan en esta carta transversalmente.

En la tercera carta tenemos la superficie $\tilde{V}_3 \cap B_3$ definida por

$$x^2 yz - 2ixy + 1 = 0.$$

El gradiente del polinomio $x^2 yz - 2ixy + 1$ es

$$(2xyz - 2iy, x^2 z - 2ix, x^2 y),$$

el cual no se anula en ningún punto de $\tilde{V}_3 \cap B_3$. El divisor excepcional $E_3 \cap B_3$ que aparece en esta carta es una curva suave que corresponde al divisor excepcional que tenemos en las otras cartas. El divisor E_2 no aparece en esta carta ya que ningún punto satisface al mismo tiempo $x = 0$ y $x^2 yz - 2ixy + 1 = 0$.

Por ultimo como en la primera carta $\tilde{V}_3 \cap B_1$ tiene una singularidad en $(2i, 0, 0)$ tomando $x = x + 2i$ y sustituyendo en $yx - 2iy + z^2$ para obtener el polinomio

$$xy + z^2$$

En la primera carta tenemos una superficie $\tilde{V}_4 \cap B_1$ definida por

$$y + z^2 = 0.$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

El polinomio $y + z^2$ no es singular en $\tilde{V}_4 \cap B_1$ ya que su gradiente es

$$(0, 1, 2z) \neq (0, 0, 0).$$

El divisor excepcional está definido por $x = 0$ y $y + z^2 = 0$, entonces es

$$E_4 \cap B_1 = \{(0, -t^2, t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

En la segunda carta tenemos la superficie $\tilde{V}_4 \cap B_2$ dada por

$$x + z^2 = 0.$$

El polinomio $x + z^2$ no es singular ya que su gradiente es

$$(1, 0, 2z) \neq (0, 0, 0).$$

El divisor excepcional está determinado por los puntos que cumplen $y = 0$ y $x + z^2 = 0$, que son de la forma

$$E_4 \cap B_2 = \{(-t^2, 0, t) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

y éste se corresponde con el cambio de coordenadas con el divisor que tenemos en la primera carta. El divisor E_3 está definido en esta carta por $x = 0$ y $x + z^2 = 0$ entonces es

$$E_3 \cap B_2 = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

y por tanto se intersectan transversalmente en esta carta.

En la tercera carta tenemos la superficie $\tilde{V}_4 \cap B_3$ definida por

$$yx + 1 = 0.$$

Esta superficie no tiene puntos singulares ya que el gradiente de $yx + 1$ es

$$(y, x, 0),$$

y sólo se anula en puntos que no están en $\tilde{V}_4 \cap B_3$. El divisor excepcional está dado por $z = 0$ y $yx + 1 = 0$ entonces es

$$E_4 \cap B_3 = \left\{ \left(\frac{1}{t}, -t, 0 \right) \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

El divisor E_3 no aparece en esta carta por que está definido por $x = 0$ y $yx + 1 = 0$ las cuales no se satisfacen al mismo tiempo.

Así hemos obtenido al final de este proceso una buena resolución para \tilde{D}_2 en la cual el divisor excepcional tiene 4 componentes irreducibles.

Para terminar con nuestros ejemplos estudiemos rápida y superficialmente el caso de \tilde{D}_3 .

3.3. RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

Ejemplo 3.35

Demos ahora la resolución explotando de la superficie V definida por el grupo \widetilde{D}_3 la cual está definida por el polinomio

$$z^2 + xy^2 + x^4.$$

En la primera carta obtenemos la superficie $\widetilde{V}_1 \cap B_1$ definida por el polinomio

$$z^2 + xy^2 + x^2$$

el cual tiene gradiente

$$(2x + y^2, 2xy, 2z).$$

Por lo tanto $\widetilde{V}_1 \cap B_1$ tiene un punto singular en \overline{O} . El divisor excepcional en esta carta está definido por $x = 0$ y $z^2 + xy^2 + x^2 = 0$ entonces es de la forma

$$E_1 \cap B_1 = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

En la segunda carta la superficie $\widetilde{V}_1 \cap B_2$ tiene una singularidad en \overline{O} la cual no se corresponde bajo el cambio de coordenadas con la singularidad obtenida en la primera carta. La componente del divisor excepcional que aparece en esta carta es la misma de la primera carta.

En la tercera carta no aparecen nuevas singularidades ni nuevas componentes del divisor excepcional.

A continuación explotemos la superficie $\widetilde{V}_1 \cap B_1$ en \overline{O} . En la primera carta en la superficie $\widetilde{V}_2 \cap B_1$ no aparecen singularidades y aparece dos nuevas componentes irreducibles E_2 y E_3 del divisor excepcional.

En la segunda carta la superficie $\widetilde{V}_2 \cap B_2$ tiene una singularidad en \overline{O} y las componentes del divisor excepcional E_2 y E_3 son las mismas que se obtuvieron en la primera carta y además intersectan a la componente de E_1 transversalmente en \overline{O} .

En la tercera carta la superficie $\widetilde{V}_2 \cap B_3$ no tiene singularidades y aparecen las mismas componentes E_2 y E_3 que tenemos en las otras cartas y aparece en esta carta la componente E_1 .

Explotemos ahora la superficie $\widetilde{V}_2 \cap B_2$. En la primera carta la superficie $\widetilde{V}_3 \cap B_1$ no tiene singularidades, aparece una sola nueva componente E_4 del divisor excepcional la cual intersecta transversalmente a las componentes E_1 , E_2 y E_3 en los puntos $(0, -1, 0)$, $(0, 0, i)$ y $(0, 0, -i)$ respectivamente.

En la segunda carta la superficie $\widetilde{V}_3 \cap B_2$ no tiene puntos singulares y aparece la misma componente E_4 que obtuvimos en la primera carta.

Por último en la tercera carta la superficie $\widetilde{V}_3 \cap B_3$ es suave y tiene la misma componente E_4 que tenemos en las otras dos cartas la cual también intersecta transversalmente a las componentes E_2 y E_3 en los puntos $(i, 0, 0)$ y $(-i, 0, 0)$. La componente E_1 no aparece en esta carta.

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Explotemos ahora la superficie $\tilde{V}_1 \cap B_2$ en \bar{O} . En la primera carta la superficie $\tilde{V}_4 \cap B_1$ no tiene singularidades y el divisor excepcional E_5 en esta carta consta de una sola componente que interseca transversalmente a la componente E_1 .

En la segunda carta tenemos la superficie $\tilde{V}_4 \cap B_2$ la cual es suave y contiene a la misma componente de E_5 que aparece en la primera carta.

En la tercera carta tenemos la superficie $\tilde{V}_4 \cap B_3$ la cual no tienen singularidades y tiene la misma componente de E_5 que aparecen en las dos primeras cartas, y no contiene la componente E_1 .

Así al final tenemos una resolución de V para la cual el divisor excepcional consta de cinco componentes irreducibles E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 las cuales se intersectan de la siguiente manera

$$E_5 \cap E_1 \neq \emptyset \quad E_1 \cap E_4 \neq \emptyset \quad E_4 \cap E_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad E_4 \cap E_3 \neq \emptyset.$$

Observación 3.36

No todas las singularidades se pueden resolver explotando puntos singulares, el ejemplo clásico es el paraguas de Whitney dado por la ecuación

$$x^2 - y^2z = 0.$$

Esta superficie tiene como conjunto singular todos los puntos donde el gradiente

$$(2x, -2yz, -y^2)$$

se anula, el cual es todo el eje z . De la gráfica real (ver figura 3.2), vemos que el origen \bar{O} es un punto singular distinto, por lo cual parece una buena elección como centro de la explosión.

En la carta z tomando $x = xz$ y $y = yz$, este polinomio se convierte en el polinomio dado por $z^2(x^2 - yz)$, y la superficie que obtenemos en esta carta es otra vez el paraguas de Whitney. De esto concluimos que por más que explotemos no vamos a obtener una resolución de la superficie.

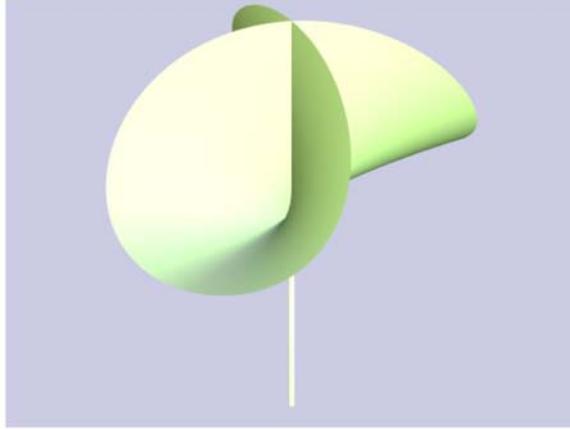


Figura 3.2: Gráfica real del paraguas de Whitney

3.4. Número de intersección

Observación 3.37

Notemos que una buena resolución no existe de manera única, ya que si $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ es una buena resolución con divisor excepcional E y volvemos a explotar en \bar{O} obtenemos una nueva resolución $\psi: \tilde{V}_1 \rightarrow V$ la cual es otra vez buena y su divisor excepcional consiste de E y una nueva componente excepcional. Por lo tanto los espacios \tilde{V} y \tilde{V}_1 no son difeomorfos.

Para resolver ésta posible ambigüedad consideramos el siguiente tipo particular de resoluciones.

Definición 3.38

Una resolución $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ es una *resolución mínima* si para cualquier otra resolución $\psi: \tilde{V}_1 \rightarrow V$ existe una función racional $\rho: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\psi = \phi \circ \rho$.

Por la observación 3.28 si tenemos una resolución mínima podemos obtener una buena resolución. Determinar cuando una resolución es mínima con la definición que tenemos es complicado, pero con los números de intersección podemos determinar con el divisor excepcional cuando la resolución es mínima.

Definición 3.39

El *número de intersección* de superficie de Riemann S en una superficie algebraica \tilde{V} no singular, denotado por $S \bullet S$ es la clase de Euler de su haz normal en \tilde{V} evaluada en el clase $[S] \in H_2(S; \mathbb{Z})$.

Proposición 3.40

Si explotamos el plano complejo \mathbb{C}^2 en un punto, el divisor excepcional es una copia de \mathbb{P}^1 con número de intersección -1 .

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Demostración. Claramente de la definición 3.20 claramente se tiene para cualquier punto $p \in \mathbb{C}^2$ que

$$\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1.$$

Para ver que tiene número de intersección -1 ver [30, Capítulo 3]. □

La proposición recíproca a la proposición anterior es la siguiente:

Proposición 3.41 (Criterio Castelnuovo)

Sea \tilde{V} una superficie algebraica no singular y C una curva homeomorfa a \mathbb{P}^1 con número de intersección -1 . Entonces se C puede implotar (blow down) para obtener una nueva superficie no singular.

Demostración. Éste es un caso particular de un teorema de Castelnuovo más general para divisores excepcionales de tipo excepcional (ver [6, Capítulo 3, pp. 64]). □

Teorema 3.42

La resolución mínima está caracterizada por no contener curvas no singulares con número de intersección -1 .

Demostración. Ver [2, pp. 106]. □

En general calcular los números de intersección del divisor excepcional no es trivial y en la siguiente sección proponemos una forma de ver que las resoluciones de las singularidades aisladas asociadas a los grupos C_n y \tilde{D}_n son mínimas, mediante las gráficas duales.

3.5. Gráfica dual

Las resoluciones de las superficies dadas por C_n y \tilde{D}_n que obtuvimos en la sección 3.3 por lo expuesto en la sección 3.4 son buenas resoluciones que además son únicas, al ser mínimas. Les podemos asociar una gráfica Γ de la siguiente manera: Si el divisor excepcional es de la forma

$$E = E_1 \cup \dots \cup E_k$$

donde cada E_i es una curva irreducible, tenemos un vértice v_i por cada componente E_i . Si además las componentes E_i y E_j se intersectan entonces los vértices v_i y v_j van a estar unidos por una arista en Γ . Ésta gráfica es conocida como la *gráfica dual* de la resolución.

Observación 3.43

Notemos que la gráfica de la resolución no es necesariamente única, a menos que tengamos la resolución mínima.

Ejemplo 3.44

En el caso de los grupos cíclicos C_n vimos que en el caso par $n = 2k$ tenemos que explotar $k - 1$ veces para llegar al caso de C_2 ya que en cada explosión disminuimos en dos el grado del polinomios $x^{2k} - yz$. Además vimos en la observación 3.30 que al divisor excepcional la agregamos por cada explosión dos componentes irreducibles que se intersectan en el nuevo punto singular, así cuando explotamos una componente intersecta solo una de las componentes del nuevo divisor excepcional. El divisor excepcional de C_2 consta de una sola componente irreducible como vimos en el ejemplo 3.31, así el divisor excepcional de la resolución consta de

$$2k - 2 + 1 = 2k - 1 = n - 1,$$

componentes irreducibles.

En el caso impar con $n = 2k + 1$ tenemos que explotar $k - 1$ veces para llegar al caso de C_3 . En cada explosión le agregamos el divisor excepcional dos componentes irreducibles que se intersectan en el nuevo punto singular, así cuando explotamos una componente intersecta sólo una de las componentes del nuevo divisor excepcional. Y como vimos en el ejemplo 3.32 el divisor excepcional de C_3 consta de dos componentes irreducibles, así, al final el divisor excepcional de la resolución consta de

$$2k - 2 + 2 = 2k = n - 1,$$

componentes irreducibles.

Es decir en el caso de los grupos cíclicos C_n la gráfica Γ asociada a la resolución mínima tiene $n - 1$ vértices, y siguiendo como se van intersectando en cada explosión obtenemos la siguiente gráfica llamada diagrama de Dynkin de tipo \mathbf{A}_{n-1} que es



Figura 3.3: Diagrama asociado a la resolución de $x^n - yz = 0$, con $n - 1$ vértices

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Ejemplo 3.45

En el caso de \widetilde{D}_n en la observación 3.33 que en cada explosión disminuimos el grado del polinomio $z^2 + xy + x^{n+1}$ en dos, por lo que si $n = 2k$ ó $n = 2k + 1$ después de $k - 1$ explosiones llegamos el caso de \widetilde{D}_2 o al caso de \widetilde{D}_3 . Además en cada explosión le agregamos al divisor excepcional dos componentes irreducibles que se intersectan y un nuevo punto singular que está en solo una de las componentes. Así al final obtenemos de los ejemplos 3.34 y 3.35 que tenemos $n + 2$ vértices y siguiendo como se intersectan después de cada cada explosión obtenemos la siguiente gráfica llamada diagrama de Dynkin de tipo \mathbf{D}_{n+2} que es

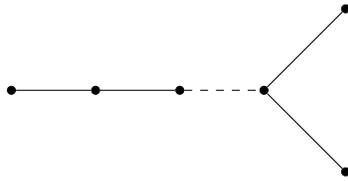


Figura 3.4: Diagrama asociado a la resolución de $z^2 + x(x^n + y^2)$, con $n + 2$ vértices

Para los últimos casos que corresponden a las superficies obtenidas de los grupos binarios \widetilde{A}_4 , \widetilde{S}_4 y \widetilde{A}_5 podemos obtener, de manera análoga a los grupos C_n y \widetilde{D}_n , explotando una buena resolución que también resulte ser mínima. Pero presentamos el siguiente algoritmo para obtener en general las gráficas asociadas a las resoluciones mínimas.

3.6. Algoritmo de la Gráfica Dual

Presentaremos primero un algoritmo para obtener la gráfica dual de la resolución mínima, así como el número de intersección de las componentes del divisor excepcional de la resolución. Este algoritmo fue dado en [20, 19], y está basado en obtener una buena resolución para una curva.

Empezamos notando que todos los polinomios $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ que obtenemos de los grupos finitos de $SU(2)$ son de la forma $x^n + g(y, z)$, donde $g \in \mathbb{C}[y, z]$ es un polinomio en dos variables. A continuación damos una resolución de la curva plana γ definida por $g(y, z)$ mediante explosiones; a diferencia del caso de superficies siempre podemos obtener una resolución (que además sea buena, por la observación 3.28). A ésta resolución le asociamos de manera análoga al caso de superficies una gráfica como sigue.

En cada explosión de la curva γ , el divisor excepcional de la resolución son puntos disjuntos. Pero como también estamos explotando la superficie \mathbb{C}^2 , estos puntos están

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

sobre copias del espacio proyectivo \mathbb{P}^1 por la proposición 3.40. De hecho visto en las cartas locales de \mathbb{P}^1 estos puntos están en la intersección de la curva $E_i \cong \mathbb{P}^1$ y otra curva algebraica. Al final vamos a tener una resolución de γ que está en una resolución de \mathbb{C}^2 , y tenemos el divisor excepcional de ésta resolución

$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_k.$$

Ademas vamos a tener una familia de curvas $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ que intersectan a una sola componente de E (al ser una buena resolución). Por cada componente E_i ponemos un vértice, con dos pesos: $-e_k$ y m_k , donde e_k es el número de intersección de E_k y m_k su multiplicidad (más adelante en los ejemplos veremos como calcular estos números). Dos vértices están unidos por una arista si E_i intersecta a E_j . Por cada γ_j , si intersecta a E_i ponemos una flecha con multiplicidad uno.

Ejemplo 3.46

Resolvamos la curva $y^3 + z^2$ la cual tiene una singularidad aislada en el origen. En la primera carta, explotando, nos queda

$$y^2(y + z^2).$$

El polinomio $y + z^2$ no tiene singularidades, pero la componente $E_1 = \{y = 0\}$ del divisor excepcional es tangente a la curva $y + z^2$ en el $(0, 0)$.

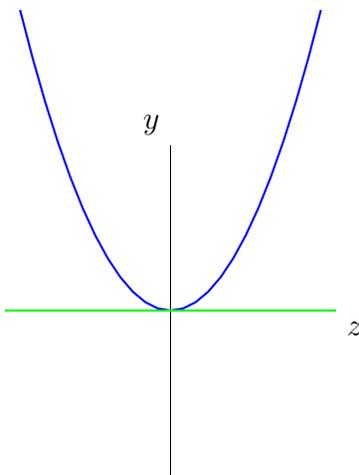


Figura 3.5: Verde, divisor $y = 0$; azul, curva $y + z^2$

El divisor excepcional tiene multiplicidad 2, ya que proviene de $y^2 = 0$. En la otra carta obtenemos que no hay intersección de la curva.

Explotando otra vez nos queda que en la primera carta no hay intersección. En la segunda carta nos queda

$$(y^2 z^2)(z(y + z)).$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

La curva $y + z$ no es singular pero interseca a las componentes $E_1 = \{y = 0\}$ y $E_2 = \{z = 0\}$ en el mismo punto que es el $(0,0)$, así que volvemos a explotar. El divisor E_2 tiene multiplicidad 3 ya que está dado por $z^3 = 0$.

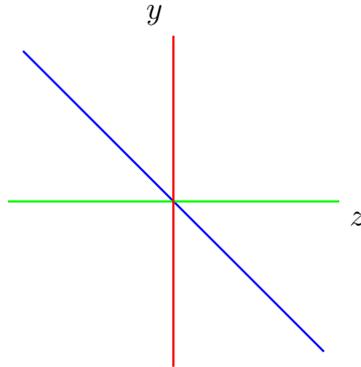
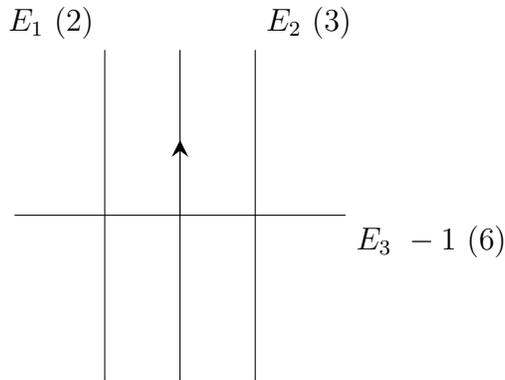


Figura 3.6: Verde, divisor $y = 0$; azul, curva $y + z$; rojo, E_2

En la tercera explosión no obtenemos curvas singulares, y las componentes del divisor E se intersecan transversalmente. E_3 , dado por $z^6 = 0$, interseca a la curva γ transversalmente y tiene multiplicidad 6. Como E_3 aparece en la ultima explosión tiene número de intersección -1 por la proposición 3.40. Esquemáticamente obtenemos lo siguiente



Así la gráfica dual asociada a la resolución de la curva es

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

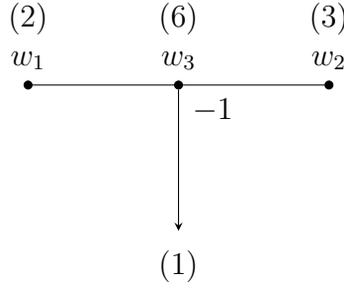


Figura 3.7: Gráfica Γ_x de resolución de $y^3 + z^2 = 0$

Algoritmo para obtener la gráfica

Si tenemos la gráfica dual Γ_g de la curva $g(y, z)$ entonces podemos obtener la gráfica dual Γ_x de la resolución mínima de $x^n + g(y, z)$. Para encontrar el número de intersección de un vértice w (el cual representa una componente del divisor excepcional) utilizaremos la siguiente fórmula

$$(3.1) \quad e_w m_w + \sum_{v \in \nu_w} m_v = 0,$$

Donde ν_w es el conjunto de vértices y flechas adyacentes a w . Una demostración de ésta fórmula puede ser consultada en [15, Teorema 2.6].

También necesitamos la noción de una *cadena de vértices* $G(u, v, a)$, para enteros u, v y a con $\text{mcd}(u, v, a) = 1$, que se obtiene de la siguiente forma:

Consideramos la congruencia

$$v + x \frac{u}{\text{mcd}(u, a)} \equiv 0 \left(\text{mod } \frac{a}{\text{mcd}(u, a)} \right).$$

Observación 3.47

Ésta ecuación tiene solución por la condición $\text{mcd}(u, v, a) = 1$.

Sea $0 \leq x_1 < a/\text{mcd}(u, a)$ su solución y tomemos

$$v + x_1 \frac{u}{\text{mcd}(u, a)} = \frac{a}{\text{mcd}(u, a)} m_1.$$

Si $x_1 \neq 0$ consideramos la fracción continua

$$\frac{a/\text{mcd}(u, a)}{x_1} = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{k_s}}}$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

donde $k_1, \dots, k_s \geq 2$. Después definimos m_1, \dots, m_s como

$$-k_1 m_1 + \frac{u}{\text{mcd}(u, a)} + m_2 = 0 \quad \text{y} \quad -k_i m_i + m_{i-1} + m_{i+1} = 0.$$

Así en el caso en que $x_1 \neq 0$ tenemos que la cadena de vértices $G(u, v, a)$ es

$$\left(\frac{u}{\text{mcd}(u, a)} \right) \leftarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{-k_1} \bullet \xrightarrow{-k_2} \bullet \xrightarrow{\dots} \bullet \xrightarrow{-k_s} \bullet \\ (m_1) \quad (m_2) \qquad \qquad \qquad (m_s) \end{array} \rightarrow \left(\frac{v}{\text{mcd}(v, a)} \right)$$

En el caso en que $x_1 = 0$ la cadena $G(u, v, a)$ no tiene vértices y es solo una arista.

Paso 1.

Sea w un vértice de Γ_g , y supongamos que $\nu_w = \{w_1, \dots, w_s\}$ donde los w_i son vértices o flechas. Tomemos $d_w = \text{mcd}(m_w, m_{w_1}, \dots, m_{w_s})$ y $s_w = |\nu_w|$. Por cada vértices w de Γ_g ponemos $\text{mcd}(d_w, n)$ vértices ‘sobre’ w , con multiplicidad $m_w / \text{mcd}(m_w, n)$ en Γ_x . Estos nuevos vértices pueden ser indexados por el grupo $\mathbb{Z}_{\text{mcd}(d_w, n)}$.

Además a cada nuevo vértice le asociamos género \tilde{g} utilizando la siguiente formula

$$2 - 2\tilde{g} = \frac{(2 - s_w \text{mcd}(m_w, n) + \sum_{v \in \nu_w} \text{mcd}(m_w, m_v, n))}{\text{mcd}(d_w, n)}.$$

Al vértice w también le asociamos este género.

Observación 3.48

Las curvas algebraicas (complejas) con género 0 son isomorfas a \mathbb{P}^1 (ver[22, Capítulo III, Sección 6.6, Corolario 3]).

Consideremos ahora una arista $e = (w, v)$ de Γ_g

$$\begin{array}{c} (m_w) \quad (m_v) \\ \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \end{array}$$

En Γ_x ponemos $d_e = \text{mcd}(m_w, m_v, n)$ copias ‘sobre’ e de cadenas de tipo

$$G\left(\frac{m_w}{d_e}, \frac{m_v}{d_e}, \frac{n}{d_e}\right).$$

Estas cadenas pueden ser indexadas por el grupo \mathbb{Z}_{d_e} . Las puntas de las flechas de estas cadenas las identificamos con los vértices nuevos que pusimos ‘sobre’ w y v , vía los morfismos naturales $\mathbb{Z}_{\text{mcd}(d_e, n)} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{mcd}(d_w, n)}$ y $\mathbb{Z}_{\text{mcd}(d_e, n)} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{mcd}(d_v, n)}$, respectivamente.

Ahora consideremos la flecha de Γ_g :

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

$$\begin{array}{c} (m_w) \\ \bullet \longrightarrow \end{array} \quad (1)$$

Ponemos una cadena de tipo $G(m_w, 1, n)$ ‘sobre’ ésta flecha en Γ_x , cuyo “lado derecho” es una flecha en Γ_x con multiplicidad 1 y cuyo “lado izquierdo” les identificado con el único vértice ‘sobre’ w .

Observación 3.49

A los nuevos vértices que aparecen en estas cadenas les asociamos género 0.

Paso 2.

Una vez que acabamos con el paso 1 tenemos todos los vértices y aristas de la gráfica G_x , y todas las multiplicidades de los vertices y las flechas. Con ésta información podemos calcular usando (3.1) todos los números de intersección de los vértices.

Paso 3.

Ahora se borran de la gráfica todas las flechas y las multiplicidades. Esto nos da una posible gráfica de una resolución. Si hay vértices con número de intersección -1 y género 0, los *implotamos* (*blow down*).

Ejemplo 3.50

Para ser un poco más explícito con la operación de implotar vértices, demos un par de ejemplos. Para la gráfica

$$\begin{array}{ccc} -3 & -1 & -4 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

al implotar el vértice w_2 obtenemos la gráfica

$$\begin{array}{ccc} -2 & & -3 \\ \bullet & & \bullet \\ w_1 & & w_3 \end{array}$$

Para la siguiente gráfica

$$\begin{array}{ccc} -3 & -1 \\ \bullet & \bullet \\ w_1 & w_2 \end{array}$$

al implotar obtenemos

$$\begin{array}{c} -2 \\ \bullet \\ w_1 \end{array}$$

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Utilizamos el algoritmo a continuación para encontrar las gráficas de las resoluciones mínimas de las singularidades asociadas a los grupos binario tetraédrico \tilde{A}_4 , binario octaédrico \tilde{S}_4 y el binario icosaédrico \tilde{A}_5 .

Ejemplo 3.51

El polinomio asociado a la superficie que genera el grupo binario tetraédrico es

$$x^4 + y^3 + z^2.$$

Así tomando $g(y, z) = y^3 + z^2$, tenemos que la gráfica Γ_g de la buena resolución es la que calculamos en el ejemplo 3.46. Así solo tenemos que aplicar el algoritmo que dimos arriba a Γ_g con $n = 4$. Además utilizando la formula (3.1) podemos encontrar los números de intersección que nos faltan para obtener:

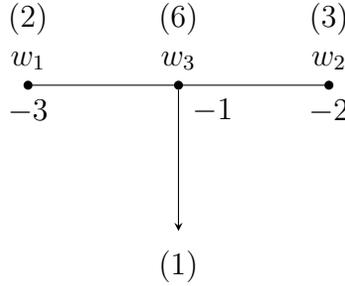


Figura 3.8: Gráfica Γ_g de la buena resolución de $y^3 + z^2$

A continuación calculamos los d_w y s_w para cada vértice, que son

$$d_{w_1} = \text{mcd}(2, 6) = 2, \quad d_{w_2} = \text{mcd}(3, 6) = 3, \quad d_{w_3} = \text{mcd}(6, 2, 3, 1) = 1,$$

$$s_{w_1} = 1, \quad s_{w_2} = 1, \quad s_{w_3} = 3,$$

Así tenemos que poner $\text{mcd}(2, 4) = 2$ vértices por w_1 con multiplicidad $2/\text{mcd}(2, 4) = 1$ y género

$$2 - \frac{(2-1)2 + 2}{2} = 0,$$

después agregamos $\text{mcd}(3, 4) = 1$ vértices por w_2 con multiplicidad $3/\text{mcd}(3, 4) = 3$ y género

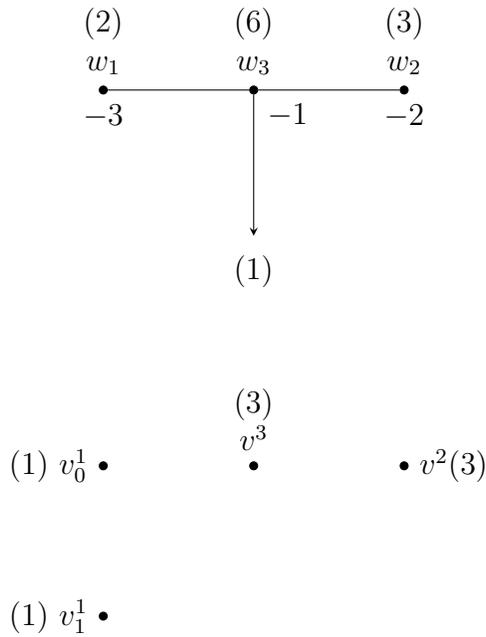
$$2 - \frac{(2-1) + 1}{1} = 0,$$

y por último ponemos $\text{mcd}(1, 4) = 1$ vértices por w_3 con multiplicidad $6/\text{mcd}(6, 4) = 3$ y género

$$2 - \frac{(2-3)2 + 2 + 1 + 1}{1} = 0,$$

obteniendo lo siguiente

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

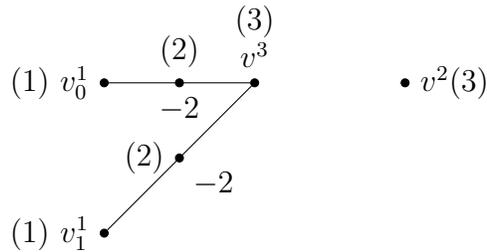
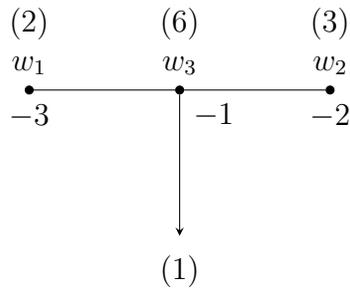


Ahora consideramos la arista $e_1 = (w_1, w_3)$. Sobre ella tenemos que colocar $d_{e_1} = \text{mcd}(2, 6, 4) = 2$ cadenas de vértices de tipo $G(2/2, 6/2, 4/2) = G(1, 3, 2)$. Así nos quedan $1/\text{mcd}(1, 2) = 1$, $2/\text{mcd}(1, 2) = 2$ y tenemos la siguiente ecuación

$$3 + x \equiv 0 \pmod{2}.$$

La solución es $x_1 = 1$, y tenemos que $3 + 1 = 2m_1$ por lo que $m_1 = 2$. Además $2/1 = 2$ por lo tanto $k_1 = 2$. Así al poner las cadenas de tipo $G(1, 3, 2)$ obtenemos

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

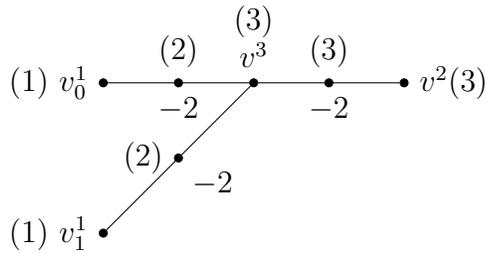
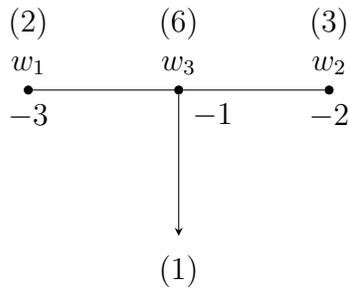


Proseguimos considerando la arista $e_2 = (w_1, w_2)$. Ponemos $d_{e_2} = \text{mcd}(6, 3, 4) = 1$ cadenas de vértices de tipo $G(6, 3, 4)$. Para construirla consideramos primero los enteros $6/\text{mcd}(6, 4) = 3$ y $4/\text{mcd}(6, 4) = 2$, y después encontramos una solución a la ecuación

$$3 + 3x \equiv 0 \pmod{2},$$

la cual es satisfecha por $x_1 = 1$. Entonces tenemos que $3 + 3 = 2m_1$ para $m_1 = 3$, y $2/1 = 2$ por lo que $k_1 = 2$. Así la gráfica en este paso queda como sigue

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

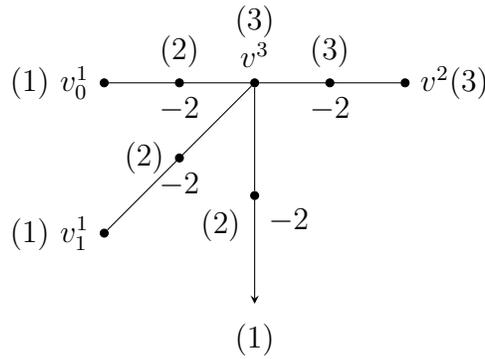
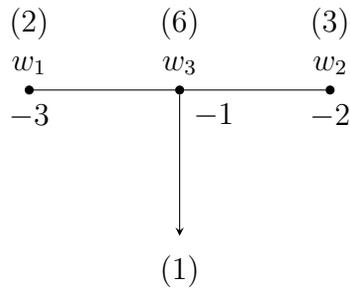


Por último consideramos la flecha $\overset{(6)}{\bullet} \longrightarrow \overset{(1)}{\bullet}$ y ponemos una cadena de tipo $G(6, 1, 4)$. Para construir ésta cadena consideramos los enteros $6/\text{mcd}(6, 4) = 3$ y $4/\text{mcd}(6, 4) = 2$, y a continuación resolvemos la ecuación

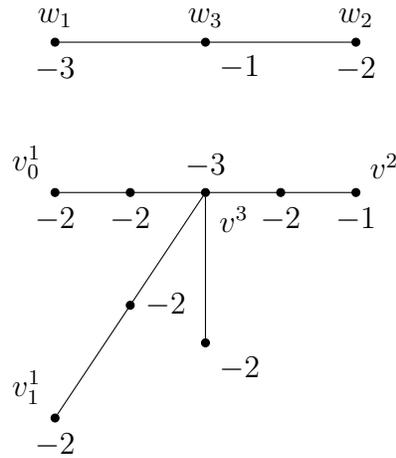
$$1 + 3x \equiv 0 \pmod{2}.$$

La solución es $x_1 = 1$ y así tenemos de $1 + 3 = 2m_1$ que $m_1 = 2$. Además tenemos que $2/1 = 2$ por lo que $k_1 = 2$. Al final obtenemos la siguiente gráfica:

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

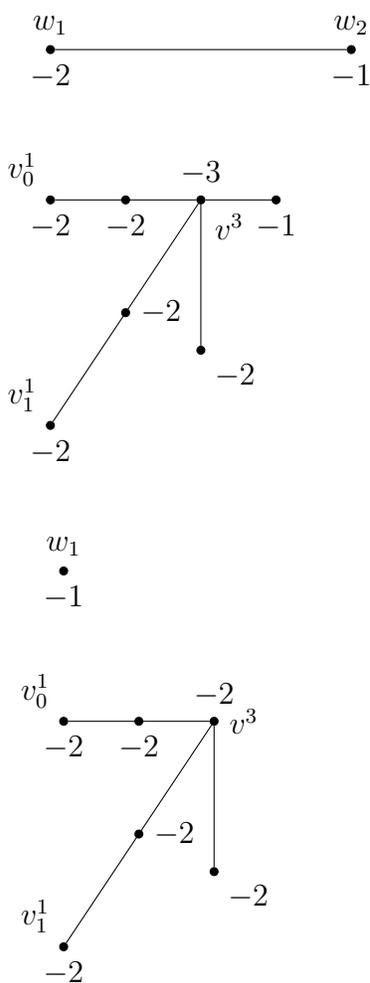


Lo siguiente es utilizar la ecuación (3.1) para calcular los números de intersección que faltan. Después de hacer esto, y borrar de la gráfica las multiplicidades y las flechas nos queda



A continuación empezamos a implotar los vértices con número de intersección -1 , ya que todos los vértices tienen género 0 , para obtener la siguiente secuencia de gráficas hasta obtener la gráfica dual de la resolución mínima.

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL



Al final de este proceso terminamos con la gráfica dual de la resolución mínima a la cual se le conoce como el diagrama de Dynkin de tipo \mathbf{E}_6 :

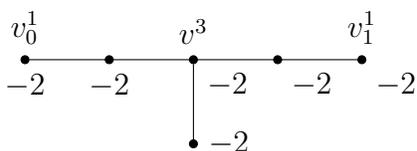


Figura 3.9: Diagrama asociado a la resolución de $x^4 + y^3 + z^2 = 0$

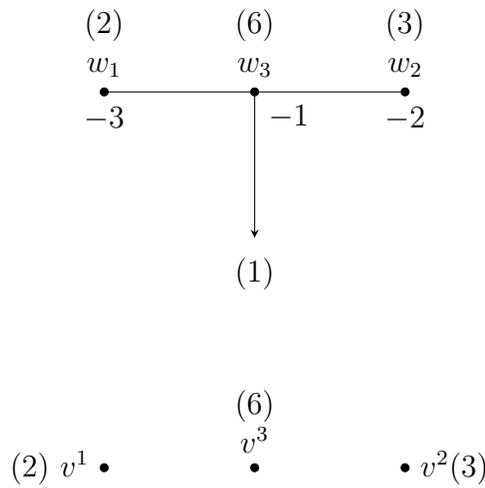
Observación 3.52

Como la superficie asociada al grupo binario icoasédrico está determinada por el polinomio $x^5 + y^3 + z^2$ entonces podemos de manera análoga obtener la gráfica mínima de la resolución a partir de la gráfica Γ_g con $g(y, z) = y^3 + z^2$ y $n = 5$.

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Ejemplo 3.53

Por la observación anterior podemos empezar el algoritmo para obtener la gráfica mínima de la resolución para el caso icosaédrico con la figura 3.8. El siguiente paso es calcular los valores d_w para los vértices que son los mismos que en el caso tetraédrico. Lo primero que cambia es el número de vértices nuevos que hay que colocar. Tenemos que colocar $\text{mcd}(2, 5) = 1$ vértices por w_1 con multiplicidad $2/\text{mcd}(2, 5) = 2$ y género 0; después agregamos $\text{mcd}(3, 5) = 1$ vértices por el vértice w_2 con multiplicidad 3 y género 0; y por último $\text{mcd}(1, 5) = 1$ vértices por w_3 con multiplicidad 6 y género 0, obteniendo así la siguiente gráfica:



A continuación por la arista $e_1 = (w_1, w_3)$ colocamos $d_{e_1} = \text{mcd}(2, 6, 5) = 1$ cadenas de tipo $G(2, 6, 5)$. Para construir ésta cadena debemos de resolver primero la ecuación

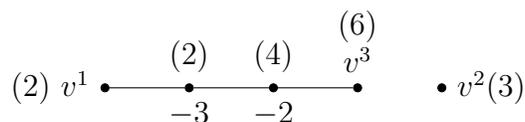
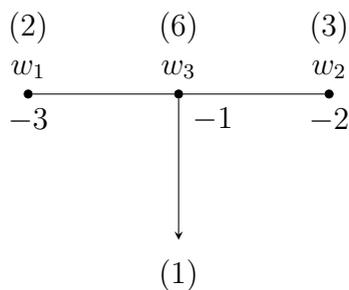
$$6 + 2x \equiv 0 \pmod{5}.$$

La solución es $x = 2$ y así tenemos $6 + 4 = 10 = 5m_1$, de lo cual concluimos que $m_1 = 2$. A continuación escribimos la siguiente fracción continua

$$\frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}.$$

De esto, utilizando $-6 + 2 + m_2 = 0$, vemos que $m_2 = 4$. Al final al poner la cadena de tipo $G(2, 6, 5)$, obtenemos

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL



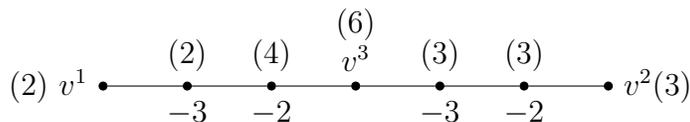
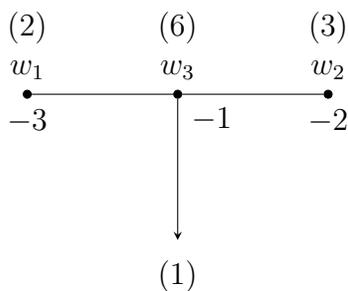
El siguiente paso es considerar la arista $e_2 = (w_3, w_2)$ y colocamos $d_{e_2} = \text{mcd}(6, 3, 5) = 1$ cadenas de tipo $G(6, 3, 5)$. Para construirla debemos de resolver la ecuación

$$3 + 6x \equiv 0 \pmod{5},$$

la cual tiene como solución a $x = 2$, y de esto, obtenemos que $m_1 = 3$. Ahora nos fijamos en la siguiente expresión en fracción continua

$$\frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}$$

De esto se sigue, utilizando el hecho de que $-9 + 6 + m_2 = 0$, que $m_2 = 3$. Al agregar la cadena de tipo $G(6, 3, 5)$ obtenemos la siguiente gráfica



CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

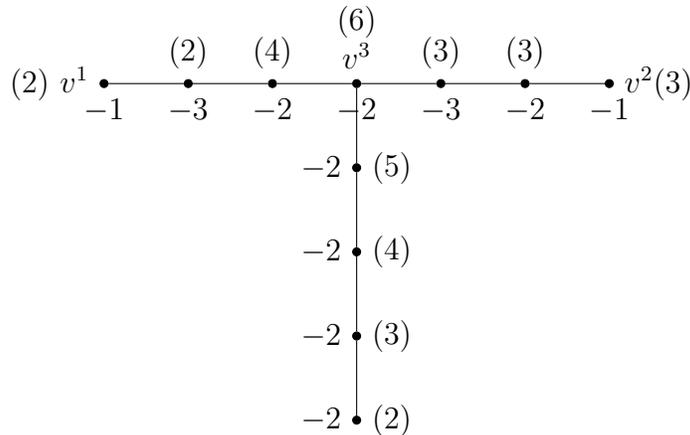
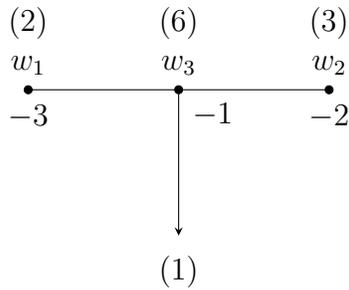
Por último consideramos la flecha $\overset{(6)}{\bullet} \xrightarrow{(1)}$, y colocamos una cadena de tipo $G(6, 1, 5)$. Para obtener ésta cadena debemos considerar la ecuación

$$1 + 6x \equiv 0 \pmod{5}$$

la cual tiene a $x = 4$ como solución y de esto se sigue que $m_1 = 5$. Ahora consideramos la siguiente expresión

$$\frac{5}{4} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$$

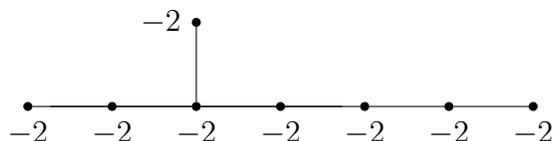
Entonces de ésto, utilizando que $-10 + 6 + m_2 = 0$ y el hecho que $-k_i m_i + m_{i-1} + m_{i+1} = 0$, obtenemos que $m_2 = 4$, $m_3 = 3$ y $m_4 = 2$. Así agregando a la gráfica la cadena de tipo $G(6, 1, 5)$, y poniendo los números de intersección que faltan, utilizando la ecuación (3.1), obtenemos lo siguiente



Borrando, las flechas y multiplicidades, y haciendo la serie de todas las implosiones necesarias hasta ya no tener vértices con número de intersección -1 (ya que todos los

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

vértices tienen género 0), obtenemos la siguiente gráfica, que se llama diagrama de Dynkin de tipo \mathbf{E}_8



Ejemplo 3.54

El siguiente ejemplo es el del caso de la resolución de la superficie dada por el grupo binario octaédrico. La superficie está dada por el polinomio $z^2 + xy^3 + x^3$, así que aplicamos el algoritmo a una buena resolución de la curva $xy^3 + x^3 = 0$. Ésta curva tiene una singularidad en el origen. Entonces explotando, en la primera carta nos queda

$$x^3(xy^3 + 1).$$

La curva dada por $xy^3 + 1 = 0$ no tiene puntos singulares, y además el divisor excepcional $E_1 = \{x = 0\}$ no interseca a la curva en esta carta.

En la segunda carta obtenemos

$$y^3(xy + x^3),$$

y la curva dada por $xy + x^3 = 0$ es singular en el origen. Así que volvemos a explotar, para obtener en la primera carta

$$x^3y^3(x^2(y + x)).$$

La curva $y + x = 0$ no tiene puntos singulares, pero interseca a las componentes del divisor excepcional $E_1 = \{y = 0\}$, y $E_2 = \{x = 0\}$ en el $(0, 0)$. En la segunda carta obtenemos

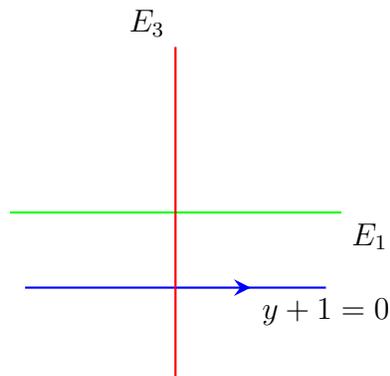
$$y^3(y^2(x + yx^3)),$$

y la curva $x + yx^3 = 0$ es no singular, y no interseca al divisor excepcional $E_2 = \{y = 0\}$. Así que explotamos la segunda carta en el origen, y obtenemos así

$$x^6y^3(x^2(x(y + 1))).$$

La curva $y + 1 = 0$ es no singular y nos queda que interseca transversalmente a las componentes del divisor excepcional $E_1 = \{y = 0\}$ y $E_3 = \{x = 0\}$, además de que las componentes del divisor excepcional se intersecan transversalmente, como se muestra en el siguiente diagrama

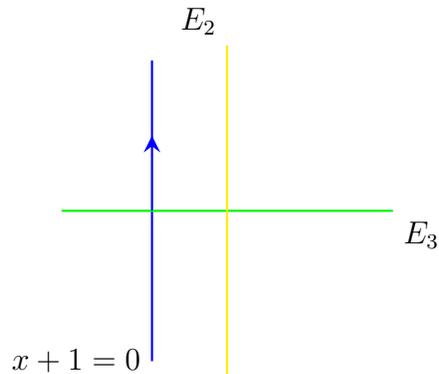
CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES



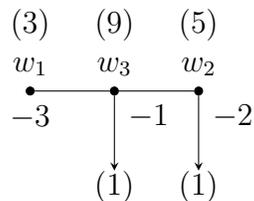
En la segunda carta nos queda lo siguiente

$$x^3 y^6 (x^2 y^2 (y(1+x))),$$

donde la curva $1+x=0$ no tiene puntos singulares y hay una intersección transversal de la curva y las componentes del divisor excepcional $E_2 = \{x=0\}$ y $E_3 = \{y=0\}$ como se muestra en el siguiente diagrama



Al final nos queda la siguiente gráfica Γ_g , asociada a la buena resolución de $g(x, y) = xy^3 + x^3$

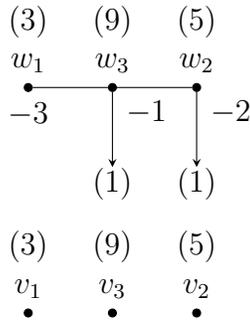


A continuación aplicamos el algoritmo con $n = 2$, entonces calculamos primero los número d_w para obtener

$$d_{w_1} = 3 \quad d_{w_2} = 1 \quad d_{w_3} = 1.$$

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

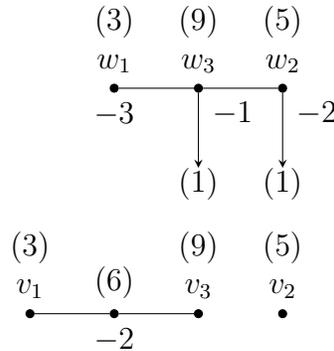
Así tenemos que poner $\text{mcd}(2, 3) = 1$ vértices de género 0 sobre w_1 y un vértice de género 0 sobre w_2 y w_3 respectivamente, con pesos (3), (5) y (9) obteniendo el siguiente diagrama



Ahora consideramos la arista $e_1 = (w_1, w_3)$, y tenemos que poner $d_{e_1} = \text{mcd}(3, 9) = 1$ cadenas de tipo $G(3, 9, 2)$. Para esto hay que considerar la ecuación

$$9 + 3x \equiv 0 \pmod{2},$$

la cual tiene como solución $x = 1$, y así tenemos que $m_1 = 6$. Como $2/1 = 2$ entonces la cadena solo consta de un vértice, y al ponerla en la gráfica obtenemos

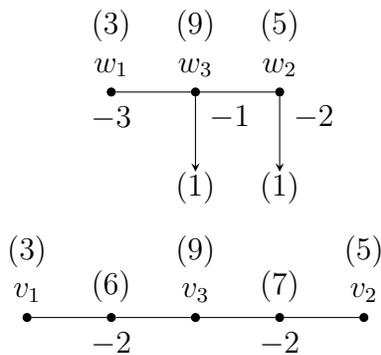


A continuación consideramos a la arista $e_2 = (w_3, w_2)$, y ponemos $d_{e_2} = \text{mcd}(9, 5, 2) = 1$ copias de la cadena de tipo $G(9, 5, 2)$. Entonces tenemos que resolver la ecuación

$$5 + 9x \equiv 0 \pmod{2},$$

la cual tiene como solución $x = 1$, y de esto se sigue que $m_1 = 7$. Como $2/1 = 2$ entonces la cadena $G(9, 5, 2)$ tiene un solo vértice por lo cual al ponerla en la gráfica obtenemos

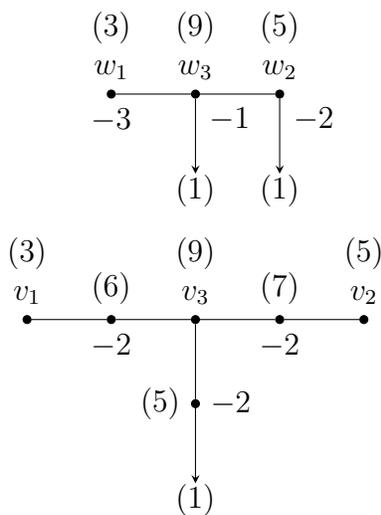
CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES



En el siguiente paso consideramos la flecha $\begin{matrix} (9) & (1) \\ \bullet & \longrightarrow \end{matrix}$, y colocamos una cadena de tipo $G(9, 1, 2)$, para lo cual es necesario considerar la ecuación

$$1 + 9x \equiv 0 \pmod{2},$$

y su solución que es $x = 1$. De esto obtenemos que $m_1 = 5$, y que la cadena es de un sólo vértice. Al colocarla en la gráfica, queda la siguiente gráfica

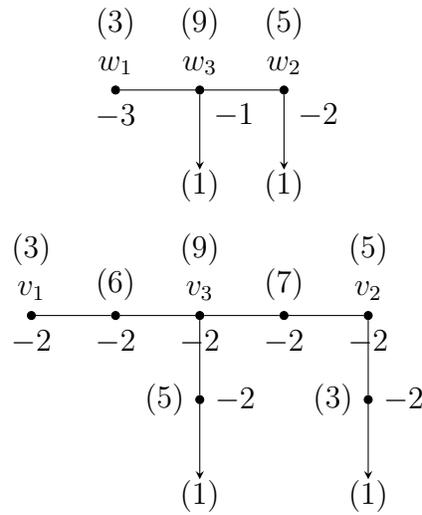


Por último consideramos la flecha $\begin{matrix} (5) & (1) \\ \bullet & \longrightarrow \end{matrix}$, y colocamos en la gráfica una cadena de tipo $G(5, 1, 2)$. Para hacer esto resolvemos la ecuación

$$1 + 5x \equiv 0 \pmod{2}.$$

La solución es $x = 1$, y así vemos que $m_1 = 3$ y que la cadena consta de un sólo vértice. Al poner ésta cadena en la gráfica obtenemos, colocando los números de intersección, utilizando la ecuación (3.1), la siguiente gráfica

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL



Borrando las flechas y multiplicidades, y haciendo todas las implosiones necesarias, hasta haber eliminado todos los vértices con número de intersección -1 (ya que todos los vértices tiene género 0), obtenemos la gráfica mínima de la resolución de la singularidad octaédrica, que es llamada diagrama de Dynkin de tipo \mathbf{E}_7

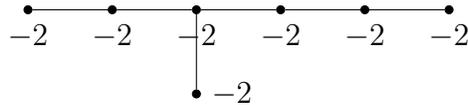
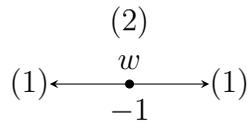


Figura 3.10: Gráfica de la resolución mínima de la singularidad octaédrica

Por último notemos que podemos aplicar este mismo algoritmo en los casos de los grupos cíclicos y los grupos binarios dodecaédricos, para obtener la gráfica mínima de la resolución y así corroborar que las gráfica que obtuvimos en la sección 3.3, vía explosiones, es efectivamente la gráfica de la resolución mínima. En estos dos casos no se cubrirán todos los detalles, pero se darán la idea del procedimiento.

Ejemplo 3.55

Para el caso cíclico C_n de orden n , el polinomio que define la superficie es $x^n + yz = 0$. Así tomando $g(y, z) = yz$ y resolviendo la singularidad en el origen mediante una explosión obtenemos la siguiente gráfica Γ_g :



CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Ahora tenemos que fijarnos en dos casos, cuando $n = 2k$ es par y cuando $n = 2k + 1$ es impar. En ambos casos solo agregamos un vértice nuevo el cuál tiene multiplicidad 1 en el caso par y multiplicidad 2 en el caso impar. En ambos casos el género del vértice es 0. En el caso par tenemos que agregar, por simetría, dos copias de $G(2, 1, n)$. Para esto tenemos que resolver en el caso par la siguiente ecuación

$$1 + x \equiv 0 \pmod{k},$$

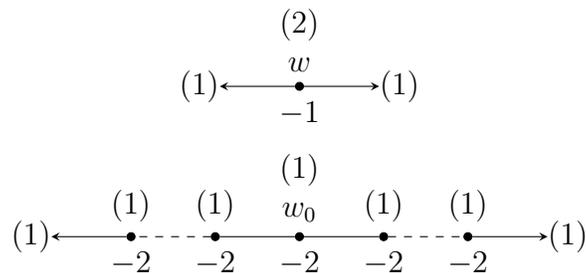
la cual tiene como solución $x = k - 1$, y de esto deducimos que $m_1 = 1$. Ahora tenemos que aplicar inducción sobre k para probar el hecho de que $k/(k - 1)$ se puede escribir como fracción continua de la forma

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{2}}}$$

con el número 2 apareciendo $k - 1$ -veces en la expresión. Esto último nos dice que la cadena $G(2, 1, n)$ tiene $k - 1$ vértices. Nuestra base de inducción es $k = 2$, y claramente $2/1 = 2$. A continuación notamos que

$$\frac{k}{k - 1} = 2 - \frac{1}{\frac{k - 1}{k - 2}}$$

y por nuestra hipótesis de inducción obtenemos el resultado. Así para $k \geq 2$ la gráfica que obtenemos es

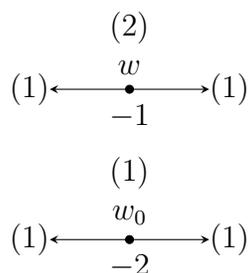


En el caso en que $k = 1$, tenemos que resolver la siguiente ecuación

$$1 + x \equiv 0 \pmod{1},$$

la cual tiene solución cuando $x = 0$, por lo tanto en la gráfica sólo ponemos una flecha para obtener

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL



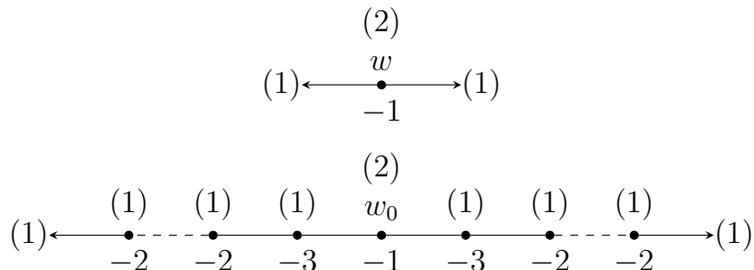
En el caso impar tenemos que agregar, de nuevo por simetría, dos copias de $G(2, 1, n)$. Para esto necesitamos resolver la ecuación

$$1 + 2x \equiv 0 \pmod{2k + 1},$$

la cual tiene como solución a $x = k$, y de esto se sigue que $m_1 = 1$. Aplicando inducción a k , tomando como caso base $k = 1$ vemos que siempre tenemos la siguiente expresión

$$\frac{2k + 1}{k} = 3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{2}}}$$

donde el 2 aparece $k - 1$ veces. Esto nos indica que la cadena $G(2, 1, n)$ tiene k vértices. Al final la gráfica que obtenemos es



En ambos casos (el par y el impar) al implotar todos los vértices con número de intersección -1 (por que todos los vértices tienen género 0) y borrar las flechas nos queda la siguiente gráfica que es exactamente la figura 3.3 que habíamos encontrado en la sección 3.5.



En otras palabras es la gráfica de la resolución mínima como se había afirmado.

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Ejemplo 3.56

Para ocuparnos del caso de los grupos binarios diédricos, nos es de gran utilidad encontrar la gráfica de la resolución (mediante el algoritmo) del polinomio

$$y^2 + x^n.$$

Este polinomio tiene una singularidad aislada en el $(0, 0)$, para $n \geq 2$. Explotando, en la segunda carta nos queda lo siguiente:

$$y^2(1 + y^{n-2}x^n).$$

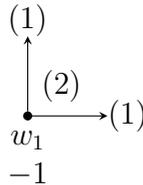
El polinomio $1 + y^{n-2}x^n$ no tiene puntos singulares y no interseca a el divisor excepcional.

En la primera carta obtenemos:

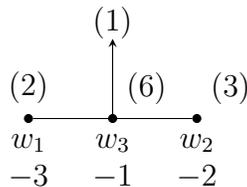
$$x^2(y^2 + x^{n-2});$$

en este caso el polinomio $y^2 + x^{n-2}$ es del mismo tipo que el polinomio con el cual empezamos e interseca a el divisor excepcional en el origen. Así vemos que mediante un número finito de explosiones llegamos a dos casos familiares; el caso $y^2 + x^2$ cuando n es par, que son dos rectas que se intersecan en el origen, y el caso de $y^2 + x^3$ cuando n es impar, que es la cuspide que ya resolvimos en el ejemplo 3.29.

En el caso $n = 2$, al explotar nos queda un divisor excepcional de multiplicidad 2, que interseca a las dos componentes de la curva. Así la gráfica de la resolución, se ve como sigue:



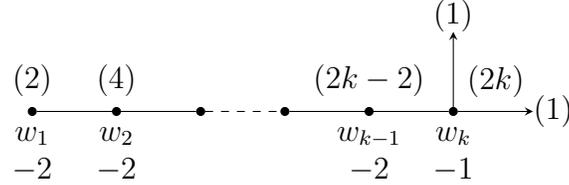
En el caso $n = 3$ nos queda la gráfica del ejemplo 3.29:



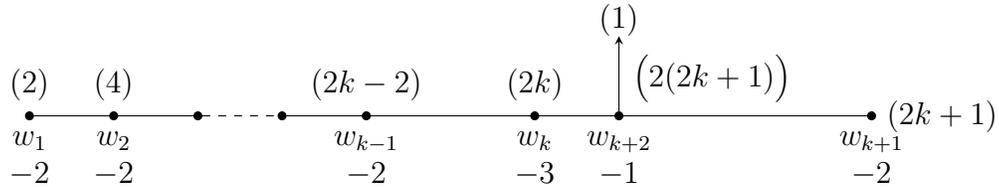
Para el caso $n = 2k$ vimos que al explotar pasamos en la primera carta al caso $n - 2 = 2(k - 1)$, y sólo tenemos una nueva componente del divisor excepcional de multiplicidad 2. Al seguir explotando aumenta por dos la multiplicidad. Al final llegamos

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

al caso de $n = 2$ y al explotar tenemos una nueva componente del divisor excepcional de multiplicidad $2k$, ya que hemos explotado k veces. Ésta nueva componente interseca a dos componentes distintas de la curva. Utilizando la formula 3.1 obtenemos los números de intersección que nos faltan. Así nos queda la siguiente gráfica.



En el caso de $n = 2k + 1$ de manera análoga al caso par, en cada explosión aumentamos en dos el número de multiplicidad y después de $k - 1$ explosiones llegamos al caso de $n = 3$. Siguiendo el ejemplo 3.29, al volver a explotar obtenemos una nueva componente de multiplicidad $2k$, y todavía tenemos que volver a explotar. En ésta nueva explosión aumenta en uno la mutiplicidad, y todavía tenemos que hacer una última explosión. La última componente tiene dos veces la multiplicidad de la penúltima componente anterior, e interseca a la antepenúltima y a la penúltima componente del divisor excepcional. Además interseca a la única componente de la curva. Así, calculando los números de intersección con la formula 3.1, la gráfica para este caso nos queda como sigue:



Ejemplo 3.57

El ultimo ejemplo que daremos en ésta sección es el de la gráfica mínima para los grupos binarios diédricos. Para esto utilizaremos el ejemplo anterior. Recordemos que el polinomio asociado al grupo binario diédrico \widetilde{D}_n es

$$z^2 + x(y^2 + x^n),$$

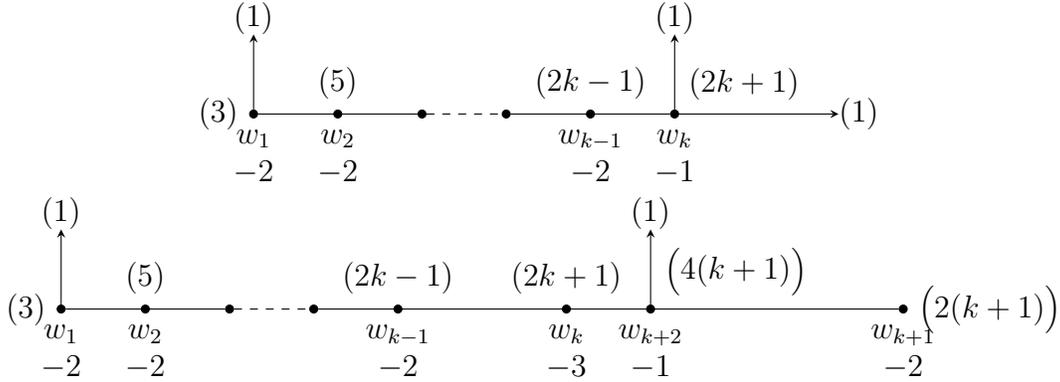
entonces al aplicar el algoritmo necesitamos la gráfica de la resolución de

$$x(y^2 + x^n),$$

que es una curva que consta de dos componentes. Observemos que la componente dada por $x = 0$, en la primera explosión sólo interseca a la componente del divisor excepcional en la segunda carta, y en ésta carta la curva ya no es singular. Pero

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

en la primera carta aumenta la multiplicidad de la componente del divisor en uno. Como ésta es la carta que continuamos explotando, a partir de las gráficas del ejemplo pasado obtenemos las gráficas de los binarios diédricos como sigue. Hay que agregar una flecha al vértice que corresponde a la componente del divisor excepcional de la primera explosión. Después hay que aumentar las multiplicidades en uno, y utilizar la formula 3.1 para obtener los números de intersección obtenemos las siguientes gráficas:



Aplicamos el algoritmo a estas dos gráficas para obtener la gráfica mínima de la resolución. En la primera gráfica todos los vértices tienen multiplicidad de la forma $2j + 1$ con $1 \geq j \geq k$. Los vértices w_1 y w_k tienen una flecha adyacente y por tanto

$$d_{w_1} = d_{w_k} = 1.$$

Para cualquier otro vértice w_j tenemos

$$d_{w_j} = \text{mcd}(2j - 1, 2j + 1, 2j + 3) = 1.$$

Así como $n = 2$ en este caso, sobre el vértice w_j debemos de poner $\text{mcd}(1, 2) = 1$ vértices nuevos, con multiplicidad $(2j + 1)/\text{mcd}(2j + 1, 2) = 2j + 1$ y género 0. Ahora consideremos las aristas que son de la forma

$$\begin{array}{ccc} (2j + 1) & & (2j + 3) \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ w_j & e_i & w_{j+1} \end{array}$$

Por cada una de estas aristas debemos de poner $d_{e_i} = \text{mcd}(2j + 1, 2j + 3, 2) = 1$ cadenas de tipo $G(2j + 1, 2j + 3, 2)$. Para esto debemos resolver la ecuación

$$2j + 3 + (2j + 1)x \equiv 0 \pmod{2}.$$

Como $2j + 3$ es impar claramente $x = 1$ es la solución y así obtenemos la siguiente cadena:

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL

$$(2j + 1) \xleftarrow[\begin{matrix} \bullet \\ (2j + 2) \end{matrix}]{-2} (2j + 3)$$

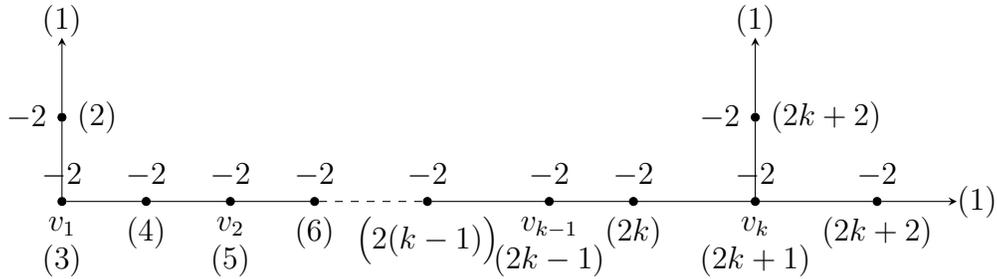
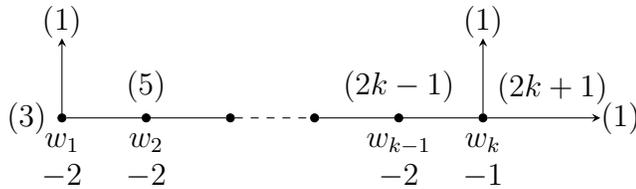
Ahora solo tenemos que considerar las flechas $\begin{matrix} (3) \\ \bullet \end{matrix} \longrightarrow (1)$ y $\begin{matrix} (2k + 1) \\ \bullet \end{matrix} \longrightarrow (1)$. Notamos que considerando solo la última y después tomando $k = 1$ obtenemos la primera. Por ésta segunda flecha hay que poner una cadena de tipo $G(2k + 1, 1, 2)$ por lo que hay que resolver la siguiente ecuación:

$$1 + (2k + 1)x \equiv 0 \pmod{2}.$$

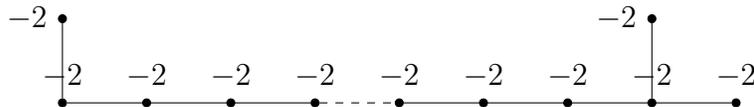
La solución es $x = 1$ y por tanto nos queda la siguiente cadena:

$$(2k + 1) \xleftarrow[\begin{matrix} \bullet \\ (2k + 2) \end{matrix}]{-2} (1)$$

Al final juntando todo y utilizando la formula 3.1 para obtener los números de intersección, obtenemos la siguiente gráfica:



Después de quitar todas las flechas e implotar todos los vértices que sean necesarios obtenemos la siguiente gráfica, de $2k - 2 + 1 + 2 + 1 = n + 2$ vértices, con números de intersección, la cual es la que habíamos obtenido en la sección 3.5.



CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

Por ultimo apliquemos el algoritmo a la última gráfica, que es la gráfica que para n impar. En este caso lo único que cambia es que $d_{w_{k+1}} = \text{mcd}(2(k+1), 4(k+1)) = 2$, y por tanto hay que colocar $\text{mcd}(2, 2) = 2$ vértices con multiplicidad $2(k+1)/\text{mcd}(2(k+1), 2) = k+1$ y género 0. Para el vértice w_{k+2} como $d_{w_{k+2}} = 1$, al tener una flecha adyacente, solo colocamos un vértice con multiplicidad $4(k+1)/\text{mcd}(4(k+1), 2) = 2(k+1)$ y género 0. De las aristas solo necesitamos calcular las ultimas dos de la derecha, ya que el resto salen de los cálculos que hicimos para la gráfica anterior. Empezamos con la siguiente arista:

$$(2k+1) \bullet \xrightarrow{e_k} \bullet (4(k+1))$$

Por ésta arista debemos de poner $d_{e_k} = \text{mcd}(2k+1, 4(k+1), 2) = 1$ cadenas de tipo $G(2k+1, 4(k+1), 2)$. Entonces resolvemos la siguiente ecuación

$$4(k+1) + (2k+1)x \equiv 0 \pmod{2}.$$

Su solución es $x = 0$, por lo tanto solo tenemos que dibujar una arista.

El caso de la arista

$$(4(k+1)) \bullet \xrightarrow{e_{k+1}} \bullet (2(k+1))$$

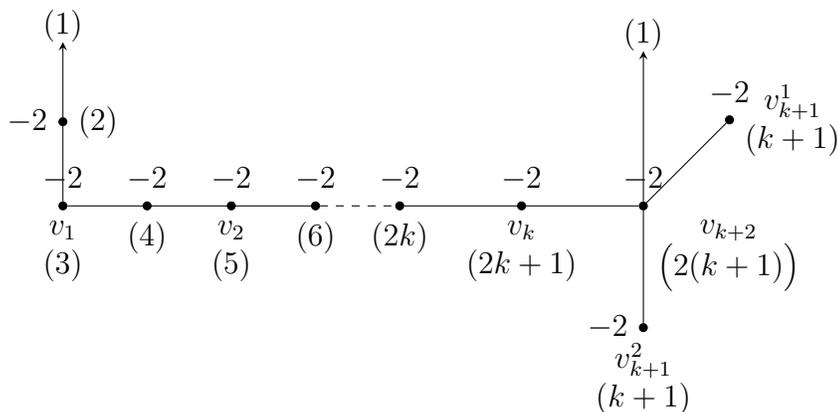
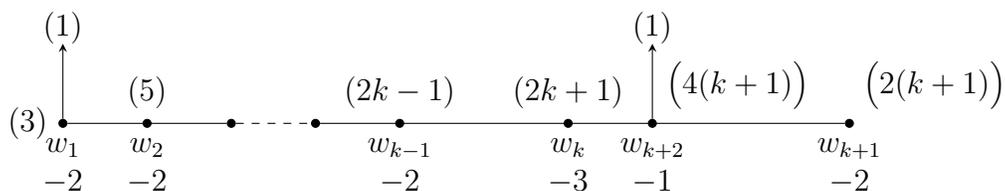
es análogo al anterior, solo que ahora hay que poner $d_{e_{k+1}} = \text{mcd}(4(k+1), 2(k+1), 2) = 2$ aristas.

Para terminar consideramos la flecha

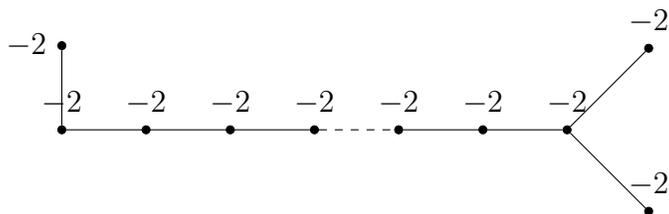
$$(4(k+1)) \bullet \longrightarrow (1)$$

Por ésta flecha hay que colocar una cadena de tipo $G(4(k+1), 1, 2)$. Igual que en los casos anteriores ésta cadena consiste de solo una arista. Al final juntando todo obtenemos la siguiente gráfica:

3.6. ALGORITMO DE LA GRÁFICA DUAL



Al remover todas la multiplicidades y todas las flechas, así como implotar todos los vértices con número de intersección menos uno (debido a que todos los vértices tienen género 0), obtenemos la siguiente gráfica con $2k + 3 = n + 2$ vértices:



Así vemos que la figura 3.4 que obtuvimos en la sección 3.5 es la gráfica de la resolución mínima.

Resumiendo, en esta sección mediante el algoritmo de Némethi, obtuvimos las gráficas de las resoluciones mínimas de las singularidades asociadas a los grupos finitos G de $SU(2)$, que son las siguientes:

CAPÍTULO 3. SINGULARIDADES

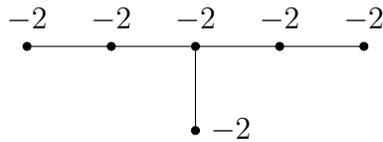


Figura 3.11: Gráfica de la resolución mínima de la superficie asociada al grupo binario tetraédrico \tilde{A}_4

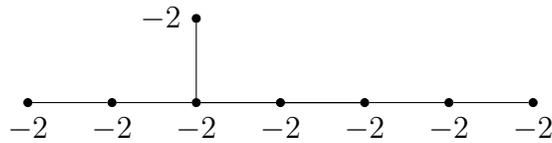


Figura 3.12: Gráfica de la resolución mínima de la superficie asociada al grupo binario icosaédrico \tilde{A}_5

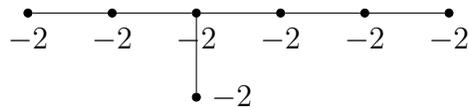


Figura 3.13: Gráfica de la resolución mínima de la superficie asociada al grupo binario octaédrico \tilde{S}_4



Figura 3.14: Gráfica de la resolución mínima de la superficie asociada al grupo cíclico C_n , con $n - 1$ vértices

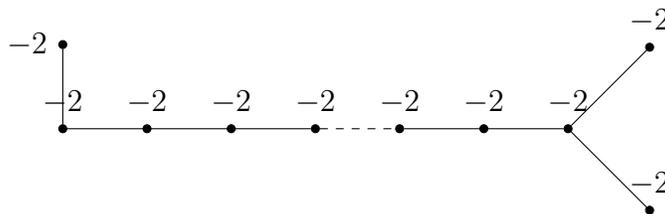


Figura 3.15: Gráfica de la resolución mínima de la superficie asociada al grupo binario diédrico \tilde{D}_n , con $n + 2$ vértices

Capítulo 4

Conclusión

Al final de este trabajo obtuvimos dos gráficas para cada grupo finito G de $SU(2)$: la primera la llamamos en este trabajo la gráfica de McKay, y la obtuvimos utilizando la representación inducida por la inclusión de G en $SU(2)$ y como se relaciona ésta representación con las representaciones irreducibles de G .

La segunda gráfica, que nosotros llamamos la gráfica dual de la resolución mínima, fue obtenida tomando la resolución mínima (mediante explosiones) de la singularidad aislada de \mathbb{C}^2/G y fijándonos en como se intersectan las componentes irreducibles del divisor excepcional de ésta resolución.

Al comparar para cada grupo finito G de $SU(2)$ la gráfica de McKay (final de la sección 2.4) y la gráfica de la resolución mínima (final de la sección 3.6), notamos que son casi iguales; la única diferencia es que la gráfica de McKay tiene siempre un vértice más que la gráfica dual. Éste vértice extra corresponde a la representación trivial, que como notamos en el primer capítulo, todo grupo la tiene. A este hecho se le conoce como la *correspondencia u observación de McKay*, al ser el matemático John McKay el primero en notar éste fenómeno.

Ésta correspondencia entre la gráfica dual y la gráfica de McKay puede parecer un echo fortuito pero en [9] los matemáticos Gérardo Gonzáles-Sprinberg y Jean-Louis Verdier muestran que hay un hecho geométrico detrás de esto, y es conocido como la correspondencia geométrica de McKay.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIÓN

Índice alfabético

- G -equivariante, 5
- carácter, 18
 - fiel, 22
 - grado, 19
 - irreducible, 18
 - levantamiento, 52
 - lineal, 20
 - núcleo de , 22
 - reducible, 18
 - regular, 23
- carcaj de McKay, 38
- clase de conjugación, 32
- conjugado, 32
- conjunto algebraico, 64
- correspondencia de McKay, 115
- divisor excepcional, 67, 68
- explosión, 68
- forma de ciclo, 49
- función
 - regular, 66
 - birracional, 67
 - racional, 67
- gráfica dual, 84
- grupo
 - binario, 43
 - conmutador de un, 46
- hipersuperficies, 65
- implosión, 84, 91
- Maschke
 - teorema de, 11
- número de intersección, 83
- representación, 4
 - completamente reducible, 12
 - equivalente, 5
 - fiel, 6
 - grado, 4
 - irreducible, 9
 - reducible, 9
 - regular, 6, 7
 - suma directa, 10
 - trivial, 4
- resolución
 - buena, 68
 - de una singularidad, 67
 - mínima, 83
- Schur
 - lema de, 13
 - relación de ortogonalidad de, 26
- singular, 65
- singularidad Kleninana, 65
- subespacio vectorial irreducible, 9
- subespacio G -invariante, 8
- variedad algebraica, 64

ÍNDICE ALFABÉTICO

Bibliografía

- [1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison - Wesley, 1969.
- [2] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. van de Ven. *Compact Complex Surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 1984.
- [3] T. Bröcker and T. tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Number 98 in Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1985.
- [4] I. Dolgachev. McKay correspondence. October <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/McKaybook.pdf> (2009). Lecture Notes.
- [5] E. Faber and H. Hauser. Today's menu: Geometry and resolution today's menu: Geometry and resolution of singular algebraic surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 47(3):pp. 373 – 417, July 2010.
- [6] R. Friedman. *Algebraic Surfaces and Holomorphic Vector Bundles*. Universitext. Springer Verlag, 1998.
- [7] W. Fulton. *Introduction to Intersection Theory*, volume 54 of *Conference board of the Mathematical sciences regional conference series in mathematics*. American Mathematical Society, 1984.
- [8] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory: a First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1991.
- [9] G. González-Sprinberg and J. L. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 16(3):pp. 409 – 449, 1983.
- [10] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Number 52 in Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1977.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] I. N. Herstein. *Abstract Algebra*. Prentice-Hall, third edition, 1995.
- [12] G. James and M. Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press, second edition edition, 2001.
- [13] F. Klein. *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. B. G. Teubner, 1884.
- [14] K. Lamotke. *Regular Solids and Isolated Singularities*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg, Braunschweig – Wiesbaden, 1986.
- [15] H. B. Laufer. *Normal Two Dimensional Singularities*. Number 71 in Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1971.
- [16] J. McKay. Graphs, singularities, and finite groups. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (University of California, Santa Cruz, California, 1979)*, volume 37 of *Proceeding of Symposia in Pure Mathematics*, pages 183–186. American Mathematical Society, 1980.
- [17] J. W. Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Number 61 in Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, Princeton, 1968.
- [18] J. W. Milnor. On the 3-dimensional brieskorn manifold $m(p, q, r)$. In *Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*, pages 175 – 225. Princeton University Press, 1975.
- [19] A. Némethi. The signature of $f(x, y) + z^n$. *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, Singularity Theory: Proceedings of the European Singularities Conference, August 1996, Liverpool and Dedicated to C.T.C. Wall on the Occasion of his 60th Birthday(263):pp. 131 – 149, 1999.
- [20] A. Némethi. Five lectures on normal surface singularities. Lecture Notes, <https://www.renyi.hu/nemethi/JEGYZET.ps>.
- [21] F. Palesi. Introduction to mckay’s correspondence. March <http://math.univ-lyon1.fr/remy/Palesi.pdf> (2006). Lecture Notes.
- [22] I. R. Safarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Springer Verlag, second edition edition, 1974.
- [23] J. Seade. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*, volume 241 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, 2006.
- [24] J.-P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Number 42 in Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1977.

- [25] P. Slodowy. *Algebraic Geometry: Proceedings of the Third midwest Algebraic Geometry Conference held at the University of Michigan, Ann Arbor, USA, November 14-15, 1981*, volume 1008 of *Lecture Notes in Mathematics*, chapter Platonic solids, Kleinian singularities, and Lie groups Platonic Solids, Kleinian Singularities, and Lie Groups, pages 102–138. Springer Berlin Heidelberg, 1983.
- [26] P. D. Val. On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction (part i.). *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30:pp. 453 – 459, 10 1934.
- [27] P. D. Val. On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction (part ii.). *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30(04):pp. 460 – 465, 1934.
- [28] P. D. Val. On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction (part iii.). *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30(04):pp. 483 – 491, 10 1934.
- [29] J. van Hoboken. Platonic solids, binary polyhedral groups, kleinian singularities and lie groups of type a, d, e . Master's thesis, University of Amsterdam, 2002.
- [30] C. T. C. Wall. *Singular Points of Plane Curves*. Number 63 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2004.
- [31] H. Whitney. Elementary structure of real algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 66(3):pp. 545 – 556, 1957.