



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**“FLUJO POR COMPRESIÓN EN UN VISCOSÍMETRO DE
PLATOS CONCÉNTRICOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

RICARDO TAPIA REGALADO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA



MÉXICO, D.F.

2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



“FLUJO POR COMPRESIÓN
EN UN VISCOSÍMETRO DE PLATOS CONCÉNTRICOS”



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES “ZARAGOZA”

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) Tapia Regalado Ricardo con número de cuenta 410056264 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 27 del mes de marzo de 2015 a las 13:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	I.Q. RAUL RAMÓN MORA HERNÁNDEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	M. en C. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ
SUPLENTE	I.Q. CONSUELO MATÍAS GARDUÑO

Rm
 Edtson E. Herrera Valencia
 Mariano Pérez Camacho
[Signature]
[Signature]

El título de la tesis que se presenta es: Flujo por compresión en un viscosímetro de platos concéntricos.

Opción de Titulación: Tesis profesional

ATENTAMENTE
“POR MI RAZA HARÉ EL ESPÍRITU”
México, D. F. a 13 de marzo de 2015.

ACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

 DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NÚÑEZ
 DIRECTOR
 DIRECCIÓN

RECIBÍ
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Vo Bo *Dominica Ortiz Bautista*
 I.Q. DOMINICA ORTIZ BAUTISTA
 JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.





AGRADECIMIENTOS.

- *A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.*
- *Al Dr. Fausto Calderas por los comentarios y sugerencias en la parte de reometría y el análisis de este trabajo.*
- *Al M. en C. Mariano Pérez Camacho por sus valiosas aportaciones, comentarios y sugerencias para la comparación y discusión de los datos experimentales.*
- *Al Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por brindarme el apoyo necesario para la elaboración de este trabajo de tesis de licenciatura; así mismo por los conocimientos transmitidos durante mi preparación profesional y además por esa excelente amistad que me ha brindado.*
- *Al I.Q. Raúl Ramón Mora Hernández por el apoyo y sus valiosas aportaciones, así como comentarios.*
- *Al I.Q. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez por sus valiosas aportaciones y comentarios.*
- *A la I.Q. Consuelo Matías Garduño por sus valiosas aportaciones y comentarios en la parte de aplicación.*
- *Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.*
- *Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM << IN115615 >> << Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.*





DEDICATORIAS.

Con dedicación especial a mis padres: Sr. Ramón Tapia y Sra. Carmen Regalado, por el apoyo que siempre me han brindado y con el cual he logrado terminar mi carrera profesional siendo para mí la mejor de las herencias. Con admiración y respeto.

A mis hermanos Luis y Ramón, gracias por crecer a mi lado a lo largo de mi vida; así mismo por la constante motivación y ayuda para poder concluir mis estudios superiores.

A mis Amigos de la universidad (Adrián, Adriana Karina, Alma, Amado, Candy, Eduardo (Borre), Enrique, Fany, Haide, Hiram, Ivan, José, José Luis Cuevas, Liz, Luis, Milton, Nohemi, Odette) que siempre estuvieron para mí cuando los necesite, además de que juntos compartimos muchos momentos maravillosos.

A Bárbara Ramírez Díaz, porque eres la persona que me ha acompañado estos últimos años, porque me motivas para seguir adelante y además por la amistad incondicional que me brindas en todo momento.

A todos aquellos amigos y familiares, que aunque no siempre estuvieron cerca de mí, jamás dejaron de creer en todo lo que puedo lograr, así como aquellas personas que me inspiran a superarme siempre.

A la I.Q Dominga Ortiz Bautista por el gran apoyo y la gran amistad que me brindo en todos estos años en la facultad.

A mis maestros y sinodales que me otorgaron su tiempo y su paciencia a lo largo de mi formación para ofrecerme su conocimiento.

A mi asesor Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia que hizo posible la realización y terminación de este trabajo, gracias por su apoyo y amistad.

Ricardo Tapia Regalado





APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO.

La aportación de este trabajo de tesis de licenciatura, es el estudio del efecto de deslizamiento en el caso particular de fluidos newtonianos, para flujo por compresión en un viscosímetro de platos concéntricos.

La amplia mayoría de trabajos de investigación realizados sobre flujo por compresión han sido realizados con base a diferentes ecuaciones constitutivas, utilizando fluidos no newtonianos, los cuales, presentan mayor complejidad para ser estudiados.

En este trabajo, se modela los mecanismos deslizantes utilizando el modelo de Newton, el cual presenta una dependencia lineal entre el tensor de esfuerzos y el tensor rapidez de deformación.

A continuación, se presentan las aportaciones más importantes del presente trabajo aplicado a los fenómenos de transporte en fluidos newtonianos, en un sistema que presenta el fenómeno molecular de deslizamiento.

- a) El estudio de flujo por compresión entre dos discos concéntricos, separados a una distancia h y con efecto de deslizante (V_s), en particular para un fluido newtoniano.
- b) En este trabajo se acopla la ecuación de continuidad con la ecuación de momento para un fluido newtoniano (Navier-Stokes).
- c) A partir de un conjunto de variables adimensionales se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales dependen de dos números adimensionales, α y Reynolds. El primero de ellos, relaciona dos longitudes características axial y radial respectivamente, y el segundo dos tipos de mecanismos, inerciales y viscosos.
- d) Suponiendo que los términos que contienen el parámetro α son pequeños, el sistema se puede simplificar, al flujo entre placas paralelas por medio de un gradiente de presión radial constante. Esta aproximación es conocida como de lubricación y el método que se presenta aquí demuestra que las contribuciones son pequeñas, en vez de solo invocar la aproximación de lubricación.
- e) Geométricamente, el flujo se aproxima al de una rendija a gradiente de presión constante.





“FLUJO POR COMPRESIÓN EN UN VISCOSÍMETRO DE PLATOS CONCÉNTRICOS”



- f) A partir del balance entre el gradiente de presión y la componente $\{r, z\}$ de la divergencia del tensor esfuerzos, se obtienen expresiones analíticas para las siguientes cantidades dinámicas: (i) Velocidad radial, (ii) Velocidad axial, (iii) Gradiente de presión, (iv) Perfil de Presión, (v) fuerza en el plato superior (vi) Viscosidad aparente y (vii) altura en función del tiempo. Todas ellas, en función de las propiedades del medio y geométricas.
- g) Los perfiles de velocidad se modifican por efecto del deslizamiento, es decir, las curvas de los perfiles de velocidad tienen un máximo debido al efecto deslizante.
- h) A partir de datos reométricos, se predicen las simulaciones para la viscosidad aparente, resultando que el sistema es muy sensible a los datos reométricos que sean utilizados.
- i) La rapidez con la que desciende el plato se ve afectada drásticamente por el parámetro de deslizamiento, ya que las pendientes de la altura como función del tiempo cambian drásticamente con los mecanismos deslizantes
- j) Finalmente, este trabajo es punto de partida en la extensión de sistemas complejos con mecanismos deslizantes en la pared, lo que abre posibilidades en la industria de agentes lubricantes basados en sistemas poliméricos.





INDICE.

INDICE DE FIGURAS. 12

INDICE DE TABLAS. 13

NOMENCLATURA. 14

 Variables dimensionales. 14

 Variables adimensionales. 14

 Letras griegas. 15

 Vectores y tensores. 15

GLOSARIO. 16

RESUMEN. 18

CAPITULO I 20

INTRODUCCIÓN 20

 1. FUNDAMENTACIÓN DE LA ELECCIÓN DEL TEMA. 21

 1.1 Flujo por compresión. 21

 1.1.1 Descripción. 21

 1.1.2 Aplicaciones. 22

 1.1.3 Tipos de sistema físico. 23

 1.1.4. Ecuaciones constitutivas. 23

 1.1.5 Aproximaciones matemáticas. 23

 1.1.6 Antecedentes e historia del flujo por compresión. 25

 1.1.7 Viscosimetría de platos concéntricos. 27

 1.1.8 Efectos de la temperatura en el flujo por compresión. 28

 1.1.9 Efectos de la porosidad en el flujo por compresión 29

 1.1.10 Efectos inerciales y elásticos en el flujo por compresión 29





**“FLUJO POR COMPRESIÓN
EN UN VISCOSÍMETRO DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**



1.1.11 Flujo por compresión en diferentes geometrías	30
1.1.12 Flujo continuo por compresión	30
1.1.13 Flujo por compresión con deslizamiento en la pared.....	31
CAPITULO II.....	32
FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	32
2.1 ¿Que es la reología?.....	33
2.2 Tensor de deformación.	33
2.3 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.	34
2.4 El tensor rapidez de deformación.	34
2.5 El tensor de Vorticidad.....	35
2.6 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación.....	35
2.7 Tensor de esfuerzos.	35
2.8 Fluidos newtonianos.....	36
2.9 Fluidos no newtonianos.....	37
2.10 Ecuaciones constitutivas.....	37
2.10.1 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia).....	37
2.10.2 Modelo de Ellis.....	38
2.10.3 Modelo de Carreau.....	38
2.10.4 Modelo de Reinner-Phillipoff.....	39
2.10.5 Fluido de Bingham.....	39
2.11 Métodos reométricos.....	40
2.11.1 Flujo cortante simple.....	41





CAPITULO III.....	43
OBJETIVOS E HIPÓTESIS.....	43
3.1 Objetivos.....	44
3.2 Hipótesis del trabajo.....	44
3.3 Distribución del trabajo de investigación.....	44
CAPITULO IV	46
PLANTAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA.....	46
4.1 Planteamiento físico del problema.....	47
4.2 Análisis del proceso.....	47
4.3 Ecuaciones vectoriales y tensoriales.....	48
4.3.1 Ecuación de continuidad.....	48
4.3.2 Ecuación de movimiento.....	48
4.3.3 Ecuación constitutiva.....	48
4.3.4 Tensor rapidez de deformación.....	49
4.3.5 Vector velocidad y tensores cinemáticos.....	49
4.3.6 Condiciones de frontera sin deslizamiento.....	51
4.3.7 Condiciones de frontera con deslizamiento.....	52
4.3.8 Variables adimensionales.....	53
4.4 Ecuaciones básicas adimensionales.....	54
4.4.1 Ecuación de continuidad adimensional.....	54
4.4.2 Ecuación de Movimiento adimensional.....	54
4.4.3 Ecuación constitutiva adimensional.....	54
4.4.4 Números adimensionales.....	55
4.4.5 Condiciones de frontera adimensional.....	55





4.4.6 Fuerza adimensional.....	56
CAPITULO V	57
MODELADO TEÓRICO	57
5.1 Aproximación de lubricación.	58
5.2 Análisis sin deslizamiento.	58
5.2.1 Calculo de la componente radial de la velocidad.....	59
5.2.2 Calculo de la componente axial de la velocidad.	60
5.2.3 Calculo del gradiente de presión y del perfil de presión.....	60
5.2.4 Calculo de la fuerza normal.	61
5.2.5 Calculo de la viscosidad aparente a partir del flujo por compresión.	62
5.2.6 Calculo de la altura como función del tiempo a una fuerza constante.....	63
5.3 Análisis con deslizamiento.	65
5.3.1 Calculo de la componente radial de la velocidad.....	65
5.3.2 Calculo de la componente axial de la velocidad.	65
5.3.3 Calculo del gradiente de presión y del perfil de presión.....	67
5.3.4 Calculo de la fuerza normal.	67
5.3.5 Calculo de la viscosidad aparente a partir del flujo por compresión.	67
5.3.6 Calculo de la altura como función del tiempo a una fuerza constante.....	68
CAPITULO VI	70
ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	70
6. PREDICCIONES TEÓRICAS.....	71
6.1 Análisis sin efectos de deslizamiento.	72
6.1.1 Perfil radial adimensional de velocidades.....	72
6.1.2 Perfil axial adimensional de velocidades.	73





**“FLUJO POR COMPRESIÓN
EN UN VISCOSÍMETRO DE PLATOS CONCÉNTRICOS”**



6.1.3 Gradiente de presión y presión adimensional.	74
6.1.4 Viscosidad aparente.	75
6.1.5 Altura adimensional en función del tiempo adimensional.	76
6.2 Análisis con efectos de deslizamiento.	78
6.2.1 Perfil radial adimensional de velocidades.	78
6.2.2 Perfil axial adimensional de velocidades.	79
6.2.3 Gradiente de presión y presión adimensional.	80
6.2.4 Viscosidad aparente.	81
6.2.5 Altura adimensional en función del tiempo adimensional.	84
CONCLUSIONES	85
TRABAJO FUTURO	89
Modelos no newtonianos.	90
Mecanismos inerciales y elásticos.	92
Métodos matemáticos y computacionales.	92
Sistemas y Reometría.	92
REFERENCIAS.....	93





INDICE DE FIGURAS.

Figura 1. Flujo por compresión axi-simétrico, con una masa constante de la muestra entre los platos. (Engmann et al. 2005).	21
Figura 2. Flujo por compresión axi-simétrico, con área de contacto constante entre los platos y la muestra. (Engmann et al. 2005).....	21
Figura 3. Coordenadas y dimensiones básicas para describir el sistema axi-simétrico de flujo por compresión. (Engmann et al. 2005).	22
Figura 4. Organización del trabajo desarrollo en la tesis.....	45
Figura 5. Velocidad radial adimensional vs variable axial adimensional, en función de la coordenada radial adimensional.....	72
Figura 6. Velocidad axial adimensional vs variable axial adimensional, en el caso de un fluido homogéneo.	73
Figura 7. Presión adimensional vs coordenada radial adimensional, en el caso de un fluido homogéneo. En el recuadro se ilustra el gradiente de presión adimensional en función de la coordenada radial adimensional.....	74
Figura 8. Esfuerzo cortante aparente vs Rapidez de deformación aparente, en el caso de varios líquidos newtonianos: (a) poliacrilamida (ET597)-Agua, (b) Glicerol-Agua y (c) Solución acuosa de Glicerol-Poliacrilamida (ET597).	75
Figura 9. Altura adimensional vs tiempo adimensional, en función del número adimensional alpha, el cual relaciona dos longitudes características axial y radial respectivamente.	76
Figura 10. Velocidad radial adimensional vs variable axial adimensional, en función de la posición radial y del parámetro de deslizamiento.....	78
Figura 11. Velocidad axial adimensional vs variable axial adimensional como función del parámetro de deslizamiento en el pared.....	79
Figura 12. Presión adimensional vs coordenada radial adimensional, en el caso de un fluido homogéneo con deslizamiento en la pared. En el recuadro se ilustra el gradiente de presión adimensional en función de la coordenada radial adimensional, con el parámetro de deslizamiento.	80





Figura 13. Esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente, en el caso de un líquido newtoniano con parámetro de deslizamiento: (i) Poliacrilamida (ET597)-Agua. 81

Figura 14. Esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente, en el caso de un líquido newtoniano con parámetro de deslizamiento: (ii) Glicerol-Agua. 82

Figura 15. Esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente, en el caso de un líquido newtoniano con parámetro de deslizamiento: (iii) solución acuosa de Glicerol y Poliacrilamida (ET597)..... 82

Figura 16. Altura adimensional vs tiempo adimensional, en función del número adimensional alpha y el efecto deslizando..... 84

INDICE DE TABLAS.

Tabla 1. Fuerza normal dentro de los platos (para muestra con área constante) en función de la separación de los platos H y la velocidad de descenso del plato dH/dt 27

Tabla 2. Separación de los platos bajo la aplicación de una fuerza F_0 constante, para diferentes modelos materiales sin deslizamiento en los platos: (Engmann et al. 2005)..... 28

Tabla 3. Resumen de las principales ecuaciones con y sin efecto deslizando en la pared. 69

Tabla 4. Datos experimentales de algunos fluidos newtonianos. 75





NOMENCLATURA.

Variables dimensionales.

a	Radio del disco [m].
F_N	Fuerza Newtoniana [N].
$h(t)$	Distancia entre los discos [m].
p	Presión hidrostática [Pa].
P_a	Presión atmosférica.
$\frac{dp}{dz}$	Gradiente de presión [Pa/m].
Re	Número de Reynolds.
$\{r, z\}$	Coordenadas axial y radial respectivamente [m].
V_r	Velocidad radial dimensional [m/s].
V_z	Velocidad axial dimensional [m/s].
V_s	Factor de deslizamiento [m/s].
$\dot{h}(t)$	Velocidad promedio [m/s].

Variables adimensionales.

F^*	Fuerza adimensional en el plato superior $z = 1$.
p^*	Presión hidrostática adimensional.
$\{r^*, z^*\}$	Coordenadas axial y radial adimensional respectivamente Y, Z .
V_r^*	Velocidad radial adimensional.
V_z^*	Velocidad axial adimensional.
V_s^*	Factor de deslizamiento adimensional.





Letras griegas.

α	Relación entre la longitud característica axial h y la longitud característica radial a .
μ	Viscosidad del fluido [Pa*s].
μ_{ap}	Viscosidad aparente.
θ	Coordenadas angular.
σ_{ik}^*	Componente ik del tensor de esfuerzos [Pa].
ρ	Densidad del líquido [kg/m ³].
$\dot{\gamma}_{ap}$	Rapidez de deformación aparente

Vectores y tensores.

D	Tensor rapidez de deformación. [1/s].
σ	Tensor de esfuerzos [Pa].
V	Vector velocidad. [m/s].
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s].
∇V^T	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s].





GLOSARIO.

Adherencia:	Es la interacción entre las superficies de dos cuerpos, las dos superficies adyacentes pueden tener una composición química diferente.
Aproximación de Lubricación:	Es cuando en un sistema se desprecian los términos pequeños, los cuales están relacionados con el cociente de dos longitudes características axial y radial respectivamente.
Cohesión:	Es la atracción entre moléculas que mantiene unidas las partículas de una sustancia.
Deformación:	Cambio relativo de la posición con respecto a otra en un medio continuo.
Deslizamiento:	Es cuando en un sistema físico no se cumple la condición de adherencia de la superficie al fluido.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema, en particular en reología es el Esfuerzo y la Deformación.
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Ecuación de Navier-Stokes:	Ecuación de movimiento aplicada a un fluido Newtoniano.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.





Fluido:	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo se deforma continua e irreversiblemente.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Fluido adelgazante al corte:	Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Fluido engrozante al corte o espesante al corte:	Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
Lubricación:	Es cuando en un sistema físico se mete un fluido viscoso que minimiza el contacto entre las dos superficies, para abatir la fricción o la disipación de energía.
Rapidez de deformación:	Evolución temporal de la deformación.
Tensión superficial:	Condición existente en la superficie libre de un líquido, semejantes a las propiedades de una membrana elástica bajo tensión.
Viscosidad:	Medida de la resistencia a fluir de la materia.





RESUMEN.

En este trabajo se analiza el flujo por compresión con deslizamiento en un viscosímetro de platos concéntricos. Para caracterizar nuestro fluido, se utiliza el modelo newtoniano, el cual tiene una relación lineal entre el tensor de esfuerzo y el tensor rapidez de deformación. Este modelo contiene una propiedad material conocida como viscosidad, la cual es una medida de la resistencia al flujo en un sistema. Suponiendo estado cuasi-estacionario, líquido incompresible, simetría cilíndrica, proceso isotérmico y que el vector de velocidades depende de dos componentes, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas.

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, se propone un conjunto de variables adimensionales, con el fin de escalar las ecuaciones y que aparezcan grupos adimensionales, los cuales describen los mecanismos que dominan y juegan un papel vital en la descripción del flujo.

Suponiendo que los efectos inerciales son despreciables, se obtiene una expresión analítica para el perfil radial de velocidad en función de la coordenada radial adimensional. A través de la conservación de la masa y el uso de la ecuación de continuidad, se obtiene el perfil de velocidad axial. A partir de los perfiles de velocidad se obtiene la expresión para el gradiente de presión en función del deslizamiento en el sistema. Integrando y suponiendo que en $r = a$ la presión es igual a la atmosférica, se obtiene una expresión cerrada para la presión, la cual describe una parábola que se desfasa debido a la fuerza motriz asociada al gradiente de presión. Mediante un balance de fuerzas en el plato superior, se obtiene vía integración, una expresión para la fuerza en función del gradiente de presión y el área de contacto.

Al sustituir el gradiente de presión en la fuerza e integrando, se obtiene la ecuación de la fuerza de Stefan con la corrección del deslizamiento en la pared, esta ecuación se desacopla para obtener el esfuerzo cortante aparente y rapidez de deformación, lo cual nos permite obtener una expresión para la viscosidad aparente.

Suponiendo que la fuerza es constante, se obtiene una ecuación diferencial lineal para la altura del plato en función de las propiedades del medio y del tiempo.

Se presentan simulaciones para los perfiles de velocidad radial, axial y de la presión como función de las coordenadas espaciales.





“FLUJO POR COMPRESIÓN EN UN VISCOSÍMETRO DE PLATOS CONCÉNTRICOS”



Se obtuvieron predicciones numéricas utilizando datos reométricos de fluidos newtonianos.

Palabras claves: Flujo por compresión, Deslizamiento en la pared, Fluidos Newtonianos.



CAPITULO I

INTRODUCCIÓN





1. FUNDAMENTACIÓN DE LA ELECCIÓN DEL TEMA.

1.1 Flujo por compresión.

1.1.1 Descripción.

El flujo por compresión es uno de los sistemas más estudiados en el área de fenómenos transporte y reología (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976). En este sistema, el fluido es colocado entre dos platos circulares concéntricos, el inferior se encuentra estático mientras que el superior se aproxima con una velocidad $H(t)$ comprimiendo al fluido que se encuentra colocado en el plato inferior (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976). El fluido es comprimido por una fuerza constante y fluye en la dirección radial hacia fuera del sistema (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976; Leider & Bird 1974; Leider 1974). En este sistema se supone, que el fluido es lo suficientemente viscoso, de tal manera que el líquido permanece entre los dos platos, i.e., la tensión superficial entre el fluido y la superficie es lo suficientemente alta para mantener el fluido en el plato inferior (Bird et al. 1987, 2002)



Figura 1. Flujo por compresión axi-simétrico, con una masa constante de la muestra entre los platos. (Engmann et al. 2005).



Figura 2. Flujo por compresión axi-simétrico, con área de contacto constante entre los platos y la muestra. (Engmann et al. 2005).

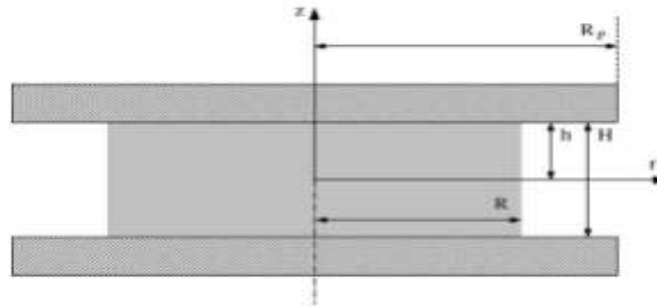


Figura 3. Coordenadas y dimensiones básicas para describir el sistema axi-simétrico de flujo por compresión. (Engmann et al. 2005).

1.1.2 Aplicaciones.

Este sistema ha sido empleado en diferentes contextos en la industria, investigación y aplicaciones de tipo tecnológico (Engmann et al. 2005). Ejemplos de flujo por compresión se pueden observar en la vida cotidiana (Engmann et al. 2005). Por ejemplo, cuando ingiere un alimento y se procesa en los dientes, se forma una pasta que después es deglutida y pasa por el aparato digestivo (Engmann et al. 2005; Tornqvist et al. 2000). En la industria de los alimentos, existen muchos ejemplos de este tipo de sistemas de flujo (Engmann et al. 2005; Tornqvist et al. 2000). El amasado de pan, la preparación de galletas en donde unen la pasta o la crema con las superficies sólidas, son ejemplos claros de flujo por compresión en la industria alimenticia (Engmann et al. 2005; Tornqvist et al. 2000).

En la industria de los polímeros, los procesos de moldeo, inyección y extrusión combina flujos cortantes y extensionales, los cuales son punto de partida en la descripción matemática y física de estos sistemas (Bird et al. 1987; Covey & Stanmore 1981). Desde el punto de vista de la teoría de lubricación, el estudio de aditivos poliméricos, es un reto que está todavía muy lejos de ser entendido (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Covey & Stanmore 1981; Engamnn et al. 2005; Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000; Scott 1931, 1936). Los aditivos son fluidos que permiten, evitar o disminuir la fricción o desgaste entre la maquinaria y el equipo de uso en la industria mecánica (Bird et al. 2002; Phan-Thien & Tanner 1984).





1.1.3 Tipos de sistema físico.

En este sistema, se han probado diferentes tipos de fluidos: (a) Líquidos newtonianos, (ii) y Líquidos no newtonianos (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Covey & Stanmore 1981; Engamnn et al. 2005; Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000; Sherwood & Durban 1996 a,b). Desde un punto de vista geométrico, el flujo por compresión ha sido investigado con diferentes geometrías: a) rectangulares, b) circulares (el más utilizado) y c) esféricos (Chen 1993; Covey 1981; Engmann et al. 2005; Leider & Bird 1974; Leider 1974; Lian et al. 2001)

1.1.4. Ecuaciones constitutivas.

Este modelo se ha estudiado con diferentes tipos de ecuaciones constitutivas llamadas: I. Viscosos: (i) Newton, (ii) Ostwald, (iii) Bingham, (iv) Hershel Bulkley, II. Modelos viscoelásticos lineales: (a) Maxwell, (b) Jeffreys, (c) Burgers (d) Viscoelástico Generalizado, III. Modelos viscoelásticos no-lineales: (1) Maxwell convectivo superior, (2) Tanner, (c) Oldroyd B, (3) Giesekus, etc. (Barnes et al.1989; Bird et al. 1987, 2002)

1.1.5 Aproximaciones matemáticas.

Matemáticamente, este sistema es muy complicado debido a que el vector de velocidad contiene dos componentes: radial y axial respectivamente, las cuales son funciones del tiempo y de la posición radial y axial respectivamente, i.e. $\{V_r(r, z, t), V_z(r, z, t)\}$ (Bird et al. 1987, 1987, 2002). Este hecho complica notablemente los métodos analíticos (Grimm et al. 1976), y naturalmente induce los métodos numéricos, ya que se tiene la ecuación de continuidad, dos componentes de la ecuación de movimiento y las componentes de la ecuación constitutiva respectivamente (Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000). Incluso el modelo más sencillo, como es el newtoniano, se complica por este hecho lo que lo hace un problema muy atractivo para los estudios de la reología, mecánica de fluidos y fenómenos de transporte (Bird et al 1987, 2002; Grimm 1976).





La primera aproximación analítica, se hace suponiendo que los términos que sean multiplicados por la separación de los platos y dividida por el radio del disco circular, son pequeños es decir, $H/a \ll 1$, por lo que los componentes de la ecuación de movimiento que los contienen se desprecian (Bird et al. 1987, 2002). **Esta suposición se conoce como aproximación de Lubricación, la cual físicamente consiste en despreciar los efectos de curvatura, y aproximar el flujo como si se tratara de un flujo a gradiente de presión constante entre dos platos paralelos** (Sthefan 1874; Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976). En el estudio del flujo por compresión han sido incluidos fluidos viscosos newtonianos, fluidos viscosos no newtonianos, fluidos viscoelásticos lineales y no lineales respectivamente (Bird et al. 1987, 2002; Brindley et al. 1976; Huang et al. 2002; McClelland & Finlayson; Phan-Thien & Tanner 1983; Phan-Thien & Tanner; Phan-Thien 2000; Sherwood & Durban 1996a, 1996b; Waters & Gooden 1983, 1984; Engmann et al. 2005).

Otras aproximaciones se basan en suponer conservación de masa en el sistema, i.e., que la ecuación de continuidad se satisface por un conjunto de funciones, las cuales al ser sustituidas en las componentes de la ecuación de movimiento conducen a un sistema no lineal de ecuaciones acopladas que permiten proponer diferentes esquemas de tipo numérico. (Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000). Por último, en este contexto los métodos basados en esquemas de diferencias finitas, elemento finito, volumen finito, permiten obtener resultados más precisos para el valor de la fuerza en el plato superior respectivamente (Phan-Thien & Tanner 1983, 1984, Phan-Thien et al. 1985, 1987; Phan-Thien & Walsh 1984; Phan-Thien & Low 1988; Phan-Thien 2000).





1.1.6 Antecedentes e historia del flujo por compresión.

El flujo por compresión de un líquido newtoniano fue estudiado despreciando los mecanismos inerciales (Sthefan 1874; Brindley et al. 1976; Bird et al. 1987, 2002). En este sistema, el fluido viscoso es colocado entre dos platos separados de radio a y separados a una distancia h , y el plato superior, se aproxima con una velocidad no constante, es decir, la velocidad se modifica punto a punto (Sthefan 1974; Brindley et al. 1976; Bird et al. 1987; 2002). Stefan (1874) demostró que la fuerza para mantener el movimiento del líquido fluyendo por el espacio comprendido entre los platos, es proporcional a la viscosidad cortante y propiedades geométricas del sistema.

La ecuación básica de Stephan esta dad por la siguiente expresión analítica:

$$F(t) = \frac{3}{2} \frac{\pi a^4 \eta_0 \dot{H}(t)}{H(t)^3} \tag{a}$$

En la Ec. (a) $F(t)$ es la fuerza que experimenta el plato superior debido al medio, η_0 es la viscosidad del medio, $h(t)$ es la separación del medio, a es el radio del disco y $\dot{h}(t)$ es la velocidad promedio (Sthefan 1984; Brindley et al. 1976; Bird et al. 1987, 2002; Leider and Bird 1974; Leider 1974; Grim 1981). Por otra parte, Scott (1931) investigo el sistema de flujo por compresión, pero a un fluido de la ley de potencia. El resultado fue un modelo no analítico no lineal, el cual describe la variación de la fuerza, en función de la separación de los platos. El modelo analítico de Scott se define de la siguiente manera:

$$F(t) = \frac{2\pi(2+1/n)^n}{n+3} K \dot{H} \left| \dot{H} \right|^{n-1} H^{-(2n+1)} R^{n+3} \tag{b}$$

La Ec. (b) representa la fuerza para mantener el movimiento del fluido por efecto de la compresión. En este trabajo se deduce una expresión analítica para la fuerza en función de las propiedades del modelo de ley de potencia. Este resultado se aplica a fluidos adelgazantes y engrozantes al corte respectivamente. Esta expresión se reduce a los encontrados por Sthefan (1874) para un fluido newtoniano (Bird et al. 1987, 2002;





Brindley et al. 1974). Por otra parte, Brindley et al. (1974) analizaron un líquido viscoelástico con un con una ecuación constitutiva de segundo orden en el tensor rapidez de deformación. En su investigación se deduce una expresión analítica para la fuerza y la altura de descenso en función de las propiedades materiales, geométricas y la velocidad con la que desciende el plato (Brindley et al. 1974). Por otra parte Covey et al. (1981) investigo el esfuerzo de cedencia en el flujo por compresión. En su investigación, caracterizaron el fluido con dos ecuaciones constitutivas. La primera de ellas con un modelo de Bingham y la segunda con un Herschel-Bulkley (Bird et al. 1987, 2002). En este estudio se reportan dos soluciones analíticas, en función de los parámetros del medio para valores asintóticos en el número de plasticidad, el cual relaciona el esfuerzo cortante con el esfuerzo de cedencia (Bird et al. 1987, 2002). Los datos experimentales que reportan para pastas, concuerdan con el modelo teórico deducido el cual, concuerda con las observaciones y ajustes experimentales. A partir de sus predicciones teóricas y ajustes experimentales, los parámetros materiales del sistema son calculados (Covey et al. 1981).

En la Tabla 1 se muestran algunos de los resultados analíticos de los trabajos antes mencionados.





Ecuación Constitutiva	Fuerza normal $F(H, H_0, \dot{H})$
Newton	$F_Z = \frac{3}{2} \frac{\pi a^4 \eta_0 \dot{H}}{H^3}$
Ostwald	$F_Z = -\frac{2\pi(2+1/n)^n}{n+3} K \dot{H} \left \dot{H} \right ^{n-1} H^{-(2n+1)} R^{n+3}$
Bingham	$F_Z = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3H} + \frac{4\pi R^3}{7H^2} \left 2\tau_y K \dot{H} R \right ^{1/2}; \quad \frac{-K \dot{H} R}{\tau_y H^2} < 0.05$ $F_Z = \frac{\pi\tau_y R^3}{H} + \frac{3\pi R^4}{2H^3} \left \dot{H} \right K; \quad \frac{-K \dot{H} R}{\tau_y H^2} > 10$ $F_Z = \frac{1.282K \dot{H} R}{(H/R)^{2.981}} \left[1 - 1.238 \frac{\tau_y H}{K \dot{H}} \left(\frac{H}{R} \right)^{1.026} \right]; \quad 0.01 < \frac{H}{R} < 0.1$
Hershel Bulkley	$F_Z = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3H} + 2\pi \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n/(n+1)} \frac{n+1}{4n+3} \frac{K^{1/(n+1)} \tau_y^{n/(n+1)} \left \dot{H} \right ^{n/(n+1)}}{H^{(4n+3)/(n+1)}}; \quad \frac{-K^{1/n} \dot{H} R}{\tau_y^{1/n} H^2} \ll 1$ $F_Z = \frac{\pi\tau_y R^3}{H} + \frac{2\pi \dot{H} \left \dot{H} \right ^{n-1} K}{H^{2n+1} (n+3)} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n R^{n+3}; \quad \frac{-K^{1/n} \dot{H} R}{\tau_y^{1/n} H^2} \gg 1$

Tabla 1. Fuerza normal dentro de los platos (para muestra con área constante) en función de la separación de los platos H y la velocidad de descenso del plato dH/dt.

1.1.7 Viscosimetría de platos concéntricos.

Una de las aplicaciones más importantes del flujo por compresión es el cálculo de las propiedades materiales, es decir, viscosidades y tiempos de relajación respectivamente. El experimento clásico consiste en suponer una fuerza constante, y dejar que el sistema se comprima hasta que la proximidad en los platos sea del orden de micras. La expresión básica puede ser deducida de la Ecuación de Sthefan. Suponiendo que la carga $F_z = F_0$ se puede integrar la Ec. (1), por lo que se tiene la siguiente función para el descenso de los platos en función de la altura inicial.





$$H(t) = H_0 \left(1 + \frac{4H_0^2 F_0 t}{3\pi\mu R^4} \right)^{-1/2} \quad (c)$$

Nótese que la altura está determinada por las propiedades geométricas y materiales del sistema. La Ec. (c) es punto de partida en muchas investigaciones con diferentes tipos de fluidos.

Modelo	Área constante $H(F_0, t)$	Volumen constante $H(F_0, t)$
Newton	$H(t) = H_0 \left(1 + \frac{4H_0^2 F_0 t}{3\pi\mu R^4} \right)^{-1/2}$	$H_0 \left(1 + \frac{8H_0^2 F_0 t}{3\pi\mu R_0^4} \right)^{-1/4}$ Asumiendo: $R(t) \approx R_0 \sqrt{\frac{H_0}{H(t)}}$
Ley de potencia	$H(t) = \left(H_0^{-(n+1)/(n)} + \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{F_0(n+3)}{2\pi K R^{n+3}} \right)^{1/n} t \right)^{-n/(n+1)}$	No hay expresión analítica
Bingham	$H(t \rightarrow \infty) = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3 F_0}$	$H(t \rightarrow \infty) = \left(\frac{2V^{3/2}\tau_y}{3\sqrt{\pi} F_0} \right)^{2/5}$
Hershel-Bulkley	$H(t \rightarrow \infty) = \frac{2\pi\tau_y R^3}{3 F_0}$	$H(t \rightarrow \infty) = \left(\frac{2V^{3/2}\tau_y}{3\sqrt{\pi} F_0} \right)^{2/5}$

Tabla 2. Separación de los platos bajo la aplicación de una fuerza F_0 constante, para diferentes modelos materiales sin deslizamiento en los platos: (Engmann et al. 2005).

1.1.8 Efectos de la temperatura en el flujo por compresión.

El efecto de la temperatura ha sido incorporado acoplado la ecuación de transporte de energía, con la de momento y reológica en una geometría de platos paralelos (Sherwood & Durban 1996 a, b). En esta investigación, se acopla la ecuación convectiva superior de Maxwell con la ecuación de energía y se propone que la ecuación de viscosidad tenga una dependencia tipo Arrhenius (Bird et al. 1987; 2002). En esta investigación, el sistema acoplado no lineal de ecuaciones diferenciales parciales, se resuelve por un método





numérico basado en cálculo variacional (elemento finito). Sus resultados demostraron que la temperatura de bulto está fuertemente correlacionada con las propiedades del medio y la energía (calor) decrece conforme el sistema es comprimido (Sherwood & Durban 1996 a, b).

1.1.9 Efectos de la porosidad en el flujo por compresión

La mayoría de los materiales de interés en la industria son porosos, en este contexto, Sherwood & Duban 1996 estudiaron el flujo transitorio por compresión para pastas. En su investigación, la ecuación de movimiento y las condiciones de contorno fueron modificadas para incorporar los efectos de porosidad y la filtración en el medio, por lo que la solución es numérica. Sherwood & Durban 1996 a, b. Demostraron que la fuerza de compresión es inversamente proporcional al número de Peclet que se puede expresar como el producto entre los números adimensionales de Reynolds y Prandtl (Bird et al. 1987, 2002).

1.1.10 Efectos inerciales y elásticos en el flujo por compresión

Muchos autores, han incorporado los mecanismos inerciales y elásticos mediante métodos perturbativos mediante técnicas perturbativas las cuales, se centran en obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas (McClelland & Finlayson 1983; Waters & Gooden et al. 1983, 1984). McClelland & Finlayson (1983) estudian el flujo por compresión transitorio en una geometría de platos concéntricos, utilizando una técnica basada en teoría de perturbaciones con el fin de incluir efectos inerciales y elásticos. En esta investigación, el fluido es caracterizado por un modelo tipo Maxwell (Bird et al. 1978).





1.1.11 Flujo por compresión en diferentes geometrías

Algunos autores han tratado de investigar el flujo por compresión modificando la geometría de compresión. Lian et al. (2001) estudio el flujo por compresión de un líquido tipo ley de potencia, en un sistema esférico. Sus resultados demostraron que el gradiente de presión tiende a ser pequeño cuando la separación es pequeña. Aquí la separación de los platos es función del radio de las esferas y la fuerza decrece en función de las propiedades materiales del modelo tipo ley de potencia.

1.1.12 Flujo continuo por compresión

Uno de los principales inconvenientes del flujo por compresión, es la incorporación de la inercia del plato que comprime al medio (Brindley et al. 1974). Este efecto rara vez es incluido en la fuerza con la que se comprime el fluido. Oliver et al. (1978) & Shahidullah (1984) analizaron un sistema equivalente al flujo por compresión que se puede considerar el problema inverso del flujo por compresión (Avila & Binding 1981). Este problema consiste en fijar los dos platos concéntricos a una distancia $z = h$ y radio $r = a$. El plato inferior es perforado con una serie de orificios a través de los cuales un flujo volumétrico constante penetra los orificios, simulando un flujo continuo en donde el fluido, ejerce una fuerza en el plato superior fijo, y después de eso se produce un laminado en la dirección radial (Oliver et al. 1978 y Oliver & Shahidullah 1984). Waters & Gooden (1983, 1984) estudiaron este sistema con modelo de Ostwald y un líquido viscoelástico tipo Oldroyd B. Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas utilizaron un método perturbativo en donde las variables perturbadas, fueron la velocidad radial, axial, presión y los componentes del tensor de esfuerzos (Waters & Gooden 1983, 1984). A orden cero la fuerza describe un comportamiento similar al de la función viscosidad y a orden uno se observó que los efectos inerciales son despreciables y los elásticos son importantes.





1.1.13 Flujo por compresión con deslizamiento en la pared

Por otra parte, la mayoría de los sistemas por compresión presentan condiciones de deslizamiento en la pared, i.e., que no se cumple la condición de adherencia del sólido al fluido por lo que es necesario modificar las condiciones de frontera para incluir este hecho (Chen 1993; Laun et al. 1999). En este contexto, pocos trabajos se han enfocado al estudio de los efectos de deslizamiento en el sistema de flujo por compresión debido a su complejidad matemática y física. Precisamente, esta es la motivación de la presente investigación, el estudio del flujo por compresión de un líquido newtoniano en un sistema de platos concéntricos con deslizamiento en el plato superior. Por otro lado y debido a la búsqueda constante de entender los sistemas de flujo que combinan esfuerzos cortantes, condiciones de deslizamiento en la pared, así poder acceder a aplicaciones científicas y tecnológicas en la búsqueda de nuevos sistemas de flujo que den información de tipo analítico, y que permitan contrastar las predicciones numéricas y experimentales en sistemas de lubricación, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura.





CAPITULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS



2.1 ¿Que es la reología?

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte.

La reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia (Bird et al. 2002). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material.

Un fluido es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante. La viscosidad μ es una propiedad de transporte, ya que cuantifica la conductividad de cantidad de movimiento a través de un medio conductivo o fluido. Se interpreta como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Barnes 2000).

2.2 Tensor de deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación, es adimensional debido a que $[u_i]=L; [x_i]=L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$





2.3 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

2.4 El tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_S$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de Vorticidad.

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3)$$

El tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente nos da información acerca de la rapidez con que es deformado el sistema.





2.5 El tensor de vorticidad.

El tensor de vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Es importante notar, que el tensor de vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo.

2.6 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación.

El segundo invariante del tensor rapidez de deformación se obtiene tomando el doble producto punto entre los tensores rapidez de deformación. La expresión en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} (\Pi_D)^2 = 2(\mathbf{D} : \mathbf{D}) &= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

2.7 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los





elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

2.8 Fluidos newtonianos.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los volúmenes de control al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre.

En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (9)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (8), el tensor de esfuerzo cortante, $\boldsymbol{\sigma}$ tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} (parte simétrica del tensor gradiente de velocidad) tiene





inverso de segundo respectivamente. Por definición, todos aquellos fluidos que siguen las Ecs. (8, 9) son newtonianos.

2.9 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son en general, no newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos, no es lineal. Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple y sencilla de un fluido no newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión y pH.

2.10 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. La ecuación más simple es el modelo newtoniano, ya fue explicada en la parte de fluidos newtonianos. Algunos de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema son:

2.10.1 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia).

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de la ley de Potencia o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D} = 2m \left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \right)^{n-1} \mathbf{D} = 2m(\Pi_D)^{(n-1)/2} \mathbf{D} \quad (10)$$

En donde Π_D es el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, el cual se obtiene tomando el doble producto punto del tensor rapidez de deformación y posterior a eso, su raíz cuadrada. Este modelo contiene dos parámetros de ajuste m y n . El parámetro m es conocido como el índice de consistencia y n es exponente asociado al





comportamiento no newtoniano del fluido. Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando $n > 1$ la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrozante al corte). Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de m depende del valor numérico de n , con lo cual valores de m de distintos fluidos no son comparables.

2.10.2 Modelo de Ellis.

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a baja rapidez de deformación y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia. Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia. Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$2\mathbf{D} = \varphi_0 \boldsymbol{\sigma} + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{n-1} \boldsymbol{\sigma} \tag{11}$$

2.10.3 Modelo de Carreau.

El siguiente modelo, fue propuesto por Carreau para describir toda la curva reológica, es decir a baja, moderada y alta rapidez de deformación respectivamente. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) Viscosidad a corte bajo, (ii) Viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (vi) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido

$\{\eta_0, \eta_\infty, \lambda, n\}$ respectivamente. La expresión matemática que describe el modelo de Carreau es la siguiente:





$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

$$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left\{1 + \left(\lambda \sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})}\right)^2\right\}^{(n-1)/2}} \quad (12)$$

2.10.4 Modelo de Reinner-Phillipoff.

El modelo de Reiner-Phillipoff es un modelo inelástico que contiene tres parámetros de ajuste asociados a las propiedades no-newtonianas del sistema. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (iv) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido respectivamente $\{\eta_0, \eta_\infty, \sigma_s\}$. La expresión matemática que describe el modelo de Reiner-Phillipoff es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

$$\eta(|\boldsymbol{\sigma}|) = \eta_0 + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2} \quad (13)$$

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma})}$$

En la Ec. (13) $||$ es el valor absoluto del tensor de esfuerzos. Es importante notar que la función viscosidad no depende de la rapidez de deformación, si no del segundo invariante del tensor de esfuerzos.

2.10.5 Fluido de Bingham.

Estos fluidos presentan un comportamiento sólido mientras que el esfuerzo de corte no supere un esfuerzo conocido como de cedencia σ_0 . Por otra parte, una vez superado ese valor puede adoptar un comportamiento newtoniano (Plástico de Bingham). El modelo matemático que describe el plástico de Bingham, se presenta a continuación:





Plástico de Bingham

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}| \geq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + 2\eta_0 \mathbf{D} \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq |\boldsymbol{\sigma}_0| &\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

En la Ec. (14) $\boldsymbol{\sigma}_0$ es el esfuerzo de cedencia y η_0 es la viscosidad newtoniana en el sistema.

2.11 Métodos reométricos.

Los tres métodos reométricos más utilizados para la medición de las propiedades de los fluidos complejos son: el de cilindros concéntricos, discos paralelos, cono-plato y de capilar. La viscosidad y las funciones lineales viscoelásticas del material pueden ser determinadas en cualquier de los tres reómetros a geometría de cilindros concéntricos, se hace la prueba al fluido que está entre los dos cilindros concéntricos con un radio interior y exterior diferente, se aplica un torque para hacer rotar los cilindros generando un rango de rotación relativa entre el cilindro interior y exterior. Para la obtención de medidas cuantitativas de las propiedades del material, se asume que el fluido es simétrico al eje y puramente circunferencial con efectos finales insignificantes. En el sistema de discos paralelos, la medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales.

La geometría de cono y plato es utilizado para determinar el coeficiente de corte normal de algunos fluidos. La medición del torque aplicado y el rango de rotación son usados para obtener las propiedades de los materiales, asumiendo que los efectos de inercia son insignificantes y la superficie libre es esférica. En el sistema capilar, los fluidos a prueba caen por gravedad, compresión de gas o gracias a un pistón, frecuentemente son utilizados para medir la viscosidad lineal y las propiedades viscoelásticas de los líquidos.





2.11.1 Flujo cortante simple.

El flujo cortante simple se genera cuando una fuerza se aplica en dirección del flujo, por lo que el tensor de esfuerzos solo tiene elementos fuera de la diagonal principal por lo que se puede describir en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Los tensores gradiente de velocidad y su transpuesta se definen como:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

La transpuesta del tensor gradiente de velocidad está dado por:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Por lo tanto el tensor rapidez de deformación toma la forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$





El tensor rapidez de deformación, nos da información acerca de la deformación del material. Finalmente, la Ec. constitutiva de Newton toma la siguiente forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Desacoplando las matrices se obtienen las relaciones entre las entradas del tensor de esfuerzos y el tensor rapidez de deformación:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \mu \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ N_1 &= \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0 \\ N_2 &= \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

La primera y segunda diferencia de esfuerzos normales siempre es cero para un fluido newtoniano.





CAPITULO III

OBJETIVOS E HIPÓTESIS



3.1 Objetivos.

El objetivo general del presente análisis es contribuir al entendimiento del comportamiento reológico de fluidos newtonianos en el sistema de flujo por compresión en un viscosímetro de platos concéntricos. El flujo en este sistema es complejo, puesto que tiene elementos cortantes y elementos extensionales. Existen tres objetivos particulares en la presente tesis de licenciatura:

- a) El primero de ellos es desarrollar un modelo fenomenológico que describa y pronostique el comportamiento reológico de fluidos newtonianos sin deslizamiento y con deslizamiento en el sistema, basado en el balance de fuerzas de la ecuación de movimiento y conservación de la masa. Aquí el fluido newtoniano es modelado con la ecuación de Navier-Stokes para describir la dinámica en el sistema.
- b) El segundo objetivo es deducir expresiones de la Fuerza a orden cero que experimenta el sistema, como función de las propiedades materiales y geométricas.
- c) El último objetivo es utilizar las ecuaciones obtenidas para correlacionar algunos datos reométricos provenientes de la literatura.

3.2 Hipótesis del trabajo.

Si existe el efecto de no adherencia en el sistema de flujo por compresión, entonces la fuerza normal en el plato superior se ve modificada en función de las propiedades materiales, geométricas y dinámicas del sistema.

3.3 Distribución del trabajo de investigación.

Para alcanzar los objetivos de esta tesis el material de esta investigación se distribuye de la siguiente manera.



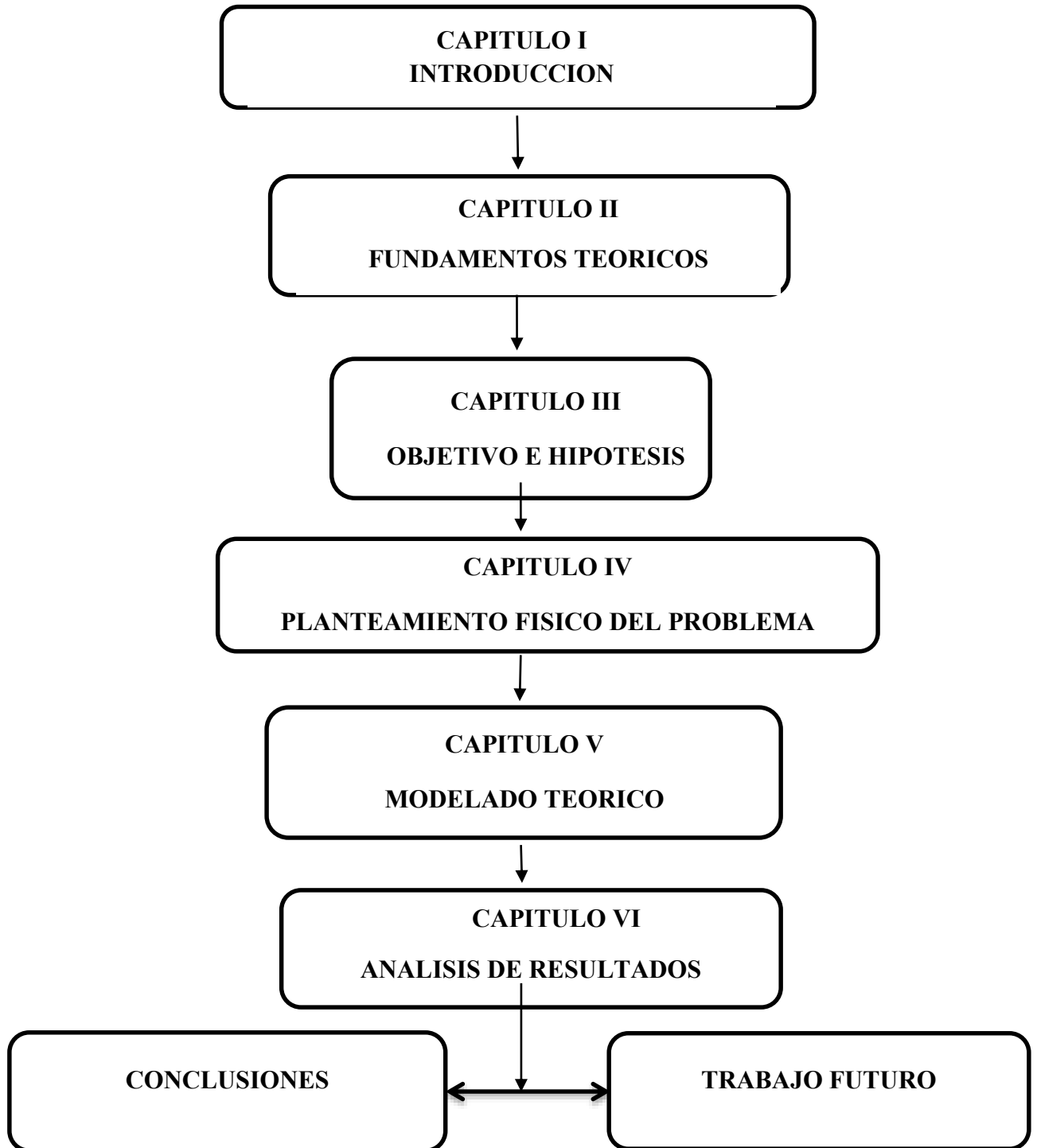


Figura 4. Organización del trabajo desarrollo en la tesis.



CAPITULO IV

PLANTAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA





En este capítulo se modela el sistema de flujo por compresión en un viscosímetro de platos concéntricos para un líquido newtoniano sin deslizamiento en la pared ($V_s=0$) y para un líquido newtoniano con deslizamiento en la pared ($V_s \neq 0$). En los dos casos, se deducen el perfil de velocidades radial y axial, gradiente de presión, perfil de presión, fuerza, viscosidad aparente y la altura como función del tiempo. Por último, estos resultados nos permitirán comparar el parámetro de deslizamiento.

4.1 Planteamiento físico del problema.

El fluido se encuentra en un sistema entre dos discos estacionarios de radio (a) y distancia axial h ($h \ll a$). El movimiento es causado por la compresión del plato superior sobre el líquido lo que produce un laminado en la dirección radial.

4.2 Análisis del proceso.

Las condiciones en las que se encuentra el sistema son las siguientes:

- Estado cuasi estacionario $\frac{\partial}{\partial t}$
- Proceso Isotérmico (Temperatura es constante).
- Fluido Incompresible (Densidad es constante). $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z).
- Los efectos gravitacionales se desprecian, es decir $g = 0$.
- El fluido es newtoniano (La viscosidad es constante no importan la rapidez con que será deformado).

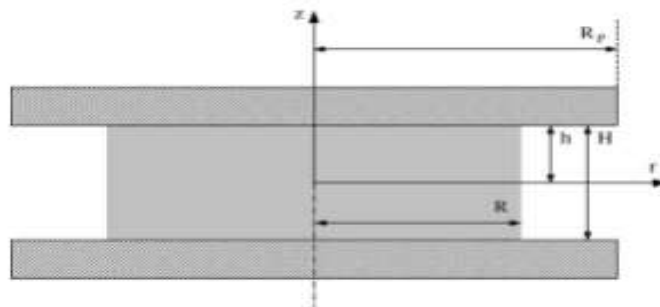


Figura 3. Coordenadas y dimensiones básicas para describir el sistema axisimétrico de flujo por compresión (Engmann et al. 2005).





4.3 Ecuaciones vectoriales y tensoriales.

4.3.1 Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad describe la conservación de la masa en un sistema y matemáticamente se describe mediante la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{1}$$

4.3.2 Ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento está basada en la segunda ley de Newton de la mecánica clásica para un medio continuo, la cual se expresa en forma matemática de la siguiente manera:

$$\overset{\text{INERCIA}}{\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt}} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \overset{\text{SUPERFICIALES}}{-\nabla p} + \overset{\text{FUERZAS VOLUMÉTRICAS}}{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{g} \tag{2a}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \tag{2b}$$

En la Ec. (2a) ρ es la densidad de líquido, D/Dt , es el operador de Stokes o la derivada material, la cual describe cambios en la velocidad debido a las variables temporal y espacial respectivamente, \mathbf{V} es el vector velocidad, $-\nabla p$ es el gradiente de presión o diferencial de presión, su signo negativo se debe a una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ es la divergencia del tensor de esfuerzos y finalmente \mathbf{g} es el vector aceleración de gravedad que en el campo terrestre, su valor es constante.

4.3.3 Ecuación constitutiva.

Para caracterizar nuestro líquido se utiliza la ecuación reológica de Newton la cual, relaciona la rapidez de deformación en función del esfuerzo en el sistema de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} \tag{3}$$





La Ec. (3) contiene: σ [Pa] es el tensor de esfuerzos viscoso, μ [Pa·s] es la viscosidad del fluido y \mathbf{D} [1/s] es el tensor rapidez de deformación el cual, es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ∇ [1/s].

4.3.4 Tensor rapidez de deformación.

Ecuación que relaciona a los vectores velocidad (\mathbf{V} y \mathbf{V}^T), haciendo que todas las formas de velocidad afecten al fluido.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \tag{4}$$

En la Ec. (4), \mathbf{V} es el vector velocidad, ∇ es el operador nabla, $\nabla\mathbf{V}$ es el tensor gradiente de velocidad y T es la transpuesta del tensor gradiente de velocidad.

4.3.5 Vector velocidad y tensores cinemáticos.

El vector velocidad en este sistema, solo tiene dos componentes en la dirección radial y axial respectivamente, por lo que puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [V_r(r,z), 0, V_z(r,z)] \tag{5}$$

El tensor gradiente de velocidad y su transpuesta toman la forma:

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{6a}$$





Y su transpuesta

$$\nabla \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6b)$$

A partir de los tensores definidos en la Ec. (6), el tensor de rapidez de deformación **D** toma la forma de:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 2 \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

El tensor de Vorticidad que relaciona los elementos que rotan en nuestro sistema, toman la forma:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 2 \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

El tensor de esfuerzos está relacionado las fuerzas cortantes y extensionales en un elemento de control, mientras que el tensor gradiente de velocidades nos da información acerca del cambio espacial de la velocidad:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (9)$$





Finalmente la ecuación constitutiva del modelo de Newton toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \\ 0 & 2 \frac{V_r}{r} & 0 \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) & 0 & 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Desacoplado las componentes de la ecuación constitutiva (10):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \\ \sigma_{rz} = \sigma_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \frac{V_r}{r} \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (11a-e)$$

Las componentes (r, z) de la ecuación de movimiento, toman la forma:

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (13)$$

4.3.6 Condiciones de frontera sin deslizamiento.

Las condiciones de frontera en el sistema son las siguientes:

$$\text{C.F.1: } V_r(r, z = h(t)) = 0 \quad (14)$$

$$\text{C.F.2: } \left. \frac{dV_r}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (15)$$





$$\text{C.F.3: } V_z(r, z = 0) = 0 \quad (16)$$

$$\text{C.F.4: } V_z(r, z = h(t)) = \dot{h}(t) \quad (17)$$

La primera condición de frontera Ec. (14) implica que la velocidad radial en el disco superior es cero, el sistema no presenta deslizamiento en la pared. La segunda condición Ec. (15), está asociada a la axi-simétrica del flujo (el perfil de velocidades describe una parábola). La tercera condición Ec. (16) expresa la velocidad axial $V_z = 0$ cuando $z = 0$, significa que el sistema no presenta deslizamiento en la pared. La cuarta condición Ec. (17) indica que la velocidad axial $V_z = \dot{h}(t)$ y $z = h(t)$ esto quiere decir, que la velocidad del fluido es la misma a la velocidad en que se comprime el sistema.

4.3.7 Condiciones de frontera con deslizamiento.

Las ecuaciones son básicamente las mismas, lo único que cambia es la condición de deslizamiento. Por lo tanto:

$$\text{C.F.1: } V_r(r, z = h(t)) = V_s \quad (18)$$

$$\text{C.F.2: } \left. \frac{dV_r}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (19)$$

$$\text{C.F.3: } V_z(r, z = 0) = 0 \quad (20)$$

$$\text{C.F.4: } V_z(r, z = h(t)) = \dot{h}(t) \quad (21)$$

Nótese que la única diferencia entre las Ecs. (14-17) y las Ecs. (18-21) es la condición de deslizamiento en $z = h(t)$. Físicamente, significa que en la interface entre el líquido y el sólido no se cumple la condición de adherencia. Para modelar esto, se supone que existe una velocidad V_s que cuantifica los efectos no deslizantes en el sistema. Cuando V_s es cero, i.e., $V_z = 0$, se recupera la solución de no deslizamiento Ec. (14).





4.3.8 Variables adimensionales.

Para resolver el conjunto de Ecuaciones diferenciales acopladas, se propone un conjunto de variables adimensionales para las ecuaciones de continuidad, movimiento y constitutiva. Las variables adimensionales nos permiten: (i) escalar el modelo matemático, (ii) acotar el espacio de soluciones y (iii) obtener grupos adimensionales que describen los mecanismos físicos que gobiernan la dinámica del sistema de nuestro sistema de flujo. Las variables escaladas son: (i) velocidad axial, (ii) velocidad radial, (iii) gradiente de presión, (iv) perfil de presión, (v) esfuerzo cortante respectivamente:

$$z^* = \frac{z}{z_c}; V_r^* = \frac{V_r}{V_{rc}}; V_z^* = \frac{V_z}{V_{zc}}; r^* = \frac{r}{r_c}; p^* = \frac{p}{p_c}; \sigma_{rz}^* = \frac{\sigma_{rz}}{\sigma_c}; ij = \{rz, \theta\theta\} \quad (22a)$$

Las variables características de nuestro sistema son las siguientes:

$$z_c = h(t); V_{r_c} = \frac{a}{h(t)} \dot{h}(t); V_{z_c} = \dot{h}(t); r_c = a; p_c = \frac{\mu a^2}{h^3(t)} \dot{h}(t); \sigma_c = \frac{\mu a}{h^2(t)} \dot{h}(t) \quad (22b)$$

Nótese que las variables escaladas para las coordenadas axial y radial están relacionadas con la longitud característica radial y axial respectivamente. Las componentes V_r y V_z del vector velocidad, fueron escaladas con la velocidad de descenso del plato superior, sin embargo, la componente axial se multiplico por un factor a/h mayor que uno, i.e. $(a/h) \gg 1$, el cual relaciona las longitudes radial y axial respectivamente. Esta relación de longitudes características más adelante utilizar la aproximación de lubricación, la cual consiste en despreciar los términos que no contribuyen a la dinámica de flujo en el sistema. Por último, la presión y el esfuerzo se hicieron adimensionales con los mecanismos viscosos multiplicados por la relación geométrica a/h respectivamente.





4.4 Ecuaciones básicas adimensionales.

Una vez que las variables adimensionales son sustituidas en las ecuaciones de continuidad, movimiento y constitutiva, se obtiene lo siguiente:

4.4.1 Ecuación de continuidad adimensional.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (23)$$

4.4.2 Ecuación de Movimiento adimensional

La componente r de la ecuación de movimiento toma la forma:

$$\text{Re} \left(\alpha \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} + \alpha \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rr}^*) - \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r^*} \right) \quad (24)$$

La componente z de la ecuación de movimiento, toma la forma:

$$\text{Re} \alpha^2 \left(\alpha \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \alpha \left(\alpha \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \sigma_{rz}^*) + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z^*} \right) \quad (25)$$

4.4.3 Ecuación constitutiva adimensional.

La Ec. constitutiva de Newton toma la forma

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^* &= 2\alpha \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= 2\alpha \frac{V_r^*}{r^*} \\ \sigma_{zz}^* &= 2\alpha \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \\ \sigma_{zr}^* &= \sigma_{rz}^* = \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \alpha^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \end{aligned} \quad (26a-e)$$





4.4.4 *Números adimensionales.*

Las Ecs. (24, 25) representan las componentes de la ecuación de movimiento adimensionales. Nótese que dependen de dos números adimensionales (α , Re).

El número de Reynolds y α se define de la siguiente manera:

$$Re = \frac{\rho \dot{h}(t) h(t)}{\mu} = \frac{\text{Fuerzas-Inerciales}}{\text{Fuerzas-Viscosas}} = \begin{cases} Re \ll 1; \text{Fuerzas-Inerciales} \ll \text{Fuerzas-Viscosas} \\ Re = 1; \text{Fuerzas-Inerciales} = \text{Fuerzas-Viscosas} \\ Re \gg 1; \text{Fuerzas-Inerciales} \gg \text{Fuerzas-Viscosas} \end{cases} \quad (27 \text{ a})$$

$$\alpha = \frac{h(t)}{a} = \frac{\text{Longitud característica axial}}{\text{Longitud característica radial}} = \begin{cases} \alpha \gg 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha \ll 1 \end{cases} \quad (27 \text{ b})$$

El primer grupo adimensional es el número de Reynolds Re es un cociente de dos mecanismos los cuales relacionan los procesos viscosos e inerciales. Cuando el número de $Re \gg 1$, los mecanismos dominantes son los inerciales, mientras que cuando $Re \ll 1$, dominan los procesos viscosos. El segundo grupo adimensional, es un cociente de dos longitudes características asociadas con el eje axial y radial respectivamente. En nuestro caso, el valor de alfa siempre es menor de uno, i.e. $\alpha = \frac{h(t)}{a} \ll 1$.

4.4.5 *Condiciones de frontera adimensional*

Las condiciones de fronteras adimensional toman la forma:

$$\text{C.F.1: } V_r^*(r^*, z^* = 1) = V_s^* \quad (28)$$

$$\text{C.F.2: } \left. \frac{dV_r^*}{dz^*} \right|_{z^*=0} = 0 \quad (29)$$

$$\text{C.F.3: } V_z^*(r^*, z^* = 0) = 0 \quad (30)$$

$$\text{C.F.4: } V_z^*(r^*, z^* = 1) = 1 \quad (31)$$





Nuestras condiciones a la frontera de 14-17, ahora se transforman en las ecuaciones 28-31, por la sustitución de variables características.

4.4.6 Fuerza adimensional.

La fuerza que experimenta el plato puede ser escrita como:

$$F_z = -\frac{\pi\mu a^2}{h^3(t)} \dot{h}(t) \int_0^1 T_{zz}^* \Big|_{z^*=1} r^* dr^* \quad (32a)$$

Es importante resaltar que la fuerza normal que experimenta el plato superior, es proporcional a la viscosidad del plato, a la longitud característica radial, velocidad de descenso del plato y a la tercera potencia de la separación del plato, multiplicado por la integral de la fuerza normal en el sistema. Por otra parte, la componente zz del tensor de esfuerzos puede ser expresada como la suma de la presión más el esfuerzo normal zz, por lo que se tiene lo siguiente:

$$F_z = -\frac{\pi\mu a^2}{h^3(t)} \dot{h}(t) \int_0^1 T_{zz}^* \Big|_{z^*=1} r^* dr^* = -\frac{\pi\mu a^2}{h^3(t)} \dot{h}(t) \int_0^1 (-p^* + \alpha\sigma_{zz}^*) r^* dr^* \quad (32b)$$

La Ec. (32b) es punto de partida en los cálculos de la fuerza normal en el plato superior.





CAPITULO V

MODELADO TEÓRICO



5.1 Aproximación de lubricación.

Aplicando la aproximación de lubricación, es decir despreciando los efectos de curvatura y aproximando el flujo radial en los platos cilíndricos a un flujo reométrico en un sistema de platos paralelos a gradiente de presión constante, en la componente radial de la ecuación de movimiento obtenemos las siguientes simplificaciones.

5.2 Análisis sin deslizamiento.

A orden cero, es decir tomando solo en consideración los términos viscosos y despreciando las contribuciones inerciales, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} \\
 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\
 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} V_z^* &= 0
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Las condiciones de fronteras adimensional sin tomar en cuenta los efectos de deslizamiento son las siguientes:

$$\text{C.F.1: } V_r^*(r^*, z^* = 1) = 0 \tag{34}$$

$$\text{C.F.2: } \left. \frac{dV_r^*}{dz^*} \right|_{z^*=0} = 0 \tag{35}$$

$$\text{C.F.3: } V_z^*(r^*, z^* = 0) = 0 \tag{36}$$

$$\text{C.F.4: } V_z^*(r^*, z^* = 1) = 1 \tag{37}$$

Aplicando la a aproximación de lubricación, se tiene lo siguiente:

$$F_z = \frac{\pi \mu a^2}{h^3(t)} \dot{h}(t) \int_0^1 T_{zz}^* \Big|_{z^*=1} r^* dr^* = \frac{\pi \mu a^2}{h^3(t)} \dot{h}(t) \int_0^1 (-p^* + \alpha \sigma_{zz}^*) r^* dr^* \tag{38}$$





5.2.1 Cálculo de la componente radial de la velocidad.

De la Ec. (24), el balance adimensional de fuerzas toma la forma:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z^*} = \frac{dp^*}{dr^*} \tag{39}$$

Integrando la expresión anterior se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz}^* = \frac{dp^*}{dr^*} z^* + C_1(r^*) \tag{40}$$

Sustituyendo la componente del esfuerzo en función de la rapidez de deformación:

$$\frac{\partial Vr^*}{\partial z^*} = \frac{dp^*}{dr^*} z^* + C_1(r^*) \tag{41}$$

Integrando por segunda vez:

$$Vr^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} z^{2*} + C_1(r^*) z^* + C_2(r^*) \tag{42}$$

Sustituyendo las condiciones de frontera, se encuentran los siguientes valores para las constantes: $\{C_1(r^*), C_2(r^*)\}$

$$\begin{aligned} C_1(r^*) &= 0 \\ C_2(r^*) &= -\frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} \end{aligned} \tag{43}$$

Finalmente se tiene el perfil de velocidades (solución particular de la ecuación diferencial adimensional):

$$\therefore \boxed{Vr^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(-\frac{dp^*}{dr^*} \right) (1-z^{*2})} \tag{44}$$





5.2.2 *Calculo de la componente axial de la velocidad.*

De la ecuación de continuidad, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} V_z^* = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) \quad (45)$$

Integrando con respecto a la variable adimensional z^* se tiene lo siguiente:

$$V_z^*(z^*, r^*) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \int_0^{z^*} V_r^*(\beta, r^*) d\beta \right) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{1}{2} \left(- \frac{dp_0^*}{dr^*} \right) \int_0^{z^*} (1 - \beta^2) d\beta \right) \quad (46)$$

Finalmente, se deduce el perfil de velocidades axial a orden cero:

$$V_z^*(z^*, r^*) = - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (z^*)^3 - z^* \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) \quad (47)$$

Aplicando la cuarta condición de frontera $V_z^*(r^*, z^*=1) = 1$

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) = 3 \quad (48)$$

Sustituyendo la Ec. (48) en el perfil de velocidades axial, se tiene el siguiente resultado:

$$\therefore \boxed{V_z^*(z^*, r^*) = \frac{3}{2} \left(z^* - \frac{1}{3} z^{*3} \right)} \quad (49)$$

5.2.3 *Calculo del gradiente de presión y del perfil de presión.*

Por lo tanto el gradiente de presión radial toma la forma:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = \frac{3}{r^*} \int_0^{r^*} \beta d\beta \quad (50)$$





Integrando el gradiente de presión con respecto a la coordenada radial r , se tiene lo siguiente:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = \frac{3}{2}r^* \tag{51}$$

Al integrar una segunda vez, el perfil de presiones toma la forma:

$$p^*(r^*) = \frac{3}{4}r^{*2} + C_4 \tag{52}$$

Al aplicar la condición de frontera, $r^*=1$, $p^* = p_a^*$, se calcula el valor de la constante

$$C_4 = p_a^* - \frac{3}{4} \tag{53}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de la constante C_4 Ec. (53) en la solución general del perfil de presiones Ec. (52), se tiene lo siguiente:

$$\therefore p(r^*) - p_a^* = -\frac{3}{4}(1 - r^{*2}) \tag{54}$$

La Ec. (54) es el perfil de presiones en el sistema. Es importante resaltar que debido a la aproximación de lubricación, se tiene un perfil parabólico axi-simétrico como en el caso de la velocidad axial respectivamente.

5.2.4 Cálculo de la fuerza normal.

La expresión adimensional de la fuerza es calculada mediante la Ec. (32.b) por lo que se tiene lo siguiente:

$$F_z = -\frac{\pi\mu a^2}{h^3(t)} h(t) \int_0^1 p^* r^* dr^* \tag{55}$$

Al integrar por partes la Ec. (55) por partes, se tiene lo siguiente:





Integrando el gradiente de presión con respecto a r , se deduce el perfil de presiones en función de la posición radial, el cual será retomado en unas líneas más adelante, por lo pronto nos enfocaremos al cálculo de la fuerza a orden cero:

$$F_z = -\frac{\pi a^4 \mu \dot{h}(t)}{h^3(t)} \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (56)$$

El valor del gradiente adimensional está dado por la Ec. (51), por lo que al sustituirlo en la Ec. (56) obtenemos:

$$F_z = -\mu \frac{\pi a^4 \dot{h}(t)}{h^3(t)} \int_0^1 \frac{3}{2} r^{*3} dr^* \quad (57)$$

Al integrar con respecto a r , se tiene lo siguiente:

$$F_z = -\frac{3}{8} \mu \frac{\pi a^4 \dot{h}(t)}{h^3(t)} \quad (58)$$

Este resultado es análogo al de Stefan deducido para un fluido que se comprime en un medio de platos concéntricos. Nótese, que la fuerza es directamente proporcional a la viscosidad del medio, velocidad promedio del fluido e inversamente proporcional a la distancia de separación del medio, i.e. $F_z = F_z(\mu, \dot{h}(t), h(t))$.

5.2.5 Cálculo de la viscosidad aparente a partir del flujo por compresión.

El modelo de Stefan Ec. (58) y el sistema de flujo por compresión, puede ser visualizado como un viscosímetro de platos concéntricos. En este caso, se deben de combinar las variables dinámicas y geométricas del medio para deducir el esfuerzo aparente y la viscosidad aparente en el sistema, por lo que de la Ec. (58) se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{ap}^* = \frac{3}{8} \mu \dot{\gamma}_{ap}^* \quad (59)$$





En la Ec. (59) se han definido las siguientes variables dinámicas aparentes:

$$\sigma_{ap}^* = \frac{Fz(t)h(t)}{\pi a^3} \quad (60)$$

Y

$$\dot{\gamma}_{ap}^* = \frac{a}{h^2(t)} \left(-\dot{h}(t) \right) \quad (61)$$

La viscosidad aparente puede ser calculada a partir de un diagrama de dispersión del esfuerzo y la rapidez de deformación aparente, mediante una regresión lineal. En este caso la viscosidad aparente coincide con la viscosidad newtoniana.

$$\therefore \boxed{\mu_{ap} = \mu} ; \quad \boxed{m = \frac{3}{8}\mu} \quad (62)$$

5.2.6 Cálculo de la altura como función del tiempo a una fuerza constante.

En este experimento, se calcula la altura del plato superior como función del tiempo., en función de las propiedades geométricas y del medio. En este punto, suponemos que la carga es constante, i.e. la fuerza $Fz = F_0$ es constante por lo que la ecuación diferencial del modelo de Stephan Ec. (58) toma la siguiente forma:

$$\frac{8}{3\mu\pi a^4} F_0 dt = -\frac{dh(t)}{h^3(t)} \quad (63)$$

Integrando con respecto al tiempo y usando la condición inicial $h(t=0) = h_0$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{h^2(t)} = \frac{1}{h_0^2} + \frac{16}{3} \frac{F_0}{\pi\mu a^4} t \quad (64)$$





Multiplicando la ecuación anterior por $h_0^2(t)$ la Ec. (64) se tiene lo siguiente:

$$\therefore h^*(t^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{3} \left(\frac{h_0}{a}\right)^2 (t^*)}} \quad (65)$$

En (65) se han definido las siguientes variables adimensionales:

$$h^* = \frac{h}{h_0}; \quad 0 \leq h^* \leq 1 \quad (66)$$

$$t^* = \frac{t}{\pi\mu/(F_0/a^2)}; \quad 0 \leq t^* \leq \infty \quad (67)$$

Las Ec. (66, 67) representan la altura y el tiempo adimensional en el sistema de flujo. La Ec. (66) nos da información acerca de cómo se comprime el palto en función de la razón de dos longitudes características: la separación inicial de los platos y la longitud característica radial del sistema. Nótese que el cociente h_0/a puede ser un alfa inicial en el sistema, i.e. α_0 .





5.3 *Análisis con deslizamiento.*

5.3.1 *Calculo de la componente radial de la velocidad.*

Básicamente, el análisis es el mismo que en el caso sin deslizamiento por lo que las ecuaciones generales continuidad, momento y constitutiva son las mismas por lo que solo se modifican las condiciones de frontera expresadas en forma adimensional por las expresiones Ecs. (28-31). De esta manera, el perfil de velocidades ya fue calculado (Ec.42) y tiene la forma analítica:

$$V_r^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} z^{2*} + C_1(r^*)z^* + C_2(r^*) \quad (68)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera, de las Ecs. (28-31), se encuentran los siguientes valores para las constantes: C_1 y C_2

$$\begin{aligned} C_1(r^*) &= 0 \\ C_2(r^*) &= -\frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} + V_s^* \end{aligned} \quad (69)$$

Sustituyendo las constantes de la Ec. (69) en el perfil general Ec. (68), se tiene lo siguiente:

$$\therefore \boxed{V_r^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(-\frac{dp^*}{dr^*} \right) (1 - z^{*2}) + V_s^*} \quad (70)$$

5.3.2 *Calculo de la componente axial de la velocidad.*

De la ecuación de continuidad, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} V_z^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) \quad (71)$$





Integrando con respecto a la variable adimensional z^* se tiene lo siguiente:

$$Vz^*(z^*, r^*) = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \int_0^{z^*} Vr^*(\beta, r^*) d\beta \right) = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \left(-\frac{1}{2} \frac{dp^*}{dr^*} \int_0^{z^*} (1-\beta^2) d\beta + Vs^* \int_0^{z^*} d\beta \right) \right) \quad (72)$$

Al sustituir la componente radial del vector velocidad con deslizamiento en la pared Ec. (70) en la ecuación de continuidad Ec. (71), se obtiene el perfil de velocidades tomando en cuenta los mecanismos deslizantes:

$$Vz^*(z^*, r^*) = \frac{1}{2} \left(z^* - \frac{1}{3} z^{*3} \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) - \frac{Vs^*}{r^*} z^* \quad (73)$$

Aplicando la condición de frontera: $Vz^*(r^*, z^* = 1) = 1$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial entre el gradiente de presión y la velocidad en la interface.

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dp^*}{dr^*} \right) = 3 \left(1 + \frac{Vs^*}{r^*} \right) \quad (74)$$

Sustituyendo la Ec. (74) en el perfil de velocidades axial con deslizamiento Ec. (73), se tiene el siguiente resultado analítico:

$$\therefore Vz^*(z^*, r^*) = \frac{3}{2} \left(z^* - \frac{1}{3} (z^*)^3 \right) \left(1 + \frac{Vs^*}{r^*} \right) - \frac{Vs^*}{r^*} z^* \quad (75)$$

Es importante resaltar que cuando $Vs^* = 0$ se obtiene el resultado analítico sin deslizamiento Ec. (49).





5.3.3 *Calculo del gradiente de presión y del perfil de presión.*

A partir del resultado anterior se puede calcular el gradiente de presión y el perfil de presión en función del radio:

$$\frac{dp^*}{dr^*} = \frac{3}{r^*} \left[1 + \frac{Vs^*}{r^*} \right] \int_0^{r^*} \beta \, d\beta = \frac{3}{2} (r^* + Vs^*) \quad (76)$$

Integrando la Ec. (76) con respecto a la coordenada radial r^* y aplicando la condición de frontera, $r^*=1, p^* = pa^*$, se obtiene el perfil de presiones:

$$\therefore p^* - pa^* = -\frac{3}{4} (1 - (r^*)^2) + \frac{3}{2} (1 + r^*) Vs^* \quad (77)$$

5.3.4 *Calculo de la fuerza normal.*

De la misma manera como en el caso sin deslizamiento, si sustituimos el gradiente de presión Ec. (76), en la fuerza normal adimensional Ec. (56), se obtiene lo siguiente para la fuerza adimensional tomando en cuenta los efectos de deslizamiento en el plato superior:

$$F_z = -\mu \frac{\pi a^4 \dot{h}(t)}{h^3(t)} \int_0^1 \frac{3}{2} (r^* + Vs^*) r^{*2} dr^* \quad (78)$$

Al integrar con respecto a la coordenada radial, se tiene lo siguiente:

$$F_z = -\mu \frac{3}{8} \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right) \frac{\pi a^4 \dot{h}(t)}{h^3(t)} \quad (79)$$

5.3.5 *Calculo de la viscosidad aparente a partir del flujo por compresión.*

Al igual que el caso si deslizamiento, se puede construir una curva del esfuerzo y rapidez de deformación aparente. La pendiente en este caso sería modificada por los efectos deslizantes de la siguiente manera:





$$\sigma_{ap}^* = \frac{Fz(t)h(t)}{\pi a^3} = \mu \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right) \frac{3 \pi a^4 \dot{h}(t)}{8 h^3(t)} = \mu_{ap} \dot{\gamma}_{ap}^* \quad (80)$$

Es claro que ahora, se ha modificado la pendiente por efectos del deslizamiento por lo que, en una curva reométrica de esfuerzo y rapidez de deformación aparente, la pendiente toma la forma:

$$\therefore \mu_{ap} = \frac{3}{8} \mu \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right) \quad (81)$$

5.3.6 *Calculo de la altura como función del tiempo a una fuerza constante.*

De la misma manera, que en el caso con deslizamiento, la Ec. diferencial que describe cómo cambia la altura en función de las propiedades del medio, geométricas y de deslizamiento está dada por:

$$\frac{1}{\frac{3}{8} \pi a^4 \mu \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right)} F_0 dt = \frac{1}{\pi a^4 \mu_{ap}} F_0 dt = - \frac{dh(t)}{h^3(t)} \quad (82)$$

Al resolver las Ec. (82) por separación de variables y suponiendo que al inicio del experimento ($t=0$), el plato superior está separado del plato inferior por una distancia h_0 , se obtiene la siguiente expresión para la separación de los platos en función del deslizamiento:

$$\frac{1}{h^2(t)} = \frac{1}{h_0^2} + \frac{2F_0}{\frac{3}{8} \pi \mu a^4 \mu \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right)} t = \frac{1}{h_0^2} + \frac{2F_0}{\pi \mu a^4 \mu_{ap}} t \quad (83)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $h_0^2(t)$, se tiene la siguiente expresión para la altura adimensional

$$\therefore h^*(t^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{3(1+8Vs^*/9)} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 t^*}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{3(1+8Vs^*/9)} \alpha_0^2 t^*}} \quad (84)$$





Finalmente, en la siguiente tabla se presenta un resumen de los resultados más importantes del presente análisis del flujo continuo por compresión en estado cuasi estacionario.

Variables Dinámicas	Sin deslizamiento $Vs^* = 0$	Con deslizamiento $Vs^* \neq 0$
Perfil de Velocidad Radial Adimensional	$Vr^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(-\frac{dp^*}{dr^*} \right) (1 - z^{*2})$	$Vr^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(-\frac{dp^*}{dr^*} \right) (1 - z^{*2}) + Vs^*$
Velocidad Axial Adimensional	$Vz^*(z^*, r^*) = \frac{3}{2} \left(z^* - \frac{1}{3} z^{*3} \right)$	$Vz^*(z^*, r^*) = \frac{3}{2} \left(z^* - \frac{1}{3} z^{*3} \right) \left(1 + \frac{Vs^*}{r^*} \right) - \frac{Vs^*}{r^*} z^*$
Gradiente de Presión Adimensional	$\frac{dp^*}{dr^*} = \frac{3}{2} r^*$	$\frac{dp^*}{dr^*} = \frac{3}{2} (r^* + Vs^*)$
Perfil de Presión Adimensional	$p^* - pa^* = -\frac{3}{4} (1 - r^{*2})$	$p^* - pa^* = -\frac{3}{4} (1 - r^{*2}) + \frac{3}{2} (1 + r^*) Vs^*$
Fuerza Normal Dimensional	$Fz = \frac{3\mu\pi a^4 \left(-\dot{h}(t) \right)}{8h^3(t)}$	$Fz = \frac{3\mu\pi a^4 \left(-\dot{h}(t) \right)}{8h^3(t)} \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right)$
Esfuerzo Aparente	$\sigma_{ap}^* = \frac{Fz(t)h(t)}{\pi a^3}$	$\sigma_{ap}^* = \frac{Fz(t)h(t)}{\pi a^3}$
Rapidez de Deformación Aparente	$\dot{\gamma}_{ap}^* = \frac{a \dot{h}(t)}{h^2(t)}$	$\dot{\gamma}_{ap}^* = \frac{a \dot{h}(t)}{h^2(t)}$
Viscosidad Aparente	$\mu_{ap} = \frac{3}{8} \mu$	$\mu_{ap} = \frac{3}{8} \mu \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right)$
Altura Adimensional	$h^*(t^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{3} \alpha_0^2 t^*}}$	$h^*(t^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{3 \left(1 + \frac{8}{9} Vs^* \right)} \alpha_0^2 t^*}}$

Tabla 3. Resumen de las principales ecuaciones con y sin efecto deslizante en la pared.





CAPITULO VI

ANÁLISIS DE RESULTADOS



6. PREDICCIONES TEÓRICAS.

En esta sección se muestran las simulaciones en Mathematica 9 del sistema de flujo transitorio por compresión. Las ecuaciones utilizadas para las simulaciones son: (44, 49, 51, 54, 62, 65) para el análisis sin deslizamiento, en el caso del análisis con deslizamiento las ecuaciones son: (70, 75, 76, 77, 81, 84). Los datos numéricos fueron generados en el programa Mathematica 9 y exportados a Excel. Por otra parte, los datos experimentales reométricos fueron obtenidos de trabajos previos concernientes al estudio del flujo transitorio por compresión (Oliver et al. 1978). En las siguientes simulaciones, se analizaron las siguientes propiedades dinámicas:

- a) Perfil radial de velocidades sin deslizamiento.
- b) Perfil radial de velocidades con deslizamiento.
- c) Perfil axial de velocidades sin deslizamiento.
- d) Perfil axial de velocidades con deslizamiento.
- e) Gradiente de presión sin deslizamiento.
- f) Gradiente de presión con deslizamiento.
- g) Presión adimensional sin deslizamiento
- h) Presión adimensional con deslizamiento.
- i) Viscosidad aparente sin deslizamiento.
- j) Viscosidad aparente con deslizamiento
- k) Altura adimensional en función del tiempo adimensional sin deslizamiento.
- l) Altura adimensional en función del tiempo adimensional con deslizamiento.





6.1 Análisis sin efectos de deslizamiento.

6.1.1 Perfil radial adimensional de velocidades.

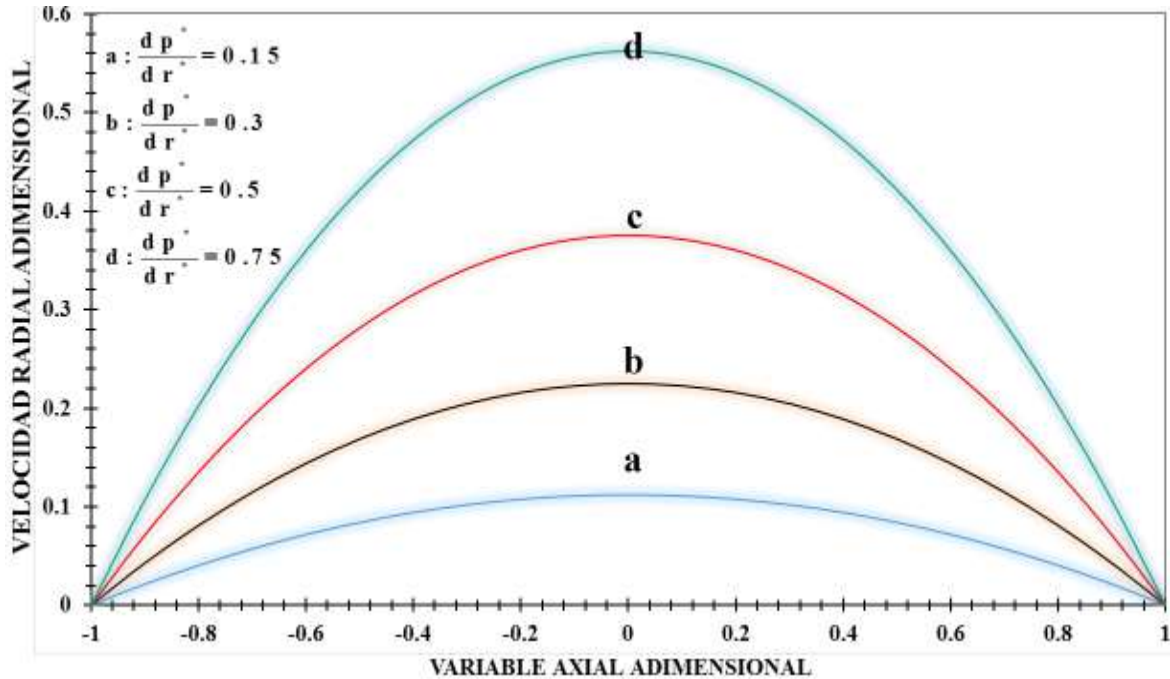


Figura 5. Velocidad radial adimensional vs variable axial adimensional, en función de la coordenada radial adimensional.

La Fig. 5 ilustra la velocidad radial adimensional vs variable axial adimensional, como función de la coordenada radial (r) adimensional.

Se observa el clásico perfil parabólico obtenido cuando se estudia un flujo a gradiente de presión constante en una rendija previamente reportado en la literatura. Nótese que al aumentar el valor numérico de la coordenada radial se incrementa el valor del máximo en el perfil de velocidades.

Físicamente, el flujo por compresión entre dos discos concéntricos se aproxima localmente al flujo en una rendija a gradiente de presión constante previamente reportado en la literatura de fenómenos de transporte.



6.1.2 Perfil axial adimensional de velocidades.

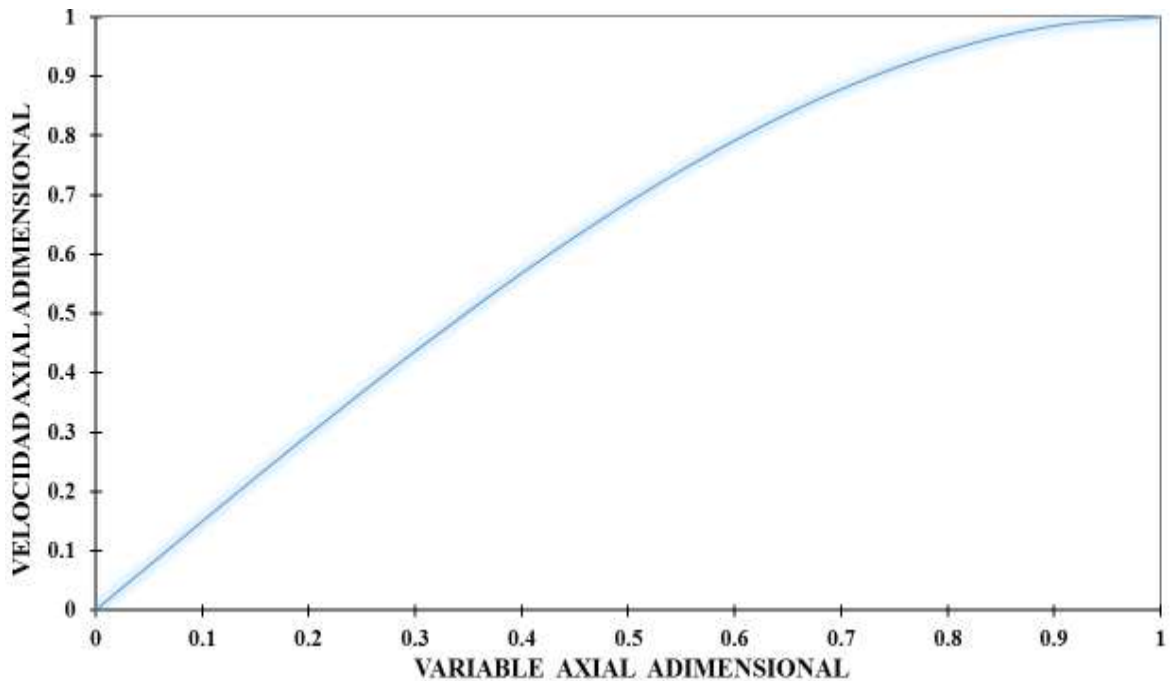


Figura 6. Velocidad axial adimensional vs variable axial adimensional, en el caso de un fluido homogéneo.

La Fig. 6 ilustra la velocidad axial adimensional vs variable axial adimensional. Se observa que en $V_{z^*}=1$ la velocidad axial es la máxima en el sistema. Nótese que al disminuir la coordenada adimensional z^* , desde $z^*=1$ hasta $z^*=0$ la velocidad decrece monótonamente hasta el plato inferior. Un hecho físico relevante se presenta cuando el plato superior está cercano al inferior en el orden de micras, en este punto, se ha demostrado que existen fenómenos de deslizamiento y por lo tanto, no se cumple la condición adherencia del sólido al fluido. Este hecho motiva futuras investigaciones en el flujo por compresión con deslizamiento utilizando dinámica molecular con el fin de dilucidar los mecanismos que dictan la dinámica de este tipo de sistemas.





6.1.3 Gradiente de presión y presión adimensional.

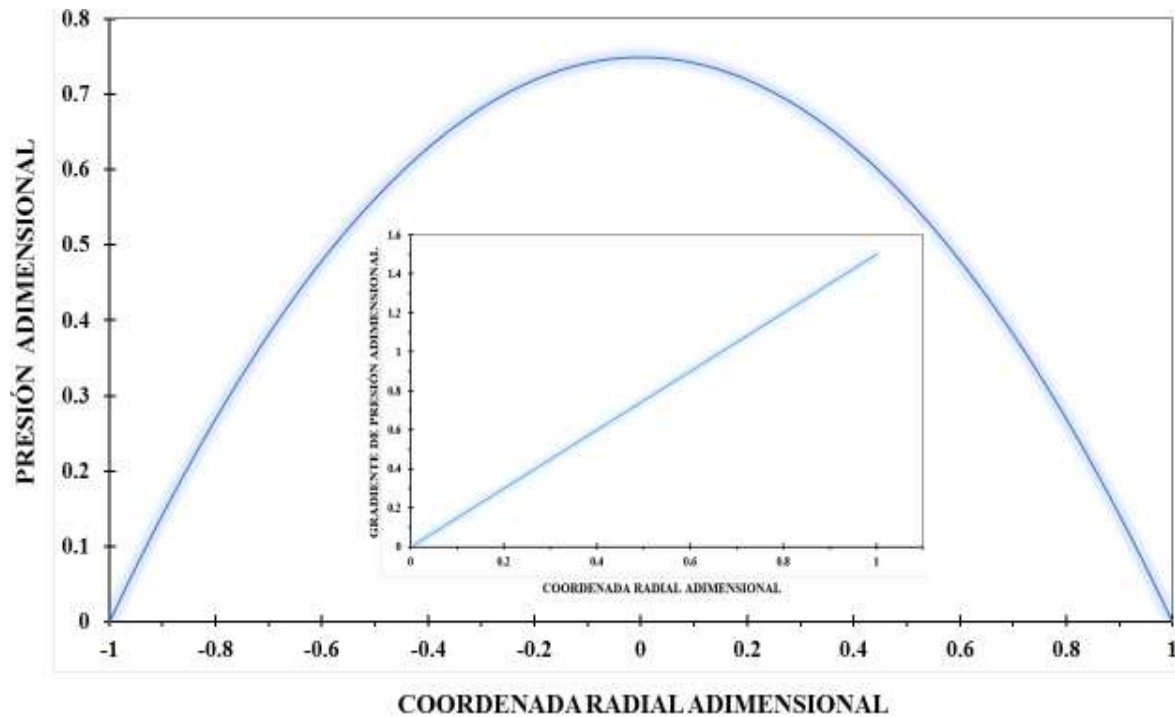


Figura 7. Presión adimensional vs coordenada radial adimensional, en el caso de un fluido homogéneo. En el recuadro se ilustra el gradiente de presión adimensional en función de la coordenada radial adimensional.

La Fig. 7 ilustra la presión adimensional vs coordenada radial adimensional en el sistema de flujo por compresión. El inserto muestra el gradiente de presión adimensional en el sistema como función de la coordenada radial.

La presión muestra un perfil de tipo parabólico como la velocidad radial, mientras que el gradiente de presión es una función lineal de la coordenada radial.

Es importante destacar que la presión se ve modificada por las propiedades del fluido y de la geometría del sistema. Por ejemplo, la presión es proporcional a la viscosidad y a la velocidad con que el plato desciende y comprime al fluido, por otra parte es inversamente proporcional a la separación del sistema. Todas estas variables juegan un papel crucial en la compresión del sistema. Nótese que bajo la aproximación de lubricación es decir, cuando se deprecian los efectos de curvatura y se aproxima el flujo por compresión a un sistema de placas paralelas.





6.1.4 Viscosidad aparente.

En esta sección, se presentan resultados experimentales con datos de algunos fluidos newtonianos con el fin, de comprobar las predicciones y bondades del modelo desarrollado en la presente investigación. Los datos experimentales utilizados fueron extraídos del trabajo de Oliver et al. 1978, los cuales son los siguientes:

Tabla 4. Datos experimentales de algunos fluidos newtonianos.

Fluido	μ (Pa·s)
Poliacrilamida(ET597)- Agua	0.00112
Glicerol- Agua	0.0099
Solución acuosa de glicerol y poliacrilamida (ET597)	0.0122

Con los datos experimentales anteriores, se obtuvo lo siguiente:

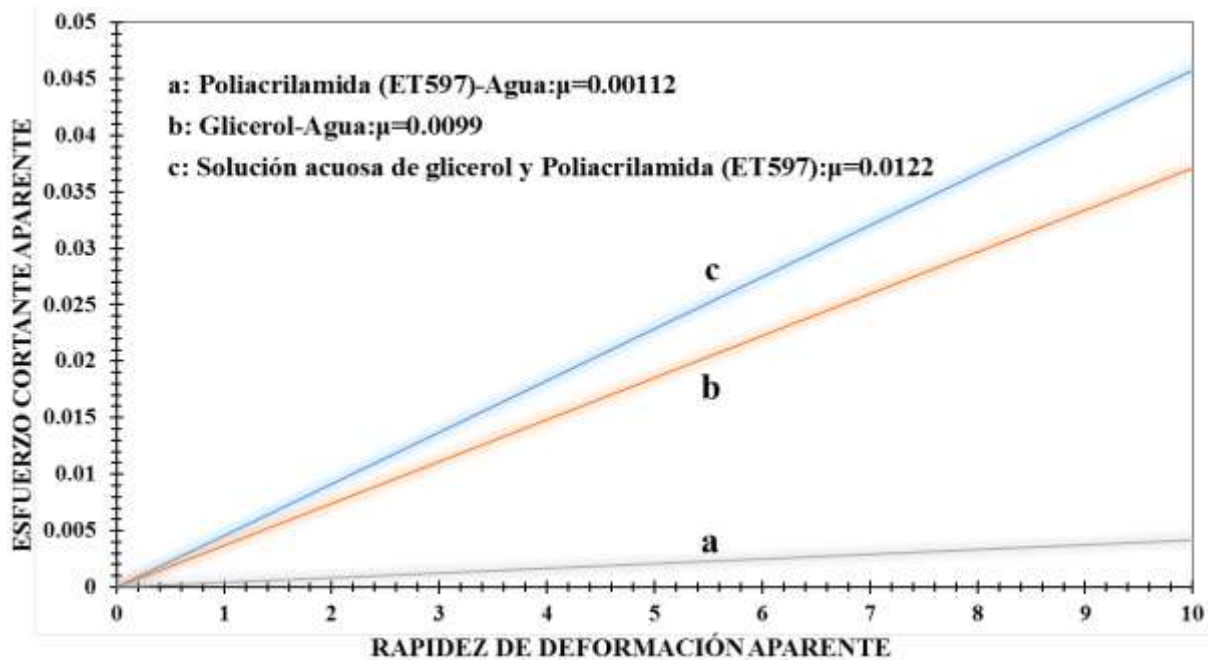


Figura 8. Esfuerzo cortante aparente vs Rapidez de deformación aparente, en el caso de varios líquidos newtonianos: (a) poliacrilamida (ET597)-Agua, (b) Glicerol-Agua y (c) Solución acuosa de Glicerol-Poliacrilamida (ET597).



Es importante resaltar que el comportamiento entre el esfuerzo aparente y la rapidez de deformación aparente es lineal, es decir, para el modelo newtoniano el más simple la pendiente de cada recta nos describe la viscosidad del medio que se está comprimiendo. Nótese que un fluido muy viscoso requiere mucha mayor fuerza para ser comprimido, lo que se observa en la figura 8 (c). Por otra parte un fluido con menor viscosidad representa una fuerza menor para ser comprimido, esto se observa en las simulaciones (a), (b), en donde el fluido para una misma rapidez de deformación necesita menos fuerza para ser comprimido. Nótese que este tipo de sistema puede servir como un viscosímetro en donde, los datos de viscosidad obtenidos representan, una viscosidad aparente y no la real que se mide en un reómetro. Finalmente, es importante resaltar que la fuerza es proporcional a la viscosidad debido a que la viscosidad es una medida de la resistencia que opone el fluido para desplazarse continua e irreversiblemente.

6.1.5 *Altura adimensional en función del tiempo adimensional.*

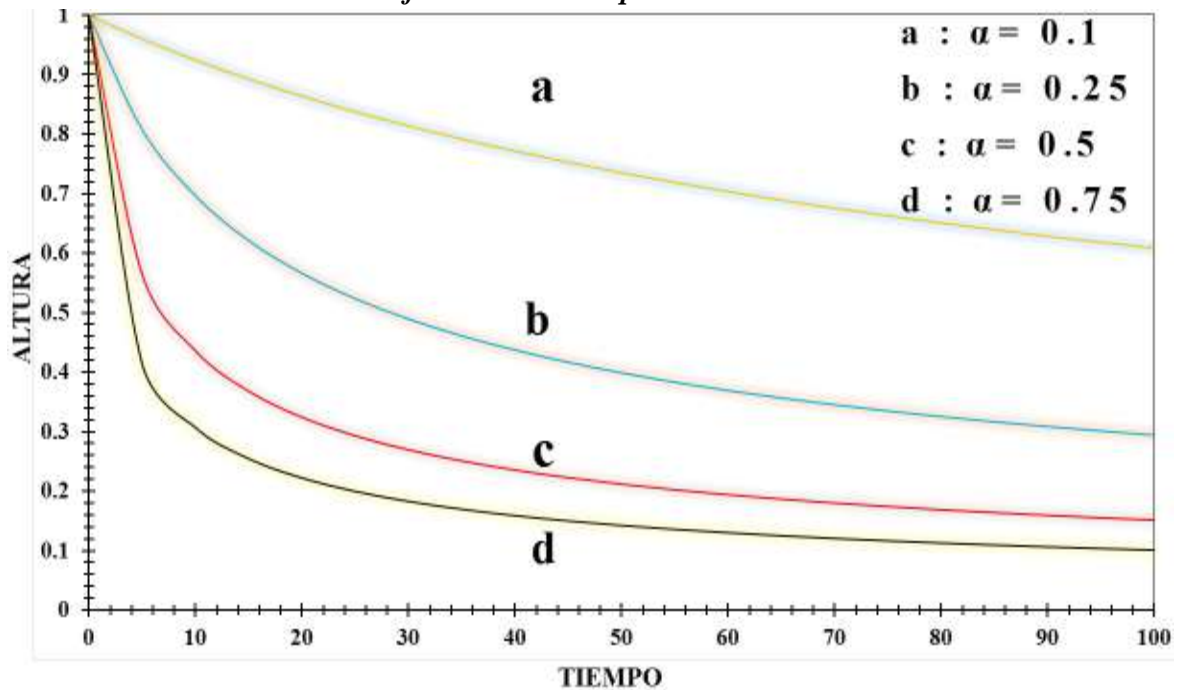


Figura 9. Altura adimensional vs tiempo adimensional, en función del número adimensional α , el cual relaciona dos longitudes características axial y radial respectivamente.



La Fig. 9 se ilustra la altura adimensional vs tiempo adimensional, para diferentes valores del parámetro α . Este parámetro es una relación entre dos longitudes características en el sistema. La longitud radial determinada por el radio del disco y la longitud axial que se determina con la separación inicial de los platos. Matemáticamente, la altura muestra un comportamiento monótono decreciente en todo el intervalo de tiempo. A tiempos cortos la pendiente (rapidez) es mayor cuando el valor numérico de α es el mayor, y conforme α decrece la rapidez (pendiente) con la que el sistema se comprime es menor. Ejemplo para un tiempo de 50 se tienen los siguientes valores de la altura dimensional:

- a) $h^* = 0.73$
- b) $h^* = 0.42$
- c) $h^* = 0.21$
- d) $h^* = 0.14$

Lo que implica que la relación geometría es muy importante en el sistema y simplifica los cálculos matemáticos y físicos debido a la aproximación de lubricación.





6.2 Análisis con efectos de deslizamiento.

6.2.1 Perfil radial adimensional de velocidades.

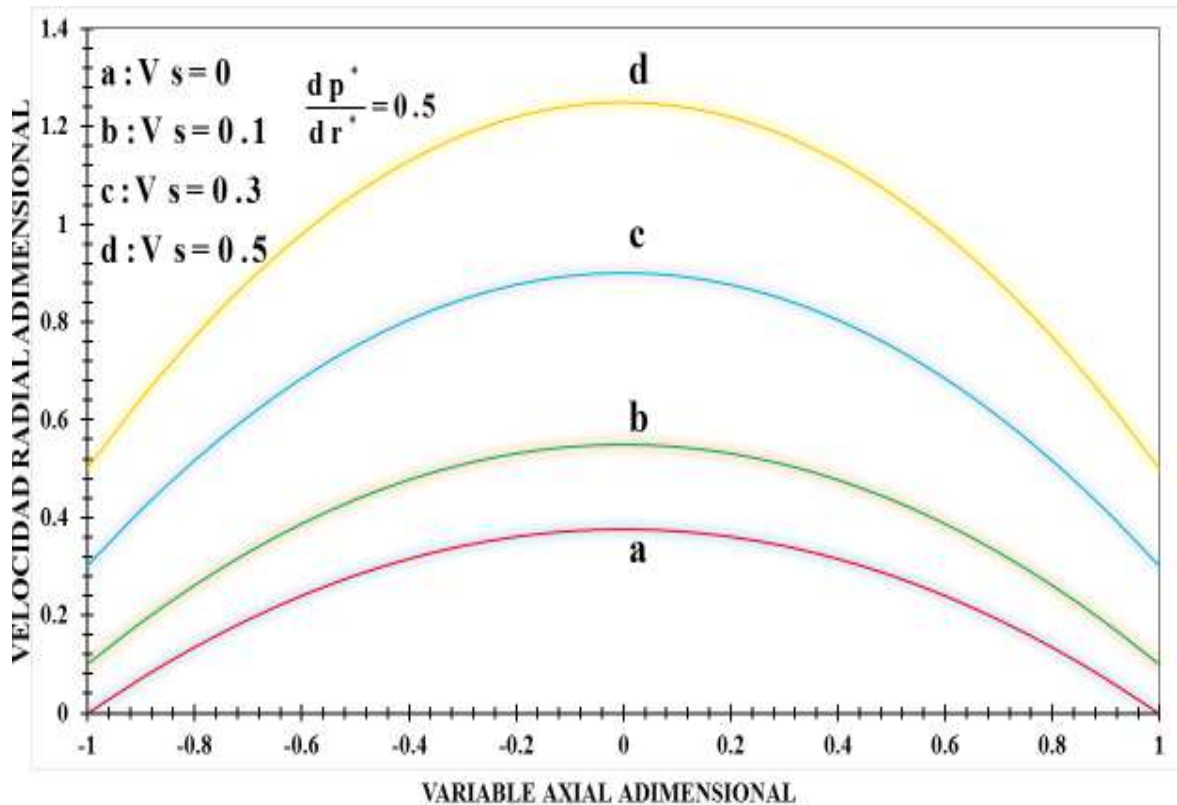


Figura 10. Velocidad radial adimensional vs variable axial adimensional, en función de la posición radial y del parámetro de deslizamiento.

Se observa el clásico perfil parabólico obtenido cuando se estudia un flujo a gradiente de presión constante en una rendija previamente reportado en la literatura. Nótese que al aumentar el valor numérico del efecto de deslizamiento, los perfiles de velocidad se desfasan hacia mayores valores del máximo en el perfil de velocidades, lo que se observa en la figura 10d. Por otra parte para un fluido con un efecto menor de deslizamiento representa un perfil de velocidad menor, esto se puede observar en la simulación a. Físicamente este sistema, se puede interpretar como una combinación entre dos tipos de flujo. Uno de ellos a gradiente de presión constante (lejos de la pared) y cerca de la pared como un flujo de Arrastre.



6.2.2 Perfil axial adimensional de velocidades.

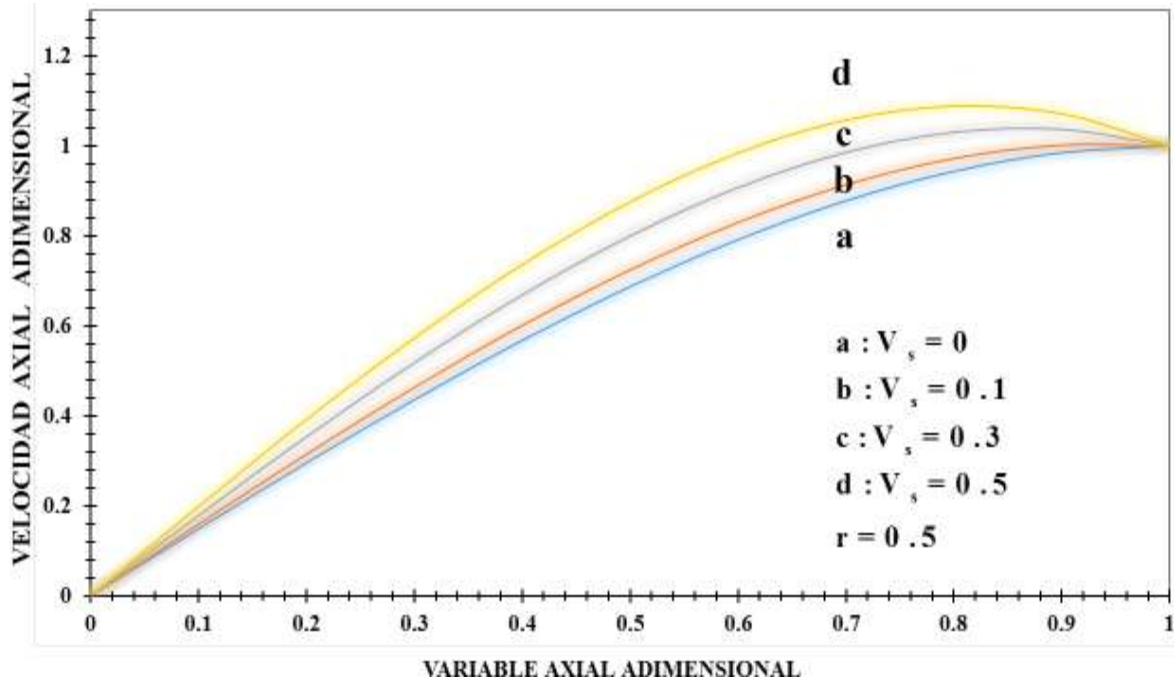


Figura 11. Velocidad axial adimensional vs variable axial adimensional como función del parámetro de deslizamiento en el pared.

La Fig. 11 ilustra la velocidad axial adimensional vs variable axial adimensional, como función del parámetro de deslizamiento. La velocidad axial adimensional muestra un comportamiento monótono creciente en el intervalo $[0,1]$. Nótese que en $z = 1$, los platos se encuentran separados completamente del líquido, y en $z = 0$, se encuentran separados en orden de micras, en donde los efectos de no deslizamiento no se cumplen. Es importante destacar que el efecto del parámetro asociado al deslizamiento, hace que la velocidad aumente y se observa un máximo local en una vecindad con centro en $z = 0.8$. Es importante resaltar que este es directamente proporcional al parámetro de deslizamiento.





6.2.3 Gradiente de presión y presión adimensional.

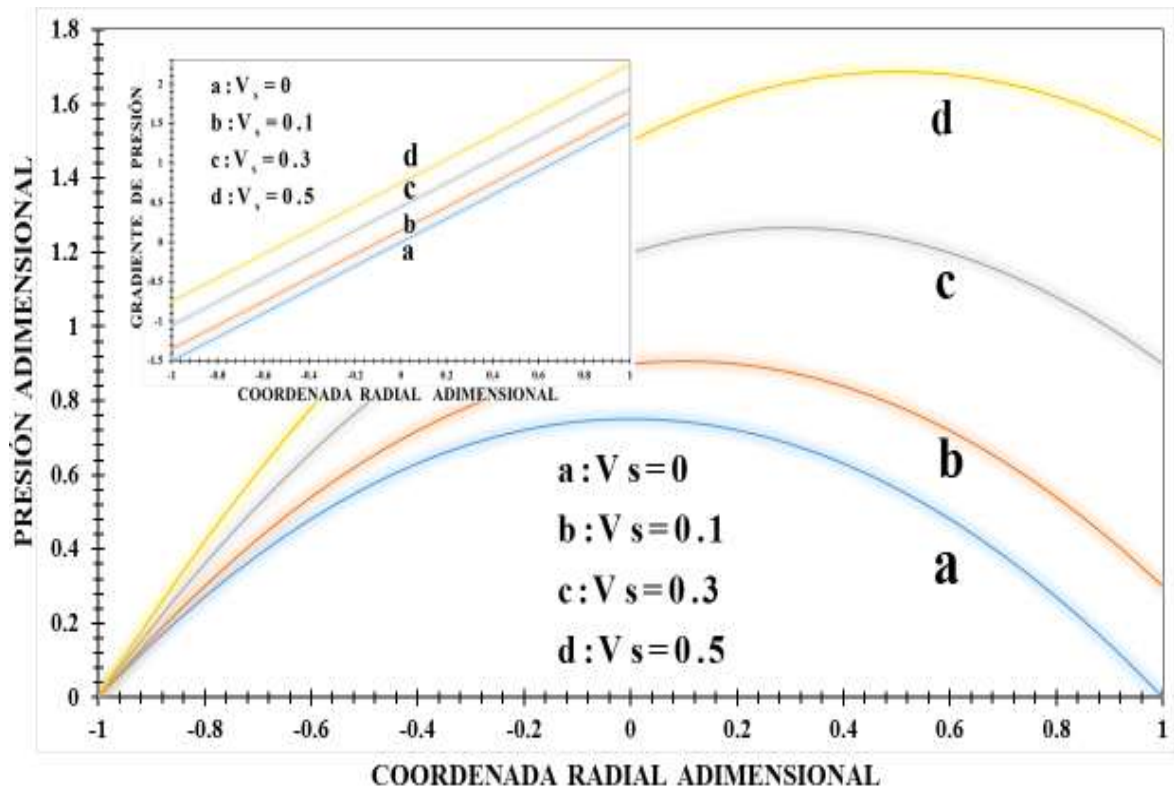


Figura 12. Presión adimensional vs coordenada radial adimensional, en el caso de un fluido homogéneo con deslizamiento en la pared. En el recuadro se ilustra el gradiente de presión adimensional en función de la coordenada radial adimensional, con el parámetro de deslizamiento.

En el caso dimensional, la presión es proporcional a la viscosidad y a la velocidad con que el plato desciende y comprime al fluido, por otra parte es inversamente proporcional a la separación del sistema. Todas estas variables juegan un papel crucial en la compresión del sistema. El inserto ilustra el gradiente de presión en función de la velocidad en la pared, el cual muestra un comportamiento lineal. Sin embargo se observa que se desfasa con el parámetro de deslizamiento. La Fig.12 (a) ilustra el perfil de presiones en el caso en donde los efectos de deslizamiento no existen. Se observa que el perfil es axi-simétrico, es decir, describe una parábola simétrica en torno al eje $r=0$. Por otra parte, es evidente que esta simetría desaparece en función de los mecanismos deslizantes en el sistema. La presión muestra un perfil de tipo parabólico, en el cual, un valor numérico mayor para el efecto deslizante se observa un máximo local, tal es el caso en la simulación (d) para un





$z=0.6$. Nótese que bajo la aproximación de lubricación es decir, cuando se deprecian los efectos de curvatura y se aproxima el flujo por compresión a un sistema de placas paralelas, la presión y el gradiente de presión pueden ser calculados analíticamente para un fluido newtoniano (viscosidad constante).

6.2.4 Viscosidad aparente.

En esta sección, se presentan resultados experimentales con datos de algunos fluidos newtonianos con el fin, de comprobar las predicciones y bondades del modelo desarrollado en la presente investigación. Los datos experimentales utilizados fueron extraídos del trabajo de Oliver et al. 1978, los cuales son los siguientes:

Tabla 4. Datos experimentales de algunos fluidos newtonianos.

Fluido	μ (Pa·s)
Poliacrilamida(ET597)- Agua	0.00112
Glicerol- Agua	0.0099
Solución acuosa de glicerol y poliacrilamida (ET597)	0.0122

Con los datos experimentales anteriores, se obtuvo lo siguiente:

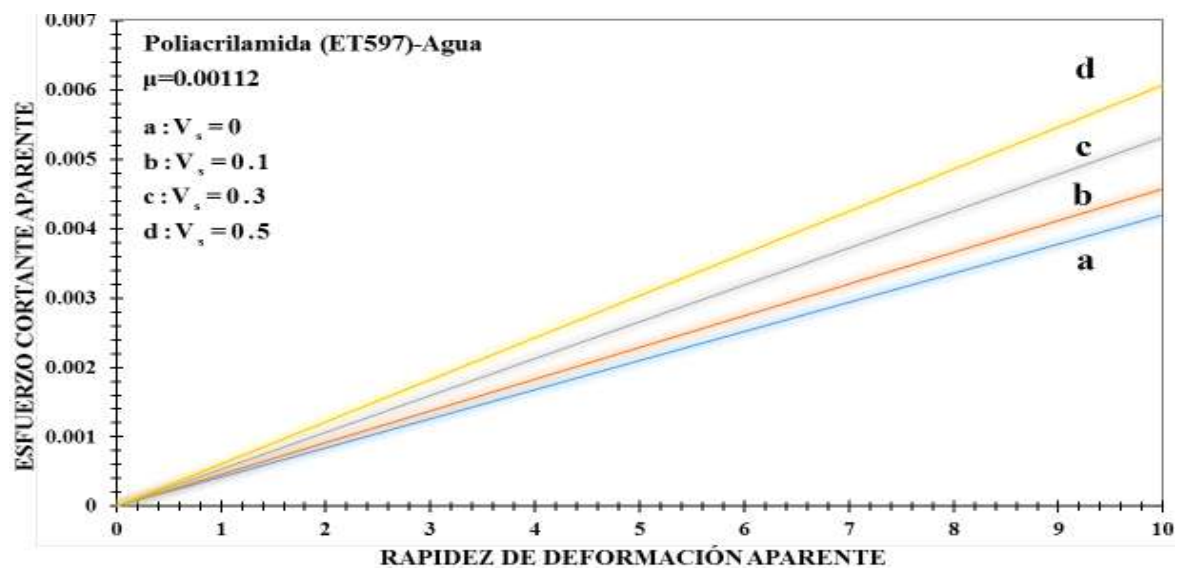


Figura 13. Esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente, en el caso de un líquido newtoniano con parámetro de deslizamiento: (i) Poliacrilamida (ET597)-Agua.

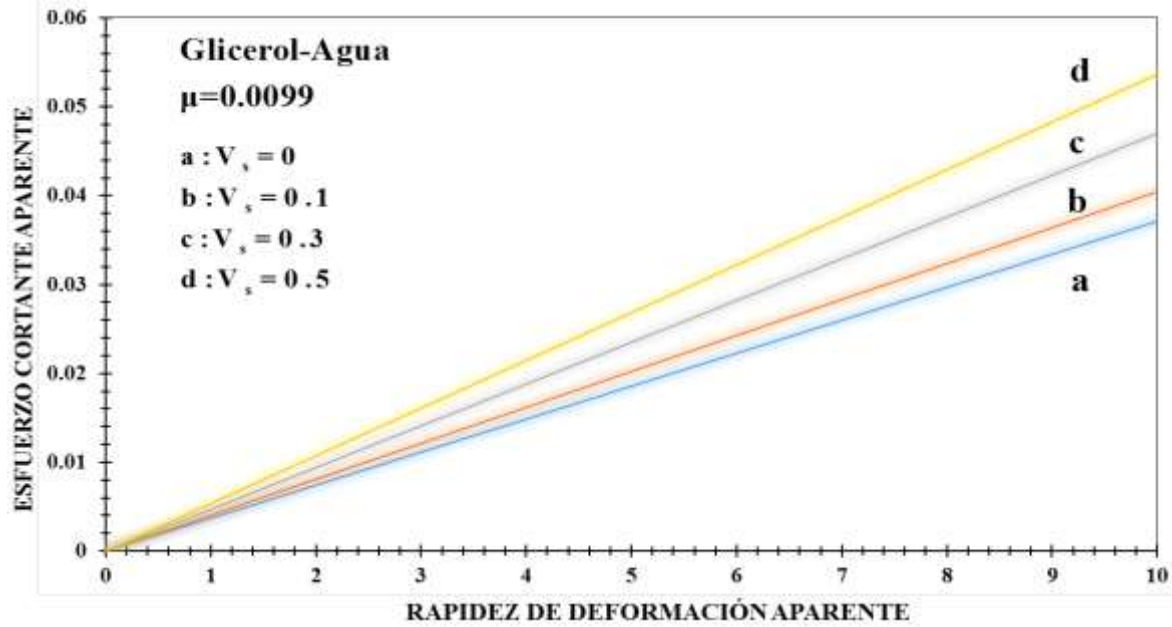


Figura 14. Esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente, en el caso de un líquido newtoniano con parámetro de deslizamiento: (ii) Glicerol-Agua.

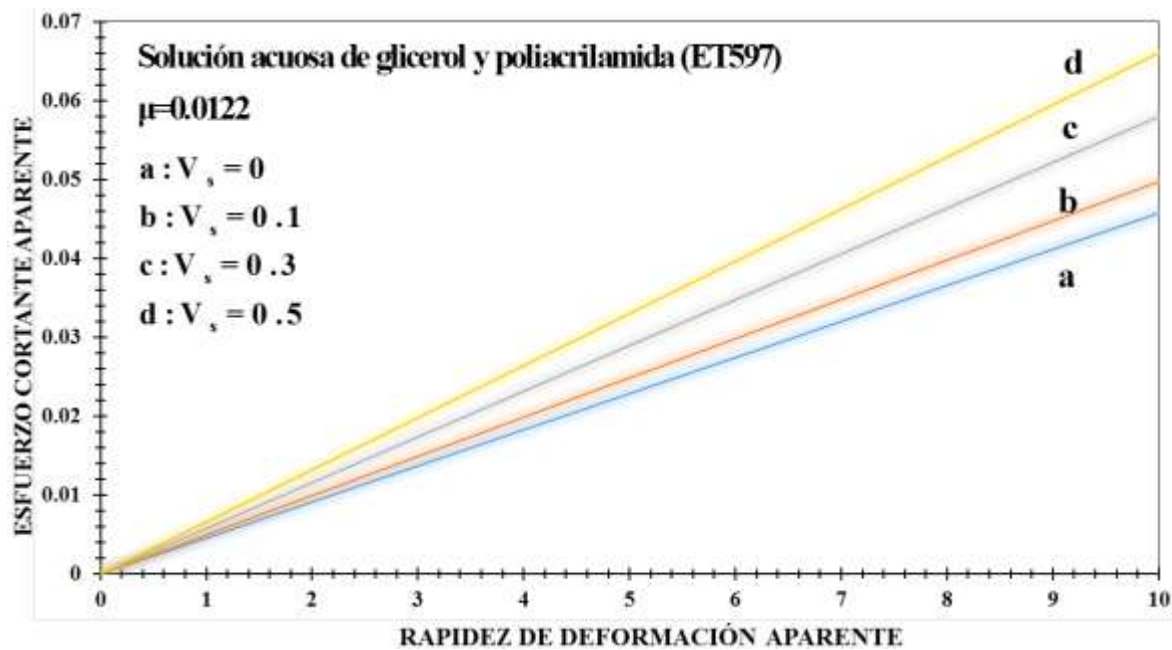


Figura 15. Esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente, en el caso de un líquido newtoniano con parámetro de deslizamiento: (iii) solución acuosa de Glicerol y Poliacrilamida (ET597).





En general para las Figs. 13-15, ilustran el comportamiento del esfuerzo cortante aparente vs rapidez de deformación aparente para diferentes líquidos de prueba del flujo por compresión con efectos de deslizamiento en la pared. Es importante resaltar, que el comportamiento entre el esfuerzo aparente y la rapidez de deformación aparente es lineal, es decir, para el modelo newtoniano. Físicamente, la pendiente está asociada con la viscosidad en el sistema, la cual es una medida de la resistencia que presente el medio a ser comprimido mediante el plato superior.

Nótese que un fluido muy viscoso y con un valor mayor de efecto de deslizamiento requiere mucha mayor fuerza para ser comprimido, lo que se observa en las Fig. 13-15 en la simulación (d). Por otra parte un fluido con menor viscosidad y menos valor de efecto de deslizamiento representa una fuerza menor para ser comprimido, esto se observa en las simulaciones a para cada una de las Figs. 13-15, en donde el fluido para una misma rapidez de deformación necesita menos fuerza para ser comprimido. Nótese que este tipo de sistema puede servir como un viscosímetro en donde, los datos de viscosidad obtenidos representan, una viscosidad aparente y no la real que se mide en un reómetro. Finalmente, es importante resaltar que la fuerza es proporcional a la viscosidad debido a que la viscosidad es una medida de la resistencia que opone el fluido para desplazarse continua e irreversiblemente.





6.2.5 *Altura adimensional en función del tiempo adimensional.*

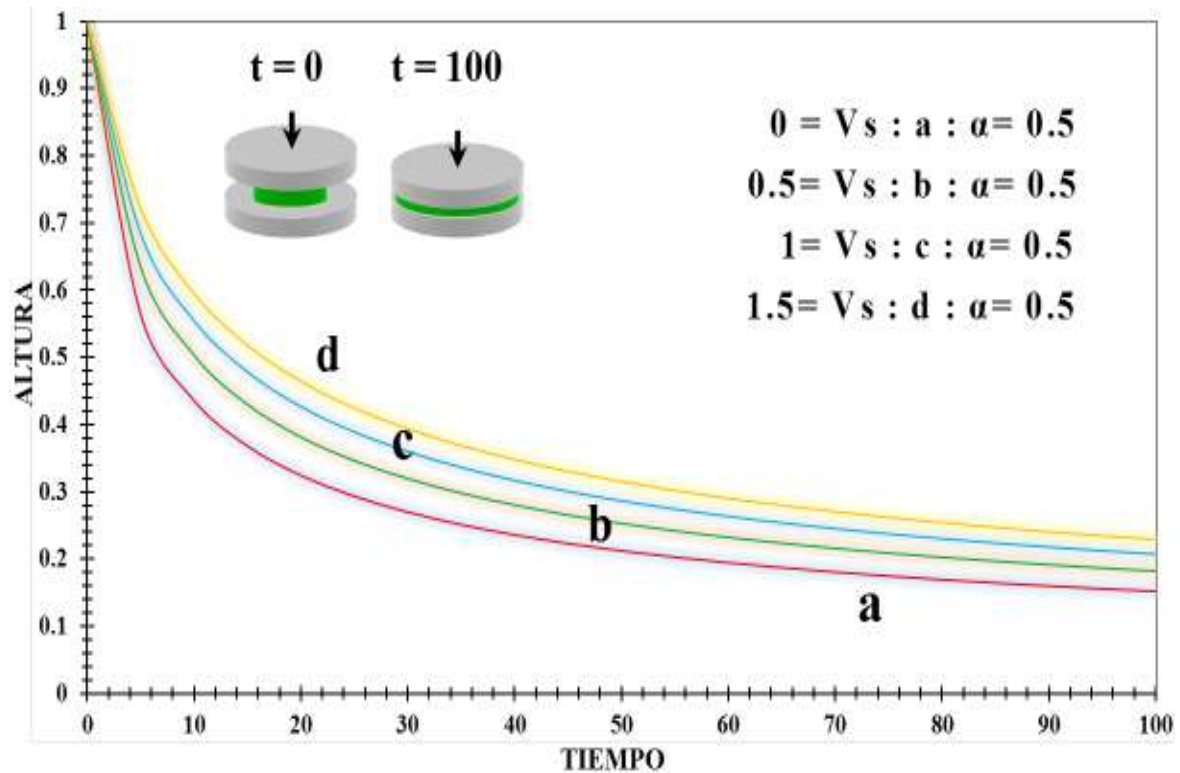


Figura 16. Altura adimensional vs tiempo adimensional, en función del número adimensional alpha y el efecto deslizante.

Es importante resaltar lo siguiente. La rapidez con la que desciende el plato se ve afectada drásticamente por el parámetro de deslizamiento, ya que las pendientes de la altura como función del tiempo cambian drásticamente con los mecanismos deslizantes. A tiempos cortos la rapidez con la que desciende el plato es mayor sin deslizamiento (Fig. 16 a) que aquel con deslizamiento (Fig. 16 b-d). Esto indica que a pesar de que en un experimento de compresión la fuerza es constante, el efecto de deslizamiento modifica la carga, i.e, si queremos que la rapidez de descenso del plato sea la misma con deslizamiento y sin deslizamiento se debe modificar la fuerza de carga. Finalmente, lo observado en las Figs. 9 y 16, permite concluir que la fuerza aplicada en un sistema con efecto deslizante sea mayor, comparado con el sistema en el cual existe la adherencia.





CONCLUSIONES



En este trabajo se analiza el flujo por compresión con deslizamiento, en un viscosímetro de platos concéntricos. Para caracterizar nuestro fluido, se utiliza el modelo newtoniano, el cual tiene una relación lineal entre el tensor de esfuerzo y el tensor rapidez de deformación. Este modelo contiene una propiedad material, conocida como viscosidad, la cual es una medida de la resistencia al flujo en un sistema. Suponiendo estado cuasi-estacionario, líquido incompresible, simetría cilíndrica, proceso isotérmico, y que el vector de velocidades depende de dos componentes, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas.

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, se propone un conjunto de variables adimensionales, con el fin de escalar las ecuaciones y que aparezcan grupos adimensionales, los cuales describen los mecanismos que dominan y juegan un papel ponderante en la descripción del flujo.

Suponiendo que los efectos inerciales son despreciables, se obtiene una expresión analítica para el perfil radial de velocidad en función de la coordenada radial. A través de la conservación de la masa y el uso de la ecuación de continuidad, se obtiene el perfil de velocidad axial. A partir de los perfiles de velocidad se obtiene la expresión para el gradiente de presión en función del deslizamiento en el sistema. Integrando y suponiendo que en $r = a$ la presión es igual a la atmosférica, se obtiene una expresión cerrada para la presión, la cual describe una parábola que se desfasa debido a la fuerza motriz asociada al gradiente de presión. Mediante un balance de fuerzas en el plato superior, se obtiene vía integración, una expresión para la fuerza en función del gradiente de presión y el área de contacto.

Al sustituir el gradiente de presión, en la fuerza e integrando se obtiene la ecuación de la fuerza de Stefan con la corrección del deslizamiento en la pared.

Suponiendo que la fuerza es constante, se obtiene una ecuación diferencial lineal para la altura del plato en función de las propiedades del medio y del tiempo.

Se presentan simulaciones para los perfiles de velocidad radial, axial y de la presión como función de las coordenadas espaciales.





- a) Por último se obtuvieron predicciones numéricas utilizando datos reométricos de fluidos newtonianos. Finalmente la rapidez con la que desciende el plato se ve afectada drásticamente por el parámetro de deslizamiento, ya que las pendientes de la altura como función del tiempo cambian drásticamente con los mecanismos deslizantes

A continuación se hace un resumen de las principales ecuaciones y características físicas de este sistema.

- b) La velocidad radial se modifica por efecto del deslizamiento, i.e. los elementos de control aumentan su velocidad, lo cual se observa en la Fig. 10.
- c) La velocidad axial presenta un máximo local con un mayor valor en el parámetro de deslizamiento.
- d) El gradiente de presión, muestra un comportamiento lineal, sin embargo se observa que se desfasa con el parámetro de deslizamiento.
- e) El perfil de presión sin deslizamiento, muestra un perfil parabólico axi-simétrico, mientras que cuando los mecanismos deslizantes aumentan, la simetría desaparece, y se observa una función con un máximo desfasado.
- f) La fuerza es directamente proporcional a la cuarta potencia del radio, a la viscosidad del medio, a la velocidad con la que desciende el plato superior, factor geométrico e inversamente proporcional al cubo de la distancia que los separa. Sin embargo con deslizamiento aparece un término adicional que está relacionado con las propiedades deslizantes en el plato superior.
- g) Suponiendo que la fuerza que se aplica al plato superior es constante, i.e. no cambia con el tiempo, se obtiene expresiones analíticas para la separación de los platos en función del tiempo y de las propiedades materiales del medio, geométricas y deslizantes.
- h) La rapidez con la que desciende el plato se ve afectada drásticamente por el parámetro de deslizamiento, ya que las pendientes de la altura como función del tiempo cambian drásticamente con los mecanismos deslizantes





- i) A pesar de que la fuerza que se aplica al plato superior es constante, lo observado en las Figs. 9 y 16, permite concluir que la fuerza aplicada en un sistema con efecto deslizando sea mayor, comparado con el sistema en el cual existe la adherencia.

- j) Una de las mayores ventajas del modelo newtoniano, es su sencillez y simplicidad debido a que la relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. Debido a las aplicaciones tecnológicas y potenciales de los sistemas de lubricación con fluidos newtonianos, así como la ausencia de un modelo simple que describa los efectos de deslizamiento en la pared en flujo por compresión en forma satisfactoria para estos fluidos, se justifica plenamente la originalidad de la investigación contenida en el presente proyecto de tesis de licenciatura.

Finalmente, este trabajo es una contribución a la constante búsqueda del entendimiento de sistemas utilizados en la industria mecánica, mejores lubricantes y caracterización de tipo geométrica. La manera de adaptar estas ecuaciones es por medio de las propiedades materiales. Por ejemplo la viscosidad puede ser modificada mediante el pH, el peso molecular, etc. En este punto se pueden hacer investigaciones con fluidos de naturaleza más compleja como aquellos que presentan propiedades viscosas y elásticas en el régimen lineal y no lineal respectivamente. En el aspecto experimental, se puede hacer la caracterización reométrica con sistemas poliméricos, sistemas micelares, dispersiones de cristales líquidos, fluidos biorreológicos, etc.





TRABAJO FUTURO



Modelos no newtonianos.

En este trabajo se modeló el flujo por compresión en un sistema de lubricación de platos concéntricos con deslizamiento en el plato superior. El fluido fue caracterizado por el modelo de Newton, en donde la relación entre el esfuerzo y la rapidez de deformación es lineal (bajas deformaciones). Las variables dinámicas del sistema fueron calculadas suponiendo la aproximación de lubricación. Expresiones analíticas para los perfiles de velocidad radial, axial, gradiente de presión, perfil de presiones y Fuerza normal fueron calculadas con y sin deslizamiento en el plato superior. Las extensiones de este trabajo son mencionadas a continuación:

a) Newtoniano generalizado.

Una extensión natural de este trabajo sería la de caracterizar el líquido complejo con un modelo no newtoniano que presente propiedades complejas como son: (i) adelgazamiento al corte, (ii) engrosamiento al corte, (iii) Tixotropía, (iv) Reopexia, entre otros. Algunas de las ecuaciones constitutivas reológicas que pueden ser empleadas son mencionadas a continuación: (i) Ostwaeld, (ii) Ellis, (iii) Bingham, (iv) Carreau, (v) Yasuda Cross, etc (Bird et al. 1987, 2002).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

En la ecuación anterior, η es la función viscosidad la cual depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación

b) Modelos viscoelásticos lineales.

Otra de las incorporaciones naturales de este trabajo, son los efectos elásticos a través de los tiempos de relajación de Maxwell, Jeffreys, Burgers y Maxwell Generalizado. Estos modelos reológicos podrían incorporar información acerca de la memoria de los materiales en el sistema de flujo. Un ejemplo de estos modelos, es la ecuación reológica constitutiva de Jeffreys, la cual contiene tres parámetros materiales: (i) un tiempo viscoelástico de Maxwell, (ii) un tiempo viscoelástico de Jeffreys y (iii) una viscosidad a bajo corte.





$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$

El modelo de Jeffreys es una combinación de los esfuerzos asociados al solvente y al sistema complejo (polímero) respectivamente (Bird et al. 1987, 2002). Otro modelo de orden superior, que nos permite caracterizar al material es el modelo de Burgers de segundo orden, el cual se describe a continuación:

$$\left(1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$$

Esta ecuación constitutiva es de segundo orden en la derivada y podría arrojar información útil a través de los parámetros materiales asociados al sistema $\{\lambda_M, \lambda_J, \beta, \eta_0\}$.

c) Modelos viscoelásticos no lineales.

Por otra parte, fenómenos más complejos están relacionados con el régimen de viscoelasticidad no lineal a través de ecuaciones constitutivas no lineales que describan la naturaleza compleja de estos sistemas. En este punto se pueden utilizar modelos como son: (i) Tanner, (ii) White-Metzner, (iii) Oldroyd-B, (iv) Giesekus entre otros (Bird et al. 1987, 2002). Las Ecuaciones constitutivas mencionadas tiene la siguiente estructura matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta(\Pi_D)}{G_0} \nabla \boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

En la ecuación no lineal, ∇ es el operador convectivo superior de Maxwell el cual, cuantifica los efectos no lineales en el sistema debido a los cambios de la viscosidad por efecto de la rapidez de deformación en el sistema de flujo.





Mecanismos inerciales y elásticos.

Por otra parte se pueden incorporar los efectos inerciales y elásticos mediante las componentes de la ecuación de movimiento y no utilizar la aproximación de lubricación:

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\text{Inertia}} V_r = - \frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}}_{\text{Elasticidad}} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}$$

En este punto se pueden incorporar los efectos inerciales por medio de la derivada material de la ecuación de momento, la cual contiene los cambios temporales, espaciales en dirección de la velocidad. Por otra parte, los efectos elásticos se obtienen a través de la primera diferencia de esfuerzos normales.

Métodos matemáticos y computacionales.

Para resolver la ecuación de continuidad, momento y constitutiva, pueden ser empleados diferentes técnicas matemáticas como son: (i) Teoría de perturbaciones, (ii) Métodos numéricos basados en diferencias finitas y elemento finito. Otro punto importante, sería de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas por medio de un paquete comercial tipo COMSOL-MULTIPHYSICS el cual se basa en métodos de elemento finito y en la construcción de mallas las cuales describen el espacio en el que se resuelven las ecuaciones diferenciales.

Sistemas y Reometría.

Otro punto importante en este trabajo es el concerniente a reometría en un viscosímetro de platos concéntricos y por medio de pruebas de compresión calcular los parámetros materiales que describen el flujo y la reología de estos materiales. Aquí, se puede caracterizar diferentes tipos fluidos complejos como son: (i) Sistemas Micelares, (ii) Polímeros, (iii) Polímeros Asociativos, (iv) fibras naturales o sintéticas, (v) Cristales Líquidos entre otros.





REFERENCIAS



- Avila, F. & Binding, D. M. (1981) Normal and reverse squeezing flows, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 11 111-126.
- Barnes, H.A., Hutton, J.F. & Walters, K. (1989) *An introduction to rheology*, Amsterdam: Elsevier.
- Bird, R.B., Armstrong, R.A. & Hassager, O. (1987) *Dynamics of Polymer Liquids. Vol.1 Fluid Mechanics*. John Willey, New York.
- Bird, R.B., Stewart, W.E. & Lighfoot, E.N. (2002) *Transport Phenomena*, 2a Edition, 1-876.
- Brindley, G., Davis, J.M. & Walters, K. (1976) Elastico-viscous squeeze films. Part I, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1 19-37.
- Chen, X.D. (1993) Slip and no-slip squeezing flow in a wedge, *Rheol. Acta* 32 477–482.
- Covey, G. H. & Stanmore, B.R. (1981) Use of the parallel-plate plastometer for the characterization of viscous fluids with a yield stress, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 8 249-260.
- Engmann, J., Servais, C. & Burbidge, A.S. (2005) Squeeze flow theory and applications to rheometry: A review, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 132 1-27.
- Grimm R.J. (1976) Squeezing flow of Newtonian liquids films. An analysis including fluid inertia, *Appl. Sci. Res.*, 32 149-166.
- Huang, W.B., Xu, Y., Lian, G.P. & Li, H.Y. (2002) Squeeze flow of a power-law fluid between two, rigid spheres with wall slip, *Appl. Math. Mech.*, 23 811-818.
- Laun, H.M., Rady, M. & Hassager, O. (1999) Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 81 1-15.
- Leider, P.J. & Bird, R.B (1974) Squeezing flow between parallel disks. I. Theoretical analysis. *I & EC Fundamentals*, 13 336-341.





- Leider, P.J. (1974) Squeezing flow between parallel disks. II. Experiments. I & EC Fundamentals, 13 342-346.
- Lian, G.P., Xu, Y., Huang, W.B. & Adams, M.J. (2001) On the squeeze flow of a power-law fluid between rigid spheres, J. Non-Newton. Fluid Mech., 100 151-164.
- McClelland, M.A. & Finlayson, B.A. (1983) Squeezing flow of elastic liquids. J. Non-Newton. Fluid Mech., 13 181-201.
- Phan-Thien, N. & Tanner, R.I. (1983) Viscoelastic squeeze-film flows-Maxwell fluids, J. Fluid Mech., 129 265-281.
- Phan-Thien, N. & Tanner, R.I. (1984) Lubrication squeeze film theory for the Oldroyd-B fluid, J. Non-Newton. Fluid Mech., 14 327-335.
- Phan-Thien, N., Tanner, R.I. & Boger, D.V. (1985) Squeeze film flow of ideal elastic liquids, J. Non-Newton. Fluid Mech., 18 227-254.
- Phan-Thien, N., Sugeng, F. & Tanner, R.I. (1987) The squeeze-film flow of viscoelastic fluid, J. Non-Newton. Fluid Mech., 24 97-119.
- Phan-Thien, N. & Walsh, W. (1984) Squeeze-film flow of an Oldroyd-B fluid, ZAMP, 35 747-759.
- Phan-Thien, N. & Low, H.T. (1988) Squeeze-film flow of a viscoelastic fluid-a lubrication model, J. Non-Newton. Fluid Mech., 28 129-148.
- Phan-Thien, N. (2000) Squeezing flow of a viscoelastic solid, J. Non-Newton. Fluid Mech., 95 343-362.
- Oliver, D.R., Ashton, R.C. & Wadelin, G.D. (1978) The load bearing capacity of a continuous-flow squeeze film of liquid, Appl. Sci. Res., 34 25-47.





- Oliver, D.R. & Shahidullah, M. (1984) Reverse squeeze film in a continuous flow system, J. Non-Newton. Fluid Mech., 15, 331-339.
- Sherwood, J.D. & Durban, D. (1996a) Squeeze flow of a power-law viscoplastic solid, J. Non-Newton. Fluid Mech., 62 35-54.
- Sherwood, J.D. & Durban, D. (1996b) Squeeze flow of a Hershel-Bulkley fluid, J. Non-Newton. Fluid Mech., 77 115-121.
- Scott. J.R. (1931) Theory and applications of the parallel-plate plastometer, Trans. Inst. Rubber Ind., 7 169-186.
- Scott. J.R. (1935) Theory and applications of the parallel-plate plastometer, Part 2 Trans. Inst. Rubber Ind., 10 481-493.
- Sthefan, J. (1874), Versuche uber die schienbare Adhesion, Sitzungsbericht der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Class, Abteilung Wie, 69 713-735.
- Tornqvist, R., Sunderland, P. & Manson, J.A.E. (2000) Non-isothermal process rheology of thermoplastic composites for compression flow moulding. Composites Part A, 31 917-927.
- Waters N.D. & Gooden, D.K. (1983) The flow of a power-law in a continuous-flow squeeze film, Appl. Sci. Res., 40 169-184.
- Waters N.D. & Gooden, D.K. (1984) The flow of an Oldroyd B liquid in a continuous-flow squeeze film, J. Non-Newton. Fluid Mech., 14, 361-376.

