



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ASPECTOS DINÁMICOS DE LA FAMILIA $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. EN C. MARCO ANTONIO MONTES DE OCA BALDERAS

DIRECTOR DE TESIS

DR. GUILLERMO JAVIER FRANCISCO SIENRA LOERA
(FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JEFFERSON KING DÁVALOS
(FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM)
DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
(PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS)

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*¿Cómo sería nuestra vida ahora si nuestros antepasados no hubieran estudiado la geometría en el plano o la aritmética del modo abstracto en que lo hicieron?
¿Qué importancia tendrá dentro de dos mil años el que estudiemos el caos y la dinámica del modo abstracto en que lo hacemos ahora?*



Agradecimientos

A mi familia. En especial a mi madre, mi padre, mis hermanos y sobrinos.

A mis profesores.

A mis amigos.

A mis compañeros de lucha.

En especial a todas aquellas personas que ayudaron a la realización de este trabajo, en la parte matemática, técnica y anímica.

Índice general

1. PRELIMINARES	5
1.1. Singularidades	6
1.1.1. Singularidades de f	6
1.1.2. Valores singulares	7
1.1.3. Valores excepcionales de Picard	8
1.2. Sistemas dinámicos discretos holomorfos	10
1.2.1. Dinámica y singularidades	15
1.3. Iteración de funciones meromorfas trascendentes	16
1.3.1. Dominios de Baker	18
1.3.2. Conectividad en el conjunto de Fatou	24
1.3.3. Conjunto de escape	25
1.4. Espacio de parámetros	27
1.5. Familia exponencial	29
2. RESULTADOS	34
2.1. Aspectos generales	34
2.2. Dominios de Baker	40
2.2.1. Existencia	40
2.2.2. Conectividad	42
2.3. Espacio de parámetros	47
2.4. Preguntas y conjeturas	53

3. DEMOSTRACIONES	59
3.1. Aspectos generales	59
3.2. Dominios de Baker	62
3.2.1. Existencia	62
3.2.2. Conectividad	67
3.3. Espacio de parámetros	73

INTRODUCCIÓN

El estudio de la convergencia de la iteración de funciones exponenciales aparece en trabajos de Euler para encontrar soluciones a ecuaciones de la forma $x^y = y^x$. Este tipo de problemas fueron planteados desde tiempos de Daniel Bernoulli y están estrechamente relacionados para modelar reacciones de encimas en bioquímica.

A principios del siglo XX se fundan las bases para el estudio de los sistemas dinámicos discretos holomorfos con Pierre Fatou y Gaston Julia. Si bien los resultados se centraron para el caso de funciones racionales, Fatou comenzó a generalizar algunos de ellos al caso de las funciones enteras trascendentes.

A finales del siglo pasado aumentó considerablemente la cantidad de investigaciones acerca de la iteración de funciones enteras trascendentes. Una familia ampliamente estudiada por muchos autores es $E_\lambda(z) = \lambda e^z$; algunos de ellos han sido Baker, Bergweiler, Devaney, Eremenko, Lyubich, McMullen, Misiurewicz, Sullivan, Viana, etc.

Por otro lado, en Devaney *et al.* [2008], la función $z^n + \lambda/z^n$ se le llama *perturbación singular* de z^n . Muchos resultados interesantes han surgido al estudiar este tipo de perturbaciones. En ese sentido, $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$ es una perturbación singular de E_λ . Esta perturbación nos da como resultado una familia de funciones meromorfas trascendentes.

En las últimas décadas surgió el interés por comprender la dinámica de las funciones meromorfas trascendentes. Nuevas dificultades y comportamientos surgen en el caso en que las funciones tienen al menos un polo que no es un valor omitido, como es el caso de $f_{\lambda,\mu}$.

El primer ejemplo de lo que ahora llamamos dominio de Baker lo dio Fatou en 1919. Un dominio de Baker es un dominio periódico en el conjunto de Fatou de una función f meromorfa con un punto de absorción que es ∞ o un polo de alguna iteración de f . Las funciones racionales

no pueden tener dominios de Baker y las enteras trascendentes sólo pueden tener a ∞ como punto de absorción en los dominios de Baker.

La función $f_{-1,1}(z) = -e^z + 1/z$ aparece en [Baker *et al.*, 1991] para dar el ejemplo de un ciclo de dominios de Baker de periodo dos. También aparece en [Bergweiler, 1993] donde se usa como ejemplo para mostrar que hay funciones con dominios de Baker aunque su conjunto de valores singulares sea acotado, en contraste con lo que ocurre si la función es entera. Debido a que $f_{-1,1}$ aparece en estos importantes artículos le llamamos el ejemplo clásico de la familia $f_{\lambda,\mu}$.

En el Capítulo 1 se hace un recuento de resultados y conceptos conocidos que emplearemos posteriormente. El capítulo comienza con lo relativo a las singularidades, para después abordar los aspectos dinámicos, terminando con una síntesis de algunos aspectos dinámicos de la familia E_λ que ayudan a comprender mejor a nuestra familia $f_{\lambda,\mu}$.

Todos los resultados producto de esta investigación se enuncian y explican en el Capítulo 2. Para permitir una lectura fluida de los resultados las demostraciones aparecen en el Capítulo 3. Al final del Capítulo 2 se presentan las preguntas y conjeturas que surgieron en el camino.

Los resultados principales de la presente investigación son los siguientes.

Teorema 41 *Sea $\mathcal{B} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ y } |\operatorname{Im}(\lambda)| < \frac{1}{2}|\operatorname{Re}(\lambda)|, \mu \neq 0\}$. Si $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}$, entonces $f_{\lambda,\mu}$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos $\{F_\infty, F_0\}$ cuyos puntos de absorción son ∞ y 0 respectivamente.*

Teorema 49 *Existe un conjunto abierto no vacío $\mathcal{B}_h \subset \mathbb{C}^2$ tal que, para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_h$ los dominios de Baker F_∞ y F_0 de $f_{\lambda,\mu}$ son de conectividad infinita.*

Para demostrar el Teorema 41 se requiere de algunos resultados previos. El principal de ellos garantiza que para cada $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}$, existe un conjunto abierto W no vacío e invariante bajo $f_{\lambda,\mu}^2$ donde la función se comporta esencialmente como una traslación. La caracterización del conjunto W resulta muy útil para obtener corolarios como el que enunciamos a continuación.

Corolario 42 *Si $\mu \neq 0$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ y $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \frac{1}{2}|\operatorname{Re}(\lambda)| - 4$, entonces F_∞ contiene una*

infinidad de puntos críticos de $f_{\lambda,\mu}$ y F_0 contiene una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda,\mu}$.

La misma definición de W se emplea para probar que los dominios de Baker de la función $f_{-20,1/4}(z) = -20e^z + \frac{1}{4z}$ son de conectividad infinita. Adicionalmente se requiere usar el siguiente resultado de carácter general que también se demuestra.

Teorema 45 *Sea f una función meromorfa con una cantidad finita de valores asintóticos. Si U y V son componentes conexas del conjunto de Fatou de f , tal que $f(U) \subseteq V$ y V tiene conectividad infinita, entonces U es múltiplemente conexo.*

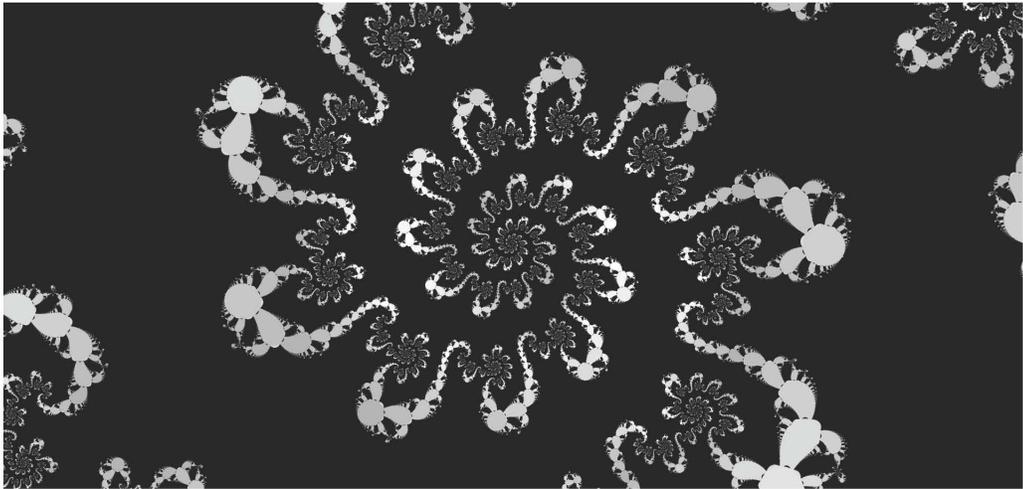
Una vez que tenemos una función con dominios de Baker de conectividad infinita, usando argumentos de continuidad se extiende el resultado a las funciones del conjunto \mathcal{B}_h .

Adicionalmente a lo anterior, se hace un análisis de las singularidades de $f_{\lambda,\mu}$. Ello permite emplear resultados conocidos para hacer una mejor descripción de los planos dinámicos generados con la computadora.

Se presenta un plano de parámetros en el caso en que estos son reales y se demuestra que no es acotado el conjunto de parámetros para los cuales $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo atractor. Además se identifica este conjunto cuando el punto fijo es real.

Otros aspectos encontrados se van exponiendo junto a la presentación de los anteriores. Por ejemplo, en el caso de la función $f_{-20,1/4}$ se demuestra que hay un punto fijo repulsor x_0 negativo tal que, $(-\infty, x_0) \subset F_\infty$ y $(x_0, 0) \subset F_0$.

A lo largo de los tres capítulos se presentan 38 figuras que no sólo ayudan a la comprensión de los conceptos y resultados presentados, sino que muchas de ellas pueden enriquecer el estrecho e histórico vínculo entre las matemáticas y el arte.



Capítulo 1

PRELIMINARES

Las funciones meromorfas en \mathbb{C} son las funciones que son holomorfas en \mathbb{C} salvo en sus polos. Se dividen en dos conjuntos ajenos: las meromorfas trascendentes Mer y las racionales R . Las funciones racionales son endomorfismos holomorfos de la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, mientras que las trascendentes tienen una singularidad esencial o no aislada en ∞ en donde no se puede definir las continuamente, ver Sección 1.1.1.

Las funciones meromorfas trascendentes sin polos son las enteras trascendentes que forman la familia E . Las meromorfas trascendentes con polos se dividen en las familias P y M , en las Secciones 1.1.3 y 1.3 se explicarán éstas últimas.

En este capítulo nos enfocaremos a hacer un recuento de los conceptos y resultados principales acerca de las singularidades de una función f y de sus valores singulares (llamados también singularidades de f^{-1}), así como de diversos aspectos de la dinámica discreta holomorfa. Todos los resultados de este capítulo son ya conocidos en el área.

Las singularidades juegan un papel importante en la dinámica de las funciones. Para una discusión más detallada sobre singularidades se puede consultar [Ahlfors, 1966], [Bergweiler & Eremenko, 1995], [Morosawa *et al.*, 2000] y [Remmert, 1991].

Posteriormente abordaremos la dinámica de funciones meromorfas, haciendo un recuento de los conceptos y resultados principales, poniendo especial énfasis en aquellos empleados para las funciones trascendentes. Para una discusión más detallada, ver [Baker, 1987], [Baker *et al.*, 1991], [Domínguez, 1998] y [Bergweiler, 1993].

1.1. Singularidades

En esta sección estudiaremos las singularidades de f y f^{-1} que juegan un papel importante en la dinámica de las funciones meromorfas. Las singularidades de f son puntos especiales en la esfera de Riemann que contiene al dominio de la función. En cambio, las singularidades de la inversa son puntos especiales de $\overline{\mathbb{C}}$ como contradominio de f .

Hay dos tipos de singularidades relacionadas al dominio de f . Las del primer tipo son: las removibles, los polos, las esenciales y las que son puntos de acumulación de polos. El segundo tipo son en relación a los valores asintóticos. Las funciones meromorfas no tienen singularidades que sean puntos de acumulación de singularidades esenciales, sin embargo necesitaremos lidiar con este fenómeno como veremos en la sección 1.2. Los valores críticos, los valores asintóticos y los puntos de acumulación de ambos se les conoce como singularidades de f^{-1} .

1.1.1. Singularidades de f

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función holomorfa. Si $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tiene un vecindad U tal que, $f : U - \{z_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es analítica y no se puede extender continuamente a z_0 , entonces z_0 es una singularidad esencial aislada. El comportamiento de una función alrededor de una singularidad esencial aislada queda bien descrito por el siguiente resultado de Weierstrass.

Teorema 1 *Sea z_0 una singularidad esencial aislada de f , U una vecindad de z_0 y $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Entonces existe una sucesión $\{z_n\}$ en $U - \{z_0\}$ que converge a z_0 tal que, el límite de $f(z_n)$ converge a z .*

Sólo las meromorfas trascendentes tienen esta clase de singularidades y es el punto en infinito, como es el caso de e^z . Sin embargo, las meromorfas trascendentes pueden tener otra clase de singularidades: las no aisladas, como en el caso de $\tan z$.

Por definición, un polo z_0 de f es una singularidad aislada, aunque la función tenga una extensión analítica en z_0 . De modo que en el caso de $\tan z$, el infinito no es una singularidad aislada, por ser punto de acumulación de los polos de la función. Dado que una función meromorfa no puede tener singularidades de otro tipo en \mathbb{C} que no sean polos, se tiene que las meromorfas trascendentes tienen una singularidad esencial en infinito o una infinidad de polos, estos necesariamente se acumulan sólo en infinito.

Incluso si f es meromorfa trascendente con una infinidad de polos, el comportamiento de la función alrededor de infinito es similar al de una singularidad esencial aislada.

Teorema 2 *Sea f una función meromorfa trascendente y $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Entonces, toda vecindad U de infinito contiene una sucesión z_n que converge a infinito tal que $f(z_n)$ converge a z .*

1.1.2. Valores singulares

Si w es un valor singular de f , entonces puede ser de tres tipos: 1) es valor crítico, 2) es valor asintótico o 3) es punto de acumulación de valores críticos o asintóticos. Al conjunto de valores singulares de f lo denotaremos por $SV^\infty(f)$ y $SV(f)$ son los valores singulares finitos, es decir, $SV(f) = SV^\infty(f) \cap \mathbb{C}$.

Si f es meromorfa trascendente, $w \in \overline{\mathbb{C}}$ es valor asintótico de f si existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\gamma(t)) = w$.

Sea $B_r(w)$ la bola de radio r con centro en w . Si w es valor asintótico de f , entonces hay una manera de elegir componentes conexas U_r de las preimágenes bajo f de $B_r(w)$ de tal manera que si $r_1 < r_2$, entonces $U_{r_1} \subset U_{r_2}$ y $\bigcap_{r>0} U_r = \emptyset$. En tal caso ∞ pertenece a la frontera de cualquier U_r . Por ello, si w es un valor asintótico decimos que f tiene una singularidad trascendente en ∞ sobre w .

Si existe $r > 0$ tal que f en U_r no toma el valor w , decimos que ∞ es singularidad directa sobre w y w es valor asintótico directo. En caso contrario infinito es una singularidad indirecta sobre w y decimos que w es un valor asintótico indirecto de f .

En el caso en que $f : U_r \rightarrow D_r(w) - \{w\}$ es un cubriente universal para alguna $r > 0$ diremos que f tiene una singularidad logarítmica en infinito sobre w . En tal caso, se cumple que w es un valor asintótico directo de f .

Por ejemplo, e^z tiene sólo dos valores asintóticos en infinito y cero e infinito es singularidad logarítmica sobre ambos. Como no toma el valor cero ni tiene polos, entonces ∞ es singularidad directa sobre los dos valores asintóticos. Si bien el ejemplo clásico $-e^z + 1/z$ tiene los mismos valores asintóticos que e^z , ∞ es singularidad directa y logarítmica sobre infinito, pero ∞ es indirecta sobre cero, ver Sección 2.1.

Recordemos que el orden de una función meromorfa $o(f)$ está dado por

$$o(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{|z|=r} \frac{\log \log |f(z)|}{\log r}. \quad (1-1)$$

Si f es meromorfa de orden finito, entonces el Teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors establece que f tiene una cantidad finita de valores asintóticos directos. Además, el siguiente teorema establece una relación entre valores críticos y asintóticos indirectos para el caso de funciones de orden finito. Ver [Bergweiler & Eremenko, 1995].

Teorema 3 *Si f es meromorfa de orden finito y w es valor asintótico indirecto, entonces w es punto de acumulación de los valores críticos de f .*

Corolario 4 *Si f es meromorfa de orden finito y w es un valor asintótico de f , entonces w es punto de acumulación de valores críticos de f o todas las singularidades sobre w son logarítmicas.*

Conviene señalar que existen funciones meromorfas trascendentes para las cuales todos los puntos en $\overline{\mathbb{C}}$ son valores asintóticos. En contraste, las funciones elípticas no tienen valores asintóticos.

Observación 5 *Los valores singulares de f también son llamados singularidades de f^{-1} .*

Este nombre no significa que los valores singulares de f sean singularidades removibles, o polos, o singularidades esenciales o puntos de acumulación de singularidades de f^{-1} . Por ejemplo, si z es punto crítico de f y $f(z) = w$, al ser w un valor crítico es también un valor singular de f y f^{-1} no se puede definir apropiadamente en una vecindad w de modo que $f^{-1}(w) = z$.

1.1.3. Valores excepcionales de Picard

Si f es una función meromorfa, un punto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ es omitido (también llamado Lacunario) de f si para todo $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq z_0$; mientras que z_0 es un valor excepcional de Picard de f si sólo en una cantidad finita de puntos en \mathbb{C} la función f toma el valor z_0 . De modo que todo valor omitido es un valor excepcional de Picard, como cero para e^z .

Las funciones meromorfas con más de dos valores omitidos son las constantes. Los polinomios no constantes sólo tienen al infinito como valor omitido y cualquier elemento de \mathbb{C} es un valor excepcional de Picard. Si f es racional y no un polinomio, es decir, f tiene al menos un polo, entonces f no tiene valores omitidos y todos son excepcionales de Picard.

En contraste, por el Teorema de Picard, las funciones meromorfas trascendentes tienen a lo más dos valores excepcionales de Picard. Es decir, salvo por dos puntos en la esfera de Riemann, la función en \mathbb{C} es infinito a uno.

Las funciones meromorfas trascendentes se dividen en las familias E , P y M . E es la familia de funciones enteras trascendentes, es decir, las que tienen al infinito como valor omitido, P son las que tienen sólo un polo que es un valor omitido, por lo que infinito es excepcional pero no es omitido. La familia M son las que tienen al menos un polo que no es un valor omitido.

Veamos algunos ejemplos. La función $e^z \in E$ tiene a ∞ y el cero como valores excepcionales de Picard, siendo ambos valores omitidos. En cambio para la función $ze^z \in E$, ∞ es valor omitido y el cero es valor excepcional de Picard sin ser omitido. Nótese que las funciones enteras, trascendentes o no, tienen siempre al infinito como valor omitido, de modo que las enteras trascendentes pueden tener a lo más un valor excepcional de Picard finito.

La función $\frac{e^z}{z} \in P$. Las funciones en P tienen siempre dos valores excepcionales de Picard, el infinito y el polo, aunque $\frac{(z-1)}{z}e^z \notin P$, pues si bien infinito y el polo son valores excepcionales, el polo no es un valor omitido. De hecho, las funciones en P están bien caracterizadas, deben ser de la forma

$$f(z) = z_0 + \frac{e^{g(z)}}{(z - z_0)^n},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ y alguna función g entera, en tal caso z_0 es el polo y es un valor omitido de f .

En el caso de la familia M , tenemos que $\tan z \in M$ y tiene dos valores omitidos $\pm i$, infinito no es valor excepcional de Picard pues la función tiene una infinidad de polos. La función $\frac{(z-1)}{z}e^z \in M$ tiene tanto infinito como a cero como valores excepcionales de Picard sin ser omitidos.

Para las funciones meromorfas trascendentes, hay una relación entre los valores excepcionales de Picard y los valores asintóticos, ver [Bergweiler & Eremenko, 1995].

Proposición 6 *Si f es meromorfa trascendente, todos sus valores excepcionales de Picard son valores asintóticos.*

Nótese que el inverso no se cumple. El ejemplo clásico $-e^z + 1/z$ de la familia $f_{\lambda,\mu}$ tiene a infinito como único valor excepcional de Picard no omitido y cero es valor asintótico con infinidad de preimágenes, ver Sección 2.1.

Corolario 7 *Si w es valor excepcional de Picard de f , entonces w es valor asintótico directo de f .*

Una vez que pasemos a los aspectos dinámicos definiremos valor excepcional (dinámico) de f y retomaremos la clasificación de las funciones meromorfas trascendentes en las familias E , P y M .

Para identificar los valores excepcionales de Picard de $f_{\lambda,\mu}$ nos basta la Proposición 6, no necesitamos profundizar más en el problema de cómo poder encontrar estos valores para una función cualquiera. Solamente conviene señalar algunos aspectos más ya que hemos llegado a este punto.

Existen resultados para identificar valores excepcionales de Picard. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones los valores diferentes de cero de $(f^m)^{(k)}$ (la k -ésima derivada de la m -ésima iteración de f) no son valores excepcionales de Picard cuando $m > 1$, ver [Bergweiler & Eremenko, 1995]. Sin embargo, no está claro un procedimiento general para identificar estos valores para cualquier función.

Pregunta 8 *¿Cómo se pueden encontrar los valores excepcionales de Picard?*

Nótese que las funciones elípticas no tienen valores excepcionales de Picard.

1.2. Sistemas dinámicos discretos holomorfos

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función meromorfa no lineal ni constante. Si $n \in \mathbb{N}$, la n -ésima iteración de f la denotamos por $f^n = f \circ f^{n-1}$ y f^0 es la identidad. De este modo f define un sistema dinámico discreto holomorfo.

Mientras que R y E son familias cerradas bajo composición, esto no ocurre para las meromorfas trascendentes con al menos un polo. En el caso de las funciones en P tienen la ventaja de que todas sus iteraciones son holomorfas en \mathbb{C} menos un punto, éste punto que es el polo a partir de la segunda iteración se vuelve una singularidad esencial. El caso de las funciones en M se vuelve más complicado, pues en cada iteración van apareciendo infinidad de puntos donde las funciones no se pueden definir y se van acumulando entre sí, de manera que van apareciendo singularidades no aisladas en las iteraciones. Por lo anterior habrá conceptos cuyas definiciones requieran precisiones para este caso.

La órbita (hacia adelante) de z bajo f , denotada por $O^+(z)$ es la sucesión $\{z_n\}$ donde $f^n(z) = z_n$. Decimos que z es eventualmente infinito $f^n(z) = \infty$ si para algún $n \geq 0$ mientras que z es prepolo si $f^n(z) = \infty$ para algún $n > 0$. Es decir, de todos los puntos que eventualmente son infinito, solo ∞ no es prepolo. En tal caso la órbita hacia adelante consta de una cantidad finita de puntos y el último elemento es infinito. De esta manera queda definida la órbita hacia adelante de puntos que no pertenecen al dominio de todas las iteraciones de f .

Por otro lado, si $z \in \overline{\mathbb{C}}$,

$$O^-(z) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z).$$

es la órbita hacia atrás de z bajo f y está bien definida para todos los puntos en la esfera de Riemann y para cualquier función meromorfa en \mathbb{C} . Nótese que la órbita hacia atrás de los valores excepcionales de Picard es un conjunto finito.

El problema clásico de los sistemas dinámicos discretos es analizar las órbitas de los puntos en el dominio de f . El comportamiento de todas ellas determina lo que llamamos la dinámica de la función. Otro aspecto es estudiar la dinámica de las funciones que se obtienen como perturbaciones de f , ver Sección 1.4.

El conjunto de Fatou de f , denotado por $F(f)$, es el conjunto de puntos cuyas órbitas tienen un comportamiento sencillo. Mientras que el conjunto de Julia de f , denotado por $J(f)$, es donde la dinámica es más complicada. Hay varias maneras de definir el conjunto de Fatou, en cualquiera de ellas $J(f)$ es el complemento de $F(f)$ y ambos son conjuntos completamente invariantes bajo f .

Un camino para definir el conjunto de Fatou es usando familias normales. Como se sabe, $z \in F(f)$ si existe un abierto U que contiene a z y donde las iteraciones de f están definidas y forman una familia normal en U . A partir de ello, es inmediato que el conjunto de Fatou es abierto y por tanto el conjunto de Julia es cerrado.

Notemos que si tomamos z en la esfera de Riemann, al no definir las funciones trascendentes en infinito, se tiene que $\infty \in J(f)$. Esta observación es importante pues los conjuntos de Fatou y Julia se toman en el plano complejo o en la esfera de Riemann según se requiera. En el caso de los polinomios, el infinito siempre pertenece al conjunto de Fatou. Para las funciones racionales ∞ puede estar en uno o en otro conjunto.

Recordemos que z es punto periódico de f si existe $n > 0$ tal que $f^n(z) = z$. El mínimo de estos enteros positivos para los que ocurre la igualdad se llama el periodo. En particular, si $n = 1$ se trata de un punto fijo. Si existe n para el cual $f^n(z)$ es punto periódico (o fijo) y z no lo es, entonces z es punto preperiódico (o prefijo).

Si z es punto periódico de periodo n , hay tres posibilidades: (a) z es atractor si $|(f^n)'(z)| < 1$ (o súper atractor si la derivada se anula); z es indiferente si $|(f^n)'(z)| = 1$ y, z es repulsor si $|(f^n)'(z)| > 1$.

Equivalentemente, el conjunto de Julia de una función meromorfa se puede definir como la cerradura de sus puntos periódicos repulsores. La función $e^z + z$ muestra que una función meromorfa trascendente puede no tener puntos fijos, sin embargo, para todo $n > 1$, si f es meromorfa trascendente, entonces f tiene una infinidad de puntos periódicos repulsores de periodo n . En consecuencia $J(f)$ siempre es no acotado para el caso en que f es meromorfa trascendente.

Por el Teorema de Montel si f es meromorfa, entonces es topológicamente transitiva en $J(f)$, por lo que f es caótica en el conjunto de Julia, ver [Devaney, 1989].

En cambio, la dinámica en las componentes conexas del conjunto de Fatou es más sencilla. Si U es una de estas componentes, decimos que U es periódica si existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \subseteq U$. Cuando $n = 1$, decimos que U es invariante (hacia adelante). Si U es eventualmente periódica, es decir, si existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U)$ está contenida en una componente periódica, entonces decimos que U es preperiódica. Nótese que a diferencia de los puntos preperiódicos que no son periódicos por definición, una componente periódica es preperiódica.

Si U no es preperiódica, le llamamos una componente errante del conjunto de Fatou, por lo que $f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset$ si $n \neq m$. El primer ejemplo de una función con un dominio errante fue dado por Baker en [1976], el cual además es múltiplemente conexo. En la Figura 1-1 se muestra otro ejemplo dado por Baker con la propiedad de que los dominios errantes son simplemente conexos.

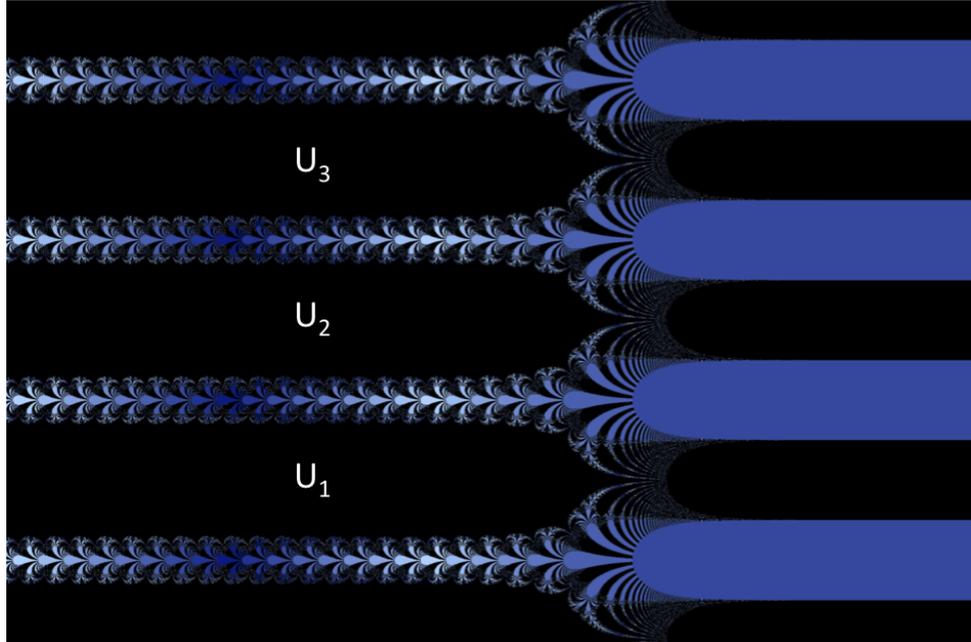


Figura 1-1: La función $f(z) = z - e^z + 1 + 2\pi i$ tiene dominios errantes que se desplazan hacia arriba. Si U_1 se toma como inicial, entonces $f(U_1) \subseteq U_2$ y $f(U_2) \subseteq U_3$.

La dinámica de los puntos en las componente periódicas de Fatou está bien entendida. Si U es componente periódica de periodo n de f meromorfa, entonces ocurre una de las siguientes cinco opciones:

1. U contiene un punto periódico atractor z_0 de periodo n . Entonces $(f^n)^k(z) \rightarrow z_0$ para todo $z \in U$ si f tiende a infinito. En tal caso U se llama la *cuenca inmediata de atracción* de z_0 .
2. La frontera de U contiene un punto periódico z_0 de periodo n y $(f^n)^k(z) \rightarrow z_0$ para todo $z \in U$ si k tiende a infinito. Entonces $|(f^n)'(z_0)| = 1$ y en tal caso, U se llama *dominio de Leu* o *dominio parabólico*.

3. Existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \rightarrow D$, donde D es el disco unitario, tal que φ conjuga f^n con una rotación irracional de D . En tal caso U se llama *disco de Siegel*.
4. Existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \rightarrow A$, donde A es un anillo, tal que φ conjuga f^n con una rotación irracional de A . En tal caso U se llama *anillo de Herman*.
5. Existe un punto z_0 en la frontera de U tal que $(f^n)^k(z) \rightarrow z_0$ para todo $z \in U$ si k tiende a infinito, pero $f^n(z_0)$ no está definida. En tal caso U se llama *dominio de Baker*.

En la Figura 1-2 se muestra un anillo de Herman, ejemplo dado en [Milnor, 2006].

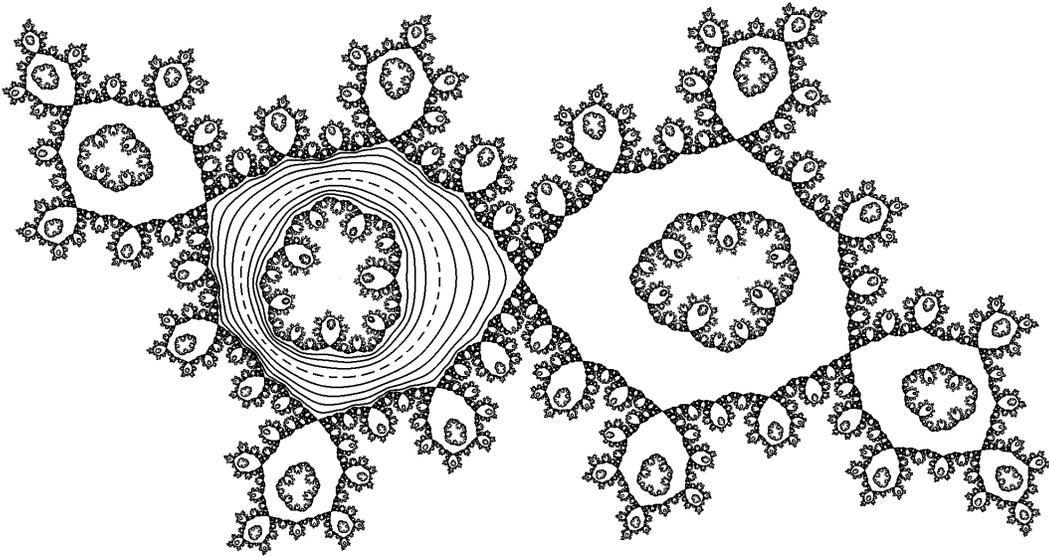


Figura 1-2: Anillo de Herman para una función racional. Imagen tomada de Wikipedia, [http : //en.wikipedia.org/wiki/Herman_ring](http://en.wikipedia.org/wiki/Herman_ring).

En esencia, si U es un dominio periódico de Fatou pueden ocurrir dos cosas: 1) f^n tiene un punto z_0 en la cerradura de U que atrae a las órbitas de los puntos en U o bien, 2) los puntos en U esencialmente giran con ángulo irracional. En el primer caso, llamaremos a z_0 el punto de absorción de U sin importar si es un punto periódico atractor, parabólico o un prepolo como ocurre en los dominios de Baker.

Si U_1 es un dominio periódico del conjunto de Fatou de periodo n , el conjunto $\{U_1, \dots, U_{n-1}\}$ es el ciclo periódico de U_1 si $f(U_i) \subseteq U_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-2\}$ y $f(U_{n-1}) \subset U_1$. En un

ciclo, todos los dominios son del mismo tipo, por lo que sólo hay cinco tipos de ciclos para las funciones meromorfas.

La dinámica en los dominios errantes no es tan complicada. Si U es errante, entonces cualquier subsucesión $f^{n_k}(U)$ que converge uniformemente en compactos a una función lo hace a una constante. Los ejemplos conocidos de funciones con dominios errantes tienen siempre a ∞ como una de estas constantes. En la literatura revisada todavía en 2014 aparece como pregunta abierta saber si esto último siempre ocurre, ver [Bergweiler, 1993] y [Bergweiler, 2014].

Volviendo a la topología de los conjuntos de Julia y Fatou, comencemos por señalar que el conjunto de Julia de una función meromorfa siempre es no vacío. En cambio, el conjunto de Fatou puede ser vacío, como es el caso para e^z , ver [Devaney, 2006].

Por el Teorema de Montel, el conjunto de Julia tiene interior vacío o el conjunto de Fatou es vacío. En éste último caso, $J(f)$ es todo el plano complejo o la esfera de Riemann. Más aún, el conjunto de Julia no tiene puntos aislados, por ser además cerrado y no vacío, entonces $J(f)$ es perfecto.

1.2.1. Dinámica y singularidades

En primer lugar, la relación entre algunos de los dominios periódicos de Fatou y $SV(f)$ está dada por el siguiente

Teorema 9 *Sea f meromorfa y $C = \{U_1, \dots, U_{n-1}\}$ un ciclo periódico de componentes del conjunto de Fatou. Entonces*

1. *Si C es un ciclo de cuencas inmediatas de atracción o de dominios parabólicos, entonces algún U_i contiene un valor singular. Además éste valor no puede ser punto preperiódico y si es periódico, entonces es un valor crítico periódico, es decir, es un punto periódico super atractor.*
2. *Si C es un ciclo de discos de Siegel o de anillos de Herman, entonces la frontera de cualquier U_i está contenida en la cerradura de la unión de las órbitas hacia adelante de todos los valores singulares.*

La relación entre $SV(f)$ y los dominios de Baker y errantes es más complicada. La cuestión en relación a los primeros se abordará más adelante. Respecto a los dominios errantes, la relación

no se da de manera general en las funciones meromorfas. Si $SV(f)$ es finito, entonces la función no tiene dominios errantes. En [Kisaka & Shishikura, 2008] se muestra que existe una función cuyo conjunto de valores singulares está contenido sólo en cuencas de atracción y tiene dominios errantes.

Pasando a otra clasificación de los valores asintóticos. Como ya se había señalado, todos los valores excepcionales de Picard son valores asintóticos. Sin embargo, cero es valor asintótico de $-e^z + 1/z$ y no es excepcional de Picard, ver [Montes de Oca *et al.*, 2014]. Para esta misma función, infinito es valor excepcional de Picard pero no es excepcional dinámico.

Definición 10 *Sea f meromorfa. Un punto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ es excepcional (dinámico) de f si $O^-(z)$ bajo f es un conjunto finito.*

Observación 11 *No es lo mismo un valor excepcional de Picard que un valor excepcional.*

En general, no se usa el apellido de dinámico, en la definición lo usamos para que quede clara la diferencia entre excepcional y excepcional de Picard. Se tiene que todo excepcional es excepcional de Picard. Si f es meromorfa, entonces f tiene a lo más dos valores excepcionales. Evidentemente todo valor omitido es valor excepcional (dinámico). Sin embargo, no todo excepcional de Picard es excepcional, como ocurre con ∞ para la función $-e^z + 1/z$.

La clasificación de los valores asintóticos queda resumida en el diagrama que aparece en la Figura 1-3.

Al ser el conjunto de Julia perfecto, es un conjunto infinito, por lo que tiene siempre infinidad de puntos no excepcionales. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema de Montel.

Teorema 12 *Sea f meromorfa, $z \in J(f)$ no excepcional. Entonces $J(f)$ es la cerradura de $O^-(z)$.*

1.3. Iteración de funciones meromorfas trascendentes

En el estudio de la dinámica de funciones meromorfas es común encontrar propiedades para las funciones en una cierta subfamilia. Es claro que una diferencia importante entre las

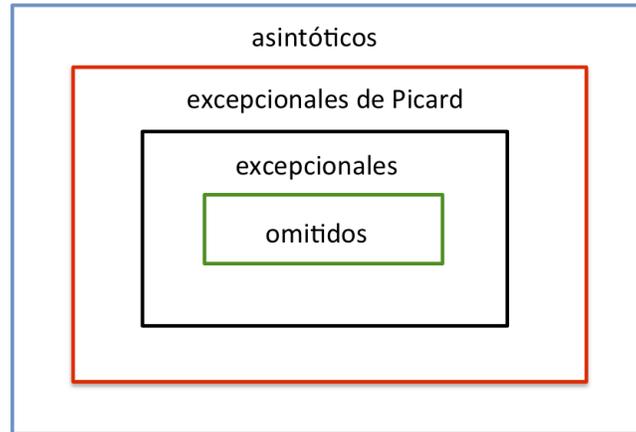


Figura 1-3: Relación entre los diferentes tipos de valores asintóticos de una función meromorfa trascendente.

funciones trascendentes y las racionales es que en el primer caso, en infinito las funciones no están definidas y la función tiene una singularidad.

Una clasificación frecuente en el ámbito dinámico de las funciones trascendentes son las ya mencionadas clases E , P y M , ver Sección 1.1.3.

1. La clase de funciones enteras trascendentes

$$E = \{f \text{ es meromorfa trascendente tal que } \infty \text{ es valor omitido}\}.$$

2. La clase de los endomorfismos del plano perforado

$$P = \{f \text{ es meromorfa trascendente tal que } \infty \text{ es valor excepcional no omitido}\}.$$

3. La clase de funciones meromorfas trascendentes generales

$$M = \{f \text{ es meromorfa trascendente tal que } \infty \text{ no es valor excepcional}\}.$$

Desde un punto de vista dinámico, esta clasificación de las funciones meromorfas trascendentes queda equivalentemente definida en términos de la órbita hacia atrás de infinito. La

cardinalidad de $O^-(\infty)$ bajo f es uno, dos o infinito si y sólo si f está en E , P y M respectivamente. Nótese que sólo en el caso de las funciones en la clase M , el conjunto de Julia es la cerradura de la órbita hacia atrás de infinito.

Otras familias aparecen con frecuencia, por ejemplo la clase S es la de las funciones meromorfas cuyo conjunto de valores singulares $SV(f)$ es finito, como en el caso de las funciones racionales y e^z . Las funciones en S no tienen dominios errantes ni de Baker.

La clase B conocida como de Eremenko-Lyubich es la de funciones meromorfas con $SV(f)$ acotado. Evidentemente $S \subset B$, el caso del ejemplo clásico $f_{-1,1}(z) = -e^z + 1/z$ está en $B - S$. Mientras que las funciones en $E \cap B$ no tienen dominios de Baker, el ejemplo clásico muestra que las funciones en $M \cap B$ sí pueden tenerlos.

Se sabe de diversas clases de funciones que no tienen dominios errantes, ver [Bergweiler, 1993], pero a ninguna de ellas pertenecen las funciones $f_{\lambda,\mu}$. Sin embargo, los llamados dominios errantes de Baker (ver [Rippon & Stallard, 2007]) requieren la ausencia de valores asintóticos finitos, ver [Nayak & Zheng, 2012].

Definición 13 *Sea U_0 un dominio errante de f . Si para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $U_N = f^N(U_0)$ es acotado, múltiplemente conexo, rodea al cero y U_n tiende a infinito si n tiende a infinito. Entonces U_0 es un dominio errante de Baker.*

Teorema 14 *Si $f \in M$ y tiene un valor asintótico finito, entonces f no tiene dominios errantes de Baker.*

Finalmente, hay algunas propiedades que cumplen las funciones meromorfas trascendentes con una cantidad finita de polos. Una de ellas es que el conjunto de Julia no puede ser totalmente desconexo, ver [Domínguez, 1998].

1.3.1. Dominios de Baker

El primer ejemplo de un dominio de indeterminación, como se conocían a los dominios de Baker, fue dado por Fatou en [1919] para la función $z + 1 + e^{-z}$, Figura 1-4. Un ciclo de dominios de Baker de periodo dos es el del ejemplo clásico $-e^z + 1/z$ dado por Baker, Kotus y Lü en [1991], Figura 1-5. En [Morosawa *et al.*, 2000] se da un ejemplo de un ciclo de periodo dos con la función entera $-z(2 + e^{-z^2})$, Figura 1-6.

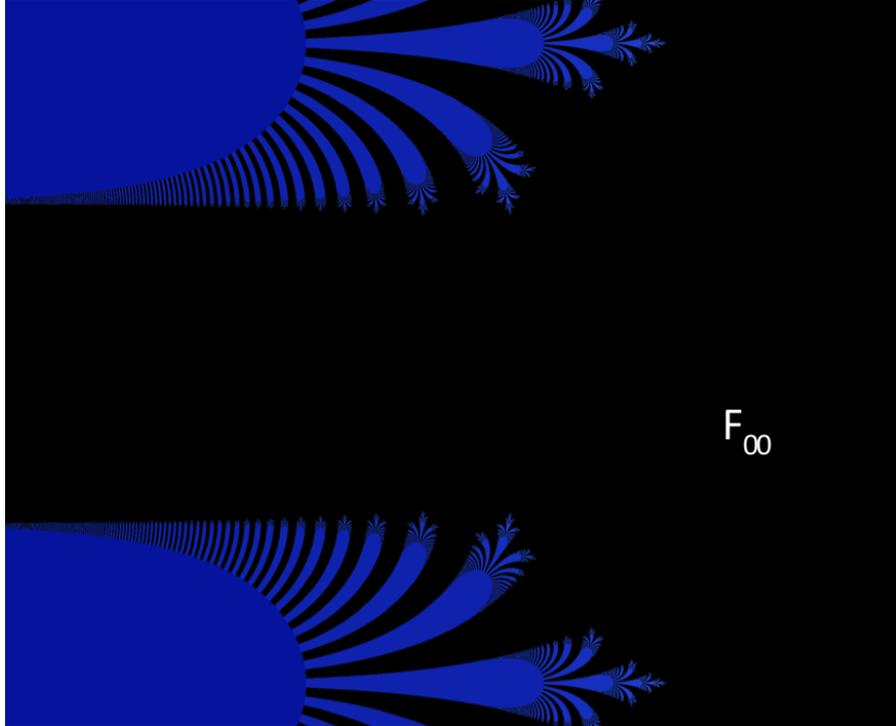


Figura 1-4: La función $z + 1 + e^{-z}$ tiene un dominio de Baker invariante F_∞ .

Por definición, el punto de absorción z_0 de un dominio de Baker debe ser ∞ o un prepolo y siempre al menos uno de ellos debe ser ∞ , por lo que al menos uno de los dominios de Baker es no acotado. Las funciones enteras tienen al infinito siempre como el punto de absorción de los dominios de Baker, por lo que siempre son no acotados.

Un dominio de Baker U_1 de periodo n contiene curvas invariantes bajo f^n . Al ser invariantes necesitan aterrizar en el punto de absorción z_1 . Si $z_1 = \infty$, entonces $z_2 = f(z_1)$ es valor asintótico. De hecho toda función meromorfa con dominios de Baker tiene a infinito como valor asintótico.

El conjunto postsingular de f , denotado por $SV^+(f)$, es la órbita hacia adelante de $SV(f)$. Como veremos, no hay una relación entre las singularidades de la inversa y los dominios de Baker como lo establece el Teorema 9 con el resto de los dominios periódicos.

La función $z - 1 + e^z$ es una variante del ejemplo dado por Fatou, su dominio de Baker contiene a todos los valores singulares de f , ver [Lauber, 2004]. La función $z + e^{-z}$ dada por Baker y Domínguez en [1999], tiene una infinidad de dominios de Baker, cada uno con sólo

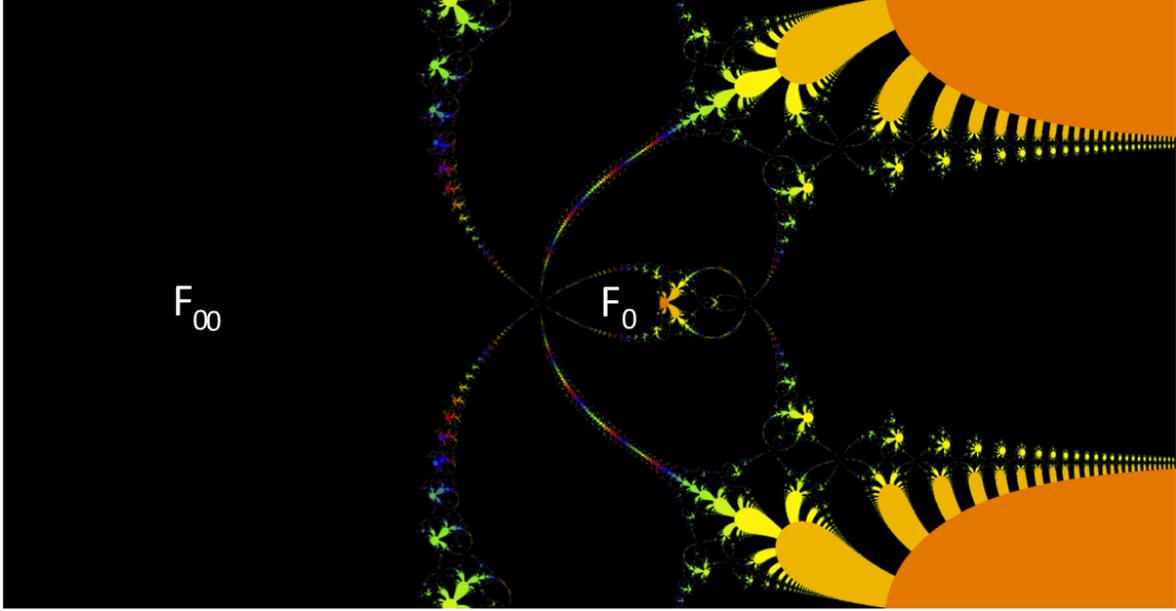


Figura 1-5: El ejemplo clásico $f_{-1,1} = -e^z + 1/z$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos $\{F_{\infty}, F_0\}$ con puntos de absorción ∞ y cero respectivamente.

un valor singular. En cambio, la función $z + e^z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\pi i$ tiene un dominio de Baker U sin valores singulares y su frontera está contenida en la cerradura de $SV^+(f)$, ver [Herman, 1985]. Finalmente Bergweiler en [1995] mostró que la función $2 - \log 2 + 2z - e^z$ tiene un dominio de Baker U tal que la distancia de U a $SV^+(f)$ es positiva, ver [Bergweiler, 1995].

El siguiente resultado se sigue de la prueba del Teorema A en [Rippon & Stallard, 1999].

Corolario 15 *Sea f una función meromorfa trascendente con una cantidad finita de polos y tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo p , entonces $SV(f^p)$ es no acotado.*

Para más información acerca de cómo se distribuyen los valores singulares de f^p , ver [Rippon & Stallard, 2006].

Los dominios de Baker se pueden ver como conjuntos donde las iteraciones de f tienen un comportamiento eventualmente casi afín, veamos a qué nos referimos con esto.

La siguiente es una definición generalizada de dominio absorbente dada en [König, 1999].

Definición 16 *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio de una función holomorfa. Decimos que un dominio $W \subset U$ es absorbente o fundamental para f si: 1) es invariante hacia adelante y, 2) todo*

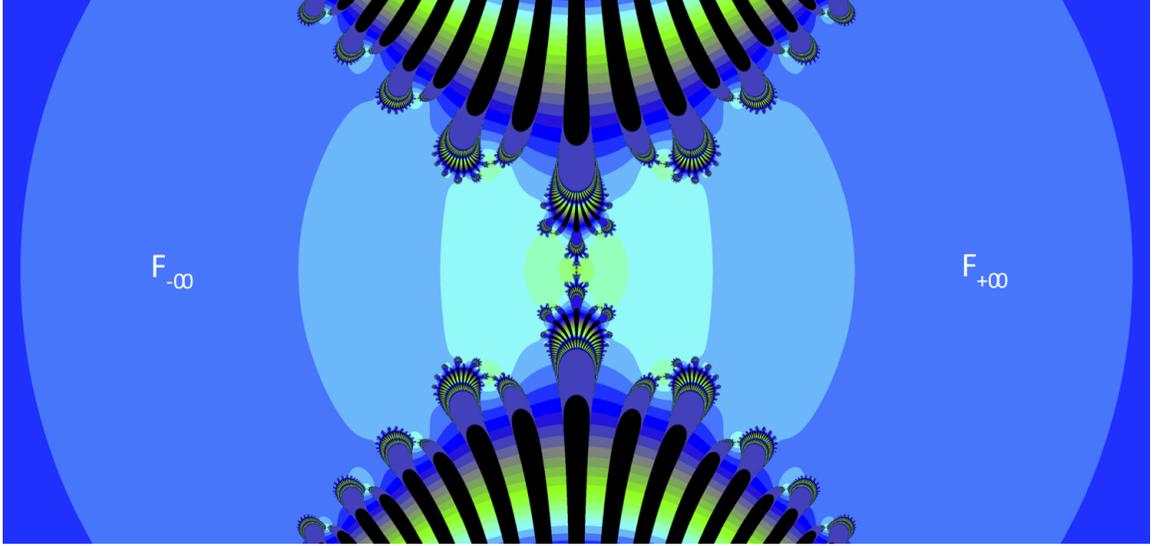


Figura 1-6: La función $-z(2 + e^{-z^2})$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos $\{F_{-\infty}, F_{+\infty}\}$. Al ser la función entera, ∞ es el punto de absorción de ambos dominios.

compacto K en U eventualmente está contenido en W , es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(K) \subset W$.

Esta generalización nos permite formular la siguiente propiedad para los dominios absorbentes sin necesidad de usar otro nombre. Para ver más detalles del siguiente resultado, ver [Barański *et al.*, 2012].

Teorema 17 *Sea f meromorfa trascendente con U un dominio de Baker de periodo n . Sean $z \in U$ y $\{r_n\}$ una sucesión de números positivos que converge a infinito. Entonces, U tiene un dominio absorbente para f^n tal que:*

1. $W \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_U((f^n)^k(z), r_k)$, donde $\mathcal{D}_U(w, r)$ es el disco de radio r con centro w con la métrica hiperbólica en U ;
2. $\overline{W} - \{z_0\} \subset U$, donde z_0 es el punto absorbente de U ;
3. $(f^n)^k(\overline{W} - \{z_0\}) = \overline{(f^n)^k(W)} - \{z_0\} \subset (f^n)^{k-1}(W)$ para todo $k > 0$ y,
4. $\bigcap_{k=1}^{\infty} (f^n)^k(\overline{W} - \{z_0\}) = \emptyset$.

Nótese que en este resultado no se garantiza que W sea simplemente conexo.

Definición 18 Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$. La terna (W, φ, T) es una conjugación conforme de f en U , que denotamos por $f \sim T$, si y sólo si se cumple que: 1) $W \subset U$ es un dominio absorbente para f ; 2) $\varphi : W \rightarrow \Omega$, con $\Omega \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, φ es holomorfa e inyectiva en W ; 3) T es una transformación de Möbius de Ω en sí mismo, $\varphi(W)$ es absorbente para T y, 4) φ es una conjugación entre f y T .

En [König, 1999] se muestra que existen funciones que no admiten dominios absorbentes que sean simplemente conexos, aunque este no es el caso si f tiene una cantidad finita de polos. Si W es parte de una conjugación conforme, entonces es simplemente conexo. T es llamada la función interna de f asociada a W .

Teorema 19 Sea f una función meromorfa con una cantidad finita de polos. Si U es un dominio de Baker de periodo n , entonces existe una conjugación conforme de f^n en U .

Finalmente, un dominio de Baker U se clasifica dependiendo del comportamiento de la función interna de f en W . U puede ser parabólico, doblemente parabólico o hiperbólico, Figura 1-7. La clasificación está dada para el caso en que el dominio de Baker es regular. Esto ocurre si f es propia en U , lo que queda garantizado si U no tiene valores asintóticos. En tal caso T se puede extender a una vecindad de $\varphi(z_0)$, donde z_0 es el punto absorbente de U . Si se normaliza la conjugación de modo que $\varphi(z_0) = 1$, entonces T es única salvo una transformación de Möbius que deja fijo al disco unitario. Entonces $T'(1)$ está bien definida, ver [Fagella & Henriksen, 2006] para más detalles.

Definición 20 Sea U un dominio de Baker regular de f entera, W un dominio absorbente y T la función interna asociada a W . Entonces ocurre alguna de las siguientes opciones:

1. Si $0 < T'(\varphi(z_0)) < 1$, en tal caso U se llama hiperbólico.
2. Si $T(z) = z \pm ia(z-1)^2 + \mathcal{O}((z-1)^3)$ para algún $a > 0$, entonces U es simple parabólico.
3. Si $T(z) = z - a(z-1)^3 + \mathcal{O}((z-1)^4)$ para algún $a > 0$, entonces U es doblemente parabólico. En este caso f en U es un casi-polinomio de grado dos.



Figura 1-7: La clasificación de un dominio de Baker está dada por el comportamiento de la función interna de f en su dominio absorbente. Imagen tomada de [Fagella & Henriksen, 2006].

El uso de esta definición para la clasificación de los dominios de Baker resulta complicada al hacer uso de las funciones internas. Una caracterización equivalente usa la idea de pétalos invariantes en infinito. Dado que en [Fagella & Henriksen, 2006] se trabajan funciones enteras, los dominios de Baker siempre tienen a ∞ como punto absorbente.

Definición 21 *Un dominio V es llamado pétalo invariante en infinito si: 1) V es simplemente conexo y V es no acotado; 2) la frontera de V en \mathbb{C} es una curva simple y, 3) f es un isomorfismo conforme en V sobre V .*

Teorema 22 *Sea U un dominio de Baker regular de f . Entonces:*

1. *U es hiperbólico si y sólo si U no contiene la cerradura de V en \mathbb{C} , donde V es un pétalo invariante en infinito;*
2. *U es simple parabólico si y sólo si U contiene la cerradura de un pétalo en infinito V y cualquier otro pétalo tiene intersección no vacía con V ;*
3. *U es doblemente parabólico si y sólo si contiene la cerradura de dos pétalos invariantes en infinito ajenos.*

Fagella y Henriksen dan la clasificación para los siguientes ejemplos. La función $z + 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} z$ tiene un dominio de Baker invariante univalente hiperbólico; el ejemplo de Herman $z + e^z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\pi i$ tiene un dominio de Baker invariante, univalente y simple parabólico; los dominios de

Baker del ejemplo de Baker y Domínguez $z + e^{-z}$ son doblemente parabólicos. Ver Figuras 1-8, 1-9 y 1-10.

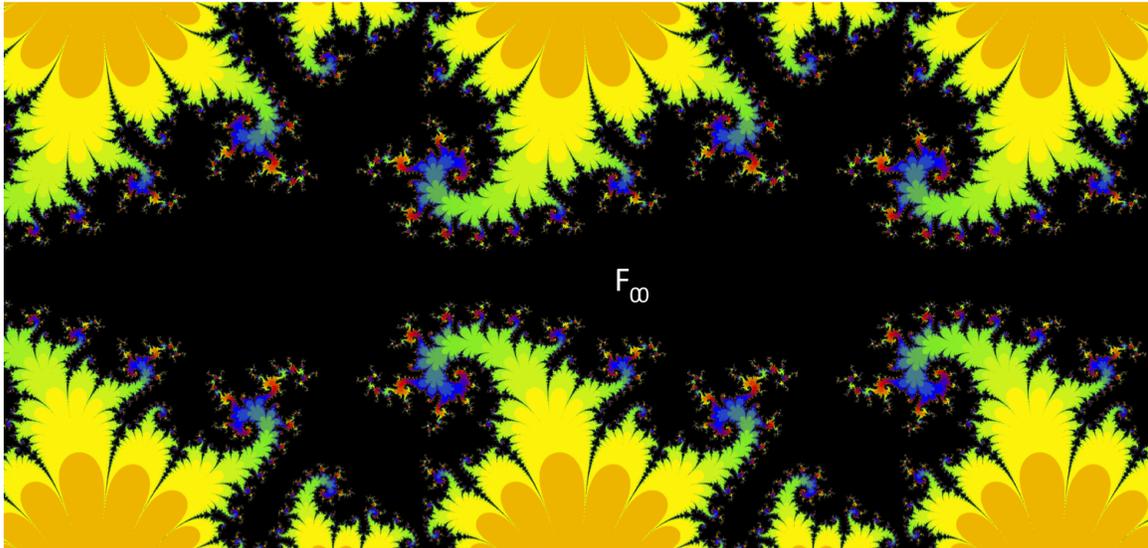


Figura 1-8: La función $z + 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} z$ tiene un dominio de Baker F_∞ invariante, univalente e hiperbólico.

Para una revisión más detallada acerca de los dominios de Baker, ver el artículo “Baker domains” publicado en [Rippon & Stallard, 2008].

1.3.2. Conectividad en el conjunto de Fatou

Si bien los dominios preperiódicos no periódicos pueden tener cualquier conectividad, [Baker *et al.*, 1991], para el caso de los dominios periódicos no se tiene tanta libertad, como lo establece el siguiente Teorema, ver [Bolsch, 1999].

Teorema 23 *Si f es meromorfa, la conectividad de sus dominios periódicos del conjunto de Fatou es 1, 2 o ∞ .*

Si U es invariante, entonces la conectividad de U es 2 sólo si es un anillo de Herman. No se sabe si esto ocurre en el caso en que el periodo de U es mayor a uno, ver [Bolsch, 1999].

El primer ejemplo de una función meromorfa trascendente con un dominio de Baker de conectividad infinita fue dado por Domínguez en [1998]. Como consecuencia de su Teorema A se tiene el siguiente Corolario.



Figura 1-9: La función $z + e^z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\pi i$ tiene un dominio de Baker F_∞ invariante, univalente y simple parabólico.

Corolario 24 *Si f tiene un dominio de Baker de conectividad infinita, entonces las componentes de un solo punto del conjunto de Julia son densas en $J(f)$.*

Además, si f es una función meromorfa trascendente con un dominio de Baker múltiplemente conexo, entonces f tiene al menos un punto fijo débilmente repulsor ($f'(z) = 1$ o z es repulsor), ver [Barański *et al.*, 2012].

Los dominios preperiódicos del conjunto de Fatou para una función entera trascendente siempre son simplemente conexos. Si $f \in P$, entonces f no tienen anillos de Herman, [Domínguez, 1998]. Por lo que sólo las funciones en M pueden tener anillos de Herman. Además, las funciones en P sólo pueden tener a lo más una componente del conjunto de Fatou múltiplemente conexa y tiene que ser doblemente conexa.

1.3.3. Conjunto de escape

El conjunto de escape $I(f)$ es el conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a infinito y no son prepolos, ver [Domínguez, 1998].



Figura 1-10: La función $z + e^{-z}$ tiene una infinidad de dominios de Baker invariantes y doblemente parabólicos, F_{∞} es uno de ellos.

Teorema 25 *Para toda función f meromorfa trascendente $J(f) = \partial I(f)$ y $J(f) \cap I(f) \neq \emptyset$.*

Este resultado resulta útil para el uso de herramienta computacional, pues muchos planos dinámicos para funciones meromorfas trascendentes se obtienen al aproximar los puntos del conjunto de Julia con los puntos cuyas normas eventualmente rebasan un cierto valor, que se conoce como valor de escape.

En [Rottenfuser *et al.*, 2009] el siguiente resultado es presentado. Como veremos más adelante, este resultado explica algunos aspectos que aparecen en el conjunto de Julia que se aprecian en los planos dinámicos.

Teorema 26 *Sea f meromorfa de orden finito.*

1. *Si f tiene una cantidad finita de polos y $f \in B$, entonces para todo $z \in I(f)$ existe una curva que conecta a z con ∞ o con un prepolo y está contenida en $I(f)$.*
2. *Si f tiene una singularidad logarítmica sobre ∞ . Entonces $J(f) \cap I(f)$ contiene una cantidad no numerable de curvas a infinito.*

1.4. Espacio de parámetros

Si tenemos una función meromorfa f , es de interés saber si ciertos aspectos dinámicos se preservan al perturbarla. Las perturbaciones pueden ser de diversa naturaleza. Por ejemplo, dado $c \in \mathbb{C}$, la función $z^2 + c$ es una perturbación de la función z^2 ; la función λe^z es una perturbación de e^z . En ambos ejemplos la perturbación está dada por un parámetro complejo.

Estas perturbaciones nos inducen dos familias de funciones, la cuadrática $Q_c(z) = z^2 + c$ y la exponencial $E_\lambda(z) = \lambda e^z$, cada familia está representada por un plano complejo, llamado *plano de parámetros*. En general, el espacio de parámetros es el conjunto que identifica a las funciones de una familia parametrizada. Estos espacios resultan interesantes cuando se identifican conjuntos de parámetros en ellos para los cuales las funciones de la familia cumplen ciertas propiedades dinámicas.

Por ejemplo, el conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} de la familia cuadrática es el conjunto de parámetros para los cuales la órbita hacia adelante del cero es acotada, ver Figura 1-11.

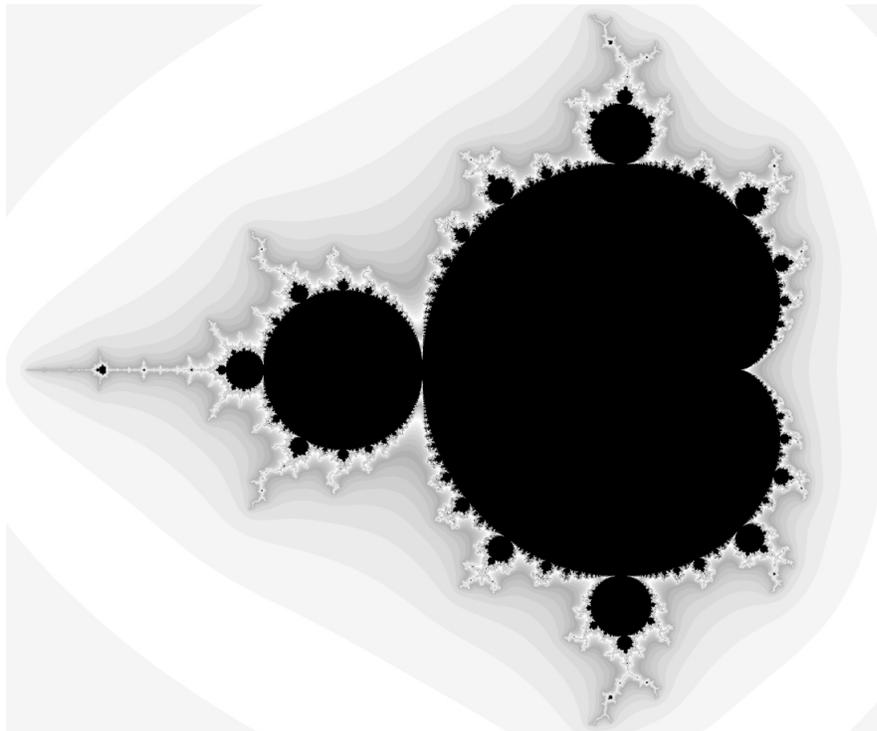


Figura 1-11: El conjunto de Mandelbrot.

En el caso de la familia cuadrática, como en muchos otros, el plano de parámetros puede dar mucha más información. Por ejemplo, el interior de la región delimitada por la cardioide en el centro del conjunto de Mandelbrot, corresponde a los parámetros para los cuales Q_c tiene un punto fijo atractor.

Definición 27 Sea $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \{f_e : e \in \mathcal{E}\}$ una familia de funciones meromorfas definida por un espacio de parámetros \mathcal{E} . El conjunto de atracción de periodo n de la familia $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ es

$$\mathcal{H}_n = \{e \in \mathcal{E} : f_e \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}} \text{ tiene una órbita periódica atractora de periodo } n\}.$$

No se sabe si el conjunto de Mandelbrot es la cerradura de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$, ver [Blé & Valdez, 2012]. Si tomamos un parámetro c_0 en la cerradura de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $c \in B_{\varepsilon}(c_0)$ tal que Q_c y Q_{c_0} tienen puntos periódicos de distinto comportamiento.

La frontera del conjunto de Mandelbrot se llama lugar de bifurcación de la familia cuadrática. Esto significa que si $c \in \partial\mathcal{M}$, entonces la dinámica de Q_c se ve alterada de manera significativa con pequeñas perturbaciones.

En el caso de la familia exponencial, la frontera del conjunto de parámetros para los cuales la órbita de cero es acotada es el lugar de las bifurcaciones de la familia, ver Figura 1-12.

Pregunta 28 ¿El lugar de las bifurcaciones de la familia exponencial es la frontera de la unión de todos los dominios de atracción?

Las familias cuadráticas y exponencial Q_c y E_{λ} tienen la ventaja de que sólo tienen un valor singular y es el cero para todas las funciones. Esta situación permite identificar de manera más sencilla el conjunto donde ocurren las bifurcaciones.

Como es bien sabido, el conjunto de Mandelbrot nos arroja más información sobre las funciones Q_c : $J(Q_c)$ es conexo si y sólo si $c \in \mathcal{M}$. Si además el conjunto de Julia es desconexo, es un conjunto de Cantor.

En el caso de la familia exponencial, si la órbita del cero es no acotada, entonces $J(E_{\lambda}) = \mathbb{C}$. Este tipo de parámetros forman un conjunto denso en el lugar de bifurcaciones de la familia exponencial.

Ver [Devaney, 2006] y para más información sobre estos planos de parámetros.

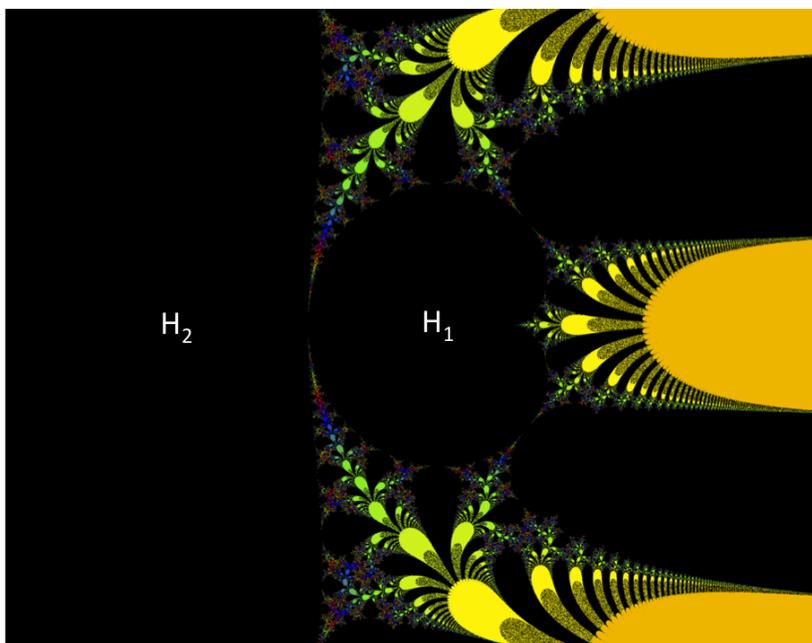


Figura 1-12: Mapa de parámetros de la familia E_λ , en color la aproximación del lugar de bifurcación.

Tenemos entonces que los espacios de parámetros nos arrojan información sobre cómo es la dinámica de las funciones, la cuestión es saber leerlos, como ocurre con los mapas. De ahí la conveniencia de llamar también mapa de parámetros al espacio de parámetros en donde se identifican cierto tipo de conjuntos.

Observación 29 *Usaremos indistintamente espacio de parámetros y mapa de parámetros de una familia de funciones. Cuando el parámetro pertenece a \mathbb{C} o a \mathbb{R}^2 diremos plano de parámetros.*

1.5. Familia exponencial

El interés por estudiar la iteración de funciones exponenciales viene de algunos siglos atrás. Desde los tiempos de Daniel Bernoulli había inquietud por saber soluciones a ecuaciones reales de la forma $x^y = y^x$. Para dar una fórmula que describiera estas soluciones, se requiere analizar la iteración de ciertas exponenciales. Estos y otros problemas relacionados aparecen en el estudio de reacciones de encimas en bioquímica, ver [Knoebel, 1981].

Al tomar $f(x) = y^x$, se tiene por ejemplo que $f^3(x) = y^{y^{y^x}}$. Si $y = x$, entonces se tiene el número $x^{x^{x^x}}$. Por lo que la órbita si converge, lo hace a un número que podemos expresar como $x^{x^{x^{\dots}}}$. Euler probó que la convergencia se da si $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$ y diverge para cualquier otro valor de x positivo. El estudio de este problema para el caso complejo se remonta a un artículo de Carlsson en 1907, matemático sueco.

Como se sabe, los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia se centraron en en el caso de funciones racionales, aunque posteriormente Fatou extendió algunos resultados al caso de funciones enteras trascendentes. Como ya mencionamos, en [Fatou, 1919] aparece una función exponencial para dar el primer ejemplo de lo que actualmente conocemos como dominio de Baker.

Desde entonces muchos autores han contribuido al estudio específico de la dinámica de diferentes funciones exponenciales complejas. El caso de la familia $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ es el más estudiado, ver [Devaney, 2006] para un panorama acerca de esta familia.

En la dinámica de la familia E_λ hay dos propiedades que queremos resaltar: 1) la explosión del conjunto de Julia al pasar de un conjunto denso en ninguna parte a ser todo el plano y, 2) conjuntos invariantes con propiedades topológicas y dinámicas sorprendentes.

Respecto al primer aspecto, Misiurewicz dio una demostración de que $J(e^z) = \mathbb{C}$, esta prueba resulta interesante pues emplea herramientas básicas del análisis complejo, ver [Misiurewicz, 1981]. Posteriormente se tiene una demostración empleando modernos resultados que simplifican enormemente el trabajo, ver [Bergweiler, 1993].

En relación al segundo aspecto, aparecen dos conjuntos invariantes con propiedades topológicas y dinámicas muy interesantes. Uno de ellos es para el caso de la función e^z , cuando el conjunto de Julia es todo el plano. Este conjunto invariante al ser compactificado apropiadamente, resulta un continuo indescomponible. Lo mismo ocurre para otros parámetros.

El otro caso es el conjunto de Julia de $E_{1/e}$, cuyo estudio deviene en la definición de ramillete de Cantor, ver Figura 1-13. Este tipo de conjunto y otros similares aparecen frecuentemente en la iteración de funciones meromorfas trascendentes.

La definición de ramillete de Cantor se debe a Aarts y Oversteegen en [1993].

Definición 30 *Un pincel recto P es un subconjunto de $[0, \infty) \times \mathcal{N}$ cerrado en \mathbb{R}^2 , donde \mathcal{N} es un conjunto denso de irracionales y cumple las siguientes propiedades:*

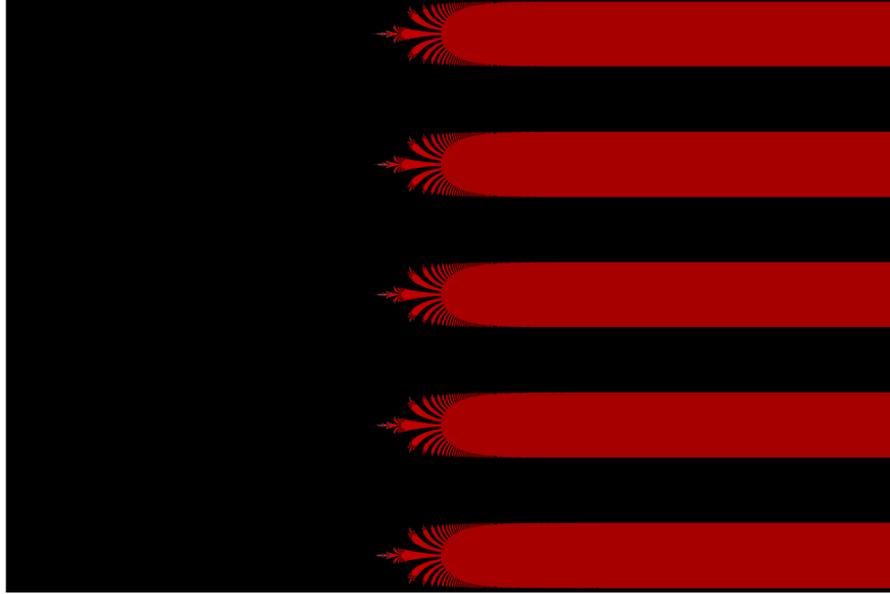


Figura 1-13: Plano dinámico de $E_{1/e}$, en rojo aparece su conjunto de Julia, un ramillete de Cantor.

1. **Cabellosidad.** Para todo $(x, y) \in P$ existe $x_y \in [0, \infty)$ tal que $x_y \leq x$ y $(t, y) \in P$ si y sólo si $x_y \leq t$. Entonces $c_y = \{(t, y) : x_y \leq t\} \subset P$ y a esta curva la llamamos cabello y el punto $e_y = (x_y, y)$ es su extremo.
2. **Densidad.** Cualquier elemento $(t, y) \in P$ es punto de acumulación de los extremos de los cabellos. Además existe $\{e_n\}$ una sucesión de extremos tales que sus segundas coordenadas convergen por arriba a y y otra que lo hace por abajo.

Definición 31 Un conjunto R_C es un ramillete de Cantor si es homeomorfo a un pincel recto.

A continuación enlistamos algunas de las propiedades del conjunto de Julia para algunas funciones de la familia exponencial cuando es un ramillete de Cantor.

1. Los cabellos son curvas C^∞ , [Viana, 1998].
2. Los puntos periódicos repulsores son extremos de los cabellos.
3. Salvo ciertos puntos extremos, los puntos en los cabellos pertenecen al conjunto de escape.

4. Los puntos en los cabellos que no son extremos son puntos enterrados en el conjunto de Julia. Es decir, no existe una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(1)$ es uno de estos puntos y $\gamma([0, 1))$ esté contenido en el conjunto de Fatou. A los puntos enterrados también se les llama inaccesibles desde el complemento, [Devaney, 1999].
5. El conjunto de extremos y el infinito forman un conjunto conexo en la esfera de Riemann, pero el conjunto de extremos es totalmente desconexo, [Mayer, 1990].
6. La medida de Lebesgue del conjunto de Julia es cero, [McMullen, 1987].
7. La dimensión de Hausdorff del conjunto de cabellos sin los extremos es uno, [McMullen, 1987]. Pero la del conjunto de extremos es dos, [Karpíńska, 2003].
8. Algunos aspectos de la dinámica de los cabellos se modela con dinámica simbólica tomando infinitud de símbolos y la función corrimiento, [Devaney & Krych, 1984].

Por definición, los cabellos de los ramilletes de Cantor son curvas ajenas, sin embargo ocurre que los extremos de estas curvas se pueden juntar a través de un fenómeno llamado *trasplante de cabellos*. Esto ocurre para el caso de $-e^{z+1}$, en el que dos curvas en el conjunto de escape aterrizan en un punto fijo repulsor formando la *unión de dos cabellos*. Ver Figura 1-14 y [Devaney, 2006] para más detalles.

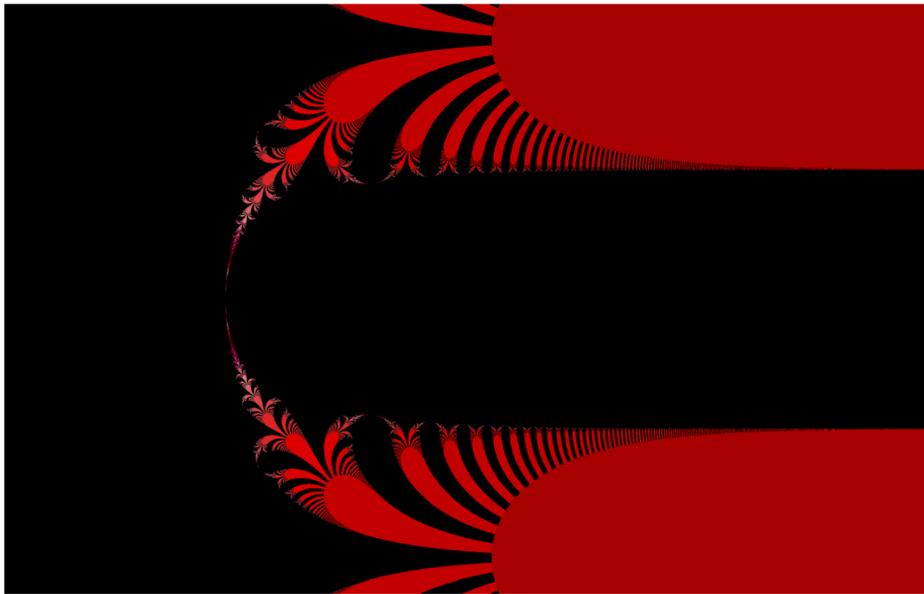


Figura 1-14: El conjunto de Julia de E_{-3} tiene un par de cabellos trasplantados.

Capítulo 2

RESULTADOS

En la primera parte de este capítulo presentamos las propiedades para todas las funciones $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$.

En la segunda parte, nos enfocamos en la existencia de ciclos de dominios de Baker de periodo dos para algunas de estas funciones y propiedades relacionadas con estos dominios.

En la tercera sección abordamos algunos aspectos del espacio de parámetros. Concluimos el capítulo con las preguntas y conjeturas que han surgido en el camino.

2.1. Aspectos generales

Así como en [Devaney *et al.*, 2008] a una función como $z^n + \lambda/z^n$ se dice que es una *perturbación singular* de z^n , podemos pensar a la función $f_{\lambda,\mu}$ como una perturbación singular de E_λ .

Es inmediato de las definiciones que $f_{\lambda,\mu}$ es una función meromorfa trascendente, de orden uno, con una singularidad esencial en ∞ y un único polo en cero.

Otros aspectos en relación a los valores singulares y las singularidades que no son tan inmediatos quedan recogidos en los siguientes resultados.

Primero identificaremos propiedades de $SV(f_{\lambda,\mu})$.

Teorema 32 *Valores singulares*

La función $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Los valores asintóticos son cero e infinito.
2. ∞ es el único valor excepcional de Picard.
3. Los conjuntos de puntos y valores críticos son infinitos numerables, que denotaremos por las sucesiones $\{p_n^c\}$ y $\{v_n^c\}$ respectivamente.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(p_n^c) = -\infty$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{v_n^c\} = 0$.

Ahora pasemos a la clasificación de las singularidades.

Teorema 33 Singularidades

La función $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Tiene una singularidad directa en infinito sobre infinito y es logarítmica.
2. Tiene una singularidad indirecta en infinito sobre cero.

Recordemos que M es la clase de funciones meromorfas trascendentes con al menos un polo no omitido y B es la clase Eremenko-Lyubich de funciones meromorfas con $SV(f)$ acotado.

Corolario 34 $f_{\lambda,\mu} \in M \cap B$ y $SV(f_{\lambda,\mu})$ es infinito con un único punto de acumulación en cero.

Corolario 35 $f_{\lambda,\mu}$ no tiene valores excepcionales.

Corolario 36 $f_{\lambda,\mu}$ no tiene dominios errantes de Baker.

Tenemos que el conjunto de Julia de $f_{\lambda,\mu}$ no es totalmente desconexo al tener un único polo. Además se cumple el Teorema 26, por lo que en ∞ aterrizan una infinidad no numerable de curvas del conjunto de escape que llamaremos cabellos contenidas en el conjunto de Julia. Al conjunto de estas curvas junto con infinito le llamaremos el *ramillete de escape en infinito*, o simplemente el ramillete de infinito y denotaremos por R_∞ .

Observación 37 Es importante no confundir los ramilletes que hemos definido aquí con los ramilletes de Cantor, cuya definición está en la sección 1.5.

Si p es un prepolo, entonces en p aterrizan curvas del conjunto de escape que son preimágenes de los cabellos en R_∞ . A tales curvas junto con p lo llamaremos el *ramillete de escape en p* y denotaremos por R_p . Notemos que los ramilletes que aterrizan en polos pueden ser sencillos o dobles. Por ejemplo, el cero es un polo de orden uno, entonces tiene asociado un ramillete sencillo en el sentido de que localmente la función es inyectiva. Pero en el caso de $f_{-1,-1/e}$, el -1 es un prepolo y un punto crítico, por lo que R_{-1} es un ramillete doble por ser dos a uno, ver Figura 2-1.

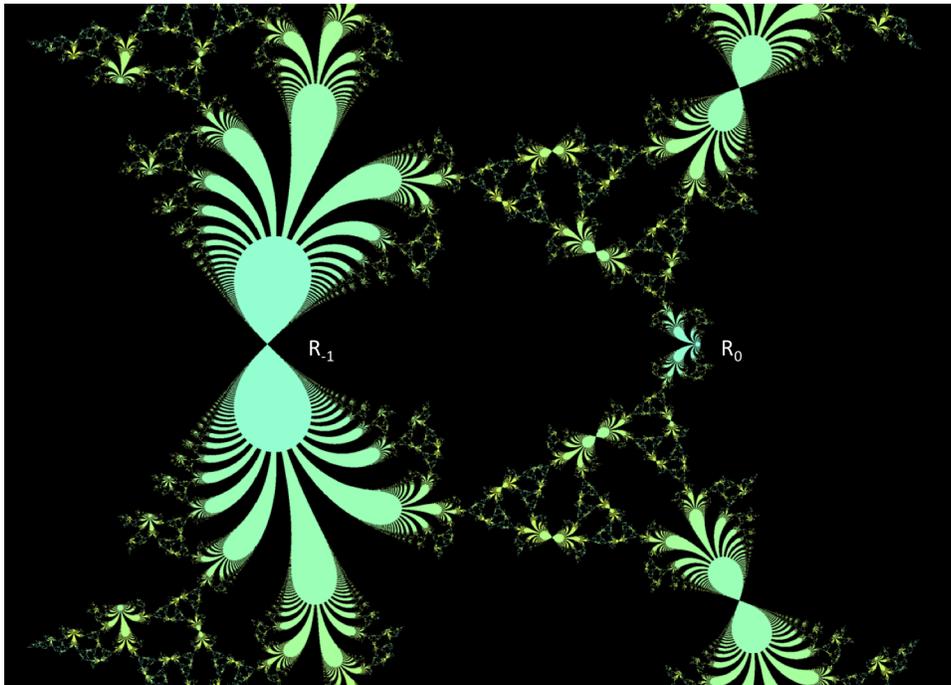


Figura 2-1: Plano dinámico de $f_{-1,-1/e}$, el ramillete R_{-1} es doble y R_0 es sencillo.

Observación 38 *Sólo si $\lambda = e\mu$, entonces $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto crítico en -1 y cero es el valor crítico correspondiente. Es decir, -1 es prepolo y punto crítico.*

Dado que el conjunto de prepolos es denso en el conjunto de Julia, entonces por el Teorema de Montel en toda vecindad de un punto del conjunto de Julia existe una componente conexa de la preimagen de R_∞ . A esta propiedad le llamaremos *densidad de los ramilletes* en el conjunto de Julia.

Lo anterior nos permite comprender algunos aspectos del plano dinámico de las funciones. En la representación de la computadora, hay prepolos marcados por discos de color y se distinguen los ramilletes correspondientes, ver Figura 2-2.

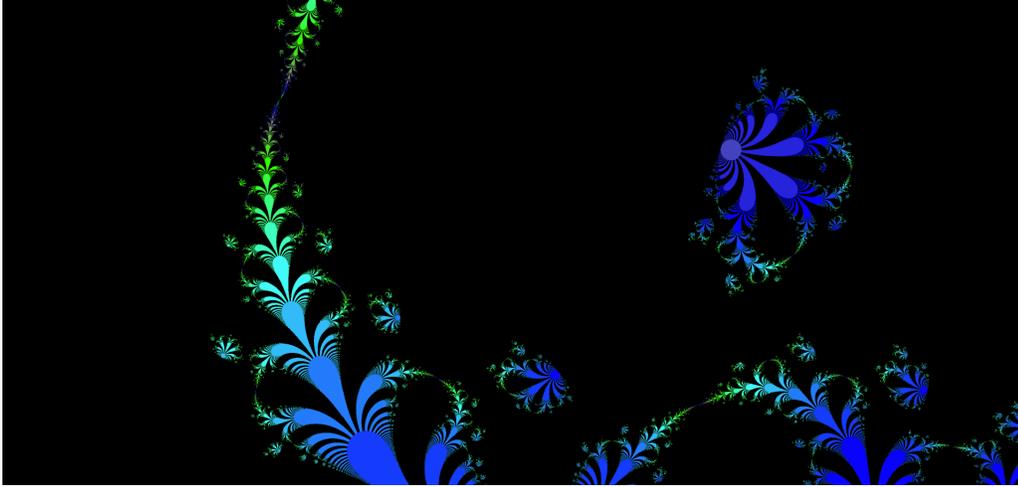


Figura 2-2: Plano dinámico de $f_{-4,3-i}$, los discos de color tienen un prepolo adonde aterrizan los cabellos de los ramilletes.

Podemos pensar que cada ramillete es una célula que se junta con otras para formar diferentes estructuras en el conjunto de Julia, ver Figura 2-3.

Podemos notar que al cambiar los parámetros, no sólo cambian las estructuras formadas por los ramilletes, sino que los mismos ramilletes se ven diferentes. Estas observaciones las podemos notar al comparar los ramilletes en cero y las estructuras que generan los ramilletes en Figuras 2-4 y 2-5.

El siguiente resultado nos describe la distribución de las preimágenes del polo.

Teorema 39 *El conjunto de preimágenes de cero bajo $f_{\lambda,\mu}$ es infinito numerable y no acotado. Si lo denotamos por la sucesión $\{p_n\}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(p_n) = -\infty$.*

Como mencionamos anteriormente, las funciones meromorfas pueden no tener puntos fijos. En contraste tenemos el siguiente resultado.

Teorema 40 *$f_{\lambda,\mu}$ tiene una infinidad de puntos fijos contenidos en un semiplano derecho, cuya parte real tiende a infinito. Además, todos son repulsores salvo una cantidad finita.*

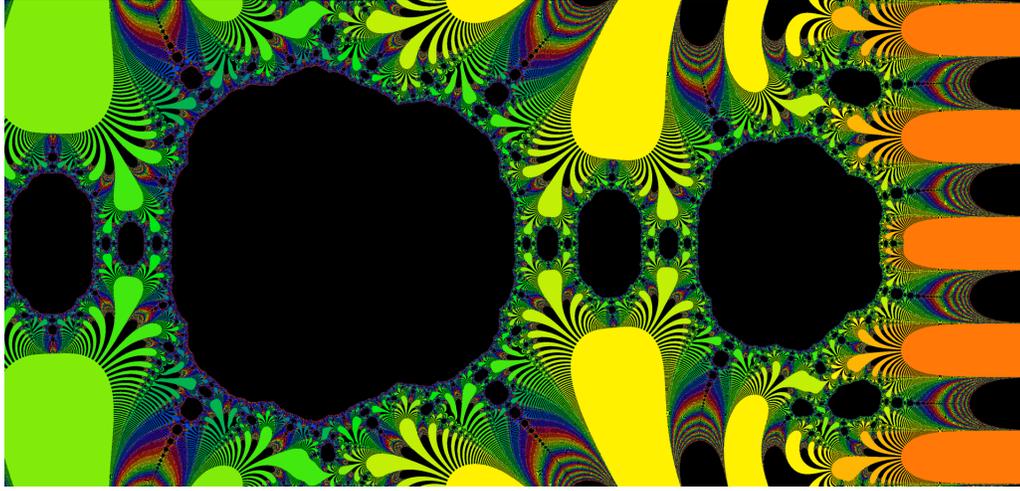


Figura 2-3: Plano dinámico de $f_{47,18}$, los ramilletes forman diferentes estructuras.

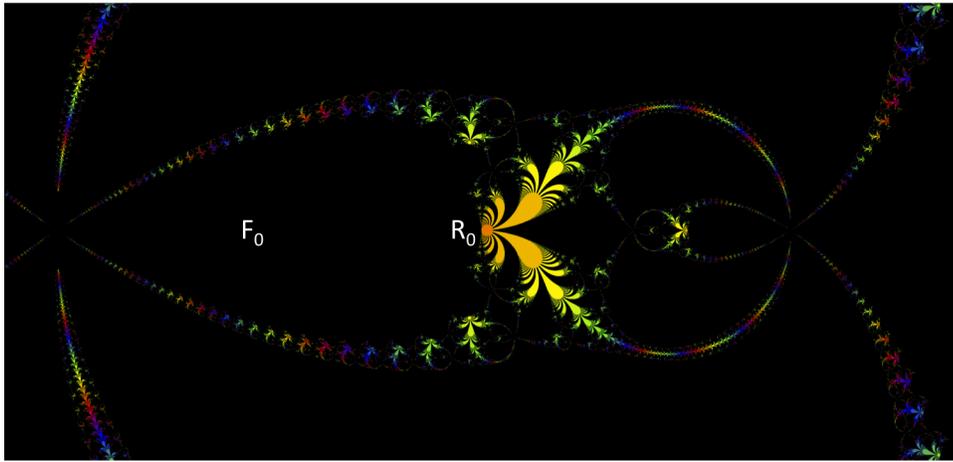


Figura 2-4: Plano dinámico del ejemplo clásico $f_{-1,1}$. Los ramilletes forman una estructura para delimitar a F_0 y el ramillete R_0 parece contener una parte de una circunferencia.

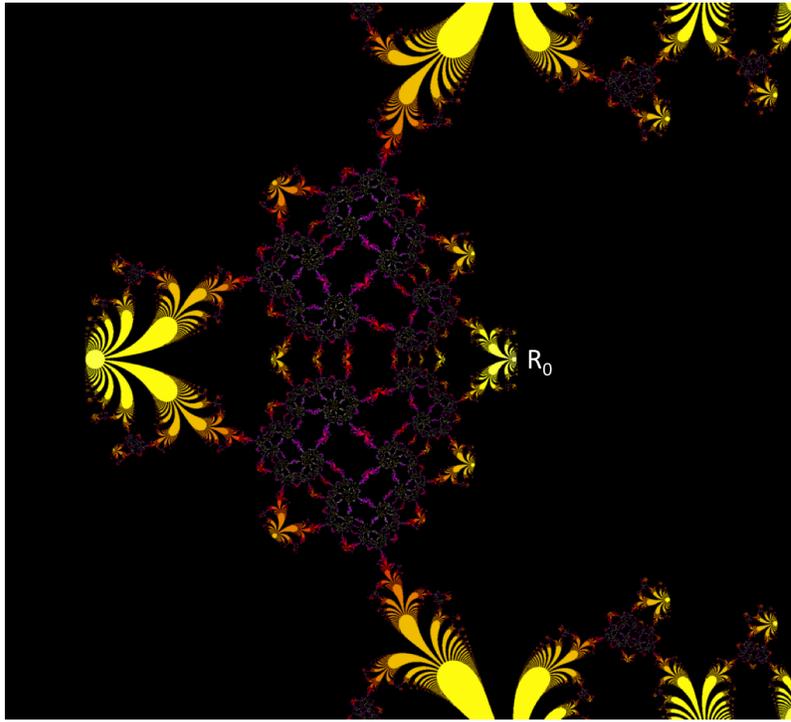


Figura 2-5: Plano dinámico de $f_{-4,-1}$. El ramillete R_0 y una esponja formada por ramilletes.

2.2. Dominios de Baker

Si uno piensa en el comportamiento de una función en torno a una singularidad esencial como ∞ para una función meromorfa trascendente, viene a la mente aquella propiedad de que la imagen de toda vecindad (perforada) de ∞ es prácticamente toda la esfera de Riemann. Resulta entonces sorprendente que ∞ pueda ser un punto de absorción de un dominio de Fatou. Por otro lado, este fenómeno no es tan complicado, pues aparece incluso en funciones reales, ver Figura 2-6. De modo que los dominios de Baker los podemos pensar como “el lado tranquilo” de una singularidad.

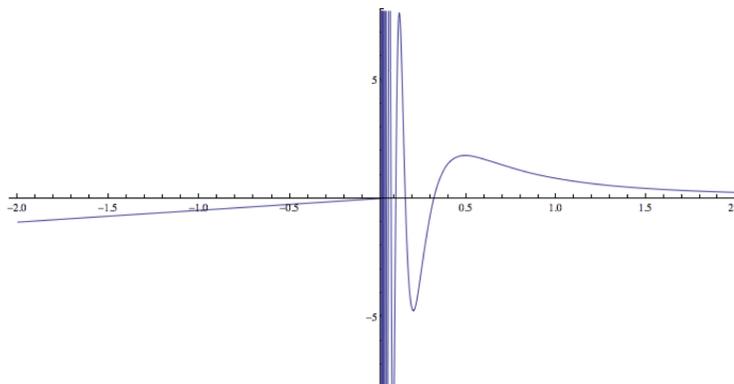


Figura 2-6: Si tomamos $f(x) = \frac{1}{2}x$ si $x < 0$ y $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ si $x > 0$, el cero se comporta como una singularidad esencial pues la imagen de toda vecindad es todo \mathbb{R} y a la vez como un punto de absorción de \mathbb{R}^- , que corresponde a un dominio de Baker de una función real.

2.2.1. Existencia

Como hemos mencionado anteriormente, ya en [Baker *et al.*, 1991] se usa al ejemplo clásico $f_{-1,1}$ para ilustrar el caso de un dominio de Baker no invariante. Lo que nos llevó al siguiente resultado.

Teorema 41 *Sea $\mathcal{B} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ y } |\operatorname{Im}(\lambda)| < \frac{1}{2}|\operatorname{Re}(\lambda)|, \mu \neq 0\}$. Si $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}$, entonces $f_{\lambda, \mu}$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos $\{F_\infty, F_0\}$ cuyos puntos de absorción son ∞ y 0 respectivamente.*

Nótese que \mathcal{B} es abierto y el ejemplo clásico $f_{-1,1} \in \mathcal{B}$. En cierto sentido el resultado es una generalización de lo ya encontrado en [Baker *et al.*, 1991], ver Figura 2-7. Sin embargo, la

prueba sigue la idea en [Lauber, 2004] para una familia de funciones enteras. Esto es, demostrar la existencia de un conjunto W abierto no vacío, invariante bajo $f_{\lambda,\mu}^2$ con ∞ como punto de absorción. A partir de la Definición 16, tenemos que tal conjunto W es un dominio absorbente.

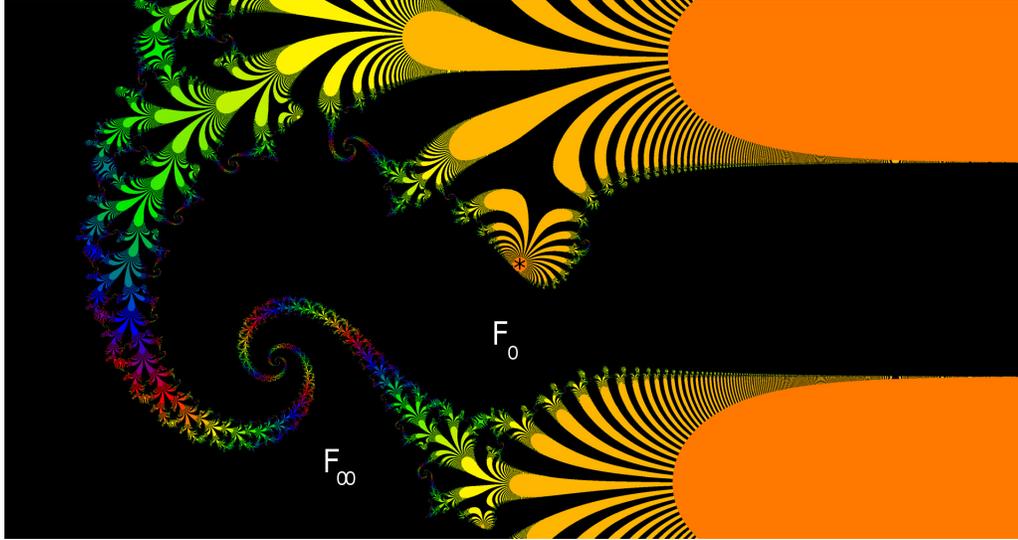


Figura 2-7: Plano dinámico de $f_{-10,10+10i}$. Los dominios de Baker F_∞ y F_0 , el asterisco negro indica el ramillete R_0 .

Como consecuencia, se tiene además los siguientes resultados.

Corolario 42 Si $\mu \neq 0$, $Re(\lambda) < 0$ y $|Im(\lambda)| < \frac{1}{2}|Re(\lambda)| - 4$, entonces F_∞ contiene una infinidad de puntos críticos de $f_{\lambda,\mu}$ y F_0 contiene una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda,\mu}$.

Se sigue del Corolario 15 que $SV(f_{\lambda,\mu}^2)$ es no acotado, podemos decir más sobre los valores críticos de $f_{\lambda,\mu}^2$.

Corolario 43 Si $\mu \neq 0$, $Re(\lambda) < 0$ y $|Im(\lambda)| < \frac{1}{2}|Re(\lambda)| - 4$, entonces tanto F_∞ como F_0 tienen una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda,\mu}^2$.

Como veremos, existe $z_0 \in \mathbb{R}^-$ tal que $(-\infty, z_0] \subset F_\infty$. Por lo que F_0 contiene la imagen de este rayo, que en el caso en que los parámetros son reales, tenemos que el intervalo $[f_{\lambda,\mu}(z_0), 0)$ está contenido en F_0 . Nótese la simetría respecto al eje real del conjunto de Julia en algunos casos, esto es consecuencia del hecho de que si los parámetros son reales, entonces $f_{\lambda,\mu}(\bar{z}) = \overline{f_{\lambda,\mu}(z)}$. Ver Figura 2-8.

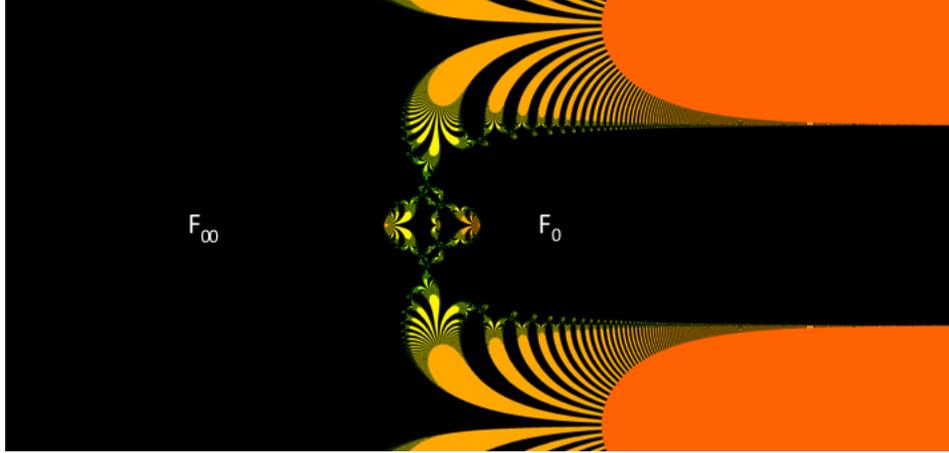


Figura 2-8: Plano dinámico de $f_{-9, -3}$. El dominio de Baker F_{∞} contiene infinitud de sus puntos críticos y F_0 una infinitud de sus valores críticos. Nótese la simetría respecto al eje real.

En el caso de $f_{-1, -10}$ la gráfica de la función real nuevamente nos ayuda a ver que $\mathbb{R}^- \subset F_{\infty}$ y $\mathbb{R}^+ \subset F_0$, ver 2-9.

Finalmente, en la Figura 2-10 se ilustra el comportamiento casi afín del ejemplo clásico $-e^z + 1/z$ en el dominio de Baker F_{∞} .

2.2.2. Conectividad

Algunos de los dominios de Baker encontrados tienen infinitud de hoyos. Primero lo probamos para una función particular.

Teorema 44 Si $f_h(z) = -20e^z + \frac{1}{4z}$, entonces los dominios de Baker de f_h son de conectividad infinita.

En la Figura 2-11 se muestra el plano dinámico de f_h . Si bien algunos hoyos en los dominios de Baker pueden apreciarse, el ramillete R_0 se pierde debido al tamaño que tiene.

Si tomamos la componente conexa del conjunto de Julia que tiene al polo, que denotamos por J_0 , entonces J_0 contiene al ramillete en cero, ver Figura 2-12. Diremos que J_0 es una isla del conjunto de Julia en F_0 .

En el camino para demostrar el Teorema anterior, obtuvimos los siguientes resultados de carácter general.

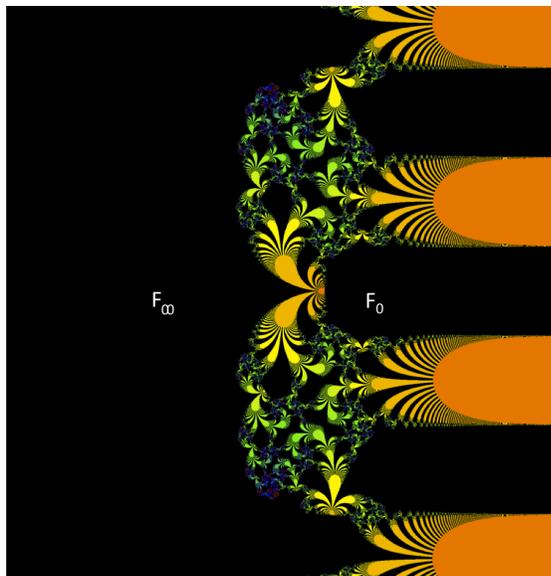


Figura 2-9: Plano dinámico de $f_{-1,-10}$, $\mathbb{R}^- \subset F_\infty$ y $\mathbb{R}^+ \subset F_0$.

Teorema 45 *Sea f una función meromorfa con una cantidad finita de valores asintóticos. Si U y V son componentes conexas del conjunto de Fatou de f , tal que $f(U) \subseteq V$ y V tiene conectividad infinita, entonces U es múltiplemente conexo.*

Teorema 46 *Sea f una función meromorfa con una cantidad finita de polos. Si U y V son componentes conexas del conjunto de Fatou de f , tal que $f(U) \subseteq V$ y U tiene conectividad infinita, entonces V es múltiplemente conexo.*

Primero encontramos una isla J_{-1} rodeada por F_∞ , J_{-1} es una componente conexa de la preimagen de J_0 . Una vez que se tenemos la isla J_{-1} usamos el Teorema 45 para encontrar otra isla J_{-2} rodeada por F_0 .

Como se puede apreciar en la Figura 2-11, las fronteras de los dominios de Baker se juntan en un punto real negativo.

Proposición 47 *Existe un punto fijo repulsor $x_0 \in \mathbb{R}^-$ de f_h , tal que $(-\infty, x_0) \subset F_\infty$ y $(x_0, 0) \subset F_0$.*

De la prueba de este resultado se obtiene el siguiente.

Corolario 48 *F_0 de f_h es no acotado.*

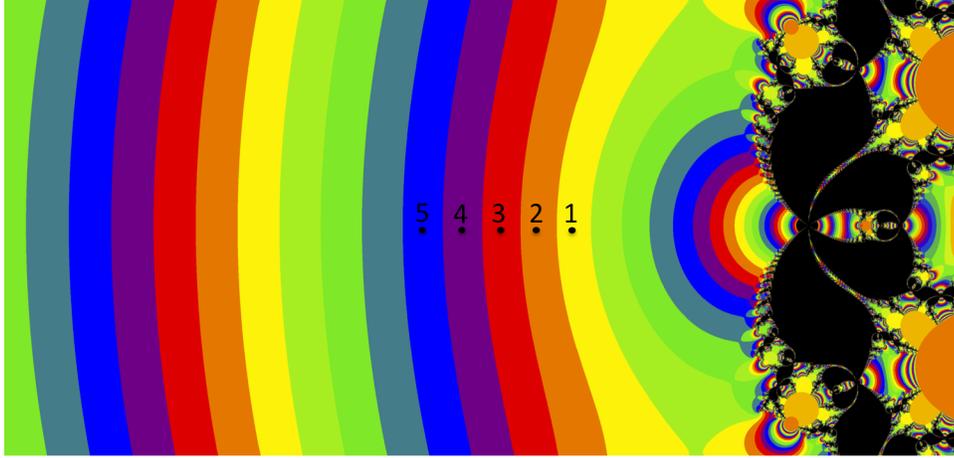


Figura 2-10: Plano dinámico del ejemplo clásico $f_{-1,1}$ donde se muestra como en F_∞ hay una zona donde la segunda iteración es esencialmente una traslación hacia la izquierda. Cada zona de color numerada es preimagen de una adyacente. Por ejemplo, la zona amarilla 1 es mapeada en la naranja 2. Si empezamos con el punto marcado en la zona amarilla 1, al iterar 8 veces $f_{-1,1}^2$ llegaremos a la siguiente zona amarilla a la izquierda.

Conviene notar que los dominios de Baker cuyo punto de absorción es ∞ siempre son no acotados, como es el caso de los dominios de Baker para las funciones enteras trascendentes. En cambio las funciones meromorfas trascendentes pueden tener dominios de Baker con puntos de absorción finitos y que sean acotados.

Empleando argumentos de continuidad se puede extender el último Teorema a otras funciones.

Teorema 49 *Existe un conjunto abierto no vacío $\mathcal{B}_h \subset \mathbb{C}^2$ tal que, para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_h$ los dominios de Baker F_∞ y F_0 de $f_{\lambda,\mu}$ son de conectividad infinita.*

Se tiene que $(-20, 1/4) \in \mathcal{B}_h$. Este Teorema nos lleva a los siguientes resultados.

Corolario 50 *Para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_h$ el conjunto de Julia de $f_{\lambda,\mu}$ es desconexo, tanto en \mathbb{C} como en la esfera de Riemann.*

Corolario 51 *Para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_h$, las componentes de un solo punto del conjunto de Julia de $f_{\lambda,\mu}$ son densas en $J(f_{\lambda,\mu})$.*

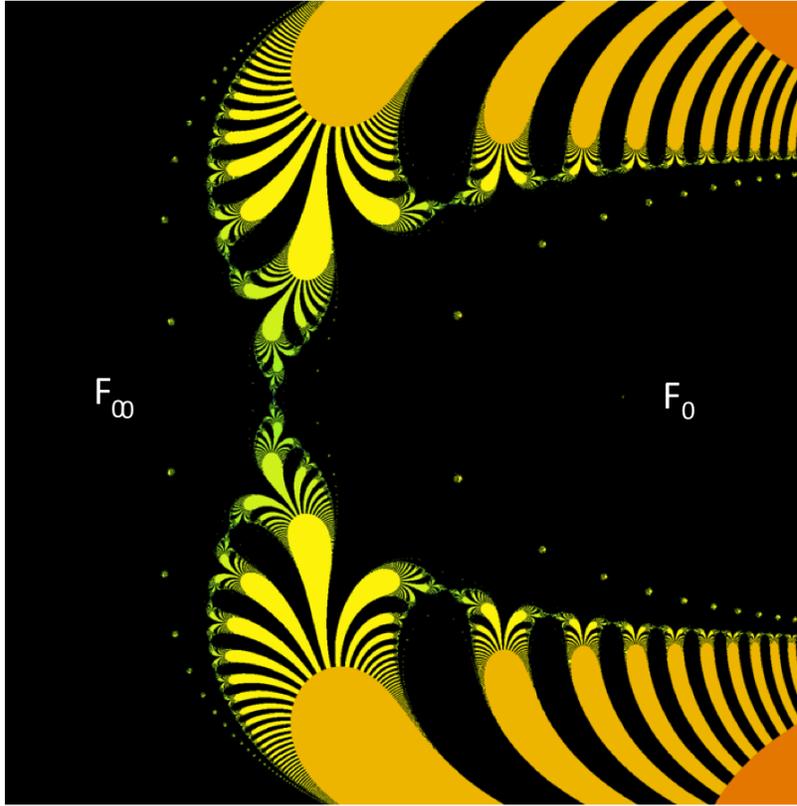


Figura 2-11: Plano dinámico de f_h , sus dominios de Baker tienen una infinidad de hoyos.

Del último Corolario tenemos que entonces los dominios de Fatou de algunas funciones tienen infinidad de hoyos y estos son de al menos dos tipos: 1) islas en los dominios de Baker que son preimágenes de J_0 , o bien, 2) son puntos. Al conjunto de todos los puntos en el conjunto de Julia que son a la vez componentes conexas le llamamos la *arena suelta* del conjunto de Julia. Además, por un lado tenemos que las islas están rodeadas por la arena suelta que se les pega y, por otro lado, también arbitrariamente cerca de todo grano de arena debe haber una isla.

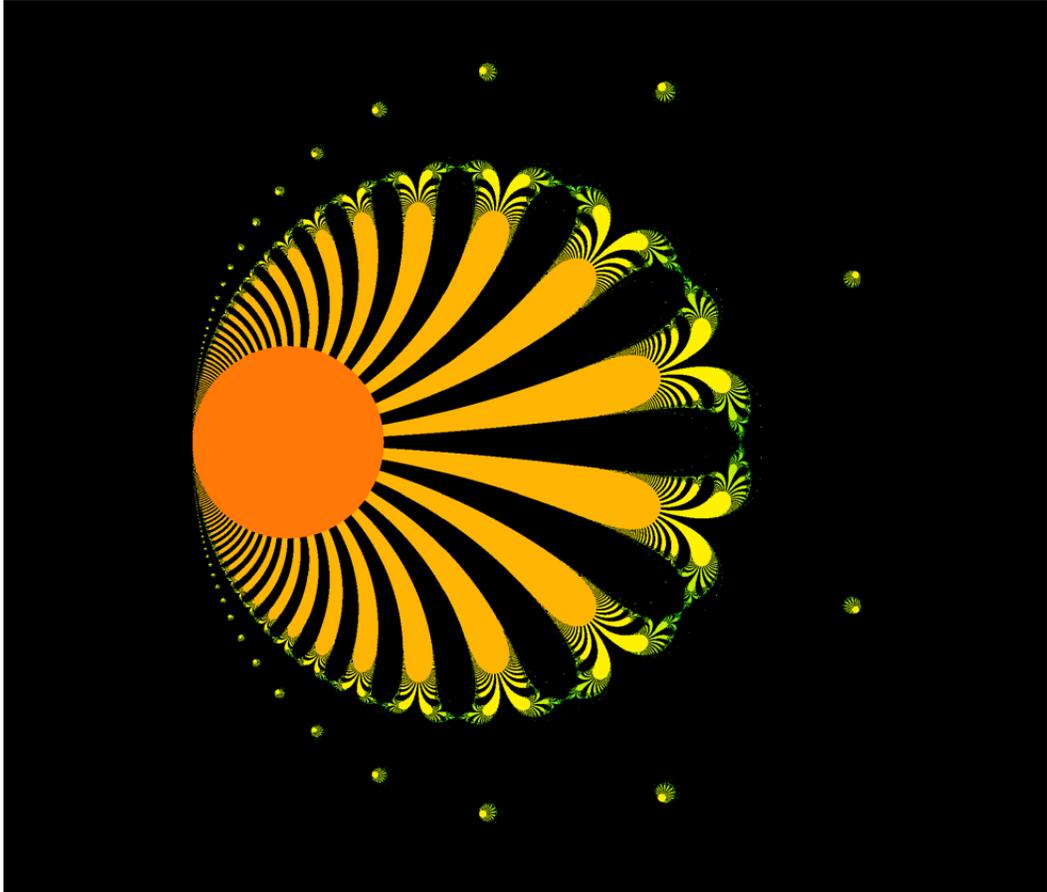


Figura 2-12: Detalle de la isla J_0 que contiene al ramillete R_0 de f_h .

2.3. Espacio de parámetros

Dado que el espacio de parámetros de la familia $f_{\lambda,\mu}$ es $(\mathbb{C} - \{0\})^2$, muchas dificultades aparecen para estudiar una representación geométrica.

Además, las funciones tienen una infinidad de valores críticos, por lo que se vuelve mucho más difícil determinar el lugar de bifurcación de esta familia. En primer lugar, $f_{\lambda,\mu}$ puede tener más de un ciclo de atracción e incluso una infinidad. Además, si \mathcal{H}_n y \mathcal{H}_m son los dominios de atracción de periodo n y m respectivamente, puede ocurrir que su intersección sea no vacía aun cuando $n \neq m$, ver Figuras 2-13 y 2-14. Estas situaciones no ocurren con la familia cuadrática Q_c ni la exponencial E_λ .

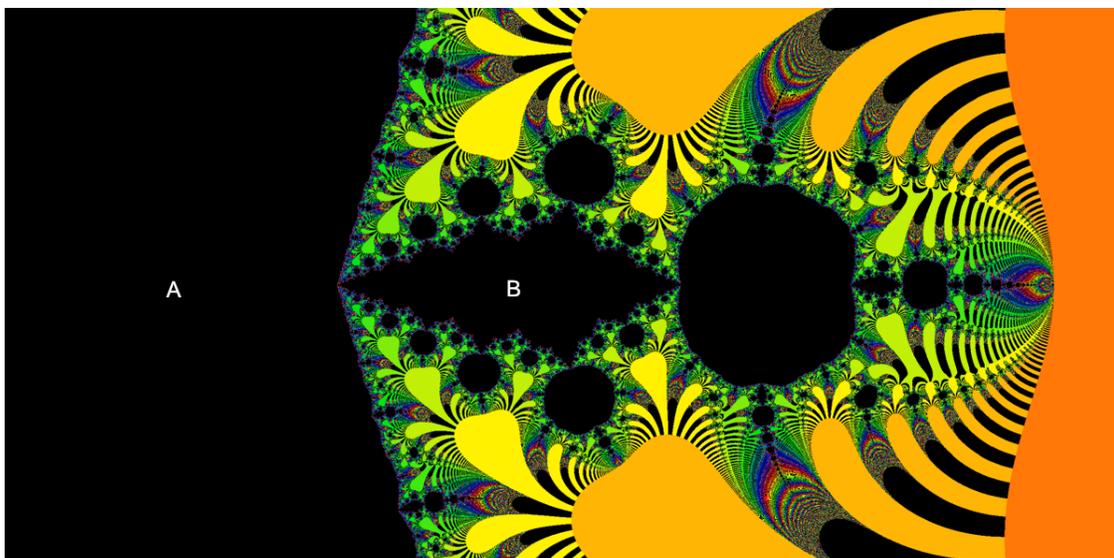


Figura 2-13: Plano dinámico de $f_{34.7,13.8}$, experimentalmente se observa que A y B son cuencas inmediatas de atracción.

Dadas las dificultades señaladas para analizar el espacio de parámetros de nuestra familia, resulta conveniente simplificar el problema al tomar la restricción de $f_{\lambda,\mu}$ al caso en que la variable y los parámetros son reales. Para evitar confusiones, denotaremos a la restricción por $g_{\lambda,\mu}$.

A partir de ello encontramos que si \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_1 son los conjuntos de parámetros para los cuales $g_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo súperatractor o indiferente con derivada 1 respectivamente, estos conjuntos están dados por las siguientes parametrizaciones en función de $x \in \mathbb{R}$ el punto fijo.

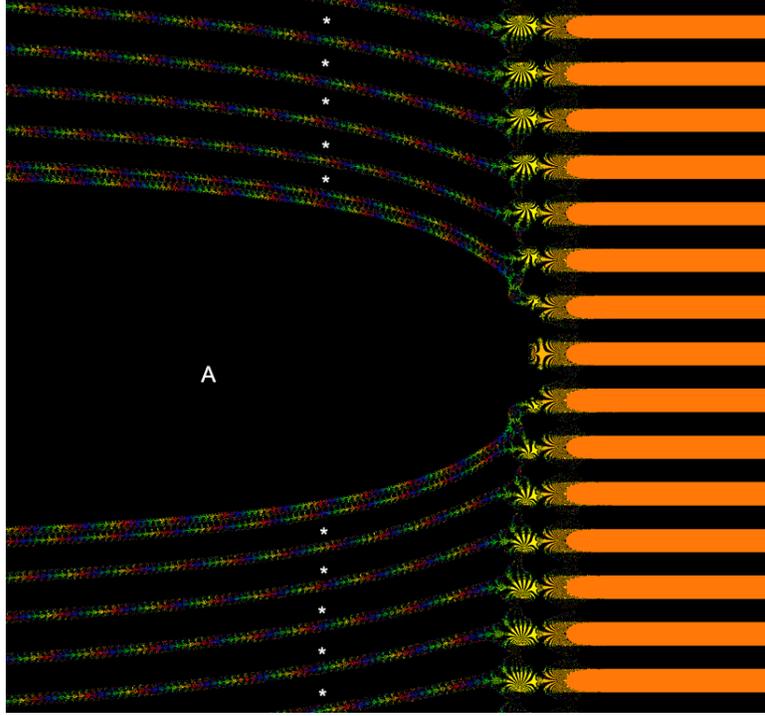


Figura 2-14: Plano dinámico de $f_{1,10}$, experimentalmente se observa que A es una cuenca inmediata de atracción y las regiones con asterico son dominios de periodo dos atractores, ¡posiblemente haya una infinidad!

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda = \frac{x}{e^x(x+1)} \text{ y } \mu = \frac{x^3}{x+1} \right\},$$

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda = \frac{2x}{e^x(x+1)} \text{ y } \mu = \frac{x^2(x-1)}{x+1} \right\},$$

Para que $g_{\lambda,\mu}$ tenga un punto fijo indiferente con derivada -1 , entonces el punto fijo debe ser -1 y \mathcal{L}_{-1} resulta ser la siguiente recta.

$$\mathcal{L}_{-1} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu = 1 + e^{-1}\lambda\}.$$

Con ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 52 *Para la familia de funciones complejas $f_{\lambda,\mu}$, el conjunto de atracción de periodo uno \mathcal{H}_1 es no acotado.*

Además.

Corolario 53 *La región abierta $\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}$ en el plano real de parámetros (λ, μ) que contiene a \mathcal{L}_0 y está delimitada por las curvas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_{-1} está contenida en \mathcal{H}_1 .*

Nótese que la región $\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}$ no contiene todos los parámetros reales para los cuales $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo atractor, pues si $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo z con parte imaginaria diferente de cero con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces estos parámetros pueden no estar en esta región.

Al plano real de parámetros (λ, μ) lo llamamos la sección real del espacio de parámetros. En la Figura 2-15 se muestra esta sección identificando la sección real de \mathcal{B} (Teorema 41), las curvas \mathcal{L}_i con $i \in \{0, 1, -1\}$ que determinan $\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}$. Además quedan identificados los parámetros de las funciones f_h , del ejemplo clásico $f_{-1,1}$, $f_{34.7,13.8}$ y $f_{1,10}$ mencionadas anteriormente. Para distinguir mejor las curvas, ver Figuras 2-16 y 2-17.

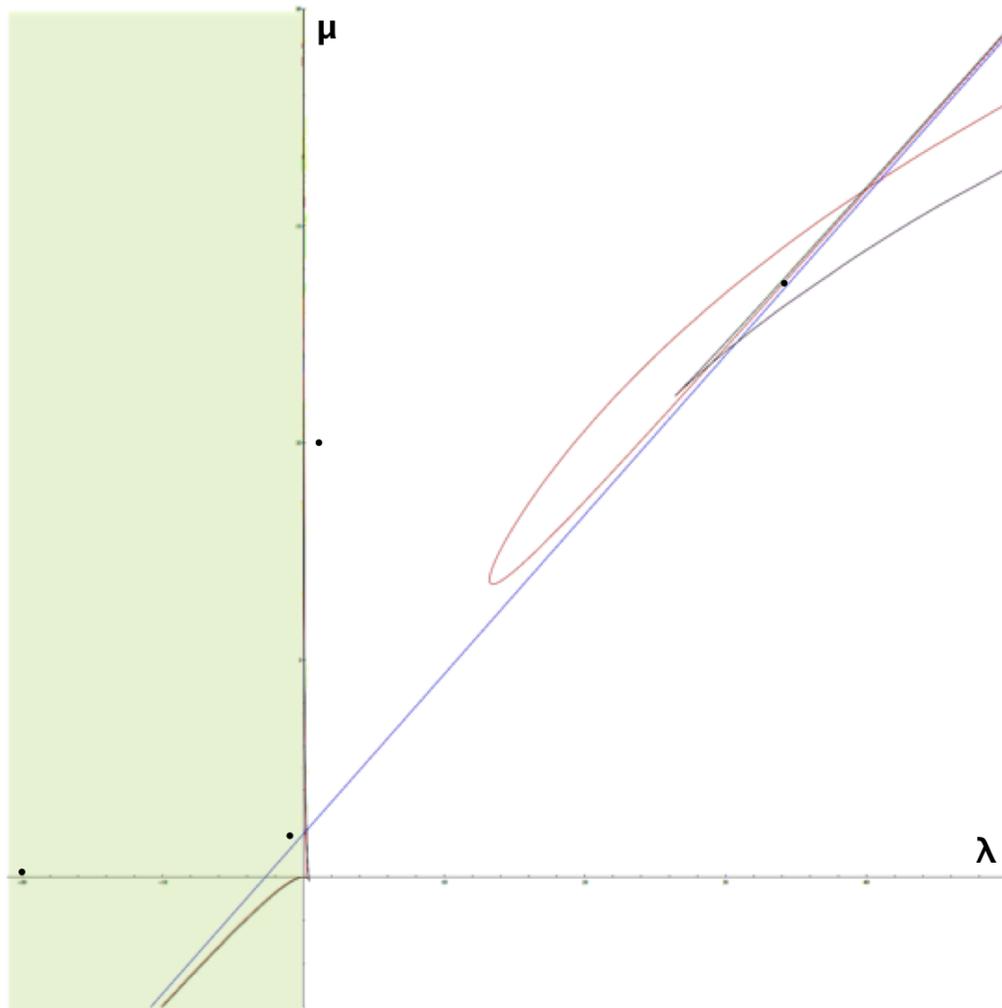


Figura 2-15: Sección real del espacio de parámetros de la familia $f_{\lambda,\mu}$. El semiplano verde es la sección real de \mathcal{B} . \mathcal{L}_1 es la curva negra, \mathcal{L}_{-1} es la recta azul y la curva roja es \mathcal{L}_0 . Los puntos en negro de izquierda a derecha son los parámetros: $(-20, 1/4)$, $(-1, 1)$, $(1, 10)$ y $(34.7, 13.8)$.

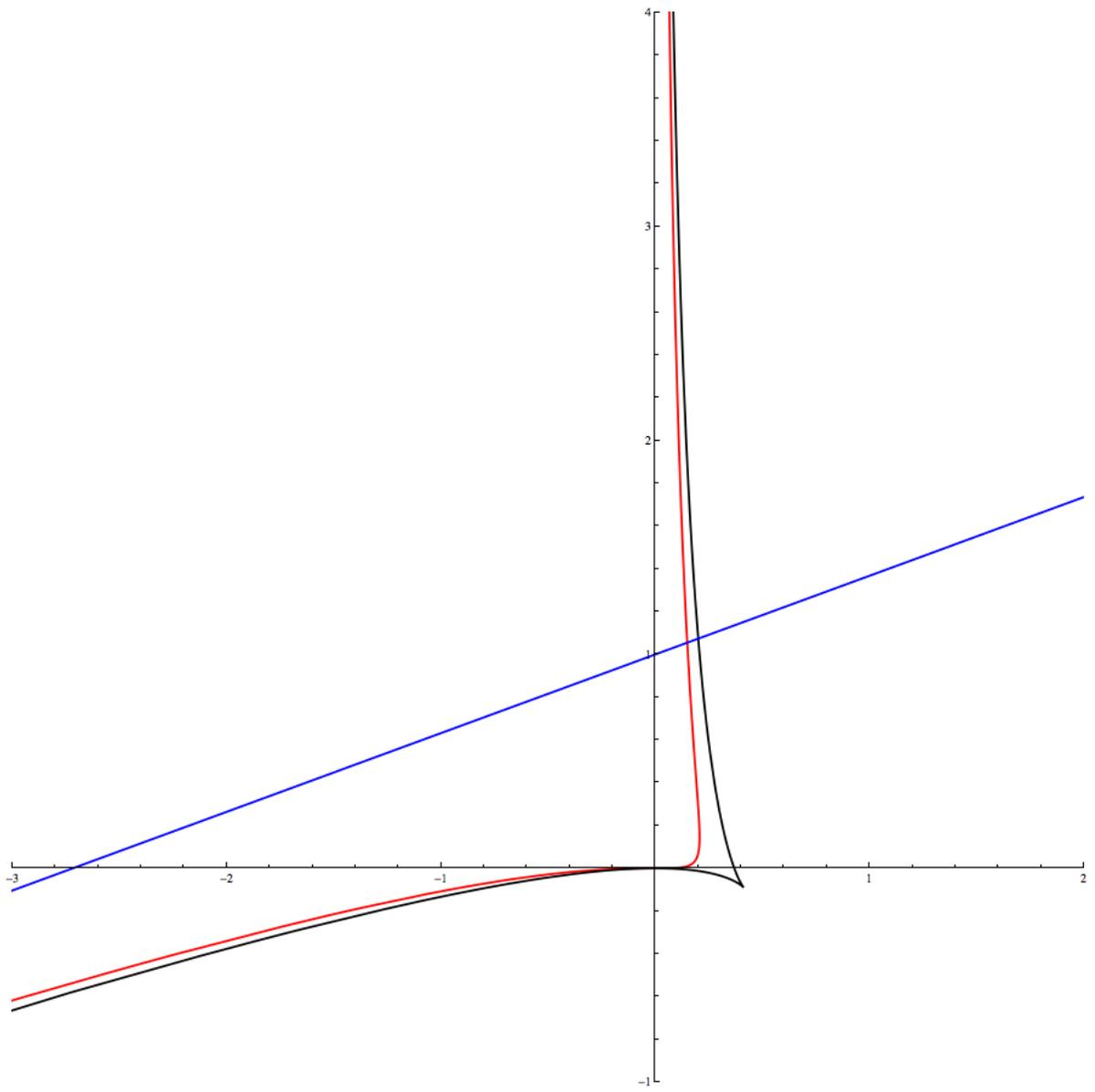


Figura 2-16: Curva \mathcal{L}_0 en rojo, \mathcal{L}_1 en negro y recta \mathcal{L}_{-1} en azul.

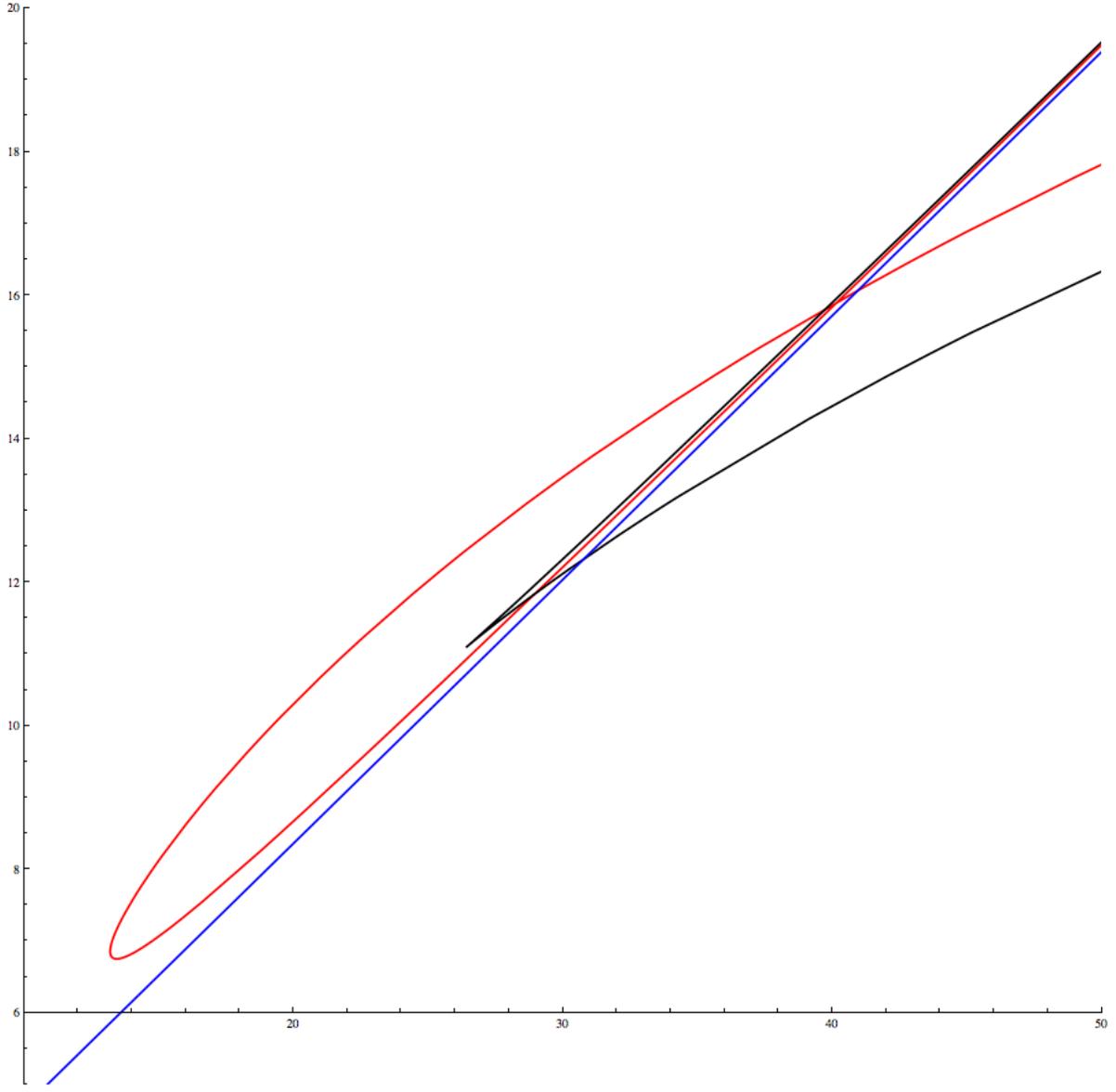


Figura 2-17: Curva \mathcal{L}_0 en rojo, \mathcal{L}_1 en negro y recta \mathcal{L}_{-1} en azul.

2.4. Preguntas y conjeturas

En cuanto a la clasificación de los dominios de Baker ya encontrados, tenemos los siguientes elementos. Debido a que la dinámica en el dominio de absorción W contenido en F_∞ es esencialmente una traslación, ello nos lleva a pensar que W contiene dos pétalos invariantes en infinito ajenos, ver [Fagella & Henriksen, 2006].

Conjetura 54 *Si $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}$, entonces los dominios de Baker de $f_{\lambda, \mu}$ son doblemente parabólicos.*

En cuanto a la existencia de los dominios de Baker, quizás se pueda extender el resultado al caso en que $Re(\lambda) \leq 0$, ver Figuras 2-18 y 2-19.

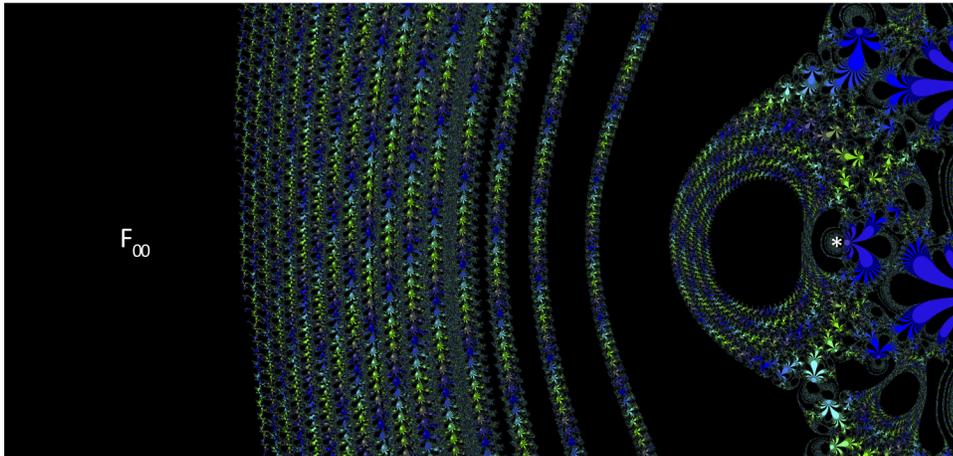


Figura 2-18: Plano dinámico de $f_{0.5i, 5}$, la evidencia computacional muestra que la función tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos F_∞ y F_0 cuyos puntos de absorción son ∞ y cero respectivamente. F_0 está indicado con un asterico.

La cuestión es que posiblemente no funcione el mismo procedimiento utilizado en el Teorema 41 para demostrarlo en otros casos. Si F_∞ es doblemente parabólico en el caso señalado anteriormente, ello permite tomar W de manera que su frontera en \mathbb{C} esté contenida en F_∞ . En cambio, es posible que para el caso en que $Re(\lambda) = 0$, ocurra que la función tenga un dominio de Baker F_∞ parabólico, ver Figura 2-20. Ello podría complicar el encontrar un dominio absorbente.

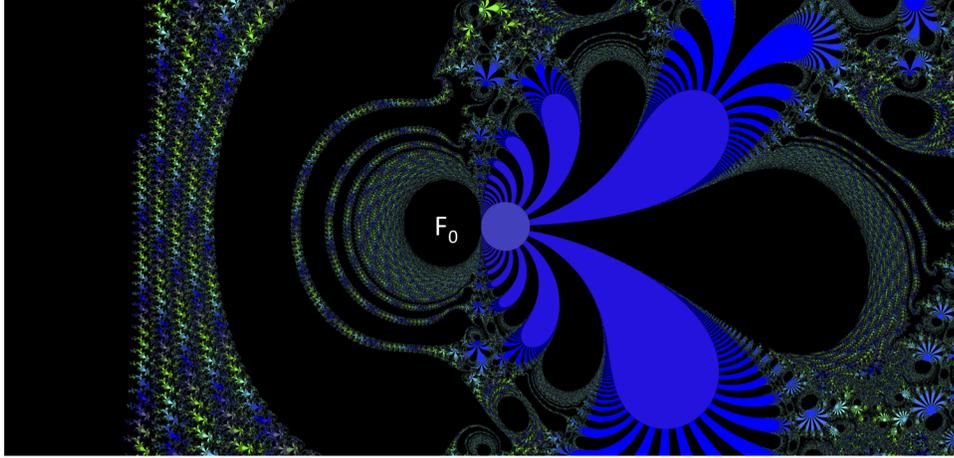


Figura 2-19: Detalle del plano dinámico de $f_{0.5i,5}$.

Conjetura 55 Si $0 \leq \frac{1}{2}|Re(\lambda)| \leq |Im(\lambda)|$ y se cumple la condición general de que $\lambda \neq 0$, entonces $f_{\lambda,\mu}$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos $\{F_\infty, F_0\}$, para los cuales ∞ y 0 son los puntos de absorción. Además algunos de estos dominios de Baker son parabólicos.

De ser cierto, tendríamos por un lado que $f_{\lambda,\mu}$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos si $Re(\lambda) \leq 0$. Por otro lado, los dominios de Baker sufren una bifurcación en cuanto a su comportamiento.

Pregunta 56 ¿Cómo es el conjunto de parámetros de la familia $f_{\lambda,\mu}$ para los cuales hay una bifurcación en cuanto a la clasificación de los dominios de Baker?

Otro aspecto que se aprecia en los planos dinámicos es que posiblemente no siempre los dominios de Baker compartan puntos en sus fronteras, ver Figuras 2-18 y 2-19.

Pregunta 57 ¿Para cuáles parámetros $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}$ los dominios de Baker de $f_{\lambda,\mu}$ tienen fronteras con puntos en común?

La siguiente conjetura establece otro tipo de bifurcación para los dominios de Baker y es la condición para que desaparezcan.

Conjetura 58 Si $Re(\lambda) > 0$, entonces $f_{\lambda,\mu}$ no tiene dominios de Baker. Más aún, si $Re(\lambda) \leq 0$ y $f_{\lambda,\mu}$ tiene dominios de Baker, entonces estos son de periodo par.

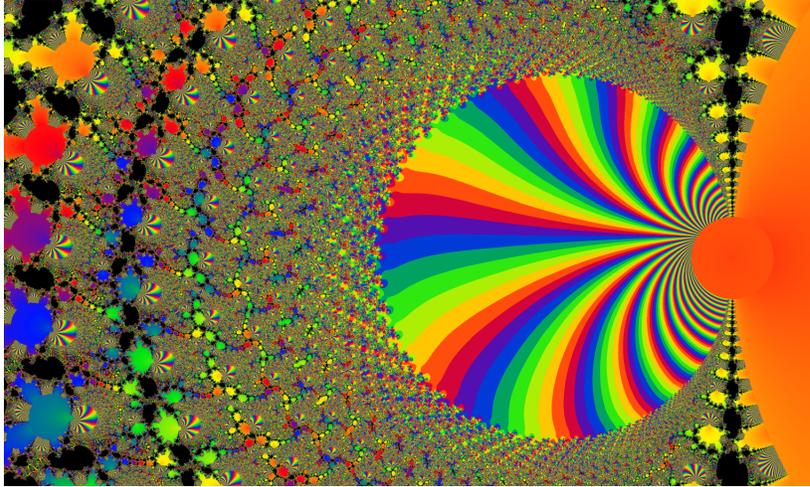


Figura 2-20: Plano dinámico de $f_{i,1}$. La evidencia experimental muestra que si $Re(\lambda) = 0$, entonces la función tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos parabólicos. En la imagen, se muestra un disco con bandas de colores que corresponde a F_0 .

Al tener los dominios de Baker F_0 un punto de absorción finito, puede ocurrir que algunos sean acotado. Ya hemos exhibido que en el caso de la función $f_h = f_{-20,1/4}$ no es el caso, sin embargo tenemos evidencia experimental que muestra que no necesariamente esto ocurre en todos los casos.

Conjetura 59 *Existen funciones con parámetros en \mathcal{B} cuyos dominios de Baker F_0 son acotados. De hecho, este es el caso para el ejemplo clásico $f_{-1,1}$.*

Como podemos notar, hay varios aspectos sobre el ejemplo clásico que falta por conocer. No sólo está la cuestión de la conjetura anterior, sino también el conocer si una infinidad de los valores y puntos críticos de $f_{-1,1}$ están en los dominios de Baker, como en otros casos ya encontrados.

Pregunta 60 *¿Siempre los dominios de Baker encontrados contienen una infinidad de puntos y valores críticos?*

En cuanto a la conectividad, ya tenemos que existen funciones de nuestra familia con dominios de Baker de conectividad infinita. Pero los planos dinámicos generados con la computadora muestran que quizás no siempre esto sea así, ver Figura 2-21.

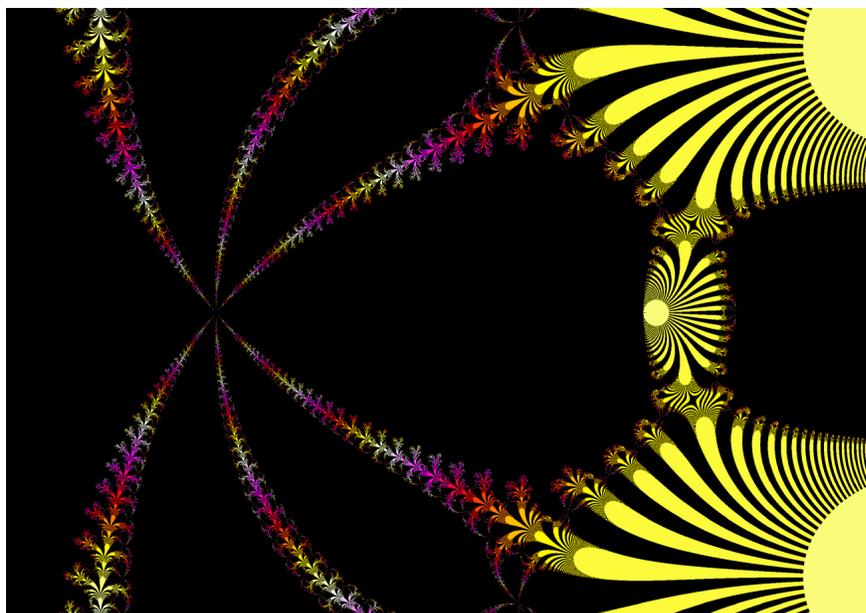


Figura 2-21: Plano dinámico de $f_{-10,25}$, ¿es el conjunto de Julia conexo?

Conjetura 61 *Existen funciones $f_{\lambda,\mu}$ con dominios de Baker simplemente conexos. En particular en el caso del ejemplo clásico $f_{-1,1}$.*

Nuevamente esto nos lleva al terreno del espacio de parámetros.

Pregunta 62 *¿Cómo es el conjunto de parámetros para los cuales hay una bifurcación en cuanto a la conectividad de los dominios de Baker?*

Esto nos lleva a las siguientes preguntas.

Pregunta 63 *¿Cuál es la condición para que los dominios de Baker sean simplemente conexos?*

Pregunta 64 *¿Existe alguna función meromorfa trascendente con un ciclo de dominios periódicos en el conjunto de Fatou tal que la conectividad de los dominios es diferente? En particular, ¿existen dos dominios de Baker en el mismo ciclo donde uno es simplemente conexo y el otro es de conectividad infinita?*

Experimentalmente observamos que algunos puntos críticos tienen asociada una cascada de bifurcaciones de duplicación de periodo, ver 2-22.

Si la función tiene un comportamiento similar a un polinomio, al menos localmente, tenemos que el espacio de parámetros contiene una copia cuasiconforme de un conjunto de Mandelbrot. Dado que tenemos dos parámetros, es posible que el espacio de parámetros contenga una copia cuasiconforme de $\mathcal{M} \times [0, 1]^2$. Para imaginar este conjunto, podemos pensarlo como un gusano con secciones similares al conjunto de Mandelbrot que se mueve en el tiempo.

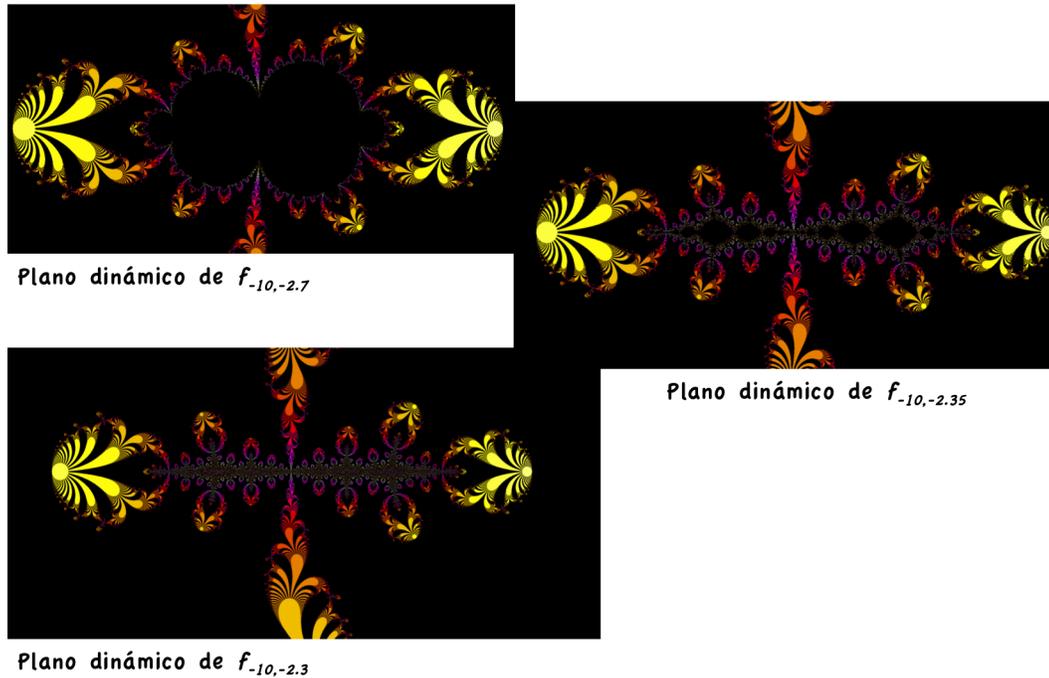


Figura 2-22: Evidencia experimental de que ocurren cascadas de bifurcación. La que se muestra es fijando $\lambda = -10$ y variando μ . Si se fijan otros valores de λ reales se presenta la misma evidencia, así como al tomar valores de λ complejos.

Conjetura 65 *Existen puntos críticos que producen cascadas de bifurcación de duplicación de periodo e inducen en el espacio de parámetros conjuntos de Mandelbrot.*

En cuanto a la existencia de anillos de Herman, también es una cuestión restrictiva. Si f es un polinomio o $f \in E \cup P$, entonces f no tiene anillos de Herman. Hay otras clases de funciones sin anillos de Herman, las revisadas no incluyen a las funciones $f_{\lambda,\mu}$.

Pregunta 66 *¿Hay funciones $f_{\lambda,\mu}$ con anillos de Herman?*

De ser cierto que si $Re(\lambda) \leq 0$ se tiene que $f_{\lambda,\mu}$ tiene un ciclo de dominios de Baker, en este caso el conjunto de Fatou es no vacío. En caso de que $f_{\lambda,\mu}$ no tenga dominios de Baker si $Re(\lambda) > 0$, en tal caso podría ocurrir esta situación.

Pregunta 67 *¿Cómo es el conjunto de parámetros para los cuales el conjunto de Fatou de $f_{\lambda,\mu}$ es vacío?*

Finalmente, ya sabemos que nuestras funciones no pueden tener dominios errantes de Baker, sin embargo la pregunta queda abierta en el caso general.

Pregunta 68 *¿Existen funciones $f_{\lambda,\mu}$ con dominios errantes?*

Capítulo 3

DEMOSTRACIONES

3.1. Aspectos generales

Comenzamos con los resultados que nos dan la descripción de los valores singulares de $f_{\lambda,\mu}$.

Teorema 32 Valores singulares

La función $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ cumple las siguientes propiedades:

1. *Los valores asintóticos son cero e infinito.*
2. *∞ es el único valor excepcional de Picard.*
3. *Los conjuntos de puntos y valores críticos son infinitos numerables, que denotaremos por las sucesiones $\{p_n^c\}$ y $\{v_n^c\}$ respectivamente.*
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(p_n^c) = -\infty$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{v_n^c\} = 0$.

Demostración.

1. Sea w un valor asintótico de $f_{\lambda,\mu}$. Por definición, hay una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) = w$. Entonces w es valor asintótico de E_λ , por lo que w es cero o ∞ .

2. Como los valores asintóticos de $f_{\lambda,\mu}$ sólo son cero e infinito, son los únicos que pueden ser valores excepcionales de Picard, Proposición 6. Dado que la función tiene sólo un polo, entonces ∞ es valor excepcional de Picard.

En cuanto al cero, tenemos que $f_{\lambda,\mu}(z) = 0$ si y sólo si $ze^z = -\frac{\mu}{\lambda}$. Como ∞ y cero son los valores excepcionales de Picard de ze^z y $\mu \neq 0$, entonces por el Teorema de Picard $-\frac{\mu}{\lambda}$ no es excepcional de Picard. Por lo tanto, cero tiene una infinidad numerable de preimágenes bajo $f_{\lambda,\mu}$.

3. Tenemos que $f'_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z - \mu/z^2 = 0$ si y sólo si $z^2 e^z = \frac{\mu}{\lambda}$. Como en el caso de las preimágenes del cero, tenemos que $f_{\lambda,\mu}$ tiene una infinidad numerable de puntos críticos, que denotaremos por la sucesión $\{p_n^c\}$. Entonces se cumple que

$$f_{\lambda,\mu}(p_n^c) = \lambda e^{p_n^c} + \mu/p_n^c - \mu/(p_n^c)^2 + \mu/(p_n^c)^2 = \mu(1/p_n^c + 1/(p_n^c)^2).$$

Por lo que $f_{\lambda,\mu}$ en los puntos críticos es a lo más 2 a 1. Por lo tanto $f_{\lambda,\mu}$ tiene una infinidad numerable de valores críticos que denotaremos por la sucesión $\{v_n^c\}$.

4. Como los puntos críticos de $f_{\lambda,\mu}$ son soluciones de la ecuación $z^2 e^z = \frac{\mu}{\lambda}$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^c = \infty$. En tal caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu/(p_n^c)^2 = 0$, además $\lambda e^{p_n^c} - \mu/(p_n^c)^2 = 0$, por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda e^{p_n^c} = 0$ y entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} Re(p_n^c) = -\infty$.
5. Dado que $f_{\lambda,\mu}(p_n^c) = \mu(1/p_n^c + 1/(p_n^c)^2) = v_n^c$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^c = 0$.

■

Ahora pasemos a la clasificación de las singularidades en infinito.

Teorema 33 Singularidades

La función $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Tiene una singularidad directa en infinito sobre infinito y es logarítmica.
2. Tiene una singularidad indirecta en infinito sobre cero.

Demostración. Al ser cero e infinito los valores asintóticos de $f_{\lambda,\mu}$, entonces sólo resta clasificar las singularidades que tiene ∞ sobre cada uno de ellos.

1. Por el Corolario 7 y al ser ∞ valor excepcional de Picard, tenemos que la singularidad es directa sobre infinito. Además ∞ no es punto de acumulación de valores críticos de $f_{\lambda,\mu}$, por el Corolario 4, tenemos que se trata de una singularidad logarítmica.
2. Por el Teorema 32 todo semiplano izquierdo contiene una infinidad de preimágenes de cero. Tomemos la componente conexa U_r que es preimagen de $B_r(0)$ que define la singularidad trascendente en infinito sobre cero. Esto significa que si $r_1 < r_2$, entonces $U_{r_1} \subset U_{r_2}$ y $\bigcap_{r>0} U_r = \emptyset$. Como U_r es no acotado, se cumple que contiene un semiplano izquierdo. Por lo tanto $f_{\lambda,\mu}$ tiene una singularidad indirecta en ∞ sobre cero.

■

Corolario 34 $f_{\lambda,\mu} \in M \cap B$ y $SV(f_{\lambda,\mu})$ es infinito con un único punto de acumulación en cero.

Demostración. Como el polo de $f_{\lambda,\mu}$ es no omitido, entonces $f_{\lambda,\mu} \in M$. Además $SV(f_{\lambda,\mu}) = \{v_n^c\} \cup \{0\}$, entonces es infinito y acotado, por lo tanto $f_{\lambda,\mu} \in B$. Como $v_n^c = 0$ sólo si $p_n^c = -1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^c = 0$, entonces cero es el único punto de acumulación del conjunto de valores críticos de $f_{\lambda,\mu}$. ■

Recordemos que para una función f meromorfa de orden finito, sus valores asintóticos indirectos son puntos de acumulación de sus valores críticos. El Corolario anterior nos dice que además el valor asintótico de $f_{\lambda,\mu}$ es el único punto de acumulación de sus valores críticos.

Corolario 35 $f_{\lambda,\mu}$ no tiene valores excepcionales.

Demostración. Sólo infinito puede ser valor excepcional por ser el único excepcional de Picard. Pero como $f_{\lambda,\mu}$ tiene un polo no omitido, entonces ∞ tampoco es excepcional. ■

El Corolario 36 es inmediato del Teorema 14 y porque cero es valor asintótico. También se cumplen las hipótesis del Teorema 26, que nos permitió describir en la Sección 2.1 algunos aspectos de los planos dinámicos para las funciones $f_{\lambda,\mu}$.

Teorema 39 El conjunto de preimágenes de cero bajo $f_{\lambda,\mu}$ es infinito numerable y no acotado. Si lo denotamos por la sucesión $\{p_n\}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} Re(p_n) = -\infty$.

Demostración. Por el Teorema 32 sabemos que cero tiene una infinidad de preimágenes, como son soluciones de la ecuación $ze^z = -\frac{\mu}{\lambda}$, si denotamos a tales puntos con la sucesión $\{p_n\}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$. Procediendo similarmente a la demostración del punto 4 del mismo

Teorema, obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(p_n) = -\infty$. ■

Lo anterior nos dice que las preimágenes del cero se distribuyen hacia la izquierda del plano complejo. En contraste, los puntos fijos repulsivos se distribuyen hacia el lado derecho.

Teorema 40 $f_{\lambda, \mu}$ tiene una infinidad de puntos fijos contenidos en un semiplano derecho, cuya parte real tiende a infinito. Además, todos son repulsivos salvo una cantidad finita.

Demostración. Sea $g_\mu(z) = \frac{z^2 - \mu}{z} e^{-z}$, entonces z es punto fijo de $f_{\lambda, \mu}$ si y sólo si $g_\mu(z) = \lambda$. Como $\lambda \neq 0$ y los únicos valores excepcionales de Picard de g_μ son cero e ∞ , por el Teorema de Picard la ecuación $g_\mu(z) = \lambda$ tiene una infinidad de soluciones. Si a estas soluciones las identificamos con la sucesión $\{z_n\}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. Como $\lambda e^{z_n} + \mu/z_n - z_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{z_n}| = \infty$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \infty$.

En cuanto a la derivada, tenemos que

$$f'_{\lambda, \mu}(z_n) = \lambda e^{z_n} - \frac{\mu}{z_n^2} = z_n - \frac{\mu}{z_n} \left(1 + \frac{1}{z_n}\right).$$

Por lo que sólo una cantidad finita de puntos fijos no son repulsivos. ■

3.2. Dominios de Baker

3.2.1. Existencia

Antes de probar el Teorema 41 necesitamos algunos resultados preliminares. Ello nos permitirán garantizar la existencia de un conjunto abierto no vacío $W_{\lambda, \mu}$ invariante bajo $f_{\lambda, \mu}^2$ si los parámetros tienen ciertas restricciones.

Veremos que $f_{\lambda, \mu}^2$ es esencialmente una traslación en $W_{\lambda, \mu}$. Esto es, que para algún $\delta > 0$, $|f_{\lambda, \mu}^2(z) - (z + \lambda)| < \delta$. Probaremos que $B_\delta(z + \lambda) \subset W_{\lambda, \mu}$. Tenemos que

$$f_{\lambda, \mu}^2(z) = \lambda e^{\lambda e^z + \mu/z} + \frac{\mu z}{\lambda z e^z + \mu}.$$

Si definimos $f_1(z) = \lambda e^{\lambda e^z + \mu/z}$ y $f_2(z) = \frac{\mu z}{\lambda z e^z + \mu}$, entonces $f_{\lambda, \mu}^2(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Definición 69 Sean $M > 0$ y $\delta > 0$:

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |\lambda z^2 e^z| < \frac{\delta \mu}{4}\},$$

$$V = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < -M\} \text{ y}$$

$$W = U \cap V.$$

Obsérvese que W depende de la elección de M y δ . Los lemas siguientes nos garantizarán que para ciertos parámetros λ, μ , existen M y δ que dependen sólo de los parámetros, para los cuales W cumple las propiedades deseadas.

Para empezar, tomemos $z \in \mathbb{R}$. Dado que $\lim_{z \rightarrow -\infty} z^2 e^z = 0$, entonces existe $z_0 < -M$ tal que $|\lambda z_0^2 e^{z_0}| < |\frac{\delta \mu}{4}|$. Entonces $z_0 \in W$. Más aún: $(-\infty, z_0] \subset W$. De la definición de W es inmediato que es un conjunto abierto.

Observación 70 *Para todo $M > 0$ y $\delta > 0$, se tiene que W es un conjunto abierto no vacío. Incluso existe $z_0 \in \mathbb{R}^-$ tal que $(-\infty, z_0] \subset W$.*

Una elección apropiada de M garantizará que $|f_1(z) - \lambda| < \delta/2$ si $z \in W$. La condición que define al conjunto U hará que $|f_2(z) - z| < \delta/2$, con lo cual tendremos que $|f_{\lambda, \mu}^2(z) - (z + \lambda)| < \delta$.

Nótese que si $f_2(z)$ está cerca de z si ze^z es pequeño. A través de la función $g(z) = z^2 e^z$, podremos controlar $|ze^z|$.

Para mostrar que $B_\delta(z + \lambda) \subset W$, será sencillo elegir $\delta > 0$ tal que, para todo $w \in B_\delta(z + \lambda)$, $Re(w) < Re(z)$, con lo cual $w \in V$. Lo difícil está en elegir $M > 0$ y $\delta > 0$ para lograr que $g(w)$ sea más pequeño que $g(z)$.

Lema 71 *Sea $g(z) = z^2 e^z$ y $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Entonces existe $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que si $Re(z) < -M$, se cumple que para todo $w \in B_\delta(z + \lambda)$ se tiene que $|g(w)| < |g(z)|$.*

Demostración. Para cada $y \in \mathbb{R}$ el conjunto $L_y = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy \text{ and } x < -2\}$ es un rayo horizontal en el plano complejo. La restricción de $|g(z)|$ en L_y es $h(x) = (x^2 + y^2)e^x$. Como $x + \frac{y^2}{x} \leq x < -2$, entonces $h'(x) = (2x + (x^2 + y^2))e^x > 0$; por lo tanto h es decreciente en L_y .

Sea $\|w\|_\infty = \max\{|a|, |b|\}$ con $w = a + ib$ y

$$C_\lambda = \{w \in \mathbb{C} : \|w - (z + Re(\lambda))\|_\infty < |Re(\lambda/2)|\}.$$

Como se puede apreciar, C_λ es un cuadrado abierto cuyo lado tiene longitud $|Re(\lambda)|$ y está centrado en $z + Re(\lambda)$, ver Figura 3-1. Se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z + \lambda) \subset C_\lambda$.

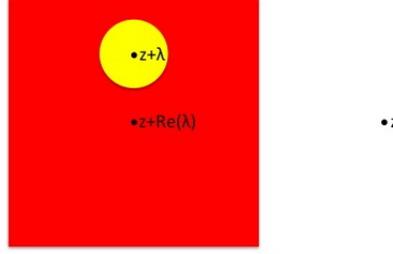


Figura 3-1: C_λ aparece en rojo y contiene a B_δ en amarillo.

Si $Re(z) < -2$ entonces, para todo $w \in C_\lambda$, tenemos que $Re(w) < -2$. Dado que h es decreciente y por el principio del módulo máximo, g alcanza el módulo máximo en el lado derecho del cuadrado C_λ . Veamos por qué el módulo máximo se alcanza en uno de los vértices del lado derecho del cuadrado.

Los puntos en el lado derecho del cuadrado están dados por $w_y = z + Re(\lambda)/2 + iy$, con $y \in [Re(\lambda)/2, -Re(\lambda)/2]$. En tanto que $|e^{wy}|$ es constante, g alcanza su módulo máximo donde z^2 lo hace sobre el lado derecho del cuadrado, esto ocurre cuando $w = z + Re(\lambda)/2 \pm iRe(\lambda)/2$.

Finalmente, queremos verificar que

$$|g(w)| = |z + Re(\lambda)/2 \pm iRe(\lambda)/2|^2 e^{x+Re(\lambda)/2} < |z|^2 e^x.$$

Usando la desigualdad del triángulo, lo único que necesitamos garantizar es que:

$$|Re(\lambda)/2 \pm iRe(\lambda)/2| < (e^{-Re(\lambda)/4} - 1)|z|. \quad (3-1)$$

Puesto que $|Re(\lambda)/2 \pm iRe(\lambda)/2| = \frac{|Re(\lambda)|}{\sqrt{2}}$, tomando $K = e^{-Re(\lambda)/4} - 1$, $M = \max\{\frac{|Re(\lambda)|}{K\sqrt{2}}, 2\}$ y $M < |Re(z)|$, entonces $M < |z|$ y por lo tanto la Ecuación (3-1) se cumple. ■

Lema 72 Sea $f_1(z) = \lambda e^{\lambda z + \mu/z}$. Entonces, existe $M > 0$ tal que $|f_1(z) - \lambda| < \delta/2$, si $Re(z) < -M$.

Demostración. Por continuidad de $E_\lambda(z) - \lambda = \lambda e^z - \lambda$ en el cero, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $|z| < \varepsilon$, entonces $|E_\lambda(z) - \lambda| < \delta/2$. Sea $M > 0$ tal que si $Re(z) < -M$, entonces $|\lambda e^z| < \varepsilon/2$ y $|\mu/z| < \varepsilon/2$, por lo tanto $|\lambda e^z + \mu/z| < \varepsilon$. ■

Proposición 73 Sea $Re(\lambda) \in \mathbb{R}^-$, $|Im(\lambda)| < |Re(\lambda)|/2$ y W como en la Definición 69. Entonces, existen $M > 0$ y $\delta > 0$ para los cuales W es invariante bajo $f_{\lambda,\mu}^2$.

Demostración. Sea $\delta > 0$ como en el Lema 71, $M_1 = \delta/2$, $M_2 > 0$ como en el Lema 71 y $M_3 > 0$ como en el Lema 72. Sea $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$ y $z \in W$.

Tenemos que $|\delta\lambda ze^z/2| < |\lambda z^2 e^z| < |\delta\mu/4|$, donde la primer desigualdad se satisface debido a que $|z| > M_1$; la segunda, debido a que $z \in U$. Entonces

$$|\lambda z^2 e^z| < \left| \frac{\delta\mu}{2} \right| - \left| \frac{\delta\lambda}{2} z e^z \right| \leq \frac{\delta}{2} |\lambda z e^z + \mu|.$$

Por lo que

$$|f_2(z) - z| = \frac{|\lambda z^2 e^z|}{|\lambda z e^z + \mu|} < \frac{\delta}{2}.$$

Dado que $M \geq M_3$, entonces $|f_1(z) - \lambda| < \delta/2$ y $|f_{\lambda,\mu}^2(z) - (z + \lambda)| < \delta$.

Probemos ahora que $B_\delta(z + \lambda) \subset W$. Sabemos que $B_\delta(z + \lambda) \subset C_\lambda$ como en el Lema 71. Para todo $w \in B_\delta(z + \lambda)$, $Re(w) < Re(z) < -M$, entonces $w \in V$. Dado que $M \geq M_2$, tenemos que $|g(w)| < |g(z)|$ en virtud del Lema 71, por lo que $w \in U$ y $w \in W$. Como resultado hemos probado que W es invariante bajo $f_{\lambda,\mu}^2$. ■

Corolario 74 Si $z \in W$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\lambda,\mu}^{2n}(z) = \infty$. Más aún, $\lim_{n \rightarrow \infty} Re(f_{\lambda,\mu}^{2n}(z)) = -\infty$.

Demostración. Dado que $f_{\lambda,\mu}^2(z) \in B_\delta(z + \lambda) \subset C_\lambda$, entonces $Re(f_{\lambda,\mu}^2(z)) < Re(z) + Re(\lambda)/2$, por ello

$$Re(f_{\lambda,\mu}^{2n}(z)) < Re(z) + \frac{Re(\lambda)}{2}n.$$

■

Teorema 41 Sea $\mathcal{B} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : Re(\lambda) < 0 \text{ y } |Im(\lambda)| < \frac{1}{2}|Re(\lambda)|, \mu \neq 0\}$. Si $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}$, entonces $f_{\lambda,\mu}$ tiene un ciclo de dominios de Baker de periodo dos $\{F_\infty, F_0\}$ cuyos puntos de absorción son ∞ y 0 respectivamente.

Demostración. Sea W como en la Proposición 73. De acuerdo al Corolario 74, se tiene que W no tiene puntos periódicos ni preperiódicos, entonces el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_{\lambda, \mu}^n(W)$$

omite más de dos puntos en \mathbb{C} . Por el Teorema de Montel, $f_{\lambda, \mu}$ es normal en W .

El conjunto W está contenido en un dominio F_∞ en el conjunto de Fatou, de acuerdo a la clasificación de las componentes periódicas del conjunto de Fatou, tenemos que F_∞ es un dominio de Baker. Dado que el límite de $Re(f_{\lambda, \mu}^{2n}(z))$ tiende a $-\infty$ como lo muestra el Corolario 74, entonces para todo $z \in W$ y $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$ entonces $|f_{\lambda, \mu}^{2n+1}(z)| < \varepsilon$. De ello se sigue que $f_{\lambda, \mu}(F_\infty)$ está contenido en un dominio del conjunto de Fatou F_0 . La órbita de todo punto en F_0 converge a cero bajo $f_{\lambda, \mu}^2$. Entonces $\{F_\infty, F_0\}$ es un ciclo de dominios de Baker. ■

Corolario 42 Si $\mu \neq 0$, $Re(\lambda) < 0$ y $|Im(\lambda)| < \frac{1}{2}|Re(\lambda)| - 4$, entonces F_∞ contiene una infinidad de puntos críticos de $f_{\lambda, \mu}$ y F_0 contiene una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda, \mu}$.

Demostración. Sean U, V y W como en la Definición 69, con $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $W \subset F_\infty$. Tomamos la sucesión de puntos críticos $\{p_n^c\}$ de $f_{\lambda, \mu}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^c = \infty$ (Teorema 32). Además $\frac{\lambda}{\mu}(p_n^c)^2 e^{p_n^c} = 1$; por lo que si $1 < \frac{\delta}{4}$ entonces $p_n^c \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Del Lema 71, si $\delta = \frac{1}{2}|Re(\lambda)| - |Im(\lambda)|$, entonces $\delta > 4$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} Re(z_n) = -\infty$, entonces $p_n^c \in V$ para todo $n > N$ y algún $N \in \mathbb{N}$.

Además $f_{\lambda, \mu}$ restringida a los puntos críticos $\{p_n^c\}$ es a lo más 2 a 1 (Teorema 32), por lo que F_0 contiene una infinidad de valores críticos. ■

Corolario 43 Si $\mu \neq 0$, $Re(\lambda) < 0$ y $|Im(\lambda)| < \frac{1}{2}|Re(\lambda)| - 4$, entonces tanto F_∞ como F_0 tienen una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda, \mu}^2$.

Demostración. Nuevamente tomamos $\{p_n^c\}$ como la sucesión de puntos críticos de $f_{\lambda, \mu}$. Por el Corolario 42, para algún $N \in \mathbb{N}$, si $n > N$ entonces $p_n^c \in F_\infty$. Sea

$$P = \{z \in \mathbb{C} : f_{\lambda, \mu}(z) = p_n^c \text{ y } n > N\}.$$

Dado que $f_{\lambda, \mu}^2(P) \subset F_0$, para todo $n > N$, entonces F_0 contiene una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda, \mu}^2$.

De acuerdo al Corolario 42, para todo $n > N$, $p_n^c \in W$. Por la Proposición 73, si $z \in W$ entonces

$$|f_{\lambda,\mu}^2(z) - (z + \lambda)| < \delta \leq \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{2}.$$

Si $f_{\lambda,\mu}^2(p_n^c) = f_{\lambda,\mu}^2(p_m^c)$ para algunos $n, m > N$, entonces por la desigualdad del triángulo $|p_n^c - p_m^c| < 2\delta$. Por ello $f_{\lambda,\mu}^2$ es a lo más finito a uno en $\{p_n^c\} \subset W$ y F_∞ contiene una infinidad de valores críticos de $f_{\lambda,\mu}^2$. ■

3.2.2. Conectividad

El camino que seguiremos para demostrar el resultado principal de esta sección será probar que la función $f_{-20,1/4}$ (que llamaremos f_h) tiene ambos dominios de Baker con infinidad de hoyos. Para ello, mostraremos que F_0 tiene uno que contiene al ramillete en cero R_0 . Luego mostraremos que sus preimágenes van generando otros hoyos, de manera que al encontrar dos hoyos en F_0 y F_∞ se concluye que la conectividad de ambos es infinita. Posteriormente, por continuidad se podrá extender el resultado a las funciones cuyos parámetros pertenecen a un conjunto abierto $\mathcal{B}_h \subset \mathbb{C}^2$ tal que $(-20, 1/4) \in \mathcal{B}_h$.

Comencemos por probar un par de resultados que muestran cómo bajo ciertas condiciones, los hoyos en un dominio de Fatou U generan hoyos en la imagen directa o inversa de U .

Teorema 45 *Sea f una función meromorfa con una cantidad finita de valores asintóticos. Si U y V son componentes conexas del conjunto de Fatou de f , tal que $f(U) \subseteq V$ y V tiene conectividad infinita, entonces U es múltiplemente conexo.*

Demostración. Hay una componente del conjunto de Julia J_0 y una curva cerrada $\gamma \subset V$ rodeando J_0 y que delimita una región que no contiene valores asintóticos de f . Dado que f en U es una cubriente (posiblemente ramificada) para V excepto por sus valores asintóticos, entonces existe una preimagen compacta de γ contenida en U . Esta preimagen rodea a una componente de la preimagen de J_0 , entonces U no es simplemente conexo. ■

Teorema 46 *Sea f una función meromorfa con una cantidad finita de polos. Si U y V son componentes conexas de $F(f)$ tales que, U tiene conectividad infinita y $f(U) \subseteq V$, entonces V es múltiplemente conexo.*

Demostración. Hay una componente del conjunto de Julia J_0 y una curva cerrada $\gamma \subset U$ rodeando J_0 que delimita una región sin polos de f . Entonces $f(\gamma) \subset V$ y $f(\gamma)$ contiene una curva cerrada que rodea a $f(J_0)$. ■

Para encontrar la isla en F_0 que contiene a cero, usaremos nuevamente los conjuntos que nos permitieron demostrar la existencia de los dominios de Baker.

Sean $M > 0$ y $\delta > 0$.

$$U_{\lambda,\mu} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z^2 e^z| < \left| \frac{\delta\mu}{4\lambda} \right| \right\}, \quad (3-2)$$

$$V_{\lambda,\mu} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < -M \} \quad (3-3)$$

y $W_{\lambda,\mu} = U_{\lambda,\mu} \cap V_{\lambda,\mu}$.

Los conjuntos no sólo quedan definidos por la elección de M y δ , sino que dependen de los parámetros λ y μ . Esta vez nos ayudará tener eso presente y por ello los subíndices en los conjuntos. La Figura 3-1 de la sección anterior nos muestra que podemos elegir $\delta = \frac{1}{2}| \operatorname{Re}(\lambda) | - | \operatorname{Im}(\lambda) |$ y entonces existe $M > 0$ tal que $W_{\lambda,\mu} \subset F_\infty$. Ahora pasemos a encontrar cotas específicas que nos permitan encontrar un $W_{-20,1/4}$.

Lema 75 Sea $f_h(z) = f_{-20,1/4}(z)$. Si $U_h = \{ z \in \mathbb{C} : |z^2 e^z| < 1/32 \}$ y $V_h = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < -6 \}$. Entonces $W_h = U_h \cap V_h$ está contenido en F_∞ de f_h .

Demostración. Como en este caso $\lambda = -20$ y $\mu = 1/4$, calculando obtenemos que $\left| \frac{\delta\mu}{4\lambda} \right| = 1/32$. Por la Proposición 73, $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$. Donde $M_1 = |\lambda|/4 = 5$. Si $M_2 = \max\left\{ \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{K\sqrt{2}}, 2 \right\}$ y $K = e^{-\operatorname{Re}(\lambda)/4} - 1$, entonces $M_2 = 2$.

Para elegir M_3 es necesario que, si $\operatorname{Re}(z) < -M_3$, entonces $|\lambda e^{\lambda e^z + \mu/z} - \lambda| < \delta$. Sea $\varepsilon = 1/10$ y $z = x + iy$.

Si $|z| < 1/10$, tenemos que $7/8 < e^x \cos y < 9/8$ y $|\operatorname{Im}(e^z)| \leq e^{1/10} \sin(1/10) < 1/8$. Por ello, $|e^z - 1| < 1/4$. Si $\operatorname{Re}(z) < -6$, entonces $20|e^z| < 1/20$ y $|\frac{1}{4z}| < 1/20$. Por lo tanto $M_3 = 6$ y $M = 6$. ■

Ahora pasemos a probar que efectivamente F_0 tiene un hoyo. Para ello tomamos una curva γ en F_0 y veremos que su imagen bajo f_h queda contenida en F_∞ , ver Figura 3-2.

Lema 76 Sea $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : \max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} = 1/8 \}$. Entonces $f_h(\gamma) \subset W_h$.

Demostración. Sea $z \in \gamma$. Dado que $|z| \geq 1/8$, entonces $\operatorname{Re}(\frac{1}{4z}) \leq 2$. Por otro lado,

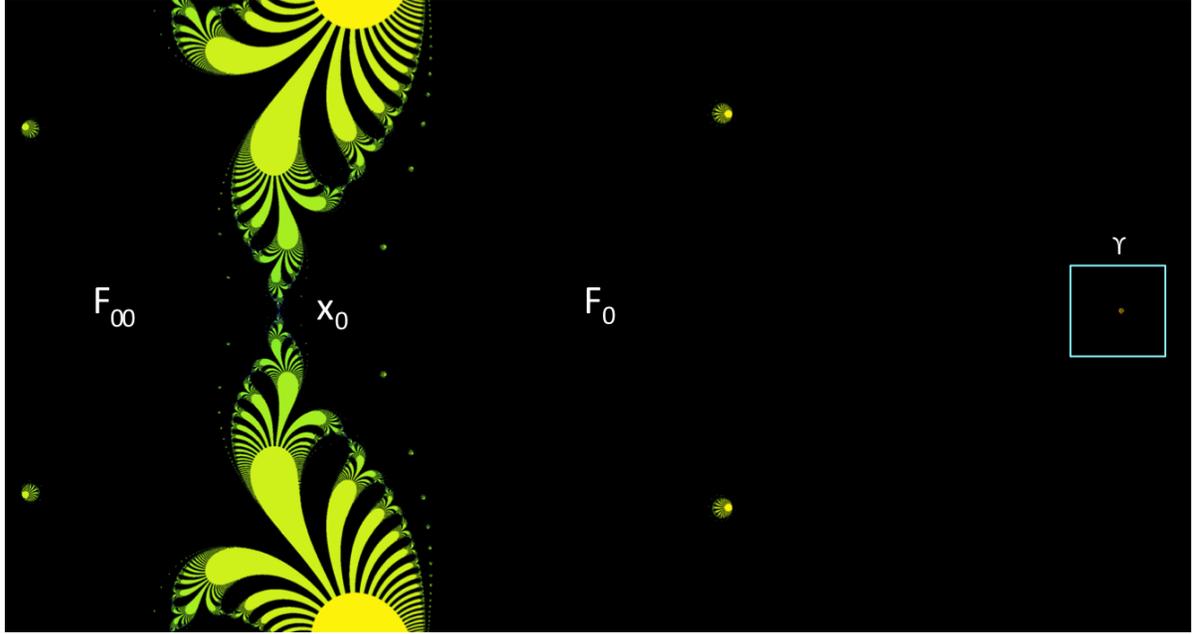


Figura 3-2: $\{F_\infty, F_0\}$ es un ciclo de dominios de Baker de f_h . Entre estos dos dominios hay un punto fijo repulsor real x_0 . La curva azul es γ del Lema 76 que rodea al polo. Las componentes conexas del conjunto de Julia que contienen ramilletes son las islas descritas anteriormente.

$Re(-20e^z) \leq -20e^{-1/8} \cos(1/8) < -17$, por lo cual $Re(f_h(z)) < -14$. Así llegamos a que $f_h(z) \in V_h$.

Además,

$$|(f_h(z))^2 e^{f_h(z)}| \leq e^{-14} \left(20|e^z| + \left| \frac{1}{4z} \right| \right)^2 \leq e^{-14} (20e^{1/8} + 2)^2 < 1/32.$$

Entonces $f_h(z) \in U_h$ para todo $z \in \gamma$. ■

Considerando la dinámica de f_h en la esfera de Riemann, dado que $\{0, \infty\} \subset J(f_h)$, entonces γ es una separación de $J(f_h)$. Como el conjunto de Julia es perfecto, tenemos además que $J(f_h)$ es disconexo en \mathbb{C} .

Corolario 77 *El conjunto de Julia de f_h es disconexo.*

El siguiente resultado nos permite asegurar que γ está contenido en F_0

Lema 78 *Sea $\alpha = \{z \in \mathbb{C} : -1/8 \leq Re(z) < 0 \text{ and } Im(z) = 0\}$. Entonces $\alpha \subset F_0$.*

Demostración. Consideremos la función real $f_{\lambda,\mu}(x) = \lambda e^x + \mu/x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda < 0$ y $\mu > 0$, entonces $f'_{\lambda,\mu}(x) < 0$, por lo tanto $f_{\lambda,\mu}$ es decreciente en $(-\infty, 0)$. Si $x < 0$, entonces $f_{\lambda,\mu}(x) < 0$; además $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = 0$ y, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_{\lambda,\mu}(x) = -\infty$. Por lo que $f_{\lambda,\mu}(x)$ tiene sólo un punto fijo x_0 en \mathbb{R}^- . Entonces $f_{\lambda,\mu}((x_0, 0)) = (-\infty, x_0)$ y $f_{\lambda,\mu}((-\infty, x_0)) = (x_0, 0)$. Más todavía, $f_h(\alpha) \subset W_h$, $f_h^2(\alpha) \subset F_0$ y $f_h^2(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$, entonces $\alpha \subset F_0$. ■

Teorema 44 Si $f_h(z) = -20e^z + \frac{1}{4z}$, entonces los dominios de Baker de f_h son de conectividad infinita.

Demostración. Puesto que $\gamma \cap \alpha \neq \emptyset$, entonces $\gamma \subset F_0$. Por lo que F_0 es múltiplemente conexo. Denotemos por J_0 la componente del conjunto de Julia de f_h que contiene al polo.

Sea C_γ la región compacta delimitada por γ , en tanto que $\gamma_{-1} \subset F_\infty$ es una componente de $f_h^{-1}(\gamma)$ y C_{-1} es la componente correspondiente de $f_h^{-1}(C_\gamma)$ a γ_{-1} .

Si γ_{-1} es compacto, como f_h es holomorfa y C_{-1} no tiene polos, entonces la frontera de C_{-1} está contenida en F_∞ y el interior contiene un punto z_{-1} tal que $f_h(z_{-1}) = 0$. Por lo tanto, F_∞ es múltiplemente conexo.

Al tomar γ_{-1} no acotado, si $|Re(z)|$ es suficientemente grande, entonces $f_h(z) \approx -20e^z$, así que para algún $M > 0$ el conjunto $P = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < -M\}$ está contenido en C_{-1} . Como P contiene un punto ordinario z_{-1} tal que, $f_h(z_{-1}) = 0$, entonces hay una preimagen compacta de γ rodeando a z_{-1} y por ello F_∞ no es simplemente conexo.

Sea J_{-1} la componente conexa del conjunto de Julia de f_h tal que $z_{-1} \in J_{-1}$, entonces $f_h(J_{-1}) = J_0$ y J_{-1} está rodeada por F_∞ . Puesto que J_{-1} no tiene valores asintóticos, por el Teorema 45, hay una componente $f_h^{-2}(\gamma)$ contenida en F_0 rodeando a la componente J_{-2} del conjunto de Julia que satisface que $f_h^2(J_{-2}) = J_0$, entonces $J_{-2} \neq J_0$. Por lo tanto F_0 tiene conectividad mayor a dos, entonces su conectividad es ∞ (Teorema 23). Repetimos este argumento para obtener que F_∞ tiene conectividad ∞ . ■

Antes de pasar al resultado principal de esta sección, veamos algunas propiedades de los dominios de Baker de f_h .

La Figura 3-2 sugiere que las fronteras de los dominios de Baker F_0 y F_∞ comparten un punto x_0 . De hecho x_0 es punto fijo repulsor.

Proposición 47 Existe un punto fijo repulsor $x_0 \in \mathbb{R}^-$ de f_h , tal que $(-\infty, x_0) \subset F_\infty$ y $(x_0, 0) \subset F_0$.

Demostración. Sea x_0 el punto fijo del Lema 78. Ahora consideremos la función real $f_r(x) = -20e^x + \frac{1}{4x}$, entonces $f_r'(x_0) = x_0 - \frac{1}{4x_0^2}(1+x_0)$. Además $f_r(-1) < -1$ y $f_r(-2.5) > -2.5$, por lo que $-2.5 < x_0 < -1$. Así obtenemos que $f_r'(x_0) < -1$ y x_0 es un punto fijo repulsor. Dado que $f_r(x_0, 0) = (-\infty, x_0)$, la proposición queda demostrada si $(x_0, 0) \subset F_0$.

Por otro lado, $f_r(-1) < -7$, entonces $f_h(-1) \in W_h$ y $(-\infty, f_h(-1)] \subset F_\infty$. Más aún, $[-1, 0) \subset F_0$, pues $\gamma \cap [-1, 0) \neq \emptyset$. Para probar que $(x_0, -1) \subset F_0$, mostraremos que $f_r^2(x) > x$ si $x \in (x_0, -1]$, ver Figura 3-3.

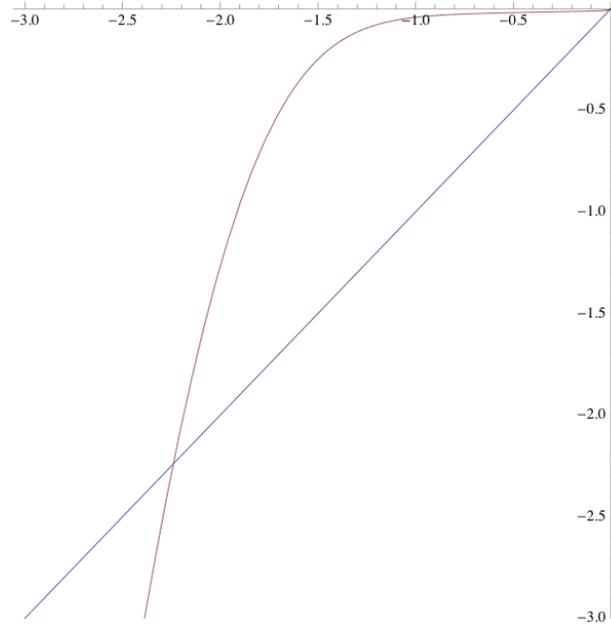


Figura 3-3: Gráfica de f_r^2 .

Comencemos por notar que para todo $x \in \mathbb{R}^-$ se cumple que $f_r^2(x) < 0$, $0 < (f_r^2)'(x)$ y $-1 < f_r^2(-1)$. Sea $a = -20e^{f_r(x)}$, $b = -20e^x$ y $c = f_r(x)$. Si x es negativo, entonces los tres valores a , b y c son también números negativos. Además

$$(f_r^2)''(x) = \left(a + \frac{1}{2c^3}\right) \left(b - \frac{1}{4x^2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{4c^2}\right) \left(b + \frac{1}{2x^3}\right).$$

Entonces,

$$(f_r^2)''(x) = ab(1+b) + \frac{a}{2x^2} \left(\frac{1}{x} - b \right) + \frac{b}{4c^2} \left(\frac{2b}{c} - 1 \right) - \frac{1}{8c^2x^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{2b}{c} \right) + \frac{a}{16x^4} + \frac{1}{32c^3x^4}.$$

Para todo x que cumple que $x_0 \leq x \leq -1$ se tiene que $b < -1$, $1/x - b > 0$, $\frac{2b}{c} - 1 > 0$ y $\frac{1}{x} + \frac{2b}{c} > 0$. Por ello para todo $x \in [x_0, -1]$, tenemos que $(f_r^2)''(x) < 0$.

Así que $f_r^2(x) > x$ si $x \in (x_0, -1]$. Esto implica que la órbita de todo punto en $(x_0, -1)$ eventualmente entra en F_0 . Con ello hemos probado que $(x_0, 0) \subset F_0$. ■

Dado que $\gamma \subset F_0$ y $f_h([1/8, \infty)) \subset (-\infty, x_0)$, entonces queda probado el Corolario 47.

Usando la continuidad de la familia respecto a los parámetros, varios de los resultados anteriores son fáciles de extender a otras funciones de la familia $f_{\lambda, \mu}$.

Teorema 49 *Existe un conjunto abierto no vacío $\mathcal{B}_h \subset \mathbb{C}^2$ tal que, para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_h$ los dominios de Baker F_∞ y F_0 de $f_{\lambda, \mu}$ son de conectividad infinita.*

Demostración. Consideremos \mathcal{B} como en el Teorema 41; además de $U_{\lambda, \mu}$ y $V_{\lambda, \mu}$ de las ecuaciones 3-2 y 3-3 respectivamente y, tomamos $W_{\lambda, \mu} = U_{\lambda, \mu} \cap V_{\lambda, \mu}$; finalmente consideramos γ como en el Lema 76.

Puesto que la función z^2e^z es continua, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, si $(\lambda, \mu) \in B_{\varepsilon_1}(-20, 1/4)$, entonces $f_{\lambda, \mu}(\gamma) \subset U_{\lambda, \mu}$.

Por otro lado, es posible elegir M que determina a $V_{\lambda, \mu}$ de tal manera que M depende continuamente de λ y μ . Para cada pareja de parámetros elegimos $M_{\lambda, \mu}$ de modo que $M_{-20, 1/4} = 6$. Ahora tomemos $\varepsilon_2 > 0$ para que si $(\lambda, \mu) \in B_{\varepsilon_2}(-20, 1/4)$, entonces $f_{\lambda, \mu}(\gamma) \subset V_{\lambda, \mu}$.

Ya que $f_h(W_h) \cap \gamma \neq \emptyset$ y $W_{\lambda, \mu}$ depende continuamente de λ y μ , existe $\varepsilon_3 > 0$ tal que si $(\lambda, \mu) \in B_{\varepsilon_3}(-20, 1/4)$, entonces $f_{\lambda, \mu}(W_{\lambda, \mu}) \cap \gamma \neq \emptyset$.

Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Si $(\lambda, \mu) \in B_\varepsilon(-20, 1/4)$, entonces $f_{\lambda, \mu}$ tiene un ciclo de dominio de Baker de periodo dos $\{F_0, F_\infty\}$ y $\gamma \subset F_0$. Por lo cual F_0 es de conectividad múltiple. Usando los argumentos en el Teorema 44 obtenemos que F_0 y F_∞ tienen conectividad ∞ si $(\lambda, \mu) \in B_\varepsilon(-20, 1/4)$. ■

Nótese que γ para todas las funciones en \mathcal{B}_h da una separación del conjunto de Julia de $f_{\lambda, \mu}$, lo que prueba el Corolario 50. Además del Teorema anterior y el Corolario 24 se concluye

inmediatamente el Corolario 51.

3.3. Espacio de parámetros

Teorema 52 *Para la familia de funciones complejas $f_{\lambda,\mu}$, el conjunto de atracción de periodo uno \mathcal{H}_1 es no acotado.*

Demostración. Si z es un punto fijo súper atractor de $f_{\lambda,\mu}$, entonces $\lambda e^z + \mu/z = z$ y $\lambda e^z - \mu/z^2 = 0$. De ahí obtenemos que,

$$\mu = \frac{z^3}{z+1} \quad (3-4)$$

y

$$\lambda = \frac{z}{e^z(z+1)}. \quad (3-5)$$

Entonces para todo $z \neq -1$ existen parámetros para los cuales $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo súper atractor. Si $z \rightarrow -1$, entonces λ y μ tienden a infinito. ■

Ahora consideremos la función real $g_{\lambda,\mu}(x) = \lambda e^x + \mu/x$, $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sea \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_{-1} las curvas en el (λ, μ) – plano para las cuales $g_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo con derivada 0, 1 y -1 respectivamente. Por ello \mathcal{L}_0 es el conjunto de parámetros reales para los cuales $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo real súper atractor, entonces $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{H}_1$. Por otro lado, $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_{-1}$ es el conjunto de parámetros reales para los cuales $f_{\lambda,\mu}$ tiene un punto fijo real indiferente.

Las ecuaciones 3-4 and 3-5 dan una parametrización de \mathcal{L}_0 . Procediendo de manera similar obtenemos \mathcal{L}_1 . En el caso de \mathcal{L}_{-1} el punto fijo siempre es -1 y la curva de hecho es una recta.

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda = \frac{x}{e^x(x+1)} \text{ y } \mu = \frac{x^3}{x+1} \right\},$$

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda = \frac{2x}{e^x(x+1)} \text{ y } \mu = \frac{x^2(x-1)}{x+1} \right\},$$

y

$$\mathcal{L}_{-1} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu = 1 + e^{-1}\lambda\}.$$

Por la continuidad de $g_{\lambda,\mu}(x)$ y su derivada respecto a x y los parámetros, se obtiene la demostración del Corolario 53.

Bibliografía

- Aarts, J. & Oversteegen, L. [1993] “The geometry of the Julia sets,” *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **338** (2), 897–918.
- Ahlfors, L. [1966] *Complex Analysis*, 2nd Ed. (International Student Edition, McGraw-Hill).
- Baker, N. [1976] “An entire function which has wandering domains,” *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **22**, 173–176.
- Baker, N. [1987] “Iteration of meromorphic functions: an introductory survey,” *Lectures on Complex Analysis, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, and Hong Kong* 1–17.
- Baker, N. [1987] “Wandering domains for maps of a punctured plane,” *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **12**, 191–198.
- Baker, N., Kotus, J. & Lü, Y. [1991] “Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains,” *Erg. Th. Dyn. Syst.* **11**, 603–618.
- Barański, K., Fagella, N., Jarque, X. & Karpińska, B. [2012] “On the connectivity of the Julia sets of meromorphic functions,” *arXiv:1206.6667 [math.DS]* 1–34.
- Bergweiler, W. [1993] “Iteration of meromorphic functions,” *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **29**, 151–188.
- Bergweiler, W. [1995] “Invariant domains and singularities,” *Math. Pro. Cambridge Philos. Soc.* **117**, 525–532.
- Bergweiler, W. [2014] “Comments and corrections to ‘Iteration of meromorphic functions’”, <http://analysis.math.uni-kiel.de/bergweiler/schrift.html>.

- Bergweiler, W. & Eremenko A. [1995] “On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order,” *Rev. Matem. Iberoamericana* Vol. 11 **2**, 355–373.
- Blé, G. & Valdez, R. [2006] “Dinámica de los polinomios cuadráticos,” *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **3**, 1–25.
- Bolsch, A. [1999] “Periodic Fatou components of meromorphic functions,” *Bull. London Math. Soc.* **31**, 543–555.
- Broer, H., Takens, F. & Hasselblatt, B. [2010] *Handbook of Dynamical Systems*, (Elsevier), Vol. 3, 125–224.
- Devaney, R. [1989] *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd Ed. (Addison-Wesley).
- Devaney, R. [1999] “Cantor bouquets, explosions and Knaster continua: dynamics of complex exponentials,” *Publ. Math.* **43**, 27–54.
- Devaney, R. [2006] “Complex Exponential Dynamics,” preprint. Published in [Broer *et al.*, 2010].
- Devaney, R., Holzer, M., Look, D., Moreno, M. & Uminsky, D. [2008] “Singular perturbations of z^n ,” *London Math. Soc. Lect. Note Series* **348**, 111–137.
- Devaney, R. & Krych, M. [1984] “Dynamics of $\exp(z)$,” *Erg. Th. and Dyn. Syst.* **4**, 35–52.
- Domínguez, P. [1998] “Dynamics of Transcendental Meromorphic functions,” *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23**, 225–250.
- Fagella, N. & Henriksen, C. [2006] “Deformation of entire functions with Baker domains,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **15** (2), 379–394.
- Fatou, P. [1919] “Sur le équations fonctionelles,” *Bull. Soc. Math. France* **47**, 161–271; [1920] **48**, 33–94, 208–314.
- Herman, M. [1985] “Are there critical points on the boundary of singular domains?,” *Comm. Mat. Phys.* **99**, 593–612.

- Karpińska, B. [2003] “On the accesible points in the Julia set of some entire functions,” *Fun. Math.* **180**, 89–98.
- Kisaka, M. & Shishikura, M. [2008] “On multiply connected wandering domains of entire functions,” in *Transcendental Dynamics and Complex Analysis*, edited by Rippon, P. & Stallard, G., (Cambridge University Press) LMS Lecture Note Series **348**, 217–250.
- Knoebel, A. [1981] “Exponentials reiterated,” *The Am. Math. Monthly* **88**, 235–252.
- König, H. [1999] “Conformal conjugacies in Baker domains,” *J. London Math. Soc.* **59**, 153–170.
- Lauber, A. [2004] *On the Stability of Julia Sets of Functions having Baker Domains*, PhD Thesis, University at Göttingen.
- McMullen, C., [1987] “Area and Hausdorff dimension of the Julia sets of entire functions,” *Trans. of the Am. Math. Soc.* **300**, 329–342.
- Mayer, J. [1990] “An explosion point for the set of endpoints of the Julia set of $\lambda \exp(z)$,” *Erg. Th. and Dyn. Syst.* **10**, 177–183.
- Milnor, J. [2006] *Dynamics in one complex variable*, 3rd Ed. (Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press), **160**.
- Misiurewicz, M. [1981] “On iterates of e^z ,” *Erg. Th. and Dyn. Syst.* **8**, 103–106.
- Montes de Oca, M., [2007], *Aspectos dinámicos de la familia λe^z* , Tesis para obtener el grado de matemático, UNAM.
- Montes de Oca, M., [2011], *Un primer entrón a la familia $f_{\lambda, \mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$* , Tesis para obtener el grado Maestro en Ciencias, UNAM.
- Montes de Oca, M., Sienra, G. & King, J. [2014] “Baker domains of period two for the family $f_{\lambda, \mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$,” *Int. J. of Bif. and Chaos* Vol. 25 **5**, 1–8.
- Montes de Oca, M., [2014], “Singular perturbed with period two multiply-connected Baker domains,” preprint, 1–15.

- Morosawa, S., Nishimura, Y., Taniguchi, M. & Ueda, T. [2000] *Holomorphic Dynamics*, (Cambridge University Press).
- Nayak, T. [2012] “Herman rings of meromorphic maps with an omitted value,” *arXiv:1211.0600v1 [math.DS]*, 1–12.
- Nayak, T. & Zheng, J. [2012] “Omitted values and dynamics of meromorphic functions,” *arXiv:1211.1816v1 [math.CV]*, 1–19.
- Remmert, R. [1991] *Theory of Complex Functions*, 2nd Ed. (Springer-Verlag).
- Rippon, P. & Stallard, G. [1999] “Iteration of a class of hyperbolic meromorphic functions,” *Proc. Amer. Math. Soc.* **127**, 3251–3258.
- Rippon, P. & Stallard, G. [2006] “Singularities of meromorphic functions with Baker domains,” *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **141**, 371–382.
- Rippon, P. & Stallard, G. [2007] “On multiply connected wandering domains of meromorphic functions,” *arXiv:0711.2582v1 [math.CV]*.
- Rippon, P. & Stallard, G. [2008] *Transcendental Dynamics and Complex Analysis*, (Cambridge University Press).
- Rottenfusser, G., Rückert, J., Rempe, L. & Schleicher, D. [2009] “Dynamics rays of bounded-type entire functions,” *arXiv:0704.3213.v2 [math.DS]*, 1–42.
- Rubiano, G. N. [2009] *Iteración y fractales (con Mathematica)*, (Universidad Nacional de Colombia).
- Viana, M. [1998] “The differentiability of the hairs of $\exp(z)$,” *Proc. Amer. Math. Soc.* **103**, 1179–1184.