UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CLAUSURAS ANULARES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
FRANK PATRICK MURPHY HERNANDEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
JOSÉ RÍOS MONTES, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.
MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

MÉXICO, D. F. 17 JUNIO 2013.

Agradecimientos

Al Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas.

Al Dr. José Ríos Montes.
Al Dr. Hugo Rincón Mejía
Al Dr. Rogelio Fernández Alonso
Al Dr. Alejandro Alvarado García
Al Dr. Jaime Castro Pérez
A la Dra. María José Arroyo

Introducción

Este trabajo surge como un proyecto de estudio de lo que se conoce como la clausura matricial de un anillo. Esta se construye como sigue: dado un anillo R se le sumerge en en el anillo de matrices de 2 por 2, $M_2(R)$, mandando a cada elemento $a \in R$ a su diagonal $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Como $M_2(R)$ es a su vez un anillo se le puede aplicar este proceso, en forma recursiva este proceso se puede aplicar repetidas veces, originando una sucesión de anillos. El proceso origina una sucesión de morfismos entre los anillos, por lo cual se puede calcular el límite directo, a este límite se le llamará la clausura matricial del anillo R.

Durante la investigación realizada, se observó que este proceso se puede hacer partiendo de otros naturales, usando conceptos de K-teoría se demostró que, con diferentes naturales se obtenían distintos anillos no isomorfos. A los anillos resultantes se les llamó n-clausuras matriciales, se llama clausura porque al repetir el proceso comenzando con su clausura se obtiene un anillo isomorfo a ésta, es decir, el operador que manda el anillo a su límite directo es idempotente, también hay una forma natural de sumergir el anillo original en su clausura, es decir, el operador es inflatorio.

En el primer capítulo se dan los antecedentes históricos de las clausuras anulares. El primer ejemplo de una clausura anular es el siguiente: sumergir a cada dominio entero conmutativo de manera canónica en un campo, su campo de cocientes, aquí el proceso resulta idempotente.

Al analizar esta situación en el caso no conmutativo encontramos algunas dificultades que señalamos en este capítulo. Consideramos entonces el problema con respecto a los elementos regulares del anillo para llegar a la solución de una manera general que satisface el anillo máximo de cocientes. Este está definido para cualquier anillo no conmutativo, ya que éste es bastante manejable en comparación con la clausura matricial.

Los resultados que se presentan en el segundo capítulo conforman un artículo que ha sido sometido a publicación en la revista Communications in Algebra. En éste se muestran todos los resultados obtenidos con respecto a la clausura matricial al plantearla utilizando herramientas de teoría de categorías, considerándola como un endofunctor de la categoría de anillos con 1. También, se ve que muchos de los morfismos planteados son naturales y se demuestra que es un operador clausura de una forma totalmente categórica. Posteriormente se demuestra que la operación de obtener la clausura matricial conmuta con varias construcciones como: el anillo de grupo para un grupo dado, el anillo de polinomios y el anillo de polinomios de Laurent. Se estudia también la relación que existe entre la retícula de ideales del anillo original y la retícula de ideales de la clausura matricial. Al final se presentan los resultados obtenidos al demostrar que propiedades de los anillos se preservan en el proceso de construir la clausura matricial, como son ser neteriano, artiniano, semisimple artiniano, artiniano, regular de von Neumann, V-anillo, quasi-Frobenius e IBN.

En el tercer y último capítulo se presentan los resultados que en honor a mi profesor y amigo el Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas estudié y con los que se ha escrito otro artículo. En este, se estudia a detalle el proceso de localización con respecto a una teoría de torsión hereditaria. Estas se abordan a partir de los radicales exactos izquierdos asociados y se analizan ciertas propiedades de las localizaciones en función puramente de prerradicales. Lo hacemos para obtener nuevas propiedades de los prerradicales, como ser: prehereditario, esencialmente idempotente, fuertemente nilpotente, esencialmente coidempotente. En el capítulo como en el artículo se hace un pequeño estudio de estas nuevas clases de preradicales y se estudian sus relaciónes con conceptos asociados con la localización.

Índice general

Notación

Para un anillo R y un natural n, $M_n(R)$ denota el anillo de las matrices de n por n.

La categoría de los anillos con 1 y los morfismos de anillos que preservan el 1 se denota por $\mathfrak{R}$. Todos los anillos aquí considerados tienen 1.

Cuando se hable de módulos (izquierdos, derechos o bilaterales) sobre un anillo, siempre se supondrá que la acción es unitaria. La clase de todos los módulos izquierdos sobre un anillo R se denota por R-Mos, analógamente la clase de todos los módulos derechos se denota por Mod-R. Si N es un submódulo esencial de M esto se denotará por $N \trianglelefteq M$. La cápsula inyectiva de un R-módulo M se denotará por $E(M)$. Si N es un submódulo de M se dice que M es denso si $Hom_R(M/N, E(M)) = 0$ y se denota por $N \subseteq_d M$.

Cuando se hable de un anillo no conmutativo, se quiere marcar el hecho de que el anillo no necesariamente es conmutativo.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se presentan los resultados clásicos de la teoría de localizaciones para anillos no conmutativos. Empezando con el problema de extender un dominio entero a un anillo con división, continuando con el problema de localizar un anillo con respecto a un conjunto multiplicativo, pasando al anillo de cocientes clásico. Siguiendo con el anillo de cocientes máximo. Finalmente describimos la localización con respecto a una topología de Gabriel generalizando todas las localizaciones anteriores.

1. El Problema de los Anillos con División

La teoría de anillos de cocientes no conmutativa inicio en la tercera década del siglo XX con la pregunta de Bartel Leendert van der Waerden: ¿ puede todo dominio entero no conmutativo sumergirse en un anillo con división?. Esta pregunta se repondió negativamente por Mal'cev. Al dar un álgebra de semigrupo cuyo semigrupo no se puede sumergir en ningún grupo. (9)

Otra pregunta natural es, ¿ en caso de que se pueda extender el dominio a un anillo con división, es éste único salvo isomorfismo?. Lo cual es falso y el contraejemplo fue dado por J. L. Fisher.

El problema se resolvio con herramientas de teoría de categorías, planteando el problema como una propiedad universal. Dado un dominio entero R y S un subconjunto multiplicativo de R, se define el anillo R localizado en S, denotado por R_S. También se pide que exista un morfismo de anillos $\phi : R \longrightarrow R_S$ que se sumpla que:

- Para cada $s \in S$, $\phi(s)$ es invertible en R_S.
- Cada elemento de R_S es de la forma $\phi(a)\phi(s)^{-1}$ con $a \in R$ y $s \in S$.
- $\phi(a) = 0$ si y sólo si existe $s \in S$ tal que $as = 0$.

Se observa que esto no es una localización en el sentido de álgebra conmutativa, pero sí en el sentido de la teoría de categorías. Una localización en teoría de categorías se entiende como: para una categoría $\mathbb{A}$ y $\mathcal{C}$ una colección de flechas en ella, una localización para $\mathbb{A}$ y $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}$ y un funtor $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{C}}$ tal que $F(\alpha)$ es un isomorfismo para todo $\alpha \in \mathcal{C}$. A un anillo se le puede considerar como una categoría con un objeto cuyas flechas son sus elementos y la composición la multiplicación, bajo este planteamiento los morfismos de anillos resultan funtores.

Ø. Ore dió una condición necesaria y suficiente para resolver este problema cuando R es un dominio entero y S el conjunto de elementos regulares, el cual siempre es un conjunto multiplicativo, es decir, obtuvo el siguiente teorema:

TEOREMA 1.1. *Un dominio entero D se puede localizar con respecto a $D \setminus \{0\}$ si y solo si para cada $a, s \in D$ con $s \neq 0$ existen $b, t \in D$ con $t \neq 0$ tales que $sb = at$.*

Como se definió la localización es claro que D localizado en sus elementos regulares es un anillo con división; K. Asano generalizó el teorema anterior de la siguiente manera:

TEOREMA 1.2. *Un anillo R se puede localizar con respecto a $S \subseteq R$ si y sólo si se cumple:*

- *Para $a \in R$ y $s \in S$, existen $t \in S$ y $b \in R$ tales que $sb = at$.*
- *Si para $a \in R$ y $s \in S$ se tiene que $sa = 0$ entonces existe $t \in S$ tal que $at = 0$.*

Un conjunto multiplicativo S que cumple las dos condiciones establecidas en el teorema 2 se llama un **conjunto denominador derecho**. De manera análoga se define un conjunto denominador izquierdo y un conjunto denominador bilateral. Un conjunto S se llama **permutable derecho** si cumple la primera condición del teorema 2 y se llamará **invertible derecho** si cumple la segunda del teorema 2. El último teorema resuelve el problema de la existencia. Con respecto a la unicidad se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 1.3 (Propiedad Univeral de R_S). *Sean R un anillo y S un subconjunto denominador derecho de R. Si $\psi : R \longrightarrow R'$ es un morfismo de anillos tal que para cada $s \in S$ se tiene que $\psi(s)$ es invertible, entonces existe un único morfismo de anillos $\sigma : R_S \longrightarrow R'$ tal que $\sigma\phi = \psi$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & R_S \arrow[dl, "\sigma"] \\ R' & \end{tikzcd}$$

Como es de esperarse se tiene:

COROLARIO 1.1. *R_S es único salvo isomorfismo.*

En el caso de un dominio entero se tienen condiciones necesarias y suficientes para poder extenderlo a un anillo con división de manera única, con lo que se resolvió el problema planteado por van der Waerden.

Se observa que las condiciones de Ore siempre se cumplen en el caso conmutativo, es decir, un conjunto multiplicativo en un anillo conmutativo siempre es un conjunto denominador.

2. Anillo de Cocientes Clásico

Llamamos R_{reg} al conjunto de elementos regulares del anillo R que es un conjunto multiplicativo e invertible.

Cuando este conjunto es permutable derecho se dirá que el anillo es un **anillo de Ore derecho**. Ejemplos de estos son los anillos regulares de von Neumann y los anillos conmutativos. Para un anillo de Ore derecho, en vez de escribir $R_{R_{reg}}$ se escribe $Q^r_{cl}(R)$, y se le llama el anillo de cocientes clásico de R. Un **dominio de Ore derecho** es un dominio entero que además es un anillo de Ore derecho, en este caso, su anillo clásico de cocientes resulta ser un anillo con división. Ejemplos de dominios de Ore derechos son:

- Dominios enteros conmutativos.
- Dominios neterianos derechos.
- Dominios de Bezout derechos.
- Anillos de polinomios sobre un campo.
- Dominios que son PI-álgebras sobre un campo.
- Las álgebras de Weyl sobre un dominio de Ore.

Para un anillo Q, se dice que un subanillo R de Q es un **orden derecho** de Q si;

- Todo elemento regular en R es invertible en Q.
- Todo elemento en Q es de la forma as^{-1} con $a, s \in R$ donde s es un elemento regular en R.

Es decir, un subanillo R de un anillo Q es un orden derecho de Q si y sólo si Q es el anillo clásico de cocientes derecho de R. Los anillos que sean su propio anillo clásico de cocientes se llamarán **anillos de fracciones**. Algunos ejemplos son:

- Anillos con división.
- Anillos regulares de von Neumann.
- Anillos fuertemente π-regulares.
- Anillos perfectos izquierdos.
- Anillos artinianos por algún lado.
- Anillos conmutativos con dimensión de Krull 0.
- Anillos locales con ideal máximo nilideal.
- Anillos de endomorfismos de un espacio vectorial sobre un anillo con división.
- Anillos autoinyectivos derechos.

Respecto a los órdenes derechos se pueden hacer ciertas observaciones, tales como:

- Si $R \subseteq R' \subseteq Q$ son anillos para los cuales R es un orden derecho en Q, entonces R' es un orden derecho en Q.
- Sean $R \subseteq Q$ dos anillos donde Q es un anillo fuertemente π-regular y denotamos por $U(Q)$ el conjunto de unidades de Q. Entonces R es un orden derecho en Q si cada elemento de Q es de la forma as^{-1} donde $a \in R$ y $s \in R \cap U(Q)$.
- Si R es un orden derecho en un anillo artiniano Q entonces $M_n(R)$ es un orden derecho en $M_n(Q)$.

Ejemplos de anillos R que son órdenes derechos en anillos Q son:

- R es un dominio de Ore y Q es el anillo de fracciones de R.
- Q es el anillo con división de los cuaterniones racionales y Res cualquier subanillo que contenga a los elementos i, j, k.

- $Q = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b(mod\ n)\}$ con n un natural distinto de cero.

  Sea A un dominio conmutativo y K su campo de cocientes.

- Sea Q una K-álgebra finitamente generada. Si R es un A-álgebra con $R \subseteq Q$, R es finitamente generado como A-módulo y $RK = Q$ entonces a R es un orden derecho de Q y se le llamará un **A-orden clásico** en Q. Se observa que todo A-orden clásico resulta ser un orden derecho.
- $Q = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ y $R = \mathbb{Z} + n\mathbb{Z}\sqrt{5}$ con $n \neq 0$ es un $\mathbb{Z}$-orden clásico.
- $Q = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ y $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\sqrt{5} - 1)/2$ con $n \neq 0$ es un $\mathbb{Z}$-orden clásico máximo (con respecto al orden de la contención).
- Q es el álgebra de cuaterniones racionales y $R = \frac{1}{2}(1+i+j+k)\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}+j\mathbb{Z}+k\mathbb{Z}$ el anillo de cuaterniones de Hurwitz es un $\mathbb{Z}$-orden clásico máximo.
- Sean A un dominio conmutativo con campo de cocientes K y G un grupo finito. Entonces $A[G]$ el álgebra de grupo es un A-orden clásico en $K[G]$.

El siguiente gran salto en esta teoría surgió con la pregunta: ¿Qué clase de anillos tienen anillos clásicos de cocientes semisimple?. Este problema fue atacado con exito por Goldie y Lesieur-Croisot a finales de los años cincuenta.

Un anillo R es de Goldie derecho si su dimensión uniforme derecha es finita, $u.dimR_R < \infty$, y cumple la condición descendente de cadena en los ideales anuladores derechos.

Observaciones:

- Todo anillo neteriano derecho es un anillo de Goldie derecho. El recíproco no es cierto, puesto que cualquier dominio conmutativo es un anillo de Goldie derecho.
- Si Q es un anillo de Goldie derecho y R es un orden derecho de Q, entonces R es un anillo de Goldie derecho.
- Todo orden derecho en un anillo neteriano derecho es de Goldie derecho.

El siguiente teorema, llamado el Segundo Teorema de Goldie, describe los anillos que tienen anillo clásico de cocientes semisimple.

TEOREMA 2.1 (Goldie). *Para un anillo R son equivalentes:*

1. *R es un orden derecho en un anillo semisimple Q.*

2. *R es un anillo de Goldie derecho semiprimo.*
3. *Un ideal derecho es regular si y sólo si contiene un elemento regular.*

El enunciado en el teorema 4 se expresa en el lenguaje de prerradicales de la siguiente forma:

TEOREMA 2.2. *Sea R un anillo y sea Q su anillo clásico de cocientes (en caso de existir). Sea Z el prerradical singular y sea t el prerradical de torsión usual. Entonces R es un anillo de Goldie sderecho semiprimo si y sólo si $Z = t$. Más aún para cada $M \in R - Mod$, $t(M) = Z(M) = nuc\{M \to M \otimes_R Q\}$.*

Ahora se tiene como corolario el que comúnmente se llama el Segundo Teorema de Goldie

COROLARIO 2.1. *Un anillo R es un orden derecho en un anillo simple artiniano Q si y sólo si R es Goldie derecho primo.*

Los siguientes cinco corolarios sirven para obtener más ejemplos.

COROLARIO 2.2. *Si R es un anillo de Goldie derecho semiprimo entonces $M_n(R)$ es Goldie derecho semiprimo.*

COROLARIO 2.3. *R es un anillo de Goldie derecho primo entonces $M_n(R)$ es Goldie derecho primo.*

COROLARIO 2.4 (Small). *Si R es un anillo de Goldie derecho semiprimo si y sólo si $R[x]$ es Goldie derecho semiprimo.*

COROLARIO 2.5 (Small). *Si R es un anillo de Goldie derecho primo si y sólo si $R[x]$ es Goldie derecho primo.*

COROLARIO 2.6. *Un dominio R es de Goldie derecho si y sólo si es Ore derecho.*

En vista del Segundo Teorema de Goldie, para producir ejemplos solo se necesitan ejemplos de anillos Goldie derechos semiprimos.

- Si R es un dominio de Ore derecho con $Q = Q_{cl}(R)$, entonces cualquier anillo entre $M_n(R)$ y $M_n(Q)$ es Goldie derecho primo.
- Si G es un grupo finito, entonces por el Teorema de Maschke cualquier anillo entre $\mathbb{Z}[G]$ y $\mathbb{Q}[G]$ es Goldie derecho semiprimo.

1.3 Anillo de cocientes máximo

El siguiente gran avance se debe a Findlay, Utumi y Lambek que estudiaron el anillo máximo de cocientes de un anillo. El primero en desarrollar la idea fue Johnson pero sólo para el caso de anillos no singulares. Contrastando con el caso del anillo clásico de cocientes, el anillo máximo de cocientes siempre existe para todos los anillos. Al anillo máximo de cocientes de un anillo R se le denota como $Q^r_{max}(R)$. Si no hay confusión con el lado, simplemente se denotara por $Q_{max}(R)$. Cuando el anillo R es de Ore derecho se tendrá que el anillo clásico de cocientes $Q_{cl}(R)$ es un subanillo del anillo máximo de cocientes $Q_{max}(R)$.

Consideremos la cápsula inyectiva $I = E(R_R)$ del anillo R visto como módulo por la derecha. Denotemos H al anillo de endomorfismos de I, I tiene estructura de H-R-módulo. Se define el anillo máximo de cocientes como $Q_{max}(R) := End(_H I)$. Esta construcción se puede hacer para cualquier R-módulo y se llama el **biconmutador** o el **doble conmutador** de M. La cápsula racional del anillo R es:

$$\widetilde{E}(R) = \{i \in I \mid \forall h \in H, h(R) = 0 \Rightarrow h(i) = 0\}$$

Se puede considerar el R-morfismo $\varepsilon : Q_{max}(R) \longrightarrow I$ definido por $\varepsilon(q) = q(1)$ y éste morfismo induce un isomorfismo de $Q_{max}(R)$ en $\widetilde{E}(R)$. Se puede identificar a $Q_{max}(R)$ con $\widetilde{E}(R)$ usando el isomorfismo ε. Esto hace que $\widetilde{E}(R)$ tenga una estructura de anillo que extiende su estructura de R-módulo.

Para justificar el nombre de anillo de cocientes máximo se da la siguiente definición. Si R es un subanillo de T, si $R_R \subseteq_d T_R$ entonces se dirá que T es un **anillo de cocientes** de R.

Se tiene que la cápsula racional de R es la máxima extensión racional de R. Es decir es el máximo módulo donde R es denso. Así R es denso en $Q_{max}(R)$ y por lo tanto $Q_{max}(R)$ es un anillo de cocientes. Basta ver que es máximo en algún sentido, por lo que se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2.3. *Sea T un anillo de cocientes derecho de R. Entonces*

- *Existe un único morfismo de anillos $f : T \longrightarrow Q_{max}(R)$ que extiende la identidad en R.*
- *El morfismo f es un monomorfismo.*
- *La estructura de anillo en $Q_{max}(R)$ es la única que extiende la estructura de R-módulo en $Q_{max}(R)_R$.*

COROLARIO 2.7. *Si $Q_{cl}(R)$ existe, entonces se puede sumergir de manera única en el anillo $Q_{max}(R)$ de modo que se extienda la identidad en R.*

Como ejemplos de anillos de cocientes máximos se tienen:

- Si R es un dominio conmutativo con campo de cocientes K, entonces $Q_{max}(R) = Q_{cl}(R) = K$.
- Si R es el anillo de matrices de $n \times n$ triangulares superiores sobre un anillo semisimple K. Entonces $Q_{cl}(R) = R$ y $Q_{max}(R) = M_n(K)$.

Se ve que no necesariamente el anillo clásico de cocientes y el máximo tienen que coincidir. El siguiente teorema y sus dos corolarios presentan condiciones suficientes para que esto pase:

TEOREMA 2.4. *Si $Q_{cl}(R)$ existe y cada ideal derecho denso tiene un elemento regular entonces $Q_{max}(R) = Q_{cl}(R)$.*

COROLARIO 2.8. *Si R es un anillo Goldie derecho semiprimo entonces $Q_{max}(R) = Q_{cl}(R)$.*

COROLARIO 2.9 (Small). *Si R es un anillo conmutativo con condición de cadena ascendente en los ideales anuladores entonces $Q_{max}(R) = Q_{cl}(R)$.*

Una pregunta natural es que pasa si se repite el procedimiento, es decir, ¿Quién es $Q_{max}(Q_{max}(R))$?. Para responder esto se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5. *Sea $Q = Q_{max}(R)$. Entonces I_Q es la cápsula inyectiva de la imagen canónica de Q_Q y $End(I_Q) = H$.*

Lo que contesta la pregunta con el siguiente corolario

Corolario 2.10. *Q es su propio anillo de cocientes máximo.*

T.Y. Lam menciona que éste último teorema junto con su corolario hace que pueda pensar en la construcción del anillo máximo de cocientes como una especie de operador de clausura. Los siguientes teoremas presentan una vista más amplia de que la asignación $R \mapsto Q_{max}(R)$ es un operador de clausura.

Teorema 2.6. *Sean T un anillo de cocientes de S y S un anillo de cocientes de R entonces T es un anillo de cocientes de R.*

Teorema 2.7. *Sean T un anillo de cocientes de R.*

- *$T = Q_{max}(R)$ si y solo si $T = Q_{max}(T)$.*
- *$Q_{max}(R) = Q_{max}(T)$.*

El siguiente resultado es corolario del teorema lo que sugiere la idea de operador de clausura y da idea de la relación que tiene el anillo con su anillo máximo de cocientes.

Corolario 2.11. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *${}_H H \cong_H I$ canónicamente.*
- *$I_R \cong Q_R$ canónicamente.*
- *$H \cong R$ canónicamente como anillos.*
- *Q_R es inyectivo.*
- *$I_Q \cong Q_Q$ canónicamente.*
- *Q_Q es inyectivo.*

Ahora se presenta el Teorema de Johnson. En su publicación original considera anillos no singulares, en este caso se tiene que I resulta ser $Q_{max}(R)$.

Teorema 2.8 (Johnson). *Para un anillo R son equivalentes:*

- *R es no singular.*

- *I_R es no singular.*
- *H es semisimple de Jacobson.*
- *$Q_{max}(R)$ es regular de von Neumann.*

Para ilustrar el poder del Teorema de Johnson se tienen los siguientes dos resultados de S. K. Jain

LEMA 2.1 (Jain). *Sea R un subanillo de S con R un dominio y S regular de von Neumann. Si $R_R \subseteq_e S_R$, entonces S es un anillo simple.*

COROLARIO 2.12 (Jain). *Para un dominio R, $Q_{max}(R)$ es un anillo simple autoinyectivo derecho regular y de von Neumann derecho.*

El Teorema de Johnson da condiciones necesarias y suficientes para que el anillo máximo de cocientes sea regular de von Neumann, pero se puede refinar esto pidiendo que el anillo máximo de cocientes sea semisimple.

TEOREMA 2.9 (Gabriel). *Sea R un anillo, $Q_{max}(R)$ es semisimple si y sólo si R es no singular derecho con $u.dim(R_R) < \infty$.*

3. Anillos de Cocientes con respecto a una Topología de Gabriel

El último avance en la teoría de los anillos de cocientes es el de los anillos de cocientes con respecto a una topología de Gabriel. Esta técnica se debe a P. Gabriel, es una ingeniosa aplicación del método de contruir la gavilla asociada a una pregavilla para una topología de Grothendieck aditiva.

Una topología de Gabriel en un anillo R es un filtro $\mathfrak{I}$ no vacío de ideales derechos que cumple:

- Para cada $I \in \mathfrak{I}$ y cada $a \in R$, $(I : a) \in \mathfrak{I}$.
- Para I un ideal derecho y $J \in \mathfrak{I}$, si para cada $a \in J$ se tiene que $(I : a) \in \mathfrak{I}$ entonces $I \in \mathfrak{I}$

Se define un orden en $\mathfrak{I}$ dado por $I \leq J$ si $J \subseteq I$. Por ser $\mathfrak{I}$ un filtro este orden es dirigido y para cada R-módulo M se puede definir :

$$M_{(\mathfrak{I})} := \varinjlim_{I \in \mathfrak{I}} Hom_R(I, M)$$

Se busca darle a $R_{(\mathfrak{I})}$ estructura de anillo, para esto se hace notar que un elemento de $M_{(\mathfrak{I})}$ ésta representado por un R-morfismo $\alpha : I \longrightarrow M$ con $I \in \mathfrak{I}$. Para poder definir una función

$$M_{(\mathfrak{I})} \times R_{(\mathfrak{I})} \longrightarrow M_{(\mathfrak{I})}$$

para $[\alpha : I \longrightarrow M] \in M_{(\mathfrak{I})}$ y $[\beta : J \longrightarrow R] \in R_{(\mathfrak{I})}$ con $I, J \in \mathfrak{I}$ lo haremos como:

$$[\alpha : I \longrightarrow M][\beta : J \longrightarrow R] = [\beta^{-1}(J) \longrightarrow J \longrightarrow M]$$

Ésta función es biaditiva, si se considera el caso $M = R$. Esto le brinda la estructura deseada de anillo a $R_{(\mathfrak{I})}$ y para cualquier R-módulo M se tendrá que $M_{(\mathfrak{I})}$ tiene estructura de $R_{(\mathfrak{I})}$-módulo. Existe un morfismo canónico $\phi_M : M \longrightarrow M_{(\mathfrak{I})}$ cuando se identifica a M canónicamente con $Hom_R(R, M)$. Se tiene que ϕ_R es un morfismo de anillos lo que hace que todo $R_{(\mathfrak{I})}$-módulo sea un R-módulo naturalmente. Se tiene un funtor exacto izquierdo K dado por la asignación $M \mapsto M_{(\mathfrak{I})}$. Si se compone éste con el funtor que olvida U de Mod-$R_{(\mathfrak{I})}$ en Mod-R se obtiene un funtor L de Mod-R en Mod-R. Si se considera el radical exacto izquierdo t asociado a la topología de Gabriel $\mathfrak{I}$, se tienen los siguientes lemas:

Lema 3.1. *Para todo R-módulo M, $nuc\phi_M = t(M)$.*

Lema 3.2. *Para todo R-módulo M, M es un módulo de $\mathfrak{I}$-torsión si y sólo si $M_{(\mathfrak{I})} = 0$*

Lema 3.3. *Para todo R-módulo M, $conuc\phi_M$ es un módulo de $\mathfrak{I}$-torsión.*

Para obtener el módulo de cocientes respecto a una topología de Gabriel se vuelve a aplicar el funtor L a $M_{(\mathfrak{I})}$. Este módulo se denotará por $M_{\mathfrak{I}}$. En particular se tiene que $R_{\mathfrak{I}}$ es un anillo, al que se le llamará el anillo de cocientes con respecto a la topología $\mathfrak{I}$. Éste está descrito por:

$$R_{\mathfrak{I}} := \varinjlim_{I \in \mathfrak{I}} Hom_R(I, R/t(R))$$

En particular se tiene que si $\mathfrak{D}$ es el conjunto de todo los ideales derechos densos éstos forman una topología de Gabriel y en este caso se tiene que $R_{\mathfrak{D}} = Q_{max}(R)$. Más aún, como en esta topología se tiene que R es libre de $\mathfrak{D}$-torsión se tiene que:

$$R_{\mathfrak{D}} := \varinjlim_{I \in \mathfrak{D}} Hom_R(I, R)$$

Esto quiere decir que $R_{\mathfrak{D}} = R_{(\mathfrak{D})}$. En el caso en el que S sea un subconjunto multiplicativo de R que cumpla con ser denominador derecho, se puede construir el conjunto $\mathfrak{S}$ de ideales derechos que intersectan a S en un conjunto no vacío. $\mathfrak{S}$ forma una topología de Gabriel y en este caso se tiene que $R_{\mathfrak{S}} = R_S$. La construcción propuesta por Gabriel generaliza las anteriores.

Capítulo 2

Clausura Matricial

1. Introducción

La clausura matricial tiene mucha relación con las álgebras ultramatriciales. Una álgebra ultramatricial es el límite directo de un sistema dirigido numerable de álgebras de matrices sobre un campo fijo K. La clausura matricial es un caso particular en el sentido de que sólo se consideran una familia de sistemas dirigidos numerables. Por otro lado el objetivo principal de éste cápitulo es estudiar la clausura matricial no sobre un campo si no sobre un anillo arbitrario, lo que complica mucho el estudio de las clausuras matriciales. Las álgebras ultramatriciales se han estudiado extensamente, dada su importancias en ciertas áreas de la geometría no conmutativa y que si se considera el functor K_0 de la K teoría algebraica el grupo ordenado con unidad determina de forma única el álgebra ultramatricial, por éste lado no es posible conseguir resultados similares, ya que el el funtor K_0 no determina a los anillos en general, así que no se sigue está linea de investigación . Se prueba que la clausura matricial es un operador clausura sobre la categoría de los anillos con uno y los morfismos de anillos cuando se toma el gran preorden inducido por los monomorfismos. Primero se define la clausura matricial como un operador en la categoría de anillos y se ve que no sólo es un operador sino un endofuntor, después se ve que las propiedades del operador clausura se cumplen de manera natural, es decir, existe una familia de monomorfismos que da la propiedad de ser inflatoria de tal forma que esta familia es una transformación natural y existe una familia de isomorfismos que da la propiedad de ser idempotente de tal forma que ésta familia resulta un isomorfismo natural . Se prueba que la clausura matricial conmuta con algunas construcciones conocidas como la de la construcción del anillo de grupo o el anillo de polinomios. Después se estudian dos funtores entre la categoía de módulos izquierdos de un anillo y la categoría de módulos izquierdos de la clausura matricial de un anilllo. El primero es el inducido por el morfismo de anillos de la propiedad inflatoria, el segundo es el límite directo de equivalencias de Morita de un anillo con su anillo de matrices. En general ninguno de los dos es una equivalencia, pero el segundo preserva algunas propiedades interesantes como las de ser simple o ser fiel. Se estudia la retícula de ideales de la clausura matricial dando un isomorfismo de retículas entre la retícula de ideales bilaterales de un anillo y la retícula de ideales bilaterales de su clausura matricial, como en el caso clásico entre un anillo y su anillo de matrices, también se demuestra que con respecto a los ideales izquierdos la retícula puede crecer bastante. Se estudia un número de condiciones de cadena y se señalan condiciones respecto a dimensiones que la clausura matricial nunca cumplirá. Por último se estudia el comportamiento de la clausura matricial con respecto al radical de Jacobson, anillos primos, anillos semiprimos, V-anillos, anillos regulares de von Neumann y anillos con número de base invariante.

2. Clausura Matricial

2.1. Definición. Sea n un entero positivo, se define la asignación $M_n : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que a cada anillo R le asigna $M_n(R)$ y que a cada morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$, le asigna $M_n(f) : M_n(R) \longrightarrow M_n(S)$ dada por : $M_n(f)(A)_{ij} = f(A_{ij})$ con $1 \leq i, j \leq n$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si n es un entero positivo, entonces $M_n : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ es un funtor.*

Demostración

Obviamente M_n manda anillos en anillos, lo que queda por ver es que manda morfismos en morfismos. Sean $f : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos, $A, B \in M_n(R)$ y $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} M_n(f)(A+B)_{ij} &= f((A+B)_{ij}) \\ &= f(A_{ij} + B_{ij}) \\ &= f(A_{ij}) + f(B_{ij}) \\ &= M_n(f)(A)_{ij} + M_n(f)(B)_{ij}. \end{aligned}$$

Lo que significa que $M_n(f)(A+B) = M_n(f)(A) + M_n(f)(B)$.

$$\begin{aligned}
M_n(f)(AB)_{ij} &= f((AB)_{ij}) \\
&= f(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(A_{ik})f(B_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_n(f)(A)_{ik}M_n(f)(B)_{kj} \\
&= (M_n(f)(A)M_n(B))_{ij},
\end{aligned}$$

lo que dice que $M_n(f)(AB) = M_n(f)(A)M_n(f)(B)$. Finalmente

$$\begin{aligned}
M_n(f)(I_n)_{ij} &= f((I_n)_{ij}) \\
&= f(\delta_{ij}) \\
&= \delta_{ij} \\
&= (I_n)_{ij},
\end{aligned}$$

que implica que manda el uno al uno, por lo tanto $M_n(f)$ es un morfismo de anillos.

Sean $f : R \longrightarrow S$ y $g : S \longrightarrow T$ morfismos de anillos, $A \in M_n(R)$ y $1 \leq i, j \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}
M_n(gf)(A)_{ij} &= g(f(A_{ij})) \\
&= g(M_n(f)(A)_ij) \\
&= M_n(g)M_n(f)(A)_{ij}
\end{aligned}$$

que es $M_n(gf) = M_(g)M_n(f)$. Por último

$$\begin{aligned}
M_n(1_R)(A)_{ij} &= 1_R(A_{ij}) \\
&= A_{ij} \\
&= 1_{M_n(R)}(A)_{ij}
\end{aligned}$$

que es $M_n(1_R) = 1_{M_n(R)}$. Por lo tanto M_n es un funtor. ■

Para cualquier entero no negativo n se tiene también la transformacińı natural $\eta^n : 1_{\mathfrak{R}} \longrightarrow M_n$ dada por: para cualquier anillo R y $a \in R$, $\eta^n_R : R \longrightarrow M_n(R)$ está dado por $\eta^n_R(a)_{ij} = a\delta_{ij}$ con $1 \leq i, j \leq n$.

Proposición 2.2. *Si n es un entero positivo, entonces $\eta^n : 1_{\mathfrak{R}} \longrightarrow M_n$ es una transformación natural.*

Demostración

Sean $f : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos y $a \in R$, $((\eta^n_S \circ f)(a))_{ij} = (\eta^n_S(f(a)))_{ij} = f(a)\delta_{ij}$ con $1 \leq i, j \leq n$. Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} ((M_n(f) \circ \eta^n_R)(a))_{ij} &= (M_n(f)(\eta^n_R(a)))_{ij} \\ &= f(\eta^n_R(a)_{ij}) \\ &= f(a\delta_{ij}) \\ &= f(a)\delta_{ij}, \end{aligned}$$

así que $M_n(f)\eta^n_R = \eta^n_S f$, es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta^n_R"'] & S \arrow[d, "\eta^n_S"] \\ M_n(R) \arrow[r, "M_n(f)"'] & M_n(S) \end{tikzcd}$$

■

Es bien sabido que para una pareja de enteros positivos n y m, hay un isomorfismo natural entre $M_n \circ M_m$ y M_{nm}. Por lo que se fija n y para cualesquiera m, k naturales se considera $\alpha[R, n]^k_m = \bigodot_{i=m}^{k-1} \eta^n_{M_{n^i}(R)}$ si $m < k$ y $\alpha[R, n]^k_m = 1_{M_{n^k}(R)}$ if $m = k$. La última composición se hace identificando $M_k(M_m(R))$ con $M_{km}(R)$ por medio de los isomorfimos naturales previamente mencionados. Para cualquier anillo R y cualquier entero positivo n se consigue un sistema dirigido por el conjunto de los naturales con el orden usual. El límite directo se denota por $MC_n(R)$. Se denotará por

$i[R]^n_k : M_{n^k}(R) \longrightarrow MC_n(R)$ el morfismo canónico en el límite directo. También se resalta que este morfismo es inyectivo y entonces un monomorfismo de anillos. Ahora se considera un morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$ y se toma la familia de morfismos de anillos $\{M_{n^k}(f) : M_{n^k}(R) \longrightarrow M_{n^k}(S)\}_{k\in\mathbb{N}}$ inducida por los funtores $\{M_{n^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y se componen con la familia de morfismos de anillos $\{i[S]^n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de tal manera que se obtiene una familia de anillos $\{i[S]^n_k \circ M_{n^k}(f) : M_{n^k}(R) \longrightarrow MC_n(S)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esta familia es compatible, por lo que por la propiedad universal del límite directo se tiene un único morfismo de anillos $MC_n(f) : MC_n(R) \longrightarrow MC_n(S)$.

Proposición 2.3. *Si n es un entero positivo, entonces MC_n es un funtor.*

Demostración

De nuevo es obvio que $MC_n : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ manda anillos en anillos. Por lo que hay que enfocarse en los morfismos, primero se nota que $\alpha[\_, n]^k_m : M_{n^m} \longrightarrow M_{n^k}$ es una transformación natural porque es la composición de transformaciones naturales. Por lo que para cualquier morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_{n^m}(R) \arrow[r, "M_{n^m}(f)"] \arrow[d, "{\alpha[R,n]^k_m}"'] & M_{n^m}(S) \arrow[d, "{\alpha[S,n]^k_m}"] \\
M_{n^k}(R) \arrow[r, "M_{n^k}(f)"'] & M_{n^k}(S)
\end{tikzcd}$$

Esto es $M_{n^k}(f) \circ \alpha[S, n]^k_m = \alpha[R, n]^k_m \circ M_{n^m}(f)$. Ahora se considera que los monomorfismos canónicos satisfacen $i[S]^n_m = i[S]^n_k \circ \alpha[S, n]^k_m$,entonces componiendo la igualdad pasada por la izquierda con $i[S]^n_k$ se obtiene $i[S]^n_k \circ M_{n^k}(f) \circ \alpha[S, n]^k_m = i[S]^n_k \circ \alpha[R, n]^k_m \circ M_{n^m}(f) = i[S]^n_m \circ M_{n^m}(f)$ entonces la condición de compatibilidad es satisfecha y se obtiene $MC_n(f)$.$\blacksquare$

Se llamará $MC_n(R)$ la n-clausura matricial del anillo R.

2.2. Propiedades de Clausura.

Proposición 2.4 (Propiedad Inflatoria). *Si n y k son enteros positivos, entonces $i_k^n : M_{n^k} \longrightarrow MC_n$ es una transformación natural inyectiva.*

Demostración

Se desea mostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_{n^k}(R) \arrow[r, "M_{n^k}(f)"] \arrow[d, "{i[R]_n^k}"'] & M_{n^k}(S) \arrow[d, "{i[S]_n^k}"] \\ MC_n(R) \arrow[r, "MC_n(f)"'] & MC_n(S) \end{tikzcd}$$

para cualquier morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$. Pero $MC_n(f) \circ i[R]_n^k = i[S]_n^k \circ M_{n^k}(f)$ por la propiedad universal del límite directo. ■

Se denotará por $i_n : 1_{\mathfrak{R}} \longrightarrow MC_n$ la transformación natural mencionada arriba para el caso en que $k = 0$.

Proposición 2.5 (Propiedad de Monotonía). *Si n es un entero positivo, R y S son anillos y $f : R \longrightarrow S$ es un monomorfismo de anillos, entonces $MC_n(f)$ es un monomorfismo de anillos.*

Demostración

Se sigue de que el funtor M_{n^k} manda monomorfismos en monomorfismos. ■

Proposición 2.6 (Propiedad de Idempotencia). *Si n es un entero positivo, entonces existe un isomorfismo natural entre MC_n y MC_n^2.*

Demostración

Primero se demostrará que hay un isomorfismo natural entre $M_n \circ MC_n$ y MC_n. Para hacer esto, se construye $\epsilon[n]_R : M_n(MC_n(R)) \longrightarrow MC_n(R)$, como sigue. Se toma un elemento $A \in M_n(MC_n(R))$, por lo que para todo $1 \leq i, j \leq n$, $A_{ij} = i[R]_n^{k_{ij}}(B_{ij})$ para algún $k_{ij} \in \mathbb{N}$ y $B_{ij} \in M_{n^{k_{ij}}}(R)$ y se pone $m = max\{k_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Sin perdida de generalidad se puede suponer que $k_{ij} = m$ para toda $1 \leq$

$i, j \leq n$. Esto es porque se puede considerar que $\alpha[R,n]^m_{k_{ij}}(B_{ij}) \in M_{n^m}(R)$. Entonces se construye una nueva matriz $\widehat{A} \in M_n(M_{n^m}(R)) = M_{n^{m+1}}(R)$, dada por $\widehat{A}_{ij} = B_{ij}$ para cualquier $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente se puede definir $\epsilon[n]_R(A) = i[R]^{m+1}_n(\widehat{A})$. Se considera que $\epsilon_R(A) = 0$, en tal caso con la notación de arriba se obtiene que $i[R]^{m+1}_n(\widehat{A}) = 0$. Pero $i[R]^{m+1}_n$ es inyectiva por lo que $\widehat{A} = 0$ y esto implica que $A = 0$. Por ende se obtiene que $\epsilon[n]_R$ es inyectiva. Ahora se considera $B \in MC_n(R)$ con $B = i[R]^k_n(C)$ y $A \in M_n(MC_n(R))$ dada por $A_{ij} = B\delta_{ij}$, entonces $\widehat{A}_{ij} = C\delta_{ij}$ y se obtiene que $\epsilon_R(A) = B$.

Para verificar la naturalidad, se toma un morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$, se quiere ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M_nMC_n(R) \arrow[r, "M_nMC_n(f)"'] \arrow[d, "\epsilon[n]_R"'] & M_nMC_n(S) \arrow[d, "\epsilon[n]_S"] \\
MC_n(R) \arrow[r, "MC_n(f)"'] & MC_n(S)
\end{tikzcd}$$

Para esto, se nota que para un elemento $A \in M_nMC_n(R)$ y $1 \leq i, j \leq n$, $\widehat{M_nMC_n}(A)_{ij} = M_{n^m}(f)(\widehat{A}_{ij}) = M_{n^{m+1}}(\widehat{A})_{ij}$ lo que significa que $\widehat{M_nMC_n}(A) = M_{n^{m+1}}(\widehat{A})$, y entonces

$$\begin{aligned}
\epsilon[n]_S(M_nMC_n)(f)(A) &= i[S]^{m+1}_n(\widehat{M_nMC_n}(A)) \\
&= i[S]^{m+1}_n(M_{n^{m+1}}(\widehat{A})) \\
&= MC_n(f)i[R]^{m+1}_n(f)(\widehat{A}) \\
&= MC_n(f)\epsilon[n]_R(A)
\end{aligned}$$

que es la conmutatividad del diagrama.

Ahora se toma $M_n(\epsilon[n]) : M_{n^2}MC_n \longrightarrow M_nMC_n$ que es un isomorfismo natural, por lo que si se considera $\epsilon[n] \circ M_n(\epsilon[n]) : M_{n^2}MC_n \longrightarrow MC_n$ se obtiene otro isomorfismo natural, de hecho, se construye una familia de isomorfismos naturales de la siguiente manera, recursivamente $\varepsilon[n,1] = \epsilon[n] : M_nMC_n \longrightarrow MC_n$ and $\varepsilon[n,k+1] = \epsilon[n] \circ M_n(\varepsilon[n,k]) : M_{n^{k+1}}MC_n \longrightarrow MC_n$. Por lo que se obtiene un nuevo isomorfismo natural $\varepsilon[n] : MC_nMC_n \longrightarrow MC_n$ donde ε es el límite directo de la familia de isomorfismos naturales descritos anteriormente. ■

Como se acaba de ver, el operador clausura matricial se porta como un operador clausura en un orden parcial, pero en este caso se tiene que considerar $\mathfrak{R}$ con el preorden inducido por los monomorfismos.

3. Propiedades Funtoriales con respecto a ciertas Construcciones

Proposición 3.1. *Si t es un entero positivo y I es un conjunto, entonces existe un isomorfismo natural* $\mu[t,I] = \{\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}} : M_t(\prod_{i\in I} R_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} M_t(R_i)\}_{(R_i)\in\mathfrak{R}^I}$.

Demostración

Sea $(R_i)_{i\in I}$ una familia de anillos indicada sobre I, se define $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}} : M_t(\prod_{i\in I} R_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} M_t(R_i)$ como $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A)(j)_{kl} = A_{kl}(j)$ para toda $A \in M_t(\prod_{i\in I} R_i)$, $j \in I$ y $1 \leq k,l \leq t$.

Sean $A, B \in M_t(\prod_{i\in I} R_i)$, $j \in I$ y $1 \leq k,l \leq t$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A+B)(j)_{kl} &= (A+B)_{kl}(j) \\
&= (A_{kl}+B_{kl})(j) \\
&= A_{kl}(j)+B_{kl}(j) \\
&= \mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A)(j)_{kl} + \mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(B)(j)_{kl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(AB)(j)_{kl} &= (AB)_{kl}(j) \\
&= (\sum_{r=1}^{t} A_{kr}B_{rl})(j) \\
&= \sum_{r=1}^{t} A_{kr}(j)B_{rl}(j) \\
&= \mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A)(j)_{kl}\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(B)(j)_{kl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(1)(j)_{kl} &= (1)_{kl}(j) \\
&= \delta_{kl} \\
&= 1(j)_{kl}
\end{aligned}$$

Por lo que $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}$ es un morfismo de anillos.

Sea $\{f_i : R_i \longrightarrow S_i\}$ una familia de morfismos de anillos, se busca que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
M_t(\prod_{i\in I} R_i) \arrow[r, "\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}"'] \arrow[d, "M_t(\prod_{i\in I} f_i)"'] & \prod_{i\in I} M_t(R_i) \arrow[d, "\prod_{i\in I} M_t(f_i)"] \\
M_t(\prod_{i\in I} S_i) \arrow[r, "\mu[t,I]_{(S_i)_{i\in I}}"'] & \prod_{i\in I} M_t(S_i)
\end{tikzcd}$$

Sean $A \in M_t(\prod_{i\in I} R_i)$, $j \in I$ y $1 \leq k, l \leq t$, entonces:

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I} M_t(f_i)(\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A))(j)_{kl} &= f_j(\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A)(j)_{kl}) \\
&= f_j(A_{kl}(j)) \\
&= \prod_{i\in I} M_t(f_i)_{kl}(j) \\
&= \mu[t,I]_{(S_i)_{i\in I}}(\prod_{i\in I} M_t(f_i)(A))(j)_{kl}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\prod_{i\in I} M_t(f_i)\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}} = \mu[t,I]_{(S_i)_{i\in I}} \prod_{i\in I} M_t(f_i)$, que es que $\mu[t,I]$ sea una transformación natural.

Sea $A \in nuc(\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}})$, entonces $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}} = 0$. Lo que implica que para toda $j \in I$ y $1 \leq k, l \leq t$, $A_{kl}(j) = \mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A)(j)_{kl} = 0(j)_{kl} = 0$. Por lo tanto $A = 0$ y $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}$ es inyectiva.

Sea $B \in \prod_{i\in I} M_t(R_i)$, se contruye $A \in M_t(\prod_{i\in I} R_i)$ dada por $A_{kl}(j) = B(j)_{kl}$ para toda $j \in I$ y $1 \leq k, l \leq t$. De esta forma $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A)(j)_{kl} = A_{kl}(j) = B(j)_{kl}$ para toda $j \in I$ y $1 \leq k, l \leq t$, lo que dice que $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}(A) = B$. Por lo tanto $\mu[t,I]_{(R_i)_{i\in I}}$ es suprayectiva y se sigue de $\mu[t,I]$ es un isomorfismo natural. ■

PROPOSICIÓN 3.2. *Si n es un entero positivo e I es un conjunto, entonces existe un isomorfismo natural* $\upsilon[n,I] = \{\upsilon[n,I]_{(R_i)_{i\in I}} : MC_n(\prod_{i\in I} R_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} MC_n(R_i)\}_{(R_i)\in\mathfrak{R}^I}$.

Demostración

Sea $(R_i)_{i\in I}$ una familia de anillos indicada por I, se pone $\upsilon[n,I]^1_{(R_i)_{i\in I}} = \mu[n,I]_{(R_i)_{i\in I}}$. Por la proposición anterior $\upsilon[n,I]^1$ es un isomorfismo natural. Se procede a construir el isomorfismo natural, por lo que se toma $\upsilon[n,I]^{m+1}_{(R_i)_{i\in I}} = \upsilon[n,I]^1_{(M_{n^m}(R_i))_{i\in I}} \circ M_n(\upsilon[n,I]^m_{(R_i)_{i\in I}})$ y como se hizo antes se observa que el isomorfismo natural $\upsilon[n,I]$ que se busca es el límite directo de la familia de isomorfismos naturales $\{\upsilon[n,I]^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\blacksquare$

Proposición 3.3. *Si t es un entero positivo, entonces existe un isomorfismo natural $\rho[t] = \{\rho[t]_R : M_t(R)[x] \longrightarrow M_t(R[x])\}_{R\in\mathfrak{R}}$.*

Demostración

Sea R un anillo, se contruye $\rho[t]_R : MC_t(R)[x] \longrightarrow MC_t(R[x])$ dado por $\rho[t]_R(\sum_{i=0}^m A_i x^i)_{jk} = \sum_{i=0}^m (A_i)_{jk} x^i$ para toda $\sum_{i=0}^m A_i x^i \in MC_t(R)[x]$ y $1 \leq j,k \leq t$. Para ver que $\rho[t]_R$ es un morfismo de anillos se hace ver que es el inducido por la propiedad universal de anillo de polinomios cuando se toma la inclusión canónica de $M_t(R)$ en $M_t(R[x])$ y mandar x en la matriz X tal que $X_{jk} = \delta_{jk} x$ para toda $1 \leq j,k \leq t$.

Sea $f : R \longrightarrow S$, se busca mostrar que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
M_t(R)[x] \arrow[r, "\rho[t]_R"'] \arrow[d, "M_t(f)[x]"'] & M_t(R[x]) \arrow[d, "M_t(f[x])"] \\
M_t(S)[x] \arrow[r, "\rho[t]_S"'] & M_t(S[x])
\end{tikzcd}$$

Sean $\sum_{i=0}^m A_i x^i \in MC_t(R)[x]$ y $1 \leq j,k \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}
M_t(f[x])(\rho[t]_R(\sum_{i=0}^{m} A_i x^i))_{jk} &= f[x]((\rho[t]_R(\sum_{i=0}^{m} A_i x^i))_{jk}) \\
&= f[x](\sum_{i=0}^{m} (A_i)_{jk} x^i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} f((A_i)_{jk}) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} (M_t(f)(A_i))_{jk} x^i \\
&= \rho[t]_S(\sum_{i=0}^{m} M_t(f)(A_i) x^i)_{jk} \\
&= \rho[t]_S(M_t(f)[x](\sum_{i=0}^{m} A_i x^i))_{jk}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $M_t(f[x])\rho[t]_R = \rho[t]_S M_t(f)[x$ que quiere decir que $\rho[t]$ es una transformación natural.

Sea $\sum_{i=0}^{m} A_i x^i \in nuc(\rho[t]_R)$, entonces $\rho[t]_R(\sum_{i=0}^{m} A_i x^i) = 0$. Lo que dice que para toda $1 \leq j, k \leq t$, $\sum_{i=0}^{m} (A_i)_{jk} x^i = \rho[t]_R(\sum_{i=0}^{m} A_i x^i)_{jk} = 0_{jk} = 0$. Por lo tanto $\sum_{i=0}^{m} A_i x^i = 0$ y $\rho[t]$ es inyectiva.

Sea $B \in M_t(R[x])$ con $B_{jk} = \sum_{i=0}^{m} B_{ijk} x^i$ con $1 \leq j, k \leq t$, obviamente no todos los polinomios tienen que tener grado m, pero se puede tomar m el máximo de los grados y los que tengan grados menor se les llena con ceros. Se pone $\sum_{i=0}^{m} A_i x^i \in MC_t(R)[x]$ con $(A_i)_{jk} = B_{ijk}$ para toda $1 \leq j, k \leq t$. De ésta forma $\rho[t]_R(\sum_{i=0}^{m} A_i x^i) = B$. Por lo tanto $\rho[t]_R$ es suprayectiva y $\rho[t]$ es un isomorfismo natural. ■

PROPOSICIÓN 3.4. *Si n es un entero positivo, entonces existe un isomorfismo natural* $\iota[n] = \{\iota[n]_R : MC_n(R)[x] \longrightarrow MC_n(R[x])\}_{R \in \mathfrak{R}}$.

Demostración

Sea R un anillo y se pone $\theta[n]_R^1 = \rho[n]_R$. Por la proposición anterior $\iota[n]^1$ es un isomorfismo natural. Se construye el isomorfismo natural buscado, se pone $\iota[n]_R^{m+1} =$

$\iota[n]^1_{M_n(R)} \circ M_n(\iota[n]^m_R)$. Y se obtiene el isomorfismo natural $\iota[n]$ como el límite directo de los isomorfismos naturales $\{\iota[n]^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. ■

Proposición 3.5. *Si t es un entero positivo y G es un grupo, entonces existe un isomorfismo natural $\xi[t] = \{\xi[t]_R : M_t(R)[G] \longrightarrow M_t(R[G])\}_{R\in\mathfrak{R}}$.*

Demostración

Sea R un anillo, se define $\xi[t]_R : M_t(R)[G] \longrightarrow M_t(R[G])$ como $\xi[t]_R(\sum_{g\in G} A_g g)_{ij} = \sum_{g\in G}(A_g)_{ij} g$ para toda $1 \leq i,j \leq t$. Para ver que $\xi[t]_R$ es un morfismo de anillos, se ve que $\xi[t]_R(g)_{ij} = \delta_{ij} g$ para toda $g \in G$ y $1 \leq i,j \leq t$. Por lo que $\xi[t]_R|_G : G \longrightarrow U(M_t(R[G]))$ es un morfismo de grupos y la propiedad universal de los anillos de grupo dice que se puede extender a un único morfismo de anillos que es $\xi[t]_G$

Sea $f : R \longrightarrow S$, se busca mostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M_t(R)[G] \arrow[r, "\xi[t]_R"'] \arrow[d, "M_t(f)[G]"'] & M_t(R[G]) \arrow[d, "M_t(f[G])"] \\
M_t(S)[G] \arrow[r, "\xi[t]_S"'] & M_t(S[G])
\end{tikzcd}$$

Sean $\sum_{g\in G} A_g g \in M_t(R)[G]$ y $1 \leq i,j \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}
M_t(f[G])(\xi[t]_R(\sum_{g\in G} A_g g))_{ij} &= f[G](\xi[t]_R(\sum_{g\in G} A_g g)_{ij}) \\
&= f[G](\sum_{g\in G} (A_g)_{ij} g) \\
&= \sum_{g\in G} f(A_g)_{ij} g \\
&= \sum_{g\in G} (M_t(f)(A_g))_{ij} g \\
&= \xi[t]_S(\sum_{g\in G} M_t(f)(A_g g)))_{ij} \\
&= \xi[t]_S(M_t(f)[G](\sum_{g\in G} A_g g)))_{ij}
\end{aligned}$$

Por lo que $M_t(f[G])\xi[t]_R = \xi[t]_S M_t(f)[G]$, que es que $\xi[t]_R$ es transformación natural.

Sea $\sum_{g\in G} A_g g) \in nuc(\xi[t]_R)$, entonces $\xi[t]_R(\sum_{g\in G} A_g g) = 0$. Por lo que para cada $g \in G$ y $1 \leq i, j \leq t$, $\sum_{g\in G}(A_g)_{ij} g = \xi[t]_R(\sum_{g\in G} A_g g)_{ij} = 0_{ij} = 0$. Por lo tanto $\sum_{g\in G} A_g g = 0$ y $\xi[t]_R$ es inyectiva.

Sea $B \in M_t(R[G])$ con $B_{ij} = \sum_{g\in G} B_g^{ij} g$ para $1 \leq i, j \leq t$. Si $\sum_{g\in G} A_g g \in M_t(R)[G]$ es tal que para toda $g \in G$ y $1 \leq i, j \leq t$, $(A_g)_{ij} = B_g^{ij}$, entonces $\xi[t]_R(\sum_{g\in G} A_g g) = B$. Por lo tanto $\xi[t]_R$ es suprayectiva y $\xi[t]$ es un isomorfismo natural. ■

Proposición 3.6. *Si n es un entero positivo y G es un grupo, entonces existe un isomorfismo natural $\theta[n] = \{\theta[n]_R : MC_n(R)[G] \longrightarrow MC_n(R[G])\}_{R\in\mathfrak{R}}$.*

Demostración

Sea R un anillo y se pone $\theta[n]_R^1 : M_n(R)[G] \longrightarrow M_n(R[G])$ como $\theta[n]^1 = \xi[t]_R$. Por la proposición anterior $\theta[n]^1$ es un isomorfismo natural. Se construye le isomorfismo que se busca, se pone $\theta[n]_R^{m+1} = \theta[n]_{M_n(R)}^1 \circ M_n(\theta[n]_R^m)$ y nuevamente el isomorfismo natural se construye $\theta[n]$ como el límite directo de la familia de isomorfismos naturales $\{\theta[n]^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. ■

COROLARIO 3.1. *Si n es un entero positivo, entonces existe un isomorfismo natural* $\Theta[n] = \{\Theta[n]_R : MC_n(R)[x, x^{-1}] \longrightarrow MC_n(R[x, x^{-1}])\}_{R \in \mathfrak{R}}$.

PROPOSICIÓN 3.7. *Si n un entero positivo y R es un anillo, entonces* $Cen(R) \cong Cen(MC_n(R))$.

Demostración

Se considera el siguiente morfismo de anillos $f : Cen(R) \longrightarrow Cen(MC_n(R))$ donde f es i_n restringido a $Cen(R)$ en el dominio y restringido a $Cen(MC_n(R))$ en el codominio. Por lo que primero se observa que $i_n(Cen(R)) \subseteq Cen(MC_n(R))$. Para ver que f está bien definido, sea $i^n_k(A) \in MC_n(R)$ con $A \in M_{n^k}(R)$ y $a \in Cen(R)$. De aquí $i_n(a)i^n_k(A) = i^n_k(i_n(a)A)$ y $(i_n(a)A)_{ij} = aA_{ij} = A_{ij}a = (Ai_n(a))_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$ lo que significa que $i_n(a)i^n_k(A) = i^n_k(A)i_n(a)$, entonces $i_n(a) \in Cen(MC_n(R))$. También se hace notar que la función i_n es inyectiva, por lo que la fucnión f es inyectiva, entonces se considera $i^n_k(A) \in Cen(MC_n(R))$ con $A \in M_{n^k}(R)$ entonces $A \in Cen(M_{n^k}(R))$ y $\alpha[n]^k_1(a) = A$ para algún $a \in Cen(R)$ por lo tanto $f(a) = i_n(a) = i^n_k(A)$ como se deseaba. ■

PROPOSICIÓN 3.8. *Si n es un entero positivo, entonces* $U(MC_n(R)) = \bigcup_{k=0}^{\infty} i^n_k(U(M_{n^k}(R)))$

Demostración

Como la multiplicación se porta de forma local, un elemento tiene inverso si y sólo si tiene inverso en su anillo de matrices original. ■

PROPOSICIÓN 3.9. *Si n es un entero positivo entonces* $|MC_n(R)| = \text{máx}\{|R|, \aleph_0\}$.

Demostración

La cardinalidad de $MC_n(R)$ es el supremo de las cardinalidades de $M_{n^k}(R)$ que es $\text{máx}\{|R|, \aleph_0\}$. ■

4. Funtores

Sea n un entero positivo y sea R un anillo. Se puede considerar la siguiente familia de funtores $\delta : R$-Mod$\longrightarrow M_n(R)$-Mod dada por $\delta(M) = M^n$ para M un R-módulo y la acción de $M_n(R)$ dada por $(A\phi)(k) = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\phi(k)$ para $A \in M_n(R)$ y $\phi \in M^n$, y para cualquier morfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ se define $\delta(f) = f^n : M^n \longrightarrow N^n$. Ahora se define $\delta_0 = \delta$ y $\delta_{k+1} = \delta \circ \delta_k$, así se obtiene un sistema dirigido de funtores y se pone $\Delta = \varinjlim \delta_k$: R-Mod$\longrightarrow$ $MC_n(R)$-Mod . Se nota que δ_k es funtor que usualmente se considera para dar la equivalencia de Morita entre R-Mod y $M_{n^k}(R)$-Mod por lo que surge la pregunta de si el funtor Δ es una equivalencia entre R-Mod y $MC_n(R)$-Mod, en general Δ no es una aquivalencia pero hay información que se puede obtener de Δ.

Proposición 4.1. *Si n es un entero positivo, entonces Δ : R-Mod$\longrightarrow$ $MC_n(R)$-Mod es un funtor.*

Para M un R-módulo izquierdo un elemento de $\Delta(M)$ está dado por $i_M^k(m)$ donde k es un natural y $m \in M^{n^k}$.

Proposición 4.2. *Si n es un entero positivo, es R un anillo y M es un R-módulo izquierdo, entonces $i_M^k(M^{n^k})$ es un $MC_n(R)$-generador de $\Delta(M)$.*

Proposición 4.3. *Si n es un entero positivo, R es un anillo y S es un R-módulo izquierdo simple, entonces $\Delta(S)$ es un $MC_n(R)$-módulo izquierdo simple.*

Demostración

Sea $i_S^k(m)$ un elemento no cero en $\Delta(S)$ con k un natural y $m \in S^{n^k}$, entonces $i_S^k(m)$ $MC_n(R)$-genera $i_M^k(S^{n^k})$, por que el lo M_{n^k}-genera. Finalmente $i_M^k(S^{n^k})$ está contenido en el $MC_n(R)$-submódulo $MC_n(R)$-generado por $i_S^k(m)$ y la proposición se sigue. ■

Proposición 4.4. *Si n es un entero positivo, R es un anillo y M es un R-módulo izquierdo fiel, entonces $\Delta(M)$ es un $MC_n(R)$-módulo izquierdo fiel.*

Demostración

Sea $i^n_k(A)$ un elemento de $Ann_{MC_n(R)}(\Delta(M))$ con k un natural y $A \in M_{n^k}(R)$, entonces $A \in Ann_{M_{n^k}(R)}(i^k_M(M^{n^k}))$ como M^{n^k} es $M_{n^k}(R)$ fiel se sigue que $A = 0$ y $Ann_{MC_n(R)}(\Delta(M)) = 0$. ∎

COROLARIO 4.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo primitivo izquierdo, entonces $MC_n(R)$ es un anillo primitivo izquierdo.*

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea n un entero positivo y R es un anillo , entonces $\Delta : R$-Mod$\longrightarrow MC_n(R)$-Mod conmuta con coproductos.*

PROPOSICIÓN 4.6. *Si n un entero positivo y es R un anillo, entonces $\Delta(R)$ es un R-módulo izquierdo libre.*

COROLARIO 4.2. *Si n es un entero positivo, R es un anillo y si P es un R-módulo izquierdo proyectivo, entonces $\Delta(P)$ es un $MC_n(R)$-módulo izquierdo proyectivo.*

Existe otro funtor de R-Mod en $MC_n(R)$-Mod. Se considera el morfismo de anillos $i_R : R \longrightarrow MC_n(R)$ que es la inclusión canónica, por lo que da a un $MC_n(R)$-módulo izquierdo la estructura de R-módulo izquierdo. En particular y por simetría, $MC_n(R)$ tiene estructura de R-R-bimódulo, y se puede definir un nuevo funtor $\Phi(M) = MC_n(R) \otimes_R M$ para cualquier R-módulo izquierdo M y $\Phi(f) = 1_{MC_n(R)} \otimes f$ para cualquier R-morfismo izquierdo f. Se puede comparar los dos funtores.

PROPOSICIÓN 4.7. *Si n es un entero positivo y R un anillo, entonces $MC_n(R)$ es un R-módulo izquierdo libre.*

COROLARIO 4.3. *Si n es un entero positivo, R es un anillo, M un R-módulo izquierdo y $pd_R(M) = k$, entonces $pd_{MC_n(R)}(\Phi(M)) \leq k$.*

PROPOSICIÓN 4.8. *Si n es un entero positivo y R es un anillo. Entonces existe una transformación natural $\Pi : \Phi \longrightarrow \Delta$.*

Demostración

Sea k un natural y sea M un R-módulo izquierdo. Entonces se define un $M_{n^k}(R)$-morfismo $\Pi_M^k : M_{n^k}(R) \otimes_R M \longrightarrow \delta_k$ como $\Pi_M^k(A \otimes m) = A\delta_k(m)$ para cualquier $A \in M_{n^k}(R)$ y cualquier $m \in M$. De hecho Π^k es una transformación natural de R-Mod en $M_{n^k}(R)$-Mod, por lo que se puede tomar el límite directo del sistema directo $\{\Pi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y ésta es la tranformación natural Π que se buscaba. ■

5. Ideales de la Clausura Matricial

El sistema dirigido creado para el anillo R sirve como sistema dirigido para cualquier ideal izquierdo (derecho, bilateral) I de R, al menos en la categoría de los grupos abelianos, por lo que $MC_n(I)$ es un subgrupo de $MC_n(R)$. Más aún, se tiene que:

Proposición 5.1. *Si n es un entero positivo, R es un anillo y I es un ideal izquierdo (derecho, bilateral) de R, entonces $MC_n(I)$ es un ideal (derecho, bilateral) de $MC_n(R)$.*

Demostración

Primero se nombra $w_k : M_{n^k}(I) \longrightarrow MC_n(I)$ a las inclusiones canónicas de la clausura matricial de un ideal izquierdo (derecho, bilateral) con k un natural y $\beta_k^m : M_{n^k}(I) \longrightarrow M_{n^m}(I)$ los morfismos de conexión con $k \leq m$ naturales. Sea $w_k(X) \in MC_n(I)$ y $i_m^n(A)$ con $X \in M_{n^k}(I)$ y $A \in M_{n^k}$, se empieza con el caso cuando $k \leq m$, en esta caso se pone $i_m^n(A)w_k(X) := w_m(A\beta_k^m(X))$ y cuando $k > m$ we put $i_m^n(A)w_k(X) := w_k(\alpha_m^k(A)X)$, con ésta acción izquierda definida $MC_n(I)$ llega a ser un ideal izquierdo de $MC_n(R)$. De la misma manera se puede ver que el caso análogo para los ideales derechos y bilaterales. ■

La siguiente proposición dice que la clausura matricial se comporta como el anillo de matrices en los ideales bilaterales.

Proposición 5.2. *Si n es un entero positivo y R es un anillo, entonces existe un isomorfismo de retículas entre la retícula de ideales bilaterales R y la retícula de ideales bilaterales de $MC_n(R)$.*

Demostración

Se toma un ideal bilateral I de $MC_n(R)$ y se define el siguiente subconjunto de R, $J = \{A_{11} \in R \mid i_k^n(A) \in I, A \in M_{n^k}(R)\}$, es fácil ver que J es un ideal de R. En seguida llamamos $\{e_{ij}^k\}_{1\leq i,j\leq k}$ a la base canónica de $M_k(R)$, y para $A \in M_k(R)$ se recuerda que $(Ae_{rs}^k)_{ij} = A_{ir}delta_{sj}$ y $(e_{rs}^k A)_{ij} =$ con $1 \leq i,j,r,s \leq k$ y δ denota la delta de Kronecker. Se quiere demostrar que $MC_n(J) = I$. Sea $w_k(X) \in MC_n(J)$ con $X \in M_{n^k}(J)$ y se escribe:

$$X = \sum_{j=1}^{n^k}\sum_{j=1}^{n^k} X_{ij}e_{ij}^{n^k}$$

Para toda $1 \leq i,j \leq n^k$ existe una matriz $Y^{ij} \in M_{n^{k_{ij}}}$ con k_{ij} un natural tal que $w_{k_{ij}}(Y^{ij}) \in I$ y $Y_{11}^{ij} = X_{ij}$, por que hay un número finito de k_{ij} sin perdida de generalidad gracias a los morfismos de conexión se puede pensar que $k = k_{ij}$, haciendo k más grande si se necesita . Ahora como un simple hecho se tiene que:

$$e_{i1}^{n^k} Y^{ij} e_{1j}^{n^k} = X_{ij}e^{n^k}$$

para toda $1 \leq i,j \leq n^k$. Aplicando w_k y sumando, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n^k}\sum_{j=1} w_k(e_{i1}^{n^k})w_k(Y^{ij})w_k(e_{1j}^{n^k}) = w_k(\sum_{j=1}^{n^k}\sum_{j=1} X_{ij}e^{n^k}) = w_k(X)$$

Como I es un ideal de $MC_n(R)$, entonces $w_k(X) \in I$. Ahora sea $w_k(X) \in I$ con $X \in M_{n^k}(R)$ y se toma

$$X = \sum_{j=1}^{n^k}\sum_{j=1}^{n^k} X_{ij}e_{ij}^{n^k}$$

y si se observa que $X_{ij} = (e_{1i}^{n^k} X e_{j1}^{n^k})_{11}$ entonces $X_{ij} \in J$ para cualquier $1 \leq i,j \leq n^k$, por lo que se tiene que la asignación MC_n de los ideales bilaterales de R en los ideales bilaterales de $MC_n(R)$ es suprayectiva, es fácil ver que es inyectiva y monótona , por lo que es un isomorfismo de retículas. ■

Corolario 5.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo simple, entonces $MC_n(R)$ es un anillo simple.*

PROPOSICIÓN 5.3. *Si n es un entero positivo, R es un anillo y $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una familia tal que I_k es un ideal izquierdo (drecho, bilateral) de $M_{n^k}(R)$ con $w_k(I_k) \subseteq w_{k+1}(I_{k+1})$, entonces $I = \bigcup_{k=0}^{\infty} w_k(I_k)$ es un ideal izquierdo (derecho, bilateral) de $MC_n(R)$. Más aún, si I_k es un ideal izquierdo máximo (derecho, bilateral) de $M_{n^k}(R)$ entonces I es un ideal (derecho, bilateral) máximo de $MC_n(R)$.*

Demostración

La demostración se sigue del hecho de que $i_k^n(R)$ es un conjunto $MC_n(R)$-generador izquierdo (derecho, bilateral) de $MC_n(R)$ para todo natural k. ■

Ahora sea K un campo y sean k, m naturales con $0 \leq m < 2^k$, y se define $I_m^k = \{A \in M_{2^k} \mid A_{im} = 0 \text{ para toda } i = 1, ..., 2^k\}$, se nota que I_m^k es un ideal izquierdo máximo $M_{2^k}(R)$. Se procede a considerar la expansión binaria de $m = (m_0, ..., m_{k-1})$ con $m_i \in \{0,1\}$ para toda $i = 0, ..., k-1$. Se observa que para todas m, m' naturales tales que $0 \leq m < 2^k$ y $0 \leq m < 2^{k+1}$ con expansión binaria $m = (m_0, ..., m_{k-1})$ y $m = (m'_0, ..., m'_k)$, $\beta_k^{k+1}(I_m) \subset I_{m'}$ si y sólo si $m'_i = m_i$ para toda $i = 0, ..., k-1$, lo que significa que si toma una función $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ ésta define una familie de ideales izquierdos en los que se puede aplicar la proposición anterior, por lo que $I_\omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} w_k(I^k_{(\omega(0),...,\omega(k-1))})$ es un ideal izquierdo máximo de $MC_n(R)$. Es un conocimiento común que la cantidad de estas funciones es $2^{\aleph_0}$, entonces se obtuvo $2^{\aleph_0}$ ideales izquierdo máximos. Se considera la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.4. *Si R es un anillo y S, S' son R-módulos izquierdos simples tales que $S \cong R/I$ y $S' \cong R/I'$, entonces $S \cong S'$ si y s ólo si existe $a \in R$ tal que $I' = (I : a)$.*

Si se considera un campo numerable como $\mathbb{Z}_2$, $MC_2(K)$ tiene $\aleph_0$ elementos, por lo que para cualquier ideal izquierdo máximo I de $MC_2(K)$ hay $\aleph_0$ ideales izquierdos máximos de $MC_2(K)$ que inducen el mismo $MC_n(K)$-módulo izquierdo simple. Como hay al menos $2^{\aleph_0}$ ideales izquierdos máximos de $MC_2(K)$ entonces hay $2^{\aleph_0}$ $MC_2(K)$-módulos izquierdos simples no isomorfos.

6. Condiciones de Cadena

6.1. Condición de Cadena Descendente. Todos los anillos artinianos izquierdos satisfacen la condición de cadena descendente en los sumandos directos izquierdos. Sea n un entero positivo y sea R un anillo, se denota $\{e_{ij}^n\}_{1 \leq i,j \leq n}$ a la base canónica de $M_n(R)$, se puede construir una cadena estrictamente descendente sumandos directos izquierdos, dada por $I_k = MC_n(R)i^n_k(e^{n^k}_{11})$ para todo natural k. Primero se nota que como $i^n_k(e^{n^k}_{11})$ es un idempotente, entonces I_k es un sumando directo izquierdo de $MC_n(R)$, también como $i^n_k(e^{n^k}_{11})$ divide por la izquierda a $i^n_k(e^{n^{k+1}}_{11})$ la cadena es descendiente, por último $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m = 0$ y esto junto con el hecho de que $i^n_k(e^{n^k}_{11}) \in I_k$ implican que $I_k \neq 0$ lo que significa que $MC_n(R)$ no cumple la condición de cadena descendiente en sumandos directos izquierdos, lo que dice que $MC_n(R)$ no es artiniano izquierdo. Por lo que se tiene.

Proposición 6.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no cumple la condición de cadena descendente en sumandos directos izquierdos.*

Corolario 6.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no es artiniano izquierdo.*

Corolario 6.2. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no es semisimple artiniano.*

Corolario 6.3. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no tiene dimensión uniforme izquierda finita.*

Como un anillo tiene dimensión uniforme izquierda finita entonces tiene dimensión de Krull, se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 6.4. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no tiene dimensión de Krull izquierda.*

Corolario 6.5. *Si n un entero positivo y R es un anillo no cero simple, entonces $MC_n(R)$ no es un anillo lineal completo izquierdo.*

Demostración

Como $Soc({}_{MC_n(R)}MC_n(R))$ es un ideal bilateral y $MC_n(R)$ es simple entonces o bien $Soc({}_{MC_n(R)}MC_n(R))$ es $MC_n(R)$ o bien 0. Como la primera opción implicaría que $MC_n(R)$ es artiniano izquierdo lo que nunca pasa, entonces se tiene la segunda opción. ■

6.2. Condición de Cadena Ascendente. Como se observó, $MC_n(R)$ nunca es semisimple artiniano, a menos que $R = 0$. Como MC_n preserva la propiedad de ser regular de von Neumman, MC_n no preserva la propiedad de ser neteriano izquierdo, porque cualquier anillo neteriano izquierdo y regular von Neumann es semisimple artiniano . Como ejemplo, sea K un campo, $MC_n(K)$ no es neteriano izquierdo pero K lo es. Más aún, la cadena estrictamente descendente también crea una cadena estrictamente ascendente. La cadena ascendente es $J_k = MC_n(R)i_k^n(1 - e_{11}^{n^k})$ para todo natural k. Se observa que $MC_n(R) = I_k \oplus J_k$ para todo natural k. Por lo que se obtiene:

Corolario 6.6. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no cumple la condición de cadena ascendente en sumandos directos izquierdos.*

Corolario 6.7. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no es neteriano izquierdo.*

Corolario 6.8. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no es quasi-Frobenius.*

7. Radical de Jacobson y Clausura Matricial

Se demostrarán resultados relacionados con el radical de Jacobson, empezando con que tomar el radical de Jacobson conmuta con tomar la clausura matricial

Proposición 7.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(J(R)) = J(MC_n(R))$.*

Demostración

Por la caracterización del radical de Jacobson mencionada en el apéndice, $J(MC_n(R))$ es el único ideal izquierdo con todos sus elementos casiregulares izquierdos y máximo con respecto a esta propiedad. Por lo que se nota que $MC_n(J(R))$ es un ideal de $MC_n(R)$. En particular es un ideal izquierdo. También se nota que cualquier elemento es de la forma $i_n^k(A)$ con $A \in M_{n^k}(J(R))$ y k un natural, como $M_{n^k}(J(R)) = J(M_{n^k}(R))$, ahí $1 - i_k^n(A)$ es invertible por la izquierda, entonces $i_k^n(A)$ es casiregular izquierdo, lo que significa que todos los elementos de $MC_n(J(R))$ son casiregulares izquierdos. De donde se sigue que $MC_n(J(R)) \subseteq J(MC_n(R))$. Por último se nota que un elemento casiregular en $MC_n(R)$ el cual está en $i_k^n(M_{n^k}(R))$ es casiregular izquierdo en $i_k^n(M_{n^k}(R))$. Entonces $i_k^n(M_{n^k}(R)) \cap J(MC_n(R)) = i_k^n(M_{n^k}(J(R)))$ y se obtiene la proposición. ■

Corolario 7.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo semisimple no cero, entonces $MC_n(R)$ es semisimple.*

Corolario 7.2. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no es semiperfecto.*

Corolario 7.3. *Si n es un entero positivo y R es un anillo no cero, entonces $MC_n(R)$ no es perfecto.*

8. Algunas Clases de Anillos y la Clausura Matricial

8.1. Anillos Regulares von Neumann.

Proposición 8.1. *Si n es un entero positivo y R es un anillo regular de von Neumann no cero, entonces $MC_n(R)$ es un anillo regular de von Neumann.*

Demostración

Sea $i_k^n(A)$ un elemento de $MC_n(R)$ con $A \in M_{n^k}(R)$. Como $M_{n^k}(R)$ es un anillo regular de von Neumann, entonces existe un $X \in M_{n^k}(R)$ con $A = AXA$, por lo que $i_k^n(A) = i_k^n(A)i_k^n(X)i_k^n(A)$, como se quería. ■

8.2. V-anillos. Herbera demostró en su artículo [3], que para cualquier anillo regular de von Neumann R, que tiene dimensión menor o igual a $2^{\aleph_0}$ sobre su centro, entonces R no tiene móldulos izquierdos inyectivos simples. Se sabe que para K un campo y n un entero positivo, si se pone $R = MC_n(K)$ entonces su centro es isomorfo a K y se sabe también que la dimensión de R es exactamente $\aleph_0$. Por lo que se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8.2. *Si n es un entero positivo y K es un campo, entonces $MC_n(K)$ no es un V-anillo.*

8.3. Anillos Semiprimos.

PROPOSICIÓN 8.3. *Si n es un entero positivo y R es un anillo semiprimo, entonces $MC_n(R)$ es un anillo semiprimo.*

Demostración

Recuérdese que si R es un anillo semiprimo entonces $M_m(R)$ es un anillo semiprimo para cualquier entero positivo m. Ahora sea $i_k^n(A), i_k^n(X) \in MC_n(R)$ con $i_k^n(A)i_k^n(A)i_k^n(A) = 0$ y sin pérdida de generalidad con $A, X \in M_{n^k}(R)$, por lo que si $i_k^n(AXA) = i_k^n(A)i_k^n(X)i_k^n(A) = 0$ entonces $AXA = 0$, como $M_{n^k}(R)$ es un anillo semiprimo entonces $A = 0$, así que $i_k^n(A) = 0$. ∎

8.4. Anillos Primos.

PROPOSICIÓN 8.4. *Si n es un entero positivo y R es un anillo primo, entonces $MC_n(R)$ es un anillo primo.*

Demostración

Recuérdese que si R es un anillo primo entonces $M_m(R)$ es un anillo primo para cualesquiera m. Ahora sea $i_k^n(A), i_k^n(X), i_k^n(B) \in MC_n(R)$ con $i_k^n(A)i_k^n(A)i_k^n(B) = 0$ y sin perdida de generalidad con $A, X, B \in M_{n^k}(R)$, por lo que si $i_k^n(AXA) = i_k^n(A)i_k^n(X)i_k^n(A) = 0$ entonces $AXB = 0$. Como $M_{n^k}(R)$ es un anillo primo entonces $A = 0$ or $B = 0$, se sigue que $i_k^n(A) = 0$ o $i_k^n(B) = 0$. ∎

9. K-Teoría

9.1. Número de Base Invariante. Sean n y k números naturales y sea K un campo, se nota que los morfismos de grupo $K_0(\alpha[n]_k^{k+1}) : K_0(M_{n^k}(K)) \longrightarrow K_0(M_{n^{k+1}}(K))$ es la multiplicación por n. Esto es por que $K_0(M_{n^m}(K)) \cong \mathbb{Z}$ para cualquier m natural, es decir, $K_0(\alpha[n]_k^{k+1}) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\langle [M_{n^k}(K)] \rangle = K_0(M_{n^k}(K))$ y $\langle [M_{n^{k+1}}(K)] \rangle = K_0(M_{n^{k+1}}(K))$. Se calcula $K_0(\alpha[n]_k^{k+1})$ en la base de $K_0(M_{n^k}(K))$, esto es, $K_0(\alpha[n]_k^{k+1})([M_{n^k}(K)]) = [M_{n^{k+1}}(K) \otimes_{M_{n^k}(K)} M_{n^k}(K)] = [M_{n^{k+1}}(K)^n] = n[M_{n^{k+1}}(K)]$.

Por otro lado como K_0 es un funtor si se le aplica al sistema dirigido $\{\alpha[n]_i^j\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}$ la imagen resulta sistema dirigido pero en la categoría de grupos abelianos. Es bien sabido que el funtor K_0 conmuta con límites directos, por lo que basta calcular el límite de los morfismos de grupos descritos anteriormente en ésta sección, es decir, el lḿite directo de multiplicar por n en los enteros. Se observa que éste límite es $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

Para ver esto, se nombran los morfismos de conexión como $\alpha_j^k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dados por $\alpha_j^k(1) = n^{k-j}$ para $j \leq k$. Se define las inclusiones $i_k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ como $i_k(1) = \frac{1}{n^k}$ para todo natural k. Sea $\{f_k : Z \longrightarrow G\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de morfismos de grupos abelianos tal que $f_k\alpha_j^k = f_j$. Se ve que $f : \mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \longrightarrow G$ dado por $f(\frac{a}{n^k}) = f_k(a)$ es el único que cumple la propiedad universal, $fi_k(a) = f(\frac{a}{n^k}) = f_k(a)$. Por lo que efectivamente $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ es el límite directo buscado.

Por lo que se obtiene que $MC_n(K)$ tiene número de base invariante.

Capítulo 3

Algunas Clases de Prerradicales Inducidas por Inyectividad Relativa

1. Introducción

En este capítulo se introducen nuevas clases de prerradicales, la clase de los prerradicales esencialmente idempotentes, la clase de los prerradicales prehereditarios y la clase de los prerradicales autocoestables. Se analiza su relación con la inyectividad respecto a un prerradical. Primero se introduce la clase de los prerradicales esencialmente idempotentes como una generalización de los prerradicales idempotentes. Los prerradicales esencialmente idempotentes preservan algunas de las propiedades que tienen los prerradicales idempotentes. Por ejemplo, la clase de los prerradicales esencialmente idempotentes es cerrada bajo supremos, como también lo es la clase de los prerradicales idempotentes. Otro aspecto de similitud es que las clases de libres de pretorsión de ambos son cerradas bajo extensiones.

Se introduce la clase de los prerradicales prehereditarios como una generalización de los prerradicales exactos izquierdos. Se demuestra que existe una correspondencia biyectiva entre la clase de los prerradicales prehereditarios y la clase de los filtros lineales. Esta correspondencia no es un isomorfismo de retículas sino un monomorfismo de órdenes. Los prerradicales prehereditarios dan un contexto perfecto para definir una generalización de esencialidad: la esencialidad con respecto a un prerradical. Esta esencialidad preserva todas las propiedades usuales de la esencialidad cuando el prerradical es prehereditario. Además se estudia el concepto de pureza con respecto a un prerradical y se obtienen casi todos los resultados conocidos de pureza con respecto a un radical exacto izquierdo. Se demuestra que cuando el prerradical es un radical idempotente se obtienen propiedades correspondientes a todas las propiedades usuales.

Se estudia el concepto de inyectividad con respecto a un prerradical y se obtiene que para tener buenas propiedades es suficiente que el prerradical sea un radical idempotente. Para la inyectividad relativa a prerradicales prehereditarios se puede obtener un criterio semejante al criterio de Baer. Siempre es posible definir cápsulas inyectivas relativas a un prerradical. Cuando el prerradical es un radical idempotente además se obtiene que ésta es única con respecto a las propiedades usuales. Se definen submódulos pseudocomplementados con respecto a un prerradical lo que da condiciones para determinar cuando las clases de inyectivos relativos a dos prerradicales son las mismas. Luego se estudian los módulos libres de pretorsión inyectivos que son llamados módulos absolutamente puros. Se continua con la clase de prerradicales autocoestables. Estos son aquellos cuya clase libre de pretorsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas relativas. Se vé que bajos ciertas hipótesis se puede obtener la coestabilidad. Finalmente se define una asignación para módulos izquierdos respecto a un prerradical. Cuando el prerradical es un radical exacto izquierdo ésta asignación resulta ser el funtor localización con respecto al prerradical. Ésta asignación da información aún cuando el prerradical no sea un radical exacto izquierdo.

2. Prerradicales esencialmente idempotentes

Sea σ un prerradical sobre R-Mod, σ se llama esencialmente idempotente si $\sigma(M) \neq 0$ implica $\widehat{\sigma}(M) \neq 0$ para cualquier R-módulo izquierdo M. Se observa que cualquier prerradical idempotente es un prerradical esencialmente idempotente por lo que la propiedad de ser esencialmente idempotente es una generalización de ser idempotente. La clase de todos los prerradicales esencialmente idempotente sobre R-Mod se denota por R-eid , la última observación se puede reformular como R-id$\subseteq$ R-eid. De éste último hecho puede pasar que R-eid no sea un conjunto, por que R-id no siempre es un conjunto. Como el supremo de una familia de prerradicales idempotentes es un prerradical idempotente, es de esperarse que lo mismo pase para los prerradicales esencialmente idempotentes.

Proposición 2.1. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es una familia de prerradicales esencialmente idempotentes sobre R-Mod, entonces $\bigvee_{i\in I}\sigma_i$ es un prerradical esencialmente idempotente.*

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo con $(\bigvee_{i\in I}\sigma_i)(M) \neq 0$, entonces existe $i \in I$ with $\sigma_j(M) \neq 0$ y por hipótesis se sigue que $\widehat{\sigma}_j(M) \neq 0$, por lo que $(\bigvee_{i\in I}\widehat{\sigma}_i)(M) \neq 0$ y como $\bigvee_{i\in I}\widehat{\sigma}_i \leq \widehat{\bigvee_{i\in I}\sigma_i}$, $\widehat{\bigvee_{i\in I}\sigma_i}(M) \neq 0$ como se buscaba. ■

Por la última proposición para todo prerradical σ sobre R-Mod, es posible construir un prerradical esencialmente idempotente σ°, como el supremo de todos los prerradicales esencialmente idempotente por debajo de σ. Como se mencionó en la última proposición σ° es un prerradical esencialmente idempotente. De hecho σ° es el mayor prerradical esencialmente idempotente por debajo de σ. Se observa que un prerradical σ es esencialmente idempotente si y sólo si $\sigma^\circ = \sigma$. También es importante recordar que la clase R-id no es cerrada bajo ínfimos, ni aún bajo los finitos, se considera el siguiente ejemplo; Sea R el anillo de los enteros, sea σ el zoclo y τ el prerradical que asigna la parte divisible, como σ y τ son idempotentes entonces son esencialmente idempotentes, pero $(\sigma \wedge \tau)(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_p$ para cualquier primo p. Entonces $(\sigma \wedge \tau)^2(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$ lo que implica que$\widehat{(\sigma \wedge \tau)}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$, por lo que $\sigma \wedge \tau$ no es esencialmente idempotente, de aquí se ve que el ínifimo de prerradicales idempotentes no necesariamente es esencialmente idempotente, lo que también implica que el ínfimo de prerradicales esencialmente idempotentes no necesariamente es esencialmente idempotente. Lo último dice, que en general, R-eid no es una subretícula de R-pr y R-id no es un subretícula de R-eid.

R-eid es una retícula completa, esto es para cualquier familia $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ de prerradicales esencialmente idempotente el supremo es el supremo usual en R-pr, pero el ínfimo resulta $(\bigwedge_{i\in I} \sigma_i)^\circ$. La siguiente proposición dice que el operador $^\circ$ sobre R-pr es un operador interior.

Proposición 2.2. *La asignación $^\circ : R\text{-pr} \longrightarrow R\text{-pr}$ dada por $\sigma \mapsto \sigma^\circ$ para cualquier prerradical σ sobre R-Mod, es un operador monótono, deflatorio e idempotente sobre R-pr.*

R-id$\subseteq R$-eid implica que $\widehat{\sigma}(M) \leq \sigma^\circ(M)$ para cualquier R-módulo izquierdo M.

Observación 2.1. *Si σ es prerradical esencialmente idempotente sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y $\sigma(M) = M$, entonces $\sigma^\circ(M) = M$.*

Observación 2.2. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_{\sigma^\circ} = \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$.*

Observación 2.3. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces $\widehat{\sigma^\circ} = \widehat{\sigma}$.*

Es bien conocido que para cualquier prerradical idempotente σ, su radical asociado $\bar{\sigma}$ es un radical idempotente.

Proposición 2.3. *Si σ es un prerradical esencialmente idempotente sobre R-Mod, entonces $\bar{\sigma}$ es un radical esencialmente idempotente.*

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo con $\bar{\sigma}(M) \neq 0$, entonces $\sigma(M) \neq 0$, pues σ y $\bar{\sigma}$ tienen la misma clase libre de pretorsión. Se sigue que $\widehat{\sigma}(M) \neq 0$ y como $\widehat{\sigma}(M) \leq \widehat{(\bar{\sigma})}(M)$ se obtiene el resultado deseado. ■

Proposición 2.4. *Si S es un R-módulo izquierdo simple y $\alpha_S^{E(S)}$ es esencialmente idempotente, entonces $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente.*

Demostración

Primero se recuerda que $\alpha_S^{E(S)}$ es un átomo en la retícula R-pr, por esto $\widehat{\alpha_S^{E(S)}}$ tiene dos opciones, o bien es $\alpha_S^{E(S)}$ o bien es 0, pero $\alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S \neq 0$, por que $\widehat{\alpha_S^{E(S)}}(E(S)) \neq 0$, por lo que $\widehat{\alpha_S^{E(S)}} = \alpha_S^{E(S)}$. ■

Corolario 2.1. *Si R es un anillo, entonces R es un V-anillo si y sólo si cada átomo en R-pr es esencialmente idempotente.*

Proposición 2.5. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es una familia de prerradicales sobre R-Mod, entonces $\widehat{\bigwedge_{i\in I}\sigma_i} = \widehat{\bigwedge_{i\in I}\widehat{\sigma}_i}$.*

Demostración

Se observa que $\mathbb{T}_{\bigwedge_{i\in I}\sigma_i} = \bigcap_{i\in I}\mathbb{T}_{\sigma_i} = \bigcap_{i\in I}\mathbb{T}_{\widehat{\sigma}_i} = \mathbb{T}_{\bigwedge_{i\in I}\widehat{\sigma}_i}$. ■

Corolario 2.2. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es una familia de prerradicales sobre R-Mod tal que $\bigwedge_{i\in I}\sigma$ es esencialmente idempotente, entonces $\bigwedge_{i\in I}\widehat{\sigma}$ es esencialmente idempotente.*

Observación 2.4. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces σ es un prerradical esencialmente idempotente si y sólo si $\mathbb{F}_{\widehat{\sigma}} = \mathbb{F}_{\sigma}$.*

Es un hecho bien conocido que cuando σ es un prerradical idempotente, $\mathbb{F}_{\sigma}$ es cerrada bajo extensiones. La siguiente observación generaliza este hecho.

Observación 2.5. *Si σ es un prerradical esencialmente idempotente sobre R-Mod, entonces $\mathbb{F}_{\sigma}$ es cerrada bajo extensiones.*

Proposición 2.6. *Si σ es un radical esencialmente idempotente sobre R-Mod, entonces σ es un radical idempotente.*

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo. Como σ es un radical, también σ^2 es radical, entonces $\sigma^2(M/\sigma^2(M)) = 0$. Como $\widehat{\sigma} \leq \sigma^2$, entonces $\widehat{\sigma}(M/\sigma^2(M)) \leq \sigma^2(M/\sigma^2(M)) = 0$. Como σ es esencialmente idempotente, esto implica que $\sigma(M/\sigma^2(M)) = 0$, pero por definición del coproducto de prerradicales $\sigma(M/\sigma^2(M)) = (\sigma^2 : \sigma)(M)/\sigma^2(M)$, de aquí se obtiene que $\sigma(M) \leq (\sigma^2 : \sigma)(M) = \sigma^2(M)$ y el resultado deseado se obtiene. ■

El siguiente corolario se sigue de las proposiciones 36 y 39.

Corolario 2.3. *Si σ es un prerradical esencialmente idempotente sobre R-Mod, entonces $\bar{\sigma}$ es un radical idempotente.*

Se sabe que para cualquier R-módulo izquierdo M y cualquier submódulo fuertemente invariante N, el prerradical α_N^M es idempotente si y sólo si $\widehat{N} = N$. En el mismo sentido, se llega a que :

Observación 2.6. *Si M es un R-módulo izquierdo, N es un submódulo no cero fuertemente invariante de M y α_N^M es un prerradical esencialmente idempotente, entonces $\widehat{N} \neq 0$.*

Se considera el anillo $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ y el ideal $I = \mathbb{Z}_4 \times 2\mathbb{Z}_4$, se observa que $\alpha_I^R(0 \times \mathbb{Z}_4) = 0 \times 2\mathbb{Z}_4$ y $\widehat{\alpha_I^R}(0 \times \mathbb{Z}_4) = 0$ lo cual significa que α_I^R no es un prerradical esencialmente idempotente. También se tiene que $\widehat{I} = \mathbb{Z}_4 \times 0$. Esto dice que en general R no es un módulo prueba para ver si α_N^M es esencialmente idempotente.

Es posible definir el concepto dual a esencialmente idempotente, un prerradical σ es esencialmente coidempotente si $\bar{\sigma}(M) = M$ implica $\sigma(M) = M$ para cualquier R-módulo izquierdo M. Todos los resultados previos en su versión dual son ciertos.

Sea σ un prerradical sobre R-Mod, si $\widehat{\sigma} = 0$ entonces σ es llamado un prerradical fuertemente nilpotente. La clase de todos los prerradicales fuertemente idempotentes se denota por R-stn. Se observa que R-stn es cerrado bajo ínfimos. Fácilmente se puede demostrar que los átomos son idempotentes o fuertemente idempotentes. También la clase R-stn es cerrada bajo subprerradicales, esto es, sean σ y τ prerradicales sobre R-Mod tales que $\sigma \leq \tau$ y $\tau \in R$-stn entonces $\sigma \in R$-stn.

3. Prerradicales Prehereditarios

Sea σ un prerradical sobre R-Mod, σ se llama un prerradical prehereditario si la clase $\mathbb{T}_\sigma$ es hereditaria. Se observa que σ es prehereditario si y sólo si $\widehat{\sigma}$ es hereditario, por lo que $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$. Es importante recordar que un prerradical σ is hereditario si y sólo si σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es hereditaria, esto significa que los prerradicales prehereditarios son una generalización de los prerradicales hereditarios, donde se quita la petición de que sean idempotentes. Para cualquier familia de prerradicales $\{\sigma_i\}_{i\in I}$, $\mathbb{T}_{\bigwedge_{i\in I}\sigma_i} = \bigcap_{i\in I}\mathbb{T}_{\sigma_i}$, y el ínfimo de clases pretorsión hereditarias es una clase de pretorsión hereditaria, por lo que se sigue:

Proposición 3.1. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es una familia de prerradicales prehereditarios sobre R-Mod, entonces $\bigwedge_{i\in I}\sigma_i$ es un prerradical prehereditario.*

Sea σ un prerradical sobre R-Mod. Es posible construir el menor prerradical prehereditario por encima de σ, éste se denota por $\sigma^{\square}$, y resulta ser el ínfimo de todos los prerradicales prehereditarios por encima de σ. La clase de todos los prerradicales prehereditaros se denota por R-pher, y se sigue que R-lep$\subseteq R$-pher, esto implica que $\sigma^{\square} \leq \widetilde{\sigma}$ para cualquier prerradical en R-Mod, σ. Se observa que un prerradical σ es prehereditario si y sólo si $\sigma^{\square} = \sigma$. La siguiente proposición dice que el operador $^{\square}$ sobre R-pr es un operador clausura.

Proposición 3.2. *La asignación $^{\square}$: R-pr$\longrightarrow$ R-pr dada por $\sigma \mapsto \sigma^{\square}$ para cualquier prerradical sobre R-Mod es un operador monótono, inflatorio e idempotente sobre R-pr.*

Observación 3.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces $\widetilde{\sigma^{\square}} = \widetilde{\sigma}$.*

Demostración

Como $\sigma \leq \sigma^{\square}$ entonces $\widetilde{\sigma} \leq \widetilde{\sigma^{\square}}$. Por otro lado, $\sigma^{\square} \leq \widetilde{\sigma}$ que implica $\widetilde{\sigma^{\square}} \leq \widetilde{(\widetilde{\sigma})} = \widetilde{\sigma}$.
■

Para un anillo max izquierdo R (un anillo es max izquierdo si todo módulo izquierdo no cero tiene un submódulo máximo), si se considera el radical de Jacobson J entonces J no es idempotente y $\mathbb{T}_J = \{0\}$ lo que significa que J es un prerradical prehereditario. En particular, para cualquier primo p y cualquier entero positivo

n, $\mathbb{Z}_{p^n}$ es un anillo max y el radical de Jacobson es $\omega_0^{p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n}}$. Más aún $\omega_0^{p^k\mathbb{Z}_{p^n}}$ con $k = 1, ..., n-1$ es un prerradical prehereditario que no es un prerradical hereditario.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si J el radical de Jacobson, entonces son equivalentes para J:*

1. *J es un prerradical prehereditario.*
2. $\mathbb{T}_J = \{0\}$.
3. $\widehat{J} = 0$.
4. *R es un anillo max izquierdo.*

Demostración

La parte interesante es (1) implica (2) y las otras son algo sencillas.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea M un R-módulo izquierdo no cero y sea $x \in M$ un elemento no cero, como Rx tiene un submódulo máximo entonces $J(Rx) \neq Rx$ por lo que $J(M) \neq M$. Así que ningún módulo distinto de cero puede ser de pretorsión respecto a J.

(2) $\iff$ (3) Se sigue de la correspondencia biyectiva que hay entre las clases de pretorsión y los prerradicales idempotentes.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sea M un R-módulo izquierdo no cero. Como $\widehat{J}(M) = 0$ entonces $J(M) \neq M$. Por lo tanto M tiene un submódulo máximo.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea $M \in \mathbb{T}_J$. Si $M \neq 0$ entonces $J(M) \neq M$. Por lo tanto $\mathbb{T}_J = \{0\}$.■

LEMA 3.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces $\sigma \leq \widehat{\sigma^{\square}}$ si y sólo si $\widetilde{\sigma} = \sigma^{\square}$.*

Demostración

Si $\sigma \leq \widehat{\sigma^{\square}}$, como $\widehat{\sigma^{\square}}$ es un prerradical exacto izquierdo, entonces $\widetilde{\sigma} \leq \widehat{\sigma^{\square}} \leq \sigma^{\square}$ lo que implica que $\widetilde{\sigma} = \sigma^{\square}$. En el caso de que $\widetilde{\sigma} = \sigma^{\square}$, se sigue que $\sigma \leq \sigma^{\square} = \widetilde{\sigma} = \widehat{\widetilde{\sigma}} = \widehat{\sigma^{\square}}$. ■

La siguiente proposición dice que $^{\square}$ preserva idempotencia.

PROPOSICIÓN 3.4. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod y σ es idempotente, entonces $\sigma^{\square}$ es exacto izquierdo.*

Demostración

Como $\sigma \leq \sigma^{\square}$ entonces $\sigma \leq \widehat{\sigma} \leq \widehat{\sigma^{\square}}$ y de la proposición anterior se sigue el resultado. ■

A cualquier prerradical σ sobre R-Mod se le asigna un conjunto de ideales izquierdos $\mathbb{I}_\sigma = \{_RI \leq R \mid R/I \in \mathbb{T}_\sigma\}$, este conjunto siempre es cerrado bajo supraideales, lo que quiere decir que si $I \in \mathbb{I}_\sigma$ y $_RJ \leq R$ son tales que $I \subseteq J$ entonces $J \in \mathbb{I}_\sigma$, esto se sigue por que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes. En la siguiente proposición se verán condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $\mathbb{I}_\sigma$ sea un filtro lineal.

PROPOSICIÓN 3.5. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces σ es prehereditario si y sólo si $\mathbb{I}_\sigma$ es un filtro lineal.*

Demostración

Si σ es prehereditario, la demostración de que $\mathbb{I}_\sigma$ es un filtro lineal es la misma que cuando σ es exacto izquierdo. Ahora, sea τ el prerradical exacto izquierdo inducido por $\mathbb{I}_\sigma$ y sea M un R-módulo izquierdo de τ-torsión, entonces $ann(x) \in \mathbb{I}_\sigma$ para cualquier $x \in M$, de aquí que $\sigma(Rx) = Rx$ para cualquier $x \in M$. De esto se tiene que $\sigma(M) = M$ y $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. Sea M un R-módulo izquierdo que no es de τ-torsión, entonces existe $x \in M$ con $\tau(Rx) \neq Rx$, como $Rx \cong R/ann(x)$ y $\mathbb{I}_\sigma = \mathbb{I}_\tau$ se sigue que $\sigma(Rx) \neq Rx$ y $\sigma(M) \neq M$. Por lo tanto $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$. ■

COROLARIO 3.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces $\mathbb{T}_\sigma$ es una teoría de torsión hereditaria si y sólo si $\mathbb{I}_\sigma$ es un filtro de Gabriel.*

Demostración

$\Rightarrow$) Del resultado anterior, $\mathbb{I}_\sigma$ es un filtro lineal y el hecho de que $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de torsión hereditaria implica que $\mathbb{I}_\sigma$ es un filtro de Gabriel.

$\Leftarrow$) Como en la demostración pasada, $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}_\sigma$ donde τ es el radical exacto izquierdo inducido por $\mathbb{I}_\sigma$. ■

Un prerradical σ se llama coestable si $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Proposición 3.6. *Si σ es un radical coestable sobre R-Mod, entonces σ es exacto izquierdo.*

Ver la demostración en $Bican$[1].

Proposición 3.7. *Si σ es un prerradical esencialmente idempotente prehereditario sobre R-Mod, entonces σ is costable.*

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo tal que $\sigma(M) = 0$, entonces $\widehat{\sigma}(M) = 0$, como $\widehat{\sigma}(M) = \widehat{E(M))}\cap M$ y $M \trianglelefteq E(M)$ se sigue que $\widehat{\sigma}(E(M)) = 0$, como σ es esencialmente idempotente $\sigma(EM) = 0$.

Proposición 3.8. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es una familia de radicales prehereditarios sobre R-Mod, entonces $\bigwedge_{i\in I}\sigma_i$ es un radical prehereditario.*

Proposición 3.9. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y $M \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces $M \subseteq \sigma^{\square}(N)$ para cualquier R-módulo izquierdo N tal que $M \leq N$, en particular $M \subseteq \sigma^{\square}(E(M))$.*

El recíproco de la proposición pasada no siempre es válido. Sean p y q primos diferentes, y se define $\sigma = \alpha_{\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \vee \alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}$. Como σ es prehereditario (porque $\widehat{\sigma} = 0$), se sigue que $\sigma^{\square} = \sigma$ y $\sigma(\mathbb{Z}_{q^\infty}) = \mathbb{Z}_q$, entonces $\mathbb{Z}_q \subseteq \sigma(E(\mathbb{Z}_q))$, pero $\sigma(\mathbb{Z}_q) = 0$.

Proposición 3.10. *Si S es un R-módulo izquierdo simple, entonces $\alpha_S^S(E(M)) = \alpha_S^S(M)$ para cualquier R-módulo izquierdo M.*

Corolario 3.2. *Si σ es un átomo en R-pr, entonces σ es prehereditario.*

Demostración

Como σ es un átomo debe ser de la forma $\alpha_S^{E(S)}$ para algún R-módulo izquierdo simple S. Como σ es un átomo $\widehat{\sigma}$ debe ser o bien 0 o o bien σ, en el primer caso σ es prehereditario ya que 0 es un prerradical exacto izquierdo y en el segundo caso, σ es idempotente lo que significa que S es inyectivo. Por la proposición anterior $\sigma(M) = \alpha_S^{E(S)}(M) = \alpha_S^S(M) = \alpha_S^S(E(M)) \cap M = \sigma(E(M)) \cap M$ que quiere decir que σ es exacto izquierdo, y por lo tanto es prehereditario. ■

LEMA 3.2. *Si M es un R-módulo izquierdo, N es un submódulo fuertemente invariante de M y M es L-inyectivo para todo $L \in \mathbb{T}_{\omega_N^M}$, entonces ω_N^M es un prerradical prehereditario.*

Demostración

Sea K un módulo de ω_N^M-torsión, sea L un submódulo de K y sea $f : L \longrightarrow M$ un R-morfismo, entonces existe $g : K \longrightarrow M$ tal que $g|_L = f$ lo que significa que $f^{-1}(N) = g^{-1}(N) \cap L = K \cap L = L$ implicando que L es de ω_N^M-torsión. ■

LEMA 3.3. *Si σ y τ son prerradicales sobre R-Mod tales que $\sigma \wedge \tau = 0$ y λ es un ordinal, entonces $(\sigma \vee \tau)^\lambda = \sigma^\lambda \vee \tau^\lambda$.*

Demostración

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
(\sigma \vee \tau)^\lambda(M) &= (\sigma \vee \tau)^0(M) \\
&= 1(M) \\
&= M \\
&= M + M \\
&= 1(M) + 1(M) \\
&= (1 \vee 1)(M) \\
&= (\sigma^0 \vee \tau^0)(M) \\
&= (\sigma^\lambda \vee \tau^\lambda)(M)
\end{aligned}$$

Si $\lambda = \mu + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
(\sigma \vee \tau)^{\lambda}(M) &= (\sigma \vee \tau)^{\mu+1}(M) \\
&= (\sigma \vee \tau)^{\mu}((\sigma \vee \tau)(M)) \\
&= (\sigma \vee \tau)^{\mu}(\sigma(M) + \tau(M)) \\
&= (\sigma \vee \tau)^{\mu}(\sigma(M) \oplus \tau(M)) \\
&= (\sigma \vee \tau)^{\mu}(\sigma(M)) \oplus (\sigma \vee \tau)^{\mu+1}(\tau(M)) \\
&= (\sigma^{\mu} \vee \tau^{\mu})(\sigma(M)) + (\sigma^{\mu}) \vee \tau^{\mu})(\tau(M)) \\
&= \sigma^{\mu}(\sigma(M)) + \tau^{\mu}(\sigma(M)) + \sigma^{\mu}(\tau(M)) + \tau^{\mu}(\tau(M)) \\
&= \sigma^{\mu+1}(M) + 0 + 0 + \tau^{\mu+1}(M) \\
&= \sigma^{\lambda}(M) + 0 + 0 + \tau^{\lambda}(M)
\end{aligned}$$

Si λ es un ordinal límite, entonces

$$\begin{aligned}
(\sigma \vee \tau)^{\lambda}(M) &= \bigcap_{\mu<\lambda} (\sigma \vee \tau)^{\mu}(M) \\
&= \bigcap_{\mu<\lambda} (\sigma^{\mu} \vee \tau^{\mu})(M) \\
&= \bigcap_{\mu<\lambda} (\sigma^{\mu}(M) + \tau^{\mu}(M)) \\
&= \bigcap_{\mu<\lambda} (\sigma^{\mu}(M) \oplus \tau^{\mu}(M)) \\
&= \bigcap_{\mu<\lambda} \sigma^{\mu}(M) \oplus \bigcap_{\mu<\lambda} \tau^{\mu}(M) \\
&= \bigcap_{\mu<\lambda} \sigma^{\mu}(M) + \bigcap_{\mu<\lambda} \tau^{\mu}(M) \\
&= \sigma^{\lambda}(M) \vee \tau^{\lambda}(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\sigma \vee \tau)^{\lambda} = \sigma^{\lambda} \vee \tau^{\lambda}$. ■

LEMA 3.4. *Si σ y τ son prerradicales sobre R-Mod tales que $\sigma \wedge \tau = 0$, entonces $\widehat{\sigma \vee \tau} = \widehat{\sigma} \vee \widehat{\tau}$.*

Demostración

Sean M un R-módulo izquierdo. Se sabe que existen λ_1, λ_2 y λ_3 ordinales tales que $\widehat{\sigma}(M) = \sigma^{\lambda_1}(M)$, $\widehat{\tau}(M) = \tau^{\lambda_2}(M)$ y $\widehat{\sigma \vee \tau}(M) = (\sigma \vee \tau)^{\lambda_3}(M)$. Pero si se toma $\lambda =$máx$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, entonces $\widehat{\sigma}(M) = \sigma^{\lambda}(M)$, $\widehat{\tau}(M) = \tau^{\lambda}(M)$ y $\widehat{\sigma \vee \tau}(M) = (\sigma \vee \tau)^{\lambda}(M)$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma \vee \tau}(M) &= (\sigma \vee \tau)^{\lambda}(M) \\
&= (\sigma^{\lambda} \vee \tau^{\lambda})(M) \\
&= \widehat{\sigma \vee \tau}(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\widehat{\sigma \vee \tau} = \widehat{\sigma} \vee \widehat{\tau}$. ■

PROPOSICIÓN 3.11. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo sobre R-Mod, τ un prerradical fuertemente nilpotente sobre R-Mod y $\sigma \wedge \tau = 0$, entonces $\sigma \vee \tau$ es prerradical prehereditario.*

Demostración

Se observa que por el lema anterior se tiene, $\widehat{\sigma \vee \tau} = \widehat{\sigma} \vee \widehat{\tau} = \sigma \vee 0 = \sigma$. ■

El último resultado sugiere como construir una familia infinita de prerradicales prehereditarios no exactos izquierdos. Sean p y q primos diferentes, entonces $\alpha_{\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{Z}_p}$ es prerradical es exacto izquierdo por ser el $\mathbb{Z}_p$-zoclo y es $\alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}$ fuertemente nilpotente por que su idempotente asociado anula las cápsulas inyecticas de los simples, es decir, para un primo r distinto de q se tiene que $\alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}(\mathbb{Z}_{r^\infty}) = 0$ lo que implica que $\widehat{\alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}}(\mathbb{Z}_{r^\infty}) = 0$. Por otro lado $(\alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}})^2(\mathbb{Z}_{q^\infty}) = \alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}(\mathbb{Z}_q) = 0$, entonces $\widehat{\alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}}(\mathbb{Z}_{q^\infty}) = 0$. Por la proposición anterior $\alpha_{\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{Z}_p} \vee \alpha_{\mathbb{Z}_q}^{\mathbb{Z}_{q^\infty}}$ es un prerradical prehereditario que no es idempotente (en particular no es exacto izquierdo), tampoco es un radical, y su clase de pretorsión no es trivial.

4. Esencialidad respecto a un Prerradical

PROPOSICIÓN 4.1. *Si M es un R-módulo izquierdo no singular y N es un submódulo de M, entonces $N \trianglelefteq M$ si y sólo si M/N es singular.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in M$, entonces $ann(x+N) = (N : x) \trianglelefteq R$. Por lo que $x+N \in Z(M/N)$. Por lo tanto $Z(M/N) = M/N$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in M$ con $x \neq 0$, entonces $(N : x) = ann(x+N) \trianglelefteq R$. Como $(N : x) \trianglelefteq R$ entonces $(N : x) \neq 0$. Por otro lado $ann(x) \subseteq (N : x)$, pero si $ann(x) = (N : x)$ entonces $ann(x) \trianglelefteq R$ contradiciendo que M sea no singular. Por lo que $(N : x)x \neq 0$, lo que implica que $Rx \cap N \neq 0$. Por lo tanto $N \trianglelefteq M$. ■

PROPOSICIÓN 4.2. *Si M es un R-módulo izquierdo y N y K son submódulos de M, entonces:*

1. *Si $x \in M$ y $N \trianglelefteq M$, entonces $(N : x) \trianglelefteq R$.*
2. *Si $K \trianglelefteq M$ y $L \trianglelefteq M$, entonces $N \cap K \trianglelefteq M$.*
3. *Si $K \trianglelefteq N$ y $N \trianglelefteq M$, entonces $K \trianglelefteq M$.*
4. *Si $K \trianglelefteq M$ y $K \leq N$, entonces $K \trianglelefteq N$ y $N \trianglelefteq M$.*

Las demostraciones de estos hechos se pueden encontrar en el libro de Wisbauer que aparece en la bibliografía.

Con las dos proposiciones anteriores se puede pensar un nuevo tipo de esencialidad con respecto a un prerradical σ. Sea M un R-módulo izquierdo y N un submódulo de M, se dice que N es σ-denso en M si $\sigma(M/N) = M/N$, este hecho se denota por $N \trianglelefteq_\sigma M$, y se puede pensar como una σ-esencialidad, como se ve en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.3. *Si M es un R-módulo izquierdo, N y K son submódulos de M y si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces:*

1. *Si* $K \trianglelefteq_\sigma M$ *y* $K \leq N$*, entonces* $N \trianglelefteq_\sigma M$.

   Cuando σ *es prehereditario,*

2. *Si* $x \in M$ *y* $N \trianglelefteq_\sigma M$*, entonces* $(N : x) \trianglelefteq_\sigma R$.
3. *Si* $K \trianglelefteq_\sigma M$ *y* $L \trianglelefteq \sigma M$*, entonces* $N \cap K \trianglelefteq_\sigma M$.
4. *Si* $K \trianglelefteq_\sigma M$ *y* $K \leq N$*, entonces* $K \trianglelefteq_\sigma N$.
5. *Si* $N \leq M$ *y* $K \trianglelefteq_\sigma M$*, entonces* $K \cap N \trianglelefteq_\sigma N$.

   Cuando σ *es esencialmente coidempotente,*

6. *Si* $K \trianglelefteq_\sigma N$ *y* $N \trianglelefteq_\sigma M$*, entonces* $K \trianglelefteq_\sigma M$.

Demostración

1. Se sigue del hecho de que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes.
2. Se considera las siguientes igualdades $R/(N : x) = R/ann(x + N) \cong R(x + N) \leq M/N$.
3. Sea $\pi : M \longrightarrow M/N \times M/K$ el morfismo inducido por las proyecciones canónicas, como $M/N \times M/K$ es un R-módulo izquierdo de σ-torsión, $\ker \pi = N \cap K$ y $M/(N \cap K)$ es isomorfo a un submódulo de $M/N \times M/K$ entonces $M/(N \cap K)$ es un R-módulo izquierdo de σ-torsión.
4. Se obtiene de que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos.
5. Se sigue del Segundo Teorema de isomorfismo y de que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos.
6. Se sigue del hecho de que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo extensiones.■

Proposición 4.4. *Si* σ *y* τ *son prerradicales sobre R-Mod,* M *es un* R*-módulo izquierdo,* N *es un submódulo de* M*,* $\sigma \leq \tau$ *y* $N \trianglelefteq_\sigma M$*, entonces* $N \trianglelefteq_\tau M$.

Demostración

Basta observar que $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$. ■

PROPOSICIÓN 4.5. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y N es un submódulo de M, entonces $N \trianglelefteq_\sigma M$ si y sólo si $N \trianglelefteq_{\widehat{\sigma}} M$.*

Demostración

Basta recordar que $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$. ■

PROPOSICIÓN 4.6. *Si σ es un prerradical prehereditario sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo, N es un submódulo de M, M es libre de σ-torsión y $N \trianglelefteq_\sigma M$, entonces $N \trianglelefteq M$.*

Demostración

Sea $x \in M$, entonces por el segundo teorema de isomorfismo $Rx/(Rx \cap N) \cong (Rx + N)/N$ lo que implica que $Rx + N \trianglelefteq_\sigma M$ y $Rx/(Rx \cap N)$ es de σ-torsión, como Rx es libre de σ-torsión, si $Rx \cap N = 0$ entonces Rx es de σ-torsión y esto implica que $Rx = 0$ y $x = 0$, que significa que si $x \neq 0$ entonces $Rx \cap N \neq 0$. ■

5. Submódulos Puros respecto a un Prerradical

Sea σ un prerradical sobre R-Mod, sea M un R-módulo izquierdo y sea N un submódulo de M, se dice que N es un submódulo σ-puro M si M/N es libre de σ-torsión.

PROPOSICIÓN 5.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos σ-puros de M, entonces $\bigcap_{i\in I} M_i$ es un submódulo σ-puro de M.*

Demostración

Sean $\pi : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M/M_i$ el morfismo inducido por las proyecciones canónicas, como $\prod_{i\in I} M/M_i$ es libre de σ-torsión y $\ker \pi = \bigcap_{i\in I} M_i$ se sigue que $M/\bigcap_{i\in I} M_i$ es libre de σ-torsión. ■

Para un submódulo N de un R-módulo izquierdo M, se puede considerar el menor submódulo σ-puro de M que contiene a N, éste se denota N_σ^M, y está descrito por

$$N_\sigma^M = \bigcap \{K \leq M \mid N \leq K, M/K \in \mathbb{F}_\sigma\}.$$

Por la última proposición este es un submódulo σ-puro en M y contiene a N. El submódulo N_σ^M se llama la σ-purificación de N en M.

PROPOSICIÓN 5.2. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y N es un submódulo de M, entonces $\bar{\sigma}(M/N) = N_\sigma^M/N$.*

Demostración

De la teoría de prerradicales se sabe que $\bar{\sigma}(M/N) = \bigcap\{K/N \leq M/N \mid (M/N)/(K/N) \in \mathbb{F}_\sigma\}$. Por el teorema de la correspondencia biyectiva se tiene que $\bar{\sigma}(M/N) = L/N$ para algún submódulo de M que contenga a N. Por otro lado, por el tercer teorema de isomorfismo $(M/N)/(K/N) \cong M/K$. De nuevo, por el teorema de la correspondencia biyectiva $L = \bigcap\{K \leq M \mid N \leq K, M/K \in \mathbb{F}_\sigma\} = N_\sigma^M$. ■

COROLARIO 5.1. *Si σ un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y N es un submódulo de M, entonces $N_\sigma^M = N_{\bar{\sigma}}^M$.*

Demostración

Se sigue de que $\mathbb{F}_\sigma = \mathbb{F}_{\bar{\sigma}}$. ■

PROPOSICIÓN 5.3. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y N es un submódulo de M, entonces N es σ-puro en M si y sólo si $N = N_\sigma^M$.*

Demostración

Como $\sigma(M/N) = 0$ implica que $\bar{\sigma}(M/N) = 0$ el resultado se sigue. ■

OBSERVACIÓN 5.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod y M es un R-módulo izquierdo, entonces $\bar{\sigma}(M) = 0_\sigma^M$.*

LEMA 5.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo, N es un submódulo de M, N es σ-puro en M y $N \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces $\sigma(M) = N$.*

Demostración

Como N es σ-puro en M entonces $\sigma(M/N) = 0$, de ésta manera

$$\begin{aligned}\sigma(M) &\subseteq \bar{\sigma}(M)\\ &= \bigcap\{K \leq M \mid \sigma(M/K) = 0\} \subseteq N\end{aligned}$$

Por otro lado, $N \leq M$ y $N \in \mathbb{T}_\sigma$ implican que $N = \sigma(N) \leq \sigma(M)$. ■

Observación 5.2. *Si σ es un radical idempotente sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y N es un submódulo de M, entonces N_σ^M/N es un módulo de σ-torsión.*

Demostración

Por la proposición 25, $\bar{\sigma}(M/N) = N_\sigma^M/N$. Como σ es un radical, entonces $\bar{\sigma} = \sigma$. Por lo que $\sigma(M/N) = N_\sigma^M/N$. Si se aplica *sigma* y se usa el hecho de que es idempotente $\sigma(N_\sigma^M/N) = \sigma^2(M/N) = \sigma(M/N) = N_\sigma^M/N$. ■

6. Inyectividad respecto a un Prerradical

Sea σ un prerradical sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo, se dice que M es σ-inyectivo si $f : K \longrightarrow M$ es un R-morfismo y $K \trianglelefteq_\sigma N$ entonces existe un R-morfismo $g : N \longrightarrow M$ con $g|_K = f$. Este concepto es una generalización de inyectividad con respecto a una teoría de torsión hereditaria, como referencias está el libro *Crivei*, (2). Lo primero que se observa es que si M es también un módulo de σ-torsión entonces M es casiinyectivo.

Proposición 6.1. *Sea σ un prerradical sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo. Entonces* (1) *y* (2) *son equivalentes e implican* (3), (3) *implica* (4) *y* (5), (4) *implica* (6) *y* (5) *implica* (6). *Si σ es un radical idempotente entonces* (1), (2), (3) *y* (5) *son equivalentes. Si σ es prehereditario entonces* (5) *y* (6) *son equivalentes. Si σ es un radical exacto izquierdo entonces todos son equivalentes.*

1. *M es σ-puro en $E(M)$*

2. *Si M es un submódulo de N un R-módulo izquierdo, entonces existe un submódulo σ-puro K de N que contiene a M y M es un sumando directo de K.*

3. $Ext^1_R(N, M) = 0$ *para cualquier R-módulo N de σ-torsión.*

4. $Ext^1_R(R/I, M) = 0$ *para cualquier $I \in \mathbb{I}_\sigma$.*

5. *M es σ-inyectivo.*

6. *M es σ-inyectivo respecto a R*

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2) Si $M \leq N$ entonces $E(N) = E(M) \oplus L$. Se pone $L' = N \cap L$ entonces $N/(M \oplus L')$ es isomorfo a un submódulo de $E(N)/(M \oplus L)$, se considera el morfismo $f : N \longrightarrow E(N)/(M \oplus L)$ con $f = gh$ donde $g : E(N) \longrightarrow E(N)/(M \oplus L)$ es la proyección canónica y $h : N \longrightarrow E(N)$ es la inclusión canónica, por lo que $\ker f = N \cap (M \oplus L) = M \oplus L'$. Por otro lado $E(N)/(M \oplus L) \cong (E(M) \oplus L)/(M \oplus L) \cong E(M)/M$ lo cual por hipótesis es libre de σ-torsión, esto es por que $N/(M \oplus L')$ es libre de σ-torsión y $K = M \oplus L'$ es σ-puro en N.

(2) $\Rightarrow$ (1) Como $M \leq E(M)$, por hipótesis entonces existe $K \leq E(M)$ con $M \oplus K$ σ-puro en $E(M)$, pero $M \trianglelefteq E(M)$ lo que significa que $K = 0$, de aquí M es σ-puro en $E(M)$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Se considera la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/M \longrightarrow 0$$

y se obtiene la sucesión exacta

$$Hom_R(N, E(M)/M) \longrightarrow Ext^1_R(N, M) \longrightarrow Ext^1_R(N, E(M))$$

donde N es un R-módulo de σ-torsión, como $E(M)/M$ es libre de σ-torsión, lo que implica que $Hom_R(N, E(M)/M) = 0$ y como $E(M)$ es inyectivo $Ext^1_R(N, E(M)) = 0$, de esto se sigue que $Ext^1_R(N, M) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (5) Se toma la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N/N' \longrightarrow 0$$

tal que N/N' es un módulo deσ-torsión, y se induce la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_R(N/N', M) \longrightarrow Hom_R(N, M) \longrightarrow Hom_R(N, M) \longrightarrow Ext^1_R(N/N', M)$$

que por hipótesis el último módulo es cero.

(2) $\Rightarrow$ (4),(4) $\Rightarrow$ (6) y (5) $\Rightarrow$ (6) son obvias.

(6) $\Rightarrow$ (5) Se hace en la misma forma que el criterio de Baer.

(5) $\Rightarrow$ (1) Como $M \trianglelefteq_\sigma M_\sigma^{E(M)}$ por que σ es un radical idempotente, existe un R-morfismo $\alpha : M_\sigma^{E(M)} \longrightarrow M$ tal que $\alpha|M = 1_M$ lo que implica que α es un epimorfismo, se nota que $\ker \alpha \cap = \ker 1_M = 0$ como $M \trianglelefteq M_\sigma^{E(M)}$ se sigue que α es un monomorfismo, entonces $M = M_\sigma^{E(M)}$. ■

De la última proposición se observa que es suficiente pedirle a un prerradical que sea un radical idempotente para hablar de inyectividad relativa, lo único que no se puede asegurar es un criterio estilo el criterio de Baer. Por otro lado para tener el criterio de Baer lo que se debe de pedir es que el prerradical sea prehereditario.

Sea σ un prerradical sobre R-Mod y M un R-módulo izquierdo, se define la cápsula σ-inyectiva de M como $M_\sigma^{E(M)}$ y se denota por $E_\sigma(M)$.

Observación 6.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod y M es un R-módulo izquierdo, entonces:*

1. *$E_\sigma(M)$ es σ-inyectivo*
2. *$M \trianglelefteq E_\sigma(M)$*
3. *Si σ es un radical idempotente entonces $M \trianglelefteq_\sigma E_\sigma(M)$.*

Estas tres propiedades caracterizan a la cápsula σ-inyectiva como se dice en la siguiente proposición. Es el análogo de caracterizar a la cápsula inyectiva como una extensión esencial inyectiva, pero ahora se pide que sea una extensión σ-densa σ-inyectiva y que σ sea un radical idempotente.

PROPOSICIÓN 6.2. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, K es un R-módulo izquierdo σ-inyectivo, M es un submódulo σ-denso esencial de K y σ es un radical idempotente, entonces $K = E_{\sigma}(M)$.*

Demostración

Como M es esencial en K sin pérdida de generalidad se puede reducir al caso cuando $K \leq E(M)$, por lo que $E(K) = E(M)$ y K es σ-puro en $E(M)$ entonces por el lema 3.3 se sigue el resultado. ■

OBSERVACIÓN 6.2. *Si σ es un radical idempotente sobre R-Mod y M es un R-módulo izquierdo, entonces M es σ-inyectivo si y sólo si $E_{\sigma}(M) = M$.*

PROPOSICIÓN 6.3. *Si σ es un radical idempotente sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo, N es un submódulo de M, M es σ-inyectivo y N es σ-puro en M, entonces N es σ-inyectivo.*

Demostración

Sea K un R-módulo izquierdo de σ-torsión y se considera la siguiente sucesión exacta corta:

$$Hom_R(K, M/N) \longrightarrow Ext^1_R(K, N) \longrightarrow Ext^1_R(K, M)$$

Como $Ext^1_R(K, M) = 0$ y $Hom_R(K, M/N) = 0$ como M es σ-inyectivo y M/N es libre de σ-torsión se sigue que $Ext^1_R(K, N) = 0$, por lo que N es σ-inyectivo. ■

OBSERVACIÓN 6.3. *Si σ es un radical idempotente sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y M es un módulo σ-inyectivo de σ-torsión, entonces $\sigma(E(M)) = M$.*

OBSERVACIÓN 6.4. *Si σ es un radical sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo y $\sigma(E(M)) = M$, entonces M es σ-inyectivo.*

Sea M un R-módulo izquierdo, se define $\Omega(M)$ como el conjunto de los ideales izquierdos que contienen a $ann(x)$ para algún $x \in M$.

Lema 6.1. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces M is casiinyectivo si y sólo si para cualquier ideal izquierdo L y para cualquier R-morfismo $\alpha : L \longrightarrow M$ con $\ker \alpha \in \Omega(M)$ hay un R-morfismo $\beta : R \longrightarrow M$ tal que $\beta|_L = \alpha$.*

Demostración

[4, lema 2]. ■

El lema anterior es necesario para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 6.4. *Sea σ un prerradical sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo de σ-torsión. Si σ es un radical idempotente* (1) *implica* (2)*, si σ es prehereditario entonces* (2) *implica* (1) *y si σ es un radical exacto izquierdo entonces* (1) *y* (2) *son equivalentes.*

1. *M es σ-inyectivo.*
2. (a) *M es casiinyectivo.*

   (b) *Si $I \in \mathbb{I}_\sigma$ y I' es un ideal izquierdo tal que $I' \subseteq I$ y I/I' se puede sumergir en M entonces $I' = I \cap ann(x)$ para algún $x \in M$.*

Demostración

Se sigue de los argumentos de la proposición (4,2) de *Golan*, (5). ■

Proposición 6.5. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod y $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos izquierdos, entonces $\prod_{i\in I} M_i$ es σ-inyectivo si y sólo si M_i es σ-inyectivo para todo $i \in I$.*

Proposición 6.6. *Si M es un R-módulo casiinyectivo y $\omega_M^{E(M)}$ es un radical, entonces M es σ-inyectivo para cualquier prerradical σ tal que $\sigma(E(M)) = M$.*

Demostración

Si $\omega_M^{E(M)}$ es un radical, como $\sigma(E(M)) = M$ implica $\sigma \leq \omega_M^{E(M)}$, entonces $\sigma(E(M)/M) \leq \omega_M^{E(M)}(E(M)/M) = 0$ lo que significa que M es σ-puro en $E(M)$, de aquí σ-inyectivo. ■

Sea σ un prerradical sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo, como se vió $E_\sigma(M)/M = \bar{\sigma}(E(M)/M)$. Sea R el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ y se considera $\sigma = Zoc, t, d, J$ donde Zoc es el zoclo, t la parte de torsión, d la parte divisible y J el radical de Jacobson entonces $E_\sigma(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ y $E_\sigma(\mathbb{Z}_{p^k}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ con p un número primo y k un número natural. Lo último porque $E_\sigma(\mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \bar{\sigma}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $E_\sigma(\mathbb{Z}_{p^k})/\mathbb{Z}_{p^k} = \bar{\sigma}(\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \bar{\sigma}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^k}$. Pero si $\sigma = \alpha^{\mathbb{Z}_p}_{\mathbb{Z}_p}$ con p un número primo $E_\sigma(\mathbb{Z}) = \{\frac{a}{p^m} \in \mathbb{Q} \mid a, m \in \mathbb{N}\}$, porque $E_\sigma(\mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \bar{\sigma}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. $E_\sigma(\mathbb{Z}_{q^k}) = \mathbb{Z}_{q^\infty}$ cuando $p = q$ porque $E_\sigma(\mathbb{Z}_{p^k})/\mathbb{Z}_{p^k} = \bar{\sigma}(\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \bar{\sigma}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^k}$. $E_\sigma(\mathbb{Z}_{q^k}) = \mathbb{Z}_{q^k}$ cuando $p \neq q$ con q un número primo, porque $E_\sigma(\mathbb{Z}_{p^k})/\mathbb{Z}_{p^k} = \bar{\sigma}(\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \bar{\sigma}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$.

7. Submódulos Pseudocomplementados relativos a un Prerradical

Sea σ un prerradical sobre R-Mod, sea M un R-módulo izquierdo y sea N un submódulo de M, se dice que N es σ-pseudocomplementado en M si existe un submódulo K de M tal que $N \cap K = 0$, $N \oplus K \trianglelefteq M$ y $N \oplus K$ es σ-denso en M , el submódulo K se llama un σ-pseudocomplemento de N en M. Se observa que este concepto es similar al concepto de submódulos μ-complementados pero que no es el mismo.

Proposición 7.1. *Si σ es un prerradical esencialmente coidempotente sobre R-Mod, M, N y K son R-módulos izquierdos con $K \leq N \leq M$, K es σ-pseudocomplementado en N y N es σ-pseudocomplementado en M, entonces K es σ-pseudocomplementedo en M.*

Demostración

Por hipótesis existen K' un submódulo de N y N' submódulo de M tales que $K \cap K' = 0$, $N \cap N' = 0$, $K \oplus K' \trianglelefteq N$, $N \oplus N' \trianglelefteq M$, $K \oplus K' \trianglelefteq_\sigma N$ y $N \oplus N' \trianglelefteq_\sigma M$. Se propone $K' \oplus N'$ como el σ-pseudocomplemento de K en M. Inmediatamente $K \oplus K \oplus N' \trianglelefteq M$. Ahora se considera la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (N \oplus N')/(K \oplus K \oplus N') \longrightarrow M/(K \oplus K \oplus N') \longrightarrow M/(N \oplus N') \longrightarrow 0$$

Como $(N \oplus N')/(K \oplus K \oplus N') \cong N/(K \oplus K') \in \mathbb{T}_\sigma$, $M/(N \oplus N') \in \mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrado bajo extensiones $M/(K \oplus K \oplus N') \in \mathbb{T}_\sigma$ y se obtiene la proposición. ■

Proposición 7.2. *Si σ es un prerradical prehereditario sobre R-Mod, M, N y K son R-módulos izquierdos con $K \leq N \leq M$ y K es σ-pseudocomplementado en M, entonces K es σ-pseudocomplementado en N.*

Demostración

Por hipótesis existe K' un submódulo de M tal que $K \cap K' = 0$, $K \oplus K' \trianglelefteq M$ y $K \oplus K' \trianglelefteq_\sigma M$. Es el propuesto $K'' = N \cap K'$ cómo el σ-pseudocomplemento de K en N. Primero es obvio que $K'' \cap N = 0$. Además

$$\begin{aligned} K \oplus K'' &= K \oplus (N \cap K') \\ &= N \cap (K \oplus K') \trianglelefteq N. \end{aligned}$$

Por último, como $K \oplus K' \trianglelefteq_\sigma M$ entonces $K \oplus K'' = N \cap (K \oplus K') \trianglelefteq_\sigma N$ como se quiere. ■

Sea σ un prerradical prehereditario sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo, $Subp_\sigma(M)$ denota el conjunto de todos los submódulos de M que son σ-pesudocomplementados.

Observación 7.1. *Si σ y τ son prerradicales sobre R-Mod y N y M son R-módulos izquierdos, entonces:*

1. *$M \in Subp_\sigma(M)$.*
2. *$0 \in Subp_\sigma(M)$.*
3. *Si $N \trianglelefteq_\sigma M$, entonces $N \in Subp_\sigma(M)$.*
4. *Si M es un módulo de σ-torsión, entonces $Subp_\sigma(M) = Sub(M)$.*
5. *Si N es un sumando directo de M, entonces $N \in Subp_\sigma(M)$.*
6. *Si $\sigma \leq \tau$ entonces $Subp_\sigma(M) \subseteq Subp_\tau(M)$.*

Sea σ un prerradical prehereditario sobre R-Mod, $\mathbb{E}_\sigma$ denota la clase de todos los módulos σ-inyectivos.

Proposición 7.3. *Si σ y τ son prerradicales sobre R-mod y $Subp_\sigma(M) = Subp_\tau(M)$ para culaquier R-módulo izquierdo M, entonces $\mathbb{E}_\sigma = \mathbb{E}_\tau$.*

Demostración

Sea E un R-módulo σ-inyectivo, sea M un R-módulo izquierdo, N un submódulo τ-denso M y $\alpha : N \longrightarrow E$ un R-morfismo. Primero se observa que $N \in Subp_\tau$ entonces tiene un σ-pseudocomplento N' en M, por lo que se considera el morfismo $\alpha \oplus 0 : N \oplus N' \longrightarrow E$ como $N \oplus N' \trianglelefteq_\sigma M$ entonces existe un morfismo $\beta : M \longrightarrow E$ tal que $\beta|_{N\oplus N'} = \alpha \oplus 0$, por lo que $\beta|_N = \alpha$ lo que demuestra que E es τ-inyectivo. ■

COROLARIO 7.1. *Si Z es el prerradical singular y E es un R-módulo izquierdo, entonces E es inyectivo si y sólo si E es Z-inyectivo.*

8. Submódulos absolutamente σ-puros

Sea σ un prerradical sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo. Se dice que M es absolutamente σ-puro si M es libre de σ-torsión y σ-inyectivo.

PROPOSICIÓN 8.1. *Sea σ un prerradical sobre R-Mod y sea M un R-módulo izquierdo. Entonces (1) $\Rightarrow$ (2) y si σ es idempotente entonces son equivalentes.*

1. *M es absolutamente σ-puro.*
2. *Para todo R-módulo izquierdo N, para cualquier submódulo σ-denso de N, K, y para cualquier R-morfismo $\alpha : K \longrightarrow M$ exsite un único R-morfiso $\beta : N \longrightarrow M$ tal que $\beta|_K = \alpha$.*

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean β y β' R-morfismos tales que $\beta|K = \alpha$ y $\beta'|K = \alpha$. Entonces $K \leq \ker(\beta - \beta')$ por lo que hay un morfismo $\gamma : N/K \longrightarrow M$ dado por $\gamma(x + K) = (\beta - \beta')(x)$ para cualquier $x + K \in N/K$. Como N/K es un módulo de σ-torsión módulo y M es un módulo libre de σ-torsión se sigue que $\gamma = 0$ por lo que $\beta = \beta'$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se tiene que ver que $\sigma(M) = 0$, por lo que 0 es un submódulo σ-denso $\sigma(M)$ y hay dos morfismo que extienden el morfismo $0 : 0 \longrightarrow M$, la inclusión $i : \sigma(M) \longrightarrow M$ y $0 : \sigma(M) \longrightarrow M$, por la unicidad $i = 0$ y se sigue que $\sigma(M) = 0$. ■

Proposición 8.2. *Si σ es un prerradical coestable sobre R-Mod, M es un R-módulo izquierdo libre de σ-torsión y M es σ-puro en cualquier módulo libre de σ-torsión que lo contenga, entonces M es absolutamente σ-puro.*

Demostración

Como M es libre de σ-torsión, $E(M)$ es libre de σ-torsión, por lo que M es σ-puro en $E(M)$ lo que implica que M es σ-inyectivo. ■

Proposición 8.3. *Si σ es un prerradical esencialmente idempotente sobre R-Mod y M es un R-módulo izquierdo absolutamente σ-puro, entonces M es libre de σ-torsión y M es σ-puro en cualquier módulo libre de σ-torsión que lo contenga.*

Demostración

Sea M' un R-módulo libre de σ-torsión que contiene a M, entonces existe un-submódulo de M', N, tal que $M \oplus N$ es σ-puro en M'. Por lo que se observa la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow (M \oplus N)/M \longrightarrow M'/M \longrightarrow M'/(M \oplus N) \longrightarrow 0$$

Ahora, como $(M \oplus N)/M \cong N$ el cual es libre de σ-torsión y $M'/(M \oplus N)$ es libre de σ-torsión entonces M'/M es libre de σ-torsión. ■

9. Prerradicales Autocoestables

Sea σ un prerradical sobre R-Mod. Se dice que σ es autocoestable si $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrado bajo cápsulas σ-inyectivas.

Observación 9.1. *Si σ un prerradical coestable sobre R-Mod, entonces es autocoestable.*

Proposición 9.1. *Si σ es un prerradical autocoestable esencialmente idempotente sobre R-Mod, entonces σ es un prerradical coestable.*

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo libre de σ-torsión y se considera la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow E_\sigma(M) \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/E_\sigma(M) \longrightarrow 0$$

como $E(M)/E_\sigma(M)$ es libre de σ-torsión entonces $E(M)$ es libre de σ-torsión. ■

COROLARIO 9.1. *Si σ es un radical autocoestable esencialmente idempotente sobre R-Mod, entonces σ es un radical exacto izquierdo.*

10. Localización

Sea σ un prerradical sobre R-Mod. Se define la asignación Q_σ de R-Mod en R-Mod como $Q_\sigma(M) = E_\sigma(M/\sigma(M))$ para todo R-módulo izquierdo M, por lo que se define $\eta_M^\sigma : M \longrightarrow Q_\sigma(M)$ como la proyección canónica $M \twoheadrightarrow M/\sigma(M)$ compuesta de la inclusión canónica. Se observa que si σ es un radical exacto izquierdo entonces $Q_\sigma(M)$ es un módulo absolutamente σ-puro para cualquier R-módulo izquierdo M, si $\alpha : M \longrightarrow N$ es un R-morfismo éste induce un R-morfismo $\bar{\alpha} : M/\sigma(M) \longrightarrow N/\sigma(N)$ el cual es compuesto con la inclusión $N/\sigma(N)$ in $Q_\sigma(N)$ y como $Q_\sigma(N)$ es absolutamente σ-puro entonces hay un único R-morfismo $\gamma : Q_\sigma(M) \longrightarrow Q_\sigma(N)$ tal que extiende el morfismo mencionado. Si se pone $Q_\sigma(f) = \gamma$ es inmediato ver que en éste caso la asignación Q_σ es un endofuntor en R-Mod. El endofuntor se llama la localización respecto a σ y se ha estudiado mucho, como referencias son (5), (6) y (16).

PROPOSICIÓN 10.1. *Si σ es un radical exacto izquierdo sobre R-Mod, entonces Q_σ es idempotente y exacto izquierdo.*

PROPOSICIÓN 10.2. *Si σ es un radical exacto izquierdo sobre R-Mod, entonces $\eta^\sigma : 1_{R\text{-}Mod} \longrightarrow Q_\sigma$ es una transformación natural.*

PROPOSICIÓN 10.3. *Si σ es un radical exacto izquierdo sobre R-Mod y M es un R-módulo izquierdo, entonces $\ker \eta_M^\sigma$ es un módulo de σ-torsión módulo y coker_M^η es un módulo libre de σ-torsión.*

Las tres proposiciones anteriores son resultados clásicos de la teoría de localizaciones.

Proposición 10.4. *Si σ es un radical exacto izquierdo sobre R-Mod, entonces* $\eta^\sigma \circ Q_\sigma = Q_\sigma \circ \eta^\sigma$.

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo, es fácil verficar que $\eta^\sigma_{Q_\sigma(M)} = 1_{Q_\sigma(M)}$ y $Q_\sigma(\eta^\sigma_M) = 1_{Q_\sigma(M)}$. ■

Proposición 10.5. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces σ es un prerradical idempotente si y sólo si $Q_\sigma \circ \sigma = 0$*

Demostración

Sea M un R-módulo izquierdo, entonces $(Q_\sigma \circ \sigma)(M) = E_\sigma(\sigma(M)/\sigma^2(M))$. ■

Proposición 10.6. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod y $Q_\sigma \circ \sigma = \sigma \circ Q_\sigma$, entonces σ es un radical idempotente autocoestable .*

Demostración

Es fácil ver que σ es idempotente, entonces por la proposición 77 $\sigma \circ Q_\sigma = 0$ lo que implica que $\sigma(E_\sigma(M/\sigma(M))) = 0$ para cualquier R-módulo izquierdo M, por lo que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ lo que dice que σ es un radical y eso implica que $\mathbb{F}_\sigma = \{M/\sigma(M) \mid M \in R\text{-Mod}\}$ de aquí que la clase $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo cápsulas σ-inyectivas. ■

Corolario 10.1. *Si σ es un prerradical sobre R-Mod, entonces $Q_\sigma \circ \sigma = \sigma \circ Q_\sigma$ si y sólo si σ es un radical exacto izquierdo.*

Demostración

Todos los radicales idempotentes autocoestables son radicales exactos izquierdos. ■

APÉNDICE

11. Dimensiones en Teoría de Anillos

La referencia para dimensiones en Teoría de anillos serán (11) y (12).

11.1. Dimensión Uniforme.

Para un anillo R y M un R-módulo izquierdo, se dice M tiene dimensión uniforme si existe una familia de submódulos $\{N_i\}_{i\in I}$ de M tal que $\bigoplus_{i\in I} N_i$ es un submódulo esencial de M. La dimensión uniforme de M es la cardinalidad de I y ésta está bien definida, es decir, que si existen dos familias de submódulos que cumplan lo anterior entonces existe una biyección entre ellas. No todos los módulos tienen dimensión uniforme. Si el conjunto I es finito se dice que M tiene dimensión uniforme finita.

Se dice que R tiene dimensión uniforme finita izquierda si tiene dimensión uniforme finita como módulo izquierdo sobre sí mismo.

11.2. Dimensión de Krull.

Para un anillo R y M un R-módulo izquierdo, se define la dimensión de Krull de M, denotada por $dK(M)$, como: en forma recursiva $dK(0) = -\infty$, $dK(M) = 0$ si M es artiniano, y $dK(M) = \alpha$ si $dK(M) \neq \beta$ para cualquier ordinal $\beta < \alpha$ y en cualquier cadena descendente de submódulos de M todos excepto un número finito de factores tiene dimensión de Krull menor que α.

Un anillo R tiene dimensión de Krull izquierda si tiene dimensión de Krull como módulo izquierdo sobre sí mismo. Un resultado clásico en la teoría es:

Proposición 11.1. *Si R es un anillo, M un R-módulo izquierdo y M tiene dimensión de Krull, entonces M tiene dimensión uniforme finita.*

COROLARIO 11.1. *Si R es un anillo que tiene dimensión de Krull izquierda entonces R tiene dimensión uniforme finita izquierda.*

11.3. Dimensión Proyectiva.

Sea R un anillo y sea M un R-módulo izquierdo. Se dice que M tiene dimensión proyectiva n, denotada por $pd(M) = n$, si hay una sucesión exacta $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con P_i proyectivo para $i = 0, ..., n$ y no hay otra más corta. Es inmediato que M es proyectivo si y sólo si $pd(M) = 0$.

12. Radical de Jacobson

El radical de Jacobson de R en un anillo se denota por $J(R)$ y es la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de R. Para $x \in R$, x es casiregular izquierdo en R, si $1 - x$ es invertible por la izquierda en R.

Entre las muchas caracterizaciones de $J(R)$, se tiene:

PROPOSICIÓN 12.1. *Si R es un anillo, entonces $J(R)$ es el único ideal izquierdo en el cual todos sus elementos son casiregulares izquierdos y $J(R)$ es máximo con respecto a ésta propiedad.*

PROPOSICIÓN 12.2. *Para R un anillo y n un número natural, se tiene $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$ para todo natural n.*

13. Clases de Anillos

Para profundizar en los conceptos generales de la teoría de anillos, referimos al lector a $(9), (10), (16)$ y (17).

13.1. Anillos Semisimples Artinianos.

Un anillo R se llama semisimple si $J(R) = 0$. Se llama semisimple artiniano si es semisimple y artiniano izquierdo.

13.2. Anillos con Número de Base Invariante.

Un anillo R se dice que tiene número de base invariante, si para cualquier pareja de números naturales n y m con $R^n \cong R^m$ como R-módulos izquierdos, se tiene que $n = m$.

13.3. Anillo Libre de Proyectivos Izquierdo.

Un anillo R es llamado libre de proyectivos izquierdo, si todos sus R-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados son libres.

13.4. Anillos Max Izquierdos.

Un anillo R se llama max izquierdo si todos sus R-módulos izquierdos no cero tienen un submódulo máximo.

13.5. Anillos Perfectos Izquierdos.

Un anillo R es llamado perfecto izquierdo si todo R-módulo izquierdo tiene una cubierta proyectiva. La equivalencia queusamos es:

Proposición 13.1. *Si R es un anillo, entonces R es perfecto izquierdo si y sólo si R es un anillo max izquierdo y $R/J(R)$ es semisimple artiniano.*

13.6. Anillos Semiperfectos Izquierdos.

Un anillo R es llamado semiperfecto izquierdo, si cualquier R-módulo izquierdo simple tiene una cubierta proyectiva. La equivalencia que se usa es:

Proposición 13.2. *Si R es un anillo, entonces R es semiperfecto izquierdo si y sólo si $R/J(R)$ es semisimple artiniano y los idempotentes se levantan módulo $J(R)$.*

13.7. Anillos Regulares de von Neumann.

Un anillo R se llama regular de von Neumann (véase (7)) si para cualquier $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $a = axa$. Un resultado clásico es:

PROPOSICIÓN 13.3. *Si R es un anillo regular de von Neumann, entonces $M_n(R)$ es un anillo regular de von Neumann para cualquier natural n.*

13.8. V-Anillos Izquierdos.

Un anillo R se llama un V-anillo izquierdo si todos sus R-módulo izquierdos simples son inyectivos.

13.9. Anillos Quasi-Frobenius.

Un anillo R se llama quasi-Frobenius si es neteriano izquierdo y autoinyectivo izquierdo.

13.10. Anillos Primitivos Izquierdos.

Un anillo R se llama primitivo izquierdo si tiene un R-módulo izquierdo simple fiel.

PROPOSICIÓN 13.4. *Sea R un anillo. Entonces R es primitivo izquierdo si y sólo si R es isomorfo a un subanillo denso de un anillo de endomorfismos de un espacio vectorial izquierdo sobre un anillo con división.*

13.11. Anillo Lineal Completo Izquierdo.

Un anillo R se llama un anillo lineal completo izquierdo si R es el anillo de operadores de un espacio vectorial izquierdo sobre un anillo con división.

PROPOSICIÓN 13.5. *Si R es un anillo, entonces R es un anillo lineal completo izquierdo si y sólo si R es regular de von Neumann, autoinyectivo izquierdo con zoclo izquierdo no cero.*

13.12. Anillos Semiprimos.

Sea R un anillo e I un ideal de R, I es semiprimo si para cualesquiera $a, x \in R$, $axa \in I$ implica $a \in I$. Un anillo se llama semiprimo si el ideal cero es semiprimo.

13.13. Anillos Primos.

Sea R un anillo e I un ideal de R, I es primo si para cualesquiera $a, b, x \in R$, $axb \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$. Un anillo se llama primo si el ideal cero es primo. Trivialmente todos los anillos primos son semiprimos.

13.14. Anillos Fuertemente π-Regulares.

Un anillo R se llama fuertemente π-regular si para todo elemento $a \in R$ la cadena $\{a^n R\}_{n=1}^{\infty}$ se estaciona.

14. K-Teoría

Las referencia propuestas para K-teoría es (2) y (15).

Se define $\mathcal{P}(R)$ como la clase de todos los R-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados, y se puede considerar el monoide $\mathcal{M}(R)$ de las clases de isomorfismo $\mathcal{P}(R)$ con el coproducto como operación, entonces un elemento $[P]$ en $\mathcal{M}(R)$ es la clase de equivalencia de un R-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado por lo que $[P] = [P']$ si y sólo si $P \cong P'$ como R-módulos izquierdos. La operación está dada por $[P] + [Q] = [P \oplus Q]$. Es claro que de esta forma $\mathcal{M}(R)$ es un monoide conmutativo. Finalmente se define por $K_0(R)$ al grupo de Grothendieck de $\mathcal{M}(R)$. El funtor K_0 se relaciona con el número invariante de base en la siguiente forma:

Proposición 14.1. *Si R es un anillo y $\lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(R)$ es el morfismo de grupo inducido por $\lambda(1) = [R]$, entonces R tiene número invariante de base si y sólo si λ es un monomorfismo. Más aún, λ restringido al submonoide generado por $[R]$ en $\mathbb{N}$ es un isomorfismo de monoides si y sólo si R es libre de proyectivos izquierdo.*

Con respecto a límites directos, el funtor K_0 conmuta con límites directos, esto es:

Proposición 14.2. *Si* $(R_i, \alpha_i^j R_i \longrightarrow R_j)_{i\leq j\in I}$ *es un sistema dirigido de anillos, entonces* $\varinjlim K_0(R_i) \cong K_0(\varinjlim R_i)$.

15. Prerradicales

Un prerradical σ sobre R-Mod es un subfuntor del funtor identidad, como referencias se tiene (1) y (16). La clase de todos los prerradicales sobre R-Mod se denota por R-pr. La clase de los prerradicales se puede ordenar puntualmente, esto es, si σ y τ son prerradicales sobre R-Mod, $\sigma \leq \tau$ si $\sigma(M) \leq \tau(M)$ para todo R-módulo izquierdo M. Con este orden la clase de los prerradicales es una gran retícula completa. También se tienen dos operaciones binarias, el producto y el coproducto, si un prerradical es idempotente bajo el producto se llama un prerradical idempotente y si es idempotente bajo el coproducto se llama un radical. La clase de todos los prerradicles idempotentes sobre R-Mod se denota por R-id y la clase de todos los radicales sobre R-Mod se denota por R-rad.

Sea M un R-módulo izquierdo y sea N un submódulo de M, N se llama un submódulo fuertemente invariante de M,si $f(N) \subseteq N$ para todo endomorfismo f de M. Sea σ un prerradical, entonces $\sigma(M)$ es un submódulo fuertemente invariante de M, más aún, N submódulo fuertemente invariante de M si y sólo si existe un prerradical σ tal que $\sigma(M) = N$. Sea N un submódulo fuertemente invariante de M, se define:

$$\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N) \mid f : M \longrightarrow K\}$$

$$\omega_N^M(K) = \bigcap\{f^{-1}(N) \mid f : K \longrightarrow M\}$$

para todo R-módulo izquierdo K. Es fácil ver que $\alpha_N^M(M) = N$ y $\omega_N^M(M) = N$, más aún, para cualquier prerradical σ, $\sigma(M) = N$ si y sólo si $\alpha_N^M \leq \sigma \leq \omega_N^M$.

16. Clases de Módulos

Una clase de R-módulo izquierdos se llama un clase de pretorsión si es cerrada bajo coproductos y cocientes y se llama una clase libre de pretorsión si es cerrada bajo productos y submódulos.

PROPOSICIÓN 16.1. *Si σ es un prerradical, entonces la clase $\mathbb{T}_\sigma := \{M \mid \sigma(M) = M\}$ es una clase de pretorsión y $\mathbb{F}_\sigma = \{M \mid \sigma(M) = 0\}$ es una clase libre de pretorsión.*

PROPOSICIÓN 16.2. *Sean $\mathbb{T}$ y $\mathbb{F}$ clases de R-módulos izquierdos. Si $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión entonces $\sigma_{\mathbb{T}}(M) := \sum\{N \leq M \mid N \in \mathbb{T}\}$ para todo R-módulo izquierdo M, es un prerradical idempotente. Si $\mathbb{F}$ es una clase libre de pretorsión entonces $\sigma^{\mathbb{F}}(M) := \bigcap\{N \leq M \mid M/N \in \mathbb{T}\}$ para todo R-módulo izquierdo M, es un radical.*

Las correspondencias pasadas establecen una correspondencia biyectiva entre las clases de pretorsión y los prerradicales idempotentes, y entre las clases libre de pretorsión y los radicales. Los elementos de σ se llaman módulos de σ-torsión y los de $\mathbb{F}_\sigma$ se llama módulos libres de σ-torsión. Una clase de módulos izquierdos $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones si para culaquier sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ con $M', M'' \in \mathcal{C}$ implica que $M \in \mathcal{C}$. Una clase de pretorsión que es cerrada bajo extensiones se llama una clase de torsión y una clase libre de pretorsión que es cerrada bajo extensiones se llama una clase libre de torsión. Si σ es un radical entonces $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de torsión y si σ es un prerradical idempotente entonces $\mathbb{F}_\sigma$ es una clase libre de torsión.

La clase de todos los prerradicales idempotentes es una clase cerrada bajo supremos por lo cual es posible construir para cualquier prerradical σ el mayor prerradical idempotente por debajo de σ, éste resulta ser $\sigma_{\mathbb{T}_\sigma}$ y se suele denotar por $\widehat{\sigma}$. De manera análoga la clase de radicales es carrada bajo ínfimos por lo que para cualquier prerradical σ existe el menor radical por encima de σ, que resulta ser $\sigma^{\mathbb{F}_\sigma}$ y se suele denotar $\bar{\sigma}$

Si N es submódulo fuertemente invariante de M, se define $\widehat{N} = \widehat{\alpha_N^M}(M)$, entonces α_N^M es un prerradical idempotente si y sólo si $N = \widehat{N}$, de la misma forma se define $\bar{N} = \overline{\omega_N^M}(M)$ entonces ω_N^M es un radical si y sólo si $N = \bar{N}$. Sea S un R-módulo izquierdo simple, entonces S es inyectivo si y sólo si $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente. Las referencias para aspecto de retícula de los prerradicales son los artículos (6), (7) y (8).

17. Prerradicales Exactos Izquierdos

Una clase de módulos se llama hereditaria si es cerrada bajo submódulos, un prerradical σ es llamado hereditario o exacto izquierdo si es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es hereditaria. Un prerradical es hereditario si y sólo si es exacto izquierdo como funtor. La clase de todos los prerradicales exactos izquierdos sobre R-Mod se denota por R-lep. Ésta clase es cerrada bajo ínfimos, por lo que para un prerradical σ existe el menor prerradical exacto izquierdo por encima de σ y se denota por $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma}$ es sencillo de describir, $\widetilde{\sigma}(M) = \sigma(E(M)) \cap M$ para cualquier R-módulo izquierdo M. Un conjunto de ideales izquierdos $\mathbb{I}$ que satisface:

- Si $I \in \mathbb{I}$ y $I \subseteq J \leq R$ entonces $J \in \mathbb{I}$.
- Si $I, J \in \mathbb{I}$ entonces $I \cap J \in \mathbb{I}$.
- Si $a \in R$ y $I \in \mathbb{I}$ entonces $(I : a) \in \mathbb{I}$.

se llama un filtro lineal izquierdo o una topología lineal izquierda. Si σ es un prerradical exacto izquierdo se define $\mathbb{I}_\sigma = \{I \leq R \mid \sigma(R/I) = R/I\}$ que resulta ser un filtro lineal izquierdo y si $\mathbb{I}$ es un filtro lineal izquierdo entonces se define $\sigma_{\mathbb{I}}(M) = \{x \in M \mid ann(x) \in \mathbb{I}\}$ que resulta ser un prerradical exacto izquierdo, esto da una correspondencia biyectiva entre los prerradicales exactos izquierdos y los filtros lineales izquierdos. Un filtro lineal izquierdo $\mathbb{I}$ se llama un filtro de Gabriel izquierdo o una topología de Gabriel izquierda si satisface: Si $I \in \mathbb{I}$ y $J \leq R$ es tal que para cualquier $a \in I$ $(J : a) \in \mathbb{I}$ entonces $J \in \mathbb{I}$. La correspondencia previa induce una correspondencia biyectiva entre los filtros de Gabriel izquierdos y los radicales exactos izquierdos.

Sean E y E' R-módulos izquierdos inyectivos, se dice que E y E' estan relacionados si E se sumerge en un producto de copias de E' y si E' se sumerge en un producto de copias de E, es fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia de ésta relación se llama una teoría de torsión hereditaria, una buena referencia es (5). Hay una correspondencia biyectiva entre la teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.

18. El Gran Preorden de los Monomorfismos en una Categoría

Sea $\mathbb{A}$ una categoría. Se puede considerar la siguiente relación en los objetos de $\mathbb{A}$, $A \leq B$, si existe un monomorfismo $f : A \longrightarrow$. Esta relación cumple con ser reflexiva porque el morfismo identidad siempre es un monomorfismo y cumple con ser transitiva por que la composición de monomorfismo es un monomorfismos. Lo que no cumple siempre es la antisimetría. Para esto se necesitaría que se cumpliera un teorema análogo al Teorema de CantorBernsteinSchroeder, lo cual no es cierto para toda categoría. Por esto de la relación solo se puede decir que es un preorden. Se llama gran preorden porque en general la clase objetos de una categoría no es un conjunto.

Bibliografía

1. Bican, L.; Kepka, T.; Nemec, P., Rings, Modules and Preradicals. Marcel Dekker, New York, 1982.

2. Cohn, P. M., Free rings and their relations. Second edition. London Mathematical Society Monographs, 19. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1985.

3. Crivei, S., Injective modules relative to torsion theories, EFES Publishing House, Cluj-Napoca, 2004.

4. Fuchs, L., On quasi-injective modules, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3 e srie, tome 23, no4(1969), p. 541-546.

5. Golan,J., Localization of noncommutative rings. Pure and Applied Mathematics, No. 30. Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.

6. Golan, J., Torsion theories. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 29. Longman Scientific & Technical, Harlow; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.

7. Goodearl, K. R., Von Neumann regular rings. Second edition. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, FL, 1991.

8. Herbera, D., Simple modules over small rings. Rings, modules and representations, 189205, Contemp. Math., 480, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

9. Lam, T. Y., Lectures on modules and rings. Graduate Texts in Mathematics, 189. Springer-Verlag, New York, 1999.

10. Lambek, J. Lectures on rings and modules, Blaisdell Publishing, 1966.

11. McConell, J. C., Robson, J. C., Noncommutative noetherian rings. With the cooperation of L. W. Small. Revised edition. Graduate Studies in Mathematics, 30. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

12. Nastasescu, C., Van Oystaeyen, F., Dimensions of ring theory. Mathematics and its Applications, 36. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

13. Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H.; Fernández-Alonso, R.; Signoret, C., The lattice structure of preradicals. Comm. Algebra 30 (2002), no. 3, 15331544.

14. Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H.; Fernández-Alonso, R.; Signoret, C., The lattice structure of preradicals III: Operators. J. Pure Appl. Algebra 190 (2004), no. 1-3, 251265.

15. Rosenberg, J., Algebraic K-theory and its applications. Graduate Texts in Mathematics, 147. Springer-Verlag, New York, 1994.

16. Stenström, B., Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

17. Wisbauer, R., Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach, Reading-Paris, 1991.