



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

Sobre amalgamaciones de politopos
y politopos localmente tóricos

T E S I S A
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
José Collins Castro

Dra. Isabel Alicia Hubbard Escalera
[IMATE, UNAM](#)

MÉXICO, D. F. A 24 de febrero de 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	1
2. Nociones básicas	3
3. Politopos regulares y quirales	9
3.1. Politopos regulares	9
3.1.1. Politopos tóricos regulares	10
3.2. Politopos quirales.	14
3.2.1. Politopos tóricos quirales	16
4. Amalgamación	19
5. Politopos localmente tóricos	23
Bibliografía	27

1 Introducción

El estudio de los polítopos tiene su origen en la antigua Grecia. Se debe a Teeteto la primera clasificación rigurosa de los sólidos platónicos, probablemente recuperada por Euclides en su libro XIII de los Elementos. Pappus de Alejandría atribuye a Arquímedes la introducción de los llamados 13 sólidos arquimedianos, cuyas caras son polígonos regulares, no todos del mismo tipo.

El estudio de los objetos matemáticos que ahora denominamos polítopos, sigue líneas más bien descriptivas en los siglos subsiguientes, hasta el siglo XVII, cuando Kepler inicia el estudio moderno de los polítopos en su *armonices mundi*, a través de la clasificación de las teselaciones que en términos modernos llamamos arquimedianas, que responden a la generalización que hizo Arquímedes de los sólidos platónicos, considerando figuras convexas y no convexas (como estrellas de cinco picos) que pueden llenar el plano al combinarlas. A su vez, considera ejemplos de poliedros, que en términos de este trabajo pueden llamarse regulares, cuyas caras no son polígonos convexas, a saber el pequeño dodecaedro estrellado $\{\frac{5}{2}, 5\}$ y el gran icosaedro estrellado $\{\frac{5}{2}, 3\}$, Poincaré redescubre estos sólidos en 1809 y agrega a la lista sus duales, el gran dodecaedro estrellado $\{5, \frac{5}{2}\}$ y el pequeño icosaedro estrellado $\{3, \frac{5}{2}\}$, Cauchy demuestra en su artículo *Recherches sur les polyèdres* (1906) que la lista de poliedros estrellados está completa.

Alrededor de 1850 Ludwig Schläfli introduce en *Theorie der vielfachen Kontinuität* el estudio de los polítopos en dimensiones mayores a 3. De hecho, encuentra todos los grupos de los polítopos regulares cuyo grupo de simetrías está generado por reflexiones en hiperplanos del espacio Euclideo.

Este estudio llega a su punto cumbre con trabajos como el de Grünbaum [4] y Coxeter [2]; a partir de entonces, trabajos trascendentales como los de Coxeter [1], Grünbaum [6] y Tits [17-19] sugieren que una definición más abstracta de polítopo es necesaria (los polítopos regulares, o, más generalmente, los complejos de Coxeter, ocurren como componentes estructurales fundamentales de los edificios de tipo esférico). Respondiendo a esta necesidad, Egon Schulte propone en su tesis doctoral [14] el concepto de polítopo abstracto, que sin ser tan general como el de Tits, engloba las propiedades necesarias para que un orden parcial sea considerado un polítopo abstracto.

Es en este contexto en el que se desarrolla el presente trabajo. Presentaremos la definición de polítopo abstracto que proponen McMullen y Schulte en [12] y exploraremos su trabajo conjunto, en el que desarrollaron y dieron forma a la teoría básica que exponemos. También abordaremos brevemente la investigación realizada por Schulte y Weiss en [15], que contiene los elementos de la teoría de los polítopos

quirales, que serán los objetos fundamentales alrededor de los que se desarrollará mi investigación doctoral.

El segundo capítulo contiene las nociones básicas que serán necesarias para el resto de la exposición. En el tercero, expondremos una introducción a las clases de politopos que más han sido estudiadas, a saber, politopos tóricos y quirales, además de una breve digresión en la cuál se clasifican los politopos tóricos.

El cuarto contiene una exposición esquemática del concepto de amalgmación de politopos, que será necesaria para entender el concepto de politopo localmente tórico, el quinto capítulo contiene una clasificación casi completa de éstos y es el objetivo central del trabajo.

2 Nociones básicas

Empezaremos el trabajo con la definición de politopo abstracto, que es una generalización del concepto de politopo convexo y abstrae la noción de mapa no degenerado en una superficie.

Definición 1. Un *politopo abstracto de rango* $n \in \mathbb{N}$, o un *n-politopo*, es un orden parcial \mathcal{P} que cumple las propiedades siguientes.

1. \mathcal{P} contiene una cara menor y una mayor, denotadas por F_{-1} y F_n , respectivamente.
2. Cada *bandera* (cadena maximal) de \mathcal{P} tiene exactamente $n + 2$ elementos, incluyendo F_{-1} y F_n .
3. Si $n > 1$, para cualesquiera dos elementos F, G de \mathcal{P} tales que $F < G$, y cualesquiera dos elementos intermedios F', G' (es decir $F < F', G' < G$), existe una sucesión $F_0, \dots, F_k \in \mathcal{P}$ de forma que $F_0 = F, F_k = G'$ y para toda $i \in \{0, \dots, k\}$, $F < F_i < G$, y además $F_i \leq F_{i+1}$ o $F_{i+1} \leq F_i$. (*Conexidad fuerte*).
4. Si F_{-1}, F_0, \dots, F_n son elementos de \mathcal{P} tales que $F_i < F_{i+1}$ para toda $i \in \{-1, \dots, n-1\}$, entonces para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$ existe exactamente un elemento $F'_j \in \mathcal{P}$ tal que $F_{j-1} < F'_j < F_{j+1}$ y $F'_j \neq F_j$. (*Propiedad del diamante*).

Ejemplos de politopos abstractos son las teselaciones de los espacios \mathbb{S}^d , \mathbb{H}^d y \mathbb{E}^d . Entenderemos una *teselación* de una d -variedad topológica X como una colección \mathcal{P} de cerrados propios de X , que cumple las siguientes propiedades (ver [12, 6A]).

1. Para cada elemento F de la colección, existe un homeomorfismo de F a un politopo convexo P y la imagen inversa de las caras de P es un elemento de \mathcal{P} .
2. La intersección de dos elementos de \mathcal{P} es una unión (tal vez vacía) de elementos de \mathcal{P} .
3. Cada punto de X se encuentra en un elemento de \mathcal{P} y tiene una vecindad que intersecta sólo a un número finito de elementos de \mathcal{P} .

Notemos que las teselaciones de \mathbb{S}^d son simplemente los politopos convexos clásicos. A un politopo abstracto que es una teselación de \mathbb{S}^d (y que por lo tanto puede verse como un politopo convexo) lo llamaremos *politopo esférico*.

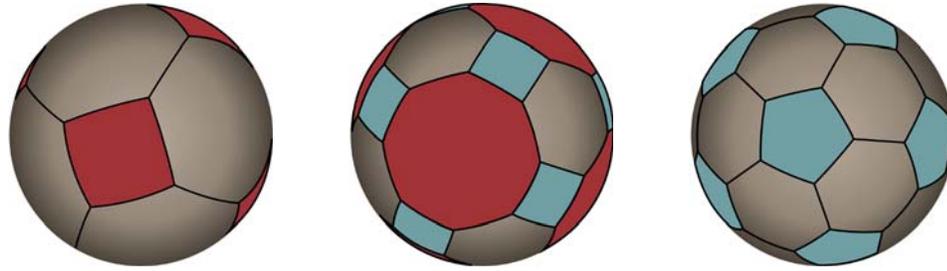


Figura 2.1: Polítopos convexos como teselaciones de la esfera (octaedro truncado, cuboctaedro truncado, icosidodecaedro truncado)

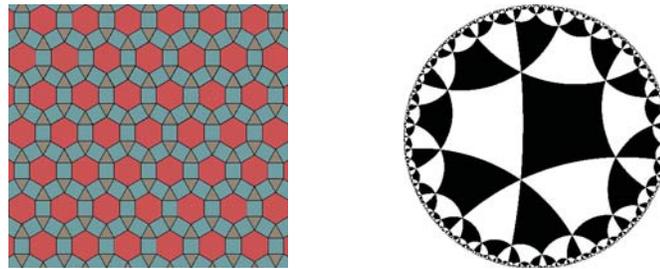


Figura 2.2: Teselación del espacio euclidiano y teselación del espacio hiperbólico (teselacion romitrihexagonal y teselación cuadrada de orden 6)

Otra familia de polítopos particularmente importante para este trabajo es la de los polítopos tóricos. Un $(n + 1)$ -*politopo tórico* o $(n + 1)$ -*toroide* es un polítopo abstracto que es el cociente de una teselación periódica \mathcal{T} del plano euclidiano \mathbb{E}^n por un subgrupo Λ de rango n de su grupo de traslaciones (ver [7] para la definición de teselación periódica). Dicho toroide es denotado como $\mathcal{P} = \mathcal{T}/\Lambda$. Es inmediato que, topológicamente, \mathcal{P} es una teselación del n -toro \mathbb{E}^n/Λ (i.e. el espacio de órbitas de \mathbb{E}^n módulo Λ) y que el rango de un toroide siempre excede en uno a la dimensión del espacio euclidiano \mathbb{E}^n .

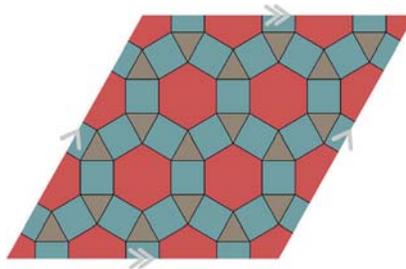


Figura 2.3: Toroide de rango 3

Llamamos *caras* a los elementos de \mathcal{P} . Si F y G son caras de \mathcal{P} tales que $F \leq G$ o $G \leq F$ decimos que F y G son *incidentes*; si $F < G$, al conjunto $G/F := \{H \in \mathcal{P} \mid F \leq H \leq G\}$ lo llamamos una *sección de \mathcal{P}* . Identificaremos a la sección F/F_{-1} con la cara F de \mathcal{P} siempre que no exista lugar a confusión.

Observemos además que cada sección G/F de \mathcal{P} hereda las propiedades (1),..., (4); por lo que G/F puede ser visto siempre como un politopo abstracto de rango adecuado.

Las propiedades (1) y (2) implican que es posible proveer a \mathcal{P} de una *función de rango* de manera natural, es decir una función monótona $\text{rank} : \mathcal{P} \rightarrow \{-1, \dots, n\}$. De forma más precisa, si F es una cara de \mathcal{P} y F/F_{-1} es un politopo de rango i , definimos $\text{rank}F = i$ y $\text{rank}F_{-1} = -1$.

Notemos que F_{-1} y F_n son las únicas caras de \mathcal{P} de rangos -1 y n , respectivamente, y son llamadas las *caras impropias* de \mathcal{P} . Como en el caso de politopos convexos, si F, G, H son caras de \mathcal{P} de rangos $0, 1, n-1$, las llamamos *vértices, aristas y facetas*, respectivamente. Para cada vértice F de \mathcal{P} , denominamos a la sección F_n/F *la figura de vértice de \mathcal{P} en F* .

Sea Φ una bandera de \mathcal{P} . La propiedad (4) implica que para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existe exactamente una bandera Ψ de \mathcal{P} que difiere de Φ exactamente en el elemento de rango i , llamamos a Ψ la bandera i -adyacente de Φ y la denotamos $\Psi = \Phi^i$. Es fácil ver que si $\Psi = \Phi^i$, entonces $\Psi^i = \Phi$. Decimos que dos banderas Φ, Ψ son adyacentes si $\Psi = \Phi^i$ para alguna $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

En virtud de lo anterior, obtenemos inductivamente que para una bandera Φ e $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n-1\}$, la bandera $\Phi^{i_1, \dots, i_k} := (\Phi^{i_1, \dots, i_{k-1}})^{i_k}$ queda únicamente determinada por la sucesión i_1, \dots, i_k . Además se tiene que $\Phi = \Phi^{i,i}$ y $\Phi^{i,j} = \Phi^{j,i}$, si $|i-j| > 1$.

Es fácil ver que cualquier n -politopo \mathcal{P} es *fuertemente conexo por banderas*, es decir; si Φ, Ψ son banderas distintas de \mathcal{P} , entonces existe una sucesión de banderas adyacentes Φ_0, \dots, Φ_k tales que $\Phi = \Phi_0, \Psi = \Phi_k$ y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para cada $i \in \{0, \dots, k\}$. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2. [12, 2A1] *Si \mathcal{P} es un orden parcial que cumple las propiedades (1) y (2) de la definición 1, entonces \mathcal{P} es fuertemente conexo (cumple (3)) si y sólo si \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas.*

Durante el resto del texto denotaremos como $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ al conjunto de banderas de \mathcal{P} .

Si \mathcal{P} y \mathcal{Q} son politopos, diremos que una función $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es un *homomorfismo* entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} si siempre que tengamos $F, G \in \mathcal{P}$, con $F \leq G$, se cumple que $F\varphi \leq G\varphi$. Un homomorfismo biyectivo entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} cuyo inverso es también un homomorfismo es llamado un *isomorfismo entre \mathcal{P} y \mathcal{Q}* , y si existe un isomorfismo entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} , diremos que \mathcal{P} y \mathcal{Q} son *isomorfos* y escribiremos $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$.

Como es usual, a un isomorfismo de \mathcal{P} a él mismo lo llamaremos un *automorfismo de \mathcal{P}* y el conjunto de éstos forma un grupo bajo la operación de composición, el cual denotaremos por $\Gamma(\mathcal{P})$. No es difícil ver que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera natural en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$

y que esta acción preserva la adyacencia de banderas. Más aún, se tiene el siguiente resultado acerca de la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Proposición 3. [12, 2A4] $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$; es decir, si $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi\gamma = \Phi$, entonces $\gamma = 1$.

Obtenemos como consecuencia inmediata el corolario que sigue.

Corolario 4. [12, 2A5] Si \mathcal{P} es un politopo finito (i.e. $|\mathcal{P}| \in \mathbb{N}$), entonces $|\Gamma(\mathcal{P})|$ divide a $|\mathcal{F}(\mathcal{P})|$ y, consecuentemente, $\Gamma(\mathcal{P})$ es (simplemente) transitivo en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ si y solamente si $|\Gamma(\mathcal{P})| = |\mathcal{F}(\mathcal{P})|$.

Concluiremos esta sección con un breve comentario sobre el concepto de dualidad en politopos abstractos.

Dados dos politopos abstractos \mathcal{P} y \mathcal{Q} , una *dualidad de \mathcal{P} a \mathcal{Q}* es una biyección $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ que invierte el orden y cuya inversa también invierte el orden, es decir, dados $F, G \in \mathcal{P}$, tenemos que $F \leq G$ si y solamente si $\delta(G) \leq \delta(F)$. Diremos en este caso que \mathcal{P} y \mathcal{Q} son *duales* uno del otro. Se deduce inmediatamente que en este caso δ induce un isomorfismo por conjugación entre $\Gamma(\mathcal{P})$ y $\Gamma(\mathcal{Q})$.

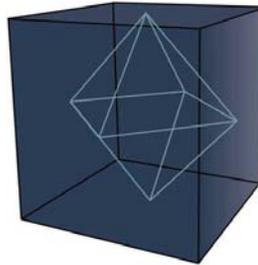


Figura 2.4: El cubo y el tetraedro son politopos duales

Es elemental demostrar que si \mathcal{P} es un n -politopo, conservando las caras de \mathcal{P} e invirtiendo la relación de incidencia se obtiene otro politopo, denotado como \mathcal{P}^* , y que existe una dualidad de \mathcal{P} a éste. De hecho $\mathcal{P}^{**} \cong \mathcal{P}$.

Llamaremos a \mathcal{P} *autodual* si $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}^*$. En este caso $\bar{\Gamma}(\mathcal{P})$, el conjunto de dualidades y automorfismos de \mathcal{P} , forma el *grupo extendido* de \mathcal{P} y $[\bar{\Gamma}(\mathcal{P}) : \Gamma(\mathcal{P})] = 2$. Se sigue de esto último que si \mathcal{P} tiene una dualidad δ tal que $\delta^2 = 1$, entonces $\bar{\Gamma}(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{P}) \rtimes C_2$. Si $\Delta^n \subseteq \mathbb{E}^n$ es un n -simplejo regular (en el sentido clásico), entonces Δ^n es un politopo autodual tal que $\bar{\Gamma}(\Delta^n) \cong \Gamma(\Delta^n) \rtimes C_2$.

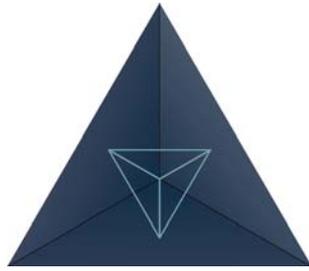


Figura 2.5: El tetraedro (Δ^3) es autodual

3 Polítopos regulares y quirales

3.1. Polítopos regulares

La clase de polítopos que ha sido más estudiada es la de los llamados polítopos regulares. Diremos que un n -polítopo \mathcal{P} es *regular* si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Como se ha notado en el corolario 4, si \mathcal{P} es finito, entonces \mathcal{P} es regular si y sólo si $|\Gamma(\mathcal{P})| = |\mathcal{F}(\mathcal{P})|$. A lo largo de la sección \mathcal{P} denotará siempre un n -polítopo regular.

Se sigue de lo anterior que si G/F y G'/F' son secciones de \mathcal{P} tales que $\text{rank}F = \text{rank}F'$ y $\text{rank}G = \text{rank}G'$, entonces la transitividad de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ implica que existe un elemento $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$, tal que $\alpha(G/F) = G'/F'$; por lo tanto, todas estas secciones son isomorfas. En particular, si \mathcal{P} es de rango $n \geq 2$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\text{rank}F = \text{rank}F' = i-2$, $\text{rank}G = \text{rank}G' = i+1$, entonces todas las secciones de este tipo tienen el mismo número (posiblemente infinito) de i -caras, el cual denotaremos por p_i .

Dado un polítopo abstracto \mathcal{Q} de rango mayor que 1, definiremos el *símbolo de Schläfli* de \mathcal{Q} como $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, si para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ todas las secciones G/F , con $\text{rank}F = i-2$ y $\text{rank}G = i+1$ tienen el mismo número p_i de i -caras; es muy sencillo demostrar que un polítopo regular tiene tipo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ si y solamente si todas sus facetas tienen símbolo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-2}\}$ y todas sus figuras de vértice tienen símbolo $\{p_2, \dots, p_{n-1}\}$. Una consecuencia del comentario hecho en el párrafo anterior es que un polítopo regular siempre tiene símbolo de Schläfli.

Tomemos una bandera *base* $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, como \mathcal{P} es regular, existen automorfismos $\rho_0, \dots, \rho_{n-1} \in \Gamma(\mathcal{P})$ tales que $\Phi\rho_i = \Phi^i$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Se sigue de la conexidad fuerte por banderas de \mathcal{P} que si $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, entonces existen $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n-1\}$ tales que $\Phi^{i_1, \dots, i_k} = \Psi$. Ahora, si φ es el único automorfismo de \mathcal{P} tal que $\Phi\varphi = \Psi$, entonces $\Psi = \Phi^{i_1, \dots, i_k} = \Phi\rho_{k \dots \rho_1}$, por lo que $\rho_{k \dots \rho_1} = \varphi$ y así $\langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle = \Gamma(\mathcal{P})$. Más aún, recordando que dada $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ se cumple $\Phi^{i,i} = \Phi$ y $\Phi^{i,j} = \Phi^{j,i}$ para cualesquiera i, j tales que $0 \leq i < j+1 \leq n-1$, obtenemos que los generadores ρ_1, \dots, ρ_n cumplen las siguientes relaciones.

$$\rho_i^2 = 1 \text{ para cada } i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ y } (\rho_i\rho_j)^2 = 1 \text{ siempre que } |i-j| > 1 \quad (3.1)$$

Diremos que un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ es un grupo lineal generado por involuciones (*sggi*, por sus siglas en inglés) si sus generadores $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ cumplen con (3.1). Hemos demostrado entonces el siguiente resultado.

Teorema 5. *El grupo de automorfismos de un politopo regular es un grupo lineal generado por involuciones.*

Además, al considerar los estabilizadores de ciertas cadenas de \mathcal{P} , se puede ver que si $I, J \subseteq \{0, \dots, n-1\}$, entonces

$$\langle \rho_i | i \in I \rangle \cap \langle \rho_j | j \in J \rangle = \langle \rho_i | i \in I \cap J \rangle \quad (3.2)$$

La ecuación anterior es conocida como la propiedad de la intersección para politopos regulares [12, 2B10].

De manera converso, dado $\Gamma := \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ un grupo generado por involuciones que cumple (3.1) y la propiedad de la intersección (3.2), es posible asociar a Γ un n -politopo de manera natural.

Definimos para $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\Gamma_i := \langle \rho_j | i \neq j \rangle$ y $\Gamma_n = \Gamma_{-1} := \Gamma$. Observemos que por (3.1) para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\Gamma_i = \langle \rho_j | j < i \rangle \times \langle \rho_k | i < k \rangle$. Estos conjuntos serán los elementos la bandera base $\Phi := \{\Gamma_i | -1 \leq i \leq n\}$ de nuestro politopo.

Definiremos ahora $\mathcal{P}(\Gamma) := \{\Gamma_i \varphi | \varphi \in \Gamma, -1 \leq i \leq n\}$ y lo dotaremos de la siguiente relación de incidencia: $\Gamma_i \varphi \leq \Gamma_j \psi$ si y solamente si $i \leq j$ y $\Gamma_i \varphi \cap \Gamma_j \psi \neq \emptyset$.

En [12, Secc. 2E], McMullen y Schulte demuestran el siguiente teorema, que clasifica por medio de generadores y relaciones, los grupos de automorfismos de los politopos regulares.

Teorema 6. *Si Γ es un grupo generado por un conjunto de involuciones $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ que cumplen las relaciones descritas en (3.1) y la ecuación (3.2), entonces existe un n -politopo regular \mathcal{P} naturalmente asociado a Γ y una bandera base $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ tales que Γ es isomorfo al grupo de automorfismos de $\Gamma(\mathcal{P})$ y si $\hat{\rho}_i$ es la imagen de ρ_i bajo este automorfismo, $\Phi \hat{\rho}_i = \Phi^i$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Se sigue de lo anterior que existe una correspondencia biunivoca entre la clase de los politopos regulares y la clase de parejas ordenadas de la forma $(\Gamma, (\rho_0, \dots, \rho_{n-1}))$, donde Γ es un grupo finitamente generado y $\{\rho_0, \dots, \rho_{n-1}\}$ es un conjunto de generadores de Γ que cumple las relaciones descritas en (3.1) y (3.2). Es posible entonces abordar problemas referentes a politopos regulares en términos de su grupo de automorfismos, como en el caso de la amalgamación de politopos y otros tantos.

3.1.1. Politopos tóricos regulares

Es posible demostrar que un $(n+1)$ -toroide es regular si es el cociente de una teselación regular \mathcal{T} del espacio euclidiano por algún subgrupo de traslaciones Λ de rango máximo que es normal en $\Gamma(\mathcal{T})$ y \mathcal{T}/Λ puede ser vista como una teselación (geoméricamente) regular del n -toro correspondiente. Más aún, es posible demostrar también ([12, 6B6, 6B7]) que cada teselación regular en un n -toro es isomorfa a un $(n+1)$ -toroide regular como los que han sido descritos.

Comenzaremos con la clasificación de los polítopos tóricos regulares de rango 3. Para el plano euclidiano \mathbb{E}^2 las únicas teselaciones regulares posibles son por triángulos $(\{3, 6\})$, cuadrados $(\{4, 4\})$ o hexágonos $(\{6, 3\})$. Consideraremos primero la teselación por cuadrados $\{4, 4\}$, cuyos vértices supondremos que son los puntos de \mathbb{E}^2 que tienen coordenadas enteras \mathbb{Z}^2 . Notemos que en este caso, el grupo de traslaciones de $\{4, 4\}$ es también \mathbb{Z}^2 .

Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$ un subgrupo normal de $\Gamma(\{4, 4\})$. Como Λ es normal en $\Gamma(\{4, 4\})$, entonces Λ debe contener los conjugados de sus elementos por todos los elementos de $\Gamma(\{4, 4\})$. Equivalentemente, debe contener a todos los conjugados de sus elementos por el estabilizador de $\mathbf{0} = (0, 0)$ en $\Gamma(\{4, 4\})$ (es decir, el grupo de simetrías de sus figuras de vértice en el origen). Por lo tanto, si Λ contiene la traslación por el vector \mathbf{v} , entonces también debe contener las traslaciones por los vectores que resultan de todas las posibles permutaciones y cambios de signo de las coordenadas de \mathbf{v} . En particular, si s es el mínimo entero positivo que aparece como coordenada de un elemento de Λ , podemos suponer que $(s, t) \in \Lambda$ para alguna $t > 0$, de lo que se sigue que $(2s, 0), (0, 2s) \in \Lambda$. Más aún, por el algoritmo de la división, todas las coordenadas de los elementos de Λ deben ser múltiplos de s . Las acotaciones anteriores nos permiten distinguir dos casos, a saber, $(s, 0) \in \Lambda$ (en cuyo caso $\Lambda = \langle (s, 0), (0, s) \rangle$) y $(s, 0) \notin \Lambda$ (en esta situación, necesariamente, $(s, s) \in \Lambda$ y $\Lambda = \langle (s, s), (-s, s) \rangle$). En el primer caso escribimos $\Lambda = \Lambda_{(s,0)}$ y $\{4, 4\}/\Lambda_{(s,0)} =: \{4, 4\}_{(s,0)}$, de manera análoga escribimos $\Lambda = \Lambda_{(s,s)}$ y $\{4, 4\}/\Lambda_{(s,s)} =: \{4, 4\}_{(s,s)}$, si se tiene que $\Lambda = \langle (s, s), (-s, s) \rangle$. Así, los polítopos tóricos regulares con tipo de Schläfli $\{4, 4\}$ son de la forma $\{4, 4\}_{(s,t)}$ con $st(s-t) = 0$ y $(s, t) \neq (1, 0), (1, 1)$; observemos que los casos $(s, t) = (1, 0), (1, 1)$ deben ser excluidos, pues el cociente $\{4, 4\}/\Lambda_{(s,t)}$ no induce una teselación de $\mathbb{E}^2/\Lambda_{(s,t)}$ en el sentido de nuestra definición (intuitivamente, el mapa resultante es muy pequeño para que eso suceda).

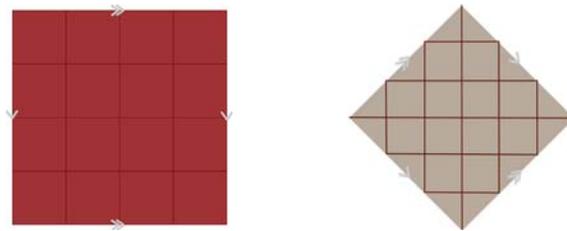


Figura 3.1: Toroides $\{4, 4\}_{(4,0)}$ y $\{4, 4\}_{(3,3)}$

El análisis de los toroides resultantes de las teselaciones $\{3, 6\}$ y $\{6, 3\}$ puede ser abordado de manera similar si hacemos un cambio de base en \mathbb{E}^2 , tomando en lugar de la base canónica dos vectores que guardan un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ ($(1, 0)$ y $(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$, por ejemplo) podemos considerar entonces a Λ de nuevo como \mathbb{Z}^2 , sólo que aquí sus elementos serán tomados como vértices de $\{3, 6\}$ y como centros de las caras de $\{6, 3\}$,

respectivamente. Tomando las coordenadas de los vectores respecto a la base elegida, obtenemos, de manera análoga a los toroides de tipo $\{4, 4\}$, que los 3-toroides con estos símbolos de Schläfli son de la forma $\{3, 6\}_{(s,t)}$ o $\{6, 3\}_{(t,s)}$, donde $st(t - s) = 0$ y $(s, t) \neq (1, 0)$. Es necesario excluir el caso $(1, 0)$ por las mismas razones que en la clasificación de los polítopos tóricos $\{4, 4\}_{(s,t)}$, sin embargo, el caso $(1, 1)$ no ha sido excluido, ya que los mapas $\{3, 6\}_{(1,1)}$ y $\{6, 3\}_{(1,1)}$ son lo suficientemente grandes para dar lugar a un politopo.

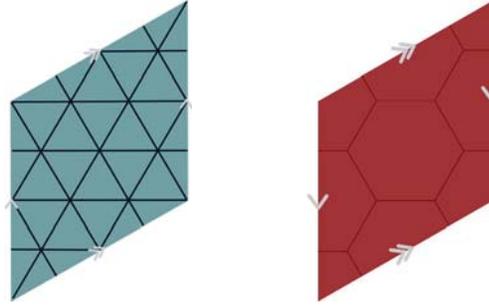


Figura 3.2: Toroides $\{3, 6\}_{(2,2)}$ y $\{6, 3\}_{(2,0)}$

Para analizar los $(n + 1)$ -toroides para $n + 1 \geq 4$, debemos recordar que (excepto para $n = 4$) la única teselación regular de \mathbb{E}^n es $\{4, 3^{n-2}, 4\}$ la teselación por n -cubos (s^k denotará durante esta sección la cadena s, \dots, s de longitud k) y para \mathbb{E}^4 además de esta teselación está la teselación $\{3, 3, 4, 3\}$ por hexadecacoros (16-cell) y su dual $\{3, 4, 3, 3\}$, la teselación por icositetracoros (24-cell). Estas instancias particulares de \mathbb{E}^4 serán analizadas más adelante, por ahora restringiremos nuestra atención a las teselaciones $\{4, 3^{n-2}, 4\}$

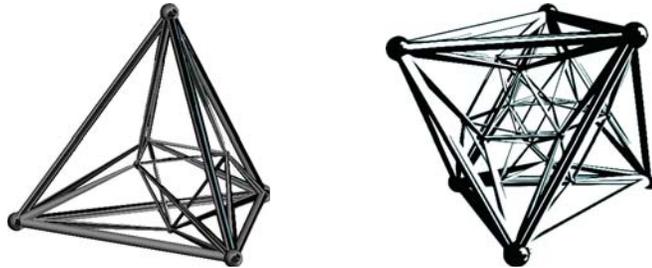


Figura 3.3: Hexadecacoro $\{3, 3, 4\}$ e Icositetracoro $\{3, 4, 3\}$

©Robert Webb, creados con Stella software <http://www.software3d.com/Stella.php>

Como en el caso del plano euclidiano, podemos considerar que los vértices de la teselación $\mathcal{T} = \{4, 3^{n-2}, 4\}$ es el conjunto \mathbb{Z}^n , el cual también puede ser considerado como su grupo de traslaciones, por lo que podemos pensar que el subgrupo normal Λ

de $\Gamma(\mathcal{T})$ (de rango n) es un subgrupo de \mathbb{Z}^n . También de manera análoga al caso $n = 2$, para cada traslación $\mathbf{s} \in \Lambda$ debemos tener que para un toroide regular que todos los conjugados de la traslación por \mathbf{s} son elementos de Λ , de nuevo obtenemos que este es el caso si y solamente si los vectores que resultan de las permutaciones y cambios de signo de las coordenadas de \mathbf{s} son elementos de Λ .

Si siguiendo las líneas del caso del plano, si s es el menor entero positivo entre las coordenadas de los vectores en Λ , obtenemos, permutando si es necesario, que el vector $(s, s_2, \dots, s_n) \in \Lambda$ para algunos $s_2, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$. Se sigue inmediatamente que $(2s, 0^{n-1}) \in \Lambda$, y más aún $2s\hat{e}_i \in \Lambda$ para cada $1 \leq i \leq n$, donde $\hat{e}_i = (0^{i-1}, 1, 0^{n-i})$ es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{E}^n . Si continuamos argumentando como en el caso de los toroides $\{4, 4\}_{(s,t)}$ obtenemos que Λ está generado por los vectores que resultan de las permutaciones y cambios de signo de las coordenadas de $(s^k, 0^{n-k})$, donde k es el mínimo entero positivo tal que $(s^k, 0^{n-k}) \in \Lambda$. Si $3 \leq k \leq n-1$, se sigue que $(0, s^k, 0^{n-k-1}) \in \Lambda$ y por lo tanto $(s, s, 0^{n-2}) \in \Lambda$ (en caso de que k sea impar, obtenemos además que $(s, 0^{n-1}) \in \Lambda$). Las observaciones anteriores muestran que los únicos valores posibles para k son 1, 2 o n . Como antes, denotaremos como $\Lambda_{\mathbf{s}}$ al grupo de traslaciones generado por $\mathbf{s} := (s^k, 0^{n-k})$ y sus imágenes bajo permutaciones y cambio de signo en las coordenadas.

Definimos $\{4, 3^{n-2}, 4\}_{\mathbf{s}} := \{4, 3^{n-2}, 4\} / \Lambda_{\mathbf{s}}$ y estas estructuras serán $(n+1)$ -polítopos (i.e. cumplirán con la propiedad de la intersección) si $s \geq 2$. Podemos sintetizar lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 7. [12,6D1] *Para cada $n \geq 3$ y $\mathbf{s} = (s^k, 0^{n-k})$, $s \geq 2$ y $k \in \{1, 2, n\}$, existe un toroide regular $\{4, 3^{n-2}, 4\}_{\mathbf{s}}$.*

El teorema anterior divide a los polítopos regulares tóricos con símbolo de Schläfli $\{4, 3^{n-2}, 4\}$ en 3 clases disjuntas, dependiendo de si $k \in \{1, 2, n\}$.

Resta analizar los casos que se desprenden de las teselaciones $\{3, 3, 4, 3\}$ y $\{3, 4, 3, 3\}$. Al ser éstas duales, es posible quedarnos con sólo una de ellas, digamos $\{3, 3, 4, 3\}$. Podemos tomar el conjunto de vértices de $\{3, 3, 4, 3\}$ como $\mathbb{Z}^4 \cup (\mathbb{Z}^4 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, el subconjunto de \mathbb{E}^4 que consta de los puntos cuyas coordenadas son todas enteras o son todas mitades de enteros impares.

Podemos proceder haciendo un análisis similar al de la teselación $\{4, 3, 3, 4\}$ teniendo sólo en cuenta los vértices de $\{3, 3, 4, 3\}$ que pertenecen a \mathbb{Z}^4 y concluir que Λ está generado por el vector $\mathbf{s} := (s^k, 0^{4-k})$ ($s \geq 2$, $k \in \{1, 2, 4\}$) y sus imágenes bajo el estabilizador del origen en el grupo de automorfismos de $\{3, 3, 4, 3\}$. Estas transformaciones incluyen todas las permutaciones y cambios de signo de las entradas de \mathbf{s} . Sin embargo, al considerar el grupo completo de simetrías de $\{3, 3, 4, 3\}$, obtenemos que (s, s, s, s) es equivalente a $(2s, 0, 0, 0)$. Utilizando la misma notación que para el caso de la teselación cúbica, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 8. [12,6E1] *Para cada $\mathbf{s} = (s^k, 0^{n-k})$ con $s \geq 2$ y $k = 1, 2$ existen toroides regulares $\{3, 3, 4, 3\}_{\mathbf{s}}$ y $\{3, 4, 3, 3\}_{\mathbf{s}}$.*

Los politopos tóricos regulares jugarán un importante papel durante mi investigación doctoral, ya que son los elementos a partir de los cuales se formaran la mayoría de los politopos quirales localmente tóricos [ver cap. 5], cuya clasificación es el segundo punto importante a desarrollar durante dicha investigación.

3.2. Politopos quirales.

Después de los politopos regulares, la familia de politopos quirales ha sido la más estudiada. Intuitivamente, un politopo es *quiral* si posee simetría rotacional máxima pero no tiene simetría reflexiva. Formalmente diremos que un n -politopo \mathcal{P} es quiral si su grupo de automorfismos induce exactamente dos orbitas en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ tales que banderas adyacentes pertenecen a distintas órbitas.

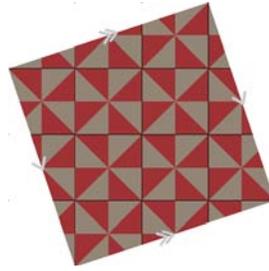


Figura 3.4: Toroide con simetría quiral que muestra las dos órbitas en banderas bajo su grupo de automorfismos

Una consecuencia inmediata de la definición es que para cada bandera $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, existen $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ tales que $\Phi\sigma_i = \Phi^{i, i-1}$ para cada $1 \leq i \leq n-1$. Además, de manera similar a como lo hicimos en el caso regular, no es difícil probar que $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ y que $(\sigma_i\sigma_{i+1}\dots\sigma_j)^2 = 1$ si $i < j$. Llamaremos a $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ generadores distinguidos respecto a Φ .

Aunque un politopo está definido sin una estructura geométrica subyacente, los politopos quirales pueden pensarse como aquellos que no coinciden con su imagen “de espejo”. Por tal razón, podemos decir que los politopos quirales vienen asociados en parejas de formas *enantiomorfas*.

Hay ciertas propiedades que es posible deducir sin gran dificultad; por ejemplo, si \mathcal{P} es un n -politopo quiral, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en las i -caras para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Sin embargo, la acción de \mathcal{P} en las i -caras no tiene que ser necesariamente libre. En particular, se tiene el siguiente lema.

Lema 9 (8, lema 1.9). *Sea \mathcal{P} un n -politopo quiral y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \in \Gamma(\mathcal{P})$ los generadores distinguidos con respecto a una bandera base Φ . Supongamos que $0 \leq i < j-1$ y que existe $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $(\Phi)_i\varphi < (\Phi)_j$. Entonces existe $\rho \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{j-1} \rangle$, tal que $(\Phi)_i\varphi = (\Phi)_i\rho$.*

Demostración. Como $(\Phi)_i\varphi < (\Phi)_j < (\Phi)_{j+1}\dots < (\Phi)_n$ es una cadena, existe $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ que la contiene. Más aún, al tenerse $j - i \geq 2$, es posible tomar Ψ en la misma órbita de Φ (dada Ψ que contenga a la cadena, Ψ^{i+1} también la contiene y Ψ o Ψ^{i+1} están en la misma órbita de Φ). Se sigue de esto que existe un elemento $\rho \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\rho = \Psi$ y así $(\Phi)_{i\rho} = (\Psi)_i = (\Phi)_i\varphi$. \square

El grupo de simetrías de un polítopo quiral también es transitivo en las cadenas de tipo $N := \{-1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pero en contraste con el lema anterior, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 10 (16, proposición 2). *Si \mathcal{P} es un n -polítopo quiral, entonces para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en las cadenas de tipo $N := \{-1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ es libre y transitiva.*

Demostración. Si \mathcal{C} es una cadena de tipo N y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ es tal que $\mathcal{C} \subseteq \Phi$, entonces Φ y Φ^i son las únicas banderas de \mathcal{P} que contienen a \mathcal{C} . Si tomamos otra cadena \mathcal{C}' de tipo N y Ψ una bandera que la contiene, al ser \mathcal{P} un polítopo quiral, se tiene que Φ o Φ^i están en la misma órbita que Ψ . Por lo tanto existe un elemento $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\mathcal{C}\varphi = \mathcal{C}'$. Además, si $\rho \in \Gamma(\mathcal{P})$ es tal que $\mathcal{C}\rho = \mathcal{C}$, entonces $\Phi\rho \in \{\Phi, \Phi^i\}$; pero como \mathcal{P} es quiral, obtenemos $\Phi\rho = \Phi$ y por la proposición 3, $\rho = 1$.

Concluimos que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libre y transitivamente en el conjunto de cadenas de tipo $N = \{-1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. \square

Otra observación sencilla acerca de polítopos quirales es que su grupo de automorfismos es transitivo en facetas y figuras de vértice y que éstas tienen que ser necesariamente polítopos regulares o quirales. Más aún, se el siguiente resultado.

Proposición 11 (16, proposición 3, proposición 4). *Sea \mathcal{P} un polítopo quiral y Φ una bandera base de éste, entonces $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ es transitivo en las facetas y figuras de vértice de \mathcal{P} . En particular, \mathcal{P} es equivelar con tipo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, donde p_i es el orden de σ_i para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Además se tiene que:*

1. *Las facetas y figuras de vértice de \mathcal{P} son polítopos regulares o quirales.*
2. *Dada $F_i \in \Phi$ de rango $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\Gamma^+(F_i/F_{-1}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1} \rangle$ y $\Gamma^+(F_n/F_i) = \langle \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$.*

Aunque no podemos garantizar la regularidad de las facetas y figuras de vértice de \mathcal{P} , la proposición subsiguiente garantiza que un polítopo quiral siempre tiene secciones regulares.

Proposición 12 (16, proposición 9). *Si F_1, F_{n-2} son caras de un polítopo quiral \mathcal{P} de rangos 1, $n-2$, respectivamente, entonces F_n/F_1 y F_{n-2}/F_{-1} son polítopos regulares.*

En los siguientes dos teoremas \mathcal{P} será siempre un politopo quiral y si definimos $\tau_{i,j} = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_j$ para $1 \leq i < j < n$, $\tau_{0,i} = 1$, $\tau_{i,i} = \sigma_i$, si $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\Phi_{\bar{J}} = \{(\Phi)_j | j \notin J\}$, dado $J \subseteq \{0, \dots, n\}$; tenemos los siguientes resultados con los que se clasifican los grupos de automorfismos de los politopos quirales en términos de generadores y relaciones.

Teorema 13 (16, proposición 5). *El estabilizador en $\Gamma(\mathcal{P})$ de $\Phi_{\bar{J}}$ es $\Gamma_J := \{\tau_{i,j} | i \leq j; i-1, j \in J\}$ y $\Gamma_I \cap \Gamma_J = \Gamma_{I \cap J}$ para cualesquiera $I, J \subseteq \{0, \dots, n\}$. [15, proposición 5]*

La última igualdad es un análogo de la ecuación 2.2 para politopos quirales y por esto es llamada también propiedad de la intersección.

El teorema siguiente es análogo para politopos quirales del teorema 6 (ver [15, teorema 1]).

Teorema 14 (16, teorema 1). *Dado un grupo $\Gamma := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ tal que para todos los subconjuntos $I, J \subseteq \{0, \dots, n\}$ se cumple $\Gamma_I \cap \Gamma_J = \Gamma_{I \cap J}$, donde $\tau_{i,j}$ y Γ_I son definidos como arriba, entonces se tiene una de las siguientes.*

1. Γ es isomorfo a un grupo de reflexiones de un politopo regular.
2. Γ es el grupo de simetrías de un politopo quiral.

Más aún, el primer caso se da si y solamente si existe un automorfismo ρ de Γ tal que $\sigma_1 \rho = \sigma_1^{-1}$, $\sigma_2 \rho = \sigma_1^2 \sigma_2$ y $\sigma_i \rho = \sigma_i$, con $3 \leq i \leq n$.

3.2.1. Politopos tóricos quirales

Comenzaremos con una discusión acerca de la inexistencia de politopos quirales tóricos de rangos grandes.

Consideremos primero el caso de los toroides de tipo $\{4, 3^{n-2}, 4\}$ con $n \geq 3$. Éstos son de la forma $\{4, 3^{n-2}, 4\}/\Lambda$, donde Λ es un subgrupo invariante de \mathbb{Z}^n que es preservado por todas las rotaciones de la teselación $\{4, 3^{n-2}, 4\}$. En particular, Λ es preservado por el grupo de rotaciones de la figura de vértice $\{3^{n-2}, 4\}$. Este grupo consiste en las permutaciones de las entradas los vectores de Λ , compuestas con un cambio de signo de un número las entradas de estos vectores que tenga la misma paridad que la permutación.

Para demostrar la inexistencia de un politopo quiral con este símbolo de Schläfli, es suficiente probar que la imagen de cualquier vector de Λ bajo una permutación impar de sus coordenadas es también un elemento de Λ . Para esto es suficiente hacer ver que dado $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Lambda$, $(a_2, a_1, \dots, a_n) \in \Lambda$.

Si $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Lambda$, entonces $(-a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) \in \Lambda$, de donde $(a_1 + a_2, a_2 - a_1, 0^{n-2}) \in \Lambda$. Notemos que si un vector de Λ tiene alguna de sus entradas igual a 0, entonces los vectores que resultan despues de permutar sus entradas de cualquier forma posible o hacer un cambio de signo de un número arbitrario de éstas también son elementos de Λ . Obtenemos entonces que $(-a_1 - a_2, 0, a_1 - a_2, 0^{n-3}) \in \Lambda$ (y sumando $(a_1 + a_2, a_2 - a_1, 0^{n-2}) \in \Lambda$), se sigue que $(0, a_2 - a_1, a_1 - a_2, 0^{n-3}) \in \Lambda$, que implica $\mathbf{a} - (a_2 - a_1, a_1 - a_2, 0^{n-2}) \in \Lambda$. Por lo tanto $(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) \in \Lambda$.

Resta verificar los toroides de tipo $\{3, 3, 4, 3\}$ y sus duales, sin embargo sólo es necesario considerar los del primer tipo. Dado un toroide $\{3, 3, 4, 3\}/\Lambda$, podemos argumentar de manera similar al caso anterior para concluir que Λ es invariante bajo cualquier permutación o cambios de signo de las entradas de sus elementos. Se sigue de esto que Λ es invariante bajo el grupo completo de simetrías de la figura de vértice $\{3, 4, 3\}$. Por lo tanto el toroide $\{3, 3, 4, 3\}/\Lambda$ es regular.

La discusión previa puede resumirse en la siguiente proposición.

Proposición 15 (12, 6H1). *No existen toroides quirales de rango mayor a 3.*

En contraste, es posible modificar la prueba de la clasificación de los toroides regulares de rango 3, usando que ahora el estabilizador de un vértice únicamente tiene rotaciones y no reflexiones, para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 16 (3, secc. 8.3, secc. 8.4). *Existen tres familias infinitas de polítopos quirales tóricos de rango 3 cuyos miembros son de tipos $\{4, 4\}_{(a,b)}$, $\{3, 6\}_{(a,b)}$ y $\{6, 3\}_{(a,b)}$, donde $ab(a - b) \neq 0$. [3]*

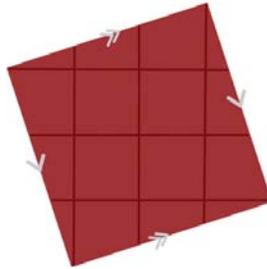


Figura 3.5: Toroide quiral $\{4, 4\}_{(3,1)}$

4 Amalgamación

Una *amalgamación* de los n -politopos regulares $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ es un $n + 1$ -politopo regular cuyas facetas y figuras de vértice son isomorfas a \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 , respectivamente. Uno de los objetivos de esta sección es determinar cuándo la amalgamación de politopos es posible y establecer la relación que existe entre ésta y la amalgamación de grupos.

A lo largo de la sección, \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 denotarán siempre dos n -politopos regulares, con $n \geq 2$, y $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ se usará para designar a la clase de todos los $n + 1$ -politopos que son amalgamaciones de \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 .

Hay ciertos casos particulares de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ para los cuales la existencia de elementos en $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ es bien conocida. Por ejemplo, si \mathcal{P}_1 es el cuadrado $\{4\}$ y \mathcal{P}_2 es el triángulo $\{3\}$, entonces el cubo $\{4, 3\}$ y el hemicubo $\{4, 3\}_3$ son los únicos elementos de la clase $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$.

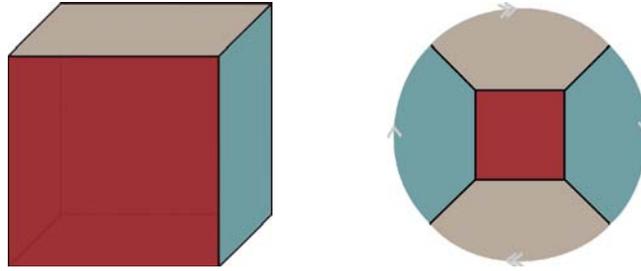


Figura 4.1: Cubo y hemicubo

De manera similar, si \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son el cuadrado $\{4\}$, entonces la teselación por cuadrados del plano $\{4, 4\}$ es una amalgamación de \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 . De hecho, esta teselación es universal, en el sentido de que este politopo es una cubierta de cualquier elemento de $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$. Con esta nueva definición, el cubo es el politopo universal de $\{4\}$ y $\{3\}$.

En el caso de que exista un politopo universal en la clase $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$, éste será denotado por el símbolo de Schläfli generalizado $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$.

Para iniciar nuestro análisis de la clase $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$, observemos que si $\mathcal{Q} \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$, F_{-1}, F_{n+1} son las caras de \mathcal{Q} de rangos -1 y $n + 1$, respectivamente, y F, G son un vértice y una faceta de \mathcal{Q} , entonces F_n/F es isomorfa a \mathcal{P}_1 y $\mathcal{P}_2 \cong H/F_{-1}$. Tenemos entonces que H/F es isomorfa tanto a una figura de vértice de \mathcal{P}_1 , como a una faceta de \mathcal{P}_2 .

Por lo tanto, una condición necesaria para que $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ no sea vacía es que las figuras de vértice de \mathcal{P}_1 sean isomorfas a las facetas de \mathcal{P}_2 . En adelante, sólo consideraremos

politopos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ que cumplan esta condición.

Si ahora nos fijamos en $\Gamma(\mathcal{Q}) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ (con $\mathcal{Q} \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$), notamos que $\langle \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \rangle \cong \Gamma(\mathcal{P}_1) = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$ y $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle \cong \Gamma(\mathcal{P}_2) = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle$, donde $\{\alpha_i | 0 \leq i \leq n-1\}, \{\beta_i | 0 \leq i \leq n-1\}$ son generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P}_1), \Gamma(\mathcal{P}_2)$, respectivamente [11, 2B9].

Además si

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{P}_1) &= \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} | R_i(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}), i \in I \rangle, \\ \Gamma(\mathcal{P}_2) &= \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} | R'_j(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}), j \in J \rangle \end{aligned}$$

son presentaciones para $\Gamma(\mathcal{P}_1), \Gamma(\mathcal{P}_2)$ respectivamente, con $\{R_i | i \in I\}, \{R'_j | j \in J\}$ los conjuntos de relaciones entre los conjuntos de generadores $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}, \{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\}$. Entonces el grupo

$$\Gamma := \langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n | R_i(\rho_0, \dots, \rho_{n-1}), R'_j(\rho_1, \dots, \rho_n), (\rho_0 \rho_n)^2, i \in I, j \in J \rangle$$

es un C -grupo lineal por el criterio del cociente [2E17], ya que las correspondencias $\rho_i \mapsto \gamma_i, i \in \{0, \dots, n\}$, inducen el homomorfismo (suprayectivo) $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ y las asignaciones $\gamma_i \mapsto \rho_i, i \in \{0, \dots, n-1\}$ inducen el homomorfismo $\psi : \langle \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \rangle \rightarrow \Gamma$ y para éstos se tiene que $(\rho_i)\varphi|_{\langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle} \circ \psi = \rho_i$, es decir, la restricción de φ a $\langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ es inyectiva.

Se sigue que Γ es un C -grupo lineal y que induce una n -cubierta [11, p. 43] $\mathcal{P}(\Gamma) \searrow \mathcal{Q}$, donde $\mathcal{P}(\Gamma)$ es el $(n+1)$ -politopo regular asociado a Γ .

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado.

Teorema 17. [12, 4A2] Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 n -politopos regulares tales que $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle \neq \emptyset$. Entonces $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ contiene un politopo, cuyo grupo de automorfismos es

$$\Gamma := \langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n | R_i(\rho_0, \dots, \rho_{n-1}), R'_j(\rho_1, \dots, \rho_n), (\rho_0 \rho_n)^2, i \in I, j \in J \rangle,$$

y este politopo cubre a cualquier otro politopo en $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$.

Al politopo $\mathcal{P}(\Gamma) \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ así construido, se le denomina $(n+1)$ -politopo regular universal con facetas \mathcal{P}_1 y figuras de vértice \mathcal{P}_2 , o simplemente el politopo universal en $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ y se denota como $\{ \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \}$.

La siguiente proposición describe la clase dual de $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$.

Proposición 18. [12, 4A3] Si $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle^* := \{ \mathcal{P}^* | \mathcal{P} \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle \}$, entonces $\langle \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \rangle = \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle^*$ y $\{ \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \} = \{ \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \}^*$.

Demostración. Si $\mathcal{Q}^* \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle^*$ y G, F son una faceta de \mathcal{Q} y un vértice de \mathcal{Q} , respectivamente, entonces $G/F_{-1} \cong \mathcal{P}_2^*, F_n/F \cong \mathcal{P}_1^*$. Por lo tanto $\mathcal{Q}^* \in \langle \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \rangle$ y $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle^* \subseteq \langle \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \rangle$. Recíprocamente, si G, F son una faceta y un vértice de $\mathcal{Q} \in \langle \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \rangle$, entonces $G/F_{-1} \cong \mathcal{P}_2^*, F_n/F \cong \mathcal{P}_1^*$. Por lo tanto las facetas y figuras de vértice de \mathcal{Q}^* son isomorfas a \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 , respectivamente. Esto implica que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{**} \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle^*$. Es decir, $\langle \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \rangle \subseteq \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle^*$.

Para hacer ver que $\{\mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^*\} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}^*$, notemos que si $\mathcal{Q} \in \langle \mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^* \rangle$, entonces existe $\mathcal{P} \in \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$ tal que $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^*$, se sigue entonces que hay una dualidad $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, además por el teorema anterior, existe una cubierta $\varphi : \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\} \rightarrow \mathcal{P}$ y si $\partial : \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}^* \rightarrow \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$, entonces $\delta \circ \varphi \circ \partial : \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}^* \rightarrow \mathcal{Q}$ es una n -cubierta, ya que δ, ∂ invierten el orden y el rango y son biyectivas y φ es una n -cubierta.

Concluimos que $\{\mathcal{P}_2^*, \mathcal{P}_1^*\} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}^*$, lo que completa la prueba de la proposición. \square

Es tiempo ahora de hablar de la relación que existe entre la amalgamación de politopos y la amalgamación de grupos [12].

Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 n -politopos regulares tales que $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle \neq \emptyset$ y $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ el politopo universal en $\langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \rangle$. El teorema 12 implica que el grupo de automorfismos de $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ tiene presentación

$$\Gamma(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_n | R_i(\rho_0, \dots, \rho_{n-1}), R'_j(\rho_1, \dots, \rho_n), (\rho_0 \rho_n)^2, i \in I, j \in J \rangle$$

Donde R_i, R'_j son las relaciones en las presentaciones $\Gamma(\mathcal{P}_1) = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} | R_i(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}), i \in I \rangle$ y $\Gamma(\mathcal{P}_2) = \langle \beta_1, \dots, \beta_n | R'_j(\beta_1, \dots, \beta_n), j \in J \rangle$.

Si ahora $\Delta = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} | R''_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), k \in K \rangle$ es una presentación para el grupo de automorfismos de una figura de vértice de \mathcal{P}_1 (siendo $R''_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), k \in K$ las relaciones entre los generadores), se obtiene que $\Gamma(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\})$ es un cociente de la amalgamación de $\Gamma_1 *_H \Gamma_2$, donde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} | R_i(\rho_0, \dots, \rho_{n-1}), i \in I \rangle \\ \Gamma_2 &= \langle \rho_1, \dots, \rho_n | R'_j(\rho_1, \dots, \rho_n), j \in J \rangle \\ H &= \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} | R''_k(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}), k \in K \rangle \end{aligned}$$

De hecho, $\Gamma(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\})$ es el cociente $\Gamma_1 *_H \Gamma_2 / \overline{\langle (\rho_0 \rho_n)^2 \rangle}$, con $\overline{\langle (\rho_0 \rho_n)^2 \rangle}$ la cerradura normal de $\langle (\rho_0 \rho_n)^2 \rangle$. Observemos que el grupo $\Gamma_1 *_H \Gamma_2$ no es un C -grupo lineal, dado que $\rho_0 \rho_n$ tiene orden infinito por el teorema 5.1 de [12]. Sin embargo, sí satisface la propiedad de la intersección, pero $\Gamma_1 *_H \Gamma_2 / \overline{\langle (\rho_0 \rho_n)^2 \rangle}$ puede no hacerlo, aunque éste sea un grupo lineal generado por involuciones. Por lo tanto, la existencia de $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ depende únicamente del si $\Gamma_1 *_H \Gamma_2 / \overline{\langle (\rho_0 \rho_n)^2 \rangle}$ es un C -grupo lineal (i.e. satisface la propiedad de la intersección).

Se tiene la siguiente proposición.

Proposición 19. [12, 4A8] Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos n -politopos regulares tales que las figuras de vértice \mathcal{K} de \mathcal{P}_1 son isomorfas a las facetas de \mathcal{P}_2 . Sea

$$\Gamma = \langle \rho_0, \dots, \rho_n | R_i(\rho_0, \dots, \rho_{n-1}), R'_j(\rho_1, \dots, \rho_n), (\rho_0 \rho_n)^2, i \in I, j \in J \rangle,$$

con R_i, R_j como han sido descritas arriba y sea $\Pi = \Gamma_1 *_H \Gamma_2$, también como ha sido

descrito arriba.

1. $\Gamma \cong \Pi/N$, donde N es la cerradura normal de $\langle(\rho_0\rho_n)^2\rangle$.
2. Si $\langle\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\rangle \neq \emptyset$, entonces $\Gamma(\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}) \cong \Gamma \cong \Pi/N$.
3. El politopo $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ existe si y solamente si Γ es un C -grupo lineal, $\langle\rho_0, \dots, \rho_{n-1}\rangle \cong \Gamma(\mathcal{P}_1)$ y $\langle\rho_1, \dots, \rho_n\rangle \cong \Gamma(\mathcal{P}_2)$.

Demostración.

1. Basta notar que

$$\langle\rho_0N, \dots, \rho_nN \mid R_i(\rho_0N, \dots, \rho_{n-1}N), R'_j(\rho_1N, \dots, \rho_nN), (\rho_0\rho_n)^2N, i \in I, j \in J\rangle$$

es claramente una presentación para $\Gamma_1 *_H \Gamma_2/N$. Esto implica que existe un isomorfismo tal que $\rho_i \mapsto \rho_iN$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

2. Es consecuencia directa del teorema 12.
3. La necesidad del enunciado se sigue directamente de (2). Para verificar la suficiencia, observemos que si $\Gamma = \langle\rho_0, \dots, \rho_n\rangle$ es un C -grupo lineal como está descrito en (3), entonces $\mathcal{P}(\Gamma)$ es un politopo regular de rango $n + 1$ con facetas isomorfas a $\mathcal{P}(\langle\rho_0, \dots, \rho_{n-1}\rangle) \cong \mathcal{P}(\Gamma(\mathcal{P}_1)) \cong \mathcal{P}_1$ y figuras de vértice isomorfas a $\mathcal{P}(\langle\rho_1, \dots, \rho_n\rangle) \cong \mathcal{P}(\Gamma(\mathcal{P}_2)) \cong \mathcal{P}_2$ por [11, 2E12]. Se sigue del teorema 17 y de [11, 2E14] que $\mathcal{P}(\Gamma) = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$.

□

Una forma de interpretar la proposición superior es diciendo que la existencia del politopo universal $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ puede ser traducida a un problema de presentación de grupos, esta interpretación será fructífera cuando abordemos ciertos casos especiales de amalgamaciones durante el proyecto de investigación.

5 Polítopos localmente tóricos

Toca el turno ahora al estudio de los polítopos regulares localmente tóricos. Diremos que un $(n + 1)$ -polítopo regular \mathcal{P} es *localmente tórico* si $\mathcal{P} \in \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ para algún par de n -polítopos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ tóricos o esféricos, tales que \mathcal{P}_1 o \mathcal{P}_2 es un toroide.

El objetivo de esta sección es presentar un panorama del estado actual de la clasificación de este tipo de polítopos, entenderemos aquí por clasificación a una enumeración de todos los $(n + 1)$ -polítopos universales $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ que son localmente tóricos y finitos.

El problema de la clasificación de los polítopos localmente tóricos a motivado mucha de la teoría de polítopos abstractos y fue propuesto por primera vez por Grünbaum en [6]

Es un hecho conocido que sólo pueden existir polítopos regulares localmente tóricos de rangos 4, 5 o 6. Más aún, se tiene el siguiente lema.

Lema 20. [12, 10A1] *Cada $(n + 1)$ polítopo regular localmente tórico \mathcal{P} es un cociente de una de las teselaciones regulares del n -espacio hiperbólico \mathbb{H}^n listadas en la tabla siguiente o bien es un cociente de alguno de sus duales. En particular, el rango de \mathcal{P} sólo puede ser 4, 5, o 6.*

n	Símbolo de Schläfli
3	$\{4, 4, r\}, r = 3, 4$ $\{6, 3, p\}, p = 3, 4, 5, 6$ $\{3, 6, 3\}$
4	$\{3, 4, 3, 4\}$
5	$\{3, 3, 3, 4, 3\}, \{3, 3, 4, 3, 3\}, \{3, 4, 3, 3, 4\}$

Los polítopos localmente tóricos de rango 4 son los que poseen una mayor cantidad de subclases y será el caso que abordaremos primero. Como en el caso de la amalgamación en general, la existencia de los polítopos localmente tóricos finitos de rango 4, se aborda mayormente en términos de sus grupos de automorfismos.

En particular, el caso de los polítopos universales ${}_1\mathcal{T}_s^4 := \{\{4, 4\}_s, \{4, 3\}\}$ de tipo $\{4, 4, 3\}$ se trata a través de una técnica conocida como *twisting* o *inflexión* que consiste en extender un grupo dado W por algún subgrupo de su grupo de automorfismos para obtener un grupo Γ que es el grupo de automorfismos de un polítopo regular [11, Cap. 8].

Aunque el politopo universal ${}_1\mathcal{T}_{\mathbf{s}}^4$ siempre existe para cada $\mathbf{s} = (s, 0), (s, s), s \geq 2$ [11, Cap 10], sólo es finito en el caso $\mathbf{s} = (2, 0), (3, 0), (2, 2)$. El cuadro 4.1 sintetiza la información de estos politopos.

\mathbf{s}	# vértices	# caras	$ \Gamma({}_1\mathcal{T}_{\mathbf{s}}^4) $	$\Gamma({}_1\mathcal{T}_{\mathbf{s}}^4)$
(2, 0)	4	6	192	$D_4 \times S_4$
(3, 0)	30	20	1440	$S_6 \times C_2$
(2, 2)	16	12	768	$C_2 \wr D_6$

Cuadro 5.1: Politopos finitos ${}_1\mathcal{T}_{\mathbf{s}}^4$

También la existencia de los politopos universales ${}_2\mathcal{T}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}^4 := \{\{4, 4\}_{\mathbf{s}}, \{4, 4\}_{\mathbf{t}}\}$ para cada $\mathbf{s} = (s, 0), (s, s), \mathbf{t} = (t, 0), (t, t), s, t \geq 2$ se prueba mediante el uso de la inflexión. Estos politopos son finitos en los casos listados en el cuadro 4.2.

\mathbf{s}	\mathbf{t}	# vértices	# caras	$ \Gamma({}_2\mathcal{T}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}^4) $	$\Gamma({}_2\mathcal{T}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}^4)$
(2, 0)	$(t, t), t \geq 2$	4	$2t^2$	$64t^2$	$(D_t \times D_t \times C_2 \times C_2) \times (C_2 \times C_2)$
(2, 0)	$(2m, 0), m \geq 1$	4	$4m^2$	$128m^2$	$(D_m \times D_m) \times \Gamma(\{4, 4\}_{(2,0)})$
(3, 0)	(3, 0)	20	20	1440	$S_6 \times C_2$
(3, 0)	(4, 0)	288	512	36864	$C_2 \wr \Gamma(\{4, 4\}_{(3,0)})$
(3, 0)	(2, 2)	36	32	2304	$(S_4 \times S_4) \times (C_2 \times C_2)$
(2, 2)	(2, 2)	16	16	1024	$C_2^4 \times \Gamma(\{4, 4\}_{(2,2)})$
(2, 2)	(3, 3)	64	144	9216	$C_2^6 \times \Gamma(\{4, 4\}_{(3,3)})$
(3, 0)	(5, 0)	19584	54400	3916800	$Sp(4) \times C_2 \times C_2$ (ver ¹)

Cuadro 5.2: Politopos finitos ${}_2\mathcal{T}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}^4$

Se sabe además que el politopo ${}_2\mathcal{T}_{(4,0),(5,0)}^4$ y su dual son finitos, sin embargo no se conoce mucho más en el caso en el que s y t son impares y distintos. De hecho, lo que se conoce es compatible con la siguiente conjetura.

Conjetura 21. [12, 10C7] Sean s, t enteros impares y distintos. Entonces el politopo universal ${}_2\mathcal{T}_{(s,0),(t,0)}^4$ existe, y éste es finito si y solamente si $(s, t) = (3, 5), (5, 3)$.

La enumeración de los politopos regulares localmente tóricos de tipo $\{6, 3, p\}$, donde $3 \leq p \leq 6$ está completa. La técnica usada para su enumeración es de nuevo la inflexión. Sin embargo, en este caso sobre grupos más complicados, a saber, grupos unitarios complejos generados por reflexiones a los que a su vez se les asocia una forma hermítica [11, Cap. 9]. En particular estos politopos serán finitos si y sólo si la forma que les ha sido asociada es positiva definida [11, Sec. 11A], en este caso se obtiene que el grupo de automorfismos de uno de estos politopos es el producto semidirecto de un grupo unitario de reflexiones por un grupo finito de orden pequeño.

Las dos tablas que siguen contienen la enumeración de los politopos universales finitos ${}_p\mathcal{T}_s^4 := \{\{6, 3\}_s, \{3, p\}\}$, con $p \in \{3, 4, 5\}$, $\mathbf{s} = (s, 0)$ y $s \geq 2$, o bien, $\mathbf{s} = (s, s)$ y $s \geq 1$, en el primer caso; y ${}_6\mathcal{T}_{s,t}^4 := \{\{6, 3\}_s, \{3, 6\}_t\}$, con parámetros similares a los del politopo anterior para las entradas de $\mathbf{s} = (s, 0), (s, s)$, $\mathbf{t} = (t, 0), (t, t)$.

p	\mathbf{s}	# vértices	# caras	$ \Gamma({}_p\mathcal{T}_s^4) $	$\Gamma({}_p\mathcal{T}_s^4)$
3	(2, 0)	10	5	240	$S_5 \times C_2$
	(3, 0)	54	12	1296	$[1\ 1\ 2]^3 \rtimes C_2$
	(4, 0)	640	80	15360	$[1\ 1\ 2]^4 \rtimes C_2$
	(2, 2)	120	20	2880	$S_5 \times S_4$
4	(1, 1)	12	8	288	$S_3 \rtimes \Gamma(\{3, 4\})$
	(2, 0)	16	16	768	$\Gamma(\{3, 3, 4\}) \times C_2$
5	(2, 0)	240	600	28800	$\Gamma(\{3, 3, 5\}) \times C_2$

Cuadro 5.3: Los politopos finitos ${}_p\mathcal{T}_s^4$

\mathbf{s}	\mathbf{t}	# vértices	# caras	$ \Gamma({}_6\mathcal{T}_{s,t}^4) $	$\Gamma({}_6\mathcal{T}_{s,t}^4)$
(2, 0)	(2, 0)	10	10	480	$S_5 \times C_2 \times C_2$
(3, 0)	(2, 0)	54	24	2592	$[1\ 1\ 2]^3 \rtimes (C_2 \times C_2)$
(4, 0)	(2, 0)	640	160	30720	$[1\ 1\ 2]^4 \rtimes (C_2 \times C_2)$
(1, 1)	$(t, 0), t \equiv 0 \pmod{3}$	6	$2t^2$	$72s^2$	$S_3 \rtimes \Gamma(\{3, 6\}_{(s,0)})$
(1, 1)	$(t, t), t \geq 1$	6	$6t^2$	$216s^2$	$S_3 \rtimes \Gamma(\{3, 6\}_{(s,s)})$
(2, 2)	(2, 0)	120	40	5760	$S_5 \times S_4 \times C_2$

Cuadro 5.4: Los politopos finitos ${}_6\mathcal{T}_{s,t}^4$

Aunque la enumeración de los politopos regulares localmente tóricos de tipo $\{3, 6, 3\}$ no está completa, se conoce una parte sustancial que se ha conseguido utilizando principalmente inflexión. La tabla siguiente contiene aquellos politopos universales ${}_7\mathcal{T}_{s,t}^4 := \{\{3, 6\}_s, \{6, 3\}_t\}$ que se conoce que son finitos. Hemos omitido en esta ocasión la descripción de su grupo de automorfismos, ya que para la mayor parte no se conoce con exactitud su estructura.

s	t	# vértices	# aristas	$ \Gamma(\tau\mathcal{T}_{s,t}^4) $
(1, 1)	(1, 1)	3	3	108
(1, 1)	(3, 0)	3	9	324
(2, 0)	(2, 0)	5	5	240
(2, 0)	(2, 2)	5	15	720
(3, 0)	(3, 0)	27	27	2916
(3, 0)	(2, 2)	288	384	41472
(3, 0)	(4, 0)	1260	2240	241920

Cuadro 5.5: Los politopos finitos $\tau\mathcal{T}_{s,t}^4$ que se conocen

Parte de la investigación doctoral que realizaré pretende completar los casos que faltan de este tipo de politopos, utilizando técnicas de amalgamación y teoría combinatoria de grupos y será probablemente el punto de partida de ésta.

A manera de conclusión, discutiremos muy brevemente algunas condiciones necesarias para que la amalgamación de dos politopos sea un politopo localmente tórico con simetría quiral, que es uno de los problemas que abordaré durante mi investigación doctoral, y del cuál se sabe muy poco.

Es claro que la definición de amalgamación de politopos regulares puede generalizarse de manera inmediata a cualesquiera dos politopos \mathcal{P} y \mathcal{Q} del mismo rango. El teorema 14 insinúa que, como con los politopos regulares, los problemas referentes a politopos quirales puede ser llevados en muchos casos al lenguaje de la teoría de grupos. Tal es el caso del problema de amalgamación de politopos quirales.

La proposición 12 implica que si la amalgamación de dos politopos \mathcal{P} , \mathcal{Q} es un politopo quiral localmente tórico, entonces \mathcal{P} o \mathcal{Q} debe ser un politopo tórico quiral o regular, sin embargo, la proposición 15 tiene como consecuencia que en caso de existir una amalgamación en la que \mathcal{P} o \mathcal{Q} sean toroides quirales entonces \mathcal{P} o \mathcal{Q} deben de ser de rango 3. En particular, los politopos quirales localmente tóricos que tengan facetas quirales tóricas y figuras de vértice esféricas, deben tener símbolo de Schläfli $\{4, 4, 3\}$, $\{6, 3, 5\}$. Estas familias de politopos serán las primeras en ser estudiadas durante la investigación doctoral, paralelamente a la clasificación de los politopos regulares localmente tóricos $\{3, 6, 3\}$.

Bibliografía

- [1] H.S.M Coxeter, *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam **3** (1954).
- [2] ———, *Regular polytopes*, Dover, 1973.
- [3] H.S.M Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, 4th edition ed., Springer-Verlag, 1980.
- [4] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Pure and Applied mathematics series, vol. 16, Springer, 1967.
- [5] ———, *Regular polyhedra - old and new.*, Aequationes Math. (1977), no. 16.
- [6] ———, *Regularity of graphs, complexes and designs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes **260** (1997).
- [7] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman, 1987.
- [8] I. Hubbard, *From geometry to groups and back: The study of highly symmetric polytopes.*, Ph.D. thesis, York University, 2007.
- [9] R. C. Lydon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer, 2001.
- [10] P. McMullen and E. Schulte, *Hermitian forms and locally toroidal regular polytopes*, Advances in Mathematics (1990), no. 82.
- [11] ———, *Locally toroidal regular polytopes of rank 4*, Comment Math. Helvetici (1992), no. 67.
- [12] ———, *Abstract regular polytopes*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, no. 92, Cambridge, 2002.
- [13] B. H. Neumann, *An essay of free products of groups with amalgamations*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **246** (1954), no. 919.
- [14] E. Schulte, *Reguläre inzidenzkomplexe*, Ph.D. thesis, Universidad de Dortmund, 1980.

-
- [15] ———, *Amalgamation of regular incidence polytopes*, Proc. London Mathematical Society **56** (1988), no. 3.
- [16] E. Schulte and A. Weiss, *Chiral polytopes*, Applied Geometry and Discrete Mathematics (The Victor Klee Festschrift) **4** (1991).
- [17] J. Tits, *Groupes et géométries de coxeter*, Institut des Hautes Études Scientifiques (notes polycopiées), 1961.
- [18] ———, *Géométries polyédriques et groupes simples*, Atti 2a Riunione Groupem. Math. Express. lat. Firenze (1962).
- [19] ———, *Buildings of spherical type and finite bn-pairs*, vol. 386, Springer-Verlag, 1986.
- [20] A. Weiss, *Incidence polytopes of type $\{6,3,3\}$ incidence polytopes of type $\{6,3,3\}$ incidence polytopes of type $6,3,3$* , Geom. Dedicata (1986), no. 20.
- [21] ———, *Incidence polytopes with toroidal cells*, Discrete and Computational Geometry **4** (1989), no. 1.