



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE ESCHER PARA
HIPERGESTOS EN LA TEORÍA
MATEMÁTICA DE LA MÚSICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:
YEMILE DEL SOCORRO
CHÁVEZ MARTÍNEZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. EMILIO ESTEBAN LLUIS PUEBLA

2015

Ciudad Univesitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Chávez
Martínez
Yemile del Socorro
56068486
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
307505969
2. Datos del tutor
Dr.
Emilio Esteban
Luis
Puebla
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Rodolfo
San Agustín
Chi
4. Datos del sinodal 2
Dra.
Eugenia
O'Reilly
Regueiro
5. Datos del sinodal 3
Dra.
Diana
Avella
Alaminos
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Octavio Alberto
Agustín
Aquino
7. Datos del trabajo escrito
Teorema de Escher para hipergestos en la Teoría Matemática de la
Música
55 p.
2015

Índice general

Introducción	v
Capítulo 1. Conceptos preliminares	1
1. Digráficas	1
2. Topología	2
3. Categorías	4
Capítulo 2. Categoría de Digráficas y Gestos	15
Capítulo 3. Categorías topológicas y el Teorema de Escher	37
Apéndice A. Resumen histórico de la Teoría de la Interpretación	47
1. La Tradición Filosófica	47
2. La Tradición Empírica	50
Bibliografía	53
Índice alfabético	55

No te rindas

*No te rindas, aún estás a tiempo
de alcanzar y comenzar de nuevo,
aceptar tus sombras,
enterrar tus miedos,
liberar el lastre,
retomar el vuelo.*

*No te rindas que la vida es eso,
continuar el viaje,
perseguir tus sueños,
destrabar el tiempo,
correr los escombros
y destapar el cielo.*

*No te rindas, por favor no cedas,
aunque el frío queme,
aunque el miedo muerda,
aunque el sol se esconda y se calle el viento,
aún hay fuego en tu alma,
aún hay vida en tus sueños
porque la vida es tuya y tuyo también el deseo,
porque lo has querido y porque te quiero,
porque existe el vino y el amor, es cierto;
porque no hay heridas que no cure el tiempo.*

*Abrir las puertas,
quitar los cerrojos,
abandonar las murallas que te protegieron,
vivir la vida y aceptar el reto,
recuperar la risa,
ensayar un canto,
bajar la guardia y extender las manos,
desplegar las alas e intentar de nuevo,
celebrar la vida y retomar los cielos.*

*No te rindas, por favor no cedas,
aunque el frío queme,
aunque el miedo muerda,
aunque el sol se ponga y se calle el viento,
aún hay fuego en tu alma,
aún hay vida en tus sueños
porque cada día es un comienzo nuevo,
porque esta es la hora y el mejor momento;
porque no estás solo, porque yo te quiero.*

Mario Benedetti

Agradecimientos

A mi familia, todos mis tíos, tías y madrina, primos y sobrinos.

A Nena por ser una segunda madre para mí.

A mis hermanas Lenia y Caty, sin ustedes la vida sería muy aburrida, las amo mucho.

A Muñeca, aunque no leas esto, por ser quien me enseñó lo que es la ternura.

A Jesús, por ti estoy aquí, por ser lo más cercano a un padre para mí.

A Frank por darme tanto amor y tantas enseñanzas, no lo hubiera logrado sin ti.

A mis amigos más entrañables, Raquel, Sara, Daniela, Marina, Ari y Memo, ustedes me enseñaron lo que es la amistad. Carmen, Edgar, Cata, Meli y Moy, sin ustedes la facultad hubiera sido un lugar muy frío, por llenar mis días en la facultad de momentos felices.

A mi maestro Pablo Wong, quien estuvo ahí cuando empecé este viaje, por siempre animarme, enseñarme a ser objetiva con mis capacidades y guiarme en el camino de la música.

Al Profesor Emilio Lluís por darme esta oportunidad que me ha dado tantas alegrías.

A quien estuvo conmigo durante toda la carrera, siempre animándome en continuar a pesar de lo difíciles que parecieran las cosas.

A la facultad y toda su comunidad por enseñarme lo que es la ciencia, sus buenas y malas caras.

Pero sobre todo a mi madre, mi ejemplo de vida, esta tesis es para ti. Gracias por darme todo lo que me has dado a pesar de lo difícil que ha sido para ti también. Por cuidarme y nunca rendirte conmigo. Por ser la mejor madre.

Introducción

Este trabajo está basado en los artículos [Mazzola 2007] y [Mazzola 2009]. Hemos hecho una exposición cuyo fin es hacer accesible a un público más amplio los rudimentos de la teoría de gestos e hipergestos como parte de la Teoría Matemática de la Música.

En el primer capítulo damos las definiciones necesarias para desarrollar los conceptos que más tarde se construirán. Definimos inicialmente el concepto de digráfica, espacio topológico, categoría y funtor, dando algunos ejemplos utilizados en el desarrollo del trabajo. Así mismo, en el segundo capítulo definimos el concepto de un Δ -gesto en el espacio topológico X , donde Δ será una digráfica. Es con ayuda de éste último que definimos los hipergestos, los *gestos de gestos*, ofreciendo así el concepto de gesto como un buen ejemplo de conjunción de métodos algebraicos y topológicos. *El gesto es un morfismo, donde el vínculo es un movimiento real y no solamente una flecha simbólica sin sustancia que lo respalde* (CF [Mazzola 2007] p.25).

Una vez establecidos estos conceptos matemáticos damos una primera aproximación al Teorema de Escher de Mazzola. En el desarrollo que nos conduce a la prueba de este resultado, damos algunas demostraciones propias que, creemos, clarifican el desarrollo conceptual de la teoría. Posteriormente, en el tercer capítulo, vemos que dicha aproximación puede aplicarse a un concepto un poco más abstracto, para lo cual definimos una clase particular de categorías que cuentan con una estructura de espacio topológico. Esto generaliza aún más nuestro concepto de gesto e hipergesto permitiéndonos así enunciar y demostrar finalmente el Teorema de Escher.

Durante el desarrollo de este trabajo se recibió gran apoyo del Dr. Emilio Lluís Puebla, quien propuso los artículos a estudiar, además de seguir y guiar la evolución de este trabajo y las diversas dificultades teóricas que se encontraron en éste; así mismo del Dr. Guerino Mazzola, quien hiciera comentarios pertinentes a la exposición de este trabajo durante el I Congreso Internacional sobre Música y Matemáticas, Puerto Vallarta 2014, y el M. en C. Francisco Barrios Paniagua, quien revisó diversas versiones previas al trabajo final, y con el que sostuve varias conversaciones que me permitieron delinear mejor algunos aspectos teóricos.

Para el mejor aprovechamiento de este trabajo, si bien definimos todos los conceptos involucrados, es necesario que el lector haya tenido un curso introductorio a la teoría de categorías, topología y que esté familiarizado con los conceptos musicales básicos relativos a la lectura y ejecución de la música.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1. Digráficas

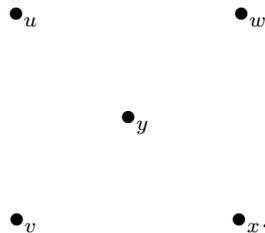
En nuestro trabajo definiremos inicialmente la categoría de digráficas, siendo la idea intuitiva de categoría una colección de objetos y una colección de flechas o morfismos que relacionan a cada par de objetos de la categoría. Para esto necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 1.1. Una **digráfica** D es un par ordenado (V_D, A_D) , donde V_D es el conjunto de vértices y A_D un conjunto de flechas ajeno a V_D , junto con una función (llamada de **incidencia**) ψ_D que asocia a cada flecha de D un par ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de D . Esto es $\psi_D : A_D \rightarrow V_D \times V_D$. En general si $\psi_D(a) = (u, v)$, entonces se dice que el vértice u es la **cola** de a y v es la **cabeza** de a .

Definamos también $t, h : A_D \rightarrow V_D$ tal que $t = p_1 \circ \psi_D$ la proyección en la primera coordenada de las flechas de D y $h = p_2 \circ \psi_D$ la proyección en la segunda coordenada de las flechas de D . A la primera proyección le llamaremos la función *cola*, mientras que a la segunda la función *cabeza*. Es decir, $\psi_D(a) = (t(a), h(a))$

Cabe mencionar también, que de ahora en adelante para nosotros serán equivalentes la digráfica D y la función de incidencia ψ_D , por lo cual haciendo abuso de la notación, denotaremos de igual forma tanto a una digráfica como a la función que relaciona a sus flechas con sus vértices.

Ejemplo 1.2. Consideremos los conjuntos $A_D = \emptyset$ y $V_D = \{u, v, w, x, y\}$ y la función de incidencia $\psi_D : A_D \rightarrow V_D^2$, donde $V_D^2 = V_D \times V_D$, con ψ_D trivial, ya que A_D es vacío. Por lo que la digráfica D está representada por:

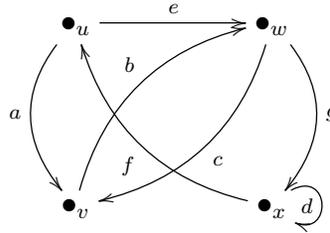


Ejemplo 1.3. Consideremos los conjuntos $A_D = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $V_D = \{u, v, w, x\}$ y la función de incidencia $\psi_D : A_D \rightarrow V_D^2$, donde $V_D^2 = V_D \times V_D$, definida por

$$\psi_D(a) = (u, v), \psi_D(b) = (v, w), \psi_D(c) = (w, v), \psi_D(d) = (x, x),$$

$$\psi_D(e) = (u, w), \psi_D(f) = (x, u) \text{ y } \psi_D(g) = (w, x)$$

que gráficamente se representa por:



Definición 1.4. Sean D y G digráficas. Un **morfismo de digráficas** $f : D \rightarrow G$ es un par de funciones $f = (\phi, \theta)$ con $\phi : A_D \rightarrow A_G$ y $\theta : V_D \rightarrow V_G$, tales que hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} A_D & \xrightarrow{\phi} & A_G \\ \psi_D \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_G \\ V_D^2 & \xrightarrow{\theta^2} & V_G^2 \end{array}$$

Donde $V_G^2 = V_G \times V_G$ y $\theta^2 = (\theta, \theta) : V_D^2 \rightarrow V_G^2$.

2. Topología

Recordemos la definición de topología con la cual posteriormente trabajaremos.

Definición 1.5. Sea X un conjunto. Una **topología** en X es una familia A de subconjuntos en X , llamados *abiertos*, tales que cumplen los siguientes axiomas:

1. Si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq A$, I un conjunto de índices arbitrario, entonces $\cup_{i \in I} A_i \in A$.
2. Si $\{A_i\} \subseteq A$, I un conjunto de índices finito, entonces $\cap_{i \in I} A_i \in A$.
3. Los conjuntos \emptyset y X pertenecen a A .

Definición 1.6. Un **espacio topológico** es la pareja (X, A) tal que X es un conjunto y A es una topología en X .

A dicha pareja la denotaremos simplemente por X cuando no haya confusión respecto a la estructura topológica dada por sus abiertos.

Ejemplo 1.7. Sea $X = \{a, b, c\}$. La colección de subconjuntos $A = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X .

Ejemplo 1.8. Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales, entonces la topología usual o topología euclidiana es $A_e = \{\cup_{i \in I} A_i \mid A_i = (a, b) \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\} \cup \{\emptyset\}$, donde $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Es decir, la topología está dada por los intervalos abiertos, la unión arbitraria de éstos y el vacío.

Notemos que esta colección de subconjuntos puede no ser única para cada conjunto X , por lo cual pueden darse diversas topologías en un mismo conjunto. Así, se requiere el concepto de subbase, el cual es una colección más “pequeña” de abiertos que la propia A , pero que determinan a ésta última.

Definición 1.9. Sea A una topología en X , se dice que $S \subseteq A$ es una **subbase** para (X, A) si para cada $A_i \in A \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in A_i$ existe un conjunto no vacío de cardinalidad finita $S' \subseteq S$ tal que $x \in \cap S' \subseteq A_i$.

Ejemplo 1.10. Consideremos el espacio topológico de los reales con su topología usual ya definida en el ejemplo 1.8, entonces es claro que la colección $S_e = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para A_e , en donde $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ y $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

Veamos que esta subbase S de A es una colección de abiertos, consideremos entonces a I como la familia de intersecciones finitas de S , con lo que tenemos $S \subset I \subset A$, notemos que I aún no puede considerarse como una topología debido a que no podemos asegurar que contiene a todas las uniones de los elementos en I , consideremos entonces a U como la familia de dichas uniones, con lo que obtenemos $S \subset I \subset U \subset A$. Así obtenemos la topología U en X , la cual tiene por subbase a S .

Definición 1.11. Sean Y y X espacios topológicos. Consideremos el conjunto de funciones continuas de X a Y , denotado con $Top(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}$. Sean $U \subset Y$ un abierto y $a \in X$, se define el conjunto $(a, U) = \{f \in Top(X, Y) \mid f(a) \in U\}$. La **topología compacto-abierta** sobre $Top(X, Y)$ es la topología dada por la subbase de conjuntos $(K, U) = \{f \in Top(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$ con K un compacto tal que $K \subset X$.

Considerando ahora que existen funciones de un espacio topológico a otro, y que estas funciones pueden ser continuas, notemos que entre éstas mismas puede existir a su vez una función continua que vaya de una a otra, para esto la siguiente definición.

Definición 1.12. Sean X, Y espacios topológicos y $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas cualesquiera. Una **homotopía** de f_0 a f_1 es una función continua

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

en la que I representa al intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ y tal que para cualquiera $x \in X$,

$$H(x, 0) = f_0(x) \text{ y } H(x, 1) = f_1(x).$$

En tal caso se dice que f_0 es **homotópica a** f_1 y se denota con

$$f_0 \simeq f_1.$$

Ejemplo 1.13. Sean $X = Y = \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$ y $f_1(x) = 0$. Consideremos

$$H : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

la función

$$H(x, t) = (1 - t)x,$$

entonces H es continua y

$$H(x, 0) = x = f_0(x) \text{ y } H(x, 1) = 0 = f_1(x).$$

Por lo que $f_0 \simeq f_1$.

3. Categorías

Algunos de los objetos matemáticos con los que más trabajaremos son las categorías y los funtores, los cuales pertenecen a una rama de la Matemática conocida como Teoría de Categorías. A continuación se darán estos conceptos.

Definición 1.14. Una **categoría** \mathbf{C} consiste de lo siguiente:

1. La colección de objetos, denotada con $Obj(\mathbf{C})$.
2. Un conjunto de morfismos $\mathbf{C}(A, B)$ para cada par (A, B) de objetos.
3. La composición $\mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \longrightarrow \mathbf{C}(A, C)$ denotada con

$$(f, g) \longmapsto gf$$

para cada tripleta ordenada A, B y C de objetos.

Además este conjunto de morfismos y la composición deben estar sujetos a los siguientes axiomas:

- i. Los conjuntos de morfismos deben ser disjuntos por pares, es decir, cada morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ tiene un único dominio A y un único codominio B .
- ii. Para todo objeto A existe un morfismo en $\mathbf{C}(A, A)$ denotado generalmente con 1_A , tal que para todo morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ se tiene

$$f = 1_B f \text{ y } f = f 1_A.$$

- iii. La composición es asociativa. Dados los morfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D,$$

entonces $h(gf) = (hg)f$.

Ejemplo 1.15. La categoría **Top** de espacios topológicos es aquella que tiene como objetos espacios topológicos y funciones continuas entre espacios topológicos como morfismos. Es fácil ver que tanto la composición de morfismos, como la identidad de cada espacio topológico están bien definidas, así como el hecho de que se cumplen los axiomas anteriores.

Ejemplo 1.16. La categoría de grupos abelianos es aquella que tiene como objetos grupos abelianos, y como morfismos de la categoría los homomorfismos de grupos. Es fácil ver que tanto la composición de morfismos, como la identidad de cada grupo abeliano están bien definidas, así como el hecho de que se cumplen los axiomas anteriores.

Definición 1.17. Una categoría **S** es una **subcategoría** de **C** si

1. $Obj(\mathbf{S}) \subseteq Obj(\mathbf{C})$.

2. Denotando a los conjuntos de morfismos en \mathbf{S} como $\mathbf{S}(-, -)$ y los conjuntos de morfismos en \mathbf{C} como $\mathbf{C}(-, -)$, entonces $\mathbf{S}(A, B) \subseteq \mathbf{C}(A, B)$ para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{S})$.
3. Si $f \in \mathbf{S}(A, B)$ y $g \in \mathbf{S}(B, C)$ entonces la composición $gf \in \mathbf{S}(A, C)$ es igual a la composición $gf \in \mathbf{C}(A, C)$.
4. Si $A \in \text{Obj}(\mathbf{S})$ entonces la identidad $1_A \in \mathbf{S}(A, A)$ es igual a la identidad $1_A \in \mathbf{C}(A, A)$.

Ejemplo 1.18. La categoría de grupos abelianos finitos es una subcategoría de la categoría de grupos abelianos, la cual cumple con los criterios anteriores.

Definición 1.19. Consideremos \mathbf{C} y \mathbf{D} categorías. Un **functor covariante** $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ es una regla de asociación de $\text{Obj}(\mathbf{C})$ con $\text{Obj}(\mathbf{D})$ y de morfismos de \mathbf{C} con morfismos de \mathbf{D} tal que:

1. Si $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ entonces $T(A) \in \text{Obj}(\mathbf{D})$.
2. Si $f : A \rightarrow A'$ está en \mathbf{C} entonces $T(f) : T(A) \rightarrow T(A')$ está en \mathbf{D} .
3. Si $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ está en \mathbf{C} , entonces $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(A') \xrightarrow{T(g)} T(A'')$ está en \mathbf{D} y

$$T(gf) = T(g)T(f).$$
4. $T(1_A) = 1_{T(A)}$ para cada objeto $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$.

Ejemplo 1.20. Sea \mathbf{C} una categoría y \mathbf{Con} la categoría de conjuntos, la cual tiene como objetos conjuntos y morfismos las funciones entre conjuntos. Sea $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, el functor $T = \mathbf{C}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}$ es un functor covariante, definido por:

$$T(B) = \mathbf{C}(A, B),$$

para todo $B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$.

Si existe $f : B \rightarrow B'$ en \mathbf{C} , entonces $T(f) : \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathbf{C}(A, B')$ está dado por:

$$T(f) : h \mapsto fh,$$

el cual nombraremos como **función inducida** y lo denotaremos f_* , es decir:

$$f_* : h \mapsto fh.$$

Debido a la importancia de este functor en nuestro trabajo verificaremos los axiomas, mostrando que efectivamente $\mathbf{C}(A, -)$ es un functor covariante.

1. Recordemos que la definición de categoría dice que $\mathbf{C}(A, B)$ es precisamente un conjunto, es decir que si $B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ entonces $\mathbf{C}(A, B) \in \text{Obj}(\mathbf{Con})$.
2. Se sigue de la definición de la función inducida f_* .
3. Notemos que la composición fh tiene sentido:

$$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{f} B'.$$

(Note: In the original image, there is a curved arrow labeled 'fh' above the straight arrows 'h' and 'f'.)

Supongamos ahora que tenemos $g : B' \rightarrow B''$, con lo cual tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathbf{C}(A, -)} & \mathbf{Con} \\ \\ \begin{array}{c} B \\ \downarrow f \\ B' \\ \downarrow g \\ B'' \end{array} & & \begin{array}{c} \mathbf{C}(A, B) \\ \downarrow f_* = T(f) \\ \mathbf{C}(A, B') \\ \downarrow g_* = T(g) \\ \mathbf{C}(A, B'') \end{array} \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a curved arrow labeled 'gf' on the left side of the object diagram, and a curved arrow labeled '(gf)' on the right side of the object diagram, connecting the top and bottom nodes of each column.)*

Comparemos las funciones

$$(gf)_*, g_*f_* : \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathbf{C}(A, B'').$$

Si $h \in \mathbf{C}(A, B)$, es decir $h : A \rightarrow B$, entonces

$$(gf)_* : h \mapsto (gf)h.$$

Por otro lado tenemos por la asociatividad de la composición lo siguiente:

$$g_*f_* : h \mapsto fh \mapsto g(fh) = (gh)f,$$

es decir $(gf)_* = g_*f_*$.

4. Finalmente, sea 1_B la función identidad $1_B : B \rightarrow B$, entonces

$$(1_B)_* : h \mapsto 1_B h = h$$

para toda $h \in \mathbf{C}(A, B)$. Por lo que se puede concluir que $(1_B)_* = 1_{\mathbf{C}(A, B)}$.

Definición 1.21. Consideremos \mathbf{C} y \mathbf{D} categorías. Un **functor contravariante** $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ es una regla de asociación de $Obj(\mathbf{C})$ con $Obj(\mathbf{D})$ y de morfismos de \mathbf{C} con morfismos de \mathbf{D} tal que:

1. Si $A \in Obj(\mathbf{C})$ entonces $T(A) \in Obj(\mathbf{D})$.
2. Si $f : A \rightarrow A'$ en \mathbf{C} entonces $T(f) : T(A') \rightarrow T(A)$ está en \mathbf{D} (invierte morfismos).
3. Si $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ está en \mathbf{C} , entonces $T(A'') \xrightarrow{T(g)} T(A') \xrightarrow{T(f)} T(A)$ está en \mathbf{D} y

$$T(gf) = T(f)T(g).$$

4. $T(1_A) = 1_{T(A)}$ para cada objeto $A \in Obj(\mathbf{C})$.

Ejemplo 1.22. Sea \mathbf{C} una categoría cualquiera y \mathbf{Con} la categoría de conjuntos, la cual tiene como objetos conjuntos y morfismos las funciones entre conjuntos. Sea $B \in Obj(\mathbf{C})$, el functor $T = \mathbf{C}(-, B) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}$ es un functor contravariante definido por:

$$T(A) = \mathbf{C}(A, B)$$

para todo $A \in Obj(\mathbf{C})$.

Si existe $f : A \rightarrow A'$ en \mathbf{C} , entonces $T(f) : \mathbf{C}(A', B) \rightarrow \mathbf{C}(A, B)$ está dado por:

$$T(f) : h \mapsto hf,$$

el cual nombraremos como **función inducida** y lo denotaremos f^* , es decir

$$f^* : h \mapsto hf.$$

De igual manera que en el ejemplo anterior este functor será de suma importancia en este trabajo, por lo que también mostraremos que efectivamente $\mathbf{C}(-, B)$ es un functor contravariante, verificando que los axiomas se cumplen.

1. Es un caso análogo al functor covariante $\mathbf{C}(A, -)$.
2. Se sigue de la definición de la función inducida f^* .

3. Notemos que la composición hf tiene sentido:

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{h} B'.$$

hf

Supongamos ahora que tenemos $g : A' \rightarrow A''$, con lo cual tenemos el diagrama siguiente:

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\mathbf{C}(\cdot, B)} \mathbf{Con}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & \mathbf{C}(A, B) \\ \downarrow f & & \uparrow f^* = T(f) \\ A' & & \mathbf{C}(A', B) \\ \downarrow g & & \uparrow g^* = T(g) \\ A'' & & \mathbf{C}(A'', B) \end{array} \quad (gf)^*$$

Comparemos las funciones

$$(gf)^*, f^*g^* : \mathbf{C}(A'', B) \rightarrow \mathbf{C}(A, B).$$

Si $h \in \mathbf{C}(A'', B)$, es decir $h : A'' \rightarrow B$, entonces por la definición de la función inducida

$$(gf)^* : h \mapsto h(gf).$$

Por otro lado tenemos por la asociatividad de la composición lo siguiente:

$$f^*g^* : h \mapsto hg \mapsto (hg)f = h(gf),$$

es decir $(gf)^* = f^*g^*$

4. Finalmente, sea 1_A la función identidad $1_A : A \rightarrow A$, entonces

$$(1_A)^B : h \mapsto h1_A = h$$

para toda $h \in \mathbf{C}(A, B)$. Por lo que se puede concluir que $(1_A)^* = 1_{\mathbf{C}(A, B)}$.

Veamos a continuación una transformación natural de un functor a otro.

Cabe resaltar que de ahora en adelante cuando mencionemos un functor sin especificar si éste es covariante o contravariante, nos estaremos refiriendo precisamente a un functor covariante.

Definición 1.23. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos categorías y $S, T : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ dos funtores. Una **transformación natural** $\tau : S \rightarrow T$ es una colección de morfismos la cual asigna a cada objeto $C \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ un morfismo $\tau_C : S(C) \rightarrow T(C)$ en \mathbf{B} , tal que para cualquier morfismo $f : C \rightarrow D$ en \mathbf{A} , $(T(f)) \circ \tau_C = \tau_D \circ (S(f))$, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\tau_C} & T(C) \\ S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ S(D) & \xrightarrow{\tau_D} & T(D). \end{array}$$

A continuación veamos los conceptos de sistema y límite tanto inverso como directo, al igual que el de topología límite, los cuales nos permitirán ver a una digráfica precisamente como un límite directo, objeto que utilizaremos más adelante.

Definición 1.24. Sean Λ un conjunto y \preceq una relación reflexiva y transitiva en Λ . Un **preorden** es la pareja (Λ, \preceq) .

Ejemplo 1.25. Sea A_Δ el conjunto de flechas de una digráfica Δ . Notemos que A_Δ es un conjunto preordenado bajo la relación \preceq donde

$a \preceq b$ si, y solo si, $(t(a), h(a)) = (t(b), h(b))$, ya que:

1. $(t(a), h(a)) = (t(a), h(a))$ por lo que $a \preceq a$.
2. Si $a \preceq b$ y $b \preceq c$ es decir $(t(a), h(a)) = (t(b), h(b))$ y $(t(b), h(b)) = (t(c), h(c))$ entonces $(t(a), h(a)) = (t(c), h(c))$, es decir $a \preceq c$.

Donde t y h son las funciones mencionadas en la definición 1.1.

Este preorden no tiene que ser único para cada conjunto.

Ejemplo 1.26. Sea A_Δ el conjunto de flechas de una digráfica Δ como en el ejemplo anterior. Notemos que A_Δ también es un conjunto preordenado bajo la relación $=$, donde a está relacionado con b si y solo si $a = b$, ya que:

1. $a = a$.
2. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = b = c$, es decir $a = c$.

Definición 1.27. Sea (Λ, \preceq) un conjunto preordenado y \mathbf{C} una categoría. Un **sistema inverso** en \mathbf{C} sobre Λ es un par ordenado

$$((M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\psi_{\beta\alpha})_{\beta \succeq \alpha})$$

usualmente abreviado como $\{M_\alpha, \psi_{\beta\alpha}\}$, donde $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de objetos de \mathbf{C} indexada por Λ y $(\psi_{\beta\alpha} : M_\beta \rightarrow M_\alpha)_{\beta \succeq \alpha}$ es una familia de morfismos de \mathbf{C} indexada por $\Lambda \times \Lambda = \Lambda^2 = \{(\beta, \alpha) \in \Lambda \times \Lambda \mid \beta \succeq \alpha\}$ tales que:

1. $\psi_{\alpha\alpha} = 1_{M_\alpha}$ para toda α .
2. Si $\gamma \succeq \beta \succeq \alpha$ entonces $\psi_{\gamma\alpha} = \psi_{\beta\alpha} \circ \psi_{\gamma\beta}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

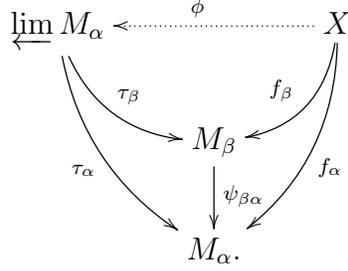
$$\begin{array}{ccc} M_\gamma & \xrightarrow{\psi_{\gamma\alpha}} & M_\alpha \\ & \searrow \psi_{\gamma\beta} & \nearrow \psi_{\beta\alpha} \\ & & M_\beta \end{array}$$

Definición 1.28. Sean (Λ, \preceq) un conjunto preordenado, \mathbf{C} una categoría y $\{M_\alpha, \psi_{\beta\alpha}\}$ un sistema inverso en \mathbf{C} sobre Λ . El **límite inverso** de $\{M_\alpha, \psi_{\beta\alpha}\}$ es un par ordenado $(\varprojlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha, (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$, donde $\varprojlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ es un objeto en \mathbf{C} y para cada $\alpha \in \Lambda$, $\tau_\alpha : \varprojlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \rightarrow M_\alpha$ es un morfismo en \mathbf{C} sujeto a las siguientes propiedades:

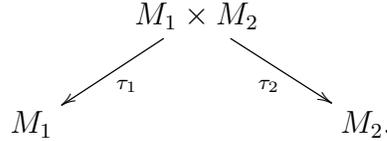
1. Si $\beta \succeq \alpha$, entonces $\psi_{\beta\alpha} \circ \tau_\beta = \tau_\alpha$.
2. Para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ y cada familia $(f_\alpha : X \rightarrow M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de morfismos en \mathbf{C} que satisfacen:

$$\psi_{\beta\alpha} \circ f_\beta = f_\alpha$$

para cada $\beta \succeq \alpha$, existe un único morfismo $\phi : X \rightarrow \varprojlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ en \mathbf{C} , tal que hace al siguiente diagrama conmutar:



Ejemplo 1.29. Consideremos el conjunto preordenado $(\{1, 2\}, =)$ y $\{M_\alpha, \psi_{\beta\alpha}\}$ un sistema inverso con M_1 y M_2 conjuntos, ψ_{11} y ψ_{22} isomorfismos, entonces el límite inverso de $\{M_\alpha, \psi_{\beta\alpha}\}$ es $M_1 \times M_2 \simeq \varprojlim_{\alpha \in \{1,2\}} M_\alpha$, donde cada $\tau_\alpha : M_1 \times M_2 \rightarrow M_\alpha$ es la función que restringe a $M_1 \times M_2$ en M_α .



Supongamos que existe X un conjunto y $(\varsigma_i : X \rightarrow M_i | i = 1, 2)$ morfismos de conjuntos. Consideremos entonces $v(x) : X \rightarrow M_1 \times M_2$ definido por $v(x) = (\varsigma_1(x), \varsigma_2(x))$, notemos que v hace al diagrama conmutar ya que $(\tau_i \circ v)(x) = \tau_i((\varsigma_1(x), \varsigma_2(x))) = \varsigma_i(x)$. Es evidente que éste es único.

Por lo cual $M_1 \times M_2$ es el límite inverso.

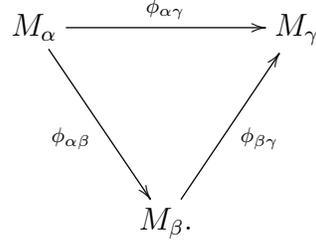
Consideremos ahora la construcción dual.

Definición 1.30. Sea (Λ, \preceq) un conjunto preordenado y \mathbf{C} una categoría. Un **sistema directo** en \mathbf{C} sobre Λ es un par ordenado

$$((M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\phi_{\alpha\beta})_{\alpha \preceq \beta})$$

usualmente abreviado como $\{M_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$, donde $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de objetos de \mathbf{C} indexada por Λ y $(\phi_{\alpha\beta} : M_\alpha \rightarrow M_\beta)_{\alpha \preceq \beta}$ es una familia de morfismos de \mathbf{C} indexada por $\Lambda^2 = \{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda | \alpha \preceq \beta\}$ tales que:

1. $\phi_{\alpha\alpha} = 1_{M_\alpha}$ para toda α .
2. Si $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$ entonces $\phi_{\alpha\gamma} = \phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta}$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

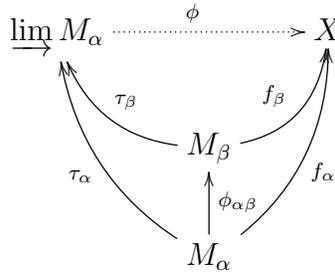


Definición 1.31. Sean (Λ, \preceq) un conjunto preordenado, \mathbf{C} una categoría y $\{M_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ un sistema directo en \mathbf{C} sobre Λ . El **límite directo** de $\{M_\alpha, \phi_{\alpha\beta}\}$ es un par ordenado $(\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha, (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$, donde $\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ es un objeto en \mathbf{C} y para cada $\alpha \in \Lambda$, $\tau_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ es un morfismo en \mathbf{C} sujeto a las siguientes propiedades:

1. Si $\alpha \preceq \beta$, entonces $\tau_\alpha = \phi_{\alpha\beta} \circ \tau_\beta$.
2. Para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ y cada familia $(f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow X)_{\alpha \in \Lambda}$ de morfismos en \mathbf{C} que satisfacen:

$$f_\alpha = \phi_{\alpha\beta} \circ f_\beta$$

para cada $\alpha \preceq \beta$, existe un único morfismo $\phi : \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \longrightarrow X$ en \mathbf{C} , que hace al siguiente diagrama conmutar:



Ejemplo 1.32. Consideremos el conjunto preordenado $(\{1, 2\}, =)$ y $\{M_\alpha, \psi_{\alpha\beta}\}$ un sistema directo con M_1 y M_2 conjuntos, ψ_{11} y ψ_{22} isomorfismos, entonces el límite directo de $\{M_\alpha, \psi_{\alpha\beta}\}$ es $\varinjlim_{\alpha \in \{1,2\}} M_\alpha \simeq M_1 \sqcup M_2 = \{(m, i) \mid i \in \{1, 2\}, m \in M_i\}$, donde cada $\tau_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M_1 \sqcup M_2$ es el encaje

de M_α en $M_1 \sqcup M_2$.

$$\begin{array}{ccc}
 & M_1 \sqcup M_2 & \\
 \tau_1 \nearrow & & \nwarrow \tau_2 \\
 M_1 & & M_2
 \end{array}$$

Supongamos que existe X un conjunto y $(\zeta_i : M_i \rightarrow X | i = 1, 2)$ morfismos de conjuntos. Consideremos entonces $w(x) : M_1 \sqcup M_2 \rightarrow X$ definido por $w((m_i, i)) = (\zeta(m_i))$, notemos que w hace al diagrama conmutar ya que $(w \circ \tau_i)(m_i) = w((m_i, i)) = \zeta_i(m_i)$. Es evidente que éste es único.

Por lo cual $M_1 \sqcup M_2$ es el límite directo.

Teniendo las definiciones anteriores podemos considerar colecciones de espacios topológicos en las cuales se puede tener un sistema inverso, y con esto poder dotar de una topología límite a su límite inverso.

Definición 1.33. Sea (X_a, f_{ab}) un sistema inverso donde X_a es un espacio topológico (definición 1.6) para toda $a \in \Lambda$, y f_{ab} es una función continua para cada par (a, b) tal que $a \preceq b$. Entonces diremos que (X_a, f_{ab}) es un **sistema inverso de espacios topológicos**.

Veamos que para cada sistema inverso de espacios topológicos tenemos un límite inverso, cuya construcción es exactamente análoga a la que se verá en la proposición 2.8, de tal forma que para asegurar que éste efectivamente es un límite inverso se da la siguiente definición de topología límite, la cual afirma que éste se encuentra en la categoría de espacios topológicos.

Definición 1.34. Sea (X_a, f_{ab}) un sistema inverso de espacios topológicos. Sea X el límite inverso de éste y f_a la función canónica $X \rightarrow X_a$ para toda $a \in \Lambda$. La **topología límite** es la topología más gruesa, es decir la topología mínima que contenga los abiertos de cualquier topología dada sobre X , para la cual f_a es continua para toda $a \in \Lambda$.

Capítulo 2

Categoría de Digráficas y Gestos

Teniendo ya las nociones básicas para desarrollar nuestro trabajo, comenzaremos definiendo distintas categorías y para esto consideremos las siguientes colecciones de funciones:

1. $Obj(\mathbf{D}) = \{\Gamma : A \longrightarrow V \times V \mid \Gamma \text{ es una función de incidencia, con } A \text{ el conjunto de flechas de una digráfica y } V \text{ el de sus vértices}\}$.

Notemos que cada una de estas funciones es una digráfica.

Para evitar confusiones acerca de los conjuntos de flechas y vértices de digráficas diferentes, denotaremos con A_Γ y V_Γ el conjunto de flechas y vértices de la digráfica Γ respectivamente.

2. $\Gamma @_{\mathbf{D}} \Delta = \{f : \Gamma \longrightarrow \Delta \mid f = (u, v) \text{ un morfismo de digráficas, con } u : A_\Gamma \longrightarrow A_\Delta, v : V_\Gamma \longrightarrow V_\Delta \text{ y } v^2 \circ \Gamma = \Delta \circ u\}$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_\Gamma & \xrightarrow{u} & A_\Delta \\ \Gamma \downarrow & & \downarrow \Delta \\ V_\Gamma^2 & \xrightarrow{v^2} & V_\Delta^2 \end{array}$$

Notemos que para Γ, Δ y K digráficas y $f \in \Gamma @_{\mathbf{D}} \Delta, g \in \Delta @_{\mathbf{D}} K$ tales que $f = (u, v)$ y $g = (w, z)$ con $u : A_\Gamma \longrightarrow A_\Delta, v : V_\Gamma \longrightarrow V_\Delta, w : A_\Delta \longrightarrow A_K$ y $z : V_\Delta \longrightarrow V_K$ tiene sentido $g \circ f \in \Gamma @_{\mathbf{D}} K$.

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
A_\Gamma & \xrightarrow{u} & A_\Delta & \xrightarrow{w} & A_K \\
\Gamma \downarrow & & \downarrow \Delta & & \downarrow K \\
V_\Gamma^2 & \xrightarrow{v^2} & V_\Delta^2 & \xrightarrow{z^2} & V_K^2
\end{array}$$

es decir $g \circ f = (w \circ u, z \circ v) \in \Gamma @_{\mathbf{D}} K$.

Es fácil ver además que:

- i. Cada $f \in \Gamma @_{\mathbf{D}} \Delta$, f tiene un único dominio Γ y codominio Δ por la definición de morfismo de digráficas.
- ii. Para todo objeto Γ existe un morfismo 1_Γ en $\Gamma @_{\mathbf{D}} \Gamma$ definido como $1_\Gamma = (1_{A_\Gamma}, 1_{V_\Gamma})$ con 1_{A_Γ} la identidad en el conjunto de flechas de Γ y 1_{V_Γ} la identidad del conjunto de vértices, tal que para cada morfismo $f \in \Gamma @_{\mathbf{D}} \Delta$,

$$1_\Delta \circ f = (1_{A_\Delta}, 1_{V_\Delta}) \circ f = (1_{A_\Delta} \circ u, 1_{V_\Delta} \circ v) = (u, v) = f$$

y

$$f \circ 1_\Gamma = f \circ (1_{A_\Gamma}, 1_{V_\Gamma}) = (u \circ 1_{A_\Gamma}, v \circ 1_{V_\Gamma}) = (u, v) = f.$$

- iii. La composición es asociativa, esto se debe a que en los morfismos entre conjuntos de flechas y en los morfismos entre conjuntos de vértices la composición es asociativa. Es decir, dados los morfismos $\Gamma \xrightarrow{f} \Delta \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} L$, con $h = (x, y)$ entonces

$$\begin{aligned}
h \circ (g \circ f) &= (x, y) \circ (w \circ u, z \circ v) = (x \circ (w \circ u), y \circ (z \circ v)) \\
&= ((x \circ w) \circ u, (y \circ z) \circ v) = ((x \circ w), (y \circ z)) \circ (u, v) \\
&= (h \circ g) \circ f.
\end{aligned}$$

Definición 2.1. La categoría \mathbf{D} de **Digráficas** es aquélla que tiene como objetos a la colección $Obj(\mathbf{D})$ de digráficas y que para cada pareja Γ y Δ de digráficas tiene el conjunto $\Gamma @_{\mathbf{D}} \Delta = \mathbf{D}(\Gamma, \Delta)$ de morfismos de digráficas, junto con la composición de morfismos de digráficas como ya se mencionó anteriormente.

Consideremos ahora un espacio topológico X y el conjunto

$$A_{\vec{X}} = I @_{\mathbf{Top}} X = \{c : I \longrightarrow X \mid c \text{ es una curva continua}\}$$

con $X \in \mathbf{Top}$ (ejemplo 1.15) e I un intervalo fijo en \mathbb{R} .

Con lo cual se puede definir la digráfica \vec{X} tal que $A_{\vec{X}}$ es su conjunto de flechas y $V_{\vec{X}} = X$ el de sus vértices, así recordando la definición 1.17, podemos dar la siguiente subcategoría:

Definición 2.2. La subcategoría **SD** de la categoría **D**, de **Digráficas Espaciales** consiste en:

1. $Obj(\mathbf{SD}) = \{\vec{X} : A_{\vec{X}} \longrightarrow V_{\vec{X}}^2 | X \in \mathbf{Top}, \vec{X} \text{ una función de incidencia, donde } A_{\vec{X}} \text{ son las flechas de una digráfica } \vec{X} \text{ y } V_{\vec{X}} = X \text{ sus vértices}\}$.

La colección de objetos de **SD**, la cual evidentemente está contenida en $Obj(\mathbf{D})$.

2. $\mathbf{SD}(\vec{X}, \vec{Y}) = \vec{X} @_{\mathbf{SD}} \vec{Y} = \{ \vec{f} : \vec{X} \longrightarrow \vec{Y} | \vec{f} \text{ es un morfismo de digráficas canónicamente inducido por una función continua } f : X \longrightarrow Y \text{ en } \mathbf{Top} \}$.

La colección de morfismos para cada par \vec{X} y \vec{Y} de digráficas espaciales, la que de igual manera está contenida evidentemente en $\vec{X} @_{\mathbf{D}} \vec{Y}$.

Así mismo, para las digráficas espaciales \vec{X} , \vec{Y} y \vec{Z} tales que

$$\begin{aligned} f &\in \vec{X} @_{\mathbf{SD}} \vec{Y} \\ g &\in \vec{Y} @_{\mathbf{SD}} \vec{Z}, \end{aligned}$$

donde $f = (u, v)$ y $g = (w, z)$ con

$$\begin{aligned} u &: A_{\vec{X}} \longrightarrow A_{\vec{Y}} \\ v &: V_{\vec{X}} \longrightarrow V_{\vec{Y}} \\ w &: A_{\vec{Y}} \longrightarrow A_{\vec{Z}} \\ z &: V_{\vec{Y}} \longrightarrow V_{\vec{Z}} \end{aligned}$$

se tiene que $g \circ f = (w \circ u, z \circ v)$ es igual en $\vec{X} @_{\mathbf{SD}} \vec{Z}$ que en $\vec{X} @_{\mathbf{D}} \vec{Z}$.

Por último, para una digráfica \vec{X} la identidad $1_{\vec{X}} = (Id_A, Id_X)$ en $\vec{X} @_{\mathbf{SD}} \vec{X}$ es la misma que la identidad en $\vec{X} @_{\mathbf{D}} \vec{X}$.

Entonces \vec{X} es más que una digráfica espacial, es una digráfica topológica donde $A_{\vec{X}} = I @ X \in \mathbf{Top}$ debido a la topología compacto-abierta (definición 1.11), y por lo que $\vec{X} : A_{\vec{X}} \longrightarrow V_{\vec{X}}^2$ es una función de espacios topológicos.

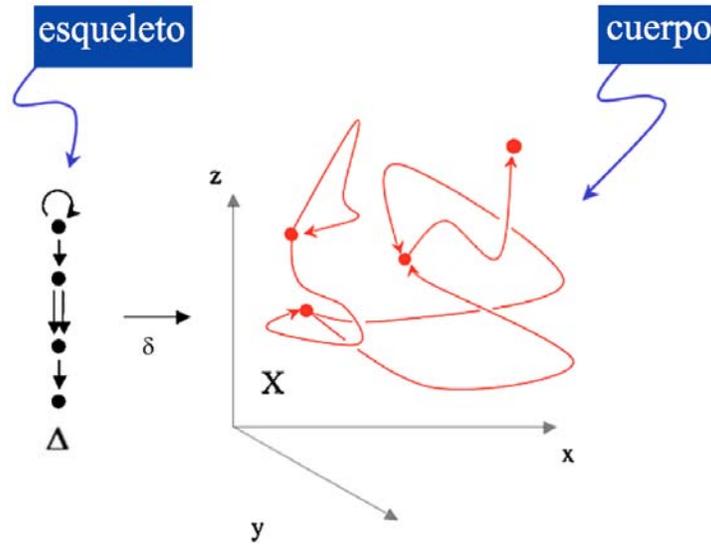


FIGURA 1

Definición 2.3. Sea $\Delta \in \text{Obj}(\mathbf{D})$ y $\vec{X} \in \text{Obj}(\mathbf{SD})$. Un Δ -gesto en un espacio topológico X es un morfismo de digráficas $\delta : \Delta \rightarrow \vec{X}$.

En este caso a Δ le llamaremos el esqueleto del gesto, mientras que al espacio X será llamado su espacio, y la configuración de la curva definida en X definida por δ se llamará el cuerpo del gesto. (Véase la figura 1, basada en [MC], p.268.)

Definición 2.4. Consideremos $\delta : \Delta \rightarrow \vec{X}$ y $\gamma : \Gamma \rightarrow \vec{Y}$ dos gestos, un **morfismo de gestos** $\tilde{f} : \delta \rightarrow \gamma$ consiste de f una pareja de morfismos (f, \vec{h}) donde $f : \Delta \rightarrow \Gamma$ morfismo de digráficas, tal que existe $\vec{h} : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ morfismo de digráficas no necesariamente continuo, con el cual el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\delta} & \vec{X} \\ f \downarrow & & \downarrow \vec{h} \\ \Gamma & \xrightarrow{\gamma} & \vec{Y} \end{array}$$

Así mismo podemos dar el morfismo identidad para cada gesto el cual se describirá un poco más adelante.

Notemos que para los gestos

$$\begin{aligned}\delta &: \Delta \longrightarrow \vec{X} \\ \gamma &: \Gamma \longrightarrow \vec{Y} \\ \kappa &: K \longrightarrow \vec{Z}\end{aligned}$$

y $\tilde{f}: \delta \longrightarrow \gamma$ y $\tilde{g}: \gamma \longrightarrow \kappa$ morfismos de gestos tales que $\tilde{f} = (f, \vec{h})$ y $\tilde{g} = (g, \vec{j})$ con

$$\begin{aligned}f &: \Delta \longrightarrow \Gamma \\ \vec{h} &: \vec{X} \longrightarrow \vec{Y} \\ g &: \Gamma \longrightarrow K \\ \vec{j} &: \vec{Y} \longrightarrow \vec{Z},\end{aligned}$$

el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}\Delta & \xrightarrow{f} & \Gamma & \xrightarrow{g} & K \\ \delta \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow v \\ \vec{X} & \xrightarrow{\vec{h}} & \vec{Y} & \xrightarrow{\vec{j}} & \vec{Z}\end{array}$$

es decir, $\tilde{g} \circ \tilde{f} = (g \circ f, \vec{j} \circ \vec{h})$.

A continuación definimos la categoría de gestos.

Definición 2.5. La categoría de gestos \mathbf{G} consiste de:

1. $Obj(\mathbf{G}) = \{\delta : \Delta \longrightarrow \vec{X} \mid \Delta \in Obj(\mathbf{D}), \vec{X} \in Obj(\mathbf{SD}) \text{ y } \delta \text{ es un morfismo de digráficas}\}$.
La colección de objetos de \mathbf{G} .
2. $\mathbf{G}(\delta, \gamma) = \delta @_{\mathbf{G}} \gamma = \{\tilde{f} : \delta \longrightarrow \gamma \mid \tilde{f} = (f, \vec{h}) \text{ morfismo de gestos con } \gamma \circ f = \vec{h} \circ \delta\}$.
La colección de morfismos para cada par de gestos δ y γ en $Obj(\mathbf{G})$.
3. La composición de morfismos de gestos de $\tilde{f} \in \delta @_{\mathbf{G}} \gamma$, $\tilde{g} \in \gamma @_{\mathbf{G}} \nu$ con δ , γ y ν gestos, ya fue mencionada anteriormente.

Sólo falta demostrar que este conjunto de morfismos y la composición están sujetos a los axiomas correspondientes para poder dar por hecho que ésta efectivamente es una categoría.

Consideremos los gestos

$$\begin{aligned}\delta &: \Delta \longrightarrow \vec{X} \\ \gamma &: \Gamma \longrightarrow \vec{Y} \\ \kappa &: K \longrightarrow \vec{Z} \\ \tau &: T \longrightarrow \vec{W},\end{aligned}$$

y los morfismos de gestos

$$\begin{aligned}\tilde{f} &: \delta \longrightarrow \gamma \\ \tilde{g} &: \gamma \longrightarrow \kappa \\ \tilde{k} &: \kappa \longrightarrow \tau\end{aligned}$$

tales que

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= (f, \vec{h}) \\ \tilde{g} &= (g, \vec{j}) \\ \tilde{k} &= (k, \vec{l}),\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}f &: \Delta \longrightarrow \Gamma \\ \vec{h} &: \vec{X} \longrightarrow \vec{Y} \\ g &: \Gamma \longrightarrow K \\ \vec{j} &: \vec{Y} \longrightarrow \vec{Z} \\ k &: K \longrightarrow T \\ \vec{l} &: \vec{Z} \longrightarrow \vec{W}.\end{aligned}$$

i. Cada $\tilde{f} \in \delta @_{\mathbf{G}} \gamma$ tiene un único dominio δ y un único codominio γ debido a la definición de morfismo de gestos.

ii. Para todo objeto δ existe el morfismo $1_{\delta} = (1_{\Delta}, 1_{\vec{X}})$ en $\delta @_{\mathbf{G}} \delta$, con 1_{Δ} y $1_{\vec{X}}$ las identidades ya mencionadas para la categoría de digráficas, tales que para todo morfismo $\tilde{f} \in \delta @_{\mathbf{G}} \gamma$ se tiene

$$1_{\gamma} \circ \tilde{f} = (1_{\Gamma}, 1_{\vec{Y}}) \circ \tilde{f} = (1_{\Gamma}, 1_{\vec{Y}}) \circ (f, \vec{h}) = (1_{\Gamma} \circ f, 1_{\vec{Y}} \circ \vec{h}) = (f, \vec{h}) = \tilde{f}$$

y

$$\tilde{f} \circ 1_{\delta} = (f, \vec{h}) \circ (1_{\Delta}, 1_{\vec{X}}) = (f \circ 1_{\Delta}, \vec{h} \circ 1_{\vec{X}}) = (f, \vec{h}) = \tilde{f}$$

iii. Dados los morfismos $\delta \xrightarrow{\tilde{f}} \gamma \xrightarrow{\tilde{g}} \kappa \xrightarrow{\tilde{k}} \tau$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{k} \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}) &= (k, \vec{l}) \circ (g \circ f, \vec{j} \circ \vec{h}) = (k \circ (g \circ f), \vec{l} \circ (\vec{j} \circ \vec{h})) \\ &= ((k \circ g) \circ f, (\vec{l} \circ \vec{j}) \circ \vec{h}) = (k \circ g, \vec{l} \circ \vec{j}) \circ (f, \vec{h}) \\ &= (\tilde{k} \circ \tilde{g}) \tilde{f} \end{aligned}$$

puesto que $f, g, k, \vec{h}, \vec{j}$ y \vec{l} son morfismos de digráficas, en las cuales como habíamos visto, se cumplía la asociación en la composición.

Por lo anterior \mathbf{G} es, efectivamente, una categoría.

Notemos que existe la proyección de la categoría \mathbf{G} de gestos hacia la categoría \mathbf{D} de digráficas.

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\ \Delta \xrightarrow{\delta} \vec{X} & \longmapsto & \Delta \end{array}$$

Ejemplo 2.6. El gesto de un dedo de la mano de un pianista.

El gesto representa el movimiento del dedo bajando la tecla de un piano, manteniéndose sobre la tecla de piano la duración de la nota y regresando a su posición para estar listo para el siguiente movimiento.

Así definimos la digráfica Π como $A_{\Pi} = \{b, m, s \mid b \text{ es la acción de bajar el dedo al teclado, } m \text{ es mantenerlo sobre el teclado, } s \text{ subir el dedo del teclado}\}$ y los vértices van a depender de cómo, cuánto y qué nota se toque.

$$\Pi = \bullet \xrightarrow{b} \bullet \xrightarrow{m} \bullet \xrightarrow{s} \bullet.$$

El espacio de este gesto se llama *EspacioDedo* el cual es de dimensión tres, donde la primera dimensión es la altura sobre el teclado (posición y dirección positiva hacia el piano), la segunda es el tiempo y la tercera parametriza la altura o “nota” tocada.

Entonces el gesto de un dedo $\pi : \Pi \longrightarrow \overrightarrow{\text{EspacioDedo}}$ es un diagrama de curvas como se muestra en la figura 2 (adaptada de [MC], p.268.).

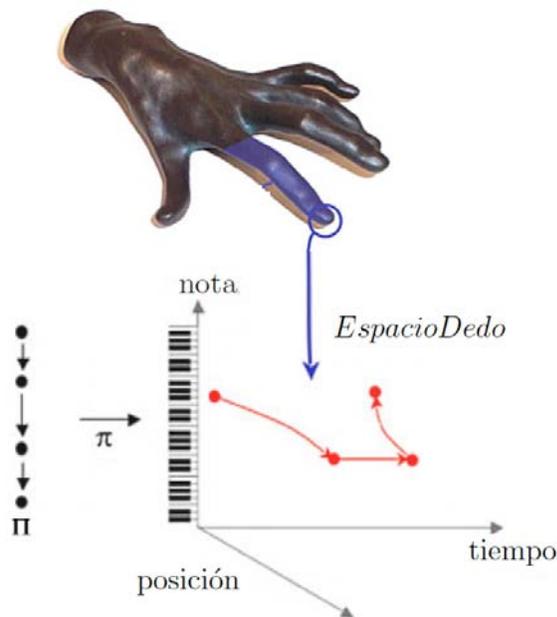


FIGURA 2

Así, si consideramos a los gestos de cierto tipo como puntos en un espacio, podríamos estudiar gestos dentro de un *Espacio – gesto*, los cuales llamaremos **hipergestos**.

Para definirlos, primero necesitamos saber cómo hacer que el conjunto de gestos $\Delta @_{\mathbf{D}} \vec{X}$ sea un espacio topológico, lo cual demostraremos a continuación.

Consideremos el caso particular $\Delta = \uparrow$ lo cual significa que podemos considerar el espacio topológico $\uparrow @_{\mathbf{D}} \vec{X} \cong I @_{\mathbf{Top}} X$ con la topología compactoabierto ya mencionada.

Proposición 2.7. *Sea Δ una digráfica, entonces Δ es el límite directo de cierto sistema directo.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el ejemplo 1.26, sabemos que A_{Δ} es un conjunto preordenado bajo la relación $=$, donde a está relacionado con b si y sólo si $a = b$.

Ahora con $\langle A_{\Delta}, = \rangle$ podemos dar el sistema directo $\{(\Delta_a)_{a \in A_{\Delta}}, (\varphi_{ab})_{a=b}\}$ donde $\Delta_a := \uparrow_a \rightarrow (t(a), h(a))$ para toda $a \in A_{\Delta}$ y $(\varphi_{ab} : \Delta_a \rightarrow \Delta_b)_{a=b}$ es una familia de isomorfismos de digráficas tales que

$$\varphi_{ab} = (\bar{\varphi}_{ab}, Id)$$

donde $\bar{\varphi}_{ab} : \uparrow_a \longrightarrow \uparrow_b$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow_a & \xrightarrow{\Delta_a} & (t(a), h(a)) \\ \bar{\varphi}_{ab} \downarrow & & \downarrow Id \\ \uparrow_b & \xrightarrow{\Delta_b} & (t(b), h(b)). \end{array}$$

Es fácil ver que lo siguiente se cumple:

1. $\varphi_{aa} = Id_a = (Id_{\uparrow_a}, Id)$.
2. Si $a = b = c$ entonces $\varphi_{ac} = \varphi_{bc} \circ \varphi_{ab} = (\bar{\varphi}_{bc} \circ \bar{\varphi}_{ab}, Id) = (\bar{\varphi}_{ac}, Id)$
ya que $\bar{\varphi}_{bc} \circ \bar{\varphi}_{ab} = \bar{\varphi}_{ac}$.

Consideremos que para cada $a \in A_\Delta$, $\tau_a : \Delta_a \longrightarrow \Delta$ es un morfismo en la categoría de digráficas definido como $\tau_a = i_a$ donde i es la función inclusión de Δ_a en Δ .

Veamos entonces que si $a = b$, entonces $\tau_b \circ \varphi_{ab} = \tau_a$ ya que precisamente $\tau_b \circ \varphi_{ab} = \tau_b \circ \varphi_{aa} = \tau_a \circ Id_a = \tau_a$.

Supongamos ahora que existe Γ una digráfica y una familia $(f_\alpha : \Delta_\alpha \longrightarrow \Gamma)_{\alpha \in A_\Delta}$ de morfismos en \mathbf{D} que satisfacen:

$$f_b \circ \phi_{ab} = f_a.$$

Veamos que para cada $a = b$ existe un único morfismo $\phi : \Delta \longrightarrow \Gamma$, tal que hace al siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\phi} & \Gamma \\ \tau_a \swarrow & & \nearrow f_a \\ & \Delta_a & \\ \tau_b \swarrow & \downarrow \phi_{ab} & \nearrow f_b \\ & \Delta_b & \end{array}$$

Consideremos a $\phi = f$ tal que $f|_{\Delta_a} = f_a$ para cada $a \in \Lambda$. Entonces

$$(\phi \circ \tau_a)(\Delta_a) = \phi(\tau_a(\Delta_a)) = \phi(\Delta_a) = f_a(\Delta_a).$$

Por lo tanto $\Delta \cong \varinjlim_{a \in A_\Delta} \Delta_\alpha$. ♦

Intuitivamente lo que acabamos de demostrar es el hecho de que cada digráfica se puede construir “pegándole” cada una de sus flechas por separado, ya que cada flecha con sus respectivos vértices puede considerarse en sí como una digráfica sola.

Por lo tanto, el conjunto de gestos $\Delta @ \vec{X}$ es equivalente al conjunto $(\varinjlim_{a \in A_\Delta} \Delta_\alpha) @ \vec{X}$, el cual resulta de un diagrama de espacios topológicos

$$\uparrow @_{\mathbf{D}} \vec{X} \cong I @_{\mathbf{Top}} X.$$

De ahora en adelante denotaremos simplemente con $\uparrow @ \vec{X}$ al conjunto $\uparrow @_{\mathbf{D}} \vec{X}$ cuando no haya confusión con respecto a la categoría en la que estemos trabajando.

Para el siguiente resultado necesitamos recalcar que debido a las definiciones anteriores denotaremos por $_{-} @_{\mathbf{D}} X$ al funtor contravariante análogo al funtor $\mathbf{D}(-, X)$ y $\Delta @_{\mathbf{D}} -$ como funtor covariante análogo al funtor $\mathbf{D}(\Delta, -)$.

De igual manera necesitaremos algunos resultados de Teoría de Categorías que relacionan los límites directos e inversos con el funtor contravariante $\mathbf{D}(-, X)$ y con el covariante $\mathbf{D}(\Delta, -)$.

Para las siguientes propiedades abusaremos de la notación, ya que al mencionar que $m_i \in M_i$, donde M_i es una digráfica, nos estaremos refiriendo a $m_i = M_i|_C$ donde $C \subseteq A_{M_i}$, es decir que m_i es una restricción de la función de incidencia de la digráfica M_i a un subconjunto de flechas de dicha digráfica.

Proposición 2.8. *Si $\{M_i, \psi_{ji}\}$ es un sistema inverso de digráficas, entonces existe el isomorfismo*

$$\omega : \mathbf{D}(\Delta, \varprojlim M_i) \longrightarrow \varprojlim \mathbf{D}(\Delta, M_i)$$

para cada digráfica Δ .

Es decir, $\Delta @ \varprojlim M_i \cong \mathbf{D}(\Delta, \varprojlim M_i) \cong \varprojlim \mathbf{D}(\Delta, M_i) \cong \varprojlim (\Delta @ M_i)$.

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos que para el sistema inverso $\{M_i, \psi_{ji}\}$ el límite inverso existe.

Definimos una **hebra** como un elemento $(m_i) \in \prod M_i$ tal que $m_i = \psi_{ji}(m_j)$ donde $i \preceq j$, y definimos también L como el conjunto de todas las hebras. Es fácil ver que L es un subespacio topológico de $\prod M_i$. Si p_i es la proyección del producto directo de M_i , definimos $\alpha_i : L \rightarrow M_i$ la restricción $p_i|_L$. Es claro que $\psi_{ji} \circ \alpha_j = \alpha_i$ cuando $i \preceq j$.

Consideremos X una digráfica, y las funciones dadas $f_i : X \rightarrow M_i$ tales que satisfacen $\psi_{ji} \circ f_j = f_i$ para todo $i \preceq j$. Definimos $v : X \rightarrow \prod M_i$ por

$$v(x) = (f_i(x))$$

Entonces el hecho de que la imagen de v esté contenida en L se sigue de que $\psi_{ji} \circ f_j = f_i$ para todo $i \preceq j$. También, v hace al diagrama del límite inverso conmutar ya que $\alpha_i \circ v : x \mapsto (f_i(x)) \mapsto f_i(x)$. Finalmente, v es el único morfismo $X \rightarrow L$ que hace al diagrama conmutar para todo $i \preceq j$. Si $\varphi : X \rightarrow L$, entonces $\varphi(x) = (m_i)$ y $\alpha_i \circ \varphi(x) = m_i$. Entonces, si φ satisficiera $\alpha_i \circ \varphi(x) = f_i(x)$ para toda i y toda x , entonces $m_i = f_i(x)$, por lo que $\varphi = v$.

Concluimos entonces que $L \cong \varprojlim M_i$.

Habiendo demostrado que este límite efectivamente existe, y sobre todo dando la construcción de éste, prosigamos a demostrar la proposición, la cual se sigue de que el límite inverso resuelve un problema de la función universal. Más detalladamente, el funtor $\mathbf{D}(\Delta, _)$ lleva el sistema inverso $\{M_i, \psi_{ji}\}$ en el sistema inverso $\{\mathbf{D}(\Delta, M_i), \psi_{ji*}\}$, donde $\psi_{ji*} : \mathbf{D}(\Delta, M_j) \rightarrow \mathbf{D}(\Delta, M_i)$ está definida mediante

$$f \mapsto \psi_{ji} \circ f.$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \varprojlim \mathbf{D}(\Delta, M_i) & \xleftarrow{\omega} & \mathbf{D}(\Delta, \varprojlim M_i) \\
 \searrow \beta_i & & \swarrow \alpha_{i*} \\
 & \mathbf{D}(\Delta, M_i) & \\
 \searrow \beta_j & \uparrow \psi_{ji*} & \swarrow \alpha_{j*} \\
 & \mathbf{D}(\Delta, M_j) &
 \end{array}$$

Asumamos ahora que la construcción de $\varprojlim \mathbf{D}(\Delta, M_i)$ es análoga a la que acabamos de hacer con $\varprojlim M_i$, entonces sus elementos son hebras $(g_i) \in$

$\prod \mathbf{D}(\Delta, M_i)$ y $\beta_i : (g_i) \mapsto g_i$. Los morfismos $\alpha_i : \varprojlim M_i \rightarrow M_i$ son proyecciones $(m_i) \mapsto m_i$, y α_{i*} son los morfismos inducidos.

Definimos $\omega : \mathbf{D}(\Delta, \varprojlim M_i) \rightarrow \varprojlim \mathbf{D}(\Delta, M_i)$ mediante

$$f \mapsto (\alpha_i \circ f),$$

donde es fácil notar que $\omega(f)$ es una hebra y que ω es un homomorfismo. El diagrama conmuta para las $f \in \mathbf{D}(\Delta, \varprojlim M_i)$, así que

$$\beta_i \circ \omega(f) = \beta_i((\alpha_i \circ f)) = \alpha_i \circ f = \alpha_{i*}(f).$$

Para ver que ω es inyectivo tomamos $f, g \in \mathbf{D}(\Delta, \varprojlim M_i)$ tal que $\omega(f) = \omega(g)$. Entonces $(\alpha_i \circ f) = (\alpha_i \circ g)$ así que $\alpha_i \circ f = \alpha_i \circ g$ para toda i . Si $d \in \Delta$, entonces $f(d) = (m_i)$. Por lo tanto, $\alpha_i \circ f(d) = m_i = \alpha_i \circ g(d)$, por lo que $f = g$.

Falta ver solamente que ω es suprayectiva, para esto tomamos $g = (g_i) \in \varprojlim \mathbf{D}(\Delta, M_i)$. Ya que (g_i) es una hebra, el triángulo del lado derecho del siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim M_i & \xleftarrow{g'} & \Delta \\ \alpha_i \searrow & & \nearrow \beta_i \circ g \\ & M_i & \\ \alpha_j \searrow & \uparrow \psi_{ji} & \nearrow \beta \circ g \\ & M_j & \end{array}$$

Recordando la definición de límite inverso, sabemos que existe $g' : \Delta \rightarrow \varprojlim M_i$ tal que $\alpha_i \circ g' = g_i$ para toda i . Es decir $g = (g_i) = (\alpha_i \circ g') = \omega(g')$, por lo que ω es suprayectiva. \blacklozenge

Similarmenete tenemos

Proposición 2.9. *Si $\{M_i, \psi_{ij}\}$ es un sistema directo de digráficas, entonces existe el isomorfismo*

$$\theta : \mathbf{D}(\varinjlim M_i, \vec{X}) \rightarrow \varinjlim \mathbf{D}(M_i, \vec{X})$$

para cada digráfica \vec{X} .

Es decir, $(\varinjlim M_i) @ X \cong \mathbf{D}(\varinjlim M_i, X) \cong \varinjlim \mathbf{D}(M_i, X) \cong \varinjlim (M_i @ X)$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos el ejemplo 1.22, en donde demostramos el hecho de que el funtor $\mathbf{D}(-, \vec{X})$ es contravariante. Por lo que $\{\mathbf{D}(M_i, \vec{X}), \psi_{ij*}\}$ es un sistema inverso donde $\psi_{ij*} : \mathbf{D}(M_j, \vec{X}) \rightarrow \mathbf{D}(M_i, \vec{X})$ está definida mediante

$$f \mapsto f \circ \psi_{ij}.$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \varprojlim \mathbf{D}(M_i, \vec{X}) & \xleftarrow{\theta} & \mathbf{D}(\varinjlim M_i, \vec{X}) \\
 \searrow \beta_i & & \swarrow \alpha_{i*} \\
 & \mathbf{D}(M_i, \vec{X}) & \\
 \searrow \beta_j & \uparrow \psi_{ij*} & \swarrow \alpha_{j*} \\
 & \mathbf{D}(M_j, \vec{X}) &
 \end{array}$$

Como en la proposición anterior la construcción de $\varprojlim \mathbf{D}(M_i, \vec{X})$ es análoga, entonces sus elementos son hebras $(g_i) \in \prod \mathbf{D}(M_i, \vec{X})$ y $\beta_i : (g_i) \mapsto g_i$. Los morfismos $\alpha_i : M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ son los encajes en el diagrama de $\varinjlim M_i$ y α_{i*} los morfismos inducidos.

Ahora definimos el morfismo $\theta : \mathbf{D}(\varinjlim M_i, \vec{X}) \rightarrow \varprojlim \mathbf{D}(M_i, \vec{X})$ mediante

$$f \mapsto (f \circ \alpha_i).$$

Es fácil notar que $\theta(f)$ es una hebra y que θ es un homomorfismo, ya que $f \circ \alpha_i = \psi_{ij*}(f \circ \alpha_j)$.

El diagrama conmuta para las $f \in \mathbf{D}(\varinjlim M_i, \vec{X})$, así que

$$\beta_i \circ \theta(f) = \beta_i((f \circ \alpha_i)) = f \circ \alpha_i = \alpha_{i*}(f).$$

Para ver que θ es inyectivo tomamos $f, g \in \mathbf{D}(\varinjlim M_i, \vec{X})$ tal que $\theta(f) = \theta(g)$. Entonces $(f \circ \alpha_i) = (g \circ \alpha_i)$, así que $f \circ \alpha_i = g \circ \alpha_i$ para toda i . Si $m \in \varinjlim M_i$, entonces $f(m) = x$. Por lo tanto, $f \circ \alpha_i(m_i) = f(m) = x = g(m) = g \circ \alpha_i(m_i)$ para toda $m_i \in M_i$, por lo que $f = g$.

Falta ver solamente que θ es suprayectiva, para esto tomamos $g = (g_i) \in \varprojlim \mathbf{D}(M_i, \vec{X})$, ya que (g_i) es una hebra, el triángulo del lado derecho del siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim M_i & \xrightarrow{g'} & \vec{X} \\
\alpha_i \searrow & & \nearrow \beta_i \circ g \\
& M_i & \\
\alpha_j \searrow & \downarrow \psi_{ij} & \nearrow \beta_j \circ g \\
& M_j &
\end{array}$$

Recordando la definición de límite directo, sabemos que existe

$$g' : \varinjlim M_i \longrightarrow \vec{X}$$

tal que $g'_i \circ \alpha_i = g_i$ para toda i . Es decir $g = (g_i) = (g'_i \circ \alpha_i) = \theta(g')$, por lo que θ es suprayectiva. \blacklozenge

Recordemos que $\Delta @ \vec{X} \cong (\varinjlim_{a \in A_\Delta} \Delta_a) @ \vec{X}$ y gracias a las proposiciones anteriores $(\varinjlim_{a \in A_\Delta} \Delta_a) @ \vec{X} \cong \varprojlim_{a \in A_\Delta} (\Delta_a @ \vec{X})$, donde cada $\Delta_a @ \vec{X}$ es un espacio topológico como ya habíamos observado anteriormente. Definimos entonces la topología de $\Delta @ \vec{X}$ como la topología límite del diagrama (definición 1.34). Al espacio con esta topología lo denotamos por $\Delta @ X$.

Para la siguientes proposiciones haremos abuso de la notación al denotar con \uparrow_a a la digráfica Δ_a ya definida anteriormente.

Proposición 2.10. Sean Δ, Γ digráficas, y $\{(\uparrow_i)_{i \in A_\Gamma} (\psi_{ij})_{i \leq j}\}$ y $\{(\uparrow_c)_{c \in A_\Delta}, (\psi_{cd})_{c \leq d}\}$ sistemas directos de digráficas, entonces existe el isomorfismo

$$\eta : \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b @ (\uparrow_a @ X))) \rightarrow \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @ (\uparrow_a @ X)))$$

DEMOSTRACIÓN. Por lo visto en la proposición 2.9 sabemos que al aplicar al sistema directo $\{(\uparrow_i)_{i \in A_\Gamma} (\psi_{ij})_{i \leq j}\}$ el funtor contravariante $(_ @ X)$, entonces $\{(\uparrow_i @ X), \psi_{ij*}\}$ es un sistema inverso, de igual forma, a éste último podemos aplicarle el funtor covariante $(\uparrow_b @ _)$ con $b \in A_\Delta$. De esta forma se obtiene el sistema inverso $\{(\uparrow_b @ (\uparrow_i @ X)), \psi_{ji}^b\}$ para cada $b \in A_\Delta$, cuyo límite inverso será $\{(\varprojlim_{i \in A_\Gamma} (\uparrow_b @ (\uparrow_i @ X))), (\beta_i^b)_{i \in A_\Gamma}\}$.

De manera similar al sistema directo $\{(\uparrow_c)_{c \in A_\Delta}, (\psi_{cd})_{c \geq d}\}$ aplicamos el funtor contravariante $(-\text{@}(\uparrow_a \text{@}X))$, con lo cual obtenemos el sistema inverso $\{(\uparrow_c \text{@}(\uparrow_a \text{@}X)), \psi_{dc}^a\}$ para cada $a \in A_\Gamma$, cuyo límite inverso será

$$\{(\varprojlim_{c \in A_\Delta} (\uparrow_c \text{@}(\uparrow_a \text{@}X))), (\alpha_c^a)_{c \in A_\Delta}\}.$$

Ahora consideremos $\{\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_a \text{@}X))), (\alpha_b)_{b \in A_\Delta}\}$ el límite inverso del sistema inverso $\{(\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_c \text{@}(\uparrow_a \text{@}X)))_{c \in A_\Delta}, (\vec{\psi}_{dc})_{d \geq c}\}$ y el límite inverso $\{\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_i \text{@}X))), (\beta_i)_{i \in A_\Gamma}\}$ del sistema inverso

$$\{(\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_i \text{@}X))), (\vec{\psi}_{ji})_{j \geq i}\}.$$

Por lo que todos los triángulos del siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{array}{c}
 \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_a \text{@}X))) \\
 \downarrow \alpha_c \qquad \searrow \alpha_d \\
 \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_c \text{@}(\uparrow_a \text{@}X)) \xleftarrow{\vec{\psi}_{dc}} \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_d \text{@}(\uparrow_a \text{@}X)) \\
 \downarrow \beta_j^c \qquad \downarrow \beta_j^d \qquad \searrow \beta_j^d \\
 (\uparrow_c \text{@}(\uparrow_i \text{@}X)) \xleftarrow{\psi_{ji}^c} (\uparrow_c \text{@}(\uparrow_j \text{@}X)) \qquad (\uparrow_d \text{@}(\uparrow_i \text{@}X)) \xleftarrow{\psi_{ji}^d} (\uparrow_d \text{@}(\uparrow_j \text{@}X)) \\
 \downarrow \alpha_c^i \qquad \downarrow \alpha_c^j \qquad \downarrow \alpha_d^i \qquad \downarrow \alpha_d^j \\
 \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_i \text{@}X)) \xleftarrow{\vec{\psi}_{ji}} \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_j \text{@}X)) \\
 \uparrow \beta_i \qquad \nearrow \beta_j \\
 \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b \text{@}(\uparrow_a \text{@}X))).
 \end{array}$$

Notemos ahora que $\psi_{ji}^c \circ (\alpha_c^j \circ \beta_j) = (\alpha_c^i \circ \beta_i)$ por lo que existe un único morfismo

$$\phi_c : \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) \longrightarrow \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_c @(\uparrow_a @X))$$

tal que hace al diagrama del límite inverso conmutar.

De igual forma $\psi_{ji}^d \circ (\alpha_d^j \circ \beta_j) = (\alpha_d^i \circ \beta_i)$ por lo que existe un único morfismo

$$\phi_d : \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) \longrightarrow \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_d @(\uparrow_a @X))$$

tal que hace al diagrama del límite inverso conmutar.

Obteniendo así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) & & \\ \alpha_c \downarrow & \searrow \alpha_d & \\ \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_c @(\uparrow_a @X)) & \xleftarrow{\psi_{dc}} & \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_d @(\uparrow_a @X)) \\ \uparrow \phi_c & & \nearrow \phi_d \\ \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) & & \end{array}$$

donde $\psi_{dc} \circ \phi_d = \phi_c$, por lo cual existe un único morfismo

$$\theta : \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) \longrightarrow \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))).$$

De manera análoga obtenemos que existe un único morfismo

$$\eta : \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) \longrightarrow \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))).$$

Debido a que θ y η son morfismos únicos, entonces

$$\theta \circ \eta : \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) \longrightarrow \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X)))$$

y

$$\eta \circ \theta : \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X))) \longrightarrow \varprojlim_{b \in A_\Delta} (\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_b @(\uparrow_a @X)))$$

también son únicos, pero a su vez sabemos que existen los morfismos identidad para cada uno de estos límites inverso, por lo cual cada una de estas composiciones deben ser justamente dichas identidades. Por lo tanto θ y η son isomorfismos. \blacklozenge

De esta forma podríamos repetir la construcción de un gesto, ahora considerando al espacio topológico $\Delta \vec{\textcircled{a}} X$, construyendo así un espacio topológico de hipergestos $\Gamma \vec{\textcircled{a}} \Delta \vec{\textcircled{a}} X$, hiperhipergestos $\Lambda \vec{\textcircled{a}} \Gamma \vec{\textcircled{a}} \Delta \vec{\textcircled{a}} X$, etc.

Recordando la definición 1.12 notemos que en particular $\uparrow \vec{\textcircled{a}} \uparrow \vec{\textcircled{a}} X$ es isomorfo a $I^2 \vec{\textcircled{a}} X$ el conjunto de homotopías en X , es decir que los hipergestos generalizan homotopías entre curvas continuas.

Proposición 2.11. *Si Γ, Δ son digráficas y X es un espacio topológico, entonces se tiene el homeomorfismo canónico*

$$\Gamma \vec{\textcircled{a}} \Delta \vec{\textcircled{a}} X \cong \Delta \vec{\textcircled{a}} \Gamma \vec{\textcircled{a}} X$$

DEMOSTRACIÓN. Esta prueba resulta del hecho que una digráfica es el límite directo de sus flechas. Por un lado tenemos que esto implica que el espacio de hipergesto $\Gamma \vec{\textcircled{a}} \Delta \vec{\textcircled{a}} X$ es el límite $(\varinjlim_{a \in A_\Gamma} \Gamma_a) \textcircled{a} (\Delta \vec{\textcircled{a}} X)$, pero en particular podemos decir $(\Gamma_a)_{a \in A_\Gamma} \cong (\uparrow_a)_{a \in A_\Gamma}$.

Entonces

$$\Gamma \vec{\textcircled{a}} \Delta \vec{\textcircled{a}} X \cong (\varinjlim_{a \in A_\Gamma} \uparrow_a) \textcircled{a} (\Delta \vec{\textcircled{a}} X).$$

Aún más, por ser $(_ \textcircled{a} (\Delta \vec{\textcircled{a}} X))$ un funtor contravariante que convierte límites directos en límites inversos se tiene que

$$(\varinjlim_{a \in A_\Gamma} \uparrow_a) \textcircled{a} (\Delta \vec{\textcircled{a}} X) \cong \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_a \textcircled{a} (\Delta \vec{\textcircled{a}} X)).$$

Continuando de manera análoga se tiene que

$$\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_a \textcircled{a} (\Delta \vec{\textcircled{a}} X)) \cong \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_a \textcircled{a} (\varinjlim_{b \in A_\Delta} \Delta_b \textcircled{a} X)) \cong \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_a \textcircled{a} (\varinjlim_{b \in A_\Delta} \uparrow_b \textcircled{a} X)).$$

Por ser $(_ \textcircled{a} X)$ un funtor contravariante que convierte límites directos en límites inversos se tiene que

$$\varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_a \textcircled{a} (\varinjlim_{b \in A_\Delta} \uparrow_b \textcircled{a} X)) \cong \varprojlim_{a \in A_\Gamma} (\uparrow_a \textcircled{a} (\varprojlim_{b \in A_\Delta} (\uparrow_b \textcircled{a} X))).$$

Luego, como $(\uparrow_a @_)$ es un funtor covariante que preserva límites inversos,

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a @ (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ X))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ (\uparrow_b @ X))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ \uparrow_b @ X)).$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ (\uparrow_b @ X))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ \uparrow_b @ X)).$$

Además, por la propiedad 2.10

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ \uparrow_b @ X)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a @ \uparrow_b @ X)).$$

Y considerando que $(\uparrow_a @ \uparrow_b) \cong (\uparrow_b @ \uparrow_a) \cong I^2$ se tiene que

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ \uparrow_b @ X)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ \uparrow_a @ X)).$$

Luego

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ \uparrow_a @ X)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ (\uparrow_a @ X))).$$

Ahora, por ser $(\uparrow_b @_)$ un funtor covariante que preserva límites inversos

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ (\uparrow_a @ X))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a @ X)).$$

Luego, como $(_ @ X)$ es un funtor contravariante que convierte límites directos en límites inversos,

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a @ X)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} \uparrow_a @ X)).$$

Por último, como $(_@(\Gamma \vec{\textcircled{X}}))$ es un funtor contravariante que convierte límites directos en límites inversos, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @(\lim_{\overrightarrow{a \in A_\Gamma}} \uparrow_a @X)) &\cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @(\lim_{\overrightarrow{a \in A_\Gamma}} \Gamma_a @X)) \cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @(\Gamma \vec{\textcircled{X}})) \\ &\cong (\lim_{\overrightarrow{b \in A_\Delta}} \Delta_b @(\Gamma \vec{\textcircled{X}})) \cong (\Delta \vec{\textcircled{X}} @(\Gamma \vec{\textcircled{X}})) \cong \Delta \vec{\textcircled{X}} @\Gamma \vec{\textcircled{X}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma \vec{\textcircled{X}} @\Delta \vec{\textcircled{X}} \cong \Delta \vec{\textcircled{X}} @\Gamma \vec{\textcircled{X}}$. ◆

Notemos que esto es posible debido a que podemos considerar a $\Gamma @(\Delta \vec{\textcircled{X}})$ como un conjunto de gestos ya que $\Delta \vec{\textcircled{X}}$ es un espacio topológico.

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 2.12. Recordemos el gesto de un pianista (ejemplo 2.6). Este gesto puede ser pensado como la construcción de otros gestos, recalcando además que un hipergesto es construido de un sistema de homotopías el cual tiene como vértices precisamente otros gestos, esta vez tomaremos el hipergesto $\eta : \uparrow \rightarrow \overrightarrow{\text{EspacioDedo}}$. Esto significa que tenemos una curva continua de gestos de un dedo $\eta(t), t \in I$, del gesto inicial del dedo $\eta(0)$ al gesto final del dedo $\eta(1)$.

Ejemplo 2.13. Consideremos los compases 31-34 de la sonata Hammerklavier, op. 106/Allegro del compositor Ludwig van Beethoven.

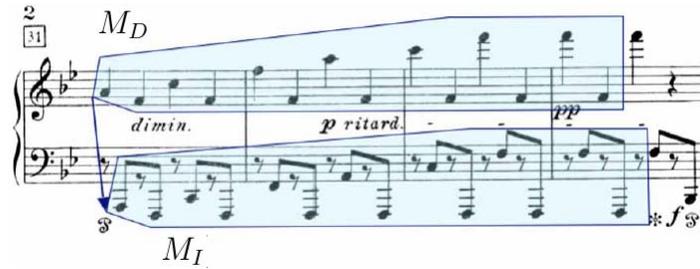


FIGURA 3. (Tomada de [Mazzola 2009], p.50.)

En la figura 3 tenemos la parte que es tocada por ambas manos del pianista, notemos que la mano izquierda (denotada con M_I) crea un eco de lo que la mano derecha toca (denotada con M_D). Por lo cual nos enfocaremos en la parte M_D (Figura 4).

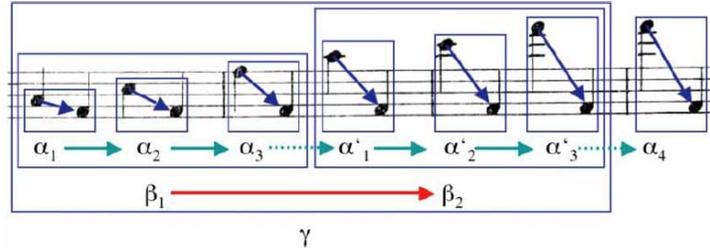


FIGURA 4. (Tomada de [Mazzola 2009], p.50.)

En este ejemplo utilizaremos como espacio topológico a \mathbb{R}^2 en donde la primera coordenada será el valor del tiempo de inicio de la nota, entendiendo que cada compás es una unidad más, mientras que la segunda coordenada será el valor del tono de la nota, esto en términos de semitonos, donde la nota Do central será 0 y cada semitono más agudo será una unidad más y cada semitono más grave una unidad menos. Así podemos decir:

$$\begin{array}{ll}
 t(\alpha_1) = (1/4, 9) & h(\alpha_1) = (2/4, 5) \\
 t(\alpha_2) = (3/4, 12) & h(\alpha_2) = (4/4, 5) \\
 t(\alpha_3) = (5/4, 15) & h(\alpha_3) = (6/4, 5) \\
 t(\alpha'_1) = (7/4, 21) & h(\alpha'_1) = (8/4, 5) \\
 t(\alpha'_2) = (9/4, 24) & h(\alpha'_2) = (10/4, 5) \\
 t(\alpha'_3) = (11/4, 27) & h(\alpha'_3) = (12/4, 5) \\
 t(\alpha_4) = (13/4, 27) & h(\alpha_4) = (14/4, 5)
 \end{array}$$

Donde t y h son las funciones mencionadas en la definición 1.1.

Entonces tenemos siete gestos de intervalos descendentes

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha_4 \in \uparrow \vec{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^2$$

Ahora denotemos con \uparrow^n la digráfica que consiste de $n + 1$ vértices, y la cual tiene una flecha del vértice i al vértice $i + 1$ para todo $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Así tenemos $\beta \in \uparrow^6 \vec{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^2$, un hipergesto que transforma α_1 en α_2 , α_2 en α_3 , etc, y α'_3 en α_4 . Pero a este hipergesto podemos restringirlo en dos hipergestos más “pequeños”, $\beta_1, \beta_2 \in \uparrow^2 \vec{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^2$ los cuales tendrán sus

vértices en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, y $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ respectivamente, los cuales a su vez son vértices de un hipergesto $\gamma \in \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \uparrow^2 \vec{\mathbb{Q}} \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$. Lo que hace este último es transformar β_1 en β_2 , donde β_1 está construido por las tres notas f 's en la parte grave de cada intervalo trasladándolas a las correspondientes f 's en β_2 , el subgesto de β_1 conecta a las notas a, c, f las cuales son desplazadas una octava arriba y en tiempo a las correspondientes notas octavadas a, c, f y tiempo de β_2 . Por otro lado, recordando que M_I es precisamente un eco de M_D , entonces el hipergesto de éste será construido análogamente, por lo que tenemos $\gamma' \in \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \uparrow^2 \vec{\mathbb{Q}} \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$.

Poniendo todo junto, incluyendo el eco, se obtiene un hipergesto $\gamma^+ \in \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \uparrow^2 \vec{\mathbb{Q}} \uparrow \vec{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$, el cual representa este pequeño fragmento de la sonata Hammerklavier, op. 106/Allegro de Ludwig van Beethoven.

Categorías topológicas y el Teorema de Escher

Veremos ahora que la proposición 2.11 puede aplicarse a un concepto un poco más abstracto que el de espacio topológico. Para esto daremos una segunda definición de categoría para así poder definir otros conceptos.

Definición 3.1. Una categoría \mathbf{C} siempre cuenta con un par de conjuntos, uno de objetos $Obj(\mathbf{C})$ y otro de morfismos \mathbf{A} , así como de dos operaciones que relacionan una con otra. Estas operaciones se definen como $d, c : \mathbf{A} \rightarrow Obj(\mathbf{C})$ (d para dominio y c para codominio) tales que $f : d(f) \rightarrow c(f)$ para todo morfismo f de la categoría.

Además de estas operaciones hay dos más:

- Identidad:

$$id : Obj(\mathbf{C}) \rightarrow A \\ a \mapsto id_a$$

la cual asigna a a un morfismo llamado identidad denotado con $id_a = 1_a : a \rightarrow a$, para cada objeto de C .

- Composición:

$$\circ : A \times_o A \rightarrow A \\ \langle g, f \rangle \mapsto gf$$

con $A \times_o A = \{ \langle g, f \rangle \mid g, f \in A \text{ y } d(g) = c(f) \}$ y que a cada $\langle f, g \rangle \in A \times_o A$ le asigna un morfismo gf llamado composición, con $gf : d(f) \rightarrow c(g)$.

Estas operaciones están sujetas a dos axiomas:

1. Asociatividad: para los morfismos f, g y k tales que $d(g) = c(f)$ y $d(k) = c(g)$ ($a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} e \xrightarrow{k} j$ con a, b, e y j en $Obj(\mathbf{C})$) se tiene

$$k(gf) = (kg)f$$

2. Ley Unitaria: para todos los morfismos $f : a \rightarrow b$ y $g : b \rightarrow e$ la composición con la identidad 1_b da $1_b f = f$ y $g 1_b = g$.

Recordando la definición de categoría 1.14 es necesario aclarar ciertos puntos que podrían llegar a contraponerse con nuestra definición anterior. Uno de los objetivos principales de la teoría de categorías es la discusión de propiedades sobre una *totalidad* de objetos matemáticos; por ejemplo, el *conjunto* formado por todos los grupos o bien el *conjunto* formado por todos los homomorfismos de grupos. Dado que un grupo no es más que un *conjunto* en sí con cierta estructura adicional, la afirmación anterior propone el estudio de un *conjunto* formado por todos los *conjuntos* con cierta estructura estipulada de antemano. En un lenguaje más formal, estamos invocando aquí un principio de **comprensión**: si tenemos una propiedad $\varphi(x)$ aplicable a cualquier conjunto x , entonces podemos formar el conjunto $\{x \mid \varphi(x)\}$ de todos los conjuntos que satisfacen esta propiedad; sin embargo, este grado de generalidad en el principio de comprensión nos conduciría irremediabilmente a la consabida paradoja de Russell.

Por esta razón, en la llamada “teoría intuitiva de conjuntos” donde se tiene la relación de pertenencia usual \in , lo que se hace es restringir la aplicación del principio de comprensión: dados dos *conjuntos*, u , v , podemos obtener el *conjunto* $\{u, v\}$, así como la pareja ordenada (u, v) , un conjunto infinito (el conjunto $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ de todos los ordinales finitos), así como el producto cartesiano $u \times v$, el conjunto potencia $\wp(u)$, así como la unión de un conjunto x de conjuntos:

$$\cup x = \{y \mid y \in z, z \in x\}.$$

Finalmente, uno permite el principio de comprensión *para elementos del conjunto* $u : \{x \mid x \in u, \varphi(x)\}$; es decir, aquellos elementos de un conjunto dado de antemano que además satisfacen la propiedad φ , forman un *conjunto*.

A la práctica anterior suele añadirse la *existencia de un universo o marco de referencia* U . Sin entrar en demasiados detalles, éste es un conjunto en el cual podemos llevar a cabo las operaciones usuales de la teoría de conjuntos aplicadas a los elementos de U —que son a su vez *conjuntos*—, y obtendremos elementos de U .

Así, por ejemplo, si tenemos un universo U , *fijo*, diremos que $u \in U$ es un **conjunto pequeño**, de modo que podríamos considerar a U como el conjunto de todos los conjuntos pequeños. Análogamente diríamos que una función $f : u \rightarrow v$ es **pequeña** si u y v son conjuntos pequeños. Lo anterior implica que f misma puede considerarse como un conjunto pequeño —considerarla como la terna ordenada (u, G_f, v) , donde $G_f \subset u \times v$ es la gráfica de f —, de modo que el principio de comprensión limitado, anteriormente descrito, nos permitiría la construcción del conjunto A , cuyos elementos son las funciones pequeñas y que, por lo anterior, son elementos de U . Podemos definir ahora

la categoría Con como aquella cuyos objetos son los elementos del conjunto U y cuyas flechas o morfismos son los elementos de A .

De este modo podemos definir también qué entendemos por una **categoría pequeña**: es aquella cuyos objetos y cuyos morfismos son conjuntos pequeños; sin embargo, nótese que Con **no es una categoría pequeña** ya el conjunto de sus objetos U , **no** es pequeño (de lo contrario tendríamos una expresión como $U \in U$ y el “axioma de regularidad” que acompaña a un universo prohíbe precisamente este tipo de expresiones).

Podemos utilizar “clases” además de conjuntos: una *clase* C es cualquier subconjunto $C \subset U$, donde U es el universo. Dado que $x \in u \in U$ implica que $x \in U$, se tiene que cada elemento de U es también un subconjunto de U y, por lo tanto, que cada conjunto pequeño es también una clase; sin embargo, algunas clases no son conjuntos pequeños —como el universo U por ejemplo—; a éstas se les conoce como *clases propias*, y podemos definir en este contexto lo que significa una **categoría grande**: es aquella en la cual tanto los objetos como los morfismos son clases (propias o no). Por ejemplo, la categoría de conjuntos pequeños o Con es grande, al igual que aquella de grupos pequeños Grp .

Desafortunadamente, lo anterior podría rebasarse fácilmente si consideramos, por ejemplo, la categoría Cls cuyos objetos son *todas* las clases y cuyos morfismos son funciones entre éstas. La “colección” de objetos en este caso no sería una clase (aun cuando fijásemos una clase, U , como “universo”) y habría que denominarla con algún otro apelativo que designe un nivel de estructura “mayor”. Es por esta razón, que algunos autores prefieren trabajar con un enfoque de teoría de clases y otros se apegan a los conjuntos; sin embargo, lo que acaban haciendo ambas partes resulta ser análogo y por esto nuestra inclinación a utilizar nuestras dos definiciones como intercambiables (definición 1. 9 y 3. 1), sin embargo, teóricamente, el apéndice escrito por Nicolás Bourbaki al SGA 4, nos garantiza que si aceptamos la existencia de un cardinal inaccesible κ , entonces existe un modelo de Zermelo-Fraenkel en el cual, sin importar en qué nivel de estructura estemos trabajando (con conjuntos, clases, conglomerados, etc.), podemos hacerlo como si estuviésemos en el contexto de un universo U que es un conjunto y usáramos el enfoque con el que abrimos esta sección. Otra alternativa, sería utilizar la Teoría de Topos de Grothendieck y conjuntos “locales”, pero esto escapa a los alcances del presente trabajo.

Proposición 3.2. *Las definiciones 1.14 y 3. 1 son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo la definición 1.14, veamos que una categoría \mathbf{C} cumple con lo descrito en la definición 3.1:

1. El conjunto de objetos, denotado con $Obj(\mathbf{C})$. Resultado de la nota anterior.
2. Un conjunto de morfismos $\mathbf{C}(a, b)$ para cada par (a, b) de objetos, consideremos entonces $\bigcup_{a, b \in Obj(\mathbf{C})} \mathbf{C}(a, b)$ el conjunto de morfismos que será nuestro conjunto \mathbf{A} .

Con este conjunto definido podemos dar las funciones de dominio y codominio definidas como las siguientes:

Sea $f \in \mathbf{A}$ si y sólo si $f \in \mathbf{C}(a, b)$ para algunos $a, b \in Obj(\mathbf{C})$ definiendo $d(f) = a$, $c(f) = b$. Además el axioma (I) de la definición 1.14 se cumple si y sólo si cada f tiene un único dominio y codominio, lo cual se cumple si y sólo si d y c están bien definidas.

3. La composición $\mathbf{C}(a, b) \times \mathbf{C}(b, e) \longrightarrow \mathbf{C}(a, e)$ denotada con

$$(f, g) \longmapsto gf$$

para cada tripleta ordenada a, b y e de objetos.

Notemos que esto es equivalente a definir

$$\circ : \mathbf{A} \times_{\circ} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$$

$$\langle g, f \rangle \longmapsto gf$$

donde $gf : d(f) \longrightarrow c(g)$ ya que $gf \in \mathbf{C}(a, e)$ y además $\mathbf{C}(a, b) \times \mathbf{C}(b, e) \subset \mathbf{A} \times_{\circ} \mathbf{A}$ para cada tripleta de objetos a, b y e , ya que $f \in \mathbf{C}(a, b)$ y $g \in \mathbf{C}(b, e)$ implica que $d(g) = c(f)$, es decir $\langle g, f \rangle \in \mathbf{A} \times_{\circ} \mathbf{A}$.

Además sabemos que estos conjuntos y la composición deben cumplir los axiomas:

- ii. Para todo objeto a existe un morfismo en $\mathbf{C}(a, a)$ denotado generalmente con 1_a tal que para todo morfismo $f \in \mathbf{C}(a, b)$, $f = 1_b f$ y $f = f 1_a$.

Lo cual pasa si y sólo si la siguiente función está bien definida:

$$id : Obj(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{A}$$

$$a \longmapsto id_a$$

la cual asigna a a un morfismo llamado identidad denotado con $id_a = 1_a : a \longrightarrow a$, para cada objeto de \mathbf{C} .

la cual cumple además que para todos los morfismos $f \in \mathbf{C}(a, b)$ y $g \in \mathbf{C}(b, e)$ se tiene que la composición con la identidad 1_b da $1_b f = f$ y $g 1_b = g$, es decir la ley unitaria.

- iii. La composición es asociativa. Dados los morfismos $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} e \xrightarrow{h} j$, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Lo que es equivalente a decir que para los morfismos f, g y h tales que $d(g) = c(f)$ y $d(h) = c(g)$ se tiene

$$h(gf) = (hg)f$$

cumpliéndose el axioma de asociatividad.

Con lo anterior sólo falta demostrar con la definición 3.1 el conjunto \mathbf{A} de morfismos y las funciones c y d definen los conjuntos $\mathbf{C}(a, b)$ para cada $a, b \in \text{Obj}(\mathbf{C})$.

Sea \mathbf{A} el conjunto de morfismos de la categoría \mathbf{C} , definimos $\mathbf{C}(a, b) = \{f \in \mathbf{A} \mid d(f) = a, c(f) = b \text{ con } a, b \in \text{Obj}(\mathbf{C})\}$, el cual es subconjunto del conjunto de morfismos \mathbf{A} , por lo cual es un conjunto de morfismos para el par (a, b) el cual tiene como dominio a a y como codominio a b . \blacklozenge

Definición 3.3. Sea K una categoría tal que su conjunto de morfismos es un espacio topológico, en la cual tanto las funciones de dominio y codominio como la composición de morfismos son continuas. Entonces se dice que K es una **categoría topológica**.

Ejemplo 3.4. La *categoría simplejo* ∇ asociada al intervalo unitario I .

En esta categoría su conjunto de morfismos es $\nabla = \{(x, y) \mid x, y \in I \text{ y } x \leq y\}$ y las funciones de dominio y codominio $d(x, y) = (x, x)$, $c(x, y) = (y, y)$, en este caso la composición entre morfismos es la obvia, $(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$ y la topología sobre ∇ es la topología relativa heredada del producto $I \times I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Veremos ahora más detalles de estas categorías topológicas.

Definición 3.5. Sean K, L dos categorías topológicas. Un **functor topológico** $F : K \rightarrow L$ es un functor que a su vez es una función continua entre conjuntos de morfismos.

Esto define la categoría **TopCat** de categorías topológicas cuyos objetos son categorías topológicas y que tiene por morfismos los funtores topológicos entre categorías topológicas. Con el fin de distinguir el conjunto de funtores topológicos $F : K \rightarrow L$ del conjunto más grande $K @_{\mathbf{Cat}} L = \mathbf{Cat}(K, L)$ de todos los posibles funtores, lo denotaremos con $K \odot L = \mathbf{TopCat}(K, L)$.

Considerando lo anterior, si K es una categoría topológica, el conjunto de curvas continuas con valores en K es por definición el conjunto $\nabla \odot K$.

Evidentemente si K es un espacio topológico se tiene $\nabla \odot K \cong I @_{\mathbf{Top}} K$, donde $I @_{\mathbf{Top}} K$ es definido como el conjunto $\mathbf{Top}(I, K)$ de curvas continuas $c : I \rightarrow K$, I – parametrizadas en el espacio topológico K , la biyección es inducida por la restricción de un funtor $F : \nabla \rightarrow K$ al encaje canónico $I \rightarrow \nabla$ de los objetos en ∇ . Entonces $\nabla \odot K$ es el conjunto de objetos de una categoría también denotada con $\nabla \odot K$, donde los morfismos entre dos curvas $f, g : \nabla \rightarrow K$ serán las transformaciones naturales $\nu : f \rightarrow g$, lo que significa que las funciones definidas $\nu : I \rightarrow K$ son continuas y que satisfacen los cuadros conmutativos definidos por las transformaciones naturales (definición 1.23).

Ejemplo 3.6. Sea ∇ la categoría simplejo ya definida y K una categoría. El conjunto $\nabla \odot K$ puede ser forzado para que sea una categoría topológica aunque K no lo sea.

Tomemos C cualquier conjunto de funtores tal que $C \subset \nabla @ K$, y la topología más fina sobre K tal que todos los funtores de C sean continuos. Para esta construcción escribiremos $\nabla \odot_C K$ para indicar que K es ahora una categoría topológica vía C , y que éste es el conjunto de todas las curvas continuas con respecto a esta topología.

Con el fin de obtener el concepto de gesto (definición 2. 3) en categorías topológicas, necesitamos imitar la construcción de digráficas espaciales (definición 2. 2). Para esto consideraremos dos funtores continuos, cola y cabeza $t, h : \nabla \odot K \rightarrow K$ que definiremos a continuación. Sea $\nu : f \rightarrow g$ una transformación natural entre $f, g : \nabla \rightarrow K$, entonces $t(\nu) = \nu(0) : f(0) \rightarrow g(0)$ y $h(\nu) = \nu(1) : f(1) \rightarrow g(1)$.

Llamaremos a este diagrama de categorías topológicas y funtores continuos una **digráfica categórica** \overrightarrow{K} de K . Observemos que si no tomamos en cuenta que K es una categoría y nos limitamos a los objetos de esta construcción podemos verla simplemente como una digráfica espacial de K . Más aún si Γ es una digráfica, entonces el conjunto de morfismos $\Gamma @_{\mathbf{D}} \overrightarrow{K}$ es el conjunto de morfismos de digráficas dentro de la digráfica espacial subyacente K . En otras palabras, cada morfismo asigna un objeto de K para cada vértice de Γ , y una curva continua (un funtor topológico) $\nabla \rightarrow K$ a cada flecha de Γ . Por lo que llamaremos un **gesto con esqueleto en Γ y cuerpo \mathbf{K}** a los morfismos de digráficas $g : \Gamma \rightarrow \overrightarrow{K}$.

Ya construido el conjunto $\Gamma @_{\mathbf{D}} \overrightarrow{K}$ de gestos con esqueleto en Γ y cuerpo en una categoría topológica, notemos que para el caso especial donde la

digráfica espacial Γ es sólo una flecha con dos vértices diferentes, tenemos entonces que $\uparrow @_{\mathbf{D}} \vec{K} \cong \nabla \textcircled{C} K$ es la categoría topológica de curvas continuas $c : \nabla \longrightarrow K$, con la ya mencionada topología compacto-abierta.

Proposición 3.7. *Sea $\Gamma @ \vec{K}$ el conjunto de gestos con esqueleto en Γ y cuerpo K , con K una categoría topológica. Entonces $\Gamma @ \vec{K}$ es una categoría topológica.*

DEMOSTRACIÓN. Recordando la proposición 2.7, $\Gamma \cong \varinjlim_{a \in A_{\Gamma}} \Gamma_a$ y en particular podemos decir $(\Gamma_a)_{a \in A_{\Gamma}} \cong (\uparrow_a)_{a \in A_{\Gamma}}$.

Por otro lado, sabemos que $\uparrow @ \vec{K} \cong \nabla \textcircled{C} K \in \mathbf{TopCat}$.

Así

$$\Gamma @ \vec{K} \cong (\varinjlim_{a \in A_{\Gamma}} \Gamma_a) @ \vec{K} \cong (\varinjlim_{a \in A_{\Gamma}} \uparrow_a) @ \vec{K} \cong \varprojlim_{a \in A_{\Delta}} (\uparrow_a @ \vec{K}),$$

Puesto que cada $\uparrow_a @ \vec{K} \cong \nabla \textcircled{C} K$ es una categoría topológica, entonces $\varprojlim_{a \in A_{\Delta}} (\uparrow_a @ \vec{K}) \cong \Gamma @ \vec{K}$ es también una categoría topológica por las propiedades de límite inverso. \blacklozenge

A esta nueva categoría la denotaremos con $\Gamma @ \vec{K}$, la cual da paso a la noción de hipergesto construida anteriormente con espacios topológicos. Por lo que ahora tenemos el *Teorema de Escher* para categorías topológicas de hipergestos.

Teorema de Escher 3.8. *Sean Γ, Δ digráficas y K una categoría topológica, entonces se tiene el isomorfismo canónico de categorías topológicas*

$$\Gamma @ \Delta @ \vec{K} \cong \Delta @ \Gamma @ \vec{K}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por un lado, tenemos que esto implica que el espacio de hipergesto $\Gamma @ \Delta @ \vec{K}$ es el límite $(\varinjlim_{a \in A_{\Gamma}} \Gamma_a) @ (\Delta @ \vec{K})$, pero en particular podemos decir $(\Gamma_a)_{a \in A_{\Gamma}} \cong (\uparrow_a)_{a \in A_{\Gamma}}$.

Entonces

$$\Gamma \overrightarrow{\textcircled{@}} \Delta \overrightarrow{\textcircled{@}} K \cong \left(\lim_{\substack{\rightarrow \\ a \in A_\Gamma}} \uparrow_a \right) \textcircled{@} (\Delta \overrightarrow{\textcircled{@}} K).$$

Aún más, por ser $(_ \textcircled{@} (\Delta \overrightarrow{\textcircled{@}} K))$ un functor contravariante que convierte límites directos en límites inversos se tiene que

$$\left(\lim_{\substack{\rightarrow \\ a \in A_\Gamma}} \uparrow_a \right) \textcircled{@} (\Delta \overrightarrow{\textcircled{@}} K) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\Delta \overrightarrow{\textcircled{@}} K)).$$

Continuando de manera análoga se tiene que

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\Delta \overrightarrow{\textcircled{@}} K)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\lim_{\substack{\rightarrow \\ b \in A_\Delta}} \Delta_b \textcircled{@} K)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\lim_{\substack{\rightarrow \\ b \in A_\Delta}} \uparrow_b \textcircled{@} K)).$$

Por ser $(_ \textcircled{@} K)$ un functor contravariante que convierte límites directos en límites inversos se tiene que

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\lim_{\substack{\rightarrow \\ b \in A_\Delta}} \uparrow_b \textcircled{@} K)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_b \textcircled{@} K)))$$

Luego, como $(\uparrow_a \textcircled{@} _)$ es un functor covariante que preserva límites inversos,

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_b \textcircled{@} K))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\uparrow_b \textcircled{@} K))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a \textcircled{@} \uparrow_b \textcircled{@} K)).$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a \textcircled{@} (\uparrow_b \textcircled{@} K))) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a \textcircled{@} \uparrow_b \textcircled{@} K)).$$

Además, por la propiedad 2.10

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\uparrow_a \textcircled{@} \uparrow_b \textcircled{@} K)) \cong \lim_{\substack{\leftarrow \\ b \in A_\Delta}} (\lim_{\substack{\leftarrow \\ a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a \textcircled{@} \uparrow_b \textcircled{@} K)).$$

Y considerando que $(\uparrow_a \textcircled{@} \uparrow_b) \cong (\uparrow_b \textcircled{@} \uparrow_a) \cong I^2$ se tiene que

$$\lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_a @ \uparrow_b @ K)) \cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ \uparrow_a @ K)).$$

Luego

$$\lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ \uparrow_a @ K)) \cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ (\uparrow_a @ K))).$$

Ahora, por ser $(\uparrow_b @ _)$ un functor covariante que preserva límites inversos,

$$\lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\uparrow_b @ (\uparrow_a @ K))) \cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ \lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a @ K)).$$

Luego, como $(_ @ K)$ es un functor contravariante que convierte límites directos en límites inversos,

$$\lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ \lim_{\overleftarrow{a \in A_\Gamma}} (\uparrow_a @ K)) \cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ (\lim_{\overrightarrow{a \in A_\Gamma}} \uparrow_a @ K)).$$

Por último, como $(_ @ (\Gamma \overrightarrow{\textcircled{K}}))$ es un functor contravariante que convierte límites directos en límites inversos, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ (\lim_{\overrightarrow{a \in A_\Gamma}} \uparrow_a @ K)) &\cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ (\lim_{\overrightarrow{a \in A_\Gamma}} \Gamma_a @ K)) \cong \lim_{\overleftarrow{b \in A_\Delta}} (\uparrow_b @ (\Gamma \overrightarrow{\textcircled{K}})) \\ &\cong (\lim_{\overrightarrow{b \in A_\Delta}} \Delta_b @ (\Gamma \overrightarrow{\textcircled{K}})) \cong (\Delta \overrightarrow{\textcircled{}} (\Gamma \overrightarrow{\textcircled{K}})) \cong \Delta \overrightarrow{\textcircled{}} \Gamma \overrightarrow{\textcircled{K}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma \overrightarrow{\textcircled{}} \Delta \overrightarrow{\textcircled{}} K \cong \Delta \overrightarrow{\textcircled{}} \Gamma \overrightarrow{\textcircled{}} K$. ◆

Apéndice A

Resumen histórico de la Teoría de la Interpretación

Un primer vistazo hacia la historia de la presentación artística musical es suficiente para confirmar la tesis de Reinhard Kopiez acerca de que existen dos diferentes y no relacionadas maneras de considerar a la presentación artística musical. Por un lado se tiene a la búsqueda empírica, típicamente representada por Carl Seashore, donde se tratan los aspectos cuantitativos de la ejecución (especificando de manera numérica los parámetros necesarios para describir la estructura de la presentación artística musical).

Por otro lado, está el acercamiento filosófico, donde los escritos de Theodor W. Adorno lo representan típicamente, que trata los aspectos cualitativos, los pensamientos que pudieran expresarse durante la acción artística, podría entenderse también como la expresividad de ésta.

La base aparente de la contradicción de estas posiciones, radica en el hecho de no poder unir la idea de medidas cuantitativas con pensamientos cualitativos, pero esto no significa que estas maneras de considerar a la acción artística sean contradictorias, sino más bien desconectadas por una histórica ausencia de eslabones, la cual logra establecer las relaciones cuantitativas con cualidades semánticas, y la discusión entre éstas dos nunca se manejó como un problema científico, sino pedagógico.

1. La Tradición Filosófica

En cuanto a la tradición filosófica, refiriéndonos específicamente a Hermann Danuser, muestra tres etapas de la historia de la presentación artística musical:

1. Surge del renacimiento hacia finales del siglo XVIII. Se define la presentación artística musical como una estética retórica.
2. Viene de la creación (independiente ya, de la retórica) del trabajo autónomo de Beethoven.
3. Se inaugura con el trabajo de Hugo Riemann *Der Ausdruck in der Musik* en 1884, donde la presentación artística musical es vista como el intento de expresión de un texto, éste ya con cierto significado.

La primera parte de esta estética retórica pudo haber sido iniciada por Nikolaus Listenius, quien paralelo a Vasari en la pintura, comienzan a ver al ser humano como algo opuesto a la tradición cristiana y la eternidad divina. En esta nueva forma de ver las cosas, el artista es visto como un individuo, resaltando la importancia del humano y la validez de su punto de vista sobre el universo.

Así, con el trabajo de Monteverdi se forma un parteaguas en la visión humanística, ya que bien la presentación artística musical puede ser la expresión personal del artista, como bien puede ser la apropiación de esa ejecución en la audiencia, la pieza puede llegar a tocar los sentimientos tanto del ejecutante como del público.

La obra en este caso no es un ente propio, sino como una categoría dentro de los afectos, que se transmite en un marco general de acuerdo a los 5 principios de la retórica clásica.

1. Inventio (Argumentación)
2. Dispositio (Articulación)
3. Elocutio (Redacción y manera de comunicar los pensamientos)
4. Memoria (Memoria de la ejecución)
5. Pronunttio/actio (Ejecución física)

Siendo este último punto el más importante para orientación retórica de la presentación artística musical. Y es por la vía de los distintos escritos que se empieza a romper con la idea del instrumento como imitador de la voz, y comienza a darle importancia y personalidad propia a éste.

Entre los trabajos pedagógicos orientados a esta forma de ver la presentación artística musical, encontramos personajes importantes: J. J. Quantz, C. Ph. Bach, L. Mozart.

En la segunda etapa, la presentación artística musical es vista como la expresión exacta del contenido de una obra (El todo y sus partes). La obra tiene carácter y autonomía, por lo cual requiere un tratamiento específico y así expresar adecuadamente su contenido.

Esta idea fue la germinación de la creatividad de Beethoven al oponerse a los esquemas tradicionales. Aun más, Hegel distingue entre la locución musical y producción artística, descubriendo la diferencia entre el momento de la concepción y el de la ejecución de la obra. Esta idea nos remite a la teoría de Adorno, que concibe a la presentación artística musical ideal como aquella que fuera capaz de reproducir exacto el material de la composición como si ésta fuera improvisada.

A estos tratados teóricos podemos agregar el de Czerny y sobre todo el de Schilling, el cual va de lo general a lo particular. De acuerdo con Schilling, estos principios son:

1. Objetividad: Se refiere a la transformación de una composición a una realidad sonora.
2. Idealidad: El rol del ejecutante, identificando y comunicando las ideas y contenido de la composición.
3. Totalidad: Capturando la totalidad de las ideas tal y como están expresadas en los símbolos de la partitura.

Aunque ahora la teoría es un tema recurrente al hablar de la presentación artística musical, aun no son claros los principios de dicha actividad formativa musical. La tematización de dichos principios, y específicamente aquellos que tratan de la inspección analítica de la composición musical, fue iniciada por Hugo Riemann, seguido de Heinrich Schenker, para finalizar con T. W. Adorno en colaboración de Walter Benjamin.

Riemann define la expresividad de la presentación artística musical como la formación de pensamientos musicales, el relieve plástico de motivos y temas, y la transparencia de la construcción entera del trabajo artístico. Él define reglas explícitas para formar componentes analíticas como las melodías y las modulaciones armónicas. Schenker ve a la presentación artística musical como una expresión de factores analíticos, introduciendo lo que Adorno llamaría Ejecución analítica. Finalmente Adorno discute/analiza los trabajos de la Segunda Escuela Vienesa. Su tesis defiende que la presentación artística musical que no derive en la especificación de las notas de una composición es inválida como regla de ejecución. Sus principios son derivados de un punto de vista estrictamente analítico, junto con Benjamin, acuñan el concepto de un procedimiento micrológico que penetra en una dimensión infinitamente precisa de la actividad performativa.

Recapitulando la trayectoria de la historia de la Teoría Filosófica de la Presentación Artística Musical, Danuser define el análisis interpretativo como la traducción de la estructura y forma interna a la puesta en escena, contrastando así con la Teoría Retórica, la cual sólo aplica reglas generales, tales como pronuntiatio, a los trabajos musicales, el análisis interpretativo reconoce completamente la especificidad de dichos trabajos, y expresar así sus contenidos en la puesta en escena, una metodología que se vuelve completamente necesaria ante el trabajo ya realizado de Beethoven.

2. La Tradición Empírica

En este nuevo contexto, la teoría de la P. A. M. , nos referiremos al trabajo de Reinhard Kopiez, el cual enfatiza el creciente rol del ejecutante como una entidad autónoma y como un jugador principal dentro de la creación y realización sonora de la música, citando el tratado de Franz Liszt *De la situation des artistes* en 1835, donde Liszt iguala a compositores, maestros de instrumentos e intérpretes como tres variantes de las personalidades artísticas. La búsqueda de la interpretación empírica históricamente descrita por Kopiez trata de principalmente de máquinas que analizan y/o sintetizan interpretaciones musicales para teclado, esto debido a que la tecnología en dichos instrumentos es la única tradicionalmente accesible a medidas precisas.

Es destacable que la investigación de la interpretación empírica se remonta a 1745, con los primeros planos de construcción para medir el movimiento de las teclas del Cembalo. Luego en 1752 Johan Hohlfeld construyó un precursor del Piano de Rollo, la *Fantasiermaschine*, la cual fue presentada ante la Academia de Ciencias de Berlín en 1753. Usaba lápices sobre papel y recorría 3. 45 m en 6. 5 minutos. Carl Ph. E. Bach probó y aprobó la máquina. La única muestra fue quemada en la misma academia, pero aún existe un ejemplo llamado *Clavicémbalo* construido en 1780 por Jean Joseph Merlin en Londres.

Más de un siglo después, en 1895, Alfred Binet y Jules Courtier construyeron una máquina con tubos de aire hecho de caucho, los cuales medían la intensidad de sonido y el ataque con una resolución de un milisegundo, pero que no medía la afinación (registraba el tono). Los resultados de estas mediciones mostraron que al incrementar el tempo las notas son tocadas más ligadas y con menor regularidad en su progresión temporal.

En 1932, Carl Seashore creador de los Exámenes de Aptitudes Musicales Sheashore, inventó la *Iowa Piano Camera*, en la Universidad de Iowa. Los resultados de Seashore sobre la agógica fueron reveladores, la máquina tenía una resolución de 10 milisegundos y podía medir la dinámica relacionada con las notas en acordes. Estas mediciones demostraron la consistencia agógica en diferentes interpretaciones musicales.

Después de la muerte de Seashore en 1949 la investigación empírica se detuvo hasta que el equipo de investigación sueco liderado por Erling Bldal Bengtsson y Alf Gabrielsson comenzaron el proyecto SYVAR en 1974 completados con los estudios de L. Henry Shaffer en 1980. Shaffer construyó una máquina optoelectrónica para un piano de cola, introduciendo los movimientos de los martillos a una computadora, un precursor del moderno *disklavier*. Finalmente en 1983 el formato de sonido MIDI fue introducido y las grabaciones de las ejecuciones fueron estandarizadas. Aunque desde 1974

Christoph Wagner ya había experimentado con diversos aparatos con una precisión de 1 milisegundo.

Además de todo este arsenal de aparatos para la medición de las ejecuciones, se ha construido una importante tradición desde 1883 con los pianos de rollo para el análisis de ejecuciones históricamente importantes para piano. Existen rollos de piano grabados por casi todos los pianistas importantes de finales del siglo XIX e inicios del XX. Sus dinámicas y sincronización no son muy precisas, pero se debe considerarlos más una simulación que la ejecución grabada.

Basada en esta información Rosia Seipp pudo demostrar en 1988 que la agógica es más sistemática que aleatoria (en referencia a la polonesa en La bemol mayor de Chopin). Cerca de 1992, Hermann Gottshewski midió una gran cantidad de rollos de piano y encontrado reglas de la agógica. Desde 1994 existen reproductores MIDI para rollos de piano hechos por Horst Mohr y también por Zotlan Jánosy y Janos Mácsai. Sin embargo, la dinámica sigue siendo difícil de medir con precisión en estos rollos.

Un último método de análisis empírico es el de LPs y CDs. Esto tiene una larga tradición y ha forjado la investigación comparativa interpretativa. En este rubro, hay algunas investigaciones como la hecha en 1926 por Wilhelm Heinitz, en la cual se comparó la duración de diversas ejecuciones de Meistersinger de Wagner; en 1934, Adalbert Kalix investigó 10 grabaciones diferentes de El Cazador furtivo de Weber, comparando la ejecución con la partitura, para averiguar sobre el Romanticismo musical. Diferentes composiciones, como el Hammerklavier Op.106 de Beethoven han sido analizadas con LPs. Bruno Repp analizó grabaciones usando FFT para precisar el cálculo de la articulación. En agosto de 2008, Peter Neubcker publicó Melodyne, un software capaz de transformar material acústico polifónico a un formato de símbolos de partitura. Esto ha revolucionado y cambiará la investigación empírica de la ejecución (P. A. M.) dramáticamente.

Estas dos corrientes, la filosófica y la empírica, de la investigación de la ejecución estuvieron separadas una de la otra hasta 1992, cuando un grupo de investigación encabezado por Guerino Mazzola comenzó la investigación sobre una teoría de P. A. M. general en el Departamento de Ciencia Computacional de la Universidad de Zürich. Ahora, esta teoría ya completa es capaz de unir la parte musicológica/filosófica y la práctica/empírica.

Concluyendo con este esquema general, es importante remarcar la estructura gramatical de la teoría de la P. A. M. generada por el aprendizaje automatizado de la información empírica de la P. A. M. No se pretende creer en la asignación responsabilidades a la máquina para crear métodos estadísticos, como redes neuronales, y aprendizaje algorítmico por parte de

éstas, y así regir sobre el propio valor del aprendizaje científico, porque entonces las máquinas serían las que aprenderían y nosotros no.

Éste es un punto de vista ideológico y no se pueden seguir métodos que asignen decisiones a una ignorancia estructurada. Si no se entiende, no se puede ser asignado a algún dispositivo de ingeniería. Por ejemplo, con el elaborado enfoque de Gerhard Widmer que empieza con un análisis estructural relativamente detallado de las partituras, que incluye motivos, agrupamientos, etc. Y así, correlacionar estas estructuras empíricas de la información de la P. A. M., tales como las dinámicas y articulaciones, para así aplicar el aprendizaje algorítmico de las máquinas para explorar en otras partituras. Pero existe una carencia de conclusiones necesarias para la construcción de esta gramática sistemática de la presentación artística musical.

Bibliografía

- [AT] Aguilar, M. et al; *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag; Nueva York, EE. UU, 2002.
- [TLST] Bel, J. L. ; *Toposes and Local Set Theories: An Introduction*; Primera Edición; Dover; Nueva York, EE. UU. , 2008.
- [GT] Bondy, J. A. ; *Graph Theory*; Primera Edición; Springer; Nueva York, EE. UU. , 2008.
- [ETC] Casarrubias, F. , Tamariz, A. ; *Elementos de la Topología de Conjuntos*, 31 de enero del 2011
- [CWM] Mac Lane, S. ; *Categories for the Working Mathematician*; Segunda Edición; Springer Verlag; Nueva York, EE. UU. , 1998.
- [Mazzola 2007] Mazzola, G. , Moreno, A. ; *Diagrams, gestures and formulae in music*; Journal of Mathematics and Music, Vol. 1, No. 1, (2007), pp. 23-46.
- [Mazzola 2009] Mazzola, G. ; *Categorical gestures, the diamond conjecture, Lewins question, and the Hammerklavier Sonata*, Journal of Mathematics and Music, Vol. 3, No. 1, (2009), pp. 31-58
- [MC] Mazzola, G. et al; *Musical Creativity- Strategies and Tools in Composition and Improvisation*, Springer-Verlag; Berlín, Alemania, 2011
- [MP] Mazzola, G. ; *Musical Performance- A Comprehensive Approach: Theory, Analytical Tools, and Case Studies*, Springer-Verlag; Berlín, Alemania, 2011
- [TB] Prieto, C. ; *Topología Básica I- Elementos de topología de conjuntos*
- [CHA] Schapira, P. ; *Categories and Homological Algebra* [en línea], Disponible en <<http://www.math.jussieu.fr/schapira/lectnotes>>, 2011
- [IHA] Rotman, J. J. ; *An Introduction to Homological Algebra*, Segunda Edición; Springer Science + Business Media; Nueva York, EE. UU, 2009

Índice alfabético

- Categoría, 4, 37
 - de digráficas, 16
 - de gestos, 19
 - grande, 39
 - Simplejo, 41
 - topológica, 41
 - pequeña, 39
- Conjunto
 - pequeño, 38
 - de espacios topológicos, 14
- Digráfica, 1
 - categorica, 42
- Espacio topológico, 3
- EspacioDedo, 21
- Funtor
 - contravariante, 8
 - covariante, 6
 - topológico, 41
- Gesto, 18
- Hebra, 25
- Hipergestos, 22
- Homotopía, 4
- Límite
 - directo, 13
 - inverso, 11
- Morfismo
 - de gestos, 18
 - de digráfica, 2
- Preorden, 10
- Sistema
 - directo, 12
 - inverso, 11
- Subbase, 3
- Subcategoría, 5
 - de digráficas espaciales, 17
- Teorema de Escher, 43
- Topología, 2
 - compacto-abierta, 4
 - límite, 14
- Transformación natural, 10