UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁLGEBRAS DE OPERADORES DEL TIPO DE BERGMAN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

ENRIQUE ESPINOZA LOYOLA

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. YURI KARLOVICH OZOLINSH

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÉXICO, D.F. FEBRERO 2015

Agradecimientos

- A mis padres y hermanos por ser el motor en mi vida.
- A mis amigos, los cuales son pocos pero de verdad.
- A toda la gente que ha estado conmigo desde un principio en las buenas y en las malas.
- A mi director de tesis, por la paciencia y por mostrarme el camino de la investigación.
- A mis sinodales, por haberse tomado la molestia de revisar mi trabajo y por todas las observaciones para hacer de éste un mejor trabajo.
- A CONACYT, por la beca que me dió para poder realizar mis estudios de maestría.
- A toda la gente que me he encontrado en éstos últimos dos años, incluyendo profesores, investigadores y personas que han hecho de mi la persona que ahora soy.

Introducción

El álgebra C^* generada por las proyecciones de Bergman de un dominio múltiplemente conexo G con una frontera suave ∂G y por coeficientes continuos a trozos que tienen límites en un lado en los puntos de la unión finita de curvas que intersecan a ∂G en puntos distintos fue investigada en [20]. Una generalización de este trabajo a coeficientes continuos a trozos que admiten más de dos límites en un lado en los puntos de ∂G fue elaborada en [12]. El álgebra C^* generada por la proyección armónica de Bergman sobre el disco unitario, por operadores de multiplicación por funciones constantes a trozos, y por todos los operadores compactos fue estudiada en [13]. Las álgebras C^* generadas por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman (también por n proyecciones poli-Bergman y m proyecciones anti-poli-Bergman) con coeficientes continuos a trozos que admiten un número finito de límites de un lado en los puntos de ∂G fueron estudiadas en los artículos [8], [9], [10]. En todos esos artículos se asumió que la frontera de un dominio G era suficientemente suave.

En este trabajo, las álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman son estudiadas por primera vez en dominios con fronteras no suaves que admiten ángulos, estudiamos las álgebras C^*

$$\mathfrak{C}_m = \mathrm{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})\}$$

generadas por los operadores de multiplicación por funciones constantes a trozos a con discontinuidades en un sistema $\mathfrak{L}$ de rayos que comienzan en el origen ($a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$) y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman que actúan sobre el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{K}_m)$ sobre los sectores abiertos

$$\mathbb{K}_m = \{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (0, \pi/m)\}, \quad (m = 1, 2, ...).$$

También estudiamos las álgebras C^*

$$\mathfrak{A}_m = \mathrm{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$$

generadas por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos a con discontinuidades en un sistema $\mathfrak{L}$ de rayos que comienzan en el origen ($a \in PC(\mathfrak{L})$) y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman que actúan sobre el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{K}_m)$ sobre los sectores abiertos $\mathbb{K}_m$. Aplicando representaciones de las proyecciones de Bergman y anti-Bergman por medio de un operador de rotación y operadores integrales singulares bidimensionales con coeficientes que admiten discontinuidades homogéneas, su subsecuente reducción a operadores en el espacio $L^2(\mathbb{T})$ basados en resultados de [18] y [7], y modificando un cálculo simbólico de [8] para álgebras C^* con unidad generadas por n proyecciones ortogonales cuya suma da la unidad y por r proyecciones ortogonales unidimensionales, primero construimos un cálculo simbólico para el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ y establecemos un criterio de invertibilidad para los operadores $A \in \mathfrak{C}_m$ en términos de sus símbolos, después, haciendo uso de los resultados obtenidos para el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$, construimos un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ y establecemos una propiedad de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_m$.

Éste trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se exponen de manera breve lo que son las álgebras, las subálgebras, ideales y homomorfismos; se define lo que son los operadores compactos y algunos teoremas importantes relacionados a ellos; también se define lo que es un álgebra C^* y se dan algunas propiedades en relación a ellas; también se desarrolla un poco de teoría de espacios de Hilbert. Todo esto con el propósito de que éste capítulo sirva como base para entender los conceptos que se abordan durante todo el trabajo.

En el capítulo 2 se presentan los resultados que fueron base para mi estudio con respecto a álgebras de operadores del tipo de Bergman sobre el semiplano superior complejo. En éste Capítulo, destaca la elaboración de un esquema para construir un cálculo simbólico del álgebra C^* $\mathfrak{A} = \{aI, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ y se establece un criterio de Fredholm para los operadores de ésta álgebra C^* en términos de sus símbolos.

En el capítulo 3 se expone la descomposición de Plamenevski para la transformada de Fourier bidimensional y se da su aplicación a operadores de tipo convolución con datos homogéneos, se consideran propiedades de las proyecciones de Bergman y anti-Bergman y se define el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$. Se construye un cálculo simbólico para el álgebra C^* con unidad abstracta, $\mathcal{A}$, generada por n proyecciones ortogonales cuya suma es igual a la unidad y por r proyecciones ortogonales unidimensionales, lo cual nos proporciona un esquema a seguir para establecer un isomorfismo de álgebras C^* entre el álgebra C^* $\mathcal{A}$ y un álgebra C^* de matrices finitas. Este resultado fue obtenido por una modificación producida en el esquema en [8, Theorem 8.1], donde excluimos la condición de ortogonalidad por pares de las proyecciones P_k, esto debido a que los operadores generados a partir de las proyecciones de Bergman en el sector $\mathbb{K}_m$ resultaron no ser ortogonales, en contraste con lo que ocurrió con los operadores generados por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman en el semiplano superior. Finalmente se da un cálculo simbólico para el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ y se establece un criterio de invertibilidad para los operadores $A \in \mathfrak{C}_m$. Se deduce que los símbolos de los operadores y los criterios de invertibilidad dependen esencialmente del ángulo π/m del sector $\mathbb{K}_m$. Con los resultados obtenidos en éste Capítulo, se desarrolló el artículo [5], el cual ya fue enviado para su publicación. El álgebra C^* estudiada en este artículo (misma que se estudió en éste Capítulo) es un modelo local para el estudio de álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman con coeficientes continuos a trozos sobre dominios con fronteras suaves a trozos.

En el capítulo 4, se define el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ y se prueba que el ideal $\mathcal{K}$ de todos los operadores compactos en $L^2(\mathbb{K}_m)$ está contenido en el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$. Se aplica el principio local de Allan-Douglas al álgebra C^* cociente $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}/\mathcal{K}$, reduciendo el estudio a álgebras C^* locales $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ asociadas con los puntos $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$. Finalmente, aplicando los resultados obtenidos en el Capítulo 3, se da un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ y un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_m$.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

Durante el desarrollo del presente trabajo se estarán estudiando álgebras C^*, es por eso que comenzamos dando un repaso sobre lo que son las Álgebras para después definir las álgebras C^* y sus propiedades más importantes. Además, en éste capítulo mencionaremos algunos conceptos y resultados referentes a espacios de Hilbert y teoría de operadores. Para conocer aún más sobre los diferentes temas abordados en éste Capítulo, se recomienda revisar [4], [11], [15] y [16].

1.1 Álgebras y subálgebras

Definición 1.1.1. *Sea $\mathbb{A}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial .*

1. *Decimos que $\mathbb{A}$ es un álgebra si existe un mapeo bilineal llamado producto*

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

tal que $\quad a(bc) = (ab)c \quad$ *para* $\quad a, b, c \in \mathbb{A}$.

2. *Una subálgebra de $\mathbb{A}$ es un subespacio vectorial $\mathbb{B}$ tal que:*

$$b, b' \in \mathbb{B} \Rightarrow bb' \in \mathbb{B},$$

en donde la multiplicación está dada por la restricción de la multiplicación en $\mathbb{A}$. Con esto, $\mathbb{B}$ también es un álgebra.

Si $\mathbb{A}$ admite una unidad 1, es decir, $a1 = 1a = a$ para todo $a \in \mathbb{A}$, decimos que $\mathbb{A}$ es una *álgebra con unidad.* Si $\mathbb{A}$ tiene unidad y $x \in \mathbb{A}$ tiene un inverso con respecto al producto, entonces x es un elemento invertible de $\mathbb{A}$. Si el producto es una operación conmutativa, entonces se dice que $\mathbb{A}$ es un álgebra conmutativa.

Definición 1.1.2. *Una norma en* $\mathbb{A}$*, es una función* $\|\cdot\| : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$*, que cumple para todo* $a, b \in \mathbb{A}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$*, las siguientes condiciones:*

(i) $\|a\| \geq 0$*,*

(ii) $\|a\| > 0$ *si* $x \neq 0$*,*

(iii) $\|\alpha a\| = |\alpha|\|a\|$*,*

(iv) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Entonces se dice que $\mathbb{A}$ *es un espacio normado.*

Definición 1.1.3. *Se dice que* $\mathbb{A}$ *es un álgebra normada si existe una norma definida en* $\mathbb{A}$ *la cual cumple ser submultiplicativa, es decir, para toda* $a, b \in \mathbb{A} : \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

Si $\mathbb{A}$ *es un álgebra con unidad y admite una norma la cual cumple* $\|1\|\| = 1$*, entonces decimos que* $\mathbb{A}$ *es un álgebra normada con unidad.*

Todo espacio normado puede considerarse como espacio métrico, lo cual es inmediato de la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. *Si* $\|\cdot\| : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ *es una norma sobre un espacio vectorial* $\mathbb{A}$*, entonces la función* $d : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

para toda $a, b \in \mathbb{A}$*, es una métrica.*

La métrica d de la Proposición 1.1.1 es la métrica generada por la norma $\|\cdot\|$. Así, como se había mencionado, todo espacio normado es un tipo especial de espacio métrico, la cual a su vez induce una topología, por lo tanto, la estructura topológica del espacio normado, siempre se entenderá como la topología inducida por la métrica generada por la norma. Ésta topología es llamada la topología norma.

Si $\mathbb{A}$ es un álgebra normada, entonces de la desigualdad

$$\|ab - a'b'\| \leq \|a\|\|b - b'\| + \|a - a'\|\|b'\|$$

se obtiene que la operación multiplicación $(a, b) \to ab$ es continua.

Si $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, tenemos que para toda $a, b \in \mathbb{A} : \big|\|a\| - \|b\|\big| \leq \|a - b\|$. Entonces, la norma $\|\cdot\| : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ es una función continua con respecto a la topología norma de $\mathbb{A}$. Entonces, una norma preserva convergencia: Si $a_n \to a$ en la topología norma de $\mathbb{A}$, entonces $\|a_n\| \to \|a\|$ en $\mathbb{R}$; y también preserva sucesiones de Cauchy: si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{A}$ con respecto a la métrica generada por la norma en $\mathbb{A}$, entonces $\{\|a_n\|\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.4. *Un espacio de Banach es un espacio normado completo, con respecto a la topología norma.*

Una álgebra normada es llamada *Álgebra de Banach* si la métrica que induce su norma es completa y la norma es submultiplicativa. Si se trata de una álgebra normada completa con unidad, se llama *Álgebra de Banach con unidad.*

Una subálgebra de una álgebra normada también es una álgebra normada con la norma dada por la restricción. La cerradura de una subálgebra es una subálgebra. Una subálgebra cerrada de una álgebra de Banach es una álgebra de Banach.

Ejemplo 1.1.1. *Se tienen diferentes ejemplos de álgebras:*

1. *Si S es un conjunto, el conjunto $l^\infty(S)$ de las funciones complejas acotadas en S, es una álgebra de Banach con unidad, donde las operaciones se definen puntualmente de manera usual y la norma es la norma del supremo.*

2. *Si Ω es un espacio topológico, el conjunto $C_b(\Omega)$ de las funciones complejas continuas acotadas sobre Ω es una subálgebra cerrada de $l^\infty(\Omega)$. Entonces $C_b(\Omega)$ es una álgebra de Banach con unidad.*

   Si Ω es compacto, $C(\Omega)$, el conjunto de las funciones continuas de Ω a $\mathbb{C}$, es igual a $C_b(\Omega)$.

3. *Si Ω es un espacio Hausdorff localmente compacto, decimos que una función continua f de Ω a $\mathbb{C}$ se desvanece en el infinito, si para cada número positivo ε el conjunto $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. Denotamos al conjunto de tales funciones por $C_0(\Omega)$. Este conjunto resulta ser una subálgebra cerrada de $C_b(\Omega)$, y por lo tanto, un álgebra de Banach. Es álgebra de Banach con unidad si y sólo si Ω es compacto, y en este caso $C_0(\Omega) = C(\Omega)$.*

   El espacio $C_0(\Omega)$ se usa constantemente en la teoría de las álgebras C^*.

4. *Si (Ω, μ) es un espacio de medida, el conjunto $L^\infty(\Omega, \mu)$, de (clases de) funciones complejas medibles esencialmente acotadas en Ω es una álgebra de Banach con unidad con las operaciones usuales y la norma del supremo esencial.*

5. *Sea Ω un espacio medible y $B_\infty(\Omega)$ que denota al conjunto de las funciones complejas medibles acotadas en Ω. Entonces $B_\infty(\Omega)$ es una subálgebra cerrada de $L^\infty(\Omega)$, también es una álgebra de Banach con unidad.*

6. *El conjunto $\mathbb{A}$ de las funciones continuas sobre el disco unitario cerrado $\mathbb{D}$ en el plano, las cuales son analíticas en el interior de $\mathbb{D}$ es una subálgebra cerrada de $C(\mathbb{D})$, entonces $\mathbb{A}$ es una álgebra de Banach con unidad, llamada Álgebra del disco.*

Aunque hasta ahora sólo hemos dado ejemplos de álgebras conmutativas (con el producto), en general, las álgebras no son conmutativas.

Ejemplo 1.1.2. *El álgebra $M_n(\mathbb{C})$ de las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ es identificada con $B(\mathbb{C}^n)$, el conjunto de las transformaciones lineales acotadas de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$, es un álgebra de Banach con unidad. Las matrices triangulares superiores forman una subálgebra de $B(\mathbb{C}^n)$.*

Si $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subálgebras de una álgebra $\mathbb{A}$, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es una subálgebra. Entonces, para cualquier subconjunto S de $\mathbb{A}$, existe una subálgebra más pequeña B de $\mathbb{A}$ que contiene a S, a saber, la intersección de todas las subálgebras que contienen a S. Esta álgebra es llamada la subálgebra de $\mathbb{A}$ generada por S. Si S es el conjunto singular $\{a\}$, entonces B es el envolvente lineal de todas las potencias a^n (n=1,2,...) de a. Si $\mathbb{A}$ es un álgebra normada, el álgebra cerrada C generada por un conjunto S es la subálgebra cerrada más pequeña que contiene a S. Es claro que $C = \overline{B}$, donde B es la subálgebra generada por el conjunto S.

1.1.1 Ideales

Definición 1.1.5. *Un ideal izquierdo (respectivamente, ideal derecho) en un álgebra $\mathbb{A}$ es un subespacio vectorial I de $\mathbb{A}$ tal que*

$$a \in \mathbb{A} \text{ y } b \in I \Rightarrow ab \in I \text{ (respectivamente } ba \in I).$$

Un ideal bilátero I en $\mathbb{A}$ es un subespacio vectorial que es simultáneamente ideal izquierdo y derecho en $\mathbb{A}$. Obviamente, $\{0\}$ y $\mathbb{A}$ son ideales en $\mathbb{A}$, llamados los ideales triviales. Un ideal maximal en $\mathbb{A}$ es un ideal propio que no está contenido en ningún otro ideal propio de $\mathbb{A}$. Maximal izquierdo y derecho son definidos similarmente.

Decimos que un ideal I es modular si existe un elemento $u \in \mathbb{A}$ tal que $a - au$ y $a - ua$ están en I para todo $a \in \mathbb{A}$. Del Lema de Zorn se concluye que todo ideal modular está contenido en un ideal maximal.

Si I es un ideal de $\mathbb{A}$, entonces $\mathbb{A}/I$ es un álgebra con la multiplicación dada por

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Si I es modular, entonces $\mathbb{A}/I$ es con unidad, pues el u resultaría ser la unidad. El recíproco también válido. Si $\mathbb{A}$ es con unidad, entonces todos sus ideales resultan ser modulares, y entonces, $\mathbb{A}$ tiene ideales maximales.

Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de ideales de un álgebra $\mathbb{A}$, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es un ideal de $\mathbb{A}$. Entonces, si $S \subset \mathbb{A}$, existe I el ideal más pequeño de $\mathbb{A}$ que contiene a S, al cual llamaremos el ideal generado por S. Si $\mathbb{A}$ es un álgebra normada, entonces la cerradura de un ideal es un ideal. El ideal cerrado J generado por S es el ideal cerrado más pequeño que contiene a S. Notemos que ese ideal es la cerradura del ideal más pequeño generado por S.

Teorema 1.1.1. *[15, Theorem 1.1.1] Si I es un ideal cerrado en un álgebra normada $\mathbb{A}$, entonces $\mathbb{A}/I$ es un álgebra normada cuando la consideramos con la norma cociente*

$$\|a + I\| = \inf_{b\in I} \|a + b\|.$$

1.1.2 Homomorfismos de álgebras

Definición 1.1.6. *Un homomorfismo de un álgebra $\mathbb{A}$ a un álgebra $\mathbb{B}$ es una transformación lineal $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

para todo $a, b \in \mathbb{A}$.

Si ϕ es un homomorfismo de álgebras, su kernel, denotado $\ker(\phi)$, es un ideal en $\mathbb{A}$ y su imagen, $\phi(\mathbb{A})$, es una subálgebra de $\mathbb{B}$. Decimos que ϕ es un homomorfismo con unidad si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ tienen unidad y además $\phi(1) = 1$.

Si I es un ideal, entonces la transformación cociente $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/I$ es un homomorfismo.

Si ϕ y ψ son homomorfismos continuos de un álgebra normada $\mathbb{A}$ a un álgebra normada $\mathbb{B}$, entonces $\phi = \psi$ si ϕ y ψ son iguales sobre un conjunto que genera a $\mathbb{A}$ como álgebra normada.

1.1.3 Espectro

Sea $\mathbb{C}(z)$ el álgebra de todos los polinomios en la indeterminada z con coeficientes complejos. Si a es un elemento de un álgebra con unidad $\mathbb{A}$ y $P \in \mathbb{C}(z)$ es el polinomio $P(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_n z^n$, entonces $P(a) = \lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_n a^n$. Así, el mapeo $\mathbb{C}(z) \to \mathbb{A},\ P \mapsto P(a)$ es un homomorfismo con unidad.

Decimos que $a \in \mathbb{A}$ es invertible si existe un elemento $b \in \mathbb{A}$ tal que $ab = ba = 1$. En este caso, b es único y se denota como a^{-1}. Tenemos que el conjunto

$$\mathbb{A}^{-1} = \{a \in \mathbb{A} : a \text{ es invertible}\}$$

resulta ser un grupo bajo la multiplicación.

Se define el espectro de un elemento $a \in \mathbb{A}$ como el conjunto

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathbb{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - a \notin \mathbb{A}^{-1}\}.$$

Nota: De aquí en adelante, se va a escribir $\lambda 1$ sólo como λ.

Ejemplo 1.1.3. *Se dan algunos ejemplos de espectros:*

1. *Sea $\mathbb{A} = C(\Omega)$, donde Ω es un espacio compacto Hausdorff. Entonces $\sigma(f) = f(\Omega)$ para toda $f \in \mathbb{A}$.*

2. *Sea $\mathbb{A} = l^{\infty}(S)$, donde S es un conjunto no vacío. Entonces $\sigma(f) = \overline{f(S)}$ (la cerradura en $\mathbb{C}$) para toda $f \in \mathbb{A}$.*

3. *Sea $\mathbb{A}$ el álgebra de las matrices triangulares superiores de $n \times n$. Si $a \in \mathbb{A}$, digamos*

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

tenemos que $\sigma(a) = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{nn}\}$.

En general, si $\mathbb{A} = M_n(\mathbb{C})$ y $a \in \mathbb{A}$, entonces $\sigma(a)$ es el conjunto de eigenvalores de a.

1.2 Álgebras C^*

Para poder definir las Álgebras C^*, definiremos unos conceptos más que son necesarios.

Definición 1.2.1. *Sea $\mathbb{A}$ es un álgebra, una involución es una función $a \mapsto a^*$ sobre $\mathbb{A}$, la cual satisface:*

1. *$a^{**} = a$ para $a \in \mathbb{A}$,*

2. *$(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$ para $a, b \in \mathbb{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

3. *$(ab)^* = b^* a^*$ para todo $a, b \in \mathbb{A}$.*

La pareja $(A, *)$ es llamada un álgebra involutiva o un álgebra-$*$.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{A}$, entonces definimos el conjunto $S^* = \{a^* | a \in S\}$. Si $S = S^*$, entonces decimos que S es autoadjunto. Una subálgebra autoadjunta $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ es una subálgebra-$*$ de $\mathbb{A}$ y es un álgebra-$*$ cuando la dotamos con la involución obtenida por la restricción. Como la intersección de una familia de subálgebras-$*$ de $\mathbb{A}$ es una subálgebra-$*$, existe para todo subconjunto S de $\mathbb{A}$ la mínima álgebra-$*$ $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ que contiene a S, llamada el álgebra-$*$ generada por S.

Si I es un ideal autoadjunto de $\mathbb{A}$, entonces el álgebra cociente $\mathbb{A}/I$ es un álgebra-$*$ con la involución dada por $(a+I)^* = a^* + I$ para toda $a \in \mathbb{A}$.

Un elemento $a \in \mathbb{A}$ es autoadjunto o hermitiano si $a^* = a$. Para cada $a \in \mathbb{A}$ existen únicos elementos hermitianos $b, c \in \mathbb{A}$ tales que $a = b + ic$, a saber, $b = \frac{1}{2}(a + a^*)$ y $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. Los elementos a^*a y aa^* son hermitianos.

Decimos que a es normal si $a^*a = aa^*$. En este caso el álgebra-$*$ generada es conmutativa y de hecho es el generado lineal de todos los $a^m(a^*)^n$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $n + m > 0$.

Otro de los elementos importantes en nuestro trabajo son las proyecciones. Decimos que un elemento p es una proyección si $p = p^* = p^2$.

Si $\mathbb{A}$ tiene unidad, entonces $1^* = 1$. Si $a \in \mathrm{Inv}(\mathbb{A})$, entonces $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Además, para toda $a \in \mathbb{A}$,

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} | \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Un elemento $u \in \mathbb{A}$ es unitario si $u^*u = uu^* = 1$. Si $u^*u = 1$, entonces u es una isometría, y si $uu^* = 1$, entonces u es una co-isometría.

Definición 1.2.2. *Si $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un homomorfismo de álgebras-$*$ $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ que preserva la involución, es decir, $\phi(a^*) = (\phi(a))^*$, entonces ϕ es un homomorfismo-$*$. Si además ϕ es una biyección, se dice que es un isomorfismo-$*$.*

Si $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un homomorfismo-$*$, entonces $ker(\phi)$ es un ideal autoadjunto en $\mathbb{A}$ y $\phi(\mathbb{A})$ es una subálgebra-$*$ de $\mathbb{B}$.

Un automorfismo de un álgebra-$*$ $\mathbb{A}$ es un isomorfismo-$*$ $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ tiene unidad y u es un elemento unitario en $\mathbb{A}$, entonces

$$\mathrm{Ad}\ u : \mathbb{A} \to \mathbb{A},\ a \mapsto uau^*,$$

es un automorfismo de $\mathbb{A}$. Tales automorfismos son llamados internos. Decimos que los elementos $a, b \in \mathbb{A}$ son unitariamente equivalentes si existe un elemento unitario u en $\mathbb{A}$ tal que $b = uau^*$. Como los elementos unitarios forman un grupo, esta es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{A}$. Notemos que $\sigma(a) = \sigma(b)$, si a y b son unitariamente equivalentes.

Definición 1.2.3. *Un álgebra-$*$ de Banach es un álgebra-$*$ $\mathbb{A}$ junto con una norma submultiplicativa completa, tal que $||a^*|| = ||a||$ para toda $a \in \mathbb{A}$. Si, además, $\mathbb{A}$ tiene una unidad tal que $||1|| = 1$, llamamos a $\mathbb{A}$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad.*

Definición 1.2.4. *Un álgebra C^* es un álgebra-$*$ de Banach, tal que*

$$\|aa^*\| = \|a\|^2, \ \forall a \in \mathbb{A}.$$

Una subálgebra-$*$ de un álgebra C^* es también un álgebra C^*, entonces llamaremos a una subálgebra-$*$ de un álgebra C^* una subálgebra C^*.

Si un álgebra C^* tiene una unidad 1, entonces automáticamente $\|1\| = 1$, porque $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$. Similarmente, si p es una proyección no cero, entonces $\|p\| = 1$.

Si u es un elemento unitario de $\mathbb{A}$, entonces $\|u\| = 1$, porque $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$. Aquí, $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$ (donde $\mathbb{T}$ es el círculo unitario), pero si $\lambda \in \sigma(u)$, entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$, entonces $|\lambda|$ y $|\lambda^{-1}| \leq 1$; es decir, $|\lambda| = 1$.

Ejemplo 1.2.1. *Para entrar en materia, daremos algunos ejemplos de álgebras C^*:*

1. *El campo escalar $\mathbb{C}$ es un álgebra C^* con unidad, con involución dada por la conjugación compleja $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$.*

2. *Si Ω es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces $C_0(\Omega)$ es un álgebra C^* con involución $f \mapsto \overline{f}$.*

   Similarmente, todos los conjuntos siguientes sabemos que son álgebras, pero resultan ser álgebras C^* con la involución dada por $f \mapsto \overline{f}$:

   (a) $l^\infty(S)$ donde S es un conjunto;

   (b) $L^\infty(\Omega, \mu)$ donde (Ω, μ) es un espacio de medida;

   (c) $C_b(\Omega)$ donde Ω es un espacio topológico;

   (d) $B_\infty(\Omega)$ donde Ω es un espacio medible.

3. *Si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de álgebras C^*, entonces la suma directa $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es un álgebra C^* con la involución definida puntualmente.*

4. *Si Ω es un conjunto no vacío y $\mathbb{A}$ es un álgebra C^*, entonces $l^\infty(\Omega, \mathbb{A})$ es un álgebra C^* con la involución definida puntualmente.*

Es conocido que para cualquier álgebra-$*$, existe a lo más una norma que la vuelve un álgebra C^*. Una condición necesaria para que un álgebra de Banach sea un álgebra C^* se exhibe en el siguiente resultado:

Teorema 1.2.1. *[15, Lemma 2.1.3] Sea $\mathbb{A}$ un álgebra de Banach dotada con una involución tal que $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ para toda $a \in \mathbb{A}$, entonces $\mathbb{A}$ es un álgebra C^*.*

Algunas propiedades que se cumplen en las álgebras-$*$ de Banach son las siguientes:

Teorema 1.2.2. *[15, Theorem 2.1.7] Un homomorfismo-$*$ $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ de un álgebra-$*$ de Banach $\mathbb{A}$ a un álgebra C^* $\mathbb{B}$ es necesariamente de norma decreciente.*

Teorema 1.2.3. *[15, Theorem 2.1.8] Si a es un elemento hermitiano de un álgebra C^* $\mathbb{A}$, entonces $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Teorema 1.2.4. *[15, Theorem 2.1.11] Sea $\mathbb{B}$ una subálgebra C^* de un álgebra C^* con unidad $\mathbb{A}$ que contiene a la unidad de $\mathbb{A}$, entonces $\sigma_B(b) = \sigma_{\mathbb{A}}(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$.*

1.3 Espacios de Hilbert

Dado que el tema principal de este trabajo se desarrolla sobre espacios de Hilbert, en esta sección se comienza definiendo lo que es un espacio pre-Hilbert, para que posteriormente se defina lo que se entiende por un espacio de Hilbert.

1.3.1 Espacios de Hilbert

Definición 1.3.1. *Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ será llamado espacio pre-Hilbert si existe una función $(\cdot, \cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$, que satisface las siguientes condiciones:*

1. $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

La función (x, y) es llamada el producto interno de los elementos x y y. También se les conoce como espacios con producto interno.

Podemos introducir una norma en un espacio pre-Hilbert, por medio de: $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Entonces todos los axiomas de norma se satisfacen.

Definición 1.3.2. *Un espacio de Hilbert H es un espacio pre-Hilbert el cual es completo respecto a la norma $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.*

Teorema 1.3.1. *[16, Prop. II, pág. 84] Todo espacio pre-Hilbert puede ser completado a un espacio de Hilbert.*

Teorema 1.3.2. *[16, Prop. III, pág. 85] Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es también un espacio de Hilbert.*

1.3.2 Ortogonalidad

Dos vectores en un espacio pre-Hilbert $\mathbb{V}$ se dicen ortogonales si su producto interno es cero, y se denota por $x \perp y$. Dos conjuntos en el espacio pre-Hilbert $\mathbb{V}$ se dicen mutuamente ortogonales si todo vector de un conjunto es ortogonal a cada uno de los vectores en el otro conjunto. La ortogonalidad de dos conjuntos $S_1, S_2 \subset \mathbb{V}$ es denotada por $S_1 \perp S_2$.

El conjunto de vectores los cuales son ortogonales a algún conjunto $S \subset \mathbb{V}$, es un subespacio cerrado de $\mathbb{V}$. Este subespacio es llamado el complemento ortogonal de S en $\mathbb{V}$ y es denotado por $S^{\perp}$.

Teorema 1.3.3. *[16, Prop. II, pág. 86] Si M es un subespacio cerrado en un espacio de Hilbert H y x es un vector arbitrario en H, entonces M contiene un único vector x' tal que $(x - x') \perp M$.*

El vector $x' \in M$ para el cual $(x - x') \perp M$ es llamado la proyección del vector x sobre el subespacio M.

Nota: Este teorema puede reformularse así: Si M es un subespacio cerrado en un espacio de Hilbert H, entonces todo vector $x \in H$ puede ser únicamente representado en la forma $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in M,\ x_2 \in M^{\perp}$.

Esto nos arroja una caracterización de los subespacios densos en los espacios de Hilbert.

Teorema 1.3.4. *[16, Prop. IV, pág. 88] Un subespacio M es denso en H si y sólo si H no contiene vectores no cero los cuales son ortogonales a M.*

1.3.3 Sistemas ortogonales de vectores

Definición 1.3.3. *Un conjunto de vectores en un espacio de Hilbert es llamado un sistema ortogonal si cualesquiera dos vectores distintos de este conjunto son ortogonales. Si además, todos los elementos del sistema ortogonal tienen norma uno, entonces se dice que el sistema es ortonormal.*

Teorema 1.3.5. *[16, Prop. I, pág. 90] Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es un sistema ortogonal, entonces $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$.*

Teorema 1.3.6. *[16, Prop. II, pág. 90] Si* $\{x_n\}$ *es un sistema ortogonal numerable, entonces la serie* $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ *converge si y sólo si la serie* $\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 \cdots$ *converge.*

Todo vector no cero se puede normalizar simplemente dividiéndolo por su norma.

Recordemos que si e es un elemento de un sistema ortonormal, entonces su producto interno $\alpha = (x, e)$ es llamado el coeficiente de Fourier del vector x respecto al elemento e.

Teorema 1.3.7. *[16, Prop. III, pág. 91] Si* $e_1, e_2, \cdots, e_n$ *son vectores de un sistema ortonormal y* $\alpha_k = (x, e_k),\ k = 1, 2, ..., n$, *son los correspondientes coeficientes de Fourier, entonces* $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2$.

Teorema 1.3.8. *[16, Prop. IV, pág. 91] Todo vector* x *tiene a lo más una cantidad numerable de coeficientes de Fourier no cero con respecto a un sistema ortonormal fijo.*

Teorema 1.3.9. *[16, Prop. V, pág. 90] Si* $e_1, e_2, e_3, \cdots,$ *es un sistema ortonormal numerable en* H *y* $\alpha_k = (x, e_k),\ k = 1, 2, 3, ...$, *son los correspondientes coeficientes de Fourier del vector* $x \in H$, *entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ *converge en* H *y* $x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ *es un vector el cual es ortogonal a todos los vectores* $e_1, e_2, e_3, \cdots$.

Un sistema ortogonal se dice completo si no existe un vector no cero el cual sea ortogonal a todos los vectores de este sistema. En otras palabras, la completez de un sistema significa que este sistema no pude ser aumentado a un sistema ortonormal más extenso adjuntando nuevos elementos.

A continuación damos una caracterización de los sistemas ortonormales completos:

Teorema 1.3.10. *[16, Prop. VI, pág. 92] Un sistema ortonormal es completo si y sólo su subespacio envolvente es denso en* H.

El siguiente resultado es muy importante en la teoría de los espacios de Hilbert:

Teorema 1.3.11. *[16, Prop. VII, pág. 92] Todo espacio no cero de Hilbert contiene un sistema ortonormal completo.*

Finalizamos esta Subsección con un teorema sobre espacios isométricos:

Teorema 1.3.12. *[16, Prop. XI, pág. 94] Dos espacios de Hilbert son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

1.3.4 Sumas ortogonales de subespacios

Sea Λ un conjunto de índices y supongamos que los M_λ, con $\lambda \in \Lambda$, son subespacios cerrados mutuamente ortogonales en el espacio de Hilbert H. El mínimo subespacio cerrado que contiene a todos los M_λ es llamado la suma ortogonal de los subespacios M_λ y es denotado por $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Si Λ es un conjunto finito, digamos $\{1,2,...,n\}$, o un conjunto numerable (el cual podemos identificar con $\mathbb{N}$), entonces también usamos la notación

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

y

$$M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots$$

respectivamente.

Ahora veamos la forma que tienen los vectores que conforman esos subespacios.

Teorema 1.3.13. *[16, Prop. I, pág. 95] La suma ortogonal $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ de un número finito de subespacios es el conjunto de todos los vectores*

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \; x_k \in M_k.$$

Un resultado análogo se obtiene para una suma numerable de subespacios. Además un resultado más general se desprende en esta subsección:

Teorema 1.3.14. *[16, Prop. III, pág. 96] La suma ortogonal $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, donde Λ es un conjunto arbitrario, es el conjunto,*

$$M = \{x \mid x : \Lambda \to M_\lambda, \; x(\lambda) = x_\lambda\}$$

donde:

1. *$x_\lambda \in M_\lambda$;*

2. *$x_\lambda \neq 0$ para una cantidad finita o numerable de índices λ;*

3. *Si $x \in M$, entonces $\|x\|_M^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|_{M_\lambda}^2$ converge.*

1.4 Operadores compactos, de Fredholm y límite fuerte

Uno de los tipos de operadores más fáciles de analizar, son los operadores compactos, esto debido a que se comportan como operadores sobre espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 1.4.1. *Una transformación lineal $T : X \to Y$ entre espacios de Banach X y Y es compacta si $T(S)$ es relativamente compacto en Y, donde S es la bola unitaria cerrada de X. Equivalentemente, $T(S)$ es totalmente acotada.*

Definición 1.4.2. *Si X y Y son espacios de Banach, denotamos por $B(X,Y)$ el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales acotadas de X a Y; además es un espacio de Banach cuando lo dotamos con la función norma. A los elementos de $B(X,Y)$ les llamaremos operadores. El conjunto de todos los operadores compactos de X a Y lo denotamos por $K(X,Y)$.*

Teorema 1.4.1. *[15, Theorem 1.4.1] Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es compacto;*

2. *para cada conjunto acotado S en X, el conjunto $T(S)$ es relativamente compacto en Y;*

3. *para cada sucesión acotada (x_n) en X, la sucesión $(T(x_n))$ admite una subsucesión que converge en Y.*

De esto se sigue fácilmente que $K(X,Y)$ es un subespacio vectorial de $B(X,Y)$. También, si $f : X' \to X$, $g : X \to Y$ y $h : Y \to Y'$ son transformaciones lineales acotadas entre espacios de Banach y g es compacto, entonces hg y gf (operación composición) son compactos. Entonces $K(X) = K(X,X)$ es un ideal en $B(X) = B(X,X)$.

El siguiente resultado nos da una condición necesaria y suficiente para que todas las transformaciones lineales acotadas sean compactas:

Teorema 1.4.2. *[15, Theorem 1.4.2] Si X es un espacio de Banach, entonces $K(X) = B(X)$ si y sólo si X es de dimensión finita.*

Una propiedad muy importante del espacio de las transformaciones compactas es el siguiente.

Teorema 1.4.3. *[15, Theorem 1.4.3] Si X y Y son espacios de Banach, entonces $K(X,Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $B(X,Y)$.*

En este trabajo, cuando tomemos un operador T en un espacio de Hilbert H, estaremos considerando que $T \in B(H)$.

Definición 1.4.3. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces un operador $T \in B(H)$ es un operador de rango finito si la dimensión del rango de T es finito. Con $F(H)$ denotaremos al conjunto de los operadores de rango finito.*

Proposición 1.4.1. *[4, Proposition 5.6] Si H es un espacio de Hilbert, entonces $F(H)$ es el ideal bilátero minimal en $B(H)$.*

El siguiente resultado caracteriza a los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert, pero cabe mencionar que no caracteriza a los operadores compactos sobre un espacio de Banach.

Lema 1.4.1. *[4, Corollary 5.10] Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y T es un operador en H, entonces T es compacto si y sólo si el rango de T no contiene subespacios cerrados de dimensión infinita.*

Teorema 1.4.4. *[4, Theorem 5.9] Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces $K(H)$ es la cerradura en norma de $F(H)$.*

Corolario 1.4.1. *[4, Corollary 5.11] Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces $K(H)$ es un ideal bilátero cerrado minimal de $B(H)$.*

Definición 1.4.4. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces $T \in B(H)$ es un operador de Fredholm si el rango de T es cerrado y la dimensión del kernel de T y del kernel de T^* es finita.*

Definición 1.4.5. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces el álgebra cociente $B(H)/K(H)$ es un álgebra de Banach, llamada el álgebra de Calkin. El homomorfismo natural de $B(H)$ sobre $B(H)/K(H)$ es denotado por π.*

El álgebra de Calkin está íntimamente relacionada con los operadores de Fredholm mediante el Teorema de Atkinson.

Teorema 1.4.5. *[4, Theorem 5.17] Si H es un espacio de Hilbert, entonces $T \in B(H)$ es un operador de Fredholm si y sólo si $\pi(T)$ es un elemento invertible del álgebra de Calkin $B(H)/K(H)$.*

El siguiente teorema muestra que las álgebras cociente generadas por ideales biláteros resultan ser álgebras C^* y se deduce que el álgebra de Calkin es un álgebra C^*.

Teorema 1.4.6. *[4, Theorem 5.38] Si $\mathbb{A}$ es un álgebra C^* y J es un ideal bilátero en $\mathbb{A}$, entonces J es autoadjunto y el álgebra cociente $\mathbb{A}/J$ es un álgebra C^* con respecto a la involución inducida por el mapeo natural.*

Por último, damos la definición de límite fuerte, pues se estará usando durante ésta tesis.

Definición 1.4.6. *Sean $\{T_n\}$ una sucesión en $B(H)$ y $T \in B(H)$. Decimos que $\{T_n\}$ converge fuertemente a T si $T_n(x) \to T(x)$ para toda $x \in H$. En este caso escribiremos $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} T_n = T$.*

Capítulo 2

Álgebras de operadores del tipo de Bergman en el semiplano

El estudio que nosotros estamos realizando es en base a un tipo de álgebras muy especiales, las que son generadas por las llamadas proyecciones de Bergman. En esta sección daremos definiciones y teoremas de vital importancia para el desarrollo del tema central de este trabajo.

Sea $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ el semiplano superior del plano complejo $\mathbb{C}$ equipado con la medida de área de Lebesgue $dA(z) = dxdy$, $\overline{\Pi} = \Pi \cup \mathbb{R}$, $\dot{\overline{\Pi}} = \overline{\Pi} \cup \{\infty\}$ la compactificación a un punto de $\overline{\Pi}$, $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{A}^2(\Pi)$ el subespacio de Hilbert de las funciones analíticas en $L^2(\Pi)$, y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\Pi) := \{\overline{f} : f \in \mathcal{A}^2(\Pi)\}$ el subespacio de Hilbert de las funciones anti-analíticas en $L^2(\Pi)$. Dada una unión finita $\mathfrak{L}$ de curvas de Lyapunov en $\dot{\overline{\Pi}}$ tales que el conjunto $\mathfrak{L} \cap \dot{\mathbb{R}}$ es finito, denotamos por $PC(\mathfrak{L})$ la subálgebra C^* de $L^\infty(\Pi)$ que consiste de todas las funciones continuas sobre $\dot{\overline{\Pi}} \backslash \mathfrak{L}$ las cuales tienen un límite lateral en los puntos de $\mathfrak{L}$.

Sea $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^2(\Pi))$ la subálgebra C^* de todos los operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert $L^2(\Pi)$, $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L^2(\Pi))$ el ideal bilátero cerrado de $\mathcal{B}$ que consiste de todos los operadores compactos en el espacio $L^2(\Pi)$, y $\mathcal{B}^\pi := \mathcal{B}/\mathcal{K}$ el álgebra C^* cociente.

Estudiaremos la subálgebra C^* $\mathfrak{A} = \text{alg}\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ de $\mathcal{B}$ generada por la proyección de Bergman B_Π, por la llamada proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_\Pi$, y por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos en $PC(\mathfrak{L})$. Como es conocido (ver [23, Chapter 4]), B_Π y $\widetilde{B}_\Pi$ son proyecciones ortogonales sobre los subespacios cerrados $\mathcal{A}^2(\Pi)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\Pi)$ de $L^2(\Pi)$, respectivamente, y ellas están dadas por

$$(B_\Pi f)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_\Pi \frac{f(w)}{(z - \overline{w})^2} dA(w), \; f \in L^2(\Pi), \; z \in \Pi,$$

$$(\widetilde{B}_\Pi f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Pi \frac{f(w)}{(\overline{z}-w)^2}dA(w),\ f\in L^2(\Pi),\ z\in\Pi.$$

2.1 Álgebra de operadores tipo convolución con datos homogéneos

Los resultados de esta sección son esencialmente debidos a la descomposición de Plamenevsky de la transformada de Fourier multidimensional [18]. Tales técnicas fueron también aplicadas en [7], donde los resultados de Plamenevsky fueron extendidos en el caso bidimensional.

Sea $\mathcal{B}(H)$ el álgebra C^* de operadores lineales acotados actuando sobre un espacio de Hilbert H. Denotaremos por $\mathcal{H}_\infty = H(L^\infty(\mathbb{T}))$ al álgebra C^* de las funciones $a\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tales que $a|_\mathbb{T}\in L^\infty(\mathbb{T})$ y $a(t\tau)=a(\tau)$ para casi toda $\tau\in\mathbb{T}$ y toda $t>0$. Sea $\mathcal{R}$ la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$ generada por los operadores de multiplicación $A=a(x)I$ para toda $a\in\mathcal{H}_\infty$ y por los operadores singulares bidimensionales $F^{-1}b(\xi)F$ para toda $b\in\mathcal{H}_\infty$.

Aquí $F: L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)$ es la transformada de Fourier definida por

$$(Fu)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} u(t)e^{-ix\cdot t}dt,\ x\in\mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

donde $x\cdot t$ es el producto escalar de vectores $x,t\in\mathbb{R}^2$, y F^{-1} es la transformada inversa de Fourier.

También consideramos la transformada de Mellin y su inversa, dadas por

$$M: L^2(\mathbb{R}_+, rdr)\to L^2(\mathbb{R}),\ (Mv)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+} v(r)r^{-i\lambda}dr,$$

$$M^{-1}: L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R}_+, rdr),\ (M^{-1}u)(r) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{\mathbb{R}} u(\lambda)r^{i\lambda-1}d\lambda.$$

Siguiendo [18] y [7], para $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}\ \lambda>0$ y $\lambda\neq ik,\ k=1,2,...$, definimos los operadores $E(\lambda)\in\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ sobre funciones $u\in C^\infty(\mathbb{T})$ por

$$(E(\lambda)u)(\tau) = \gamma(\lambda)\int_\mathbb{T}(-\tau\cdot\omega+i0)^{-i\lambda-1}u(\omega)d\omega,\ \tau\in\mathbb{T}, \tag{2.2}$$

donde $d\omega$ es la medida longitud sobre $\mathbb{T}$,

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\Gamma(1+i\lambda)e^{\pi(i-\lambda)/2} \tag{2.3}$$

y la expresión $(t\pm i0)^\mu$ para $t\in\mathbb{R}$ y $\mu\in\mathbb{C}$ es entendida en el sentido de distribuciones:

$$(t\pm i0)^\mu = \begin{cases} t_+^\mu + e^{\pm i\pi\mu}t_-^\mu & \text{si } \mu\neq -1,-2,...,\\ t^\mu \pm (-1)^\mu\frac{i\pi}{(-\mu-1)!}\delta^{-\mu-1}(t) & \text{si } \mu = -1,-2,..., \end{cases}$$

$t_+^\mu = 0$ para $t \leq 0$, $t_+^\mu = e^{\mu \log t}$ para $t > 0$, y $t_-^\mu = (-t)_+^\mu$.

Para Im $\lambda < 0$ la integral (2.2) es entendida en el sentido de continuación analítica, porque para toda $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ la función $\lambda \mapsto E(\lambda)u(t)$ admite continuación analítica en el plano complejo menos los polos $\lambda = ik$ $(K = 1, 2, ...)$ de la Γ-función en (4.1) (ver [18]). El operador inverso $E(\lambda)^{-1}$ está dado por

$$(E(\lambda)^{-1}v)(\omega) = \gamma(-\lambda) \int_{\mathbb{T}} (\omega \cdot \tau + i0)^{i\lambda - 1} v(\tau) d\tau, \ \lambda \neq -ik, \ k = 1, 2, ...$$

Por [18, Proposition 4.4], los operadores $E(\lambda)$ son unitarios para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

Consideremos el operador reflexión

$$V : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (Vf)(\lambda) = f(-\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Pasando a coordenadas polares en el plano, obtenemos la descomposición

$$L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2(\mathbb{T}). \tag{2.5}$$

El producto tensorial $M \otimes I$ será tomado relativamente a la descomposición (2.5). Para una función cuyo valor es un operador

$$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \ \lambda \mapsto L(\lambda),$$

denotamos por $I \otimes_\lambda L(\lambda)$ el operador en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T}))$ dado por la fórmula

$$[(I \otimes_\lambda L(\lambda))f](\lambda, t) = [L(\lambda)f(\lambda, \cdot)](t), \quad (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}. \tag{2.6}$$

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$, introducimos el álgebra C^* $\Omega_\lambda \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ generada por los operadores

$$a(t)I \text{ y } E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda) \ (a, b \in L^\infty(\mathbb{T})).$$

Sea Ω el álgebra C^* de funciones cuyos valores son operadores lineales acotados y continuos en sentido de la norma

$$U : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \ \lambda \mapsto U(\lambda) \in \Omega_\lambda \tag{2.7}$$

con la norma $||U|| = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} ||U(\lambda)||$.

De acuerdo a [7, Proposition 2.5] tenemos la descomposición

$$F = (M^{-1} \otimes I)(V \otimes I)(I \otimes_\lambda E(\lambda))(M \otimes I).$$

Tomando en cuenta que

$$(M \otimes I)(a(x)I)(M^{-1} \otimes I) = I \otimes a(t)I,$$
$$(M \otimes I)(F^{-1}b(\xi)F)(M^{-1} \otimes I) = I \otimes_\lambda (E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda)),$$

donde $t, \omega \in \mathbb{T}$, y usando la notación $(U(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ para las funciones cuyos valores son operadores lineales acotados (2.7), podemos obtener lo siguiente.

Proposición 2.1.1. *[7, Proposition 2.5] El álgebra C^* $\mathcal{R}$ es isomorfa a una subálgebra C^* de Ω. El isomorfismo está dado sobre los generadores de $\mathcal{R}$ por*

$$a(x)I \mapsto (a(t)I)_{\lambda\in\mathbb{R}},$$

$$F^{-1}b(\xi)F \mapsto (E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}.$$

2.2 Proyecciones de Bergman y anti-Bergman, y sus relaciones con operadores integrales singulares

Sea Π el semiplano superior equipado con la medida de área de Lebesgue $dA(z) = dxdy$, $\mathcal{A}^2(\Pi)$ el subespacio cerrado de las funciones analíticas en $L^2(\Pi)$, y B_Π la proyección ortogonal de $L^2(\Pi)$ sobre $\mathcal{A}^2(\Pi)$. El espacio $\mathcal{A}^2(\Pi)$ y el operador B_Π son llamados el espacio de Bergman y la proyección de Bergman del semiplano superior, respectivamente. La proyección de Bergman B_Π es el operador integral con kernel de Bergman

$$K_\Pi(z,w) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{(z-\overline{w})^2}, \tag{2.8}$$

(ver [22, Section 3.1]), es decir,

$$(B_\Pi f)(z) = \int_\Pi K_\Pi(z,w)f(w)dA(w),\ f\in L^2(\Pi),\ z\in\Pi. \tag{2.9}$$

Denotamos por $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\Pi)$ el subespacio de las funciones anti-analíticas en $L^2(\Pi)$ y por $\widetilde{B}_\Pi$ la proyección ortogonal de $L^2(\Pi)$ sobre $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\Pi)$. Así, para toda $f\in L^2(\Pi)$, $\overline{\widetilde{B}_\Pi f}\in\mathcal{A}^2(\Pi)$. Entonces,

$$\widetilde{B}_\Pi = CB_\Pi C \text{ donde } Cf=\overline{f} \text{ para toda } f\in L^2(\Pi),$$

y entonces, por (2.8) y (2.9), la proyección $\widetilde{B}_\Pi$ está dada por

$$(\widetilde{B}_\Pi f)(z) = \int_\Pi \overline{K_\Pi(z,w)}f(w)dA(w) = \int_\Pi K_\Pi(w,z)f(w)dA(w),\ f\in L^2(\Pi).$$

Además de [22, Theorem 3.14] obtenemos lo siguiente:

Proposición 2.2.1. *Para el semiplano superior, $\widetilde{B}_\Pi B_\Pi = 0$ y $B_\Pi\widetilde{B}_\Pi = 0$.*

Dado un dominio $U\subset\mathbb{C}$ consideraremos el operador integral singular bidimensional sobre $L^2(U)$ definido por

$$(S_U f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{f(w)}{(w-z)^2}dA(w),\ z\in U.$$

El adjunto de S_U es el operador singular integral bidimensional dado por

$$(S_U^* f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{f(w)}{(\overline{w}-\overline{z})^2}dA(w),\ z\in U.$$

De acuerdo a [22, Lemma 7.5] tenemos lo siguiente,

Proposición 2.2.2. *Para el semiplano superior,*

$$B_\Pi = I - S_\Pi S_\Pi^*, \ \widetilde{B}_\Pi = I - S_\Pi^* S_\Pi.$$

Identificando los operadores B_Π y $\widetilde{B}_\Pi$ con los operadores que actúan sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$, obtenemos las representaciones

$$B_\Pi = \chi_\Pi I - \chi_\Pi S \chi_\Pi S^* \chi_\Pi I, \ \widetilde{B}_\Pi = \chi_\Pi - \chi_\Pi S^* \chi_\Pi S \chi_\Pi I, \tag{2.10}$$

donde χ_Π es la función característica del semiplano superior, S y S^* son los operadores integrales singulares bidimensionales que actúan sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ y están dados por

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dA(w), \ (S^*f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(w)}{(\overline{w}-\overline{z})^2} dA(w).$$

De la fórmula de la transformada de Fourier de los kernels de operadores integrales singulares multidimensionales (ver [14, Chapter X, p. 249]) se sigue que

$$S = F^{-1}(\overline{\xi}/\xi)F, \ S^* = F^{-1}(\xi/\overline{\xi})F, \tag{2.11}$$

donde F es la transformada de Fourier bidimensional que actúa sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ por la fórmula (2.1).

2.3 Operadores compactos

De (2.10) y [14, Chapter XI, Theorem 7.1] se deduce lo siguiente.

Proposición 2.3.1. *Para cualquier función $a \in C(\dot{\overline{\Pi}})$, los conmutadores $aB_\Pi - B_\Pi aI$ y $a\widetilde{B}_\Pi - \widetilde{B}_\Pi aI$ son compactos en el espacio $L^2(\Pi)$.*

Además, si $a \in C(\dot{\overline{\Pi}})$, entonces la función

$$\widetilde{a}(z) = \begin{cases} a(z), & \text{si Im } z \geq 0, \\ a(\overline{z}), & \text{si Im } z \leq 0 \end{cases}$$

es continua en $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la compactificación por un punto del plano complejo $\mathbb{C}$. Por [14, Theorem 7.1], los conmutadores $\widetilde{a}S - S\widetilde{a}I$ y $\widetilde{a}S^* - S^*\widetilde{a}I$ son operadores compactos. Entonces, de (2.10) y la igualdad $\widetilde{a}|_{\dot{\overline{\Pi}}} = a$ se sigue que

$$aB_\Pi - B_\Pi aI, \ a\widetilde{B}_\Pi - \widetilde{B}_\Pi aI \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\Pi)).$$

De acuerdo a [2, Section 8.2], un operador $A \in \mathcal{B}(L^2(\Pi))$ es llamado un *operador de tipo local* si los conmutadores $cA - AcI$ son compactos para toda $c \in C(\dot{\overline{\Pi}})$. Así, por la

Proposición 2.3.1, los operadores B_Π, $\widetilde{B}_\Pi$, y entonces todos los operadores en la C^*-álgebra $\mathfrak{A} = \mathrm{alg}\{aI, \mathcal{B}_\Pi, \widetilde{\mathcal{B}}_\Pi : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ son de tipo local.

Denotaremos por Λ el conjunto de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\Pi))$. Se puede ver que Λ es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}$.

Lema 2.3.1. *[8, Lemma 2.6] El álgebra C^* $\mathfrak{A} = alg\{aI, \mathcal{B}_\Pi, \widetilde{\mathcal{B}}_\Pi : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ contiene a todos los operadores compactos $K \in \mathcal{B}(L^2(\Pi))$.*

2.4 El principio local de Allan-Douglas

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $\mathcal{Z}$ una subálgebra C^* central de $\mathcal{A}$ que contiene la identidad de $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{Z})$ el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}$. Con toda $x \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$ asociamos el ideal bilátero cerrado I_x de $\mathcal{A}$ generado por el ideal x de $\mathcal{Z}$. Entonces $I_x = x\mathcal{A}$ (ver [2, Proposition 8.6]). Consideremos el álgebra C^* cociente $\mathcal{A}_x := \mathcal{A}/I_x$ y el homomorfismo canónico $\pi_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_x$.

Recordemos el principio local de Allan-Douglas (ver [4, Theorem 7.47] y [3, Theorem 1.35]).

Teorema 2.4.1 (Allan/Douglas)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad que satisface las condiciones mencionadas arriba.*

(i) Si $a \in \mathcal{A}$, entonces a es invertible en $\mathcal{A}$ si y sólo si para toda $x \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$ la clase lateral $a_x := \pi_x(a)$ es invertible en $\mathcal{A}_x$.

(ii) Para toda $a \in \mathcal{A}$, la función

$$\mathcal{M}(\mathcal{Z}) \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \|a_x\|$$

es semicontinua superior. Si $a \in \mathcal{A}$ y la clase lateral $a_{x_0} \in \mathcal{A}_{x_0}$ es invertible en $\mathcal{A}_{x_0}$ para algún $x_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$, entonces las clases laterales a_x son invertibles en $\mathcal{A}_x$ para toda x en una vecindad de x_0.

(iii) Para toda $a \in \mathcal{A}$,

$$||a|| = \max_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})} ||a_x||.$$

2.5 El álgebra C^* $\mathfrak{A} = \mathrm{alg}\{aI, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi : a \in PC(\mathfrak{L})\}$

Como el álgebra C^* $\mathfrak{A}$ contiene al ideal $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\Pi))$ de todos los operadores compactos en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\Pi))$, entonces el álgebra C^* cociente $\mathfrak{A}^\pi := \mathfrak{A}/\mathcal{K}$ está bien definida. Para obtener un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}$ necesitamos estudiar la invertibilidad de las clases laterales $A^\pi := A + \mathcal{K}$ en el álgebra C^* cociente $\mathfrak{A}^\pi$. Para terminar aplicaremos el principio local de Allan-Douglas al álgebra $\mathfrak{A}^\pi$.

Por la Proposición 2.3.1 se sigue que $\mathcal{Z}^\pi := \{cI + \mathcal{K} : c \in C(\dot{\overline{\Pi}})\}$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{A}^\pi$. Obviamente, el álgebra C^* conmutativa $\mathcal{Z}^\pi$ es (isométricamente) isomorfa-$*$ al álgebra C^* $C(\dot{\overline{\Pi}})$, y entonces el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}^\pi$ puede ser identificado con $\dot{\overline{\Pi}}$. Para todo punto $z \in \dot{\overline{\Pi}}$, con J_z^π denotamos el ideal bilátero cerrado del álgebra C^* $\mathfrak{A}^\pi$ generada por el ideal maximal

$$I_z^\pi := \{cI + \mathcal{K} : c \in C(\dot{\overline{\Pi}}),\ c(z) = 0\} \subset \mathcal{Z}^\pi. \tag{2.12}$$

De acuerdo a la Sección 2.4, el ideal J_z^π tiene la forma

$$J_z^\pi = \{(cA)^\pi : c \in C(\dot{\overline{\Pi}}),\ c(z) = 0,\ A \in \mathfrak{A}\}. \tag{2.13}$$

Aquí, con toda $z \in \dot{\overline{\Pi}}$ asociamos el álgebra C^* cociente $\mathfrak{A}_z^\pi := \mathfrak{A}^\pi / J_z^\pi$. Como una consecuencia del principio local de Allan-Douglas, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.5.1. *Un operador $A \in \mathfrak{A}$ es de Fredholm en el espacio $L^2(\Pi)$ si y sólo si para todo $z \in \dot{\overline{\Pi}}$ la clase lateral $A_z^\pi := A^\pi + J_z^\pi$ es invertible en el álgebra cociente $\mathfrak{A}_z^\pi$.*

De acuerdo a la Sección 2.4, decimos que las clases laterales $A^\pi, B^\pi \in \mathfrak{A}^\pi$ son localmente equivalentes en un punto $z \in \dot{\overline{\Pi}}$ si $A^\pi - B^\pi \in J_z^{\pi}$, y en tal caso escribimos $A^\pi \sim^z B^\pi$. Para caracterizar a a las álgebras locales $\mathfrak{A}_z^\pi$ para toda $z \in \dot{\overline{\Pi}}$ necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.5.1. *[8, Lemma 3.3] Las clases laterales B_Π^π y $\widetilde{B}_\Pi^\pi$ son localmente equivalentes a cero en todo punto $z \in \Pi$.*

El estudio avanzado de las álgebras locales requiere describir el conjunto $\mathfrak{L}$ de discontinuidades para los coeficientes de los operadores en el álgebra C^* $\mathfrak{A} = \text{alg}\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L})\}$. Podemos asumir que $\mathfrak{L}$ satisface las siguientes condiciones:

($\mathfrak{L}1$) para cada $z \in \Pi \cap \mathfrak{L}$ existen números $r_z > 0$ y $n_z \in \mathbb{N}$ tales que todo disco $D(z,r)$ de radio $r \in (0, r_z)$ centrado en z es dividido por $\mathfrak{L}$ en n_z dominios con z como punto límite común;

($\mathfrak{L}2$) para cada $z \in \mathfrak{L} \cap \mathbb{R}$ existe una vecindad V_z de z tal que $V_z \cap \mathfrak{L}$ consiste de un número finito de arcos de Lyapunov que tienen sólo al punto z en común y forman en este punto ángulos no cero diferentes dos a dos con $\mathbb{R}_+$ menores que π;

($\mathfrak{L}3$) si $\infty \in \mathfrak{L}$, entonces existe una vecindad V_∞ del punto $z = \infty$ tal que el conjunto $\{-1/\zeta : \zeta \in V_\infty \cap \mathfrak{L}\}$ consiste de un número finito de arcos de Lyapunov que tienen sólo al origen como punto en común y forman en este punto ángulos no cero diferentes dos a dos con $\mathbb{R}_+$ menores que π.

Así, para una vecindad suficientemente pequeña V_z, el conjunto $V_z \cap (\Pi \setminus \mathfrak{L})$ consiste de un número finito, digamos n_z, de componentes conexas D_k cuyas cerraduras contienen a z.

Primero estudiamos las álgebras locales $\mathfrak{A}_z^\pi$ asociadas con puntos $z \in \dot{\overline{\Pi}} \setminus (\dot{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{L})$. Por [8, Lemma 4.1] vemos que existen tres tipos de álgebras locales en este caso.

Lema 2.5.2. *Para el álgebra C^* $\mathfrak{A} = alg\{\mathcal{B}_\Pi, \widetilde{\mathcal{B}}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L})\}$, se cumple lo siguiente:*

(i) si $z \in \Pi \setminus \mathfrak{L}$, entonces $\mathfrak{A}_z^\pi \cong \mathbb{C}$;

(ii) si $z \in \Pi \cap \mathfrak{L}$, entonces $\mathfrak{A}_z^\pi \cong \mathbb{C}^{n_z}$, donde $n_z \in \mathbb{N}$ está dado por la condición $(\mathfrak{L}1)$;

(iii) si $z \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \mathfrak{L}$, entonces $\mathfrak{A}_z^\pi \cong \mathbb{C}^3$.

2.6 Álgebras locales en los puntos de $\dot{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{L}$

Sea Λ el álgebra C^* de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\Pi))$ y $\Lambda^\pi = \Lambda/\mathcal{K}$. A todo punto $z \in \dot{\overline{\Pi}}$ le asignamos el ideal bilátero cerrado $\widehat{J}_z^\pi$ de Λ^π generado por el ideal maximal I_z^π de $\mathcal{Z}^\pi$, donde I_z^π está dado por (2.12). Por analogía con (2.13), tenemos

$$\widehat{J}_z^\pi := \{(cA)^\pi : c \in C(\dot{\overline{\Pi}}), c(z) = 0, A \in \Lambda\}.$$

También introducimos las álgebras C^* cociente $\Lambda_z^\pi := \Lambda^\pi / \widehat{J}_z^\pi$.

Fijemos un punto $z \in \mathbb{R} \cap \mathfrak{L}$ y elijamos una vecindad $V_z \subset \Pi$ que satisface la condición $(\mathfrak{L}2)$ impuesta sobre $\mathfrak{L}$. Entonces $V_z \setminus \mathfrak{L} = \bigcup_{k=1}^{n_z} D_k$ donde $n_z - 1$ es el número de rayos en $\mathfrak{L}$ con punto final z y D_k son las componentes conexas de $V_z \setminus \mathfrak{L}$. Sea $\mathfrak{L}_z$ el conjunto de rayos en $\dot{\overline{\Pi}}$ que salen del origen y son las imágenes (bajo la traslación $\zeta \mapsto \zeta - z$) de las tangentes a las curvas de $\mathfrak{L}$ en el punto z. Aquí $\Pi \setminus \mathfrak{L}_z = \bigcup_{k=1}^{n_z} R_k^z$ donde R_k^z son sectores de Π con vértice en el origen el cual corresponde a los dominios D_k (los conjuntos D_k y R_k^z son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj).

De acuerdo con $\mathfrak{A} = \mathrm{alg}\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ consideramos el álgebra C^*

$$\mathfrak{A}^z := \mathrm{alg}\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L}_z)\} \subset \mathcal{B}(L^2(\Pi)).$$

Como $\mathcal{Z}^\pi$ es una subálgebra central de la subálgebra C^* $\mathfrak{A}^{z,\pi} := \mathfrak{A}^z/\mathcal{K}$, concluimos que $\mathfrak{A}^{z,\pi} \subset \Lambda^\pi$ y entonces el conjunto

$$\widehat{\mathfrak{A}}_0^{z,\pi} := \{A^\pi + \widehat{J}_0^\pi : A \in \mathfrak{A}^z\}$$

es una subálgebra C^* de Λ_0^π.

Lema 2.6.1. *[8, Lemma 7.2] Si la condición* $(\mathfrak{L}2)$ *se cumple, entonces para todo* $z \in \mathbb{R} \cap \mathfrak{L}$ *las álgebras* C^* $\mathfrak{A}_z^\pi$ *y* $\widehat{\mathfrak{A}}_0^{z,\pi}$ *son (isométricamente) isomorfas, y el isomorfismo* $\nu_z^\pi : \mathfrak{A}_z^\pi \to \widehat{\mathfrak{A}}_0^{z,\pi}$ *está dado por*

$$\nu_z^\pi(B_\Pi^\pi + J_z^\pi) = B_\Pi^\pi + \widehat{J}_0^\pi,\ \nu_z^\pi(\widetilde{B}_\Pi^\pi + J_z^\pi) = \widetilde{B}_\Pi^\pi + \widehat{J}_0^\pi,\ \nu_z^\pi((aI)^\pi + J_z^\pi) = (a_z I)^\pi + \widehat{J}_0^\pi$$

donde

$$a_z = \sum_{k=1}^{n_z} a_k(z)\chi_{R_z^k},\ a_k(z) = \lim_{\zeta \to z, \zeta \in D_k} a(\zeta)\ (k = 1, 2, ..., n_z).$$

Sea ahora $z = \infty$. Elijamos una vecindad $V_\infty \subset \Pi$ que satisface la condición $(\mathfrak{L}3)$ impuesta sobre $\mathfrak{L}$. Entonces $V_\infty \cap \mathfrak{L} = \bigcup_{k=1}^{n_\infty - 1} l_k$ donde l_k son arcos de Lyapunov de $\mathfrak{L}$ dados por las ecuaciones $\zeta = f_k(t),\ t \in (M, \infty)$ con $|f_k'| = 1$, y que sólo tienen en común al punto $f_k(\infty) = \infty$. Sea $\mathfrak{L}_\infty$ el conjunto de rayos

$$\gamma_k := \{\zeta = b_k x : x \in [0, \infty]\} \subset \dot{\overline{\Pi}}\ (k = 1, 2, ..., n_\infty - 1)$$

que salen del origen, donde

$$b_k = f_k'(\infty) := \lim_{t \to \infty} f_k(t) \neq 0.$$

Aquí, $\Pi \setminus \mathfrak{L}_\infty = \bigcup_{k=1}^{n_\infty} R_k^\infty$ donde R_k^∞ son sectores de Π con vértice en el origen los cuales corresponden a componentes conexas D_k de $V_\infty \setminus \mathfrak{L}$ (los conjuntos D_k y R_k^∞ son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj).

De acuerdo con $\mathfrak{A} = \text{alg}\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ consideramos el álgebra C^*

$$\mathfrak{A}^\infty := \text{alg}\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, aI : a \in PC(\mathfrak{L}_\infty)\} \subset \mathcal{B}(L^2(\Pi)).$$

Como $\mathcal{Z}^\pi$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{A}^{\infty,\pi} := \mathfrak{A}^\infty/\mathcal{K}$, concluimos que $\mathfrak{A}^{\infty,\pi} \subset \Lambda^\pi$ y entonces el conjunto

$$\widehat{\mathfrak{A}}_\infty^{\infty,\pi} := \{A^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi : A \in \mathfrak{A}^\infty\}$$

es una subálgebra C^* de Λ_∞^π.

Lema 2.6.2. *[8, Lemma 7.3] Si* $\infty \in \mathfrak{L}$ *y* $(\mathfrak{L}3)$ *se cumple, entonces las álgebras* C^* $\mathfrak{A}_\infty^\pi$ *y* $\widehat{A}_\infty^{\infty,\pi}$ *son (isométricamente) isomorfas, y el isomorfismo* $\nu_\infty^\pi : \mathfrak{A}_\infty^\pi \to \widehat{A}_\infty^{\infty,\pi}$ *está dado por*

$$\nu_\infty^\pi(B_\Pi^\pi + J_\infty^\pi) = B_\Pi^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi,\ \nu_\infty^\pi(\widetilde{B}_\Pi^\pi + J_\infty^\pi) = \widetilde{B}_\Pi^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi,\ \nu_\infty^\pi((aI)^\pi + J_\infty^\pi) = (a_\infty I)^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi,$$

donde

$$a_\infty = \sum_{k=1}^{n_\infty} a_k(\infty)\chi_{R_k^\infty},\ a_k(\infty) = \lim_{\zeta \to \infty, \zeta \in D_k} a(\zeta)\ (K = 1, 2, ..., n_\infty).$$

2.7 Formas canónicas de las álgebras locales

Sea χ_U la función característica del conjunto U. Por los Lemas 2.6.1 y 2.6.2, tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_z^\pi &\cong \mathrm{alg}\{B_\Pi^\pi + \widehat{J}_0^\pi,\ \widetilde{B}_\Pi^\pi + \widehat{J}_0^\pi,\ (\chi_{R_k^z} I)^\pi + \widehat{J}_0^\pi : k = 1,2,...,n_z\},\ z \in \mathbb{R} \cap \mathfrak{L}, \\ \mathfrak{A}_\infty^\pi &\cong \mathrm{alg}\{B_\Pi^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi,\ \widetilde{B}_\Pi^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi,\ (\chi_{R_k^\infty} I)^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi : k = 1,2,...,n_\infty\},\ \infty \in \mathfrak{L}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Introducimos las álgebras C^* de operadores

$$\mathcal{O}_\omega = alg\{B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi, \chi_{R_k} I : k = 1,2,...,n\} \tag{2.15}$$

donde $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ y ω_k $(k = 1,2,...,n)$ son los ángulos de los sectores R_k.

El siguiente resultado muestra que las álgebras C^* cociente del lado derecho de (2.14) son isomorfas a las álgebras C^* de la forma (2.15), (ver [8, Theorem 7.7]).

Teorema 2.7.1. *Si $z \in \dot{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{L}$, entonces el álgebra C^* $\mathfrak{A}_z^\pi$ es isomorfa al álgebra C^* $\mathcal{O}_\omega$ de la forma (2.15) donde $n = n_z$ y $R_k = R_k^z$ $(k = 1,2,...,n)$.*

2.8 Un álgebra C^* generada por proyecciones

En esta sección estudiamos un álgebra C^* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ generada por n proyecciones ortogonales Q_i cuya suma da el operador identidad I y por m proyecciones ortogonales unidimensionales P_k sobre un espacio de Hilbert H. El siguiente teorema nos proporciona un esquema a seguir para establecer un isomorfismo de álgebras C^* entre el álgebra C^* $\mathcal{A}$ y un álgebra C^* de matrices finitas.

Por medio de $\langle x, y\rangle$ denotaremos al producto interno en un espacio de Hilbert H, el símbolo $\delta_{i,j}$ es el símbolo de la delta de Kronecker, y usaremos I_k para denotar a la matriz identidad de dimensión $k \times k$.

Teorema 2.8.1. *[8, Theorem 8.8] Sea H un espacio de Hilbert y sean Q_i, P_k $(i = 1,2,...,n;$ $k = 1,2,...,m)$, proyecciones autoadjuntas en $\mathcal{B}(H)$ que satisfacen las condiciones:*

(i) $Q_iQ_j = 0$ $(i, j = 1,2,...,n; i \neq j)$;

(ii) $\sum_{i=1}^n Q_i = I$;

(iii) P_k $(k = 1,2,...,m)$ *son proyecciones unidimensionales;*

(iv) $P_kP_l = 0$ $(k, l = 1,2,...,m; m \neq l)$;

(v) $\bigcap_{k=1}^m (Imp_k)^\perp \cap (ImQ_i) \neq \{0\}$, $i = 1,2,...,n$;

(vi) si $v_1, v_2, ..., v_m$ son generadores normalizados de los espacios ImP_1, ImP_2, ..., ImP_m, respectivamente, entonces los vectores $Q_iv_1, Q_iv_2, ..., Q_iv_m$ son linealmente independientes para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(H)$ generada por las proyecciones Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ y P_k $(k = 1, 2, ..., m)$, sea $S = diag\{S_i\}_{i=1}^n$ donde S_i son matrices invertibles en $\mathbb{C}^{m\times m}$ que transforman los sistemas $\nu_i = \{Q_iv_1, Q_iv_2, ..., Q_iv_m\}$ de vectores linealmente independientes en H sobre sistemas ortonormales, y sea $\mathfrak{C}$ la subálgebra C^* de $\mathbb{C}^{mn\times mn}$ generada por las matrices

$$\widetilde{Q_i} = diag\{\delta_{i,j}I_m\}_{j=1}^n \text{ y } S\widetilde{P}S^{-1} \ (i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m)$$

donde

$$\widetilde{P}_k = (diag\{\delta_{k,j}\}_{j=1}^m E_{s,i})_{s,i=1}^n, \ k = 1, 2, ..., m,$$

y

$$E_{s,i} = \begin{pmatrix} \langle Q_iv_1, Q_iv_1\rangle & \langle Q_iv_2, Q_iv_1\rangle & \cdots & \langle Q_iv_m, Q_iv_1\rangle \\ \langle Q_iv_1, Q_iv_2\rangle & \langle Q_iv_2, Q_iv_2\rangle & \cdots & \langle Q_iv_m, Q_iv_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Q_iv_1, Q_iv_m\rangle & \langle Q_iv_2, Q_iv_m\rangle & \cdots & \langle Q_iv_m, Q_iv_m\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Entonces el mapeo σ, definido sobre los generadores de $\mathcal{A}$ por

$$Q_i \mapsto (\delta_{i,1} \oplus \delta_{i,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{i,n}) \oplus \widetilde{Q}_i \ (i = 1, 2, ..., n),$$

$$P_k \mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus S\widetilde{P}_kS^{-1} \ (k = 1, 2, ..., m),$$

se extiende a un isomorfismo-$*$ del álgebra C^* $\mathcal{A}$ sobre la subálgebra C^* $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{C}$ generada por los elementos

$$(\delta_{i,1} \oplus \delta_{i,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{i,n}) \oplus \widetilde{Q}_i, \ (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus S\widetilde{P}_kS^{-1} \ (i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m).$$

Aplicando el teorema 2.8.1, en [8] fue construido un cálculo simbólico para el álgebra $\mathfrak{A} = \text{alg}\{aI, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ y fue establecido un criterio de Fredholm para operadores $A \in \mathfrak{A}$ en términos de sus símbolos.

Capítulo 3

Álgebras de Operadores del tipo de Bergman en sectores con coeficientes constantes a trozos

Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ equipado con la medida de área de Lebesgue $dA(z) = dxdy$, y sean $\mathcal{A}^2(U)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$ los subespacios lineales normados de $L^2(U) = L^2(U, dA)$ que consisten de funciones diferenciables tales que, respectivamente, $\partial_{\overline{z}} f = 0$ y $\partial_z f = 0$, donde

$$\partial_{\overline{z}} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \partial_z := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Es sabido que $\mathcal{A}^2(U)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$ son subespacios de Hilbert de $L^2(U)$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inducido por $L^2(U)$. Esos subespacios están relacionados por el operador anti-lineal de norma uno

$$C : L^2(U) \to L^2(U),\ Cf = \overline{f}. \tag{3.1}$$

Obviamente, $C(\mathcal{A}^2(U)) = \widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$ porque $\partial_z f = \overline{\partial_{\overline{z}} \overline{f}}$.

La proyección de Bergman B_U y la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$, para un dominio acotado múltiplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ con frontera suficientemente suave, son representados en la siguiente manera

$$B_U = I - S_U S_U^* + K,\ \widetilde{B}_U = I - S^*(U) S_U + \widetilde{K},$$

donde $S_U, S_U^* \in \mathcal{B}(L^2(U))$, son operadores integrales singulares bidimensionales acotados en el espacio $L^2(U)$ y dados para $z \in U$ por

$$\begin{aligned}(S_U f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{f(w)}{(w-z)^2}dA(w),\\ (S_U^* f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{f(w)}{(\overline{w}-\overline{z})^2}dA(w),\end{aligned} \tag{3.2}$$

y $K, \widetilde{K}$ son operadores compactos en el espacio $L^2(U)$. Claramente, $S_U^* = CS_UC$ es el operador adjunto para S_U.

La proyección de Bergman B_U y la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$ son las proyecciones ortogonales del espacio de Lebesgue $L^2(U)$ sobre sus subespacios $\mathcal{A}^2(U)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$, respectivamente. Es claro que $\widetilde{B}(U) = CB_UC$.

Si $U = \Pi$ es el semiplano superior complejo $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, entonces $K = \widetilde{K} = 0$ (ver, por ejemplo [22, Lemma 7.5]) y por lo tanto tenemos

$$B_\Pi = I - S_\Pi S_\Pi^*, \ \widetilde{B}_\Pi = I - S_\Pi^* S_\Pi. \tag{3.3}$$

Además, esas proyecciones están dadas por

$$\begin{aligned}(B_\Pi f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_\Pi \frac{f(w)}{(z-\overline{w})^2}dA(w), \ f \in L^2(\Pi), \ z \in \Pi,\\ (\widetilde{B}_\Pi f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_\Pi \frac{f(w)}{(\overline{z}-w)^2}dA(w), \ f \in L^2(\Pi), \ z \in \Pi.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pero si la frontera de un dominio U admite ángulos diferentes de π, las fórmulas para B_U y $\widetilde{B}_U$, no se cumplen en general, como se muestra en [10, Theorem 5.3] para los sectores abiertos

$$\mathbb{K}_m = \{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (0, \pi/m)\} \ (m = 2, 3, ...).$$

En éste capítulo, estudiaremos álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman en dominios que tienen frontera no suave y que admiten ángulos, las cuales denotaremos por $\mathfrak{C}_m \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$ generada por los operadores de multiplicación por funciones constantes a trozos con discontinuidades en un sistema $\mathfrak{L}$ de rayos que comienzan en el origen y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman que actúan en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{K}_m)$ sobre los sectores abiertos $\mathbb{K}_m$. Aplicando representaciones de las proyecciones de Bergman y anti-Bergman por medio de un operador de rotación y operadores integrales singulares bidimensionales con coeficientes que admiten discontinuidades homogéneas, construiremos un cálculo simbólico para el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ y estableceremos un criterio de invertibilidad para los operadores $A \in \mathfrak{C}_m$ en términos de sus símbolos. Los resultados obtenidos dependen esencialmente del ángulo del sector $\mathbb{K}_m$.

3.1 Álgebra de operadores tipo convolución con datos homogéneos

Los resultados de ésta sección son debidos, esencialmente, a la descomposición de Plamenevsky de la transformada de Fourier multidimensional [18]. Es una revisión y modificación esencial de la sección 2.1.

Sea $PC(\mathbb{T})$ el álgebra C^* de las funciones complejas continuas a trozos en el círculo unitario $\mathbb{T}$, y sea $H(PC(\mathbb{T}))$ el álgebra C^* de las funciones homogéneas de orden cero en $L^\infty(\mathbb{C})$, cuyas restricciones en $\mathbb{T}$ pertenecen a $PC(\mathbb{T})$ y, para toda $\tau \in \mathbb{T}$ y toda $t > 0$,

$$\lim_{\theta\to+0} a(te^{i\theta}\tau) = \lim_{\theta\to+0} a(e^{i\theta}\tau), \quad \lim_{\theta\to-0} a(te^{i\theta}\tau) = \lim_{\theta\to-0} a(e^{i\theta}\tau).$$

También usaremos el álgebra C^* $H(C(\mathbb{T}))$, que consiste de las funciones $a \in H(PC(\mathbb{T}))$ tales que $a|_{\mathbb{T}} \in C(\mathbb{T})$.

Sea $\mathcal{B}(H)$ el álgebra C^* de los operadores lineales acotados que actúan sobre un espacio de Hilbert H, y sea $\mathcal{R}$ la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$ generada por los operadores de multiplicación

$$A = aI \ (a \in H(PC(\mathbb{T})))$$

y por los operadores integrales singulares bidimensionales

$$F^{-1}bF \ (b \in H(C(\mathbb{T}))),$$

donde $F : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ es la transformada de Fourier y F^{-1} es la inversa de la transformada de Fourier.

Al igual que en la Sección 2.1, consideramos la transformada de Mellin y su inversa, M y M^{-1} respectivamente. Además, para $\lambda \in \mathbb{C}$, tomamos los operadores $E(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ sobre funciones $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ definidos por (2.2), y $E(\lambda)^{-1}$ su operador inverso, donde, por [18, Proposition 4.4], los operadores $E(\lambda)$ son unitarios para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. También consideremos el operador reflexión V definido por (2.4)

Aquí, también el producto tensorial $M \otimes I$ será tomado relativamente a la descomposición (2.5). Para una función que toma como valor un operador

$$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \quad \lambda \mapsto L(\lambda),$$

denotamos por $I \otimes_\lambda L(\lambda)$ el operador en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T}))$ dado por la fórmula (2.6)

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$, introducimos el álgebra C^* $\Omega_\lambda \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ generada por los operadores

$$aI \text{ y } E(\lambda)^{-1}bE(\lambda) \ (a \in PC(\mathbb{T}), \ b \in C(\mathbb{T})).$$

Consideremos la base ortogonal en el espacio $L^2(\mathbb{T})$:

$$\{h^m/\sqrt{2\pi}\}_{m\in\mathbb{Z}}, \text{ donde } h(t) = t \text{ para toda } t \in \mathbb{T}. \tag{3.5}$$

El siguiente resultado corrige [7, Proposition 2.2 y (2.15)].

Lema 3.1.1. *Para toda $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} E(\lambda)h^m &= \mu(|m|,\lambda)h^m & \textit{si} \;\; \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{ik : k \in \mathbb{N}\}, \\ E(\lambda)^{-1}h^m &= (-1)^m\mu(|m|,-\lambda)h^m & \textit{si} \;\; \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-ik : k \in \mathbb{N}\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde h es dada por (3.5) *y, para $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{ik : k \in \mathbb{N}\}$,*

$$\mu(m,\lambda) = (-i)^m 2^{i\lambda}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+i\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-i\lambda+1}{2}\right)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

Demostración. Por [18, Chapter 1], para cualquier armónica esférica Y_m de orden $m = 0, 1, ...$, tenemos

$$\begin{aligned} E(\lambda)Y_m &= \mu(m,\lambda)Y_m, & \text{si} \;\; \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{ik : k \in \mathbb{N}\}, \\ E(\lambda)^{-1}Y_m &= (-1)^m\mu(m,-\lambda)Y_m, & \text{si} \;\; \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-ik : k \in \mathbb{N}\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $\mu(m,\lambda)$ está dada por (3.7). Como en el círculo unitario $\mathbb{T}$, para toda $m \in \mathbb{N}$ existen sólo dos armónicas esféricas linealmente independientes $Y_m(\theta) = \cos(m\theta)$ y $Y_m(\theta) = \sin(m\theta)$ de orden m, donde $\theta \in [0, 2\pi)$, inmediatamente obtenemos las fórmulas (3.6) para las funciones esféricas $h^{\pm m}(e^{i\theta}) = \cos(m\theta) \pm i\sin(m\theta)$, con μ dependiendo de $|m|$ y λ, de las igualdades en (3.8). ■

Aunque las funciones cuyo valor es un operador $\lambda \mapsto E(\lambda)^{\pm 1}$ no son continuas en sentido de la norma, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.2. *Para toda $b \in C(\mathbb{T})$, la función de valor un operador*

$$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \qquad \lambda \mapsto E(\lambda)^{-1}bE(\lambda) \tag{3.9}$$

es acotada y continua en sentido de la norma.

Demostración. Como $E(\lambda)$ y $E(\lambda)^{-1}$ son operadores unitarios,

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\|E(\lambda)^{-1}bE(\lambda)\right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))} = \|b\|_{C(\mathbb{T})} < \infty.$$

Como $b \in C(\mathbb{T})$ es aproximado uniformemente en $C(\mathbb{T})$ por polinomios $\sum_{k=-n}^{n} a_k h^k$ en h dado por (3.5), con coeficientes $a_k \in \mathbb{C}$, es suficiente probar la continuidad (en sentido de la norma) de la función con valor un operador (3.9) para toda función $b = h^k$ $k \in \mathbb{Z}$. Además, es suficiente probarlo sólo para $b = h^{\pm 1}$.

Dada $n \in \mathbb{Z}$, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, inferimos de (3.6) y (3.7) que

$$\begin{aligned} E(\lambda)^{-1}h^{\pm 1}E(\lambda)h^n &= \mu(|n|,\lambda)E(\lambda)^{-1}h^{n\pm 1} \\ &= \mu(|n|,\lambda)(-1)^{n\pm 1}\mu(|n\pm 1|,-\lambda)h^{n\pm 1} \\ &= i^{|n\pm 1|-|n|}\,\frac{\Gamma\big(\frac{|n|+i\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|-i\lambda+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{|n|-i\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|+i\lambda+1}{2}\big)}\,h^{n\pm 1}. \end{aligned}$$

De aquí, para $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\big\|E(\lambda)^{-1}h^{\pm 1}E(\lambda) - E(\lambda_0)^{-1}h^{\pm 1}E(\lambda_0)\big\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))} \\ &\quad \le \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\Gamma\big(\frac{|n|+i\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|-i\lambda+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{|n|-i\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|+i\lambda+1}{2}\big)} - \frac{\Gamma\big(\frac{|n|+i\lambda_0+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|-i\lambda_0+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{|n|-i\lambda_0+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|+i\lambda_0+1}{2}\big)}\right|. \end{aligned}$$

Por [6, 8.325.1], obtenemos

$$\begin{aligned} F_n(\lambda) &:= \frac{\Gamma\big(\frac{|n|+i\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|-i\lambda+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{|n|-i\lambda+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{|n\pm 1|+i\lambda+1}{2}\big)} \\ &= \begin{cases} \prod_{k=0}^{\infty}\big(1+\frac{1}{|n|+i\lambda+1+2k}\big)\big(1-\frac{1}{|n+1|-i\lambda+1+2k}\big) & \text{si } \ n=0,1,2,\ldots; \\ \prod_{k=0}^{\infty}\big(1+\frac{1}{|n+1|-i\lambda+1+2k}\big)\big(1-\frac{1}{|n|+i\lambda+1+2k}\big) & \text{si } \ n=-1,-2,\ldots; \end{cases} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{2i\lambda a_n}{(|n|+i\lambda+1+2k)(|n+1|-i\lambda+1+2k)}\right), \end{aligned}$$

donde $a_n = -1$ para $n = 0, 1, 2, ...$ y $a_n = 1$ para $n = -1, -2, ...$ Las funciones

$$f_{n,k}(\lambda) := 1 + \frac{2i\lambda a_n}{(|n|+i\lambda+1+2k)(|n+1|-i\lambda+1+2k)}$$

para $n \in \mathbb{Z}$ y $k = 0, 1, 2, ...$ son uniformemente acotadas y equicontinuas en $\mathbb{R}$. En efecto, $|f_{n,k}(\lambda) - 1| \le \frac{2|\lambda|}{(\lambda^2+1)^{1/2}(\lambda^2+4)^{1/2}} < 2^{-1/2}$ para esos n, k y $\lambda \in \mathbb{R}$, y para toda $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \big|f_{n,k}(\lambda) - f_{n,k}(\lambda_0)\big| &\le \frac{2|\lambda-\lambda_0|}{||n|+i\lambda+1+2k|\,||n+1|-i\lambda+1+2k|} \\ &\quad + \left|\frac{1}{|n|+i\lambda+1+2k} - \frac{1}{|n|+i\lambda_0+1+2k}\right|\frac{2|\lambda_0|}{||n+1|-i\lambda+1+2k|} \\ &\quad + \frac{2|\lambda_0|}{||n|+i\lambda_0+1+2k|}\left|\frac{1}{|n+1|-i\lambda+1+2k} - \frac{1}{|n+1|-i\lambda_0+1+2k}\right| \\ &\le \frac{|\lambda-\lambda_0|}{(\lambda^2+1)^{1/2}}\left[\frac{2}{(\lambda^2+4)^{1/2}} + \frac{2|\lambda_0|}{(\lambda_0^2+1)^{1/2}(\lambda^2+4)^{1/2}} + \frac{2|\lambda_0|}{(\lambda_0^2+1)^{1/2}(\lambda_0^2+4)^{1/2}}\right] \\ &\le 3|\lambda-\lambda_0|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Entonces, para toda $N \in \mathbb{N}$ el conjunto de productos finitos $\big\{F_{n,N} = \prod_{k=0}^{N} f_{n,k} : n \in \mathbb{Z}\big\}$ es acotado y equicontinuo en $\mathbb{R}$.

Se sigue de [1, Section 8.26] que, para cualquier conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, los productos infinitos (3.10) convergen uniformemente con respecto a $n \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \in K$, porque las series

$$\sum_{k=0}^{\infty}(f_{n,k}(\lambda)-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2i\lambda a_n}{(|n|+i\lambda+1+2k)(|n+1|-i\lambda+1+2k)} \tag{3.11}$$

convergen absolutamente y uniformemente con respecto a $n \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \in K$. En efecto, por (3.11), lo último se sigue de la estimación

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_{n,k}(\lambda)-1| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2|\lambda|}{(1+k)(2+k)} \le C_K := 2\max_{\lambda\in K}|\lambda| < \infty,$$

lo cual implica, de acuerdo a (3.10) que, para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \in K$,

$$|F_n(\lambda)| = \prod_{k=0}^{\infty}|f_{n,k}(\lambda)| \le \prod_{k=0}^{\infty}\big(1+|f_{n,k}(\lambda)-1|\big) \le \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}|f_{n,k}(\lambda)-1|\right) \le e^{C_K}.$$

Consecuentemente, en vista de la equicontinuidad de las funciones $\lambda \mapsto F_{n,N}(\lambda)$ en $\mathbb{R}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y para toda $N \in \mathbb{N}$ fija, y debido a la convergencia uniforme (con respecto a $n \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \in K$) de $F_{n,N}(\lambda)$ a $F_n(\lambda)$ cuando $N \to \infty$, concluimos que los productos $F_n(\lambda) = \lim_{N\to\infty} F_{n,N}(\lambda)$ $(n \in \mathbb{Z})$ son equicontinuos en compactos de $\mathbb{R}$. Esto significa que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\sup_{n\in\mathbb{Z}}|F_n(\lambda)-F_n(\lambda_0)| = 0$$

para toda $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. De aquí, por (3.10) y (3.10), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|E(\lambda)^{-1}h^{\pm 1}E(\lambda)-E(\lambda_0)^{-1}h^{\pm 1}E(\lambda_0)\right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))} \\ &\le \lim_{\lambda\to\lambda_0}\sup_{n\in\mathbb{Z}}|F_n(\lambda)-F_n(\lambda_0)| = 0, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba de la continuidad (en sentido de la norma) de la función con valor un operador $\lambda \mapsto E(\lambda)^{-1}hE(\lambda)$.

La prueba de la continuidad (en sentido de la norma) de la función cuyo valor es un operador $\lambda \mapsto E(\lambda)^{-1}h^{-1}E(\lambda)$ es análoga. ■

Sea Ω el álgebra C^* de funciones acotadas y continuas en sentido de la norma, cuyo valor es un operador

$$U : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})),\ \lambda \mapsto U(\lambda) \tag{3.12}$$

con la norma $||U|| = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}||U(\lambda)||$.

De acuerdo a [7, Proposition 2.4], tenemos la descomposición

$$F = (M^{-1}\otimes I)(V\otimes I)(I\otimes_\lambda E(\lambda))(M\otimes I),$$

donde V es dado por (2.4) y $I \otimes_\lambda E(\lambda)$ es definido de acuerdo a (2.6). Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} (M \otimes I)(a(x)I)(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes a(t)I, \\ (M \otimes I)(F^{-1}b(\xi)F)(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda (E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda)), \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $t, \omega \in \mathbb{T}$ y el operador $\lambda \mapsto E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda)$ es continuo en sentido de la norma por el Lema 3.1.2, y usando la notación $(U(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ para las funciones de valor un operador (3.12), podemos obtener lo siguiente.

Proposición 3.1.1. *[7, Proposition 2.5] El álgebra C^* $\mathcal{R}$ es isomorfa a una subálgebra C^* de Ω. El isomorfismo está dado sobre los generadores aI $(a \in H(PC(\mathbb{T})))$ y $F^{-1}bF$ $(b \in H(C(\mathbb{T})))$ de $\mathcal{R}$ por*

$$\begin{aligned} a(x)I &\mapsto (a(t)I)_{\lambda\in\mathbb{R}}, \\ F^{-1}b(\xi)F &\mapsto (E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomamos el operador rotación $\widetilde{V}_m \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{C}))$ dado por

$$(\widetilde{V}_m f)(z) = f(e^{2\pi i/m}z) \text{ para toda } z \in \mathbb{C} \text{ y toda } f \in L^2(\mathbb{C}). \tag{3.14}$$

Es fácil ver que

$$(M \otimes I)\widetilde{V}_m(M^{-1} \otimes I) = I \otimes V_m, \tag{3.15}$$

donde $V_m \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ es el operador rotación, dado por

$$(V_m f)(t) = f(e^{2\pi i/m}t) \text{ para toda } t \in \mathbb{T} \text{ y toda } f \in L^2(\mathbb{T}).$$

También consideraremos el álgebra C^* $\mathcal{R}_m := \text{alg}\{\mathcal{R}, \widetilde{V}_m\}$ generada por el álgebra C^* $\mathcal{R}$ y por el operador de rotación $\widetilde{V}_m$.

Corolario 3.1.1. *El álgebra C^* $\mathcal{R}_m$ es isomorfa a una subálgebra C^* de Ω. El isomorfismo está dado sobre los generadores de $\mathcal{R}_m$ por*

$$\begin{aligned} a(x)I &\mapsto (a(t)I)_{\lambda\in\mathbb{R}}, \\ F^{-1}b(\xi)F &\mapsto (E(\lambda)^{-1}b(\omega)E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}, \\ \widetilde{V}_m &\mapsto (V_m)_{\lambda\in\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

3.2 Proyecciones tipo Bergman y operadores singulares integrales

Consideremos las representaciones de las proyección de Bergman $B_{\mathbb{K}_m}$ y la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$ del espacio $L^2(\mathbb{K}_m, dA)$ en los sectores abiertos

$$\mathbb{K}_m = \{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (0, \pi/m)\} \ (m = 1, 2, ...)$$

sobre los espacios $\mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_m)$, respectivamente, vía los operadores integrales singulares bidimensionales $S_{\mathbb{C}}$ y $S_{\mathbb{C}}^*$. Obviamente, $\mathbb{K}_1$ coincide con el semiplano superior Π, y entonces tales representaciones ya fueron dadas en el Capítulo 2.

Identificando $B_{\mathbb{K}_m}$ y $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$ con los operadores que actúan en el espacio $L^2(\mathbb{C})$

$$\chi_{\mathbb{K}_m} B_{\mathbb{K}_m} \chi_{\mathbb{K}_m} I \text{ y } \chi_{\mathbb{K}_m} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} \chi_{\mathbb{K}_m} I,$$

donde $\chi_{\mathbb{K}_m}$ es la función característica del sector $\mathbb{K}_m$, obtenemos la siguiente modificación de [10, Theorem 5.3].

Teorema 3.2.1. *Para toda $m \in \mathbb{N}$, las proyecciones de Bergman y anti-Bergman del espacio $L^2(\mathbb{K}_m, dA)$ son proyecciones autoadjuntas, respectivamente, de la forma*

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{K}_m} &= \chi_{\mathbb{K}_m} I - \chi_{\mathbb{K}_m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k \widetilde{V}_m^k S_{\mathbb{C}} \right) \chi_{\mathbb{K}_m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon_m^{-n} \widetilde{V}_m^n S_{\mathbb{C}}^* \right) \chi_{\mathbb{K}_m} I, \\ \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} &= \chi_{\mathbb{K}_m} I - \chi_{\mathbb{K}_m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{-k} \widetilde{V}_m^k S_{\mathbb{C}}^* \right) \chi_{\mathbb{K}_m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon_m^{n} \widetilde{V}_m^n S_{\mathbb{C}} \right) \chi_{\mathbb{K}_m} I, \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $\varepsilon_m = e^{2\pi i/m}$, y el operador rotación $\widetilde{V}_m \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ está dado por (3.14).

Demostración. Se sigue de [10, Lemma 5.2] que

$$\frac{m^2 w^{m-1} z^{m-1}}{(w^m - z^m)^2} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon_m^k}{(w - \varepsilon_m^k z)^2}. \tag{3.17}$$

Consideremos el operador isométrico de desplazamiento

$$W_m : L^2(\Pi, dA) \to L^2(\mathbb{K}_m, dA), \qquad (W_m f)(z) = m z^{m-1} f(z^m) \ (z \in \mathbb{K}_m).$$

Como $\phi_m(z) = z^m$ es un mapeo conforme de $\mathbb{K}_m$ en Π para cada $m \in \mathbb{N}$, inferimos de (3.3), que

$$B_{\mathbb{K}_m} = W_m B_\Pi W_m^{-1} = I - (W_m S_\Pi W_m^{-1})(W_m S_\Pi^* W_m^{-1}). \tag{3.18}$$

Como W_m es un operador unitario, concluimos de (3.18) que la proyección de Bergman $B_{\mathbb{K}_m}$ es autoadjunta.

Análogamente a [14] y a la prueba de [10, Theorem 5.3], inferimos en virtud de (3.17), que para $z \in \mathbb{K}_m$,

$$\begin{aligned}(W_m S_\Pi W_m^{-1} f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{K}_m} \frac{m^2 z^{m-1}\overline{w}^{m-1}}{(w^m - z^m)^2} f(w)dA(w)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{K}_m} \frac{m^2 z^{m-1} w^{m-1}}{(w^m - z^m)^2}\left(\frac{\overline{w}}{w}\right)^{m-1} f(w)dA(w)\\ &= -\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{K}_m}\frac{\varepsilon_m^k}{(w-\varepsilon_m^k z)^2}\left(\frac{\overline{w}}{w}\right)^{m-1} f(w)dA(w),\end{aligned}$$

lo cual implica la igualdad

$$W_m S_\Pi W_m^{-1} = \chi_{\mathbb{K}_m}\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_m^k \widetilde{V}_m^k S_{\mathbb{C}} \widetilde{h}^{1-m}\chi_{\mathbb{K}_m} I, \tag{3.19}$$

donde $\widetilde{h}(z) = \frac{z}{\overline{z}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Similarmente, aplicando (3.17), obtenemos

$$\begin{aligned}(W_m S_\Pi^* W_m^{-1} f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{K}_m} \frac{m^2 z^{m-1}\overline{w}^{m-1}}{(\overline{w}^m - \overline{z}^m)^2} f(w)dA(w)\\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{m-1}\int_{\mathbb{K}_m} \frac{m^2 \overline{z}^{m-1}\overline{w}^{m-1}}{(\overline{w}^m - \overline{z}^m)^2} f(w)dA(w)\\ &= -\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{m-1}\int_{\mathbb{K}_m}\frac{\varepsilon_m^k}{(\overline{w}-\varepsilon_m^k \overline{z})^2} f(w)dA(w)\\ &= -\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{m-1}\int_{\mathbb{K}_m}\frac{\varepsilon_m^{-k}}{(\overline{w}-\varepsilon_m^{-k} \overline{z})^2} f(w)dA(w)\end{aligned}$$

lo cual nos da

$$W_m S_\Pi^* W_m^{-1} = \chi_{\mathbb{K}_m}\widetilde{h}^{1-m}\sum_{n=0}^{m-1}\varepsilon_m^{-n} \widetilde{V}_m^n S_{\mathbb{C}}^* \chi_{\mathbb{K}_m} I. \tag{3.20}$$

Combinando (3.18), (3.19) y (3.20) llegamos a la primera igualdad en (3.16).

La segunda fórmula en (3.16) se sigue de la primera en vista de (3.3) y las igualdades $S_{\mathbb{C}}^* = CS_{\mathbb{C}}C$ y $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} = CB_{\mathbb{K}_m}C$. La última igualdad también implica que la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$ es autoadjunta en relación con la proyección de Bergman $B_{\mathbb{K}_m}$. ■

3.3 El álgebra C^* $\mathfrak{C}_m = \mathbf{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})\}$

Primero vamos a estudiar el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m = \mathrm{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})\}$ generada por la proyección de Bergman $B_{\mathbb{K}_m}$, la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$ y por los operadores de multiplicación por funciones constantes a trozos en $\mathbb{K}_m$ con discontinuidades en $\mathfrak{L}$.

Con $\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ denotaremos al conjunto de funciones constantes a trozos en el sector $\mathbb{K}_m$ con discontinuidades en el conjunto $\mathfrak{L} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{L}_j$ de rayos

$$\mathcal{L}_j = \{re^{i\theta_j} : r > 0\} \qquad (j = 1, 2, ..., N-1), \qquad 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N-1} < \pi/m.$$

Los rayos $\mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2, ..., N-1)$ dividen al sector $\mathbb{K}_m$ en N sectores abiertos

$$R_l = \{z \in \mathbb{K}_m : \theta_{l-1} < \arg z < \theta_l\} \qquad (l = 1, 2, ..., N),$$

donde $\theta_0 =< \theta_1 < \cdots < \theta_N = \pi/m$. Tomando

$$\gamma_m := \mathbb{K}_m \cap \mathbb{T}, \qquad \eta_l := R_l \cap \mathbb{T} \qquad (l = 1, 2, ..., N),$$

vemos que $\gamma_m = \bigcup_{l=1}^{N} \eta_l$. Tomamos χ_D la función característica de un conjunto D.

De (2.11) se sigue que

$$S_{\mathbb{C}} = F^{-1}\widetilde{h}^{-1}F, \qquad S_{\mathbb{C}}^* = F^{-1}\widetilde{h}F, \tag{3.21}$$

donde F es la transformada de Fourier actuando en $L^2(\mathbb{C})$ y $\widetilde{h} = z/\overline{z}$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, inferimos en virtud del Teorema 3.2.1, de (3.21) y del Corolario 3.1.1 lo siguiente.

Teorema 3.3.1. *El álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ está contenida en el álgebra C^* $\mathcal{R}_m = alg\{\mathcal{R}, \widetilde{V}_m\}$ y es isomorfa-$*$ al álgebra C^* $\widetilde{\Omega}_m \subset \Omega_m$ generada por las funciones cuyo valor es un operador de norma continua $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ de la forma*

$$\lambda \mapsto B_m(\lambda), \qquad \lambda \mapsto \widetilde{B}_m(\lambda), \qquad \lambda \mapsto \chi_{\eta_l} I \qquad (l = 1, 2, ..., N),$$

donde χ_{η_l} es la función característica del arco $\eta_l := \{e^{i\theta} : \theta \in [\theta_{l-1}, \theta_l]\}$,

$$\begin{aligned} B_m(\lambda) &= \chi_{\gamma_m} I - \chi_{\gamma_m}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k V_m^k S(\lambda)\right)\chi_{\gamma_m}\left(\sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon_m^{-n} V_m^n S^*(\lambda)\right)\chi_{\gamma_m} I, \\ \widetilde{B}_m(\lambda) &= \chi_{\gamma_m} I - \chi_{\gamma_m}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{-k} V_m^k S^*(\lambda)\right)\chi_{\gamma_m}\left(\sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon_m^{n} V_m^n S(\lambda)\right)\chi_{\gamma_m} I, \end{aligned} \tag{3.22}$$

χ_{γ_m} es la función característica del arco $\gamma_m := \{e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi/m]$, $\varepsilon_m = e^{2\pi i/m}$, el operador $V_m \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$, y los operadores $S(\lambda), S^*(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ son dados por

$$S(\lambda) := E(\lambda)^{-1}h^{-2}E(\lambda), \quad S^*(\lambda) := E(\lambda)^{-1}h^{2}E(\lambda), \quad h(t) = t \quad (t \in \mathbb{T}). \tag{3.23}$$

Demostración. Como $\widetilde{h}^{\pm} \in H(C(\mathbb{T}))$, inferimos de (3.21) y (3.13) que

$$\begin{aligned} (M \otimes I)S_{\mathbb{C}}(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda S(\lambda), \\ (M \otimes I)S_{\mathbb{C}}^*(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda S^*(\lambda), \end{aligned} \tag{3.24}$$

Además, de (3.13) y (3.15) deducimos que

$$\begin{aligned} (M \otimes I)\chi_{R_l}(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes \chi_{\eta_l} I \qquad (l = 1, 2, ..., N), \\ (M \otimes I)\chi_{\mathbb{K}_m}(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes \chi_{\gamma_m} I, \\ (M \otimes I)\widetilde{V}_m(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes V_m. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Considerando éstas igualdades, inferimos de (3.2.1) que

$$
\begin{aligned}
(M \otimes I) B_{\mathbb{K}_m} (M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda B_m(\lambda), \\
(M \otimes I) \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} (M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda \widetilde{B}_m(\lambda),
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

donde los operadores $B_m(\lambda), \widetilde{B}_m(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ son definidos por (3.22). Del Lema (3.1.2) y (3.22) se sigue que las funciones cuyo valor es un operador $\lambda \mapsto B_m(\lambda)$ y $\lambda \mapsto \widetilde{B}_m(\lambda)$ son de norma continua, lo cual completa la prueba de acuerdo al Corolario 3.1.1. ■

3.4 Un álgebra C^* generada por proyecciones

En esta sección estudiamos un álgebra C^* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ generada por n proyecciones ortogonales Q_i cuya suma da el operador identidad I y por m proyecciones ortogonales unidimensionales P_k sobre un espacio de Hilbert H. El siguiente teorema nos proporciona un esquema a seguir para establecer un isomorfismo-$*$ entre el álgebra C^* $\mathcal{A}$ y un álgebra C^* de matrices finitas. Este resultado fue obtenido por una modificación producida en el esquema en [8, Theorem 8.1], donde excluimos la condición de ortogonalidad por pares de las proyecciones P_k.

Sea $\mathbb{C}^n$ el álgebra C^* de vectores con entradas complejas $x = (x_1, ..., x_n)$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares complejos, con la multiplicación entrada a entrada, el adjunto $x^* = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$, y la norma $||x|| = max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Por medio de $\langle x, y \rangle$ denotaremos el producto interno en un espacio de Hilbert H, el símbolo $\delta_{i,j}$ es el símbolo de la delta de Kronecker, y usaremos I_k para denotar a la matriz identidad de $k \times k$. Denotaremos por $H_1 \dotplus \cdots \dotplus H_n$ la suma directa de los espacios de Hilbert $H_1, ..., H_n$, que consisten de elementos $x_1 + \cdots x_n$ con $x_k \in H_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, tales que si $\sum_{k=1}^n x_k = 0$, entonces $x_k = 0$ para toda $k = 1, 2, ..., n$.

Teorema 3.4.1. *Sea H un espacio de Hilbert y sean Q_i, P_k $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, ..., m)$ proyecciones autoadjuntas en $\mathcal{B}(H)$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $Q_i Q_j = 0$ $(i, j = 1, 2, ..., n; i \neq j)$;

(ii) $\sum_{i=1}^n Q_i = I$;

(iii) P_k $(k = 1, 2, ..., m)$ *son proyecciones unidimensionales;*

(iv) $\bigcap_{k=1}^n (ImP_k)^\perp \cap ImQ_i \neq \{0\}$, $i = 1, 2, ..., n$;

(v) Si $v_1, ..., v_m$ son los generadores con norma uno de los espacios $ImP_1, ..., ImP_m$, respectivamente, entonces los vectores $Q_i v_1, ..., Q_i v_m$ son linealmente independientes para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(H)$ generada por las proyecciones Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ y P_k $(k = 1, 2, ..., m)$, sea $S = diag\{S_i\}_{i=1}^n$ donde las S_i son matrices invertibles en $\mathbb{C}^{m\times m}$ que transforman los sistemas $\nu_i = \{Q_i v_1, Q_i v_2, ..., Q_i v_m\}$ de vectores linealmente independientes en H en sistemas ortonormales, y sea $\mathfrak{S}$ la subálgebra C^* de $\mathbb{C}^{mn\times mn}$ generada por las matrices

$$\widetilde{Q}_i = diag\{\delta_{i,j} I_m\}_{j=1}^n \text{ y } S\widetilde{P}_k S^{-1} \ (i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m),$$

donde

$$\widetilde{P}_k = \left(diag\{\delta_{k,j}\}_{j=1}^m E_{s,i}\right)_{s,i=1}^n, \ k = 1, 2, ..., m$$

y

$$E_{s,i} = \begin{pmatrix} \langle Q_i v_1, Q_i v_1\rangle & \langle Q_i v_2, Q_i v_1\rangle & \cdots & \langle Q_i v_m, Q_i v_1\rangle \\ \langle Q_i v_1, Q_i v_2\rangle & \langle Q_i v_2, Q_i v_2\rangle & \cdots & \langle Q_i v_m, Q_i v_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Q_i v_1, Q_i v_m\rangle & \langle Q_i v_2, Q_i v_m\rangle & \cdots & \langle Q_i v_m, Q_i v_m\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Entonces el mapeo σ, definido sobre los generadores de $\mathcal{A}$ por

$$\begin{aligned} Q_i &\mapsto (\delta_{i,1} \oplus \delta_{i,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{i,n}) \oplus \widetilde{Q}_i \ (i = 1, 2, ..., n), \\ P_k &\mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus S\widetilde{P}_k S^{-1} \ (k = 1, 2, ..., m), \end{aligned} \tag{3.27}$$

se extiende a un isomorfismo-$*$ del álgebra C^* $\mathcal{A}$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$.

Demostración. Sean $M_i := ImQ_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ y $L_k := ImP_k$ $(k = 1, 2, ..., m)$. Para todo k, fijamos un generador con norma uno v_k de L_k. Dividimos la prueba en varios pasos.

1) Como las proyecciones $Q_1, ..., Q_n$ y $P_1, ..., P_m$ son autoadjuntas, los subespacios cerrados $H_0 := (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_n)$ y $\mathfrak{M} := H_0^\perp$ de H son invariantes con respecto a esas proyecciones:

$$Q_i H_0 = L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_i, \ P_k H_0 = \{0\}, \ Q_i \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \ P_k \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}.$$

2) Consideremos las restricciones

$$Q_i' := Q_i|_{\mathfrak{M}} \ (i = 1, 2, ..., n) \text{ y } P_k' := P_k|_{\mathfrak{M}} \ (k = 1, 2, ..., m).$$

Por (i), $Q_i'Q_j' = \delta_{i,j}Q_i'$, y por (ii), $Q_i'Q_j'$ y $I' = Q_1' + \cdots + Q_n'$, donde I' es el operador identidad sobre $\mathfrak{M}$, lo cual implica que $\mathfrak{M} = ImQ_1' \oplus \cdots \oplus ImQ_n'$.

3) Por 1), $Q_i(\mathfrak{M}) \subset M_i' := M_i \cap \mathfrak{M}$. Por otro lado, $M_i' \subset Q_i(\mathfrak{M})$ porque $y = Q_i(y)$ para toda $y \in M_i'$. Así, $M_i' = Q_i(\mathfrak{M}) = ImQ_i'$ y por lo tanto

$$\mathfrak{M} = M_1' \oplus \cdots \oplus M_n'.$$

4) Además, concluimos que $L_k \subset \mathfrak{M}$ para toda $k = 1, ..., m$. En efecto, representando a cada elemento $l_k \in L_k$ en la forma $l_k = (\sum_{i=1}^n x_i) + y$ donde $y \in \mathfrak{M}$ y $x_i \in (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_i)$, obtenemos

$$0 = \langle l_k, x_i \rangle = ||x_i||^2 + \langle y, x_i \rangle = ||x_i||^2.$$

Así, toda $x_i = 0$ y por lo tanto, $l_k \in \mathfrak{M}$.

5) Consideremos los operadores

$$\Pi_i = (P_1 + \cdots + P_m)|_{M_i'} \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Si $g \in M_i' (= M_i \cap \mathfrak{M})$ y $\Pi_i(g) = 0$, entonces $P_1(g) + \cdots + P_m(g) = 0$. Por (iii), $P_k(g) = c_k v_k$ para todo $k = 1, 2, ..., m$, donde v_k es un generador con norma 1 del espacio ImP_k y $c_k \in \mathbb{C}$. Entonces $c_1 v_1 + ... + c_m v_m = 0$, lo cual implica que

$$c_1 Q_i v_1 + \cdots + c_m Q_i v_m = 0 \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Como los vectores $Q_i v_1, ..., Q_i v_m$ son linealmente independientes para cada $i = 1, 2, ..., n$ en vista de (v), deducimos que $c_k = 0$, y por lo tanto $P_k(g) = c_k v_k = 0$ para toda $k = 1, 2, ..., m$. Por consiguiente,

$$\Pi_i : M_i' \to L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_m \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Por otro lado, como $P_k(g) = 0$ para toda $k = 1, 2, ..., m$, concluimos que $g \in L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp$. Así,

$$g \in (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_i) \cap \mathfrak{M} = \{0\},$$

y por lo tanto, cada operador Π_i es inyectivo.

6) Aseguramos que $dimM_i' = m$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. En efecto, como $v_k \in L_k \subset \mathfrak{M}$ para $k = 1, 2, ...m$, $Q_i(\mathfrak{M}) = M_i'$ y los vectores $Q_i v_1, ..., Q_i v_m \in M_i'$ son linealmente independientes en vista de (v), concluimos que $dimM_i' \geq m$. Por otro lado, como $\Pi_i : M_i' \to L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_m$ es un operador inyectivo y $dim(L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_m) = m$ (ver (iii)), se sigue que $dimM_i' \leq m$, lo cual prueba nuestra afirmación.

7) Como $dimM_i' = m$, inferimos de (i) y (v) que el sistema

$$\nu = \{Q_1 v_1, ..., Q_1 v_m, Q_2 v_1, ..., Q_2 v_m, ..., Q_n v_1, ..., Q_n v_m\}.$$

es una base ordenada de $\mathfrak{M}$. Obviamente, las representaciones matriciales de las proyecciones $Q_i' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$ con respecto a la base ν tienen la forma

$$\widetilde{Q}_i = diag\{\delta_{i,j} I_m\}_{j=1}^n, \ i = 1, 2, ...n.$$

Además, para toda $k, j = 1, 2, ..., m$ y toda $i = 1, 2, ...n$, obtenemos

$$P_k(Q_i v_j) = \langle Q_i v_j, v_k \rangle v_k = \langle Q_i v_j, Q_i v_k \rangle v_k = \langle Q_i v_j, Q_i v_k \rangle (Q_1 v_k + \cdots + Q_n v_k).$$

De esto se sigue que las representaciones matriciales de las proyecciones $P_k' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$, relativas a la base ν, son de la forma

$$\widetilde{P}_k = \left(diag\{\delta_{k,j}\}_{j=1}^m E_{s,i}\right)_{s,i=1}^n, \ k = 1, 2, ..., m,$$

donde las matrices $E_{s,i}$ fueron descritas al enunciar el teorema.

8) Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos obtener una base ortonormal ν_0 de $\mathfrak{M}$ de la base ν. Así, existe una matriz invertible $S = diag\{S_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^{mn\times mn}$ tal que las representaciones matriciales de P_k', relativas a la base ν_0, son de la forma $S\widetilde{P}_k S^{-1}$, respectivamente. Obviamente, las representaciones matriciales de Q_i' en la base ν_0 preservan la forma de $\widetilde{Q}_i$.

9) De acuerdo a la descomposición

$$H = (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_m^\perp \cap M_n) \oplus \mathfrak{M}$$

donde, por (iv), $\bigcap_{k=1}^m (ImP_k)^\perp \cap ImQ_i \neq \{0\}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$ y $\mathfrak{M}$ es tomada con la base ν_0, obtenemos las representaciones (3.27) de los generadores Q_i y P_k del álgebra C^* $\mathcal{A}$ en el álgebra C^* $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$. Así, existe un isomorfismo-$*$ entre álgebras C^*, del álgebra C^* $\mathcal{A}$ sobre el álgebra C^* $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$, generada por los elementos

$$\begin{aligned} Q_i &\mapsto (\delta_{i,1} \oplus \delta_{i,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{i,n}) \oplus \widetilde{Q}_i \ (i = 1, 2, ..., n), \\ P_k &\mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus S\widetilde{P}_k S^{-1} \ (k = 1, 2, ..., m). \end{aligned} \tag{3.28}$$

■

Es natural llamar a las matrices $\sigma(A) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$ los símbolos de los operadores $A \in \mathcal{A}$.

Corolario 3.4.1. *Un operador $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el espacio de Hilbert H si y sólo si su símbolo $\sigma(A) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$ es invertible en $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{mn\times mn}$.*

Sea

$$\nu_0 := \{e_1^{(1)}, ..., e_m^{(1)}, e_1^{(2)}, ..., e_m^{(2)}, ..., e_1^{(n)}, ..., e^{(n)}\}$$

la base ortogonal de $\mathfrak{M}$ obtenida de la base

$$\nu = \{Q_1v_1, ..., Q_1v_m, Q_2v_1, ..., Q_2v_m, ..., Q_nv_1, ..., Q_nv_m\}$$

por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Como las proyecciones $Q_1, ..., Q_n$ son ortogonales dos a dos, podemos aplicar la ortogonalización separadamente para cada sistema $\nu_i := \{Q_iv_1, ..., Q_iv_m\}$. Así, para $i = 1, 2, ..., n$ y $k, j = 1, 2, ..., m$, obtenemos las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} e_j^{(i)} &= f_j^{(i)}/\|f_j^{(i)}\|, \quad f_j^{(i)} = Q_iv_j - \sum_{s=1}^{j-1}\langle Q_iv_j, e_s^{(i)}\rangle e_s^{(i)}, \\ \|f_j^{(i)}\|^2 &= \langle Q_iv_j, Q_iv_j\rangle - \sum_{s=1}^{j-1}|\langle e_s^{(i)}, v_j\rangle|^2 \neq 0, \\ \langle e_j^{(i)}, v_k\rangle &= \begin{cases} \dfrac{1}{\|f_j^{(i)}\|}\left(\langle Q_iv_j, Q_iv_k\rangle - \displaystyle\sum_{s=1}^{j-1}\overline{\langle e_s^{(i)}, v_j\rangle}\langle e_s^{(i)}, v_k\rangle\right) & \text{if } j < k, \\ \|f_k^{(i)}\| & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{if } j > k. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Además, por la prueba de [8, Lemma 8.5], concluimos que las entradas $\left[B_k^{(i,r)}\right]_{s,j}$ $(s, j = 1, 2, \ldots, m)$ de los bloques

$$B_k^{(i,r)} = S_i\big(\mathrm{diag}\{\delta_{k,l}\}_{l=1}^m E_{i,r}\big)S_r^{-1} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

de la matriz $S\widetilde{P}_kS^{-1} = \left[B_k^{(i,r)}\right]_{i,r=1}^n$ son dados por las fórmulas

$$\left[B_k^{(i,r)}\right]_{s,j} = \begin{cases} \overline{\langle e_s^{(i)}, v_k\rangle}\langle e_j^{(r)}, v_k\rangle, & \text{si } \ s, j = 1, 2, \ldots, k; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases} \tag{3.30}$$

Así, todo bloque $B_k^{(i,r)}$ tiene la forma

$$B_k^{(i,r)} = \begin{bmatrix} C_k^{(i,r)} & 0_{m-k} \\ 0_{m-k} & 0_{m-k} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

donde $C_k^{(i,r)} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ y su (k, k)-entrada $\beta_k^{(i,r)} = \|f_k^{(i)}\|\|f_k^{(r)}\|$ es no cero.

En el caso $m = 2$, el Teorema 3.4.1 queda reforzado por [8, Lemma 8.6]:

Lema 3.4.1. *Si $m = 2$, todas las condiciones del Teorema 3.4.1 se satisfacen y*

$$\alpha_{12}^{i_0} := \langle Q_{i_0}v_1, Q_{i_0}v_2\rangle \neq 0 \quad \textit{para algún} \quad i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

entonces la C^*-álgebra $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$ coincide con $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{2n\times 2n}$.

3.5 Cálculo simbólico para el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ e invertibilidad

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\mathcal{A}_{m,\lambda}$ como la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(L^2(\gamma_m))$ generada por los operadores $B_m(\lambda), \widetilde{B}_m(\lambda)$ y $\chi_{\eta_l} I$ $(l = 1, 2, ..., N)$. Entonces, de acuerdo al Teorema 3.3.1, para toda $A \in \mathfrak{C}_m$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un operador $A_m(\lambda) \in \mathcal{A}_{m,\lambda}$ tal que

$$(M \otimes I)A(M^{-1} \otimes I) = I \otimes_\lambda A_m(\lambda) \tag{3.32}$$

y la función cuyo valor es un operador $\lambda \mapsto A_m(\lambda)$ es de norma continua. Como el álgebra C^* $\widetilde{\Omega}_m$ es generada por las funciones cuyo valor es un operador dadas en el Teorema 3.3.1 es representada en la forma

$$\widetilde{\Omega}_m = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_{m,\lambda}, \tag{3.33}$$

el Teorema 3.3.1 y (3.32) implican el siguiente criterio de invertibilidad.

Teorema 3.5.1. *Dada $m \in \mathbb{N}$, un operador $A \in \mathfrak{C}_m$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{K}_m)$ si y sólo si los operadores $A_m(\lambda) \in \mathcal{A}_{m,\lambda}$ son invertibles en el espacio $L^2(\gamma_m)$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(A_m(\lambda))^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\gamma_m))} < \infty. \tag{3.34}$$

Para estudiar la invertibilidad de los operadores $A_m(\lambda)$, primero necesitamos investigar las imágenes de los operadores $B_m(\lambda)$ y $\widetilde{B}_m(\lambda)$.

3.5.1 Imágenes de los operadores $B_m(\lambda)$ y $\widetilde{B}_m(\lambda)$

Para calcular las imágenes de los operadores $B_m(\lambda)$ y $\widetilde{B}_m(\lambda)$ seguiremos en general el esquema de [12]. Por [11, Chapter 1, Lemma 4.10], tenemos que si $P(t)$ es una familia de proyecciones sobre un espacio de Hilbert H continuamente dependiente, en la topología norma, de un parámetro real t corriendo a través de un conjunto conexo de $\mathbb{R}$, entonces todos los espacios $P(t)H$ son isomorfos; en particular, todas las imágenes de $P(t)$ tienen las mismas dimensiones. Como las proyecciones $B_m(\lambda)$ y $\widetilde{B}_m$ son de norma continuamente dependiente de $\lambda \in \mathbb{R}$ por el Teorema 3.3.1, tenemos que

$$\dim B_m(\lambda) = \dim B_m(0), \qquad \dim \widetilde{B}_m(\lambda) = \dim \widetilde{B}_m(0).$$

Vamos a probar que $B_m(0)$ y $\widetilde{B}_m(0)$ son proyecciones unidimensionales y entonces todas las proyecciones $B_m(\lambda)$ y $\widetilde{B}_m(\lambda)$ son unidimensionales. Para ésto usaremos el Lema 3.1.1.

Consideramos una generalización de [12, Theorem 3.8] y [10, Proposition 9.2] para el caso de sectores $\mathbb{K}_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.5.1. *Para $\lambda = 0$ y toda $m \in \mathbb{N}$, tenemos*

$$ImB_m(0) = span\left\{\frac{\chi_{\gamma_m h^{-1}}}{\sqrt{\pi/m}}\right\} \qquad y \qquad Im\widetilde{B}_m(0) = span\left\{\frac{\chi_{\gamma_m h}}{\sqrt{\pi/m}}\right\},$$

donde $h(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{T}$ y χ_{γ_m} es la función característica del arco $\gamma_m = \{e^{i\tau} : \tau \in [0, \pi/m]\}$.

Demostración. Como la función Γ es analítica en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ y tiene polos de orden uno en los puntos $0, -1, -2, ...$, deducimos del Lema 3.1.1 que

$$E(0)h^n = (-i)^{|n|}h^n, \qquad E(0)^{-1}h^n = i^{|n|}h^n \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Entonces, por el Teorema 3.3.1, obtenemos

$$S(0)h^n = E(0)^{-1}h^{-2}E(0)h^n = (-i)^{|n|}i^{|n-2|}h^{n-2},$$
$$S^*(0)h^n = E(0)^{-1}hE(0)h^n = (-i)^{|n|}i^{|n+2|}h^{n+2},$$

lo cual implica que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$S(0)h^n = \begin{cases} -h^{n-2}, & n \neq 1, \\ h^{n-2} & n = 1, \end{cases} \qquad S^*(0)h^n = \begin{cases} -h^{n+2}, & n \neq -1, \\ h^{n+2} & n = -1, \end{cases}$$

Dada $f \in L^2(\mathbb{T})$, calcularemos $B_m(0)(\chi_{\gamma_m} f)$. Representando la función χ_{γ_m} por la serie convergente en $L^2(\mathbb{T})$

$$\chi_{\gamma_m} f = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^k\rangle h^k,$$

donde $h(t) = t$ para toda $t \in \mathbb{T}$, inferimos de $\langle\chi_{\gamma_m} f, h^k\rangle = \langle\chi_{\gamma_m} fh^2, h^{k+2}\rangle$ que

$$\begin{aligned}
S^*(0)(\chi_{\gamma_m} f) &= S^*(0)\Big(\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^k\rangle h^k\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^k\rangle S^*(0)(h^k) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^k\rangle h^{k+2} + \frac{1}{2\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\chi_{\gamma_m} fh^2, h^{k+2}\rangle h^{k+2} + \frac{2}{2\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^k\rangle h^{k+2} + \frac{1}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h \\
&= -\chi_{\gamma_m} fh^2 + \frac{1}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h.
\end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta la igualdad $\sum_{k=0}^{m-1}[\varepsilon_m^{-k}V_m^k h] = mh$ y que $V_m^k(\chi_{\gamma_m} fh^2 = 0$ si $1 \leq k \leq m-1$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\chi_{\gamma_m} \sum_{k=0}^{m-1} \Big[\varepsilon_m^{-k} V_m^k S^*(0)(\chi_{\gamma_m} f)\Big] \\
&\quad = \chi_{\gamma_m} \sum_{k=0}^{m-1} \Big[\varepsilon_m^{-k} V_m^k \Big(-\chi_{\gamma_m} f h^2 + \frac{1}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h\Big)\Big] \\
&\quad = -\chi_{\gamma_m} \sum_{k=0}^{m-1} \Big[\varepsilon_m^{-k} V_m^k \Big(\chi_{\gamma_m} f h^2\Big)\Big] + \chi_{\gamma_m} \sum_{k=0}^{m-1} \Big[\varepsilon_m^{-k} V_m^k \Big(\frac{1}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h\Big)\Big] \\
&\quad = -\chi_{\gamma_m} f h^2 + \frac{1}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle \chi_{\gamma_m} \sum_{k=0}^{m-1} \big[\varepsilon_m^{-k} V_m^k h\big] \\
&\quad = -\chi_{\gamma_m} f h^2 + \frac{m}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle \chi_{\gamma_m} h.
\end{aligned}
$$

De manera análoga, considerando las igualdades $\langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h^k\rangle = \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{k-2}\rangle$ y $\langle \chi_{\gamma_m} h, h^k\rangle = \langle \chi_{\gamma_m} h^{-1}, h^{k-2}\rangle$, deducimos que

$$
\begin{aligned}
S(0)(\chi_{\gamma_m} f h^2) &= S(0)\Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h^k\rangle h^k\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h^k\rangle S(0)(h^k) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h^k\rangle h^{k-2} + \frac{1}{2\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h\rangle h^{-1} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h^k\rangle h^{k-2} + \frac{2}{2\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f h^2, h\rangle h^{-1} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{k-2}\rangle h^{k-2} + \frac{1}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h^{-1} \\
&= -\chi_{\gamma_m} f + \frac{1}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h^{-1}.
\end{aligned}
$$

y también considerando que $\langle \chi_{\gamma_m} h, h\rangle = \pi/m$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
S(0)(\chi_{\gamma_m} h) &= S(0)\Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} h, h^k\rangle h^k\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} h, h^k\rangle S(0)(h^k) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \langle \chi_{\gamma_m} h, h^k\rangle h^{k-2} + \frac{1}{2\pi} \langle \chi_{\gamma_m} h, h\rangle h^{-1} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} h, h^k\rangle h^{k-2} + \frac{2}{2\pi} \langle \chi_{\gamma_m} h, h\rangle h^{-1} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi_{\gamma_m} h^{-1}, h^{k-2}\rangle h^{k-2} + \frac{1}{\pi} \langle \chi_{\gamma_m} h, h\rangle h^{-1} \\
&= -\chi_{\gamma_m} h^{-1} + \frac{h^{-1}}{m}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\chi_{\gamma_m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\varepsilon_m^k V_m^k S(0)\Big(-\chi_{\gamma_m} f h^2+\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h\Big)\Big]\\
&\quad=\chi_{\gamma_m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\varepsilon_m^k V_m^k\Big(S(0)\Big(-\chi_{\gamma_m} f h^2\Big)+S(0)\Big(\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h\Big)\Big)\Big]\\
&\quad=\chi_{\gamma_m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\varepsilon_m^k V_m^k\Big(S(0)\Big(-\chi_{\gamma_m} f h^2\Big)+\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle S(0)(\chi_{\gamma_m} h)\Big)\Big]\\
&\quad=\chi_{\gamma_m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\varepsilon_m^k V_m^k\Big(\chi_{\gamma_m} f-\frac{1}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle h^{-1}\Big)\Big]\\
&\qquad+\chi_{\gamma_m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\varepsilon_m^k V_m^k\Big(\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\Big(-\chi_{\gamma_m} h^{-1}+\frac{1}{m}\,h^{-1}\Big)\Big)\Big]\\
&\quad=\chi_{\gamma_m} f-\frac{1}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m}\sum_{k=0}^{m-1}\big[\varepsilon_m^k V_m^k h^{-1}\big]\\
&\qquad-\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h^{-1}+\frac{1}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m}(t)\sum_{k=0}^{m-1}\big[\varepsilon_m^k V_m^k h^{-1}\big]\\
&\quad=\chi_{\gamma_m} f-\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h^{-1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, deducimos que

$$\begin{aligned}
B_m(0)(\chi_{\gamma_m} f)&=\chi_{\gamma_m} f-\chi_{\gamma_m} f+\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h^{-1}\\
&=\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h^{-1},
\end{aligned}$$

lo cual implica que el espacio de Hilbert $\mathrm{Im}B_m(0)\subset L^2(\gamma_m)$ es unidimensional. Más aún, inferimos la primera fórmula del teorema, donde la función $t\mapsto\chi_{\gamma_m}(t)t^{-1}/\sqrt{\pi/m}$ es un generador con norma uno de $\mathrm{Im}B_m(0)$.

Como $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}=CB_{\mathbb{K}_m}C$, donde el operador C es tal que $Cf=\overline{f}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_m(0)(\chi_{\gamma_m} f)&=CB_m(0)C(\chi_{\gamma_m} f)=CB_m(0)(\chi_{\gamma_m}\overline{f})\\
&=C\Big(\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m}\overline{f}, h^{-1}\rangle\chi_{\gamma_m} h^{-1}\Big)=\frac{m}{\pi}\langle\chi_{\gamma_m} f, h\rangle\chi_{\gamma_m} h,
\end{aligned}$$

lo cual implica que el espacio de Hilbert $\mathrm{Im}\widetilde{B}_m(0)\subset L^2(\gamma_m)$ es unidimensional. Esto nos da la segunda fórmula del teorema, donde la función $t\mapsto\chi_{\gamma_m}(t)t/\sqrt{\pi/m}$ es un generador con norma uno de $\mathrm{Im}\widetilde{B}_m(0)$. ■

El siguiente Lema es una generalización de [12, Proposition 3.10] y de [10, Lemma 9.3] para el caso de sectores $\mathbb{K}_m$ para cualquier $m\in\mathbb{N}$. Consideramos $\mathbb{T}_+:=\mathbb{T}\cap\Pi$.

Lema 3.5.1. *Para toda $\lambda\in\mathbb{R}$ y toda $m\in\mathbb{N}$, los espacios $\mathrm{Im}B_m(\lambda)$ e $\mathrm{Im}\widetilde{B}_m(\lambda)$ son unidimensionales y sus generadores con norma uno son dados para toda $t\in\mathbb{T}$, respectivamente,* *por*

$$g_{m,\lambda}(t) = \Big(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\Big)^{\frac{1}{2}} \chi_{\gamma_m}(t) t^{i\lambda-1},$$
$$\widetilde{g}_{m,\lambda}(t) = \Big(\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda/m}-1}\Big)^{\frac{1}{2}} \chi_{\gamma_m}(t) t^{1-i\lambda},$$

donde, para $\lambda = 0$,

$$\Big(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda/m}-1}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi/m}}.$$

Además, las funciones

$$t \mapsto \Big(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\Big)^{\frac{1}{2}} t^{i\lambda-1} \qquad y \qquad t \mapsto \Big(\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda/m}-1}\Big)^{\frac{1}{2}} t^{1-i\lambda}$$

son ortogonales en el espacio $L^2(\mathbb{T}_+)$ *para toda* $m \in \mathbb{N}$ *y toda* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. De la igualdad $(M \otimes I)B_m(M^{-1} \otimes I) = I \otimes_\lambda B_m(\lambda)$ obtenemos

$$(I \otimes_\lambda B_m(\lambda))(L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T})) = (M \otimes I)(\mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)),$$

donde las funciones en $\mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)$ son consideradas como elementos del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2(\mathbb{T})$ después de su extensión por cero al conjunto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}_m$. Luego, si $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)$, entonces existe $g \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$[(M \otimes I)f](\lambda, t) = [(I \otimes_\lambda B_m(\lambda))g](\lambda, t) = [B_m(\lambda)g(\lambda, \cdot)](t), \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Consecuentemente, $[(M \otimes I)f](\lambda, \cdot) \in ImB_m(\lambda)$ para todo $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)$. Tomando $h_0(z) = \chi_{\mathbb{K}_m}(z)(z+i)^{-2} \in \mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)$, y aplicando [17, Formula 2.19], inferimos por analogía con [12, Proposition 3.10] y [10, Lemma 9.3], obtenemos que para $(\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}[(M \otimes I)h_0](\lambda, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} \chi_{\gamma_m}(t)(rt+i)^{-2} r^{-i\lambda} dr \\ &= \frac{\chi_{\gamma_m}(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} (rt+i)^{-2} r^{-i\lambda} dr \\ &= \frac{\chi_{\gamma_m}(t)}{\sqrt{2\pi}} i^{-i\lambda-1} t^{i\lambda-1} B(1-i\lambda, 1+i\lambda),\end{aligned}$$

donde $B(\cdot,\cdot)$ es la función Beta. Por lo tanto, la función $t \mapsto \chi_{\gamma_m}(t)t^{i\lambda-1}$ pertenece a $\mathrm{Im}B_m(\lambda)$. Pero como el espacio $\mathrm{Im}B_m(\lambda)$ es unidimensional, concluimos que

$$\mathrm{Im}B_m(\lambda) = \mathrm{span}\{\chi_{\gamma_m} h^{i\lambda-1}\}.$$

donde $h(t) = t$ para toda $t \in \mathbb{T}$.

Ahora vamos a calcular $\|\chi_\gamma t^{i\lambda-1}\|_{L^2(\mathbb{T})}$.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\| \chi_\gamma t^{i\lambda-1} \|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_\gamma t^{i\lambda-1}\overline{t^{i\lambda-1}}|dt| = \int_\gamma t^{i\lambda-1}(\bar{t})^{\overline{i\lambda-1}}|dt| \\ &= \int_\gamma t^{i\lambda-1}(t^{-1})^{-i\lambda-1}|dt| = \int_\gamma t^{i\lambda-1}t^{i\lambda+1}|dt| \\ &= \int_\gamma t^{2i\lambda}|dt| = \int_0^{\frac{\pi}{m}}(e^{i\theta})^{2i\lambda}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{m}} e^{-2\lambda\theta}d\theta = \frac{-1}{2\lambda}(e^{-2\lambda\pi/m}-1) \\ &= \frac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda\pi/m})\end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, entonces:

$$\| \chi_\gamma t^{-1} \|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \int_\gamma t^{-1}\overline{t^{-1}}|dt| = \int_\gamma |dt| = \frac{\pi}{m}.$$

De lo cual tenemos

$$\| \chi_\gamma t^{i\lambda-1} \|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \begin{cases} \sqrt{(1-e^{-2\pi\lambda/m})/(2\lambda)}, & \text{si } \lambda \in \mathbb{R}\setminus 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{m}}, & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

De esto se sigue que la función $g_{m,\lambda}$ es un generador con norma uno del espacio unidimensional $\mathrm{Im}B_m$.

De la misma manera, de la relación $(M\otimes I)\widetilde{B}_m(M^{-1}\otimes I) = I\otimes_\lambda \widetilde{B}_m(\lambda)$ obtenemos

$$(I\otimes_\lambda \widetilde{B}_m(\lambda))(L^2(\mathbb{K}_m) = (M\otimes I)(\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_m)),$$

donde las funciones en $\widetilde{A}^2(\mathbb{K}_m)$ extendidas por cero al conjunto $\mathbb{C}\setminus\mathbb{K}_m$ también son consideradas como elementos del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+, rdr)\otimes L^2(\mathbb{T})$. Por lo tanto, si $f\in\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_m)$, entonces $[(M\otimes I)f](\lambda,\cdot)\in \mathrm{Im}\widetilde{B}_m(\lambda)$. Además, para $h_0 = \chi_{\mathbb{K}_m}(z)(z+i)^{-2}$, tenemos que $\overline{h_0}\in\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_m)$. Del caso anterior, deducimos que para $(\lambda,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}[(M\otimes I)\overline{h_0}](\lambda,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+}\chi_{\gamma_m}(t)\overline{(rt+i)^{-2}}r^{-i\lambda}dr \\ &= \overline{[(M\otimes I)h_0](-\lambda,t)}.\end{aligned}$$

Como ya hemos probado, existe $c\in\mathbb{C}\setminus 0$ tal que

$$[(M\otimes I)h_0](-\lambda,t) = cg_{m,-\lambda}(t).$$

De lo cual inferimos que $\overline{g_{m,-\lambda}}\in\mathrm{Im}\widetilde{B}_m(\lambda)$. Entonces la función $\widetilde{g}_{m,\lambda} := \overline{g_{m,-\lambda}}$ es el generador con norma uno del espacio $\mathrm{Im}\widetilde{B}_m(\lambda)$.

Finalmente, para toda $m\in\mathbb{N}$ y toda $\lambda\in\mathbb{R}$ inferimos que

$$\int_{\mathbb{T}_+}\left(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\right)^{1/2} t^{i\lambda-1}\overline{\left(\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda/m}-1}\right)^{1/2} t^{1-i\lambda}}|dt| = \frac{\lambda}{\sinh(\pi\lambda/m)}\int_0^\pi e^{-2i\theta}d\theta = 0,$$

lo cual nos da la ortogonalidad de las funciones en $L^2(\mathbb{T}_+)$. ∎

3.5.2 Test de condiciones del Teorema 3.4.1

Definimos los siguientes operadores en el álgebra C^* $\mathcal{B}(L^2(\gamma_m))$:

$$P_1 := B_m(\lambda), \qquad P_2 := \widetilde{B}_m(\lambda), \qquad Q_l := \chi_{\eta_l} I \qquad (l = 1, 2, ..., N).$$

Aplicaremos el Teorema 3.4.1 al álgebra C^*

$$\mathcal{A}_{m,\lambda} := \text{alg}\{B_m(\lambda), \widetilde{B}_m(\lambda), Q_l : l = 1, 2, ..., N\} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m)),$$

para lo cual debemos ver que se cumplen las hipótesis.

Claramente, las Q_l son proyecciones ortogonales que satisfacen las condiciones

$$Q_l Q_j = \delta_{l,j} Q_j, \qquad \sum_{l=1}^{N} Q_l = I,$$

lo cual nos garantiza las condiciones $i)$ y $ii)$. Por Teorema 3.2.1 y Teorema 3.3.1, tenemos que $B_m(\lambda)$ y $\widetilde{B}_m(\lambda)$ son proyecciones autoadjuntas unidimensionales, lo cual nos satisface $iii)$.

Como todo espacio $\text{Im}\chi_{\eta_l} I$ tiene dimensión infinita, existe $g \in \text{Im}\chi_{\eta_l} I$ tal que $0 \neq g \in \{\chi_{\eta_l} g_{m,\lambda}, \chi_{\eta_l} \widetilde{g}_{m,\lambda}\}^{\perp}$. Entonces, para toda $l = 1, 2, ..., N$,

$$0 \neq g \in (\text{Im}P_1)^{\perp} \cap (\text{Im}P_2)^{\perp} \cap \text{Im}Q_l,$$

y así tenemos la condición $iv)$.

Fijemos $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos la combinación lineal $a g_{m,\lambda} + b \widetilde{g}_{m,\lambda}$ con constantes $a, b \in \mathbb{C}$, y supongamos que $\chi_{\eta_l}(a g_{m,\lambda} + b \widetilde{g}_{m,\lambda}) = 0$ para alguna $l = 1, 2, ..., N$. Entonces, por el Lema 3.5.1, la función

$$\phi(t) := a\Big(\frac{2\lambda}{1 - e^{-2\pi\lambda/m}}\Big)^{1/2} t^{i\lambda - 1} + b\Big(\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda/m} - 1}\Big)^{1/2} t^{1 - i\lambda}$$

es igual a cero para toda $t \in \eta_l$. Pero la función $\phi(t)$ admite continuación analítica a todo el semiplano superior Π. Como ésta función es igual a cero en el arco η_l, entonces $\phi(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{T}_+$. Por el Lema 3.5.1, las funciones $g_{m,\lambda}$ y $\widetilde{g}_{m,\lambda}$ son ortogonales en el espacio $L^2(\mathbb{T}_+)$, entonces $a = b = 0$. Por lo tanto, las funciones $g_{m,\lambda}$ y $\widetilde{g}_{m,\lambda}$ son linealmente independientes en todo arco η_l $(l = 1, 2, ...N)$, y entonces tenemos la condición $v)$.

3.5.3 Aplicación del Teorema 3.4.1

Para $m \in \mathbb{N}$ y $l = 1, 2, ..., N$, consideramos los siguientes productos internos en el espacio $L^2(\gamma_m)$:

$$\alpha^l_{m,11}(\lambda) = \langle \chi_l g_{m,\lambda}, \chi_l g_{m,\lambda}\rangle, \quad \alpha^l_{m,12}(\lambda) = \langle \chi_l g_{m,\lambda}, \chi_l \widetilde{g}_{m,\lambda}\rangle,$$
$$\alpha^l_{m,21}(\lambda) = \langle \chi_l \widetilde{g}_{m,\lambda}, \chi_l g_{m,\lambda}\rangle, \quad \alpha^l_{m,22}(\lambda) = \langle \chi_l \widetilde{g}_{m,\lambda}, \chi_l \widetilde{g}_{m,\lambda}\rangle.$$

Teniendo en cuenta las igualdades $\alpha^l_{m,21}(\lambda) = \overline{\alpha^l_{m,12}(\lambda)}$ y $\alpha^l_{m,22}(\lambda) = \alpha^l_{m,11}(-\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, del Lema 3.5.1 calculamos para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
\alpha^l_{m,11}(\lambda) &= \int \chi_l(t) \left(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1} \overline{\chi_l(t) \left(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1}} |dt| \\
&= \left(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\right) \int \chi_l(t)\chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1} \overline{t}^{\overline{i\lambda-1}} |dt| \\
&= \frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}} \int \chi_l(t)\chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1}(t^{-1})^{-i\lambda-1} \\
&= \frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}} \int \chi_l(t)\chi_\gamma(t) t^{2i\lambda} |dt| = \frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}} \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} e^{2i\lambda(i\theta)} d\theta \\
&= \frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}} \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} e^{-2\lambda\theta} d\theta = \frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}} \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) e^{-2\lambda\theta}\Big|_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} \\
&= \frac{e^{-2\lambda\theta_l} - e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^l_{m,12}(\lambda) &= \int \chi_l(t) \left(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1} \overline{\chi_l(t) \left(\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda/m}-1}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_\gamma(t) t^{-i\lambda+1}} |dt| \\
&= \frac{2\lambda}{[(1-e^{-2\pi\lambda/m})(e^{2\pi\lambda/m}-1)]^{\frac{1}{2}}} \int \chi_l(t)\chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1} (\overline{t})^{\overline{-i\lambda+1}} |dt| \\
&= \frac{2\lambda}{e^{\frac{2\pi\lambda}{m}} - e^{-2\frac{\pi\lambda}{m}}} \int \chi_l(t)\chi_\gamma(t) t^{i\lambda-1}(t^{-1})^{i\lambda+1} |dt| \\
&= \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \int \chi_l(t)\chi_\gamma(t) t^{-2} |dt| \\
&= \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} e^{-2i\theta} d\theta \\
&= \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \left(\frac{1}{-2i}\right) e^{-2i\theta}\Big|_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} \\
&= \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^l_{m,21}(\lambda) = \overline{\alpha^l_{m,12}(\lambda)} &= \overline{\left(\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\right)} \\
&= \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{\overline{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}}{\overline{(-2i)}} = \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}
\end{aligned}$$

$$\alpha^l_{m,22}(\lambda) = \alpha^l_{m,11}(-\lambda) = \frac{e^{2\lambda\theta_l} - e^{2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{2\pi\lambda/m} - 1}$$

Por otro lado, aplicando las igualdades

$$\alpha^l_{m,kn}(0) = \lim_{\lambda\to 0} \alpha^l_{m,kn}(\lambda),\ \ k,n = 1,2,$$

deducimos que para $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned}
\alpha^l_{m,11}(0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{e^{-2\lambda\theta_l} - e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{-2\theta_l e^{-2\lambda\theta_l} + 2\theta_{l-1} e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{-\frac{2\pi}{m} e^{-2\pi\lambda/m}} \\
&= \frac{2(\theta_l - \theta_{l-1})}{\frac{2\pi}{m}} = \frac{\theta_l - \theta_{l-1}}{\pi/m} \\
\alpha^l_{m,12}(0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\frac{\pi}{m}\cosh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i} \\
&= \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2\pi i/m} \\
\alpha^l_{m,21}(0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})} \frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i} = \frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2\pi i/m} \\
\alpha^l_{m,22}(0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{e^{2\lambda\theta_l} - e^{2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} = \frac{\theta_l - \theta_{l-1}}{\pi/m}
\end{aligned}$$

Como las proyecciones $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ son ortogonales disjuntas dos a dos, tomando $v_{m,\lambda,1} := g_{m,\lambda}$ y $v_{m,\lambda,2} := \widetilde{g}_{m,\lambda}$, inferimos de (3.29) que para $l = 1, 2, ..., N$,

$$\begin{aligned}
e^{(l)}_{m,\lambda,1} &= \frac{Q_l v_{m,\lambda,1}}{\big(\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{1/2}}, \\
e^{(l)}_{m,\lambda,2} &= \frac{Q_l v_{m,\lambda,2} - \big(\alpha^l_{m,21}(\lambda)/\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big) Q_l v_{m,\lambda,1}}{\big(\alpha^l_{m,22}(\lambda) - |\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{1/2}},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde el denominador no cero $\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\|$ de $e^{(l)}_{m,\lambda,2}$ es calculado por la regla

$$\big\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\big\| = \big(\alpha^l_{m,22}(\lambda) - |\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{1/2}.$$

Entonces para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\|^2\\
&= \frac{e^{2\lambda\theta_j}-e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1} - \left(\left|\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}\frac{e^{2i\theta_j}-e^{2i\theta_{j-1}}}{2i}\right|^2 \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\right)\\
&= \frac{e^{2\lambda\theta_j}-e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1} - \left(\frac{\lambda^2}{4\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}\left|e^{2i\theta_j}-e^{2i\theta_{j-1}}\right|^2 \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\right)\\
&= \frac{e^{2\lambda\theta_j}-e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1} - \left(\frac{\lambda^2(e^{2i\theta_j}-e^{2i\theta_{j-1}})(e^{-2i\theta_j}-e^{-2i\theta_{j-1}})}{4\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})} \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\right)\\
&= \frac{e^{2\lambda\theta_j}-e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1} - \left(\frac{\lambda^2(2-e^{2i(\theta_j-\theta_{j-1})}-e^{-2i(\theta_j-\theta_{j-1})})}{4\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})} \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\right)\\
&= \frac{e^{2\lambda\theta_j}-e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1} - \left(\frac{\lambda^2(-4\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))}{4\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})} \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\right)\\
&= \frac{e^{2\lambda\theta_j}-e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1} - \frac{\lambda^2(-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}})\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}\\
&= \frac{-4\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})-(e^{2\pi\lambda/m}-1)\lambda^2(-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{2\pi\lambda/m}-1)(e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}})\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}
\end{aligned}
$$

Pero como $\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m}) = \frac{-(e^{2\pi\lambda/m}-1)(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{4}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&||f^{(l)}_{m,\lambda,2}||^2\\
&= \frac{\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))(e^{2\pi\lambda/m}-1)(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{2\pi\lambda/m}-1)(e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}})\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}\\
&\qquad - \frac{(e^{2\pi\lambda/m}-1)\lambda^2(-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{2\pi\lambda/m}-1)(e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}})\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}\\
&= \frac{\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))(e^{-2\pi\lambda/m}-1)-\lambda^2(-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}})\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}\\
&= \frac{\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))-\lambda^2(-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))}{\frac{e^{-2\lambda\theta_j}-e^{-2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})}\\
&= \frac{\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))-\lambda^2(-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))}{\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})\alpha^j_{11}(\lambda)}\\
&= \frac{\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))+\lambda^2(\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))}{\sinh^2(\frac{\pi\lambda}{m})\alpha^j_{11}(\lambda)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
||f^{(l)}_{m,\lambda,2}|| = \frac{\left[\sinh^2(\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}))+\lambda^2(\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1})))\right]^{\frac{1}{2}}}{|\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})|[\alpha^j_{11}(\lambda)]^{\frac{1}{2}}}
$$

Ahora para $\lambda = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|f^{(l)}_{m,0,2}\| &= \left[\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\pi/m} - \left(\left|\frac{e^{2i\theta_j}-e^{2i\theta_{j-1}}}{2\pi i/m}\right|^2 \Big/ \frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\pi/m}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\pi/m} - \left(\frac{-4\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1}))}{4\pi^2/m^2} \Big/ \frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\pi/m}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\pi/m} - \frac{-\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1}))}{\pi(\theta_j-\theta_{j-1})/m}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\pi/m} + \frac{\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1}))}{\pi(\theta_j-\theta_{j-1})/m}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{(\theta_j-\theta_{j-1})^2+\sinh^2(i(\theta_j-\theta_{j-1}))}{\pi(\theta_j-\theta_{j-1})/m}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

De (3.35), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle e^{(l)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,1}\rangle = \langle Q_l v_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,1}\rangle \big(\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{-1/2} = \big(\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{1/2}, \\
&\langle e^{(l)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,2}\rangle = \langle Q_l v_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,2}\rangle \big(\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{-1/2} = \alpha^l_{m,12}(\lambda)\big(\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{-1/2}, \\
&\langle e^{(l)}_{m,\lambda,2}, v_{m,\lambda,1}\rangle = 0, \\
&\langle e^{(l)}_{m,\lambda,2}, v_{m,\lambda,2}\rangle = \big(\alpha^l_{m,22}(\lambda) - |\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda)\big)^{1/2} = \big\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\big\|.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Tomando $P_1 = B_m(\lambda), P_2 = \widetilde{B}_m(\lambda)$ y siguiendo el Teorema 3.4.1 y (3.30), definimos las matrices $M_m(\lambda)$, $\widetilde{M}_m(\lambda) \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ por

$$
\begin{aligned}
M_m(\lambda) &:= S\widetilde{P}_1 S^{-1} = \big[B^{(l,r)}_{m,\lambda,1}\big]^N_{l,r=1}, \quad \widetilde{M}_m(\lambda) := S\widetilde{P}_2 S^{-1} = \big[\widetilde{B}^{(l,r)}_{m,\lambda,2}\big]^N_{l,r=1}, \\
B^{(l,r)}_{m,\lambda,1} &:= \begin{bmatrix} \overline{\langle e^{(l)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,1}\rangle}\langle e^{(r)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,1}\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
B^{(l,r)}_{m,\lambda,2} &:= \begin{bmatrix} \overline{\langle e^{(l)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(r)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,2}\rangle & \overline{\langle e^{(l)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(r)}_{m,\lambda,2}, v_{m,\lambda,2}\rangle \\ \overline{\langle e^{(l)}_{m,\lambda,2}, v_{m,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(r)}_{m,\lambda,1}, v_{m,\lambda,2}\rangle & \overline{\langle e^{(l)}_{m,\lambda,2}, v_{m,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(r)}_{m,\lambda,2}, v_{m,\lambda,2}\rangle \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Sea $e_{m,\lambda,(l-1)m+k} = e^{(l)}_{m,\lambda,k}$ para toda $l = 1, 2, ..., N$ y $k = 1, 2$. Entonces, por (3.36) y (3.37), las entradas de las matrices (3.37) para $\lambda \in \mathbb{R}$ son dadas por

$$
\begin{aligned}
[M_m(\lambda)]_{s,j} &= \langle B_m(\lambda)e_{m,\lambda,j}, e_{m,\lambda,s}\rangle \\
&= \begin{cases} \sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)\alpha^r_{m,11}(\lambda)} & \text{si } j = 2l-1,\ s = 2r-1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\
[\widetilde{M}_m(\lambda)]_{s,j} &= \langle \widetilde{B}_m(\lambda)e_{m,\lambda,j}, e_{m,\lambda,s}\rangle \\
&= \begin{cases} \alpha^l_{m,12}(\lambda)\overline{\alpha^r_{m,12}(\lambda)}/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)\alpha^r_{m,11}(\lambda)} & \text{si } j = 2l-1,\ s = 2r-1, \\ (\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)})\|f^{(r)}_{m,\lambda,2}\| & \text{si } j = 2l-1,\ s = 2r, \\ (\overline{\alpha^r_{m,12}(\lambda)}/\sqrt{\alpha^r_{m,11}(\lambda)})\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}(\lambda)\| & \text{si } j = 2l,\ s = 2r-1, \\ \|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\|\ \|f^{(r)}_{m,\lambda,2}\| & \text{si } j = 2l,\ s = 2r, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

donde $\alpha^l_{m,kn}(\lambda)$ para $k, n = 1, 2$ y $\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\|$ son definidas anteriormente y $s, j = 1, 2, \ldots, 2N$.

Ahora calculamos los siguientes límites:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \alpha^1_{m,11}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{-2\lambda\theta_1} - e^{-2\lambda\theta_0}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{-2\lambda\theta_1} - 1}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = 1 \\
\lim_{\lambda\to-\infty} \alpha^1_{m,11}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{e^{-2\lambda\theta_1} - 1}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{e^{\lambda(2\pi/m - 2\theta_1)} - e^{2\pi\lambda/m}}{1 - e^{2\pi\lambda/m}} = 0 \\
\lim_{\lambda\to\infty} \alpha^N_{m,11}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{-2\lambda\theta_N} - e^{-2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{-2\pi\lambda/m} - e^{-2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = 0 \\
\lim_{\lambda\to-\infty} \alpha^N_{m,11}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{e^{-2\pi\lambda/m} - e^{-2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{1 - e^{\lambda(2\pi/m - 2\theta_{N-1})}}{1 - e^{2\pi\lambda/m}} = 1 \\
\lim_{\lambda\to\infty} \alpha^1_{m,22}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{2\lambda\theta_1} - e^{2\lambda\theta_0}}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{2\lambda\theta_1} - 1}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{\lambda(2\theta_1 - 2\pi/m)} - e^{-2\pi\lambda/m}}{1 - e^{-2\pi\lambda/m}} = 0 \\
\lim_{\lambda\to-\infty} \alpha^1_{m,22}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{e^{2\lambda\theta_1} - 1}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} = 1 \\
\lim_{\lambda\to\infty} \alpha^N_{m,22}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{2\lambda\theta_N} - e^{2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{2\pi\lambda/m} - e^{2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1 - e^{\lambda(2\theta_{N-1} - 2\pi/m)}}{1 - e^{-2\pi\lambda/m}} = 1 \\
\lim_{\lambda\to-\infty} \alpha^N_{m,22}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{e^{2\pi\lambda/m} - e^{2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{2\pi\lambda/m} - 1} = 0
\end{aligned}
$$

En los límites que a continuación presentamos, consideramos $1 < l < N$:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\alpha^l_{m,11}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}=0$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty}\alpha^l_{m,11}(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{e^{\lambda(2\pi/m-2\theta_l)}-e^{\lambda(2\pi/m-2\theta_{l-1})}}{1-e^{2\pi\lambda/m}}=0$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\alpha^l_{m,22}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{e^{2\lambda\theta_l}-e^{2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{e^{\lambda(2\theta_l-2\pi/m)}-e^{\lambda(2\theta_{l-1}-2\pi/m)}}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}=0$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty}\alpha^l_{m,22}(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{e^{2\lambda\theta_l}-e^{2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{2\pi\lambda/m}-1}=0$$

Ahora consideramos $1\leq l\leq N$ y aplicamos la regla de L'Hopital donde sea necesario y aplicable:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\alpha^l_{m,12}(\lambda)&=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\\&=\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\\&=\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{2}{\frac{2\pi}{m}e^{\pi\lambda/m}+\frac{\pi}{m}e^{-\pi\lambda/m}}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to-\infty}\alpha^l_{m,12}(\lambda)&=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\\&=\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\\&=\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{-2\lambda}{e^{-\pi\lambda/m}-e^{\pi\lambda/m}}\\&=\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{-2}{-\frac{\pi}{m}e^{-\pi\lambda/m}-\frac{\pi}{m}e^{\pi\lambda/m}}\\&=\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{2}{\frac{\pi}{m}e^{-\pi\lambda/m}+\frac{\pi}{m}e^{\pi\lambda/m}}=0\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\alpha^l_{m,21}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}=\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}=0$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\alpha^l_{m,21}(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}=\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}=0$$

Ahora vamos a calcular $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\left(\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)}\right)$ con $1\leq l\leq N$.

Primero notemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)} &= \frac{\lambda}{\sinh(\frac{\pi\lambda}{m})}\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}/\sqrt{\frac{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}}\\
&= \frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\frac{\lambda e^{-\pi\lambda/m}}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{2\lambda\theta_{l-1}}(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{e^{2\lambda(\theta_{l-1}-\theta_l)}-1}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\frac{\lambda e^{-\pi\lambda/m}e^{\lambda\theta_{l-1}}}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{2\lambda(\theta_{l-1}-\theta_l)}-1}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\frac{\lambda e^{-\lambda(\pi/m-\theta_{l-1})}}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{2\lambda(\theta_{l-1}-\theta_l)}-1}}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)}\right) = \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda(\pi/m-\theta_{l-1})}}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{2\lambda(\theta_{l-1}-\theta_l)}-1}}.$$

Pero:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda(\pi/m-\theta_{l-1})}}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{2\lambda(\theta_{l-1}-\theta_l)}-1}}\\
&\qquad= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{e^{\lambda(\pi/m-\theta_{l-1})}}\frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{2\lambda(\theta_{l-1}-\theta_l)}-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)}\right) = 0.$$

Análogamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)} &= \frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}\sqrt{\frac{e^{-2\pi\lambda/m}-1}{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\frac{\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{\lambda(2\theta_l-2\pi/m)}-e^{2\lambda\theta_l}}{1-e^{2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\frac{\lambda e^{\pi\lambda/m}}{e^{2\pi\lambda/m}-1}\sqrt{\frac{e^{\lambda(2\theta_l-2\pi/m)}-e^{2\lambda\theta_l}}{1-e^{2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{-i}\frac{(-\lambda)e^{\pi\lambda/m}}{1-e^{2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{\lambda(2\theta_l-2\pi/m)}-e^{2\lambda\theta_l}}{1-e^{2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}}}\\
&= \frac{e^{-2i\theta_l}-e^{-2i\theta_{l-1}}}{i}\frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{2\lambda\theta_l}-e^{\lambda(2\theta_l+2\pi/m)}}{1-e^{2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}}}
\end{aligned}$$

Como $\lambda\to-\infty$, entonces $\lambda < 1-e^{2\pi\lambda/m}$, luego $\frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda/m}} < 1$

Entonces

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda/m}}\sqrt{\frac{e^{2\lambda\theta_l}-e^{\lambda(2\theta_l+2\pi/m)}}{1-e^{2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}}}\leq\lim_{\lambda\to-\infty}\sqrt{\frac{e^{2\lambda\theta_l}-e^{\lambda(2\theta_l+2\pi/m)}}{1-e^{2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}}}=0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\alpha^l_{m,12}(\lambda)/\sqrt{\alpha^l_{m,11}(\lambda)}\right)=0.$$

Por otro lado, vamos a calcular los límites de las normas $\|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\|$ cuando λ tiende a $\pm\infty$, con $1\leq l\leq N$.

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\|f^{(1)}_{m\lambda,2}\|=\lim_{\lambda\to\pm\infty}\sqrt{\alpha^1_{m,22}(\lambda)-(|\alpha^1_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^1_{m,11}(\lambda))},$$

Caso$(\lambda\to\infty)$. Como $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\alpha^1_{m,22}(\lambda)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\alpha^1_{m,21}(\lambda)=0$ y $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\alpha^1_{m,11}(\lambda)=1$, entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|f^{(1)}_{m,\lambda,2}\|=0$$

Caso$(\lambda\to-\infty)$.Aquí notemos que

$$\begin{aligned}|\alpha^1_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^1_{m,11}(\lambda)&=\left|\frac{e^{2i\theta_1}-1}{2i}\right|^2\left(\frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\right)^2/\frac{e^{-2\lambda\theta_1}-1}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\\&=\left|\frac{e^{2i\theta_1}-1}{2i}\right|^2\frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m})^2(e^{-2\lambda\theta_1}-1)}\\&=\left|\frac{e^{2i\theta_1}-1}{2i}\right|^2\frac{4\lambda^2(1-e^{2\pi\lambda/m})}{(e^{2\pi\lambda/m}-1)^2(e^{-2\lambda\theta_1}-1)}\\&=\left|\frac{e^{2i\theta_1}-1}{2i}\right|^2\frac{4\lambda^2(1-e^{2\pi\lambda/m})}{(1-e^{2\pi\lambda/m})^2(e^{-2\lambda\theta_1}-1)}\\&=\left|\frac{e^{2i\theta_1}-1}{2i}\right|^2\frac{4\lambda^2}{(1-e^{2\pi\lambda/m})(e^{-2\lambda\theta_1}-1)}\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\dfrac{\lambda^2}{e^{-2\lambda\theta_1}-1}=0$, entonces $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}|\alpha^1_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^1_{m,11}(\lambda)=0$. Además sabemos que $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\alpha^1_{m,22}(\lambda)=1$, por lo tanto

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\|f^{(1)}_{m,\lambda,2}\|=1.$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\|f^{N}_{m,\lambda,2}\|=\lim_{\lambda\to\pm\infty}\sqrt{\alpha^N_{m,22}(\lambda)-(|\alpha^N_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^N_{m,11}(\lambda))}.$$

Caso$(\lambda \to \infty)$. Calculamos

$$
\begin{aligned}
|\alpha^n_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^N_{11}(\lambda) &= \left|\frac{e^{2i\pi/m} - e^{2i\theta_{N-1}}}{2i}\right|^2 \left(\frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m} - e^{-\pi\lambda/m}}\right)^2 / \frac{e^{-2\pi\lambda/m} - e^{-2\lambda\theta_{N-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} \\
&= \left|\frac{e^{2i\pi/m} - e^{2i\theta_{N-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)}{(e^{\pi\lambda/m} - e^{-\pi\lambda/m})^2(e^{-2\pi\lambda/m} - e^{-2\lambda\theta_{N-1}})} \\
&= \left|\frac{e^{2i\pi/m} - e^{2i\theta_{N-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)}{(1 - e^{-2\pi\lambda/m})^2(1 - e^{\lambda(2\pi/m - 2\theta_{N-1})})} \\
&= \left|\frac{e^{2i\pi/m} - e^{2i\theta_{N-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(1 - e^{-2\pi\lambda/m})}{(1 - e^{-2\pi\lambda/m})^2(e^{\lambda(2\pi/m - 2\theta_{N-1})} - 1)} \\
&= \left|\frac{e^{2i\pi/m} - e^{2i\theta_{N-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2}{(1 - e^{-2\pi\lambda/m})(e^{\lambda(2\pi/m - 2\theta_{N-1})} - 1)}
\end{aligned}
$$

de donde $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{\lambda^2}{e^{\lambda(2\pi/m-2\theta_{N-1})} - 1} = 0$, tenemos que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} |\alpha^N_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^N_{m,11}(\lambda) = 0$ y dado que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \alpha^N_{m,22}(\lambda) = 1$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f^{(N)}_{m,\lambda,2}\| = 1.$$

Caso$(\lambda \to -\infty)$. Dado que $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \alpha^N_{m,22}(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \alpha^N_{m,21}(\lambda) = 0$ y $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \alpha^N_{m,11}(\lambda) = 1$, entonces

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \|f^{(N)}_{m,\lambda,2}\| = 0.$$

En los siguientes límites consideraremos $1 < l < n$.

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\| = \lim_{\lambda\to\pm\infty} \sqrt{\alpha^l_{m,22}(\lambda) - (|\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda))}.$$

Caso$(\lambda \to \infty)$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
|\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda) &= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \left(\frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m} - e^{-\pi\lambda/m}}\right)^2 / \frac{e^{-2\lambda\theta_l} - e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} \\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2}{(e^{\pi\lambda/m} - e^{-\pi\lambda/m})^2} / \frac{e^{-2\lambda\theta_l} - e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m} - 1} \\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)}{(e^{\pi\lambda/m} - e^{-\pi\lambda/m})^2(e^{-2\lambda\theta_l} - e^{-2\lambda\theta_{l-1}})} \\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)}{(e^{\pi\lambda/m} - e^{-\pi\lambda/m})^2 e^{-2\lambda\theta_{l-1}}(e^{-2\lambda(\theta_l - \theta_{l-1})} - 1)} \\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)}{e^{2\pi\lambda/m}(1 - e^{-2\pi\lambda/m})^2 e^{-2\lambda\theta_{l-1}}(e^{-2\lambda(\theta_l - \theta_{l-1})} - 1)} \\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)}{(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)^2(e^{-2\lambda(\theta_l - \theta_{l-1})} - 1)e^{2\pi\lambda/m}e^{-2\lambda\theta_{l-1}}} \\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2}{(e^{-2\pi\lambda/m} - 1)(e^{-2\lambda(\theta_l - \theta_{l-1})} - 1)e^{\lambda(2\pi/m - 2\theta_{l-1})}}
\end{aligned}
$$

como $\lim_{\lambda\to\infty} \dfrac{\lambda^2}{e^{\lambda(2\pi/m-2\theta_{l-1})}} = 0$ tenemos que $\lim_{\lambda\to\infty} |\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda) = 0$ y dado que $\lim_{\lambda\to\infty} \alpha^l_{m,22}(\lambda) = 0$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\| = 0.$$

Caso($\lambda \to -\infty$). Análogamente al caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
|\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda) &= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \left(\frac{2\lambda}{e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m}}\right)^2 \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2}{(e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m})^2} \Big/ \frac{e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\pi\lambda/m}-1}\\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(e^{-2\pi\lambda/m}-1)}{(e^{\pi\lambda/m}-e^{-\pi\lambda/m})^2(e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}})}\\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(1-e^{2\pi\lambda/m})}{(e^{2\pi\lambda/m}-1)^2(e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}})}\\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2(1-e^{2\pi\lambda/m})}{(1-e^{2\pi\lambda/m})^2(e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}})}\\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2}{(1-e^{2\pi\lambda/m})(e^{-2\lambda\theta_l}-e^{-2\lambda\theta_{l-1}})}\\
&= \left|\frac{e^{2i\theta_l}-e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}\right|^2 \frac{4\lambda^2}{(1-e^{2\pi\lambda/m})(e^{-2\lambda(\theta_l-\theta_{l-1})}-1)e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}
\end{aligned}$$

Como $\lim_{\lambda\to-\infty} \dfrac{\lambda^2}{e^{-2\lambda\theta_{l-1}}} = 0$, tenemos que $\lim_{\lambda\to-\infty} |\alpha^l_{m,21}(\lambda)|^2/\alpha^l_{m,11}(\lambda) = 0$ y que conocemos $\lim_{\lambda\to-\infty} \alpha^l_{m,22}(\lambda) = 0$, entonces

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \|f^{(l)}_{m,\lambda,2}\| = 0.$$

De todo esto, se sigue inmediatamente la siguiente proposición, por analogía con [10, Proposition 9.4]

Proposición 3.5.2. *Si $N \geq 2$, entonces las siguientes igualdades se cumplen:*

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty}[M_m(\lambda)]_{1,1} &= 1, & \lim_{\lambda\to-\infty}[M_m(\lambda)]_{1,1} &= 0,\\
\lim_{\lambda\to\infty}[M_m(\lambda)]_{2N-1,2N-1} &= 0, & \lim_{\lambda\to-\infty}[M_m(\lambda)]_{2N-1,2N-1} &= 1,\\
\lim_{\lambda\to\pm\infty}[M_m(\lambda)]_{s,j} &= 0, & &\textit{para todos los otros } s,j = 1,2,...,2N,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty}[\widetilde{M}_m(\lambda)]_{2,2} &= 0, & \lim_{\lambda\to-\infty}[\widetilde{M}_m(\lambda)]_{2,2} &= 1,\\
\lim_{\lambda\to\infty}[\widetilde{M}_m(\lambda)]_{2N,2N} &= 1, & \lim_{\lambda\to-\infty}[\widetilde{M}_m(\lambda)]_{2N,2N} &= 0,\\
\lim_{\lambda\to\pm\infty}[\widetilde{M}_m(\lambda)]_{s,j} &= 0, & &\textit{para todos los otros } s,j = 1,2,...,2N.
\end{aligned}$$

De acuerdo a la Proposición 3.5.2, ponemos

$$M(\pm\infty) := \lim_{\lambda\to\pm\infty} M(\lambda),\ \widetilde{M}(\pm\infty) := \lim_{\lambda\to\pm\infty} \widetilde{M}(\lambda) \tag{3.39}$$

y siendo $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ tenemos lo siguiente.

Corolario 3.5.1. *Si $m \in \mathbb{N}$ y $N \geq 2$, entonces $M_m(\cdot), \widetilde{M}_m(\cdot) \in C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$.*

El Teorema 3.4.1 nos implica para el álgebra C^* $\mathcal{A}_{m,\lambda} := \mathrm{alg}\{B_m(\lambda), \widetilde{B}_m(\lambda), Q_l : l = 1, 2, ..., N\}$ el siguiente resultado.

Teorema 3.5.2. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$, el álgebra C^* $\mathcal{A}_{m,\lambda}$ es isomorfa-$*$ al álgebra C^* $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^{2N\times 2N}$, y el isomorfismo está dado sobre los generadores de $\mathcal{A}_{m,\lambda}$ por*

$$\begin{aligned} \chi_{\eta_l} I &\mapsto (\delta_{l,1} \oplus \delta_{l,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{l,N}) \oplus diag\{\delta_{l,j} I_2\}_{j=1}^N, \\ B_m(\lambda) &\mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \otimes M_m(\lambda), \\ \widetilde{B}_m(\lambda) &\mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus \widetilde{M}_m(\lambda), \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde las matrices $M_m(\lambda), \widetilde{M}_m(\lambda) \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ son por (3.37) y (3.38).

Demostración. Como mostramos antes, podemos aplicar el Teorema 3.4.1 al álgebra C^* $\mathcal{A}_{m,\lambda}$. Sabemos que $\alpha^l_{m,kj}(\lambda) \neq 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, toda $k, j = 1, 2$, toda $l = 1, 2, ..., N$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Por el Lema 3.4.1, el álgebra C^* $\mathcal{A}_{m,\lambda}$ es isomorfa al álgebra C^* $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^{2N\times 2N}$. En el caso de dos proyecciones unidimensionales $P_1 = B_m(\lambda)$ y $P_2 = \widetilde{B}_m(\lambda)$, tenemos que

$$S\widetilde{P}_1 S^{-1} = M_m(\lambda), \qquad S\widetilde{P}_2 S^{-1} = \widetilde{M}_m(\lambda).$$

Finalmente, (3.27) implica (3.40). ■

Toda función $a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ es representada en la forma

$$a(z) = \sum_{l=1}^{N} a_l \chi_{R_l}(z) \quad (z \in \mathbb{K}_m), \tag{3.41}$$

donde los a_l son constantes complejas.

Los Teoremas 3.3.1, 3.5.1 y 3.5.2 y el Corolario 3.5.1, nos implican el resultado principal de éste capítulo.

Teorema 3.5.3. *Para toda $m \in \mathbb{N}$, el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ es isomorfa-$*$ a una subálgebra C^* $\Phi_m(\mathfrak{C}_m)$ de $\mathbb{C}^N \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$, y el isomorfismo $\Phi_m : \mathfrak{C}_m \to \Phi_m(\mathfrak{C}_m)$ está dado por*

$$\begin{aligned} aI &\mapsto (a_1, ..., a_N) \oplus (\lambda \mapsto diag\{a_j I_2\}_{j=1}^N), \\ B_{\mathbb{K}_m} &\mapsto (0, ..., 0) \oplus (\lambda \mapsto M_m(\lambda)), \\ \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} &\mapsto (0, ..., 0) \oplus (\lambda \mapsto \widetilde{M}_m(\lambda)), \end{aligned} \tag{3.42}$$

donde $a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ es dada por (3.41), y las funciones cuyo valor es una matriz $M_m(\cdot), \widetilde{M}_m(\cdot)$ son definidas por (3.38) para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y por (3.39) para $\lambda = \pm\infty$. Un operador $A \in \mathfrak{C}_m$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{K}_m)$ si y sólo si su símbolo $\Phi_m(A)$ es invertible en el álgebra C^* $\Phi_m(\mathfrak{C}_m)$, es decir, si

$$\begin{aligned} [\Phi_m(A)]_k &\neq 0 \text{ para toda } k = 1, 2, ..., N; \\ \det([\Phi_m(A)](\lambda)) &\neq 0 \text{ para toda } \lambda \in \overline{\mathbb{R}}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde $[\Phi_m(A)]_k$ son la k-entradas de la función cuyo valor es un vector $[\Phi_m(A)] \in \mathbb{C}^N$ y $[\Phi_m(A)](\lambda)$ son los valores de la función $[\Phi_m(A)](\cdot) \in C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$, cuyo valor es una matriz.

Demostración. En vista del Teorema 3.3.1, el álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ es isomorfa-$*$ a la subálgebra C^* $\widetilde{\Omega}_m \subset \Omega_m$ generada por las funciones cuyo valor es un operador de norma continua $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\gamma_m))$ dadas en el Teorema 3.3.1. Por (3.33) y Teorema 3.5.1, cualquier operador $A \in \mathfrak{C}_m$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{K}_m)$ si y sólo si los operadores $A_m(\lambda) \in \mathcal{A}_{m,\lambda}$ son invertibles en el espacio $L^2(\gamma_m)$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y la condición (3.34) se satisface. De acuerdo al Teorema 3.5.2, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ el álgebra C^* $\mathcal{A}_{m,\lambda}$ es isomorfa-$*$ al álgebra C^* $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ generada por los elementos del lado derecho de (3.40), y entonces la invertibilidad de los operadores $A_m(\lambda) \in \mathcal{A}_{m,\lambda}$ es equivalente a la invertibilidad de los vectores $\Phi_m(A) \in \mathbb{C}^N$ y las matrices $[\Phi_m(A)](\lambda) \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$. Más aún, la condición (3.34) es equivalente a la condición

$$\max_{k=1,2,...,N} \left|[\Phi_m(A)]_k\right|^{-1} + \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\|\left([\Phi_m(A)](\lambda)\right)^{-1}\right\|_{\mathbb{C}^{2N\times 2N}} < \infty. \tag{3.44}$$

Por otro lado, para todo operador $A_m(\lambda) \in \mathcal{A}_{m,\lambda}$ la función cuyo valor es una matriz $\lambda \mapsto [\Phi_m(A)](\lambda)$ es continua en $\overline{\mathbb{R}}$ por el Corolario 3.5.1, lo cual implica la equivalencia de (3.43) y (3.44). Finalmente, como las matrices $[\Phi_m(A)](\lambda)$ son matrices de representación de operadores $A_m(\lambda)$ en el sistema ortonormal $\{e_{m,\lambda,k} : k = 1, 2, ..., 2N\} \subset L^2(\gamma_m)$, concluimos que el mapeo Φ_m definido inicialmente sobre los generadores del álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ se extiende a un isomorfismo del álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ sobre su imagen $\Phi_m(\mathfrak{C}_m) \subset \mathbb{C}^N \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$. ■

De (3.38) y el Teorema 3.5.3 se deduce que los símbolos $\Phi_m(A)$ y por lo tanto las condiciones de invertibilidad (3.43) dependen escencialmente del ángulo π/m del sector $\mathbb{K}_m$.

Capítulo 4

Álgebras de Operadores del tipo de Bergman en sectores con coeficientes continuos a trozos

En éste capítulo también estudiamos álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman en dominios que no tienen frontera suave y que admiten ángulos, pero ésta vez estarán generadas por operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos con discontinuidades en un sistema $\mathfrak{L}$ de rayos que comienzan en el origen y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman que actúan en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{K}_m)$ sobre los sectores abiertos $\mathbb{K}_m$; éstas álgebras las denotaremos por $\mathfrak{A}_m \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$. Aplicando los resultados obtenidos en el Capítulo 3 construiremos un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ y estableceremos un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_m$ en términos de sus símbolos.

4.1 El álgebra C^* $\mathfrak{A}_m = \mathbf{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$

Ahora vamos a estudiar el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m = \text{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ generada por la proyección de Bergman $B_{\mathbb{K}_m}$, la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$ y por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos en $\mathbb{K}_m$ con discontinuidades en $\mathfrak{L}$.

Con $PC(\mathfrak{L})$ denotaremos al conjunto de funciones continuas a trozos en el sector $\mathbb{K}_m$ con discontinuidades en el conjunto $\mathfrak{L} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{L}_j$ de rayos

$$\mathcal{L}_j = \{re^{i\theta_j} : r > 0\} \qquad (j = 1, 2, ..., N-1), \qquad 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{N-1} < \pi/m.$$

Los rayos $\mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2, ..., N-1)$ dividen al sector $\mathbb{K}_m$ en N sectores abiertos

$$R_l = \{z \in \mathbb{K}_m : \theta_{l-1} < \arg z < \theta_l\} \qquad (l = 1, 2, ..., N),$$

donde $\theta_0 =< \theta_1 < \cdots < \theta_N = \pi/m$. Tomando

$$\gamma_m := \mathbb{K}_m \cap \mathbb{T}, \qquad \eta_l := R_l \cap \mathbb{T} \qquad (l = 1, 2, ..., N),$$

vemos que $\gamma_m = \bigcup_{l=1}^{N} \eta_l$. Tomamos χ_D la función característica de un conjunto D.

4.2 Operadores compactos

Sea $\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m := \overline{\mathbb{K}}_m \cup \{\infty\}$ la compactificación a un punto del sector

$$\overline{\mathbb{K}}_m := \{z = re^{i\theta} : r \geq 0, \theta \in [0, \pi/m]\} \ (m = 1, 2, ...).$$

De (3.16) y [4, Chapter XI, Theorem 7.1] podemos deducir fácilmente lo siguiente:

Proposición 4.2.1. *Para cualquier función $a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$ y cualquier $m \in \mathbb{N}$, los conmutadores $aB_{\mathbb{K}_m} - B_{\mathbb{K}_m} aI$ y $a\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} aI$ son compactos en el espacio $L^2(\mathbb{K}_m)$.*

Demostración. Para toda $n = 1, 2, ..., 2m$, introducimos los sectores

$$\overline{\mathbb{K}}_{m,n} = \{z = re^{i\theta} : r \in [0, \infty), \theta \in [(n-1)\pi/m, n\pi/m]\}.$$

Se puede ver fácilmente que si $a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$, entonces la función

$$\widetilde{a}(z) = \begin{cases} a(ze^{-(n-1)i\pi/m}), & \text{si } z \in \overline{\mathbb{K}}_{m,n} \text{ y } n \text{ es impar}, \\ a(\overline{z}e^{in\pi/m}), & \text{si } z \in \overline{\mathbb{K}}_{m,n} \text{ y } n \text{ es par} \end{cases}$$

con $\widetilde{a}(\infty) := a(\infty)$, es continua en $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la compactificación a un punto del plano complejo $\mathbb{C}$. Entonces, por [14, Theorem 7.1], los conmutadores $\widetilde{a}S_{\mathbb{C}} - S_{\mathbb{C}}\widetilde{a}I$ y $\widetilde{a}S^*_{\mathbb{C}} - S^*_{\mathbb{C}}\widetilde{a}I$ son operadores compactos en el espacio $L^2(\mathbb{C})$. Por lo tanto, de las igualdades $V^k_m \widetilde{a}I = \widetilde{a}V^k_m$ $(k = 0, 1, ..., m-1)$ se sigue en vista de (3.16) y $\widetilde{a}|_{\mathbb{K}_m} = a$ que los operadores $aB_{\mathbb{K}_m} - B_{\mathbb{K}_m} aI$, y $a\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} aI$ son operadores compactos en $L^2(\mathbb{K}_m)$. ■

De acuerdo a [2, Section 8.2], un operador $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$ es llamado un *operador de tipo local* si los conmutadores $cA - AcI$ son compactos para toda $c \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$. Así, por la proposición 4.2.1, los operadores $B_{\mathbb{K}_m}$, $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$, y entonces todos los operadores en el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m = \text{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ son de tipo local.

Denotaremos por Λ el conjunto de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$. Se puede ver fácilmente que Λ es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}$.

Lema 4.2.1. *Las álgebras C^* alg$\{aI, B_{\mathbb{K}_m} : a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)\}$ y alg$\{aI, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)\}$ generadas por todos los operadores de multiplicación por funciones en $C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$ y por los operadores $B_{\mathbb{K}_m}$ o $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$, respectivamente, contienen a todos los operadores compactos en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$.*

Demostración. Como la transformación de similaridad $A \mapsto CAC$, con C dada por (3.1), mapea el álgebra C^* alg$\{aI, B_{\mathbb{K}_m} : a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)\}$ sobre el álgebra C^* alg$\{aI, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)\}$, es suficiente probar el lema para el álgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{A}}_m :=$ alg$\{aI, B_{\mathbb{K}_m} : a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)\}$.

Primero vamos a probar que $\widetilde{\mathfrak{A}}_m$ es un álgebra C^* irreducible, lo cual significa que las proyecciones ortogonales sobre los subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{K}_m)$ que conmutan con todos los operadores en $\widetilde{\mathfrak{A}}_m$ son únicamente 0 e I. Sea P una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{K}_m)$ la cual es invariante para todos los operadores $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}_m$, es decir, P conmuta con todos los operadores en $\widetilde{\mathfrak{A}}_m$. Como P conmuta con los operadores de multiplicación por todas las funciones continuas $a : \mathbb{K}_m \to \mathbb{C}$ con soporte compacto, se sigue (ver, por ejemplo, [16, §26, Subsection 5, Propositions IV and VI]) que P es el operador de multiplicación por una función $m \in L^\infty(\mathbb{K}_m)$. En este caso, la igualdad $P^2 = P$ implica que $m = \chi_U$, donde χ_U es la función característica de un conjunto medible $U \subset \mathbb{K}_m$. Supongamos que $\chi_U \neq 0$ a.e. en $\mathbb{K}_m$ y que $\chi_U \neq 1$ a.e. en $\mathbb{K}_m$. Entonces la medida de Lebesgue $|\mathbb{K}_m \setminus U|$ es no cero. Para una función arbitraria $f \in L^2(\mathbb{K}_m)$, tenemos que

$$B_{\mathbb{K}_m}(\chi_U f) = \chi_U B_{\mathbb{K}_m} f \tag{4.1}$$

Como $B_{\mathbb{K}_m}(\chi_U f)$ es una función analítica con ceros en el conjunto $\mathbb{K}_m \setminus U$ de medida de Lebesgue no cero (ver (4.1)), concluimos que $B_{\mathbb{K}_m}(\chi_U f) = 0$ idénticamente en $\mathbb{K}_m$. Si $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{K}_m)$ es no cero, entonces reescribiendo (4.1) en la forma

$$0 = B_{\mathbb{K}_m}(\chi_U f) = \chi_U f$$

inferimos que $f(z) = 0$ para todo $z \in U$. Como f es una función analítica no cero, todos los ceros de f en $\mathbb{K}_m$ son aislados. Entonces, $\chi_U = 0$ a.e. en $\mathbb{K}_m$, lo cual contradice nuestras suposiciones. Por lo tanto, el álgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{A}}_m$ es irreducible.

Como toda subálgebra C^* irreducible de $\mathcal{B}(H)$ que contiene un operador compacto no cero que actúa en un espacio de Hilbert H contiene a todos los operadores compactos en $\mathcal{B}(H)$ (ver, por ejemplo, [4, Theorem 5.39, pag. 126]), sólo necesitamos probar que $\widetilde{\mathfrak{A}}_m \cap \mathcal{K} \neq \{0\}$, donde $\mathcal{K}$ es el ideal de todos los operadores compactos en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$. Por la Proposición 4.2.1, $B_{\mathbb{K}_m} aI - aB_{\mathbb{K}_m} \in \mathcal{K}$ para todo $a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$. Por lo tanto, si $B_{\mathbb{K}_m} aI - aB_{\mathbb{K}_m} = 0$ para todo $a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$, entonces [16, §26, Subsection 5] implica que $B_{\mathbb{K}_m}$ es un operador de multiplicación, lo cual es imposible. Así, $\widetilde{\mathfrak{A}}_m \cap \mathcal{K} \neq \{0\}$. ■

Corolario 4.2.1. *El álgebra* C^* $\mathfrak{A}_m = alg\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ *contiene a todos los operadores compactos* $K \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$.

4.3 Aplicación del principio local de Allan-Douglas

4.3.1 Álgebras C^* cociente de $\mathfrak{A}_m$

Por el Corolario 4.2.1, el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ contiene al ideal $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{K}_m))$ de todos los operadores compactos en el álgebra C^* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$. Entonces, el álgebra C^* cociente $\mathfrak{A}_m^\pi := \mathfrak{A}_m/\mathcal{K}$ está bien definida. Para obtener un criterio Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{A}_m$ necesitamos estudiar la invertibilidad de las clases laterales $A^\pi := A + \mathcal{K}$ en el álgebra C^* cociente $\mathfrak{A}_m^\pi$. Para terminar aplicaremos el principio local de Allan-Douglas al álgebra $\mathfrak{A}_m^\pi$.

Por la Proposición 4.2.1 se sigue que $\mathcal{Z}^\pi := \{cI + \mathcal{K} : c \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)\}$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{A}_m^\pi$. Obviamente, el álgebra C^* conmutativa $\mathcal{Z}^\pi$ es (isométricamente) isomorfa-$*$ al álgebra C^* $C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$, y entonces el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}^\pi$ puede ser identificado con $\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$. Para todo punto $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$, con J_z^π denotamos el ideal bilátero cerrado del álgebra C^* $\mathfrak{A}_m^\pi$ generada por el ideal maximal

$$I_z^\pi := \{cI + \mathcal{K} : c \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m),\ c(z) = 0\} \subset \mathcal{Z}^\pi. \tag{4.2}$$

De acuerdo a la Sección 2.4, el ideal J_z^π tiene la forma

$$J_z^\pi = \{(cA)^\pi : c \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m),\ c(z) = 0,\ A \in \mathfrak{A}_m\}. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, con cada $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$ asociamos el álgebra C^* cociente $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi := \mathfrak{A}_m^\pi / J_z^\pi$.

Como un resultado del principio local de Allan-Douglas, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.1. *Un operador* $A \in \mathfrak{A}_m$ *es Fredholm en el espacio* $L^2(\mathbb{K}_m)$ *si y sólo si para todo* $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$ *la clase lateral* $A_z^\pi := A^\pi + J_z^\pi$ *es invertible en el álgebra cociente* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$.

De acuerdo a la Sección 2.4, decimos que las clases laterales $A^\pi, B^\pi \in \mathfrak{A}_m^\pi$ son localmente equivalentes en un punto $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$ si $A^\pi - B^\pi \in J_z^\pi$, y en tal caso escribimos $A^\pi \overset{z}{\sim} B^\pi$.

Para caracterizar a las álgebras locales $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ para toda $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$ necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 4.3.1. *Las clases laterales* $B_{\mathbb{K}_m}^\pi$ *y* $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}^\pi$ *son localmente equivalentes a cero en todo punto* $z \in \mathbb{K}_m$.

Demostración. Si U y V son vecindades, respectivamente, abierta y cerrada de z tal que $V \subset U \subset \overline{U} \subset \mathbb{K}_m$, entonces existe una función $f \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$ que posee las siguientes propiedades: $f|_V \equiv 1$, $f|_{U^c} \equiv 0$, $0 \leq f \leq 1$, donde $U^c = \mathbb{K}_m \setminus U$. Entonces, $B^{\pi}_{\mathbb{K}_m} \overset{z}{\sim} fB^{\pi}_{\mathbb{K}_m}fI$ y $\widetilde{B}^{\pi}_{\mathbb{K}_m} \overset{z}{\sim} f\widetilde{B}^{\pi}_{\mathbb{K}_m}fI$. Pero $fB_{\mathbb{K}_m}fI$ y $f\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}fI$ son operadores integrales con kernel acotado compactamente soportado en $\mathbb{K}_m \times \mathbb{K}_m$. Por lo tanto, los operadores son compactos, ya que son operadores Hilbert-Schmidt. ■

El estudio avanzado de las álgebras locales requiere describir el conjunto $\mathfrak{L}$ de discontinuidades para los coeficientes de operadores en el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m = \text{alg}\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$. Podemos asumir que el conjunto $\mathfrak{L}$ satisface las siguientes condiciones:

($\mathfrak{L}1$) para cada $z \in \mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$ existen números $r_z > 0$ y $n_z \in \mathbb{N}$ tales que todo disco $D(z, r)$ de radio $r \in (0, r_z)$ centrado en z es dividido por $\mathfrak{L}$ en n_z dominios con z como un punto límite común;

($\mathfrak{L}2$) si $0 \in \mathfrak{L}$, entonces existe una vecindad V_0 del punto $z = 0$ tal que el conjunto $V_0 \cap \mathfrak{L}$ consiste de un número finito de rayos que tienen sólo al punto 0 en común y forman en este punto ángulos no cero distintos dos a dos menores que π/m con $\mathbb{R}_+$;

($\mathfrak{L}3$) si $\infty \in \mathfrak{L}$, entonces existe una vecindad V_∞ del punto $z = \infty$ tal que el conjunto $\{-1/\overline{\zeta} : \zeta \in V_\infty \cap \mathfrak{L}\}$ consiste de un número finito de rayos que tienen sólo al origen como punto en común y forman en este punto ángulos no cero diferentes dos a dos menores que π/m con $\mathbb{R}_+$;

($\mathfrak{L}4$) $\partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L} = \{0, \infty\}$.

Así, para una vecindad suficientemente pequeña V_z, el conjunto $V_z \cap (\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L})$ consiste de un número finito, digamos n_z, de componentes conexas D_k cuyas cerraduras contienen a z.

4.4 Álgebras Locales (Casos fáciles)

Primero estudiamos las álgebras locales $(\mathfrak{A}_m)^{\pi}_z$ asociadas con puntos $z \in \mathbb{K}_m$. Estas álgebras son más simples que las álgebras locales $(\mathfrak{A}_m)^{\pi}_z$ para $z \in \partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$ o para $z \in \partial\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$.

Sea $\mathbb{C}^n$ el álgebra C^* de vectores con entradas en los complejos $x = (x_1, ..., x_n)$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares complejos, con la multiplicación entrada a entrada, el adjunto $x^* = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$, y la norma $||x|| = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Sea $\delta_{i,j}$ el símbolo de Kronecker. Para caracterizar las álgebras locales para $z \in \mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$ y $z \in \partial\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$, necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.4.1. *[8, Lemma 4.1] Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad y P_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ son proyecciones no cero de $\mathcal{A}$ tales que $P_iP_j = \delta_{i,j}P_i$ para $i, j = 1, ..., n$ y $P_1 + \cdots + P_n = I$, entonces la subálgebra C^* de $\mathcal{A}$ generada por los operadores $P_1, ..., P_n$ tiene la forma*

$$alg\{P_1, ..., P_n\} = \{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n : \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\}$$

y el mapeo

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \mapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

es un isomorfismo entre álgebras C^* de $alg\{P_1, ..., P_n\}$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^n$.

Si dos álgebras C^* $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son (isométricamente) isomorfas-$*$, escribiremos $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$. Del Lema 4.4.1 podemos ver que existen dos tipos de álgebras locales en el caso $z \in \mathbb{K}_m$.

Lema 4.4.2. *Para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m = alg\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$, se cumple lo siguiente:*

(i) si $z \in \mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z \cong \mathbb{C}$;

(ii) si $z \in \mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z \cong \mathbb{C}^{n_z}$, donde $n_z \in \mathbb{N}$ está dado por la condición $(\mathfrak{L}1)$.

Demostración. (i) Sea $z \in \mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$. Si $a \in PC(\mathfrak{L})$, entonces $(aI)^\pi \overset{z}{\sim} a(z)I^\pi$ porque la función a es continua en z. Del Lema 4.3.1 se sigue que $B^\pi_{\mathbb{K}_m} \overset{z}{\sim} 0$, $\widetilde{B}^\pi_{\mathbb{K}_m} \overset{z}{\sim} 0$. Así, los generadores del álgebra C^* $\mathfrak{A}^\pi_z$ tienen la forma $(aI)^\pi_z$, donde $a \in PC(\mathfrak{L})$, y entonces el mapeo dado por

$$(aI)^\pi_z \mapsto a(z) \ (a \in PC(\mathfrak{L}))$$

se extiende a un isomorfismo de álgebras C^* de $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z$ sobre $\mathbb{C}$.

(ii) Sea ahora $z \in \mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$. Nuevamente, $B^\pi_{\mathbb{K}_m} \overset{z}{\sim} 0$ y $\widetilde{B}^\pi_{\mathbb{K}_m} \overset{z}{\sim} 0$. Sea $r_z > 0$ y $n_z \in \mathbb{N}$ el número dado por la condición $(\mathfrak{L}1)$ sobre $\mathfrak{L}$. Fijemos un disco $D(z, r)$ de radio $r \in (0, r_z)$ con centro en z. Por $(\mathfrak{L}1)$, $\mathfrak{L}$ divide a $D(z, r)$ en n_z dominios D_k $(k = 1, 2, ..., n_z)$ que tienen el punto límite común z. Fijemos $a \in PC(\mathfrak{L})$ y ponemos

$$a_k(z) := \lim_{\zeta \to z, \zeta \in D_k} a(\zeta) \ (k = 1, 2, ..., n_z).$$

Sea χ_{D_k} la función característica del dominio D_k. Claramente, la función $g = a - \sum_{k=1}^{n_z} \chi_{D_k}$ es continua en z y $g(z) = 0$. Por lo tanto,

$$(aI)^\pi \overset{z}{\sim} \sum_{k=1}^{n_z} a_k(z)(\chi_{D_k} I)^\pi.$$

Así, el álgebra $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z$ es generada por las proyecciones no cero $(\chi_{D_k} I)^\pi_z$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n_z} (\chi_{D_k} I)^\pi_z = I^\pi_z, \ (\chi_{D_k} I)^\pi_z (\chi_{D_j} I)^\pi_z = \delta_{k,j} (\chi_{D_k} I)^\pi_z, \ (k, j = 1, 2, ..., n_z).$$

Como todas las proyecciones $(\chi_{D_k} I)^\pi_z$ son no cero, el Lema 4.4.1 implica que las álgebras C^* $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z$ y $\mathbb{C}^{n_z}$ son isomorfas-$*$, y el isomorfismo de álgebras C^* está dado sobre los generadores del álgebra $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z$ por

$$(aI)^\pi_z \mapsto (a_1(z), a_2(z), ..., a_{n_z}(z)).$$

■

4.5 Álgebras locales en los puntos de $\partial\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$ y $\partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$

4.5.1 Álgebras locales en los puntos de $\partial\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$

Sea Λ_m el álgebra C^* de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$ y $\Lambda^\pi_m = \Lambda_m/\mathcal{K}$. A todo punto $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$ le asignamos el ideal bilátero cerrado $\widehat{J}^\pi_z$ de Λ^π_m generado por el ideal maximal I^π_z de $\mathcal{Z}^\pi$, donde I^π_z está dado por (4.2). Por analogía con (4.3),

$$\widehat{J}^\pi_z := \{(cA)^\pi : c \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m), c(z) = 0, A \in \Lambda_m\}. \tag{4.4}$$

También introducimos las álgebras C^* cociente $(\Lambda_m)^\pi_z := \Lambda^\pi_m/\widehat{J}^\pi_z$.

Lema 4.5.1. *Consideremos el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m = alg\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}$. Si $z \in \partial\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{A}_m)^\pi_z \cong \mathbb{C}^3$.*

Demostración. Fijemos $z \in (0, \infty)$ (la prueba para $z \in \{re^{\pi i/m} : r \in (0, \infty)\}$ es análoga). Tomemos el mapeo conforme $\beta_z : \Pi \to \mathbb{K}_m$ dado por $\beta_z(w) := (w + z^m)^{1/m}$. Entonces $\beta_z(0) = z$. Haciendo uso del operador unitario

$$W_{\beta_z} : \ L^2(\mathbb{K}_m) \to L^2(\Pi), \quad f \mapsto \beta'_z(f \circ \beta_z),$$

deducimos (ver [8, Proposition 2.2]) que

$$W_{\beta_z}(aI)W^{-1}_{\beta_z} = (a \circ \beta_z)I, \quad W_{\beta_z} B_{\mathbb{K}_m} W^{-1}_{\beta_z} = B_\Pi, \quad W_{\beta_z} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} W^{-1}_{\beta_z} = c_z \widetilde{B}_\Pi c_z^{-1} I, \tag{4.5}$$

donde $c_z := \beta'_z/\overline{\beta'_z}$.

Fijemos $A \in \mathfrak{A}_m$. Si la clase lateral $A^\pi_z \in (\mathfrak{A}_m)^\pi_z$ es invertible, entonces por (4.4) existen un operador $B \in \mathfrak{A}_m$, operadores $D_1, D_2 \in \Lambda_m$, operadores $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{K}_m))$ y funciones $c_1, c_2 \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$ tales que $c_1(z) = c_2(z) = 0$ y

$$BA = I + c_1 D_1 + K_1, \quad AB = I + c_2 D_2 + K_2.$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} (W_{\beta_z} B W^{-1}_{\beta_z})(W_{\beta_z} A W^{-1}_{\beta_z}) &= I + (c_1 \circ \beta_z)\widetilde{D}_1 + \widetilde{K}_1, \\ (W_{\beta_z} A W^{-1}_{\beta_z})(W_{\beta_z} B W^{-1}_{\beta_z}) &= I + (c_2 \circ \beta_z)\widetilde{D}_2 + \widetilde{K}_2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2 \in \mathcal{K}(L^2(\Pi))$ y $\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2 \in W_{\beta_z}\Lambda_m W_{\beta_z}^{-1}$. Para constantes $k > 0$, introducimos los operadores unitarios de dilatación

$$U_k : \ L^2(\Pi) \to L^2(\Pi), \quad (U_k f)(z) = k f(kz) \ \text{ para toda } \ z \in \Pi.$$

Entonces, en vista de

$$B_\Pi = I - S_\Pi S_\Pi^*, \quad \widetilde{B}_\Pi = I - S_\Pi^* S_\Pi. \tag{4.7}$$

y de la igualdad $\text{s-lim}_{k\to 0}(U_k c_z U_k^{-1}) = (\beta_z'(0)/\overline{\beta_z'(0)})I$, inferimos para los generadores (4.5) del álgebra C^* $W_{\beta_z}\mathfrak{A}_m W_{\beta_z}^{-1} \subset \mathcal{B}(L^2(\Pi))$ que

$$\operatorname*{s-lim}_{k\to 0}\big(U_k(a\circ\beta_z)U_k^{-1}\big) = a(z)I,$$

$$\operatorname*{s-lim}_{k\to 0}\big(U_k B_\Pi U_k^{-1}\big) = B_\Pi, \quad \operatorname*{s-lim}_{k\to 0}\big(U_k(c_z\widetilde{B}_\Pi\overline{c_z}I)U_k^{-1}\big) = \widetilde{B}_\Pi,$$

De aquí, para toda $A \in \mathfrak{A}_m$ y toda $z \in (0,\infty)$ existe el límite fuerte

$$A_z := \operatorname*{s-lim}_{k=0}\big(U_k(W_{\beta_z}AW_{\beta_z}^{-1})U_k^{-1}\big) \in \text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}. \tag{4.8}$$

Aplicando ahora [8, Proposition 7.5], deducimos de (4.6) que

$$B_z A_z = I, \quad A_z B_z = I.$$

Así, la invertibilidad de la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ implica la invertibilidad del operador $A_z \in \text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$.

Por otro lado, la invertibilidad del operador $A_z \in \text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$, asociado con un operador $A \in \mathfrak{A}_m$, implica la invertibilidad del operador

$$W_{\beta_z}^{-1}A_z W_{\beta_z} \in \widehat{\mathfrak{A}}_m := \text{alg}\{I, B_{\mathbb{K}_m}, d_z\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}d_z^{-1}I\},$$

donde $d_z := (\beta_z^{-1})'/\overline{(\beta_z^{-1})'}$. Como $d_z I \overset{z}{\sim} (\overline{\beta_z'(0)}/\beta_z'(0))I$, se implica que $d_z\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}d_z^{-1}I \overset{z}{\sim} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$, y como $aI \overset{z}{\sim} a(z)I$ para toda $a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$, concluimos que las álgebras C^* cociente $(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi$ y $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ coinciden. Consecuentemente, la invertibilidad del operador $W_{\beta_z}^{-1}A_zW_{\beta_z} \in \widehat{\mathfrak{A}}_m$ implica la invertibilidad de la clase lateral $\big(W_{\beta_z}^{-1}A_zW_{\beta_z}\big)_z^\pi = A_z^\pi \in (\mathfrak{A}_m)_z^\pi$.

Así, la invertibilidad de la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{A}_m)_z^\pi$, para $A \in \mathfrak{A}_m$, es equivalente a la invertibilidad del operador $A_z \in \text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$ dada por (4.8). Esto implica que el mapeo $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi \to \text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$, dado sobre los generadores del álgebra C^* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ por

$$(aI)_z^\pi \mapsto a(z)I, \quad (B_{\mathbb{K}_m})_z^\pi \mapsto B_\Pi, \quad (\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m})_z^\pi \mapsto \widetilde{B}_\Pi, \tag{4.9}$$

es un isomorfismo-$*$ del álgebra C^* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$. Finalmente, el álgebra C^* $\text{alg}\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$ es generada por las tres proyecciones ortogonales dos a dos $B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi$ y $I - B_\Pi - \widetilde{B}_\Pi \neq I$ (ver Proposición 2.2.1 y [21, Theorem 4.5]), lo cual inmediatamente implica el isomorfismo de álgebras C^* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi \cong \mathbb{C}^3$. ∎

4.5.2 Álgebras locales en los puntos $0, \infty \in \mathfrak{L}$

Para $z = 0$, como el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ es de operadores del tipo local, el conjunto

$$(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_0^\pi := \{A^\pi + \widehat{J}_0^\pi : A \in \mathfrak{A}_m\} \tag{4.10}$$

es una subálgebra C^* de $(\Lambda_m)_0^\pi$.

Elegimos una vecindad $V_0 \subset \mathbb{K}_m$ que satisface la condición ($\mathfrak{L}2$) impuesta sobre $\mathfrak{L}$. Entonces $V_0 \setminus \mathfrak{L} = \cup_{k=1}^{n_0} D_k^0$ donde $n_0 - 1$ es el número de rayos en $\mathfrak{L}$ con punto final 0 y D_k son las componentes conexas de $V_0 \setminus \mathfrak{L}$. Entonces $\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L} = \cup_{k=1}^{n_0} R_k^0$, donde R_k^0 son sectores de $\mathbb{K}_m$ con vértice en el origen, los cuales corresponden a los dominios D_k^0 (los conjuntos D_k^0 y R_k^0 son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Como $\mathcal{Z}^\pi$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{A}_m^\pi := \mathfrak{A}_m/\mathcal{K}$, concluimos que $\mathfrak{A}_m^\pi \subset \Lambda_m^\pi$ y entonces el conjunto

$$(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_0^\pi := \{A^\pi + \widehat{J}_0^\pi : A \in \mathfrak{A}_m\}$$

es una C^*-subálgebra de $(\Lambda_m)_0^\pi$.

Para $z = \infty$ elegimos una vecindad $V_\infty \subset \mathbb{K}_m$ que satisface la condición ($\mathfrak{L}3$) impuesta para $\mathfrak{L}$. Entonces, $\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L}_\infty = \bigcup_{k=1}^{n_\infty} R_k^\infty$, donde R_k^∞ son sectores de $\mathbb{K}_m$ con vértice en el origen, los cuales corresponden a componentes conexas D_k^∞ de $V_\infty \setminus \mathfrak{L}$ (los conjuntos D_k^∞ y R_k^∞ son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Como $\mathcal{Z}^\pi$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{A}_m^\pi := \mathfrak{A}_m/\mathcal{K}$, concluimos que $\mathfrak{A}_m^\pi \subset \Lambda_m^\pi$ y entonces el conjunto

$$(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_\infty^\pi := \{A^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi : A \in \mathfrak{A}_m\}$$

es una subálgebra C^* de $(\Lambda_m)_\infty^\pi$.

Observación 4.5.1. *Sea $z \in \{0, \infty\}$, tomemos $a \in PC(\mathfrak{L})$ y ponemos*

$$a_k(z) := \lim_{\zeta \to z, \zeta \in D_k^z} a(\zeta) \ (k = 1, 2, ..., n_z).$$

Sea $\chi_{D_k^z}$ la función característica del dominio D_k^z. Claramente, la función $g = a - \sum_{k=1}^{n_z} \chi_{D_k^z}$ es continua en z y $g(z) = 0$. Por lo tanto,

$$(aI)^\pi \overset{z}{\sim} \sum_{k=1}^{n_z} a_k(z)(\chi_{D_k^z} I)^\pi.$$

Lema 4.5.2. *Si $z \in \partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$, entonces las álgebras C^* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ y $(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi$ son (isométricamente) isomorfas, y el isomorfismo $\sigma_z^\pi : (\mathfrak{A}_m)_z^\pi \to (\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi$ está dado por*

$$\begin{gathered}\sigma_z^\pi(B_{\mathbb{K}_m}^\pi + J_z^\pi) = B_{\mathbb{K}_m}^\pi + \widehat{J}_z^\pi, \ \sigma_z^\pi(\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}^\pi + J_z^\pi) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}^\pi + \widehat{J}_z^\pi, \\ \sigma_z^\pi((aI)^\pi + J_z^\pi) = (a_z I)^\pi + \widehat{J}_z^\pi,\end{gathered} \tag{4.11}$$

donde

$$a_z = \sum_{k=1}^{n_z} a_k(z)\chi_{R_k^z}, \quad a_k(z) = \lim_{\zeta\to z, \zeta\in D_k^z} a(\zeta) \quad (k = 1, 2, ..., n_z).$$

Demostración. Consideraremos el mapeo

$$\sigma_z^\pi : (\mathfrak{A}_m)_z^\pi \to (\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi, \quad A^\pi + J_z^\pi \mapsto A^\pi + \widehat{J}_z^\pi,$$

el cual es un isomorfismo-$*$. En efecto, como el ideal J_z^π está contenido en el ideal $\widehat{J}_z^\pi$, se sigue el mapeo está bien definido y que la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi + J_z^\pi \in (\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ implica la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi + \widehat{J}_z^\pi \in (\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi$. Por otro lado, como $\widehat{J}_z^\pi \cap \mathfrak{A}^\pi = J_z^\pi$, la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi + \widehat{J}_z^\pi$ en el álgebra C^* $(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi$ implica la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi + J_z^\pi$ en el álgebra C^* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$. Esos dos hechos producen

$$(\mathfrak{A}_m)_z^\pi \cong (\widehat{\mathfrak{A}}_m)_z^\pi,$$

porque la norma de cualquier elemento normal en un álgebra C^* coincide con su radio espectral.

El hecho de que $(aI)^\pi = (a_z I)^\pi$, se sigue de la Observación 4.5.1. ■

4.5.3 Formas canónicas de las álgebras locales

Sea χ_U la función característica del conjunto U. Por lo visto hasta ahora en ésta Sección, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}_m)_0^\pi &\cong \mathrm{alg}\{B_{\mathbb{K}_m}^\pi + \widehat{J}_0^\pi, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}^\pi + \widehat{J}_0^\pi, (\chi_{R_k^0} I)^\pi + \widehat{J}_0^\pi : k = 1, 2, ..., n_0\}, \quad 0 \in \mathfrak{L},\\ (\mathfrak{A}_m)_\infty^\pi &\cong \mathrm{alg}\{B_{\mathbb{K}_m}^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi, (\chi_{R_k^\infty} I)^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi : k = 1, 2, ..., n_\infty\}, \quad \infty \in \mathfrak{L}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Introducimos las álgebras C^* de operadores

$$\mathcal{O}_\omega = \mathrm{alg}\{B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}, \chi_{R_k} I : k = 1, 2, ..., n\} \tag{4.13}$$

donde $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ y ω_k $(k = 1, 2..., n)$ son los ángulos de los sectores R_k.

Vamos a probar que las álgebras C^* cociente $(\mathfrak{A}_m)_0^\pi$ y $(\mathfrak{A}_m)_\infty^\pi$ son isomorfas a álgebras C^* de la forma (4.13). Para eso haremos uso de operadores límite.

Consideraremos las dilataciones $d_y(w) = yw$ $(y > 0, w \in \mathbb{K}_m)$ y los operadores unitarios de desplazamiento asociados W_{d_y}, tales que $(W_{d_y} f)(w) = f(d_y(w))d'_y(w)$ y $W_{d_y}^* = W_{d_y^{-1}}$. Dada $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$ tal que los límites fuertes

$$A_0 := \operatorname*{s-lim}_{y\to+0}(W_{d_y} A W_{d_y}^*), \qquad A_\infty := \operatorname*{s-lim}_{y\to+\infty}(W_{d_y} A W_{d_y}^*) \tag{4.14}$$

existen, decimos que A_0 y A_∞ son los *operadores límite* de A (con respecto a la familia $\{W_{d_y}\}_{y>0}$ cuando $y \to 0$ y $y \to \infty$, respectivamente). Del teorema de Banach-Steinhaus se sigue que $A_0, A_\infty \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))$ y

$$\begin{aligned} \|A_0\| &\le \liminf_{y\to+0} \|W_{d_y} A W_{d_y}^*\| = \|A\|, \\ \|A_\infty\| &\le \liminf_{y\to+\infty} \|W_{d_y} A W_{d_y}^*\| = \|A\|. \end{aligned} \tag{4.15}$$

De acuerdo a [19, Section 1.2] tenemos las siguientes propiedades de operadores límite.

Proposición 4.5.1. *Supongamos que* $A, B, A_n \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m)), n \in \mathbb{N}$ *y* $\tau \in \{0, \infty\}$.

i) Si A_τ, B_τ *existen, entonces para toda* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$*, los operadores límite* $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)_\tau$, $(AB)_\tau$ *también existen y* $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)_\tau = \lambda_1 A_\tau + \lambda_2 B_\tau$, $(AB)_\tau = A_\tau B_\tau$*;*

ii) Si A_n *converge uniformemente a* A *y* $(A_n)_\tau$ *existe para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* A_τ *existe y* $A_\tau = \lim_{n\to\infty} (A_n)_\tau$.

Proposición 4.5.2. *Para* $\tau \in \{0, \infty\}$*, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

i) si $K \in \mathcal{K}$*, entonces* $K_\tau = 0$*;*

ii) si $a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$ *y* $a(\tau) = 0$*, entonces* $(aI)_\tau = 0$*;*

iii) si $C \in \Lambda_m$ *y* $C^\pi \in \widehat{J}_\tau^\pi$*, entonces* $C_\tau = 0$.

Demostración. (i) Tomamos una base ortonormal $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{K}_m)$ tal que cada ψ_j es una función continua con soporte compacto en $\mathbb{K}_m$. La compacidad de K implica que K es un límite uniforme de combinaciones lineales finitas de operadores K_{ij} dados por la fórmula $K_{ij} f = (f, \psi_i)\psi_j$. Por la Proposición 4.5.1, sólo necesitamos probar que $(K_{ij})_0 = 0$ y $(K_{ij})_\infty = 0$. Escogemos una función $f \in C(\overline{\mathbb{K}}_m)$ con soporte compacto. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \|W_{d_y} K_{ij} W_{d_y}^* f\| &= \|(W_{d_y}^* f, \psi_i) W_{d_y} \psi_j\| = |(W_{d_y}^* f, \psi_i)| = |f, W_{d_y}\psi_i)| \\ &\le y \int_{\mathbb{K}_m} |f(w)\psi_i(yw)| dA(w) \le y\|\psi_i\|_\infty \int_{\mathbb{K}_m} |f(w)| dA(w) \to 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

cuando $y \to 0$, lo cual implica que $(K_{ij})_0 = 0$. Si $y \to \infty$, entonces de nuevo

$$\begin{aligned} \|W_{d_y} K_{ij} W_{d_y}^* f\| &= \|(W_{d_y}^* f, \psi_i) W_{d_y} \psi_j\| = |(W_{d_y}^* f, \psi_i)| \\ &\le \frac{1}{y} \int_{\mathbb{K}_m} |f(w/y)\psi_i(w)| dA(w) \le \frac{1}{y}\|f\|_\infty \int_{\mathbb{K}_m} |\psi_i(w)| dA(w) \to 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

y por lo tanto $(K_{ij})_\infty = 0$.

(ii) Tomando una función $f \in L^2(\mathbb{K}_m)$ con un soporte compacto D, obtenemos la estimación

$$\|W_{d_y} a W_{d_y}^* f\|^2 = \int_{\mathbb{K}_m} |a(yw) f(w)|^2 dA(w) \le \max_{w\in D} |a(yw)|^2 \|f\|^2.$$

Como $\lim_{y\to\tau}\max_{w\in D}|a(yw)| = 0$, obtenemos que $(aI)_\tau = \operatorname{s-lim}_{y\to\tau} W_{d_y} a W_{d_y}^* = 0$.

(iii) Por (4.4), la clase lateral $C^\pi \in \widehat{J}_\tau^\pi$ es de la forma $Ba_\tau I + \mathcal{K}$, donde $B \in \Lambda_m$, $a_\tau \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m)$ y $a_\tau(\tau) = 0$. Entonces existe un operador compacto $K \in \mathcal{K}$ tal que $C = Ba_\tau I + K$. Por lo tanto, de las partes *(i)* y *(ii)* y de la Proposición 4.5.1, se sigue que $C_\tau = 0$. ■

Proposición 4.5.3. *Si $A \in \mathcal{O}_\omega$, entonces $A_\tau = A$ para toda $\tau \in \{0,\infty\}$.*

Demostración. El operador W_{d_y} conmuta con los operadores $\chi_{R_i} I$, porque las funciones χ_{R_i} son positivamente homogéneas de orden cero. Además, tenemos que

$$W_{d_y} B_{\mathbb{K}_m} W_{d_y}^* = B_{\mathbb{K}_m}, \quad W_{d_y} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} W_{d_y}^* = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}.$$

Por lo tanto, el operador W_{d_y} conmuta con todos los elementos del álgebra C^* $\mathcal{O}_\omega$ y así, para todo $A \in \mathcal{O}_\omega$,

$$A_\tau = \operatorname{s-lim}_{y\to\tau}(W_{d_y} A W_{d_y}^*) = \operatorname{s-lim}_{y\to\tau}(A W_{d_y} W_{d_y}^*) = A,$$

lo cual termina la prueba. ■

Teorema 4.5.1. *Si $z \in \partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$, entonces el álgebra C^* $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ es isomorfa al álgebra C^* $\mathcal{O}_\omega$ de la forma (4.13), donde $n = n_z$ y $R_k = R_k^z$ $(k = 1, 2, ..., n)$.*

Demostración. Es suficiente probar que el álgebra C^*

$$\mathcal{O}_\omega = \operatorname{alg}\{B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}, \chi_{R_k^z} I : k = 1, 2, ..., n_z\}$$

es isomorfa al álgebra C^* $(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_0^{0,\pi}$ si $z = 0$, y es isomorfa al álgebra C^* $(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_\infty^{\infty,\pi}$ si $z = \infty$.

Para $0 \in \mathfrak{L}$ consideremos el mapeo

$$\Psi_0 : \mathcal{O}_\omega \to (\widehat{\mathfrak{A}}_m)_0^{0,\pi}, \quad A \mapsto A^\pi + \widehat{J}_0^\pi.$$

Obviamente, Ψ_0 es un homomorfismo-$*$ de $\mathcal{O}_\omega$ sobre $(\widehat{\mathfrak{A}}_m)_0^{0,\pi}$. Sólo necesitamos probar que Ψ_0 es inyectivo. Teniendo en cuenta (4.4), para toda $A \in \mathcal{O}_\omega$ obtenemos

$$\|\Psi_0(A) = \inf\{\|A + BaI + K\| : B \in \Lambda_m, a \in C(\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m), a(0) = 0, K \in \mathcal{K}\}\|.$$

Las Proposiciones 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.3 implican que $(A + BaI + K)_0 = A$. Por lo tanto, por (4.15), $\|A\| \le \|A + BaI + K\|$. Como los operadores B, aI, K satisfacen las condiciones de arriba y son arbitrarios, obtenemos que $\|A\| \le \|\Psi_0(A)\|$. Así, Ψ_0 es inyectivo, y entonces $(\mathfrak{A}_m)_0^\pi \cong \mathcal{O}_\omega$.

Si $\infty \in \mathfrak{L}$, entonces considerando el homomorfismo-$*$

$$\Psi_\infty : \mathcal{O}_\omega \to (\widehat{\mathfrak{A}}_m)_\infty^{\infty,\pi}, \quad A \mapsto A^\pi + \widehat{J}_\infty^\pi,$$

y usando operadores límite en ∞, podemos probar por analogía que $\|A\| \le \|\Psi_\infty(A)\|$, lo cual implica que $(\mathfrak{A}_m)_\infty^\pi \cong \mathcal{O}_\omega$. ■

4.6 Cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m$ y la propiedad de Fredholm

Por Teorema 4.5.1, las álgebras C^* $\mathcal{O}_\omega$ definidas por (4.13) tienen la forma del álgebra C^* $\mathfrak{C}_m$ estudiada en el Capítulo 3. Por lo tanto, el Teorema 3.5.3 y el Teorema 4.5.1, implican inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 4.6.1. *Para toda $m \in \mathbb{N}$. Si $z \in \partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L}$ es un punto final común de $n_z - 1$ rayos de $\mathfrak{L}$, entonces el álgebra C^* local $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ es isomorfa a una subálgebra C^* $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}_z$ de $\mathbb{C}^n \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2n\times 2n})$, donde $n = n_z$. El isomorfismo está dado por*

$$\begin{aligned} aI &\mapsto (a_1(z), ..., a_n(z)) \oplus (\lambda \mapsto diag\{a_j(z)I_2\}_{j=1}^n), \\ B_{\mathbb{K}_m} &\mapsto (0, ..., 0) \oplus (\lambda \mapsto M_m(\lambda)), \\ \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} &\mapsto (0, ..., 0) \oplus (\lambda \mapsto \widetilde{M}_m(\lambda)), \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde $a_l(z)$ $(l = 1, 2, ..., n)$ es el límite de la función $a \in PC(\mathfrak{L})$ en el punto z en el sector R_l, y las funciones cuyo valor es una matriz $M_m(\cdot), \widetilde{M}_m(\cdot)$ son definidas por (3.38) para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y por (3.39) para $\lambda = \pm\infty$.

Los Lemas 4.4.2 y 4.5.1, junto con el Teorema 4.6.1 nos dan la descripción completa de las álgebras locales $(\mathfrak{A}_m)_z^\pi$ para todos los puntos $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$. Juntando todas esas descripciones y reuniendo las representaciones en los puntos $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$ que envían a los operadores $B_{\mathbb{K}_m}$ y $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}$ en cero, establecemos el resultado principal de éste Capítulo.

Teorema 4.6.2. *Para toda $m \in \mathbb{N}$, el álgebra C^* $\mathfrak{A}_m^\pi = alg\{aI, B_{\mathbb{K}_m}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_m} : a \in PC(\mathfrak{L})\}/\mathcal{K}$, contenida en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_m))/\mathcal{K}$, es isomorfa a la subálgebra C^* $\Phi(\mathfrak{A}_m)$ del álgebra C^**

$$\Phi_{\mathfrak{A}_m} := \left(\bigoplus_{z\in\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m} \mathbb{C}^{n_z}\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\setminus\mathfrak{L}} \mathbb{C}^2\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\cap\mathfrak{L}} \mathfrak{S}_z\right),$$

y el isomorfismo $\Phi : \mathfrak{A}_m^\pi \to \Phi(\mathfrak{A}_m)$ está dado por

$$\Phi(B_{\mathbb{K}_m}^\pi) := \left(\bigoplus_{z\in\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m} (0, ..., 0)\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\setminus\mathfrak{L}} (1, 0)\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\cap\mathfrak{L}} (\lambda \mapsto M_m(\lambda))\right),$$

$$\Phi(\widetilde{B}_{\mathbb{K}_m}^\pi) := \left(\bigoplus_{z\in\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m} (0, ..., 0)\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\setminus\mathfrak{L}} (0, 1)\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\cap\mathfrak{L}} (\lambda \mapsto \widetilde{M}_m(\lambda))\right),$$

$$\begin{aligned} \Phi((aI)^\pi) := &\left(\bigoplus_{z\in\dot{\overline{\mathbb{K}}}_m} (a_1(z), ..., a_{n_z}(z))\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\setminus\mathfrak{L}} (a(z), a(z))\right) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial\mathbb{K}_m\cap\mathfrak{L}} (\lambda \mapsto diag\{a_j(z)I_2\}_{j=1}^{n_z})\right), \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{S}_z$ *es la subálgebra* C^* *de* $C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2n_z \times 2n_z})$ *determinada en el Teorema* 4.6.1*,* n_z *es el número de componentes conexas* D_k *del conjunto* $(V_z \cap \mathbb{K}_m) \setminus \mathfrak{L}$ *para una vecindad suficientemente pequeña* V_z *de un punto* $z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m$*, y*

$$a_k(z) := \lim_{\zeta \to z, \zeta \in D_k} a(\zeta), \quad (k = 1, 2, ..., n_z).$$

Un operador $A \in \mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ *es Fredholm en el espacio* $L^2(\mathbb{K}_m)$ *si y sólo si su símbolo* $\Phi(A)$ *es invertible en el álgebra* C^* $\Phi_{\mathfrak{A}_m}$*, es decir, si*

$$\begin{aligned}
([\Phi(A)](z))_k &\neq 0 \quad \textit{para toda } z \in \dot{\overline{\mathbb{K}}}_m \textit{ y toda } k = 1, 2, ..., n_z;\\
([\Phi(A)](z))_k &\neq 0 \quad \textit{para toda } z \in \partial\mathbb{K}_m \setminus \mathfrak{L} \textit{ y toda } k = 1, 2;\\
det([\Phi(A)](z))(\lambda) &\neq 0 \quad \textit{para toda } z \in \partial\mathbb{K}_m \cap \mathfrak{L} \textit{ y toda } \lambda \in \overline{\mathbb{R}},
\end{aligned}$$

donde $([\Phi(A)](z))_k$ *son las* k*-entradas de las funciones cuyo valor es un vector* $[\Phi(A)](z)$*.*

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. *Mathematical Analysis*. 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1974.

[2] Böttcher, A.; Karlovich, Yu. I. *Carlesson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*. Progress in Mathematics 154, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1997.

[3] Bötcher, A.; Silberman, B. *Analysis of Toeplitz Operators*. 2nd Edition, Springer, Berlin 2006.

[4] Douglas, R. G. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Academic Press, New York 1972.

[5] Espinoza-Loyola, E.; Karlovich, Yu.I.; Vilchis-Torres, O. *C^*-algebras of Bergman Type Operators with Piecewise Constant Coefficients over Sectors*. Enviado para publicación.

[6] Gradshteyn, I. M. *Tabes of Integrals, Series and Products*. 7th Edition, Academic Press, Amsterdam, 2007.

[7] Karapetyants, A. N.; Rabinovich, V. S.; y Vasilevski, N. I. *On algebras of two dimensional singular integral operators with homogeneus discontinuities in symbols*. Integral Equations and Operator Theory, 40 (2001), 278-308.

[8] Karlovich, Yu. I.; Pessoa, Luís. *Algebras Generated by the Bergman and Anti-Bergman Projections and by Multiplications by Piecewise Continuous Functions*. Integral Equations and Operator Theory, 52 (2005), 219-270.

[9] Karlovich, Yu. I.; Pessoa, Luís. *C^*-algebras of Bergman type operators with piecewise continuous coefficients*. Integral Equations and Operator Theory, 57 (2005), 521-565.

[10] Karlovich, Y. I. and Pessoa, L. V. *Poly-Bergman projections and orthogonal decompositions of L^2-spaces over bounded domains*. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 181 (2008), 263-282.

[11] Kato, Tosio. *Perturbation Theory for Linear Operators.* 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio 1984.

[12] Loaiza, Maribel. *Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions.* Integral Equations and Operator Theory 46 (2003), 215-234.

[13] Loaiza, Maribel. *On the algebra generated by the harmonic Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions.* Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004) 179-193.

[14] Mikhlin, S. G.; Prössdorf, S. *Singular Integral Operators.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.

[15] Murphy, Gerard J. *C∗-Algebras and Operator Theory.* Academic Press Inc. London, 1990.

[16] Naimark, M. A. *Normed Algebras.* Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.

[17] Oberheittinger, F. *Tables of Mellin Transforms.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

[18] Plamenevsky, B. A. *Algebras of Pseudodifferential Operators.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[19] Rabinovich, Vladimir; Roch, Steffen; Silberman, Bernd. *Limit Operators and Their Aplications in Operator Theory.* Operator Theory: Advances and Aplications, Vol.150, 1st Edition, Springer Basel AG, 2004.

[20] Vasilevski, N. L. *Banach algebras generated by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and piecewise continuous coefficients.* I., Soviet Math. (Izv. VUZ) 30 (1986) No. 2, 14-24.

[21] Vasilevski, N. L. *On the structure of Bergman and poly-Bergman spaces.* Integral Equations Operator Theory 33 (1999), 471-488.

[22] Vasilevski, N. L. *Toeplitz operators on the Bergman spaces: Inside-the domain effects.* Contemporany Mathematics 289 (2001), 79-146.

[23] Zhu, Kehe. *Operator Theory in Function Spaces.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel 1990.