



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA CONJETURA DE LOVÁSZ Y GRÁFICAS DE
CAYLEY**

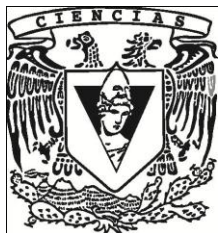
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALEJANDRO OCTAVIO SÁNCHEZ NIETO



**DRA. EUGENIA O'REILLY REGUEIRO
2015**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	Nieto
Nombre(s)	Alejandro Octavio
Teléfono	57 88 68 72
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	300343869
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dra
Nombre(s)	Eugenia
Apellido Paterno	O'Reilly
Apellido Materno	Regueiro
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dra
Nombre(s)	Hortensia
Apellido Paterno	Galeana
Apellido Materno	Sánchez
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr
Nombre(s)	Juan José
Apellido Paterno	Montellano
Apellido Materno	Ballesteros
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dra
Nombre(s)	Martha Gabriela
Apellido Paterno	Araujo
Apellido Materno	Pardo

6. Datos del sinodal 4

Grado

Nombre(s)

Apellido Paterno

Apellido Materno

6. Datos del sinodal 4

Dra

Mucuy-Kak del Carmen

Guevara

Aguirre

7. Datos del trabajo escrito

Título

Subtítulo

Número de páginas

Año

6. Datos del trabajo escrito

La Conjetura de Lovász y

Gráficas de Cayley

80 p

2015

A mis padres...

Agradecimientos.

Quiero agradecer, antes que a nadie, a mis padres Alejandro Sánchez y Maricela Nieto, y a mi hermana Flor Anel. Porque siempre me han brindado su apoyo y confianza incondicional, por lo que esta tesis es también un regalo para ellos.

Agradezco a mis amigos Nayeli, Ollintzin y Daniel con quienes compartí mi estancia en la Facultad; así como a Adolfo, Moises, Israel, Federico, Griselda y Paola que han sido mis amigos de mucho tiempo y no han dejado de apoyarme y brindarme su amistad. También quiero mencionar a la Dra. Eugenia O'Reilly, por dirigir esta tesis, y por su apoyo durante todo el proceso, y con quien siempre estaré profundamente agradecido.

Debo mencionar, que esta tesis se realizó con apoyo de una beca del proyecto PAPIIT IN 106811 de la DGAPA, UNAM, a quien agradezco el gran apoyo brindado.

Finalmente, quiero mencionar a Yenny, con quien he decidido compartir mi vida. Porque siempre me apoya, cree en mí y también espera lo mejor de mí.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares de Teoría de Gráficas.	4
1.1. Gráficas.	4
1.2. Conexidad.	9
1.3. Árboles.	10
1.4. Gráficas Hamiltonianas.	11
1.5. Coloración.	13
2. Preliminares de Teoría de Grupos.	15
2.1. Grupos y Subgrupos.	15
2.2. Grupos de Permutaciones.	18
2.3. Generadores y Grupos Cíclicos.	20
2.4. Clases Laterales.	22
2.5. Subgrupos Normales y Grupo Cociente.	23
2.6. Teoremas de Isomorfismo.	26
2.7. Conjugados.	28
2.8. Acciones de Grupo.	30
2.9. p -Grupos y Teoremas de Sylow.	32
2.10. Series Normales.	33
3. Gráficas de Cayley.	36
4. La conjetura de Lovász.	42
4.1. Trayectorias hamiltonianas en gráficas de Cayley.	44

4.2. Sobre una conjetura concerniente a las gráficas vértice-transitivas.	56
4.3. Descomposición hamiltoniana de gráficas de Cayley abelianas 6-regulares.	61
4.3.1. Últimos Resultados.	65
Apéndice A. Gráficas Cociente.	67
5. Conclusión.	69
Bibliografía.	70

Índice de figuras

1.	Puentes de Königsberg.	1
2.	Dodecaedro.	2
1.1.	Gráfica y digráfica.	5
1.2.	Isomorfismo: $\phi(x_i) = y_i$	6
1.3.	Automorfismo.	6
1.4.	Contracción.	7
1.5.	Gráfica cúbica.	8
1.6.	Particiones: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$	8
1.7.	Gráficas conexa (G_1) y disconexa (G_2).	10
1.8.	Árbol.	10
1.9.	Gráfica hamiltoniana.	11
1.10.	Cerradura de una gráfica.	12
1.11.	Gráfica de Coxeter.	13
2.1.	Permutación S_3	19
2.2.	Acción de C_4 en Ω	30
3.1.	Gráfica de Cayley $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}_8, \{2, 3\})$	37
3.2.	Gráfica de Petersen.	38
3.3.	Gráfica circulante.	39
4.1.	Cuadrado conector 1.	46
4.2.	Etiquetado de flechas.	46
4.3.	Cuadrado conector 2.	47
4.4.	Etiquetas no posibles.	48
4.5.	2-cubo, Q_2	53
4.6.	Menor de G, $H \preceq G$	56
4.7.	Menor homogéneo.	57

Introducción

La Teoría de Gráficas es una rama de las matemáticas que nació en el siglo XVIII cuando en 1736, Euler publicó la solución al ya conocido problema de los puentes de Königsberg; en éste se plantea la posibilidad de visitar las ciudades A , B , C y D (Figura 1.a) pasando por cada uno de los puentes sin repetir alguno y regresando al mismo punto de partida (recorrido denominado *paseo euleriano*). En la figura 1.b se muestra el diagrama realizado por Euler, que consiste en asociar un punto (o vértice) a cada una de las ciudades y una línea (o arista) que representa a cada puente que une a dos de ellas. En general, una gráfica es una estructura que está conformada por dos conjuntos: el de vértices y el de aristas.

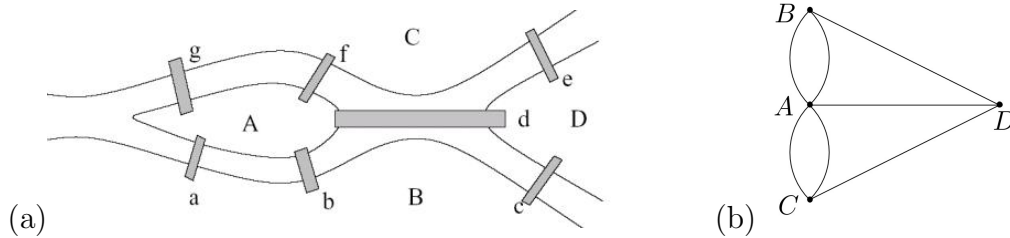


Figura 1: Puentes de Königsberg.

Una de las preguntas que ha llamado la atención de los matemáticos durante más de un siglo es ¿cuándo una gráfica es *hamiltoniana*?, es decir, ¿cuándo contiene un ciclo hamiltoniano? El nombre de estas gráficas se debe a William Hamilton quien, en 1857, con la finalidad de estudiar las simetrías del dodecaedro (Figura 1.2) propuso el juego llamado *icosian game*. Éste (el

juego), consiste en visitar 20 ciudades (o vértices) pasando por cada una(o) sin repetir alguna más de una vez y volviendo al lugar de origen; a este recorrido se le llama *ciclo hamiltoniano*. Pero si se debe pasar por cada una con las mismas condiciones, prescindiendo de regresar al punto inicial, es una *trayectoria hamiltoniana*.

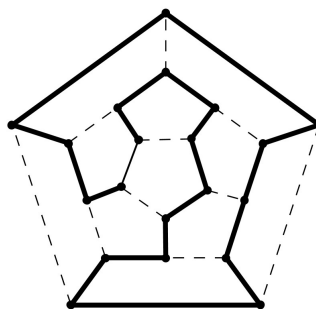


Figura 2: Dodecaedro.

Se debe resaltar la diferencia entre el recorrido euleriano y el hamiltoniano; en el primero se debe pasar por cada una de las aristas sin repetir alguna y regresando al punto de partida -sin importar la repetición de vértices-, sin embargo, para el segundo se requiere pasar por cada uno de los vértices sin incidir en alguno más de una vez, excepto si se forma un ciclo (entonces solo se repetirá el primero y el último, que son el mismo).

En 1969 Laszlo Lovász propuso su conjetura sobre gráficas hamiltonianas, la cual dice lo siguiente:

Toda gráfica conexa vértice-transitiva contiene una trayectoria hamiltoniana.

El intento por solucionar el problema tiene distintos panoramas y/o herramientas (computacionales y algebraicas, principalmente). Se sabe también que es un problema *NP-completo*, es decir, que no existe un algoritmo que en tiempo polinomial, pueda determinar la hamiltonicidad de una gráfica.

Para el desarrollo de esta tesis centraremos nuestra atención en las *gráficas de Cayley*. Comenzaremos por conceptos de gráficas, posteriormente de grupos, gráficas de Cayley, y el desarrollo de los avances propuestos por los autores elegidos. También se incluye un apéndice en relación a *gráficas Cociente*, ya que son necesarias para el último análisis.

Capítulo 1

Preliminares de Teoría de Gráficas.

1.1. Gráficas.

El siguiente trabajo de investigación gira en torno a la conjetura de Lovász, cuyo enunciado es el siguiente:

“Toda gráfica finita conexa y vértice-transitiva, contiene una trayectoria hamiltoniana”.

A continuación daremos algunas definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de esta investigación. Nuestros temas centrales son la teoría de gráficas y la teoría de grupos. Comenzaremos con la definición de qué es una gráfica y algunas definiciones que de ésta se derivan.

Definición 1.1.1. Una *gráfica* $G = (V, E)$ es una pareja ordenada en la que V es un conjunto no vacío de vértices y E es un conjunto de aristas. Donde E consta de pares no ordenados de vértices, tales que si $\{x, y\} \in E$ entonces decimos que x e y son adyacentes; se representa mediante una línea *no direccionada* de x a y (Figura 1.1.a).

Definición 1.1.2. Una *digráfica* (o gráfica dirigida) $D = (V, A)$ consta de un conjunto no vacío de vértices V y un subconjunto $A \subseteq V \times V$ de pares ordenados cuyos elementos se llaman flechas; entonces, si $(x, y) \in A$ decimos que x e y son adyacentes si la flecha tiene dirección de x hacia y . (Figura 1.1.b).

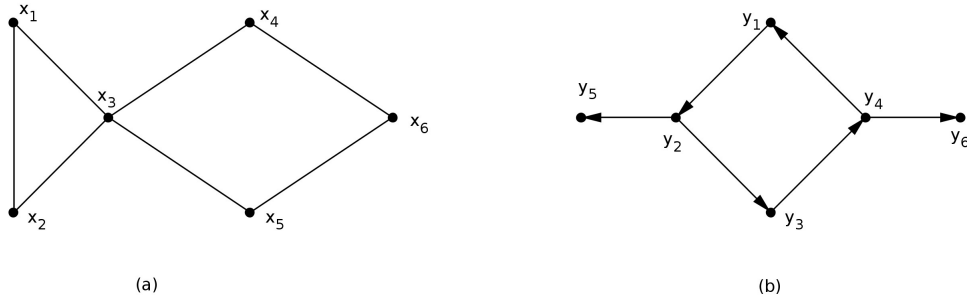


Figura 1.1: Gráfica y digráfica.

Definición 1.1.3. El *orden* de una gráfica G es n , si $|V| = n$ y el *tamaño* es m , si $|E| = m$.

Definición 1.1.4. Sean G y D una gráfica y una digráfica, respectivamente. La *vecindad* de un vértice $x \in G$ es el conjunto $N(x) = \{y \in V | \{x, y\} \in E\}$. Si $x \in D$, definimos la *invecindad* y *exvecindad* como $N^-(x) = \{y \in V | (y, x) \in A\}$ y $N^+(x) = \{y \in V | (x, y) \in A\}$, respectivamente.

Definición 1.1.5. En una gráfica G , el *grado* de un vértice $x \in V$ es la cardinalidad de $N(x)$ y se denotará como $\delta(x)$. A su vez, en una digráfica D , el *ingrado* y *exgrado* de un vértice $x \in V$ son $\delta^-(x) = |N^-(x)|$ y $\delta^+(x) = |N^+(x)|$, respectivamente.

Definición 1.1.6. Sean G y H dos gráficas. Decimos que un *homomorfismo* de gráficas de G a H es una función que va de los vértices de G a los de H , que cumple que si $\{x, y\} \in E(G)$, entonces $\{\phi(x), \phi(y)\} \in E(H)$.

Definición 1.1.7. Sean G y H dos gráficas. Decimos que un *isomorfismo de gráficas* es una biyección entre los vértices de G y H , $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, que preserva las adyacencias, es decir, que x e y son adyacentes en G si y sólo si $\phi(x)$ y $\phi(y)$ también lo son en H ; en tal caso se denota $G \cong H$ (G es isomorfa a H). La figura 1.2 es un ejemplo de un isomorfismo de G a H , $G \cong H$.

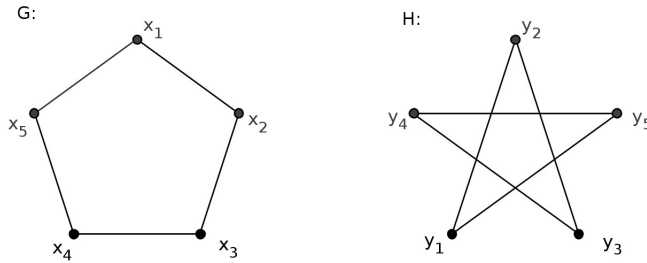


Figura 1.2: Isomorfismo: $\phi(x_i) = y_i$.

Definición 1.1.8. Si G es una gráfica, un *automorfismo* es una función de G sobre sí misma, $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$, que preserva adyacencias y no adyacencias, es decir, un isomorfismo de G en G .

Ejemplo 1.1.1. A continuación se representa un automorfismo, dado explícitamente por:

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= x_6 & \phi(x_2) &= x_5 & \phi(x_3) &= x_4 \\ \phi(x_6) &= x_1 & \phi(x_5) &= x_2 & \phi(x_4) &= x_3 \end{aligned}$$

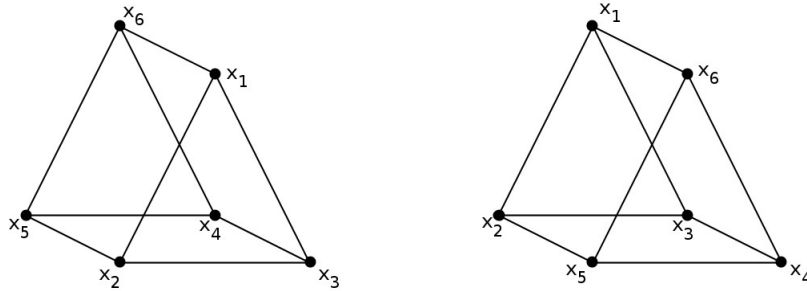


Figura 1.3: Automorfismo.

Definición 1.1.9. : La gráfica S es una *subgráfica* de una gráfica G , si se tiene que $V(S) \subset V(G)$ y además $E(S) \subset E(G)$. Una forma de obtener una subgráfica de G , es a través de la eliminación de vértices y/o aristas de G .

Definición 1.1.10. Una subgráfica S de una gráfica G , es *inducida* si siempre que $x, y \in V(S)$, entonces $\{x, y\} \in E(S)$ si y sólo si $\{x, y\} \in E(G)$. También tenemos que una subgráfica S es *generadora* si cumple que $E(S) \subset E(G)$ y $V(S) = V(G)$.

Definición 1.1.11. Sea G una gráfica y $e = \{x, y\} \in E(G)$. Entonces, denotaremos por G/e a la gráfica obtenida de la *contracción* de la arista $e = \{x, y\}$ en un nuevo vértice v_e , el cual será adyacente tanto a los vecinos x como los de y . Y obtenemos una nueva gráfica $G/e = (V', E')$ donde:

$$V' = V \setminus \{x, y\} \cup \{v_e\}$$

$$E' = \{\{v, w\} \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup$$

$$\{\{v_e, w\} \mid \{x, w\} \in E \setminus \{e\} \text{ o } \{y, w\} \in E \setminus \{e\}\}.$$

Ejemplo 1.1.2. Una gráfica y la contracción de una de sus aristas:

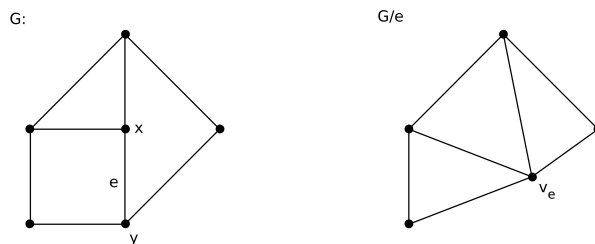


Figura 1.4: Contracción.

Definición 1.1.12. Una gráfica G es *completa*, si para cualquier par de vértices $x, y \in V$ se tiene que x es adyacente a y . Si $|V| = n$, se denota por K_n y son únicas salvo isomorfismos.

Definición 1.1.13. Una gráfica G es *regular* o *r-regular*, si $\delta(x) = r$ para cada $x \in V$. En particular, todas las gráficas completas son regulares, más aún, son $(n - 1)$ -regulares.

Definición 1.1.14. Un *k-factor* de una gráfica G es una subgráfica generadora k -regular de G .

Teorema 1.1.1. Una gráfica G es 2-factorizable si y sólo si G es $2k$ -regular para algún entero $k \geq 1$.
[7][Teorema 9.20].

A las gráficas 3-*regulares* también se les llama *cúbicas*, la figura 1.5 es un ejemplo. Además, aquellas que son 3-*coloreables* por aristas, se pueden descomponer en una partición de tres 1-*factores*.

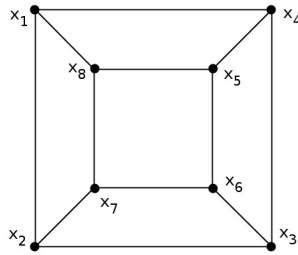


Figura 1.5: Gráfica cúbica.

Definición 1.1.15. Sea G una gráfica, definimos un *clan* como una subgráfica completa de G que es *máxima*, es decir, no está propiamente contenida en ninguna otra gráfica completa de mayor orden.

Definición 1.1.16. Un conjunto $X \subset V$ se llama *independiente* si para cada $x, y \in X$ se tiene que $\{x, y\} \notin E$.

Definición 1.1.17. Una gráfica G es *bipartita* si es posible obtener una bipartición en subconjuntos $X, Y \subset V$, tal que cada arista de G tiene un vértice en X y otro en Y .

Ejemplo 1.1.3. La siguiente gráfica es bipartita.

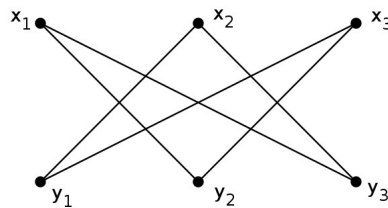


Figura 1.6: Particiones: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Esta última definición se puede extender para gráficas *n-partitas*; decimos que una gráfica G es *n-partita* si existen particiones en n conjuntos $X_1, X_2, \dots, X_n \subset V$; tales que cada arista en E tiene un vértice en X_i y otro en X_j para algunos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $i \neq j$.

Definición 1.1.18. Sea G una gráfica y $x, y \in V(G)$; un *xy-camino* es una sucesión $W = \{x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y\}$ de vértices, tal que x_i es adyacente a x_{i+1} y tiene a x como vértice inicial y a y como vértice final. La longitud de W es el número de aristas que recorre, y se denota por $\lambda(W)$.

Si W es un camino que cumple con la restricción de no repetir aristas se llama *paseo*. Una *trayectoria* (o *xy-trayectoria*) es un camino que no repite vértices que inicia en x y termina en y . La longitud de un paseo, trayectoria o camino se determina por el número de aristas que recorre.

Definición 1.1.19. Un *camino cerrado* es un camino que empieza y termina en el mismo vértice. Un *ciclo* (C_n), se define como un camino cerrado que no repite vértices excepto el primero y el último, donde n es su longitud.

1.2. Conexidad.

Definición 1.2.1. Una gráfica G se dice que es *conexa*, si para cada par de vértices $x, y \in V$, $x \neq y$, existe una *xy-trayectoria* que los une; diremos que G es *disconexa* si no es conexa.

Ejemplo 1.2.1. En la gráfica G_1 es posible trazar una trayectoria entre cualesquiera dos vértices, sin embargo, en G_2 no existe una trayectoria de y_1 a y_5 , por ejemplo. Figura 1.7.

Definición 1.2.2 (Conexidad por vértices). En una gráfica conexa G un *corte por vértices* (o simplemente *corte*) es un subconjunto X de vértices de V tal que $G \setminus X$ es desconexa; si $|X| = \kappa$, entonces X es un κ -*corte*.

Una gráfica conexa G es κ -*conexa* si con menos de κ vértices la gráfica no se desconecta.

Definición 1.2.3 (Conexidad por aristas). Análogo a la conexidad por vértices, si G es una gráfica conexa, un *corte por aristas* es un subconjunto $Y \subset E$ de aristas tal que $G \setminus Y$ es desconexa.

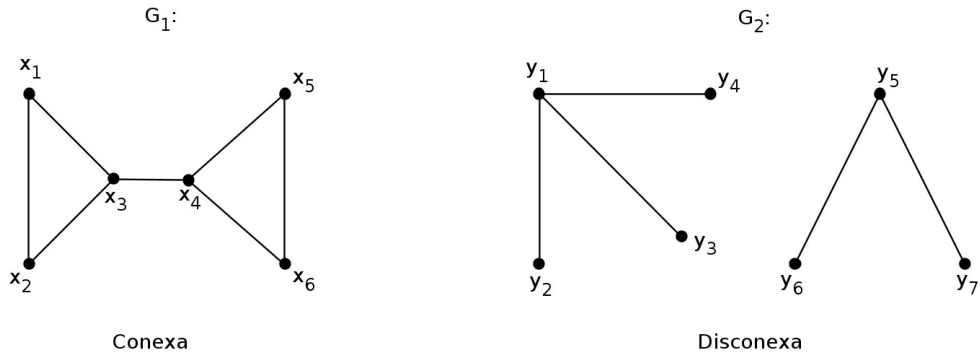


Figura 1.7: Gráficas conexa (G_1) y disconexa (G_2).

Una gráfica conexa G es λ -conexa por aristas si con menos de λ aristas la gráfica no se desconecta.

1.3. Árboles.

Definición 1.3.1. Un árbol T es una gráfica conexa que no contiene ciclos. Si T no es conexa es un bosque. Además, si T es una gráfica generadora sin ciclos, entonces es un árbol generador (o bosque generador si es disconexa).

Observación. Una gráfica G es un árbol si y sólo si toda arista de G es un puente. Y si todo arista es un puente, entonces cada vértice es de corte.

Ejemplo 1.3.1. Notemos que cada arista de la siguiente gráfica es de corte:

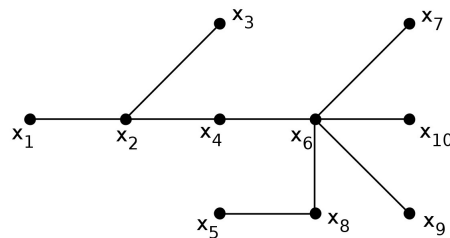


Figura 1.8: Árbol.

1.4. Gráficas Hamiltonianas.

Definición 1.4.1. Una gráfica G es *hamiltoniana* si contiene un ciclo que recorre todos sus vértices; a dicho ciclo se le llama *ciclo hamiltoniano*. Entonces, una gráfica es *hamiltoniana* si contiene un *ciclo hamiltoniano*.

Ejemplo 1.4.1. El camino $\zeta = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_1\}$ determina un ciclo hamiltoniano ya que recorre todos los vértices sin repetir alguno.

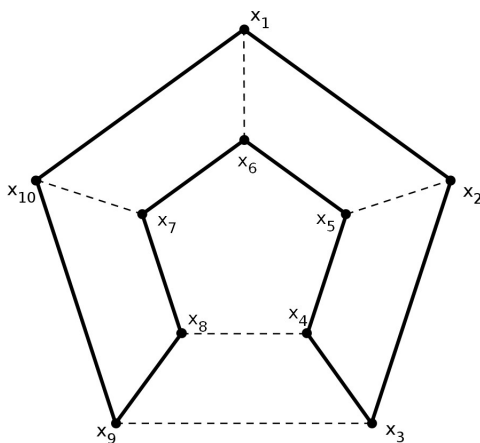


Figura 1.9: Gráfica hamiltoniana.

Adicionalmente, decimos que una gráfica G es *trazable* si contiene una trayectoria generadora, es decir, una trayectoria que pasa por cada vértice de G ; se le llama *trayectoria hamiltoniana*.

Determinar si una gráfica es hamiltoniana no es una tarea fácil. En realidad, no hay una caracterización de las gráficas hamiltonianas; tampoco un algoritmo, que en tiempo polinomial, determine cuándo una gráfica lo es o no. Existen algunos resultados en teoría de gráficas al respecto; a continuación mencionaremos algunos de ellos.¹

Teorema 1.4.1 (Dirac, 1952). *Cualquier gráfica simple G de orden $n \geq 3$, tal que $\delta(x) \geq n/2$ para cada $x \in V(G)$, es hamiltoniana.*
[35][Teorema 6.2.6.]

¹En número, existen más resultados basados en teoría de grupos: *gráficas de Cayley*.

El siguiente teorema es una generalización del anterior.

Teorema 1.4.2 (Ore, 1960). *Toda gráfica G de orden $n \geq 3$ es hamiltoniana si y sólo si para cada $x, y \in V(G)$,*

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n.$$

[35][Teorema 6.2.5.]

Otro de los resultados interesantes es el teorema de *Bondy-Chávatál*. Pero antes de enunciarlo necesitamos la siguiente:

Definición 1.4.2. Dada una gráfica G de orden n , la *cerradura* de G es una gráfica que tiene el mismo conjunto de vértices que G y se obtiene mediante la adición de aristas $\{x, y\}$ para cada par de vértices que satisfagan: $\delta(x) + \delta(y) \geq n$. Se denota $cl(G)$ (Fig. 1.10).

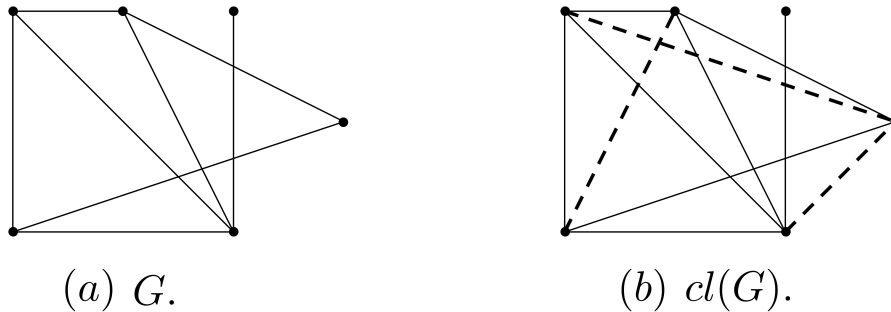


Figura 1.10: Cerradura de una gráfica.

Teorema 1.4.3 (Bondy-Chávatál). *Cualquier gráfica simple G es hamiltoniana si y sólo si su cerradura también lo es.*

[7][Teorema 4.13.]

Es verdad que no todas las gráficas son hamiltonianas. Pero existen algunas que tienen una propiedad específica muy relacionada con los ciclos hamiltonianos, veamos la siguiente:

Definición 1.4.3. Una gráfica G es *hipohamiltoniana* si G no lo es en sí misma, pero $G \setminus \{v\}$ si lo es, para cada $v \in V(G)$.

La gráfica de Petersen y la de Coxeter son hipohamiltonianas. A continuación, en la figura 1.11, se muestra una de las posibles representaciones de la gráfica de Coxeter.

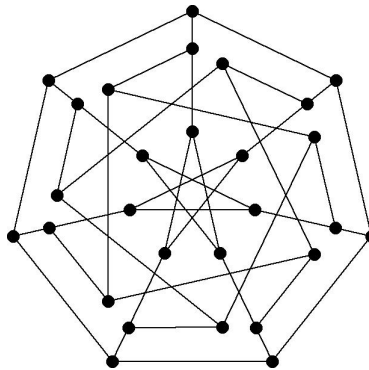


Figura 1.11: Gráfica de Coxeter.

Definición 1.4.4. Una gráfica G se dice que es *Hamiltonianamente conexa*, si para cualesquiera dos vértices existe una trayectoria hamiltoniana que los une.

Definición 1.4.5. Una gráfica G bipartita con particiones A y B , tal que $|A| = |B|$, es *Hamilton-trazable* si para cada $a \in A$ y $b \in B$ existe una trayectoria hamiltoniana de a a b .

1.5. Coloración.

La Teoría de Gráficas ha tenido un gran auge a lo largo del siglo XX, convirtiéndose en una rama de las matemáticas de gran importancia. Particularmente, la coloración en gráficas, debe su atención al *problema de los cuatro colores*, el cual aún no ha sido resuelto con una demostración en la que no se haga uso de ninguna clase de computadoras.

Definición 1.5.1 (Coloración por vértices). Una *coloración* es una asignación de colores a los vértices de una gráfica, la cual también se puede ver como una función $f : V \rightarrow Q$, donde Q es el conjunto de colores distintos. Diremos que una coloración es *propia* si cada par de vértices adyacentes tienen distinto color.

Definición 1.5.2. Diremos que una gráfica G es k -coloreable si admite una coloración propia con k colores. Es fácil ver que cualquier gráfica de orden n puede ser coloreada con n colores distintos, es decir, es n -coloreable.

El menor entero k para el cual una gráfica G es k -coloreable recibe el nombre de *número cromático* y se denota por $\chi(G) = k$. Así, si G es una gráfica y $\chi(G) = k$, entonces G es k -cromática.

Definición 1.5.3 (Coloración por aristas). En tanto que la coloración por vértices es una asignación de colores a los vértices, la coloración por aristas lo será sobre las aristas de una gráfica G . Otra forma de definirlo es mediante una función $\phi : E \rightarrow S$, donde S es el conjunto de colores distintos. Dicha coloración será *propia* si dos aristas con el mismo color no inciden en un mismo vértice. Por lo que si ϕ es una coloración propia, entonces $\phi(a) \neq \phi(a')$ siempre que a y a' sean adyacentes con $a, a' \in E$.

Al menor entero k para el cual una gráfica G es k -coloreable por aristas se le llama *número arista-cromático*, y se denota por $\chi_1(G) = k$. Por lo que, si G es una gráfica y $\chi_1(G) = k$, entonces G es k -arista-cromática.

Capítulo 2

Preliminares de Teoría de Grupos.

2.1. Grupos y Subgrupos.

Como el título indica, daremos la definición de *grupo*, adicionando definiciones y teoremas importantes que los involucran. Para ello comenzamos por la siguiente:

Definición 2.1.1. Dado un conjunto G , una *operación binaria* se define como una función $\phi : G \times G \rightarrow G$. Es decir, si $a, b \in G$ entonces $\phi(a, b)$ es un elemento de G . A $\phi(a, b)$ se le llama producto o multiplicación; otra notación para el producto es $a * b$, y por comodidad establecemos que se representará sólo como ab . Dicha operación es *asociativa* si cumple que: $(a*b)*c = a*(b*c)$.

Definición 2.1.2. Un *semigrupo* es una pareja $(G, *)$, donde G es un conjunto no vacío con una operación asociativa, $*$, definida sobre sus elementos.

Definición 2.1.3. Un *grupo* es un semigrupo G que tiene un elemento e tal que:

1. $ea = a = ae \forall a \in G$; es decir, e es el elemento neutro de G .
2. Para cada $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $ab = e = ba$; entonces b es el inverso de a^{-1} .

Adicionalmente, si se tiene que $ab = ba \forall a, b \in G$, entonces G es *abeliano*.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos $G = \mathbb{Z}$; la operación se define como $x * y = x + y$, el elemento neutro $e = 0$ y el inverso $x^{-1} = -x$. Esto es:

- a) Si $x, y \in \mathbb{Z}$, se tiene que $x + y \in \mathbb{Z}$.
- b) Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$ entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- c) Para cada $x \in \mathbb{Z}$ se cumple que $x + 0 = 0 + x = x$.
- d) Para cada $x \in \mathbb{Z}$, $\exists(-x) \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (-x) = -x + x = 0$.

Finalmente podemos concluir que $G = (\mathbb{Z}, +)$ es un grupo; además, sabemos que en \mathbb{Z} se cumple: $x + y = y + x$. Por lo tanto G es un grupo abeliano.

Ahora, como a los vértices de una gráfica se le asociarán los elementos de un grupo y las gráficas son finitas, los grupos considerados serán finitos; así, si $|G| = n$, se establece que G es de *orden* n .

Nota. Aunque en primera instancia puede haber confusión con la “ G ” para denotar a las gráficas o a los grupos, para el siguiente capítulo se hará notar la diferencia entre uno y otro.

Definición 2.1.4. Sea $S \subseteq G$ no vacío, entonces S es un *subgrupo* de G si cumple:

- a) Si $s \in S$ entonces $s^{-1} \in S$.
- b) Si $s, t \in S$ entonces $st \in S$.

y se denota $(S \leq G, S$ es subgrupo de $G)$.

Observación. Para verificar que un subconjunto S de G es subgrupo, es equivalente probar que para $a, b \in G$, se tiene que $ab^{-1} \in G$.

Nota. La idea subyacente al hecho de que S es subgrupo de G , es que S por sí mismo, también es un grupo.

Lema 2.1.1. Si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una familia de subgrupos de G , entonces $S = \bigcap_{i \in I} G_i$ es un subgrupo de G .

Demostración. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos de G . Queremos ver que $e \in S$; notemos que $e \in G_i$ para cada $i \in I$ por ser subgrupos de G , y en consecuencia $e \in S$. Falta mostrar que $ab^{-1} \in S$, lo cual es claro pues dados $a, b \in S \Rightarrow ab^{-1} \in G_i$ con $i \in I$ y tenemos que $ab^{-1} \in S$. Por lo tanto $\{G_i\}_{i \in I} = S \leq G$. \square

Ejemplo 2.1.2. Si consideramos $S = (2\mathbb{Z}, +)$, es decir, el conjunto de todos los enteros pares con la misma operación que G del ejemplo 2.1.1; es claro que $S \subset G$, incluso, cada número par tiene inverso, y por la suma de dos números pares, vuelve a ser un número par. Finalmente concluimos que $S \leq G$.

Definición 2.1.5. Sean $(G, *)$ y (H, \circ) grupos. Una función $\phi : G \rightarrow H$ es un *homomorfismo* de grupos si para cada $a, b \in G$:

$$\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b),$$

además, si ϕ es:

- Inyectiva es un *monomorfismo*.
- Suprayectiva es un *epimorfismo*.
- Si la función es inyectiva y suprayectiva, entonces es una biyección y decimos que ϕ es un *isomorfismo*.

Definición 2.1.6. Si ϕ es un isomorfismo de G en G , $\phi : G \rightarrow G$, decimos que ϕ es un *automorfismo*.

Teorema 2.1.2. *El conjunto de todos los automorfismos de G forman un grupo bajo la composición, se denota $Aut(G)$. [19][p. 60], [18][p. 73].*

De la definición 2.1.6 surgen dos conjuntos que pueden ser útiles en alguna ocasión:

- i) El *núcleo* de ϕ , se denota por $Ker(\phi) = \{a \in G | \phi(a) = e_H\}$.
- ii) La *imagen* de ϕ , se denota por $Im(\phi) = \{h \in H | \phi(a) = h, \text{ p.a. } a \in G\}$.

Observación. Por consecuencia de que ϕ es homomorfismo, se tiene que:

$$\phi(e_G) = \phi(aa^{-1}) = \phi(a)\phi(a)^{-1} = e_H;$$

es decir, la imagen del neutro en G es el neutro de H .

Ejemplo 2.1.3. Consideremos nuevamente a $G = (\mathbb{Z}, +)$ y a $H = (\mathbb{R}, \cdot)$, los reales con la multiplicación usual. Definamos

$$\begin{aligned}\phi : G &\rightarrow H \\ \phi(x) &= 2^x\end{aligned}$$

Con la función así definida, sólo resta verificar:

$$\phi(x + y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = \phi(x) \cdot \phi(y).$$

$\therefore \phi$ es un homomorfismo de G en H .

2.2. Grupos de Permutaciones.

Definición 2.2.1. Sea Ω un conjunto no vacío con n elementos. Entonces una permutación de Ω es una biyección

$$\phi : \Omega \rightarrow \Omega.$$

Al conjunto de todas las permutaciones se le denota $Sym(\Omega)$ o S_n , las cuales, con la operación composición forman un grupo.

Corolario. Dado que Ω es finito y $|\Omega| = n$, entonces $|Sym(\Omega)| = n!$
[19][Teorema 1.1]

Ejemplo 2.2.1. Veamos a Ω como un conjunto con 3 elementos; es decir, consideremos a S_3 , el cual consta de seis elementos:

$$\begin{aligned}e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

donde se tiene, por ejemplo, que $\alpha(1) = 2$, $\alpha(2) = 1$ y $\alpha(3) = 3$. Entendemos también, que la expresión $\beta\alpha$ (ó $\beta \circ \alpha$), significa primero aplicamos α y después β ; así, $\beta\alpha(1) = \beta(\alpha(1)) = \beta(2) = 3$. Dados los elementos explícitos es inmediato que $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Por lo tanto S_3 no es abeliano.

Supongamos que a los vértices del triángulo les asociamos los elementos de Ω , es decir, los numeramos y movemos según indican los elementos de S_3 ; es inmediato verificar que $\{\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha\}$ conforman las reflexiones y $\{\beta, \beta^2\}$ las rotaciones por $2\pi/3$.

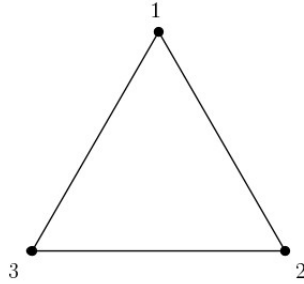


Figura 2.1: Permutación S_3 .

Definición 2.2.2. Un *ciclo* o k -*ciclo* es una permutación α del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, que permuta una sucesión de elementos i_1, i_2, \dots, i_k , $k > 1$, de forma que:

$$\alpha(i_1) = i_2, \quad \alpha(i_2) = i_3, \dots, \alpha(i_{k-1}) = i_k, \quad \alpha(i_k) = i_1.$$

Para denotar los ciclos existe una notación más compacta, escribiendo, según el ejemplo 2.2.1, a $\beta = (123)$ y $\alpha = (12)$. A los ciclos que no tienen ningún elemento en común se les llama *ciclos disjuntos*.

Definición 2.2.3. Una *transposición* es una permutación de dos elementos. En el ejemplo 2.2.1, α es una transposición.

El siguiente teorema es necesario para el desarrollo de este trabajo y es, además, un teorema clásico de la teoría de grupos, sin embargo no se incluirá la demostración debido a que su complejidad y a que no es parte central de esta tesis.

Teorema 2.2.1 (Cayley). *Todo grupo es isomorfo a un subgrupo de $Sym(\Omega)$. [19][p. 38].*

2.3. Generadores y Grupos Cíclicos.

Definición 2.3.1. Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un subconjunto no vacío; entonces el subgrupo $\langle S \rangle = \bigcap_{i \in I} G_i$ de G es mínimo, donde G_i , con $i \in I$, es un subgrupo de G que contiene a S ; se llama *el grupo generado por S* .

Lema 2.3.1. Como $\langle S \rangle \leq G$, entonces $e \in \langle S \rangle$ y S consta de todos los productos finitos $s_1 s_2 \dots s_r$, $s_i \in S$. Entonces:

$$\langle S \rangle = \{e, s_1 s_2 \dots s_r \mid s_i \in S, r \geq 1, r \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. P. D. $\langle S \rangle = \bigcap_{i \in I} G_i$.

⊂] Esta contención es inmediata, ya que $S \subset G_i$ y $G_i \leq G$ para cada $i \in I$.

⊃] Como $S \subset G_i$ y $e \in G_i \quad \forall i \in I$, tenemos que para cada $s_i \in S$ implica que $s_i^{-1} \in \bigcap_{i \in I} G_i$, entonces, cada G_i contiene todos los productos finitos de elementos de S o sus inversos, que son de la forma $s_1 s_2 \dots s_r \in S$. Así, el producto de dos de estos elementos, vuelve a ser un elemento de la misma forma. Por lo que $\bigcap_{i \in I} G_i \subset \langle S \rangle \leq G$. Y por la definición anterior, es el mínimo subgrupo con dicha propiedad.

$$\therefore \bigcap_{i \in I} G_i = \langle S \rangle. \quad \square$$

Nota. En el caso en que $\langle S \rangle = G$, entonces decimos que G es generado por S . En tal caso no existe un subgrupo propio de G que contenga a S .

Definición 2.3.2. Sean G un grupo y $a \in G$, el *subgrupo cíclico* generado por a , se denota $\langle a \rangle$, consta de todas las potencias de a .

Si $G = \langle a \rangle$, entonces G es el grupo cíclico generado por a . En consecuencia $|G| = |\langle a \rangle|$.

Si G es un grupo y $a \in G$, entonces el *orden* de a es el menor entero positivo que cumple que $a^n = e$; y cumple que si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $a^m = e$ entonces $n \mid m$. Y como consecuencia de las definiciones $n = |\langle a \rangle|$.

Ejemplo 2.3.1. Tomemos las rotaciones ρ de un cuadrado, donde ρ es una rotación de $2\pi/4 = \pi/2$, entonces $G = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$, notando que $\rho^4 = 1$. Por lo tanto G es cíclico de orden 4; se denota C_4 . En general, si G es cíclico de orden n , se denota C_n .

Definición 2.3.3. El grupo *diédrico* D_{2m} , para $m \geq 2$, es el grupo de orden $2m$, el cual está generado por dos elementos a y b tales que:

$$a^m = e, \quad b^2 = e, \quad y \quad bab^{-1} = a^{-1}.$$

Teorema 2.3.2. Si G es un grupo finito y $a, b \in G$ son dos elementos de orden 2, entonces $\langle a, b \rangle \cong D_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.
[37][Teorema 3.32].

Definición 2.3.4. Si G y H son dos grupos, entonces su *producto directo*, denotado $G \times H$, es el grupo cuyos elementos son el conjunto de todos los pares ordenados (g, h) , con $g \in G$ y $h \in H$; y con la operación definida por

$$(g, g')(h, h') = (gh, g'h').$$

Notemos que $G \times H$ es un grupo, donde el neutro es el elemento (e, e) y el inverso de (g, h) es $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.

Teorema 2.3.3. Cualquier grupo G abeliano finitamente generado es isomorfo al producto directo de grupos cíclicos

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Z}^s$$

donde cada m_i es un factor de m_{i+1} para $1 \leq i \leq k-1$, y \mathbb{Z}^s representa el producto de s copias del grupo de los enteros.

[4][Teorema 21.1].

Corolario. Cualquier grupo G finito abeliano es isomorfo al producto directo de los grupos cíclicos

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

donde $m_i | m_{i+1}$, con $0 < i < k$ y de acuerdo con el teorema anterior $s = 0$.

Nota. Para los grupos abelianos, en lugar del producto directo, se considera la *suma directa*; de este modo al escribir $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, nos estamos refiriendo a

$$\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m,$$

donde:

$$\begin{aligned}ab &= a + b \\ a^{-1} &= -a \\ e &= 0 \\ Ha &= H + a.\end{aligned}$$

2.4. Clases Laterales.

Definición 2.4.1. Sea $S \leq G$ un subgrupo no vacío de un grupo G , para $a \in G$, una *clase lateral derecha* (*izquierda*), se define como el conjunto:

$$\begin{aligned}Sa &= \{sa : s \in S\} \\ (aS &= \{as : s \in S\}).\end{aligned}$$

Teorema 2.4.1. *Dos clases laterales derechas (izquierdas) o son iguales o son disjuntas; por lo que las clases laterales derechas (izquierdas) forman una partición de G .*

Demostración. Sean Sa y Sb dos clases laterales derechas. Tomemos un elemento $x \in Sa$; entonces $x = s_1a$ para alguna $s_1 \in S$. Supongamos que x es también un elemento de Sb ; esto implica que $x = s_2b$, con $s_2 \in S$. Así tenemos que $s_1a = s_2b \Rightarrow b = s_2^{-1}s_1a$ con $s_2^{-1}s_1 \in S$, ya que $S \leq G$. Sea $s \in S$ tal que $s = s_2^{-1}s_1 \Rightarrow b = sa$. Por lo que $Sb \subseteq Ssa = Sa$. Análogamente, si $a = s_1^{-1}s_2b$, tenemos que $a = sb \Rightarrow Sa = Ssb = Sb$.

$\therefore Sa = Sb.$ □

Definición 2.4.2. Si $S \leq G$, el *índice* de S en G es la cardinalidad del conjunto de clases laterales derechas (o izquierdas) de S en G y se denota por $[G : S]$.

Ejemplo 2.4.1. Del ejemplo 2.2.1 calculemos las clases laterales derechas del subgrupo $S = \{e, \alpha\}$:

$$\begin{aligned}S &= \{e, \alpha\}, \\ S\beta &= \{\beta, \beta\alpha\}, \\ S\beta^2 &= \{\beta^2, \alpha\beta\};\end{aligned}$$

estas clases laterales son disjuntas y forman una partición.

El siguiente teorema se debe a Lagrange (1770), y establece el número de clases laterales derechas (o izquierdas).

Teorema 2.4.2. Sean G un grupo finito y S un subgrupo de G , entonces:

$$[G : S] = |G|/|S|.$$

[37][Teorema 2.11].

Ejemplo 2.4.2. Tomando en cuenta el ejemplo anterior, si a S le aplicamos el teorema de Lagrange tenemos que $|S_3| = 6$ y $|S| = 2$, y por lo tanto $[S_3 : S] = |S_3|/|S| = 6/2 = 3$, confirmando lo que ya sabíamos.

2.5. Subgrupos Normales y Grupo Cociente.

Definición 2.5.1. Si G es un grupo y $H \leq G$, decimos que H es *subgrupo normal* de G si $gHg^{-1} \subset H \forall g \in G$ y se denota por $H \triangleleft G$.

Lema 2.5.1. $H \triangleleft G$ si y sólo si $Hg = gH, \forall g \in G$.

Demostración. \Rightarrow] Supongamos que $H \triangleleft G$. Por la definición $gHg^{-1} \subset H$ para cada $g \in G$ y además $g^{-1}Hg = (g^{-1})H(g^{-1})^{-1} \subset H$. Como $g^{-1}Hg \subset H$, se tiene que $H = g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subset gHg^{-1} \subset H$. De donde $H = gHg^{-1}$, por lo tanto $Hg = gH$.

\Leftarrow] Si $Hg = gH$, entonces $H = gHg^{-1} \subset H$. Por lo tanto $H \triangleleft G$. \square

Ejemplo 2.5.1. Tomemos el ejemplo 2.2.1. Sea $N \leq G$ con $G = S_3$, donde $N = \{e, \beta, \beta^2\}$, calculemos las clases laterales izquierdas y derechas. Calculemos $N\alpha$ y αN :

$$N\alpha = \{\alpha, \beta\alpha, \alpha\beta\}, \quad \alpha N = \{\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha\}.$$

Notemos que es suficiente obtener $N\alpha$; ya que $N \cup N\alpha = G$, obteniendo así una partición de los elementos de G . Por lo tanto, si calculamos otra clase lateral no podría ser disjunta con N , contradiciendo el resultado del Teorema 2.4.1. En conclusión, $Ng = gN$ para cada $g \in G$ y $N \triangleleft G$.

Observación. En un grupo abeliano G , todos sus subgrupos son normales. Si $N \leq G$, entonces $Na = aN$ y por lo tanto $N \triangleleft G$.

De acuerdo al ejemplo anterior, junto con el ejemplo 2.4.1, podemos hacer notar que las rotaciones de un triángulo forman un subgrupo normal, mientras que el grupo de las reflexiones no.

Lema 2.5.2. *Si $\phi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo, entonces $\ker(\phi) \triangleleft G$.*

Demostración. Primero debemos verificar que en efecto $K = \ker(\phi)$ es un subgrupo de G . Debemos mostrar que es cerrado bajo el producto y que cada elemento tiene su inverso en K .

Sean $a, b \in K$, entonces $\phi(a) = e_H$ y $\phi(b) = e_H$. Como ϕ es homomorfismo, $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b) = e_H \cdot e_H = e_H$. Así, $ab \in K$. Dado que $a \in G$, sabemos que $\exists a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = e_G$. Entonces $\phi(e_G) = e_H \Leftrightarrow \phi(a \cdot a^{-1}) = e_H \Leftrightarrow \phi(a) \cdot \phi(a^{-1}) = e_H \Leftrightarrow e_H \cdot \phi(a^{-1}) = e_H \Leftrightarrow \phi(a^{-1}) = e_H \Leftrightarrow a^{-1} \in K$. Por lo tanto K es subgrupo de G .

Resta verificar que K es normal en G . Para esto demostraremos que $gKg^{-1} \subset K$ para cada $g \in G$.

Sean $k \in K$ y $g \in G$. Entonces:

$$\begin{aligned} \phi(gkg^{-1}) &= \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e_H\phi(g^{-1}) \\ &= \phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e_H. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que $gKg^{-1} \subset K$.

$\therefore \ker(\phi) \triangleleft G$

□

El siguiente teorema es de gran importancia, ya que describe propiedades estructurales de las clases laterales.

Teorema 2.5.3. *Si $N \triangleleft G$, el conjunto de las clases laterales de N en G forma un grupo en sí mismo con la operación: $Na \cdot Nb = Nab$; y se le denomina **grupo cociente** (o grupo factor) y se denota G/N . Y junto con el teorema de Lagrange tenemos que:*

$$|G/N| = [G : N].$$

Demostración. Verifiquemos que se cumplen las propiedades que caracterizan a los grupos:

i) *Cerradura.* Sean Na, Nb dos clases laterales. Notemos que $NaNb = N(aN)b$, por la asociatividad de G . Como N es normal en G , $Na = aN$ para cada $a \in G$. Entonces $NaNb = N(aN)b \Rightarrow NaNb = N(Na)b \Rightarrow NaNb = Nab$. Por lo que Nab es nuevamente una clase lateral.

ii) *Asociatividad.* Si Na, Nb, Nc son tres clases laterales, tenemos que $Na(NbNc) = Na(Nbc) = Na(bc)$ y como G es asociativo $Na(bc) = N(ab)c = (Nab)Nc = (NaNb)Nc$.

iii) *Elemento neutro.* Consideremos las clases laterales Na y Ne , con e el elemento neutro en G . Entonces $NaN e = Nae = Na = Nea = NeNa$. Por lo tanto $Ne = N$ es el elemento neutro en G/N .

iv) *Inversos.* Tomemos la clase lateral Na . Como $a \in G$, a tiene inverso a^{-1} en G . Calculemos $NaN a^{-1} = Naa^{-1} = Ne = Na^{-1}a = Na^{-1}Na$. Finalmente $Na^{-1} \in G/N$.

$\therefore G/N$, el conjunto de las clases laterales con la operación definida conforma un grupo.

□

Lema 2.5.4. Sea $N \triangleleft G$, el mapeo natural $\phi : G \rightarrow G/N$ definido por $\phi(g) = Ng$ con $g \in G$, es un homomorfismo suprayectivo con $\ker(\phi) = N$

Demostración. Antes que nada, debemos verificar que en verdad ϕ es un homomorfismo:

Sean $a, b \in G$. Entonces

$$\phi(ab) = Nab = N(Na)b = N(aN)b = NaNb = \phi(a)\phi(b)$$

y por tanto ϕ es un homomorfismo.

La suprayectividad es simple. Notemos que si $Na \in G/N$ entonces $Na = \phi(a)$. Ahora, si $k \in G$, tenemos que $\phi(k) = Nk = N$ si y sólo si $k \in N$. Por lo tanto $N = \ker(\phi)$. □

Definición 2.5.2. Un grupo G es *simple* si no tiene subgrupos normales distintos a los triviales, a saber, $\{e, G\}$.

Ejemplo 2.5.2. Sea G el grupo de los enteros con la operación suma, $(\mathbb{Z}, +)$, y sea N el conjunto de los múltiplos de n , con $n \in \mathbb{N}$. Definamos el homomorfismo natural como:

$$\phi : G \rightarrow G/N$$

tal que

$$a \mapsto \phi(a) = N + a.$$

Las clases laterales Na son los conjuntos $N + a$, ya que la operación en G es la suma. Entonces

$$G/N = \{N, N + 1, N + 2, \dots, N + (n - 1)\}.$$

Afirmamos que estas son todas las clases laterales. Sea Nc una clase lateral y supongamos que $a = nb + c$ con $c = 0, 1, \dots, n - 1$, que son todos los residuos de dividir a un entero por n . Por lo que tenemos que $N + a = N + nb + c = (N + nb) + c = N + c$, lo que implica que $N + a = N + c$. Para concretar que G/N es, en verdad, un grupo, notemos que $N + 0$ es el elemento neutro y $N + (-a)$ el inverso de $N + a$. La asociatividad y cerradura son inmediatas de la operación en G .

Definición 2.5.3. Si $a, b \in G$, el *conmutador* de a y b , denotado por $[a, b]$, es

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

El *subgrupo conmutador* de G , denotado por G' , es el subgrupo de G generado por todos los conmutadores.

Teorema 2.5.5. *El subgrupo conmutador G' es un subgrupo normal de G . Más aún, si $H \triangleleft G$, entonces G/H es abeliano si y sólo si $G' \leq H$.*
[37][Teorema 2.23].

2.6. Teoremas de Isomorfismo.

Teorema 2.6.1 (1er teorema de isomorfismo). *Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo con kernel K , entonces K es normal en G y*

$$G/K \cong \text{Im}f.$$

[37][Teorema 2.24].

Teorema 2.6.2 (2º teorema de isomorfismo). Sean N y T subgrupos de G con N normal, se tiene que $(N \cap T) \triangleleft T$ y:

$$T/(N \cap T) \cong NT/N.$$

[37][Teorema 2.26].

Teorema 2.6.3 (3er teorema de isomorfismo). Sean $K \leq H \leq G$; $K, H \triangleleft G$, entonces $H/K \triangleleft G/K$ y:

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

[37][Teorema 2.27].

Teorema 2.6.4 (Teorema de correspondencia). Sea $K \triangleleft G$ y tomemos $\nu : G \rightarrow G/K$ el mapeo natural. Entonces $S \mapsto \nu(S) = S/K$ es una biyección de la familia de todos los subgrupos S de G que contienen a K con la familia de todos los subgrupos de G/K .

Más aún, si denotamos por S^* a S/K , entonces:

i) $T \leq S$ si y sólo si $T^* \leq S^*$ y entonces $[S : T] = [S^* : T^*]$;

ii) $T \triangleleft S$ si y sólo si $T^* \triangleleft S^*$ y entonces $S/T \cong S^*/T^*$.

[37][Teorema 2.28].

Definición 2.6.1. Un subgrupo $H \leq G$ es un *subgrupo normal máximo* de G si no existe N subgrupo de G tal que $H \subsetneq N \subsetneq G$.

Teorema 2.6.5. H es un subgrupo normal máximo en un grupo G si y sólo si G/H es simple.

Demostración. \Rightarrow] Sea H un subgrupo normal máximo en G .

Debemos demostrar que G/H es simple. Sean:

$$A = \{S \leq G : H \subset S\}$$

y

$$B = \{N : N \leq G/H\}.$$

Como H es máximo en G no existe $S \leq G$ tal que $H \subsetneq S \subsetneq G$, lo que implica que $A = \{H, G\}$ y se tiene que $|A| = 2$. Por el teorema de correspondencia existe una biyección entre los elementos de A y los de B ,

entonces $|A| = |B|$ y por tanto $|B| = 2$. Sabemos que todo grupo contiene al menos dos subgrupos normales que son la identidad y el grupo mismo.

$\therefore B = \{e, G/H\}$ y se tiene que G/H es simple.

\Leftarrow] Supongamos que G/H es simple, entonces todos sus subgrupos normales son los triviales, $B = \{e, G/H\}$. Supongamos que existe $N \leq G$ tal que $H \not\leq N \not\leq G$ y tendríamos que $|A| \geq 3$; por el teorema de correspondencia existe $\nu : A \rightarrow B$ biyección, pero tenemos que $|B| = 2$, lo que contradice la doble correspondencia entre A y B .

$\therefore |A| = 2$ y H es un subgrupo normal máximo en G .

□

2.7. Conjugados.

Definición 2.7.1. Dado un grupo G y para $x, y \in G$, “ y es conjugado de x ”, si $\exists g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$.

Lema 2.7.1. La relación $x \sim y$ (ser conjugado) es de equivalencia. En consecuencia, decimos que x e y son conjugados.

Demostración. i) *Reflexiva.* Sea $x \in G$.

P. D. $x \sim x$, es decir, existe $g \in G$ de modo que $x = gxg^{-1}$. Tomemos $g = e$, entonces $x = exe^{-1}$. Por lo tanto $x \sim x$.

ii) *Simétrica.* Sean $x, y \in G$ y $x \sim y$.

P. D. $y \sim x$.

Sabemos que $y = gxg^{-1}$ p. a. $g \in G$. Multiplicando por g y g^{-1} por la derecha e izquierda, respectivamente tenemos que $x = g^{-1}yg$. Así, como $g = (g^{-1})^{-1} \Rightarrow x = (g^{-1})y(g^{-1})^{-1}$, obteniendo que $y \sim x$.

iii) *Transitiva.* Sean $x, y, z \in G$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$.

P. D. $x \sim z$.

Por hipótesis existen g_1, g_2 en G tal que $y = g_1xg_1^{-1}$ y $z = g_2yg_2^{-1}$. De aquí se obtiene que $z = g_2yg_2^{-1} \Rightarrow z = g_2(g_1xg_1^{-1})g_2^{-1} \Rightarrow z = (g_2g_1)x(g_1^{-1}g_2^{-1}) \Rightarrow z = (g_2g_1)x(g_2g_1)^{-1}$. Sea $g \in G$ con $g = g_2g_1$, entonces $z = gxg^{-1}$ y por lo tanto $x \sim z$.

$\therefore \sim$ es de equivalencia.

□

De la definición, tenemos que a la clase de $a \in G$ con dicha relación, se le llama *clase de conjugación de a* ; se denota por a^G .

Definición 2.7.2. Sea $H \leq G$ y $a \in G$, entonces el conjugado gHg^{-1} se denota por $H^g = \{ghg^{-1} : h \in H\}$.

Observación. Si G es un grupo abeliano, entonces $gxg^{-1} = x$ para cada $g \in G$. Por lo tanto x es su propio conjugado, es único y las clases conjugadas son los unitarios $\{x\}$, con $x \in G$.

Ejemplo 2.7.1. Supongamos que $H \triangleleft G$; entonces $Hg = gH$ y en consecuencia $H = gHg^{-1}$ y H es su propio conjugado. Por lo tanto existe un isomorfismo $\phi_g : H \rightarrow H$, que podemos llamar *conjugar por g* , $\phi(h) = ghg^{-1}$.

Vamos a definir tres subgrupos de un grupo G que son de mucha importancia:

1) El *centro* de G , se denota por:

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}.$$

2) El *centralizador* de $a \in G$, se denota por:

$$C_G(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}.$$

3) Si $H \leq G$, el *normalizador* de H en G es:

$$N_G(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\}.$$

Teorema 2.7.2. La cardinalidad del conjunto de conjugados de un elemento a en G es igual al índice de su centralizador:

$$|a^G| = [G : C_G(a)],$$

y es un divisor de $|G|$ cuando G es finito.

[37][Teorema 3.2].

Teorema 2.7.3. Si $H \leq G$, la cardinalidad del conjunto de clases de conjugación de H en G es igual al índice de su normalizador, $[G : N_G(H)]$, y divide a $|G|$ cuando G es finito.

[37][Teorema 3.3].

2.8. Acciones de Grupo.

Definición 2.8.1. Sea G un grupo y Ω un subconjunto no vacío, entonces G actúa en Ω si existe un homomorfismo

$$\phi : G \times \Omega \rightarrow \Omega$$

denotado como $\phi(g, \omega) = \omega^g$, tal que:

i) $\omega^e = \omega$ para cada $\omega \in \Omega$.

ii) $(\omega^h)^g = (\omega)^{hg}$ para cualesquiera $g, h \in G$, y $\omega \in \Omega$.

Y diremos que ϕ es una acción de G en Ω o que Ω es un G -conjunto.

Si $|\Omega| = n$, diremos que el *grado de la acción* es n . El *kernel de la acción* es $\ker(\phi)$ y la acción es *fiel* si $\ker(\phi) = e$.

Ejemplo 2.8.1. Sea $C_4 \leq S_4$ y $C_4 = \langle (1234) \rangle$, con $g = (1234)$, actuando sobre el conjunto de vértices $\Omega = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de un cuadrado como:

$$\phi : C_4 \times \Omega \rightarrow \Omega$$

$$\phi(g, v_i) = (v_i)^g = v_{i+1} \pmod{4}.$$

Con la acción así definida, vemos que los elementos de C_4 actúan como rotaciones sobre el cuadrado.

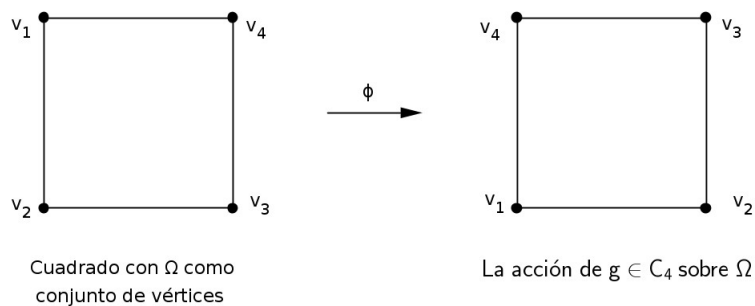


Figura 2.2: Acción de C_4 en Ω .

Definición 2.8.2. Sea G un grupo, Ω un G -conjunto y $x \in \Omega$, la *órbita* de x se denota:

$$x^G := \{x^g : g \in G\}.$$

Veamos ahora los elementos de G que fijan a un elemento x de Ω ; este conjunto se llama *estabilizador de $x \in \Omega$* , denotado:

$$G_x := \{g \in G : x^g = x\}.$$

El siguiente teorema nos da propiedades importantes sobre la relación entre órbitas y estabilizadores.

Teorema 2.8.1. *Supongamos que G es un grupo que actúa en un conjunto Ω tal que $x, y \in \Omega$ y que $g, h \in G$. Entonces:*

- i) Dos órbitas x^G e y^G o son iguales (como conjuntos) o disjuntas, por lo que el conjunto de todas las órbitas forman una partición de Ω .*
- ii) El estabilizador G_x es un subgrupo de G y $G_y = gG_xg^{-1}$ siempre que $y = x^g$. Más aún, $x^g = x^h \iff G_xg = G_xh$.*
- iii) (La propiedad órbita-estabilizador) $|x^G| = [G : G_x]$ para cada $x \in \Omega$. En particular, si G es finito, entonces $|x^G||G_x| = |G|$.*

[13][Teorema 1.4A].

Definición 2.8.3. Un grupo G actuando en un conjunto Ω se dice que es *transitivo en Ω* si éste tiene una sola órbita, es decir, que para cada $x, y \in \Omega$ existe $g \in G$ tal que $y = x^g$.

Definición 2.8.4. La acción de un grupo G sobre un conjunto Ω es *semi-regular*, si ningún elemento distinto de la identidad fija algún elemento de Ω . También, la acción será *regular* si es transitiva y semi-regular, es decir, si $G_x = e$ para cada $x \in \Omega$.

Corolario. *Supongamos que G es transitivo en su acción sobre el conjunto Ω . Entonces:*

- i) El conjunto de estabilizadores $\{G_x : x \in \Omega\}$ forma una sola clase conjugada de subgrupos de G .*
- ii) El índice $[G : G_x] = |\Omega|$ para cada $x \in \Omega$.*
- iii) Si G es finito, entonces la acción de G en Ω es regular $\iff |G| = |\Omega|$.*

[13][Corolario 1.4A].

2.9. p -Grupos y Teoremas de Sylow.

Como dijimos anteriormente, las gráficas a tratar son finitas por tanto los grupos asociados a ellas también lo son. Estudiar los subgrupos normales nos da información acerca de los grupos que los contienen; esto llevó también al estudio de los grupos simples. Para ello, los teoremas de Sylow son de absoluta importancia. Comencemos por la siguiente definición.

Definición 2.9.1. Si G es un grupo y p es un número primo, entonces G es un p -grupo si cada elemento de G tiene orden una potencia de p .

Teorema 2.9.1 (Cauchy). *Si G es un grupo finito y p un número primo tal que $p \mid |G|$, entonces G contiene al menos un elemento de orden p .*
[37][Teorema 4.2].

Definición 2.9.2. Si p es un primo, un p -subgrupo P de un grupo G es de Sylow si es máximo. Más aún, todo p -subgrupo está contenido en un p -subgrupo de Sylow.

Lema 2.9.2. *Sea P un p -subgrupo de Sylow de un grupo G :*

- i) $|N_G(P)|$ es primo con p .*
- ii) Si $a \in G$ y a tiene orden p^k , para alguna k , y $aPa^{-1} = P$, entonces $a \in P$.*

[37][Lema 4.11].

Teorema 2.9.3 (Sylow I).

- i) Si P es un p -subgrupo de Sylow de un grupo G , entonces todos los p -subgrupos de Sylow de G son conjugados con P .*
- ii) Si hay k p -subgrupos de Sylow, entonces k es un divisor de $|G|$ y $k \equiv 1 \pmod{p}$.*

[37][Teorema 4.12].

Ejemplo 2.9.1. Consideremos $G = S_3$. Existen tres 2-grupos: $P_1 = \langle (12) \rangle$, $P_2 = \langle (23) \rangle$ y $P_3 = \langle (13) \rangle$. Así:

a) $gP_1g^{-1} = P_2$ con $g = (123) \in G$.

b) $gP_2g^{-1} = P_3$ con $g = (123) \in G$.

c) $gP_3g^{-1} = P_1$ con $g = (123) \in G$.

Con lo que podemos concluir que P_1 , P_2 y P_3 son conjugados entre sí. Más aún, tenemos que $k = 3$, 3 divide a $|G| = 6$ y $k = 3 \equiv 1 \pmod{2}$.

Corolario. *Un grupo finito G tiene un único p -subgrupo P de Sylow, para algún primo p , si y sólo si $P \triangleleft G$.*

[37][Corolario 4.13].

Teorema 2.9.4 (Sylow II). *Si G es un grupo finito de orden $p^n m$ con $(m, p) = 1$, entonces todos los p -subgrupos de Sylow P de G son de orden p^n .*

[37][Teorema 4.14].

Ejemplo 2.9.2. Del ejemplo anterior, $G = S_3$, tenemos que $|G| = 2 * 3$ y además $(2, 3) = 1$; de donde $|P_1| = |P_2| = |P_3| = 2$.

Corolario. *Sea G un grupo y p un número primo. Si p^k divide al orden de G , entonces G contiene un subgrupo de orden p^k .*

[37][Corolario 4.15].

2.10. Series Normales.

Definición 2.10.1. Una *serie subnormal* de un grupo G es una sucesión de subgrupos

$$e = G_0 \leq G_1 \leq \dots G_{n-1} \leq G_n = G,$$

en la cual $G_i \triangleleft G_{i+1}$ para cada i . Los *grupos factores* de esta serie subnormal son los grupos G_{i+1}/G_i con $i = 0, 1, \dots, n$, y la *longitud de la serie* es el número de inclusiones estrictas, es decir, el número de grupos factores no triviales.

Nota. Consideraremos *serie subnormal* en lugar de *serie normal*, debido a que no hay consenso sobre su uso; en algunos textos, al considerar series normales, se pide la condición de que G_i también debe ser normal en G , $G_i \triangleleft G$ para cada i .

Definición 2.10.2. Una *serie de composición* es una serie subnormal

$$e = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{n-1} \leq G_n = G,$$

en la cual, para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$, G_i es un subgrupo normal máximo en G_{i+1} ó $G_i = G_{i+1}$.

Definición 2.10.3. Si G tiene una serie de composición, entonces los grupos factores de esta serie son llamados *factores de composición*.

Lema 2.10.1. Una serie subnormal es una serie de composición de G si y sólo si sus grupos factores son simples o triviales.

Demostración. Sea G un grupo y

$$e = G \leq G_1 \leq \dots \leq G_{n-1} \leq G_n = G \dots (*)$$

una serie subnormal de él.

\Rightarrow] Supongamos que la serie es de composición.

Sabemos que $G_i \triangleleft G_{i+1}$ son máximos en G_{i+1} para cada $i = 0, 1, \dots, n$, ó $G_i = G_{i+1}$. Si $G_i = G_{i+1}$, entonces $G_{i+1}/G_i = e$.

Supongamos que G_i es normal máximo en G_{i+1} . Por el teorema 2.6.5 se sigue que G_{i+1}/G_i no tiene subgrupos normales distintos a los triviales. Lo que implica que G_{i+1}/G_i es simple.

\Leftarrow] Supongamos ahora que los grupos factores son simples o triviales. Nuevamente por el teorema 2.6.5, si los grupos factores G_{i+1}/G_i son simples o triviales entonces $G_i \triangleleft G_{i+1}$ es máximo para cada $i = 0, 1, \dots, n$. Esto implica que (*) es una serie de composición. Con lo que se completa la prueba. \square

Teorema 2.10.2. Si G es un grupo finito que tiene una serie subnormal con grupos factores H_0, H_1, \dots, H_n , entonces:

$$|G| = \prod_{i=0}^n |H_i|.$$

Demostración. Sean $e = G \leq G_1 \leq \dots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ una serie subnormal de G y H_0, H_1, \dots, H_n sus grupos factores. Notemos que $H_i = G_{i+1}/G_i$.

Para la prueba usaremos inducción. En el caso $n = 0$, tenemos que $|H_0| = |G/\{e\}| = |G|$ y el resultado es fácil. Entonces para la base inductiva probaremos para $n = 1$. Sean H_0, H_1 los grupos factores de la serie subnormal, definidos como al principio de la prueba. Si $G_0 = G_1$ ó $G_1 = G_2$ es lo mismo que en el caso anterior. Supongamos entonces que: $\{e\} = G_0 < G_1 < G_2 = G$.

Por el primer caso sabemos que $|H_0| = |G_1|$. Como $H_1 = G_2/G_1$, entonces $|H_1| = [G_2 : G_1]$ que es el número de clases laterales de G_1 en G_2 y forman una partición. En consecuencia, $|G_2/G_1| = [G_2 : G_1]$. Entonces, por el teorema de Lagrange:

$$\begin{aligned} |G_2| &= |G_2/G_1| \cdot |G_1| = |H_1| \cdot |H_0| \\ \Rightarrow |G_2| &= |G_1| \cdot [G_2 : G_1] = |H_0| \cdot |H_1|, \end{aligned}$$

lo que demuestra la base inductiva.

Supongamos ahora que se cumple para $n = k - 1$, entonces

$$|G_{k-1}| = \prod_{i=0}^{n=k-1} |H_i|.$$

Ahora hay que mostrar que se cumple para $n = k$. Por la definición de H_i , tenemos que $H_k = G_{k+1}/G_k$. Como $G_k < G_{k+1}$, por el teorema de Lagrange:

$$\begin{aligned} |G_{k+1}| &= |G_k| \cdot [G_{k+1}/G_k] = |G_k| \cdot |G_{k+1}/G_k| = \\ &= \prod_{i=0}^{n=k-1} |H_i| \cdot |H_k| = \prod_{i=0}^{n=k} |H_i|. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Gráficas de Cayley.

Las gráficas de Cayley son de gran importancia, no sólo por ser parte del tema central de esta tesis, sino también por su numerosa cantidad de aplicaciones en distintas ramas de la matemática y en el modelado de problemas. Su importancia radica en el hecho de que, al poder asociar sus vértices con los elementos de un grupo, podemos determinar muchas de sus propiedades (conexidad, hamiltonicidad, coloración, trayectorias, ciclos, etc...) desde una perspectiva abstracta del álgebra; así como de establecer una clasificación de familias de gráficas según las propiedades del grupo que les corresponda. Comenzaremos por dar la definición formal para posteriormente enunciar algunos teoremas que establecen propiedades específicas e importantes relacionadas con su hamiltonicidad, que es nuestro principal objetivo.

Definición 3.0.4. Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador de G que no contiene la identidad. La *Digráfica de Cayley*, $\Gamma = Cay(G, S) = \Gamma(G, S)$, respecto a S tiene como vértices los elementos de G y dados $x, y \in G$, entonces $(x, y) \in A$ es una flecha de Γ si y sólo si $\exists s \in S$ tal que $y = xs$.

Definición 3.0.5. Si S genera a G , es cerrado bajo inversos, ($S^{-1} \subseteq S$), y además no contiene al elemento neutro, entonces $\Gamma = \Gamma(G, S)$ es una *Gráfica de Cayley*.

Ejemplo 3.0.1. Consideremos el grupo $(\mathbb{Z}_8, +)$ y $S = \{2, 3\}$. Entonces la gráfica que le corresponde es la se muestra en la figura 3.1.

Corolario. Sea $\Gamma(G, S_1)$ una gráfica de Cayley. Si se tiene que $S_2 \subseteq S_1$, entonces $\Gamma(G, S_2)$ es una subgráfica de $\Gamma(G, S_1)$.

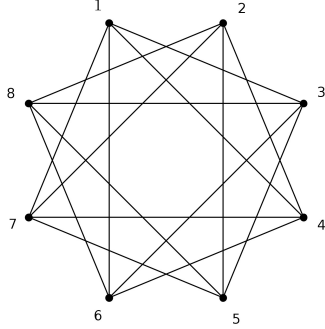


Figura 3.1: Gráfica de Cayley
 $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}_8, \{2, 3\})$.

Nota. En la definición de Gráfica (y Digráfica) de Cayley, pedimos que S genere para asegurar la conexidad, de lo contrario, si S no genera G , entonces la gráfica es disconexa.

Teorema 3.0.3. *El conjunto de todos los automorfismos de una gráfica de Cayley Γ , forma un grupo bajo la composición.*

Demostración. Hay que probar que el conjunto $Aut(\Gamma)$ es un grupo. Entonces debemos verificar que el conjunto de automorfismos de G también lo es. Pero esto es cierto en virtud del teorema 2.1.2, ya que $V(\Gamma) = G$. \square

Ejemplo 3.0.2. Algo sencillo es lo siguiente: $Aut(K_n) \cong S_n$.

Definición 3.0.6. Una gráfica Γ es *vértice-transitiva* si el grupo que actúa sobre sus vértices lo hace de forma transitiva, es decir, que para $x, y \in V(\Gamma)$ existe $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$, tal que $\phi(x) = y$.

Definición 3.0.7. Sea G una gráfica vértice-transitiva. Entonces G es regular.

Teorema 3.0.4. *Las gráficas de Cayley son vértice-transitivas.*

Demostración. Para cada $g \in G$, consideremos el mapeo $\phi_g : G \rightarrow G$ definido por $\phi_g(x) = gx$, el cual es una permutación de los elementos de G (o una biyección), por tanto $\phi_g \in Aut(\Gamma)$ ya que:

$$\begin{aligned} \{x, y\} \in E(G) &\Leftrightarrow x^{-1}y = s \text{ con } s \in S \Leftrightarrow x^{-1}g^{-1}gy = (gx)^{-1}(gy) = s \\ &\Leftrightarrow \phi_g(y) = \phi_g(x)s \Leftrightarrow \{\phi_g(x), \phi_g(y)\} \in E(\Gamma). \end{aligned}$$

Resta probar que el grupo $G_g = \{\phi_g : g \in G\}$ actúa transitivamente en $Aut(\Gamma)$. Así, para cada par de vértices $x, y \in V(\Gamma)$ podemos definir $\phi_{yx^{-1}}(x) = yx^{-1}x = y$, pues $yx^{-1} \in G$. \square

El recíproco del teorema no se cumple, excepto si G tiene orden un número primo. El ejemplo más citado es la gráfica de Petersen (Figura 3.2), la cual es vértice-transitiva pero no es una gráfica de Cayley.

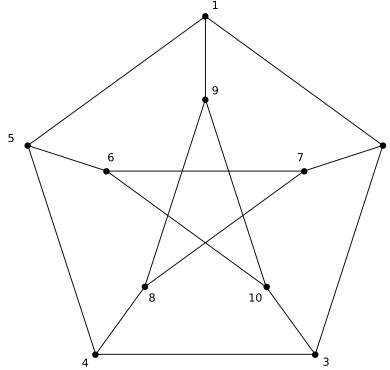


Figura 3.2: Gráfica de Petersen.

Teorema 3.0.5. *Sea p un número primo y Γ una gráfica vértice-transitiva con p vértices. Entonces Γ es una gráfica de Cayley.*

Demostración. Sea Γ una gráfica vértice-transitiva. Por hipótesis Γ es regular; además debe ser conexa, de lo contrario tendríamos una partición de $V(\Gamma)$ con al menos m subconjuntos, con $2 \leq m < p$. Si G es el grupo que actúa sobre los vértices de Γ , tenemos que $|G| = |V(\Gamma)| = p$; entonces debería suceder que $m|p$, por el teorema de Lagrange; llegando a una contradicción.

Como el orden de G es un primo, para cada $g \in G$, con $g \neq e$, tenemos que $\langle g \rangle = G$. Por lo tanto G consta de todas las potencias de g , $G = \{e, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$.

Notemos que Γ debe ser r -regular, con $r = 2k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, ya que el número de aristas es $\frac{p \cdot r}{2} = \frac{p \cdot 2k}{2} = pk$. Más aún, por el teorema 1.1.1, Γ es 2-factorizable. Por lo tanto hay k número de 2-factores, es decir, tiene k ciclos generadores, ajenos dos a dos. Así, Γ se puede ver como la unión disjunta de dichos k ciclos.

Queremos probar que $\Gamma = \Gamma(G, S)$ es una gráfica de Cayley, es decir, que existe $S \subset G$ tal que $S^{-1} \subseteq S$ y que $\{x, y\} \in E(\Gamma) \Leftrightarrow y = xg$ con $g \in S$.

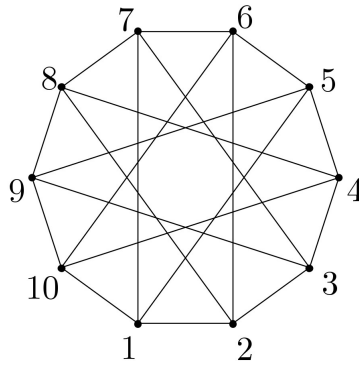
Sean C_1, C_2, \dots, C_k los 2-factores (o ciclos). Y sea $a_i \in G$ el elemento que genera a C_i , para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Notemos que cada uno de los ciclos son de la siguiente forma: $C_i = \{e, ga_i, g^2a_i, \dots, g^{p-1}a_i\}$.

Afirmación. $S = \{a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \dots, a_k, a_k^{-1}\}$ es el conjunto generado de G buscado que hace a Γ ser una gráfica de Cayley.

Es claro que $e \notin S$ y $S^{-1} \subseteq S$, por construcción. Tomemos una arista de Γ , $\{x, y\} \in E(\Gamma)$. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{x, y\} \in C_i$ para alguna $i = 1, 2, \dots, k$. Esto implica que $y = xa_i$, donde $a_i \in S$. Además, S genera a G y C_i es no dirigido, ya que S cerrado bajo inversos.

$\therefore \Gamma = \Gamma(G, S)$ es una gráfica de Cayley. □

Definición 3.0.8. Una *gráfica circulante* C es una gráfica de Cayley $C = \Gamma(G, S)$, no dirigida con $G = \mathbb{Z}_n$, el grupo aditivo de los números enteros y tal que $\{i, j\} \in E(C) \iff i - j \in S \pmod{n}$, donde $S \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ (Figura 3.3).



$$C(\mathbb{Z}_{10}, \{1, -1, 4, -4\})$$

Figura 3.3: Gráfica circulante.

Corolario. *Toda gráfica de Cayley, $\Gamma = (G, S)$, con G un grupo cíclico, es una gráfica circulante.*

Demostración. Sea G un grupo cíclico de orden n , entonces $G \cong \mathbb{Z}_n$. Y sea $S = \{a\}$, con $a \neq e$, y tal que $\langle S \rangle = G$. Tomemos la arista $\{x, y\} \in E(\Gamma)$, por tanto $y = xa$ y $a \in S$.

Sabemos, por ser G cíclico y por la definición de gráfica de Cayley, que $x = a^i$ e $y = a^{i+1}$ para alguna $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Así, se tiene que

$$y - x = a^{i+1} - a^i = a \in S$$

Dado que la arista fue arbitraria, se cumple para todas y Γ es una gráfica circulante. \square

Concluiremos este capítulo con tres teoremas y un corolario de gráficas vértice-transitivas, los cuales nos aportan información sobre cuándo, éstas, son gráficas de Cayley.

Teorema 3.0.6 (Turner, 1967 [41]). *Toda gráfica vértice-transitiva de orden un número primo es una grafica circulante.*

Teorema 3.0.7 (Sabidussi [39]). *Una gráfica Γ es un gráfica de Cayley si y sólo si $\text{Aut}(\Gamma)$ contiene un subgrupo que actúa regularmente en Γ .*

Corolario. *Si ϕ es un automorfismo de un grupo G , entonces las gráficas de Cayley $\Gamma(G, S)$ y $\Gamma(G, \phi(S))$ son isomorfas.*

Demostración. Sea ϕ un automorfismo de Γ y $\Gamma(G, S)$ las gráficas Cayley; de aquí se sigue que ϕ es una permutación de los vértices de Γ . En particular, por ser ϕ una biyección, se tiene que $|S| = |\phi(S)|$. Sean $x, y \in V(\Gamma)$, entonces:

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi(y)\} \in E(\Gamma') &\Leftrightarrow \phi(x)^{-1}\phi(y) \in \phi(S) \\ \Leftrightarrow \phi(x^{-1}y) \in \phi(S) &\Leftrightarrow x^{-1}y \in S \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(\Gamma); \end{aligned}$$

con lo que se establece la doble correspondencia entre $E(\Gamma)$ y $E(\Gamma')$.

Sólo resta verificar que se conservan los grados de cada uno de los vértices. Sea $x \in V(\Gamma)$ y $y_1, y_2 \in N(x)$ dos vecinos de x en Γ . Notemos que:

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi(y_1)\} = \{\phi(x), \phi(y_2)\} &\Leftrightarrow \phi(x)^{-1}\phi(y_1) = \phi(x)^{-1}\phi(y_2) \\ \phi(y_1) = \phi(y_2) &\Leftrightarrow y_1 = y_2. \end{aligned}$$

También: $\phi(y) \in N(\phi(x)) \Leftrightarrow y \in N(x)$.

$$\therefore |N(x)| = |N(\phi(x))|; \quad \text{y} \quad \therefore \Gamma(G, S) \cong \Gamma'(G, \phi(S)).$$

□

Teorema 3.0.8 (Marušič [30]). *Para un primo p , todas las gráficas vértice-transitivas de orden p, p^2, p^3 ó $2p$ (donde $p \equiv 3 \pmod{4}$), son gráficas de Cayley.*

Capítulo 4

La conjetura de Lovász.

El objetivo de esta tesis es hacer un recorrido por algunos trabajos realizados alrededor del problema sobre trayectorias hamiltonianas en una gráfica (o bajo qué hipótesis se puede asegurar la existencia o no de dichas trayectorias); pero que además, dicha gráfica tenga la propiedad de ser conexa y vértice-transitiva.

El problema presentado en el párrafo es realmente un problema abierto hasta la actualidad (por lo que aún le llamamos conjetura), y fue propuesto por *Laszlo Lovász* en el año de 1969. El enunciado dice lo siguiente:

“Toda gráfica conexa vértice-transitiva contiene una trayectoria hamiltoniana.”

Se presentarán tres investigaciones de las más sobresalientes en torno a la conjetura con la perspectiva de nuestro interés: *las gráficas de Cayley*.

En el primer artículo, (con título original en inglés:) *Hamiltonian paths in Cayley graphs* [36], los autores demuestran tres teoremas y cuatro lemas; sin embargo, los lemas son los que dan en realidad la pauta para la prueba de los teoremas, sin restarles importancia. El primero es de *Rapaport-Strasser*, en el que considera gráficas de Cayley generadas por tres involuciones; el segundo, de *Pak-Radoičić*, requiere de un grupo generado por dos involuciones (conjugadas) y el elemento que las conjuga; el tercero es de *Rankin*, con un grupo generado por dos elementos tales que su producto es una involución. Finalmente, el cuarto nos permite una construcción de una trayectoria

hamiltoniana usando las clases laterales del grupo asociado a la gráfica de Cayley. Con esto se logra una clasificación de los grupos según sus conjuntos generadores que nos aseguran la existencia de trayectorias hamiltonianas.

El segundo artículo, (con título original en inglés:) *On a conjecture concerning vertex-transitive graphs* [1], contiene una conjetura propuesta por el autor, *Tobias Ahnsendorf*, apoyado de un par de definiciones principales: *menor y menor homogéneo*. En ella, propone la posibilidad de encontrar una estructura en las gráficas vértice-transitivas, desde la cual (en caso de ser cierta), lograríamos tener la prueba esperada. Y para mostrarlo, la toma como hipótesis y prueba que ésta, implica la *conjetura de Lovász*.

El tercer análisis, es sobre la tesis realizada por *Erick Westlund* para obtener el grado de Doctor, y que lleva por título (original en inglés): *Hamilton decompositions of 6-regular abelian Cayley graphs* [42], la cual está muy relacionada con otra conjetura, la de *Alspach*. Ésta consiste en encontrar una descomposición por aristas, en ciclos hamiltonianos disjuntos, a la que definiremos como *descomposición hamiltoniana*. En su tesis, genera condiciones para que una gráfica contenga dicha descomposición tomando en cuenta gráficas de Cayley sobre grupos abelianos.

Es importante mencionar que existen otras versiones de la conjetura de Lovász que admiten hipótesis cercanas a las originales, pero tampoco han sido probadas. Son las siguientes:

Conjetura 4.0.1 (débil de Lovász [26]). Toda gráfica de Cayley conexa no trivial, contiene un ciclo hamiltoniano.

Conjetura 4.0.2. [38] Toda gráfica finita, conexa y vértice-transitiva, contiene un ciclo hamiltoniano; excepto si la gráfica es: K_2 , Petersen, Coxeter, o una derivada de las dos últimas reemplazando cada vértice por K_3 .

Nota. Las gráficas consideradas serán, en general, no dirigidas. Esto debido a que hay gran número de contraejemplos de gráficas dirigidas (o digráficas), para las cuales la conjetura de Lovász es falsa. Por ejemplo, la digráfica de Cayley $\Gamma(\mathbb{Z}_{12}, \{2, 3, 8\})$, ya que es conexa y vértice-transitiva, pero no contiene una trayectoria hamiltoniana.

4.1. Trayectorias hamiltonianas en gráficas de Cayley.

[Igor Pak, Radoš Radoičić.] ¹

Este artículo es uno de los más recientes con nuevas generalizaciones importantes de hamiltonicidad en gráficas de Cayley; éstas, se tomarán finitas, por lo que los grupos considerados también lo serán. La importancia de las hipótesis recae en definir conjuntos generadores que nos aseguren la existencia de trayectorias (o ciclos) hamiltonianos.

Definición 4.1.1. Un elemento $\alpha \in G$ es una involución si $\alpha^2 = e$.

Lema 4.1.1 (Rapaport-Strasser [36]). *Sea G un grupo finito generado por tres involuciones α, β, γ . Supongamos que $\alpha\beta = \beta\alpha$. Entonces la gráfica de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Para cada $z \in G$ y cada $X \subset G$, definimos:

$$\partial_z(X) = \{g \in G \setminus X : g = xz, x \in X\}.$$

Denotemos por H al subgrupo de G tal que $H = \langle \beta, \gamma \rangle$. Sea $X_1 = H$. Notemos que $\beta\gamma$ y $\gamma\beta$ no son necesariamente iguales y por tanto G (en general), no es abeliano. Dado que H está generado por dos involuciones $\{\beta, \gamma\}$, y por el teorema 2.3.2, tenemos que H es isomorfo a un grupo diédrico D_{2m} , $H \cong D_{2m}$, y en consecuencia $|H| = 2m$. Así, como H consta de productos alternados de β y γ , entonces $\beta\gamma \in H$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\beta\gamma)^m = e$.

Dada la naturaleza de H , podemos dar los elementos que lo conforman:

$$H = \{e, (\beta\gamma), (\beta\gamma)^2, \dots, (\beta\gamma)^{m-1}, (\beta\gamma)\beta, (\beta\gamma)^2\beta, \dots, (\beta\gamma)^{m-1}\beta\}.$$

Sea C_1 el ciclo que genera a X_1 , descrito de la siguiente forma:

$$C_1 : e \rightarrow \beta \rightarrow (\beta\gamma) \rightarrow (\beta\gamma)\beta \rightarrow \dots \rightarrow (\beta\gamma)^{m-1} \rightarrow (\beta\gamma)^{m-1}\beta \rightarrow (\beta\gamma)^m = e$$

¹Título original: *Hamilton paths in Cayley graphs* [Igor Pak, Radoš Radoičić]. La traducción al español es mía.

El ciclo hamiltoniano en Γ lo construiremos a través de cada $X_i \subset G$, donde X_i es el i -ésimo paso de la construcción. Esto sugiere una prueba por inducción sobre las X_i . Definimos para $i > 1$, $X_i = X_{i-1} \cup yH$ para alguna $y \in G \setminus X_{i-1}$, y sea C_i el ciclo que genera a X_i .

Por hipótesis $H \leq G$, así que yH es una clase lateral izquierda de H , y entonces, según la definición de X_i se tiene que:

$$H = X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X_n = G$$

es una cadena finita (pues G también lo es). Y cada X_i es la unión de clases laterales izquierdas de H .

Por la definición de X_1 tenemos que $\partial_\beta(X_1) = \partial_\gamma(X_1) = \emptyset$, y por el párrafo anterior, también $\partial_\beta(X_i) = \partial_\gamma(X_i) = \emptyset$.

Sea X_i obtenido como se describió anteriormente. Analicemos qué pasa con $\partial_\alpha(X_i)$. Existen dos posibilidades: si $\partial_\alpha(X_i) = \emptyset$, en cuyo caso tendríamos que $X_i = G$, y C_i , el ciclo hamiltoniano que genera a X_i también genera a G , ya habríamos terminado. Ahora, $\partial_\alpha(X_i) \neq \emptyset$ implica que existe al menos un $y \in G \setminus X_i$. Notemos que $yH \cap X_i = \emptyset$, ya que de lo contrario sucedería que $yh = x$ para alguna $h \in H$, entonces $y = xh^{-1} \in X_i$ debido a que $H = X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_i$. Además de que $h \in \langle \beta, \gamma \rangle$ y también $z\beta, z\gamma \in X_i$ para cada $z \in X_i$.

Sea $X_{i+1} = X_i \cup yH$. Nuevamente, tenemos que $\partial_\beta(X_{i+1}) = \partial_\gamma(X_{i+1}) = \emptyset$. Por la hipótesis de inducción, $x = y\alpha \in X_i$ está en el ciclo C_i que genera a X_i . Entonces x debe estar conectado a $x\beta$ y $x\gamma$, de modo que $x\alpha = y \notin X_i$. Consideremos el ciclo R que genera a yH resultado de multiplicar el ciclo C_1 por y , y recordemos que $\alpha\beta = \beta\alpha$. Así, $x\beta\alpha = x\alpha\beta = y\beta$ y se forma el cuadrado que conecta a C_i con R (Figura 4.1).

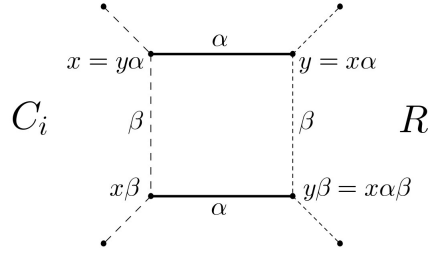


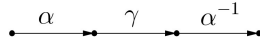
Figura 4.1: Cuadrado conector 1.

Finalmente, para encontrar el ciclo que genera a X_{i+1} , quitemos las aristas $\{x, x\beta\}$ y $\{y, y\beta\}$ de X_i y yH respectivamente, y agreguemos $\{x, y\}$ y $\{x\beta, y\beta\}$. De este modo, hemos construido el ciclo hamiltoniano C_{i+1} que genera a X_{i+1} , que era lo que queríamos y eso completa la prueba. \square

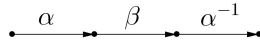
Lema 4.1.2. *Sea G un grupo finito, generado por una involución β y un elemento α . Sea $\gamma = \beta^\alpha := \alpha^{-1}\beta\alpha$. Entonces la gráfica de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Como en el lema 4.1.1, sea $H = \langle \beta, \gamma \rangle \subset G$, supongamos que $X_1 = H$. Sabemos que Γ restringido a X_1 contiene un ciclo hamiltoniano orientado, y que $\partial_\beta(X_i) = \partial_\gamma(X_i) = \emptyset$.

Como el ciclo C_i es orientado, el orden en la sucesión de las etiquetas está determinado por las condiciones de etiquetado, dadas de la siguiente manera: ninguna etiqueta α^{-1} precede a β o sucede a γ , y ninguna etiqueta α precede a γ o sucede a β . A continuación se muestran un par sucesiones de flechas, la primera no es permitida y la segunda si, de acuerdo con dicha condición:



Aristas que no cumplen la condición de etiquetas



Aristas que cumplen la condición de etiquetas

Figura 4.2: Etiquetado de flechas.

Para continuar, no olvidemos que α no necesariamente es una involución. En el paso inductivo, tenemos dos posibilidades: si $\partial_\alpha(X_i) = \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) = \emptyset$, en cuyo caso $X_i = G$, ya habríamos terminado teniendo a C_i el ciclo hamiltoniano deseado. Supongamos entonces que $\partial_\alpha(X_i)$ es no vacío. Entonces existe $y = x\alpha \in \partial_\alpha(X_i) \subset G \setminus X_i$ para algún $x \in X_i$. Sea $X_{i+1} = X_i \cup yH$, como en el lema 4.1.1. Ahora falta mostrar que hay un ciclo C_{i+1} que es hamiltoniano en X_{i+1} .

Para las adyacencias de $x \in C_i$ hay sólo tres posibilidades $(\alpha^{-1}, \beta, \gamma)$, ya que $y = x\alpha \in \partial_\alpha(X_i)$, por lo que alguna de estas dos adyacencias a x debe ser la involución β o γ . Supongamos que es β . Sea R el ciclo que genera a yH . Entonces C_i y R están conectados mediante el cuadrado:

$$x \rightarrow y = x\alpha \rightarrow y\gamma = x\alpha\gamma \rightarrow x\beta = x\alpha\gamma\alpha^{-1} \rightarrow x\alpha\gamma\alpha^{-1}\beta = x$$

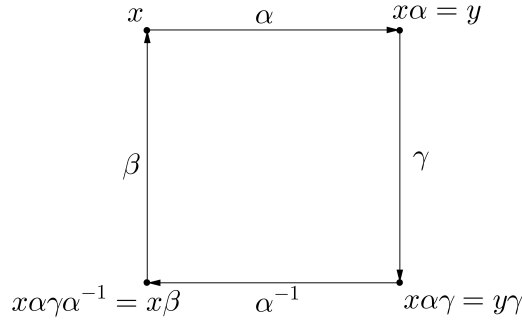


Figura 4.3: Cuadrado conector 2.

Si quitamos las flechas $(x, x\beta)$ y $(y, y\gamma)$ de C_i y R respectivamente, y añadimos (x, y) y $(x\beta, y\gamma)$, completamos el ciclo hamiltoniano C_{i+1} que genera X_{i+1} y cuya orientación se conserva, puesto que las etiquetas de R constan sólo de involuciones y se pueden ordenar de acuerdo con las condiciones de etiqueta.

Ahora supongamos que ninguna de las dos adyacencias de x en C_i es β , por lo que una de ellas debe ser γ . Por las condiciones de etiquetado, α no puede preceder a γ y entonces debe sucederla; de la misma forma, α^{-1} no sucede a γ y por tanto debe precederla (Figura 4.4).

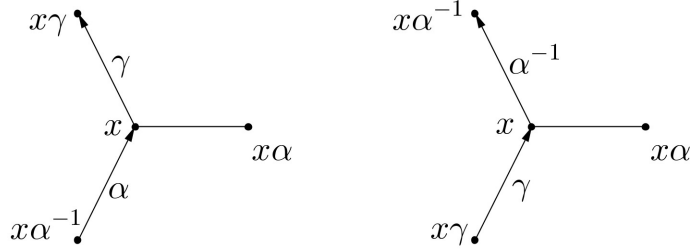


Figura 4.4: Etiquetas no posibles.

Sin embargo, en ambos casos se contradice el hecho de que una de las adyacencias de x en C_i debe tener a α^{-1} (en la dirección del ciclo, y no en la dirección opuesta). Entonces podemos descartar estas opciones, terminando el caso en que $y = x\alpha$.

Supongamos ahora, que $y = x\alpha^{-1} \in \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) \subset G \setminus X_i$. Dado que $\beta = \alpha\gamma\alpha^{-1}$, basta con repetir el procedimiento para $y = x\alpha$ intercambiando β y γ , α y α^{-1} , de posición. Sin embargo, las condiciones de etiquetado son invariantes. Y finalmente queda completa la prueba. \square

Lema 4.1.3 (Rankin [36]). *Sea G un grupo finito, generado por dos elementos α y β , tales que $(\alpha\beta)^2 = e$. Entonces la gráfica de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, \{\alpha, \beta\})$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Sea $H = \langle \beta \rangle$, $X_1 = H$. También supongamos que $\partial_\alpha(X_i) = \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) = \emptyset$. Sabemos que Γ restringido a X_i tiene un ciclo hamiltoniano orientado C_i , el cual sólo tiene etiquetas β y α^{-1} . A esta le llamaremos *condiciones de etiquetado*.

La base de inducción es simple, ya que X_1 está constituido únicamente por potencias de β . Notemos que si $\partial_\alpha(X_i) = \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) = \emptyset$ entonces $X_i = G$, y habríamos terminado.

Para el paso inductivo, primero supongamos que $\partial_\alpha(X_i) \neq \emptyset$. Entonces existe $y = x\alpha \in \partial_\alpha(X_i)$. Notemos que la flecha orientada hacia $x \in X_i$ en C_i no puede tener la etiqueta α^{-1} , de lo contrario $(y, x) \in C_i$, pues en este caso $y = x\alpha$ y $y \notin X_i$. También por las condiciones de etiquetado α y β^{-1} tampoco son permitidas. La etiqueta restante es β , entonces $(x\beta^{-1}, x) \in C_i$.

Consideremos a R , el ciclo que genera a yH y que, por la definición de H , sólo contiene etiquetas β en todas las aristas. Y ahora:

$$x \rightarrow x\alpha = y \rightarrow x\alpha\beta = y\beta \rightarrow x\beta^{-1} = x\alpha\beta\alpha \rightarrow x$$

es el cuadrado que conecta a R y C_i , y entonces:

$$C_{i+1} = C_i \cup R + \{y, x\} + \{x\beta^{-1}, y\beta\} - \{x\beta^{-1}, x\} - \{y, y\beta\}$$

es el ciclo hamiltoniano deseado que genera a $X_{i+1} = X_i \cup yH$ y conserva la orientación de C_i .

Para verificar que se cumplen las condiciones de etiqueta, notemos que la dirección del ciclo C_i es:

$$x \rightarrow \dots \rightarrow x\beta^{-1} \rightarrow x$$

y la de R :

$$y \rightarrow y\beta \rightarrow \dots \rightarrow y\beta^{m-1} \rightarrow y$$

donde m es el orden de β .

Observemos que al unir $x\beta^{-1} := x\alpha\beta\alpha$ con $y\beta = x\alpha\beta$ y al etiquetar con α^{-1} (por las condiciones de etiquetado), el sentido es $(x\alpha\beta\alpha, x\alpha\beta\alpha^{-1}) = (x\beta^{-1}, y\beta)$. Obteniendo así una trayectoria hamiltoniana:

$$T_{i+1} : x \rightarrow \dots \rightarrow x\beta^{-1} \rightarrow y\beta \rightarrow \dots \rightarrow y\beta^{m-1} \rightarrow y = x\alpha$$

y para completar el ciclo no necesitamos a (x, y) porque va en el sentido opuesto a la orientación de T_{i+1} ; sin embargo, (y, x) debería estar en C_{i+1} . Pero esto es cierto, ya que $(y, x) = (x\alpha, x\alpha\alpha^{-1})$. Lo que implica que la flecha (y, x) tiene etiqueta α^{-1} , y por tanto cumple con las condiciones de etiquetado.

$\therefore C_{i+1}$ es el ciclo hamiltoniano deseado que genera a X_{i+1} .

Para el caso $\partial_{\alpha^{-1}}(X_i) \neq \emptyset$, tomemos $y = x\alpha^{-1} \in \partial_{\alpha^{-1}}(X_i)$. Por las condiciones de etiqueta β^{-1} y α no son etiquetas posibles. Ahora será necesario considerar la flecha que sale de x en C_i . Notemos que α^{-1} no puede ser la etiqueta, pues tendríamos $(x, x\alpha^{-1}) = (x, y)$, donde $y \notin X_i$. Por lo que sólo queda ser β la etiqueta, y $(x, x\beta) \in C_i$.

Sea R el ciclo en yH . Entonces el cuadrado que une a R y C_i es el siguiente:

$$x \rightarrow x\alpha^{-1} = y \rightarrow x\alpha\beta^{-1} = y\beta^{-1} \rightarrow x\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = x\beta \rightarrow x.$$

Así, según el sentido de C_i y el de R , conforman el ciclo hamiltoniano deseado, descrito de la siguiente manera:

$$x \rightarrow y \rightarrow y\beta \rightarrow \cdots \rightarrow y\beta^{-1} \rightarrow x\beta \rightarrow \cdots \rightarrow x.$$

Lo que completa la prueba. \square

Observación. Sea $\Gamma = \Gamma(G, S)$ una gráfica de Cayley, la cual contiene una trayectoria hamiltoniana. Por la transitividad en los vértices de Γ podemos acomodar los vértices de la trayectoria e iniciarla en cualquier elemento de G .

Lema 4.1.4. *Sea G un grupo finito y sea $H \triangleleft G$. Supongamos que $S = S_1 \cup S_2$ es un conjunto generador de G , tal que $S_1 \subset H$, $\langle S_1 \rangle = H$, y que la proyección S'_2 de S_2 sobre G/H genera G/H . Supongamos que $\Gamma_1 = \Gamma(H, S_1)$ y también que $\Gamma_2 = \Gamma(G/H, S'_2)$ contiene una trayectoria hamiltoniana. Entonces $\Gamma = \Gamma(G, S)$ contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Sea $k = [G : H] = |G/H|$ y sea $g_1 = e \in G$. Por hipótesis $\langle S'_2 \rangle = G/H$ y $\Gamma = \Gamma(G/H, S'_2)$ contiene una trayectoria hamiltoniana como se describe a continuación:

$$H = Hg_1 \rightarrow Hg_2 \rightarrow Hg_3 \rightarrow \dots \rightarrow Hg_k.$$

Por el Lema 4.1.1, se tiene que $Hg_1 = H$ contiene una trayectoria hamiltoniana que inicia en el vértice $e \in G$, y supongamos que h_1g_1 es el punto final de dicha trayectoria. Agreguemos la flecha $(h_1g_1, h_1g_2) \in \Gamma$.

Consideremos ahora la trayectoria hamiltoniana en la clase lateral Hg_2 , cuyo vértice inicial sea h_1g_2 y que termine en h_2g_2 . Ahora podemos construir la trayectoria deseada, dada por:

$$e \rightarrow \cdots \rightarrow h_1g_1 \rightarrow h_1g_2 \rightarrow \cdots \rightarrow h_2g_2 \rightarrow \cdots \rightarrow h_1g_k \rightarrow \cdots \rightarrow h_kg_k.$$

$\therefore \Gamma = \Gamma(G, S)$ contiene una trayectoria hamiltoniana. \square

Teorema 4.1.5. *Sea G un grupo finito y sean $r(G)$ y $m(G)$ el número de factores de descomposición abelianos y no abelianos de G , respectivamente. Entonces existe un conjunto generador S , $\langle S \rangle = G$, con $|S| \leq r(G) + 2m(G)$, tal que la correspondiente gráfica de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Recordemos que todo grupo finito simple no abeliano G puede ser generado por dos elementos, de los cuales uno de ellos es una involución, y por el lema 4.1.3 posee un conjunto generador S , tal que $|S| = 2$, y cuya gráfica de Cayley correspondiente contiene un ciclo hamiltoniano. Si el grupo G es cíclico, $G \cong \mathbb{Z}_p$, basta con un elemento para generarlo.

Por el lema 4.1.4, cualquier conjunto generador S'_2 , tal que $\langle S'_2 \rangle = G/H$, puede llevarse a $S_2 \subset G$, de modo que $S = S_1 \cup S_2$ es un conjunto generador para G . Por lo que si H y G/H tienen conjuntos generadores de tamaño k_1 y k_2 , respectivamente, tal que la correspondiente gráfica de Cayley contiene una trayectoria hamiltoniana, entonces G contiene un conjunto generador de tamaño $k_1 + k_2$.

Tomemos una serie de descomposición de G :

$$e = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G;$$

como $r(G)$ es el número de factores de descomposición abelianos, por cada uno tenemos un elemento generador. Sea $|S_1| = r(G)$. De modo similar, $m(G)$ es el número de factores de descomposición no abelianos. Para estos tenemos dos elementos generadores por cada uno de ellos (por el lema 4.1.3). Entonces $|S_2| = 2m(G)$. Por tanto, junto con el lema anterior, tenemos que la cardinalidad del conjunto generador de G es $r(G) + 2m(G)$. \square

Teorema 4.1.6 (Igor Pak [36]). *Todo grupo finito G de cardinalidad $|G| \geq 3$ tiene un conjunto generador S , con $|S| \leq \log_2 |G|$, tal que la gráfica de Cayley correspondiente, $\Gamma = \Gamma(G, S)$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Fijemos una serie normal de G . Y consideremos $r = r(G)$ y $m = m(G)$. Denotemos como A_1, A_2, \dots, A_r y B_1, B_2, \dots, B_m los grupos factores abelianos y no abelianos de G , respectivamente. No olvidemos que $|B_j| \geq 60 > 4$, es decir, el grupo simple no abeliano de menor orden $|B| = 60$ y es el grupo A_5 .

Como cada grupo factor es no trivial entonces $|A_i| \geq 2$ para cada $i = 1, 2, \dots, r$ y $|B_j| \geq 2$ para cada $j = 1, 2, \dots, m$. Por tanto obtenemos lo siguiente:

$$\prod_{i=1}^r |A_i| \geq 2^r$$

y

$$\prod_{j=1}^m |B_j| \geq 2^{2m} = 4^m.$$

Por el teorema 2.10.2 se tiene que

$$|G| = \prod_{i=1}^r |A_i| \cdot \prod_{j=1}^m |B_j|,$$

entonces

$$2^{r+2m} = 2^r \cdot 2^{2m} = 2^r \cdot 4^m \leq \prod_{i=1}^r |A_i| \cdot \prod_{j=1}^m |B_j| = |G|,$$

y por lo tanto

$$r(G) + 2m(G) \leq \log_2 |G|$$

donde la igualdad se cumple cuando $G \cong \mathbb{Z}_2^n$.

Sólo resta hacer explícito el ciclo hamiltoniano.

Caso I. Si $r(G) + 2m(G) = \log_2 |G|$, ($G \cong \mathbb{Z}_2^n$).

Para la existencia del ciclo hamiltoniano haremos uso del código de Gray, propuesto por *Frank Gray* en 1974. Un *n-código* de Gray consiste de 2^n arreglos de longitud n con entradas en el conjunto $\{0, 1\}$. Por ejemplo, cuando $n = 2$ tenemos que el conjunto de arreglos es $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Podemos asociar los elementos del conjunto con los vértices de una gráfica, en la que las aristas están determinadas de tal manera que $\{x, y\} \in E(G)$ si y sólo si difieren exactamente en una posición. En la Figura 4.5 se muestra el caso para $n = 2$. A dicha gráfica se le llama *2-cubo*, Q_2 .

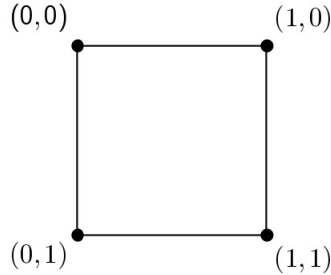


Figura 4.5: 2-cubo, Q_2 .

En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se puede construir la gráfica asociada al código de Gray; se le llama n -hipercubo, Q_n .

Observación. Para el caso $n = 3$, las gráficas son *cúbicas* o *3-regulares*. Sin embargo, no todas las gráficas cúbicas son el resultado de esta construcción. La gráfica de Petersen es un buen contraejemplo, ya que la cardinalidad de su conjunto de vértices no es una potencia de 2.

Por hipótesis $G \cong \mathbb{Z}_2^n$. Entonces el siguiente teorema nos dará explícito el ciclo hamiltoniano.

Teorema 4.1.7. *Para todo entero $n \geq 2$, el n -hipercubo Q_n , tiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Se probará por inducción sobre n .

Para el caso $n = 2$ el teorema es verdadero, ya que $Q_2 \cong C_4$.

Supongamos que el k -hipercubo tiene un ciclo hamiltoniano para $k \geq 2$. Entonces debemos probar que se cumple para $n = k + 1$, el hipercubo Q_{k+1} contiene un ciclo hamiltoniano.

Consideremos una partición de $V(Q_{k+1})$ en dos conjuntos V_0 y V_1 de igual cardinalidad. Donde V_0 consiste de todos los vértices, o arreglos de longitud $k + 1$, que inician con 0, y V_1 el de los vértices que tienen 1 en la primera entrada:

$$V_0 = \{0x : x \in \{0, 1\}^k\},$$

$$V_1 = \{1x : x \in \{0, 1\}^k\}.$$

Notemos que por inducción, las gráficas V_0 y V_1 contienen un ciclo hamiltoniano, pues son isomorfas a Q_k . Sea $C_0 = 0v_1, 0v_2, \dots, 0v_{2^k}, 0v_1$ el ciclo hamiltoniano en V_0 , y $C_1 = 1v_1, 1v_2, \dots, 1v_{2^k}, 1v_1$ el ciclo hamiltoniano en V_1 .

Para determinar el ciclo, de C_0 y C_1 quitamos las flechas $(0v_{2^k}, 0v_1)$ y $(1v_{2^k}, 1v_1)$, respectivamente; y agregamos $(0v_{2^k}, 1v_{2^k})$ y $(1v_1, 0v_1)$. Finalmente, el ciclo obtenido es:

$$C_{k+1} = 0v_1, 0v_2, \dots, 0v_{2^k}, 1v_{2^k}, 1v_{2^k-1}, \dots, 1v_1, 0v_1.$$

Observemos que las flechas de C_1 fueron invertidas para construir el ciclo hamiltoniano; esto es posible ya que G es un grupo abeliano y S es cerrado bajo inversos.

$\therefore Q_n$ contiene un ciclo hamiltoniano. □

Caso II. Supongamos que $r(G) + 2m(G) < \log_2|G|$.

Por el teorema 4.1.5, $\Gamma(G, S)$ contiene una trayectoria hamiltoniana. Supongamos que $x \in V(\Gamma)$ es el vértice inicial de dicha trayectoria e $y \in V(\Gamma)$ el vértice final. Sea $g \in G$ tal que $y = xg$. Si $g \in S$ entonces Γ es hamiltoniana. En caso contrario, hagamos $S' = S \cup \{g\}$, entonces $\Gamma(G, S')$ tiene un ciclo hamiltoniano. Sólo agregamos una flecha y la cardinalidad del conjunto generador no rebasa las hipótesis.

$\therefore \Gamma$ contiene un ciclo hamiltoniano. □

Definición 4.1.2. Para cada subconjunto de vértices $X \subset G$ se definió ∂X como el conjunto de vértices $v \in G \setminus X$ que están conectados por una flecha a X . Decimos que un gráfica G es ε -expansora si para cada $X \subset G$, con $|X| \leq |G|/2$, se tiene que $|\partial X| > \varepsilon|X|$, para algún $\varepsilon > 0$.

Sea p un primo, $p \equiv 1 \pmod{4}$. Sea \mathbb{F}_p un campo finito con p elementos, y $a \in \mathbb{F}_p$ tal que $a^2 = -1$. Considérese el grupo $SL(2, p)$ de las matrices de dos por dos sobre \mathbb{F}_p con determinante 1. Sea $G = PSL(2, p)$ el cociente de $SL(2, p)$ por el subgrupo de las matrices diagonales $\pm I$.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in PSL(2, p)$ dados por las matrices:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

Los tres elementos, α, β y γ , generan al grupo, donde $G : PSL(2, p) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Más adelante se verificará que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = e$. Consideremos entonces las gráficas de Cayley

$$\Gamma_p = \Gamma(PSL(2, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}).$$

Teorema 4.1.8. *Las gráficas de Cayley Γ_p contienen un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Comencemos por verificar que α, β y γ son involuciones:

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora debemos verificar que α y β conmutan:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix};$$

esto demuestra que $\beta\alpha = \pm\alpha\beta$ en $PSL(2, p)$; y por el lema 4.1.1, se tiene que la gráfica Γ_p contiene un ciclo hamiltoniano. □

4.2. Sobre una conjetura concerniente a las gráficas vértice-transitivas.

[Tobias Ahendorf.]²

Como ya mencionamos anteriormente, necesitamos de dos definiciones esenciales para el desarrollo de las aportaciones de este artículo: *menor* y *menor homogéneo*. Comenzaremos por dichas definiciones y algunos teoremas necesarios para después continuar con la conjetura propuesta por el autor y su implicación más importante: *la conjetura de Lovász*.

Definición 4.2.1. [12] Sean G y H gráficas. Decimos que H es un *menor* de G , $H \preceq G$, si existe una partición $\{V_h : h \in V(H)\}$ de $V(G)$ en subconjuntos conexos de vértices de G , con $G[V_h]$ ³ conexa para cada h , tal que para cualquier par de vértices $h, h' \in V(H)$ existe la arista $V_h - V_{h'}$ si y sólo si $\{h, h'\} \in E(H)$.

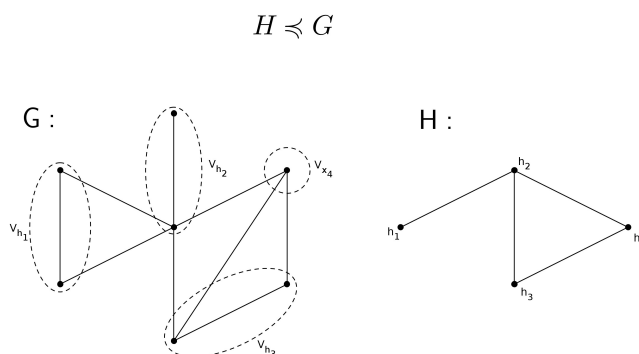


Figura 4.6: Menor de G , $H \preceq G$.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de los menores, ya que nos da importante información acerca de la relación de orden que hay entre estas gráficas.

²Título original: *On a conjecture concerning vertex-transitive graphs* [Tobias Ahendorf]. La traducción al español es mía.

³La notación $G[V_x]$ lo usaremos para denotar a la subgráfica de G inducida por el conjunto de vértices V_x .

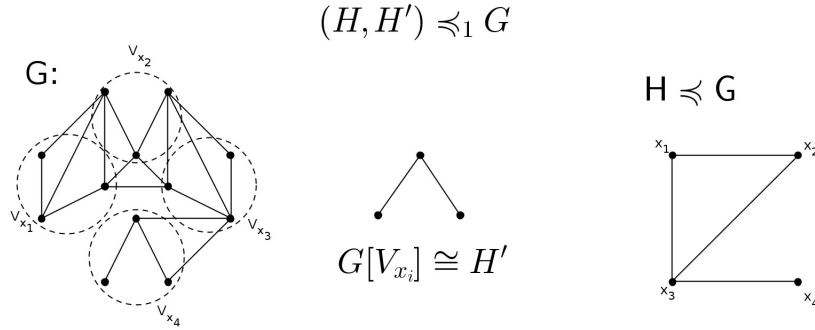


Figura 4.7: Menor homogéneo.

Teorema 4.2.1 (Robertson-Seymour [1]). *Las gráficas finitas están bien-cuasi-ordenadas por la relación “ser menor, \preceq ”, es decir, \preceq es reflexiva y transitiva, y para una sucesión infinita de gráficas G_1, G_2, \dots existen i, j con $i < j$ y $G_i \preceq G_j$.*

Definición 4.2.2. Sean G, H, H' gráficas y H' conexa. Diremos que (H, H') es un *menor homogéneo*, $(H, H') \preceq_1 G$, si $H \preceq G$ y los conjuntos de particiones V_x pueden ser elegidos de tal forma que se cumpla que $G[V_x] \cong H'$.

Ejemplo 4.2.1. En la siguiente figura G es la gráfica, H es un menor de G y H' es isomorfo a $G[V_{x_i}]$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Definición 4.2.3. Decimos que una relación de orden (\leq), en un conjunto X , es *bien-cuasi-ordenada* si es reflexiva, transitiva, y tal que para cualquier sucesión de elementos x_1, x_2, \dots de X contiene un par creciente $x_i \leq x_j$ tal que $i \leq j$.

Observación. La relación \preceq_1 no es bien-cuasi-ordenada para las gráficas finitas.

Contraejemplo: Sea p_i el i –ésimo número primo de la sucesión

$$C_3, C_5, C_7, \dots, C_{p_i}, \dots,$$

de gráficas cíclicas de orden creciente un número primo impar. Sean $C_{p_i} \preceq_1 C_{p_j}$ para la pareja (i, j) donde $i < j$, entonces los conjuntos de particiones

deben ser trayectorias de cierta longitud. Por tanto, son isomorfos, si dicha longitud es igual para todas las trayectorias. Con lo que tendríamos que $p_i | p_j$, lo que contradice el hecho de que p_i y p_j sean números primos.

Teorema 4.2.2. *Sea Γ una gráfica conexa vértice-transitiva con p vértices, donde p es un número primo. Entonces Γ contiene una trayectoria hamiltoniana. Más aún, si $p > 2$, entonces Γ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Por el teorema 3.0.5 podemos asociar un grupo G con $|G| = p$ y un subconjunto S y $S^{-1} \subset S$ que no contiene al elemento neutro (para evitar los lazos en la gráfica), tal que $\Gamma \cong \Gamma(G, S)$. Dado que $|G| = p$ sabemos que $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si consideramos solamente a G y dado que $S \neq \emptyset$, podemos elegir un elemento $k \in S$ con $k \neq e$. Tomemos el elemento neutro e y sumémosle k ; así, después de $p - 1$ veces habremos recorrido cada uno de los vértices exactamente una vez. Lo que nos da de forma automática una trayectoria hamiltoniana en Γ . Si $p > 3$ obtenemos un ciclo hamiltoniano al sumar p veces k . Si $p = 2$ tendríamos que $\Gamma \cong K_2$ es solamente una trayectoria de longitud igual a 1. \square

La conjetura (de Tobias), consta esencialmente de dos casos. El primero de ellos es el caso simple pero muy importante, ya que, de ser cierta la segunda parte, serviría de conclusión general para ésta misma. A su vez, el autor afirma que de poder demostrarse nos acercaríamos a una prueba general de la *conjetura de Lovász*. A continuación se hará el desarrollo para un mejor entendimiento.

Conjetura 4.2.1 (Tobias). *Sea G una gráfica vértice-transitiva de grado d . Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $mn = |G|$. Entonces:*

i) Si $(C_m, C_n) \preceq_1 G$, entonces G contiene una trayectoria hamiltoniana.

Sea $\{V_x : x \in C_m\}$ una partición de $V(G)$ tal que $C_m \preceq G$ y $G \cong G[V_x]$. Como C_m es conexa $\exists x, y \in V(C_m)$ tal que la arista $V_x - V_y$ existe si y sólo si $\{x, y\} \in E(G)$.

Notemos que hay m copias de C_n . Sean $C_{n,1}, C_{n,2}, \dots, C_{n,m}$ de tal forma que $\{V_{n,1}, V_{n,2}\}$ es una arista y por tanto $\exists \{x_{n,1}, x_{n,2}\} \in E(G)$; en general, que $\{V_{n,i}, V_{n,i+1}\}$ implique la existencia de $\{x_{n,i}, x_{n,i+1}\} \in E(G)$.

Finalmente, con lo anterior, podemos afirmar la existencia de una trayectoria hamiltoniana.

Sin embargo, el problema real, consiste precisamente en poder asegurar la existencia de C_n y C_m con las propiedades esperadas.

Para la segunda parte de la conjetura vamos a suponer que $|G|$ no es un número primo, y tampoco 0 ó 1.

ii) Existen $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y $m \geq 3$, con $mn = |G|$ tales que:

- $(C_m, C_n) \preceq_1 G$, en cuyo caso ya habríamos terminado (por el primer caso), o:
- Existen gráficas X' y X'' tales que $(X', X'') \preceq_1 G$, $|X'| = n$ y $|X''| = m$; donde X' es conexa y vértice-transitiva si G es conexa, y $G \cong \overline{K_m}$, si es desconexa. Entre dos vértices $x, y \in X''$, que tienen grado menor a d , existe una trayectoria hamiltoniana de x a y . Además, si consideramos el conjunto de particiones V_x para cada $x \in X'$, si $x_0 \in X'$ y $x_1, x_2 \in N_{X'}(x_0)$ con $x_1 \neq x_2$, entonces existe para $z \in V_{x_0} \cap N_G(x_1)$ un vértice $w \in V_{x_0}$ con $z \neq w$, tal que existe la $\{w\}$ - V_{x_2} -arista en G . \square

Para probar la implicación de la conjetura previa, necesitaremos el siguiente:

Lema 4.2.3. *Una gráfica vértice-transitiva de grado k es al menos $\frac{2}{3}(k+1)$ conexa por vértices.*

[17][Lema 3.4.2]

Ya tenemos las herramientas necesarias para probar que la conjetura de Tobias (en caso de ser cierta), y el lema anterior, implican el siguiente resultado:

Teorema 4.2.4. *Supongamos la conjetura de Tobias. Entonces la conjetura de Lovász es verdadera.*

Demostración. Sea G una gráfica conexa vértice-transitiva de grado d . Supongamos primero que G es de orden un número primo, por el teorema 4.2.2, tiene una trayectoria hamiltoniana cuando $p = 2$, y un ciclo hamiltoniano cuando $p > 2$. Ahora, si $(C_m, C_n) \preceq_1 G$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$, por el inciso (i) de la conjetura, G tiene una trayectoria hamiltoniana. Cuando $|G| = 1$ o G es una gráfica vacía tenemos a K_1 o $\overline{K_n}$, respectivamente, y la implicación es inmediata.

Para la inducción supongamos que $|G| = k$ y que para todas las gráficas conexas vértice-transitivas de orden menor a k el teorema es verdadero.

Sea $k > 1$ un número que no es primo, con $mn = k$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Si $(C_m, C_n) \preceq_1 G$ sólo requerimos de la primera parte de la conjetura 4.2.1. Supongamos que $(C_m, C_n) \not\preceq_1 G$; entonces existen X' y X'' gráficas, tales que $(X', X'') \preceq_1 G$, con las propiedades según la conjetura mencionada; pediremos que X' sea conexa, de lo contrario tendríamos $|X'|$ copias conexas de X'' .

Sabemos por la hipótesis de inducción, que para $m < k$, X' contiene una trayectoria hamiltoniana. Sea $\{V_x | x \in V(X')\}$ los conjuntos de particiones de $V(X)$ tales que $G[V_x] \cong X''$ para cada $x \in V(X')$. Sea x_1, x_2, \dots, x_m una trayectoria hamiltoniana en X' . Por hipótesis, podemos elegir aristas e_i de $E(G)$ para cada $1 \leq i < m$, de tal forma que tenga un extremo en V_{x_i} y el otro en $V_{x_{i+1}}$, con $e_i \cap e_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$. Sea v_1^1 un vértice de V_{x_1} que no es un extremo de e_i y tal que $\delta_{G[V_{x_1}]}(v_1^1) < d$. Análogamente, sea $v_m^2 \in V_{x_m}$ de modo que $v_m^2 \notin e_{m-1}$ y también $\delta_{G[V_{x_m}]}(v_m^2) < d$. Podemos asegurar que este par de vértices existe porque de lo contrario, el único vértice con grado menor a d en $G[V_{x_1}]$ sería v_1^2 , uno de los extremos de e_1 . Con esto tendríamos que $G \setminus \{v_1^2\}$ sería una desconexión para G . Sucede lo mismo para $v_m^2 \in G[V_{x_m}]$. Sin embargo, $\Delta(G) \geq 2$ y por el lema anterior, debemos quitar al menos $\frac{2}{3}(2+1) \geq 2$ vértices para desconectar a G .

Finalmente, describiremos la trayectoria hamiltoniana en G . Por la conjetura, $G[V_{x_i}]$ contiene una trayectoria hamiltoniana, digamos T_i para cada $1 \leq i \leq m$, la cual comienza en el vértice v_i^1 y termina en v_{i+1}^2 . Sea e_i la arista con extremos v_i^1 y v_{i+1}^2 para toda $1 \leq i < m$. Por lo tanto, la trayectoria hamiltoniana en G podemos escribirla como $T = T_1 T_2 \dots T_m$, donde e_i es la arista que conecta a T_i con T_{i+1} ; entonces, como cada $v \in V(G)$ está contenido en sólo un conjunto de la partición, T es una trayectoria hamiltoniana en G . \square

4.3. Descomposición hamiltoniana de gráficas de Cayley abelianas 6-regulares.

[Westlund, Erick E.]⁴

Esta parte está basada en la tesis para obtener el grado de doctoral de *Erick Westlund*. Su trabajo consiste en presentar una prueba de un caso particular de la *conjetura de Alspach*, la cual afirma lo siguiente:

“Toda gráfica de Cayley conexa $2k$ – regular sobre un grupo abeliano finito tiene una descomposición disjunta por aristas en k ciclos hamiltonianos.”

Sin embargo, aunque no es precisamente una variante, está motivada directamente por la conjetura de Lovász. Posterior a las definiciones necesarias, enunciaremos teoremas importantes en torno a descomposiciones hamiltonianas. Comencemos por definir una operación entre dos gráficas.

Definición 4.3.1. Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas, definimos la operación entre las gráficas, llamada producto cartesiano (o producto caja), y denotado por $G = G_1 \square G_2$. Donde el conjunto de vértices de la gráfica resultante G es $V(G) = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2\}$ y con conjunto de aristas:

$$E(G) = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2) : \{u_2, v_2\} \in E_2\} \\ \cup \{(u_1, u_2), (v_1, u_2) : \{u_1, v_1\} \in E_1\}.$$

Definición 4.3.2. Dada una partición de $E(\Gamma)$ en subconjuntos tales que

$$E(\Gamma) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$$

donde $|E_i| = |E_j|$ y $E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j$, decimos que es una *factorización isomorfa* de Γ , conformada por k subgráficas inducidas por aristas sobre los conjuntos $\langle E_i \rangle$, con $i = 1, 2, \dots, k$, y que son isomorfas dos a dos. Si Γ tiene una factorización isomórfica en subgráficas con t aristas (cada una isomorfa a una gráfica dada H), decimos que Γ posee una *t -isofactorización* en la gráfica H .

⁴Título original: *Hamilton decompositions of 6-regular abelian Cayley graphs* [Westlund, Erick E.]. La traducción al español es mía.

Definición 4.3.3. Si una gráfica G es $2k$ – regular, a cualquier partición de $E(G)$ en k ciclos hamiltonianos (si existen), se le llama *descomposición hamiltoniana*. Si G es $(2k + 1)$ – regular, la descomposición hamiltoniana se define para que cada partición de $E(G)$ en k ciclos hamiltonianos y un 1 – factor (que es una gráfica generadora 1 – regular).

Los siguientes teoremas son resultados sobre la hamiltonicidad de gráficas vértice-transitivas y gráficas de Cayley. El primero debido a Lovász y de gran trascendencia.

Teorema 4.3.1 (Lovász [27]). *Si Γ es una gráfica conexa y $\text{Aut}(\Gamma)$ contiene un subgrupo abeliano y transitivo, entonces Γ es hamiltoniana.*

Teorema 4.3.2 ([2, 9, 21, 22, 29, 30, 31, 32, 33, 41]). *Toda gráfica conexa vértice-transitiva de orden kp , p^k ó $2p^2$, donde $k \leq 4$ y p un número primo, es hamiltoniana, la gráfica de Petersen o la de Coxeter. Más aún, toda gráfica conexa vértice-transitiva de orden $5p$ ó $6p$ contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Teorema 4.3.3 (Chen-Quimpo [8]). *Toda gráfica de Cayley Γ conexa, de grado al menos 3, sobre un grupo abeliano finito es Hamilton-conexa si no es bipartita, o Hamilton-trazable si es bipartita.*

Teorema 4.3.4 (Durnberger[15], Marušič[28], Keating-Witte[20]). *Toda gráfica de Cayley Γ sobre un grupo G es hamiltoniana si tiene orden una potencia de un primo p o el subgrupo conmutador*

$$[G : G] = \langle g^{-1}h^{-1}gh : g, h \in G \rangle$$

es cíclico de orden una potencia del primo p .

Teorema 4.3.5 (Dobson et al.[14]). *Toda gráfica conexa de orden al menos 3, con grupo de automorfismos transitivo, cuyo subgrupo conmutador es cíclico de orden una potencia de un primo p , tiene un ciclo hamiltoniano o es la gráfica de Petersen.*

Teorema 4.3.6 (Marušič[30]). *Las gráficas vértice-transitivas de orden p^3 son hamiltonianas.*

Teorema 4.3.7 (Chen [9]). *Toda gráfica vértice-transitiva de orden p^4 contiene un ciclo hamiltoniano.*

Teorema 4.3.8 (Witte [44, 45]). *Toda gráfica de Cayley Γ de orden p^α contiene un ciclo hamiltoniano.*

Conjetura de Alspach:

“Toda gráfica de Cayley conexa $2k$ – regular sobre un grupo abeliano finito tiene una descomposición disjunta por aristas en k ciclos hamiltonianos.”

En el primer capítulo de [42], se hace un compendio de teoremas ya demostrados referentes a la conjetura de Alspach. Son los siguientes.

Conjetura 4.3.1 (Nash-Williams [34]). Toda gráfica k -regular con a lo más $2k + 1$ vértices tiene una descomposición hamiltoniana.

Teorema 4.3.9 (Aubert-Schneider [5]). Si Γ admite una descomposición en dos ciclos hamiltonianos y C es un ciclo, entonces $\Gamma \square C$ se puede descomponer en tres ciclos hamiltonianos.

Teorema 4.3.10 (Alspach, Bermond, Sotteau [3]). $C_{l_1} \square C_{l_2} \square \dots \square C_{l_k}$ tiene una descomposición hamiltoniana.

Teorema 4.3.11 (Stong, 1991 [40]). Si Γ_1 y Γ_2 son separables en n y m ciclos hamiltonianos, respectivamente, con $n \geq m$, entonces $\Gamma_1 \square \Gamma_2$ tiene una descomposición hamiltoniana si se cumple una de las siguientes condiciones:

- i) $m \leq 3n$
- ii) $n \geq 3$
- iii) $|V(\Gamma_1)|$ es par
- iv) $|V(\Gamma_2)| \geq 6 \lceil \frac{m}{n} \rceil - 3$.

Teorema 4.3.12 (Bermond et al. [6]). Toda gráfica de Cayley conexa 4-regular sobre un conjunto abeliano finito es descomponible en dos ciclos hamiltonianos.

Teorema 4.3.13 (Dean [10, 11]). Sea $\Gamma = \Gamma(G, S)$ una gráfica circulante 6-regular, entonces Γ tiene una descomposición hamiltoniana si se cumple una de las siguientes condiciones:

- i) $|G|$ es impar, o
- ii) existe $s \in S$ tal que $\langle s \rangle = G$.

Definición 4.3.4. Sea $S := \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ un conjunto generador de un grupo G . Decimos que S es un *conjunto generador minimal* si para cada $1 \leq i \leq k$, el elemento $s_i \notin \langle s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_k \rangle$. También, decimos que S es un *generador fuertemente minimal* si para cada $1 \leq i \leq k$, el elemento $2s_i \notin \langle s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_k \rangle$. Notemos que cada conjunto fuertemente minimal es generador minimal.

Teorema 4.3.14 (Liu [24, 25]). *Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ un generador para un grupo abeliano finito G . Entonces $\Gamma(G, S)$ tiene una descomposición hamiltoniana si se cumple uno de los siguientes incisos:*

- i) $|G|$ es impar y S es un conjunto generador minimal, o
- ii) $|G|$ es par y S es un conjunto generados fuertemente minimal.

Corolario (Liu [25]). *Sea S un conjunto de conexión minimal de G de orden al menos 4. Si $|\langle S \rangle|$ es impar para cada $s \in S$, entonces $\Gamma(G, S)$ tiene una descomposición hamiltoniana.*

Teorema 4.3.15 (Li [23]). *Una gráfica de Cayley sobre un grupo abeliano finito de orden p^2 o pq , con p, q primos impares, tienen una descomposición hamiltoniana.*

4.3.1. Últimos Resultados.

Los teoremas, lemas y corolarios nuevos en la propuesta de Westlund están repartidos en distintos capítulos, dentro de los cuales el autor presenta la prueba de cada uno; son los siguientes:

- En el *capítulo 3*:

Teorema 4.3.16 (Kreher, Liu, Westlund [43]). *Toda gráfica de Cayley conexa, 6-regular, sobre un grupo abeliano de orden impar tiene una descomposición hamiltoniana.*

- En el *capítulo 4*:

Teorema 4.3.17. *Si $G = \langle s_2, s_3 \rangle$ es un grupo abeliano de orden par, $|s_3| \geq 3$, y $|A|/2 \geq |s_1| \geq |s_2| \geq |s_3|$, donde al menos una de las desigualdades es estricta, entonces $\Gamma(A, \{s_1, s_2, s_3\})$ tiene una descomposición hamiltoniana.*

Corolario. *Sea $\Delta = \Gamma(A/\langle s_3 \rangle, \{\overline{s_1}, \overline{s_2}\})$ una gráfica cociente obtenida de $\Gamma(A, \{s_1, s_2, s_3\})$ de orden al menos 3. Si $\overline{s_2}$ genera un ciclo en Δ y $\langle s_1 \rangle$ tiene índice 2 en A , entonces Γ tiene una descomposición hamiltoniana.*

Corolario. *Si $\Gamma(\mathbb{Z}_{2m}, \{a, b, c\})$ es conexa, 6-regular, tal que $|a| = m$, y también $\text{mcd}(2m, b, c) = 1$, entonces Γ tiene una descomposición hamiltoniana.*

- En el *capítulo 5*:

Teorema 4.3.18. *Si $\Gamma(\mathbb{Z}_{2m}, \{s_1, s_2, s_3\})$ es una gráfica de Cayley conexa, 6-regular, sobre un grupo abeliano de orden par, y para alguna $1 \leq i \leq 3$, $\Delta_i = \Gamma(A/\langle s_i \rangle, \{\overline{s_{j_1}}, \overline{s_{j_2}}\})$ es 4-regular y $\Delta_i \not\cong \Gamma(\mathbb{Z}_3, \{1, 1\})$, entonces Γ tiene una descomposición hamiltoniana.*

Teorema 4.3.19. *Si $\Gamma(A, S)$ es una gráfica de Cayley conexa, 6-regular, abeliana de orden par, entonces Γ tiene una descomposición si S no tiene involuciones para alguna $s \in S$, $\Gamma(A/\langle s \rangle, \overline{S})$ es 4-regular y de orden al menos 4.*

Corolario. Si $\Gamma(A, \{s_1, s_2, s_3\})$ es una gráfica de Cayley conexa, 6-regular, abeliana de orden par, entonces Γ tiene una descomposición hamiltoniana si se cumple con alguno de los siguientes incisos:

a) $s_1 \in \langle s_2, s_3 \rangle$, y $[A : \langle s_3 \rangle] \geq 4$, o

b) $|s_1| \geq |s_2| > 2|s_3|$, o

c) $|s_1| \geq |s_2| > |s_3|$, o también

i. $|A| = (2k + 1)|s_3|$, con $k \geq 2$, o

ii. $|A| \geq 4|s_3|$ y $|s_1|$ y $|s_2|$ son impares.

Nota. Para la prueba del primer corolario en el capítulo 4 y los resultados del 5 se hace uso de una importante herramienta: *las gráficas cociente*. La definición de ésta y resultados de teoremas y lemas relacionados se anexan en el **Apéndice A**.

Apéndice A

Gráficas Cociente.

Definición 4.0.5. Si $\Gamma(G, S)$ es una gráfica de Cayley con conjunto de conexión $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ y $J := \langle s_k \rangle$, entonces la gráfica de Cayley $\Delta = (G/J, \bar{S})$, donde $\bar{S} = \{\bar{s}_i : i = 1, 2, \dots, k-1\}$ y $\bar{s}_i = s_i + J$, se le llama *gráfica cociente* de Γ . Si Γ es conexa, entonces Δ también lo es.

Definición 4.0.6. Si $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in E(\Delta)$, donde $\bar{x} - \bar{y} = \bar{s}_i$, entonces el conjunto

$$L_\Delta\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{\{u, v\} : \bar{u} = \bar{x}, \bar{v} = \bar{y}, u - v = s_i\}$$

se llama *el ascenso* $\{\bar{x}, \bar{y}\}$. Más aún, dada una subgráfica \bar{F} de Δ , sea F la subgráfica inducida sobre los *ascensos* de todas las aristas de \bar{F} . Entonces a F se le llama *el ascenso* de la subgráfica \bar{F} , o decimos que F es la *subgráfica a la que \bar{F} asciende*.

Teorema 4.0.20 (Fan et al.[16]). *Sea G un grupo abeliano finito, y sea $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ un conjunto generador para G . Si S tiene un elemento s_i de orden impar tal que $\langle s_i \rangle$ es un subgrupo de orden al menos 9 y $|\bar{s}_j| \geq 3$ para $i \neq j$, entonces $\text{Cay}(G, S)$ tiene una descomposición hamiltoniana.*

Teorema 4.0.21 (Fan et al.[16]). *Sea G un grupo abeliano de orden impar, con conjunto generador $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Si existe un elemento del menor orden estrictamente, entonces $\text{Cay}(G, S)$ tienen una descomposición hamiltoniana.*

Lema 4.0.22. [42]. *Si $\Gamma = (G, \{s_1, s_2, s_3\})$ es una gráfica de Cayley conexa 6-regular en G , donde $|s_3| \geq 6$, $[G : \langle s_3 \rangle] \geq 10$ y $2s_1, 2s_2 \notin \langle s_3 \rangle$, entonces Γ tienen una descomposición hamiltoniana.*

Lema 4.0.23. [42]. Si $\Gamma = (G, \{s_1, s_2, s_3\})$ es una gráfica de Cayley conexa 6-regular en G , donde $|s_3| \geq 5$, $[G : \langle s_3 \rangle] \geq 9$, y $2s_1, 2s_2 \notin \langle s_3 \rangle$, entonces Γ tienen una descomposición hamiltoniana.

Lema 4.0.24. [42]. Si $\Gamma = (G, \{s_1, s_2, s_3\})$ es una gráfica de Cayley conexa 6-regular en G , donde $|s_3| \geq 9$, y $2s_1, 2s_2 \notin \langle s_3 \rangle$, entonces Γ tienen una descomposición hamiltoniana.

Con ayuda de los lemas anteriores se obtiene el siguiente:

Teorema 4.0.25. [42]. Si G es un grupo abeliano y para alguna $1 \leq i \leq 3$, $\text{Cay}(G/\langle s_i \rangle, \{\overline{s_{j_1}}, \overline{s_{j_2}}\})$ es una gráfica 4-regular y de orden al menos 9, entonces $\text{Cay}(G, \{s_1, s_2, s_3\})$ tiene una descomposición hamiltoniana.

Lema 4.0.26. (Caso impar)[42]. Si G es un grupo abeliano y para alguna $1 \leq i \leq 3$, $\text{Cay}(G/\langle s_i \rangle, \{\overline{s_{j_1}}, \overline{s_{j_2}}\})$ es una gráfica 4-regular de orden $n \in \{1, 5, 7\}$, entonces $\text{Cay}(G, \{s_1, s_2, s_3\})$ tiene una descomposición hamiltoniana.

Lema 4.0.27. (Caso par)[42]. Si G es un grupo abeliano y para alguna $1 \leq i \leq 3$, $\text{Cay}(G/\langle s_i \rangle, \{\overline{s_{j_1}}, \overline{s_{j_2}}\})$ es una gráfica 4-regular de orden $n \in \{4, 6, 8\}$, entonces $\text{Cay}(G, \{s_1, s_2, s_3\})$ tiene una descomposición hamiltoniana.

Capítulo 5

Conclusión.

Puesto que el tema central para realizar esta tesis fue la *conjetura de Lovász*, se hizo una búsqueda sobre investigaciones recientes que giraran alrededor de ésta; los resultados recientes con avances importantes son en realidad pocos. Se hizo una selección sobre tres de ellos, que se consideraron de mayor interés y cercanía por el uso de técnicas de la teoría de grupos.

Es redundante decir que fue en las gráficas vértice-transitivas donde centramos nuestra atención; pero no en todas, sino sólo en algunos subconjuntos de ellas dependiendo de sus características que las hipótesis así lo requerían: las *gráficas de Cayley*, *los menores* y *menores homogéneos*, principalmente.

Al día de hoy han transcurrido 45 años de la formulación de la conjetura. Aunque pareciera mucho, sabemos que existe gran número de estas, incluso con mayor antigüedad. Un amplio número de investigadores está trabajando en nuevos resultados que se acerquen a una solución, pero aún nada que complete una prueba formal.

Los intentos por resolver la conjetura han abarcado distintos enfoques, además de los presentados. Entre ellos, *coloración*, *gráficas aleatorias*, *gráficas de Kneser*, *gráficas de Johnson*, *gráficas y subespacios vectoriales*, por citar los más sobresalientes.

Si bien no hay aportaciones propias, el objetivo es motivar nuevos avances apoyándonos de los ya existentes. Debo incluir también el gusto propio por la teoría de gráficas y la teoría de grupos; y, dado que la teoría algebraica de gráficas conjunta ambas ramas de las matemáticas, me resultó un tema de gran interés. Por ello, quiero ampliar mis conocimientos con la misma directriz.

Agradezco a mi asesora, la Doctora Eugenia O'Reilly, quien me ayudó con la elección del tema, y que con su apoyo y supervisión continua, hicieron posible el presente trabajo de investigación.

Bibliografía

- [1] AHSENDORF, TOBIAS. *On a conjecture concerning vertex-transitive graphs*, 2009.
- [2] ALSPACH, B. (1979). *Hamiltonian cycles in vertex-transitive graphs of order $2p$* . In *proceedings of the Tenth Southeastern Conference in Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979)*. Congress. Numer., XXIII-XX. Utilitas Math., Winnipeg, Man., 131-139. MR561039.
- [3] ALSPACH, B., BERMOND, J.-C., AND SOTTEAU, D. (1990). *Decomposition into cycles. I. Hamilton decompositions. In cycles and rays (Montreal, PQ, 1987)*., NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. **301**. Luwer Acad. Publ., Dordrecht, 9-18. MR1096980.
- [4] AMSTRONG, M. A. *Groups and Symetry*, Springer, Nueva York, 1988. p. 119-124.
- [5] AUBERT, J. AND SCHNEIDER, B. (1982). *Décomposition de la somme cartésienne d'un cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens*, Discrete Math. **38**, 1, 7-16, MR676514.
- [6] BERMOND, J.-C., FAVARON, O., AND MAHÉO, M. (1989). *Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree 4*. J. Combin. Theory Ser. B **46**, 2, 142-153. MR992988.
- [7] CHARTRAND, GARY. *Graphs & digraphs*, cuarta edición, Chapman & Hall/CRC. EUA, 2005

- [8] CHEN, C. C. AND QUIMPO, N. F. (1981). *On strongly Hamiltonian abelian group graphs*. In combinatorial mathematics, VII (Geelong, 1980). Lectures Notes in Math., Vol. **884**. Springer, Berlin, 23-34. MR641233.
- [9] CHEN, Y. Q. (1998). *On hamiltonicity of vertex- transitive graphs and digraphs of order p^4* . J. Combin. Theory Ser. B **72**, 1, 110-121. MR1604701.
- [10] DEAN, M. (2006). *Hamiltonian decomposition of 6-regular circulant graphs*. Graphs Combin. **22**, 3, 331-340. MR2264855.
- [11] DEAN, M. (2007). *Hamiltonian cycle decomposition of 6-regular circulant of odd order* J. Combin. Des. **15**, 2, 91-97. MR2291522.
- [12] DIESTEL, REINHARD. *Graph Theory*, Springer, Nueva York, 2005.
- [13] DIXON, JOHN. *Permutation Groups*, Springer, Nueva York, 1996.
- [14] DOBSON, E., GAVLAS, H., MORRIS, J., AND WITTE, D. (1998). *Automorphism group with cyclic commutator subgroup and Hamilton cycles*. Discrete Math. **189**, 1-3, 69-78, [http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(98\)00003-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00003-X). MR676514.
- [15] DURNBERGER, E. (1985). *Every conected Cayley graph of a group with prime order commutator has a Hamilton cylcle*. In cycles in graphs (Burnaby, B. C., 1982). Noth-Holland Math. Stud., Vol **115**. North-Holland, Amsterdam, 75-80. MR821506.
- [16] FAN, C., LICK, D. R., AND LIU, J. (1996). *Pseudo-cartesian product and Hamiltonian decomposition of Cayley graphs on abelian groups*. Discrete Math. **158**, 1-3, 49-62. MR1411109.
- [17] GODSIL, CHRIS AND ROYLE, GORDON. *Algebraic Graph Theory*, Springer, Nueva York, 2001. p. 1-50.
- [18] HERSTEIN, I. N. *Álgebra Moderna*, Trillas, México, 1990. p. 37-102.
- [19] JACOBSON, NATHAN. *Basic Algebra*, W. H. Freeman and Company, Nueva York, 1985. p. 26-84.

- [20] KEATING, K. AND WITTE, D. (1985). *On Hamilton cycles in Cayley graphs in groups with cyclic commutator subgroup*. In *cycles in graphs* (Burnaby, B. C., 1982). North-Holland Math. Stud., Vol **115**. North-Holland, Amsterdam, 89-102. MR821508.
- [21] KUTNAR, K. AND MARUŠIČ, D. (2008). *Hamiltonicity of vertex-transitive graphs of order $4p$* . European J. Combin. Comput. **29**, 2, 423-438.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejc.2007.02.002>. MR2388379.
- [22] KUTNAR, K. AND ŠPARL, P. (2009). *Hamilton paths and cycles in vertex-transitive graphs of order $6p$* . Discrete Math. **309**, 17, 5444-5460.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2008.12.005>. MR2548563.
- [23] LI, H., WANG, J., AND SUN, L. (2000). *Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of orders p^2 and pq* . Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.) **16**, 1, 78-86. MR1757325.
- [24] LIU, J. (1996). *Hamiltonian decompositions of Cayley graphs on abelian groups of odd order*. J. Combin. Theory Ser. B **66**, 1, 75-86. MR1368517.
- [25] LIU, J. (2003). *Hamiltonian decompositions of Cayley graphs on abelian groups of even order*. J. Combin. Theory Ser. B **88**, 305-321. MR1983361.
- [26] LOVÁSZ, L. (1970). *The factorization of graphs*. In *Combinatorial Structures and their Applications* (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta., 1969). Gordon and Breach, New York, 243-246. MR0268071.
- [27] LOVÁSZ, L. (2007). *Combinatorial problems and exercises*, second ed. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI. MR2321240
- [28] MARUŠIČ, D. (1983). *Hamiltonian circuits in Cayley Graphs*. Discrete Math. **46**, 1, 49-54, MR708161.
- [29] MARUŠIČ, D. (1984). *Some problems in vertex-transitive graphs*. In *finite and infinite sets Vol. I, II* (Eger, 1981). Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **37**. North-Holland, Amsterdam, 581-589. MR818261.
- [30] MARUŠIČ, D. (1985). *Vertex transitive graphs and digraphs of order p^k* . In *cycles in graphs* (Burnaby, B. C., 1982). North-Holland. Stud., Vol. **115**. North-Holland, Amsterdam, 115-128.
[http://dx.doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)73001-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-0208(08)73001-9). MR821510.

- [31] MARUŠIČ, D. (1987). *Hamilton cycles in vertex-symmetric graphs of order $2p^2$* . Discrete Math. **66**, 1-2, 169-174.
[http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(87\)90129-4](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(87)90129-4).
 MR900940 (88f:05074).
- [32] MARUŠIČ, D. AND PARSONS, T. D. (1982). *Hamilton paths in vertex-symmetric graphs of order $5p$* . Discrete Math. **42**, 2-3, 227-242.
[http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(82\)90220-5](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(82)90220-5). MR677056.
- [33] MARUŠIČ, D. AND PARSONS, T. D. (1983). *Hamilton paths vertex-symmetric graphs of order $4p$* . Discrete Math. **43**, 1, 91-96.
[http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(83\)90024-9](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(83)90024-9). MR680307.
- [34] NASH-WILLIAMS, C. S. J. A. (1971). *Hamiltonian arcs and circuits. In Recent Trends in Graph Theory (Proc. Conf., New York, 1970. Lecture Notes in Mathematics, 186. Springer, Berlin, 197-210.* MR0277417.
- [35] R. BALAKRISHNAN, K. RANGANATHAN. *A textbook of graph theory*, Springer, Nueva York, 2000.
- [36] PAK, IGOR AND RADOIČIĆ, RADOŠ (2009). *Hamiltonian paths in Cayley graphs*. Discrete Math. **309**, 17, 5501-5508, MR2548568.
- [37] ROTMAN, JOSEPH. *An introduction to the theory of groups*, Springer, Nueva York, 2000.
- [38] ROYLE, G. *The Foster Census*. Originally published in 1934 by Ronald M Foster.
<http://www.cs.uwa.edu.au/~gordon/remote/foster/>.
- [39] SABIDUSSI, G. (1958). *On a class of fixed point free graphs*. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 800-804, MR0097068.
- [40] STONG, R. (1991). *Hamilton decompositions of Cartesian products of graphs*. Discrete Math. **90**, 2, 169-190, MR1115502.
- [41] TURNER, JAMES (1967). *Pint-symmetric graphs with a prime number of points*. Combinatorial Theory 3, 136-145, MR0821510.
- [42] WESTLUND, ERICK E. *Hamilton decompositions of 6-regular abelian Cayley graphs*, Dissertation, Michigan Technological University, 2010.

- [43] WESTLUND, E. E., LIU, J., AND KREHER, D. L. (2009). *6-regular Cayley graphs on abelian groups of odd order are hamiltonian decomposable*. Discrete Math. **309**, 16, 5106-5110.
- [44] WITTE, D. (1986). *Cayley digraphs of prime-power order are hamiltonian*. J. Combin. Theory Ser. B **40**, 1, 107-112. MR830597.
- [45] WITTE, D. AND GALLIAN, J. A. (1984). *A survey: Hamiltonian cycles in Cayley graphs*. Discrete Math. **51**, 3, 293-304.
[http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(84\)90010-4](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(84)90010-4). MR762322.