



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Perturbaciones Fuertes y Débiles al Oscilador de  
Rayleigh

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

PRESENTA:

YETZABEL FABIOLA MENDOZA GALINDO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE HUMBERTO ARCE RINCÓN



Febrero 2015

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de Datos del Jurado

## 1. Datos del alumno

Mendoza

Galindo

Yetzabel Fabiola

5556170427

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

09632021 – 1

## 2. Datos del Tutor

Dr.

Jorge Humberto

Arce

Rincón

## 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Gerardo

García

Naumis

## 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Carlos

Málaga

Iguñiz

## 5. Datos del sinodal 3

M. en C.

Augusto

Cabrera

Manuel

## 6. Datos del sinodal 4

Dra.

Clara Eugenia

Garza

Hume

## 7. Datos del trabajo escrito

Perturbaciones Fuertes y Débiles al Oscilador de Rayleigh

75p

2015

**लोकः समस्तः सुखिनो भवन्तु**

*Que todos los seres en todos los universos sean libres y felices, y que mis pensamientos, palabras y acciones, contribuyan de alguna manera a esa felicidad y libertad para todos.*

# Agradecimientos

A mis padres: Fabiola Galindo Sánchez y Salvador Mendoza Reyes, por todas sus enseñanzas, apoyo incondicional, sacrificios y sobre todo por su amor.

Al Dr. Humberto Arce, por todo lo que me ha enseñado, el tiempo que me ha dedicado, su motivación y paciencia.

A todos y cada uno de los miembros de mi familia que siempre han confiado en mi y han estado a mi lado.

A César por ser mi compañero, por su ayuda, apoyo y comprensión.

A Martín y Araceli, que me ayudaron con algunas figuras y los programas de matlab, a la Dra. Hortensia González por sus consejos y correcciones y a todos en el laboratorio de Biofísica por su ayuda.

A la UNAM, por enseñarme más allá de las aulas.

A mis cachorros, por su amor y compañía.

A mis amigos por su compañía y porque siempre me dan animo.

A la Dra. Clara Garza, por el tiempo invertido en mi trabajo y las enseñanzas y correcciones y a todos los miembros del jurado, por sus consejos y su tiempo.

A todos muchas gracias.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Contenido</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Resumen</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Osciladores no lineales con un ciclo atractor robusto . . . . .	1
1.2. El Oscilador Salino . . . . .	3
<b>2. Método</b>	<b>13</b>
2.1. El Oscilador de Poincaré . . . . .	13
2.2. La teoría del reinicio . . . . .	15
2.3. Perturbaciones periódicas . . . . .	19
<b>3. Perturbando al Oscilador de Rayleigh</b>	<b>25</b>
3.1. Las ecuaciones diferenciales . . . . .	25
3.2. Perturbaciones Fuertes al Oscilador de Rayleigh . . . . .	30
3.3. Perturbaciones periódicas fuertes . . . . .	34
3.4. Perturbaciones débiles al Oscilador de Rayleigh . . . . .	39
3.5. Perturbaciones periódicas débiles . . . . .	42
3.6. Comprobación numérica de ritmos . . . . .	44

<b>4. Discusión, Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>49</b>
4.1. Comparación entre los acoplamientos para el Oscilador de Rayleigh y el Salino	49
4.2. El diagrama para perturbaciones fuertes . . . . .	50
4.3. Diagrama de ritmos para perturbaciones débiles . . . . .	53
4.4. Perspectivas . . . . .	53
4.5. Conclusiones finales . . . . .	55

# Lista de Figuras

1.1. Reacción de Belousov Zhabotinsky: esta reacción se comporta como un oscilador no lineal. la concentración de las sustancias que contiene oscilan, lo que da lugar a un oscilador químico. . . . .	2
1.2. Arreglo experimental para el oscilador salino. Inicialmente el orificio se bloquea para impedir la caída del agua salada. . . . .	4
1.3. Existe una diferencia de voltaje de algunos milivoltios entre el agua salada y el agua pura que puede detectarse con electrodos de cobre o de plata. . .	5
1.4. Perfil de voltaje detectado con electrodos de plata clorurado en un oscilador salino. La señal de voltaje fue alisada con una ventana de promedio móvil y trasladada para coincidir con el cero del voltaje. . . . .	6
1.5. La comprobación de que las oscilaciones de flujo en el orificio del oscilador y de voltaje detectadas por los electrodos se hicieron por Yoshikawa et al. oscureciendo el agua salada, usando además una luz laser y una fotocelda. Cada vez que el chorro de agua salada cae, interrumpe el paso de la luz. . .	7
1.6. Arreglo para estudiar el acoplamiento entre dos osciladores. . . . .	8
1.7. La organización de los flujos en un solo vaso con dos agujeros depende de la distancia entre los agujeros, el vaso grande no se muestra. . . . .	10
1.8. . Dispositivo experimental para perturbar al oscilador salino. Una bomba controla la inyección y recuperación de agua pura contenida en dos jeringas de 60 mililitros. Una computadora controla la bomba para definir los momentos y duraciones de los traslados de agua. . . . .	11



2.1. Trayectorias en el oscilador de Poincaré. La circunferencia negra corresponde al círculo de radio uno y es el ciclo atractor. En el panel (a) se ilustra el comportamiento de las condiciones iniciales al interior de la circunferencia, en el panel (b) de las condiciones iniciales exteriores a la circunferencia. . .	14
2.2. La velocidad con la que las trayectorias se acercan al ciclo límite depende del valor de $k$ . En los paneles (a), (b), (c) y (d), la constante vale respectivamente 0.1, 1.5, 5 y 50. . . . .	15
2.3. Una perturbación al Oscilador de Poincaré consistente en una traslación a la derecha por una distancia $b$ , lleva instantáneamente al oscilador a una nueva posición en el ciclo. Las fases viejas y nuevas están representadas por $\phi$ y $\phi'$ respectivamente. En el panel (a) la oscilación se atrasa, en el panel (b) se adelanta. . . . .	16
2.4. Es posible conocer la fase nueva a partir de la fase vieja, pues ambas tienen el mismo cateto opuesto, y el cateto adyacente de la fase nueva, es igual al de la fase vieja más $b$ . . . . .	17
2.5. Se indica la fase vieja como $\phi$ , la fase nueva como $\phi'$ y la cofase corresponde al semicírculo en azul. . . . .	18
2.6. Efectos de las perturbaciones sobre la fase nueva (renglón superior) y el periodo de oscilación (renglón inferior). En los paneles (a) y (b) se muestra la dependencia de las fases nuevas con las fases viejas para perturbaciones con intensidad 0.5 y 0.99 respectivamente. En los paneles (c) y (d) se muestra el efecto sobre el periodo perturbado para las mismas intensidades. Puede notarse que en la primera mitad de las fases viejas el periodo se alarga y para la segunda mitad se acorta. . . . .	20
2.7. Representación de perturbaciones periódicas en el Oscilador de Poincaré. El periodo de perturbación es $\tau$ . En el momento de la perturbación el oscilador se encuentra en $\phi_i$ , la perturbación lo lleva a $\phi'_i$ , la siguiente perturbación se dara en $\phi_{i+1} = \phi'_i + \tau \bmod 1$ . . . . .	21

2.8. Representación de perturbaciones periódicas con intensidad 0.5 y periodo 0.2. En el panel (a) la condición inicial, $\phi_0$ , es la intersección del eje horizontal con la línea azul, la fase nueva es la intersección de la línea azul con la CTF. El tiempo que hay que esperar antes de dar otra perturbación es 0.2 y esa es la longitud de la línea vertical roja. La longitud total de la azul más la roja define la fase $\phi_1$ que es donde se dará la nueva perturbación, y que se localiza en la base de la línea punteada. Esta línea es la condición inicial en el panel (b). El proceso se repite cuantas veces sea necesario. . . . .	22
2.9. El procedimiento desplegado paso por paso en la Figura 2.8, se resume en esta figura. La iteración puede verse como segmentos de líneas rectas que van de la CTF trasladada una distancia $\tau$ en la dirección vertical a la línea diagonal que representa a la función identidad. . . . .	23
3.1. Graficas de las isóclinas de las ecuaciones de Rayleigh. . . . .	26
3.2. Flujo alrededor de las isóclinas de las ecuaciones de Rayleigh. Las líneas discontinuas son las isóclinas, las puntas de las flechas indican el flujo. La rama interna de la isóclina cubica repele el flujo y las externas lo atraen. . .	27
3.3. (a) Ciclo límite en el oscilador de Rayleigh; (b) oscilación en la variable $x$ ; (c) oscilación en la variable $y$ . . . . .	28
3.4. El efecto de las perturbaciones mostrado en el espacio fase. Cada uno de los paneles corresponde con los de la Figura 3.5. El cuadrado indica el inicio de la perturbación y el círculo vacío su final. En los dos primeros paneles las perturbaciones adelantan fuertemente al oscilador, mientras que en el último panel se induce un atraso al imponerse al sistema recorrer un tramo extra de la rama izquierda de la isóclina. . . . .	29
3.5. Efecto de perturbaciones fuertes sobre el oscilador de Raleigh. (a) Perturbación al comienzo de la oscilación ( $\phi = 0.1$ ), provoca una oscilación muy breve. (b) Perturbación cuando la $\phi = 0.3$ , provoca una oscilación de duración mayor que en el inciso anterior pero menor que la oscilación normal. (c) Perturbación para la fase 0.7 que no provoca prácticamente ningún efecto. (d) Perturbación al final de la oscilación ( $\phi = 0.9$ ), alarga ligeramente la oscilación. . . . .	30

3.6. Diagramas para medir las fases viejas y nuevas para dos perturbaciones distintas en el oscilador salino. Se toma como el inicio de la oscilación el mínimo de la variable $v$ . $T_0$ y $T_2$ corresponden a oscilaciones no perturbadas. En ambos paneles la perturbación se aplica en el momento $T_c$ y el periodo resultante de aplicar la perturbación es $T_1$ . . . . .	32
3.7. Curva de transición de fases para perturbaciones fuertes, esto es, que provocan inversiones de la oscilación cuando se aplican en su primera mitad. . . . .	33
3.8. Iterando la curva de transición de fases. Explicación en el texto. . . . .	36
3.9. Representación de perturbaciones periódicas como iteraciones. (a) Periodo de perturbación $\tau = 0.6$ , la órbita tiende hacia un solo punto. (b) Periodo de perturbación $\tau = 0.4$ , la órbita se alterna entre dos puntos. . . . .	37
3.10. Diagrama de ritmos para perturbaciones fuertes. En el eje horizontal se indica el periodo de perturbación, en el vertical las fases hacia los cuales tiende asintóticamente el sistema. . . . .	38
3.11. Representación en el espacio fase del efecto de perturbaciones débiles sobre el oscilador de Rayleigh. El cuadrado indica el comienzo de la perturbación y el círculo vacío su final. . . . .	39
3.12. Cuatro efectos típicos de perturbaciones débiles sobre el oscilador de Rayleigh. (a) Prácticamente no hay efecto. (b) La oscilación se adelanta. (c) Adelanto de pequeña magnitud. (d) La oscilación se atrasa. . . . .	40
3.13. Curva de transición de fases para perturbaciones débiles. . . . .	41
3.14. Efecto de perturbaciones periódicas para perturbaciones débiles. (a) Periodo de perturbación con $\tau = 0.6$ , el ritmo resultante tiene periodo 1. (b) Periodo de perturbación $\tau = 0.31$ , el ritmo resultante tiene periodo 2. (c) Periodo de perturbación $\tau = 0.25$ , resulta un ritmo con periodo 3. (d) Periodo de perturbación $\tau = 0.15$ , ritmo con periodo 4. . . . .	43
3.15. Efecto de perturbaciones periódicas para perturbaciones débiles. (a) Periodo de perturbación $\tau = 0.47$ , aparece un ritmo con periodo 4. (b) Periodo de perturbación con $\tau = 0.11$ , resulta un ritmo con periodo 5. . . . .	44
3.16. Diagrama de ritmos para perturbaciones débiles. Los ritmos se organizan por escaleras. . . . .	45

3.17. Ritmos obtenidos mediante la integración numérica de las ecuaciones de Rayleigh, cuando se aplican perturbaciones periódicas fuertes. El trazo azul es la solución de las ecuaciones, el trazo rojo indica el momento de las perturbaciones. Panel (a) ritmo 1:1, periodo de perturbación 0.6. Panel (b) ritmo 2:2, periodo de perturbación 0.35. . . . .	46
3.18. Ritmos obtenidos mediante la integración numérica de la ecuación de Rayleigh cuando se aplican perturbaciones periódicas débiles. Panel (a), periodo de perturbación 0.6, ritmo 1:1. Panel (b), periodo de perturbación 0.25, ritmo 3:1. Panel (c), periodo de perturbación 0.11, ritmo 5:1. . . . .	47
4.1. Diagrama de ritmos para perturbaciones fuertes. Las líneas verticales encierran una zona de aparente traslape de los ritmos 1 y 2. . . . .	50
4.2. Ampliación de la zona entre las líneas verticales en la Figura 4.1, se muestra que los ritmos no están traslapados sino entrelazados. . . . .	51
4.3. Resultados de 1000 iteraciones para el periodo de perturbación 0.426 (primer renglón), y 0.427 (segundo renglón). En los paneles (a) y (d) se muestran los diagramas de telaraña, que son prácticamente indistinguibles. En los paneles (b) y e los valores de las fases para las 1000 iteraciones, tampoco se distinguen. Sin embargo una ampliación de las ultimas 100 iteraciones en los paneles (c) y (f) muestra que las dos fases a las que se llega para cada periodo de perturbación son ligeramente distintas. . . . .	52
4.4. Cambio de ritmo por colisión de la órbita con la discontinuidad de la CTF. Se ha señalado con una flecha uno de los puntos de la órbita con ritmo 3. El periodo de la perturbación periódica es 0.2 para el panel (a), 0.25 para el panel (b), 0.285 para el panel (c). A media que el periodo crece, el punto de la órbita indicado se acerca a la discontinuidad. En el momento que la toca ocurre el cambio hacia el ritmo 2. . . . .	54

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

RESUMEN

FACULTAD DE CIENCIAS

FÍSICA

**Perturbaciones Fuertes y Débiles al Oscilador de Rayleigh**

Yetzabel Fabiola Mendoza Galindo

El objetivo principal de esta tesis es obtener los ritmos o acoplamientos que ocurren al aplicar perturbaciones periódicas, bifásicas, débiles al oscilador de Rayleigh. Para hacer esto usamos la versión que de la ecuación diferencial de Rayleigh, construyeron Okamura y Yoshikawa como modelo del oscilador salino.

Integramos numéricamente dichas ecuaciones y encontramos el ciclo límite de nuestro oscilador. Realizamos perturbaciones bifásicas aisladas aplicando incrementos y decrementos en una de las variables, explorando diversos momentos de la perturbación. De aquí obtenemos los cambios de fase que resultan de dicha perturbación y con esto graficamos las curvas de transición de fase, con la que haremos iteraciones para predecir los ritmos o acoplamientos, para lo cual utilizaremos la “teoría del reinicio”.

Compararemos los ritmos predichos con los resultados que se obtienen realizando la integración numérica pero ahora producto de realizar perturbaciones periódicas. Discutimos nuestros resultados a la luz de los resultados experimentales que se obtienen para el oscilador salino, cuando se aplica una investigación semejante a la que aquí realizamos.

# 1

## Introducción

### 1.1. Osciladores no lineales con un ciclo atractor robusto

Existen en la naturaleza muchos sistemas físicos, químicos o biológicos, que pueden ser vistos como osciladores no lineales con un ciclo atractor robusto. Estos sistemas recorren periódicamente un conjunto de estados, y si son perturbados, después de un comportamiento transitorio, regresan a recorrer el mismo conjunto de estados en el mismo periodo de tiempo. Algunos ejemplos de estos sistemas son péndulos forzados y amortiguados [1], reacciones de Belousov-Zhabotinsky [2], células del marcapaso cardiaco [3], circuitos de control en robots [4 -5], etc. Lo interesante de todos estos osciladores, es que se pueden estudiar algunos aspectos de su comportamiento sin tener un modelo de ecuaciones diferenciales de ellos, por otra parte el estudio del comportamiento de uno de ellos puede ayudar para entender algunos aspectos del comportamiento de otros osciladores con un ciclo atractor robusto, aunque su naturaleza sea completamente distinta.

Probablemente uno de los sistemas más famosos de este tipo sea la reacción de Belousov-Zhabotinsky o reacción BZ, (fig. 1.1). Consiste esta reacción en un proceso en que parte de los productos regresan a ser reactivos y viceversa:





Figura 1.1: Reacción de Belousov Zhabotinsky: esta reacción se comporta como un oscilador no lineal. la concentración de las sustancias que contiene oscilan, lo que da lugar a un oscilador químico.

Esta reacción fue descubierta en 1958 por Belousov, recibió muy poca aceptación en su época, ya que entonces se consideraba que todas las reacciones químicas debían tender al equilibrio. Retomada pocos años más tarde por Zhabotinsky se volvió uno de los ejemplos clásicos de un sistema oscilatorio con un ciclo atractor robusto [6]. Otros sistemas en los que encontramos ciclos atractores son los sistemas fisiológicos. Un ejemplo muy conocido es el corazón, en el cual el latido puede considerarse un evento periódico con pequeñas variaciones en su intervalo temporal, y que después de una alteración del ritmo, como el susto que sentimos después de un temblor, regresa a su frecuencia normal de trabajo.

Actualmente, la manera principal de estudiar estos sistemas fisiológicos es experimentando con seres vivos y sus órganos, específicamente animales no-humanos. Desde el siglo XVI los animales son usados como “conejos de indias” para conocer el funcionamiento del cuerpo (de sus órganos, músculos, fluidos, etc). También son usados para conocer los efectos de medicinas, venenos, cosméticos, sustancias químicas y determinar la inocuidad de los procedimientos médicos, científicos e industriales. Primates, ratas, ratones, conejos, perros, gatos, cobayas, etc., mueren en nombre de la ciencia, la técnica y el conocimiento.

Son millones de muertes al año, algunas asociaciones protectoras de animales, mencionan que son *tres animales por segundo*, la mayoría muere de manera cruel y dolorosa o tras largas agonías, sin mencionar el encierro en el que viven esperando su destino.

Por respeto a los demás seres vivos, es que el principal propósito de este trabajo es mostrar que mediante modelos numéricos, podemos simular o reproducir comportamientos fisiológicos para estudiar dichos sistemas sin lastimar o matar a ningún animal. En este caso el modelo numérico que usamos es el Oscilador de Rayleigh, que reproduce el comportamiento de un oscilador no lineal con ciclo atractor robusto.

## 1.2. El Oscilador Salino

El oscilador salino es un oscilador no lineal, el cual por lo sencillo y barato de su montaje resulta muy útil para comprender algunas propiedades generales de estos osciladores. El arreglo experimental consiste en dos recipientes de diferente tamaño (fig. 1.2). El recipiente grande tendrá agua pura (líquido de menor densidad) y el recipiente más pequeño tendrá una solución salina de NaCl en agua (fluido más denso). Se coloca el recipiente menor dentro del recipiente grande cuidando que el fondo del recipiente pequeño quede por arriba del fondo del recipiente grande. Los dos recipientes estarán interconectados por un orificio pequeño en el centro de la base del recipiente menor al que le pondremos un tapón.

El experimento inicia cuando quitamos el tapón del orificio de la base y un chorro de solución salina fluye en sentido descendente a través del agujero debido a la diferencia de densidades, después de unos segundos se observa una disminución en el flujo del chorro descendente, hasta que para y se invierte apareciendo un chorro de agua pura ascendente del recipiente mayor al menor. Unos segundos más tarde se invierte nuevamente y vuelve a caer la solución salina y así sucesivamente, lo que produce oscilaciones con periodo constante entre líquidos de diferente densidad. Los cambios en la presión y sentido de circulación están ligadas a la altura del líquido del recipiente interno (o externo, ya que el volumen total del sistema es constante), pues cuando el volumen de éste disminuye, se está cambiando el peso de dicha columna de líquido y por lo tanto la presión. Y cuando el agua pura sube, se cambia nuevamente el peso de la columna del líquido en el recipiente pequeño. La oscilación de los flujos se repite cientos de veces durante varias horas ya que el agua salada no se mezcla con el agua pura y se va acumulando en el fondo del vaso grande debido a que es más densa, las oscilaciones paran hasta que toda el agua salada reposa en el vaso grande.

El oscilador salino fue descubierto por Seelye Martin (geofísico de la Universidad de Wa-



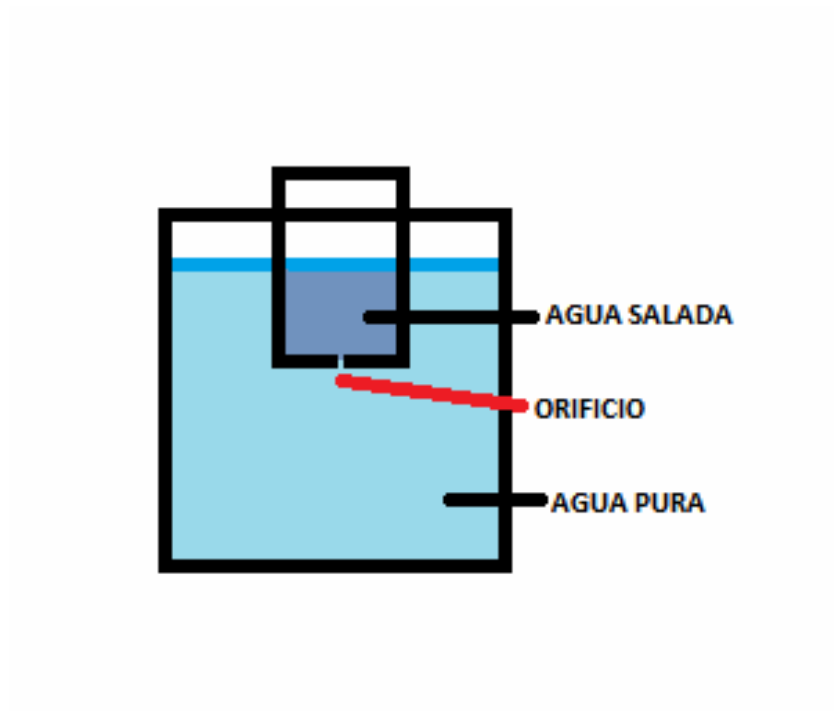


Figura 1.2: Arreglo experimental para el oscilador salino. Inicialmente el orificio se bloquea para impedir la caída del agua salada.

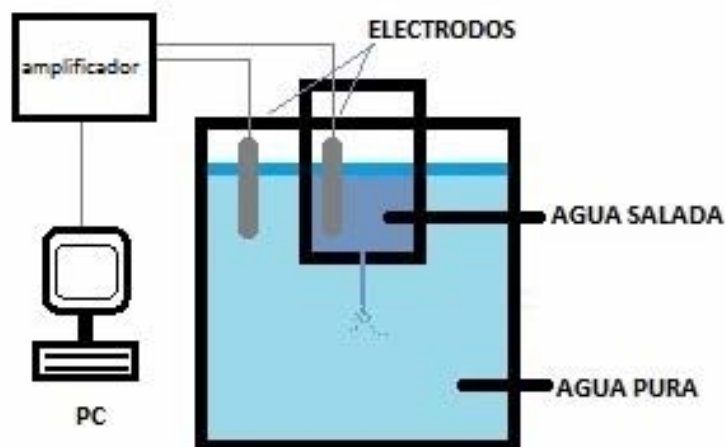


Figura 1.3: Existe una diferencia de voltaje de algunos milivoltios entre el agua salada y el agua pura que puede detectarse con electrodos de cobre o de plata.

shington) en 1970 [7]. Martin estudió la duración del fenómeno y los periodos de oscilación, variando algunas características del sistema como la densidad del agua salada, el tamaño del agujero en el recipiente pequeño, las cantidades de agua involucradas en el experimento y también varió el modelo experimental. En uno de estos arreglos experimentales, usó una lata delgada para el recipiente pequeño, pero el sistema en el que concentró su trabajo fue en uno que construyó con una jeringa sin émbolo como el recipiente pequeño. Después del trabajo de Martin, se han publicado muchos trabajos referentes a los factores que determinan la dinámica de las oscilaciones en el oscilador salino [8-10]. Algunos investigadores como Peter Henrik Alfredson y Tony Lagersted [11] estudiaron el oscilador salino con el sistema de lata mencionado arriba, indicaron que la dinámica de la oscilación está determinada por el tamaño del orificio, ya que si el orificio es pequeño (décimas de mm), la oscilación es suave y el periodo es largo, y si el orificio es grande (milímetros), la oscilación ocurre violentamente y el periodo es corto.

Una importante aportación al experimento del oscilador salino fue hecha por Yoshikawa [12], quien observó que si se introducen electrodos Ag/AgCl en el vaso interno y en el

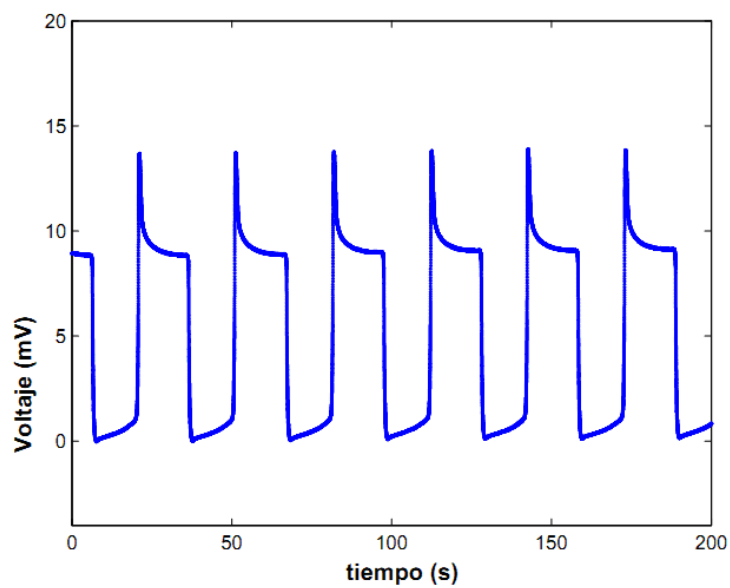


Figura 1.4: Perfil de voltaje detectado con electrodos de plata clorurado en un oscilador salino. La señal de voltaje fue alisada con una ventana de promedio móvil y trasladada para coincidir con el cero del voltaje.

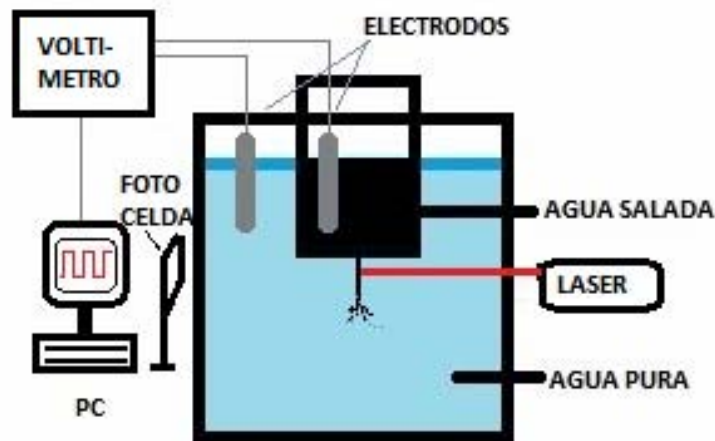


Figura 1.5: La comprobación de que las oscilaciones de flujo en el orificio del oscilador y de voltaje detectadas por los electrodos se hicieron por Yoshikawa et al. oscureciendo el agua salada, usando además una luz laser y una fotocelda. Cada vez que el chorro de agua salada cae, interrumpe el paso de la luz.

vaso externo del experimento, se puede medir una diferencia de potencial eléctrico entre el agua salada y el agua pura (fig 1.3). Esta diferencia de potencial se puede desplegar en un osciloscopio, lo que permite una buena medición de sus oscilaciones (fig 1.4). Mostró que estas oscilaciones de voltaje coinciden con las oscilaciones de flujo en el agujero del recipiente chico, esto lo hizo coloreando el agua salada con tinta negra y colocando un laser que atravesara el recipiente de agua pura, justo debajo del orificio del recipiente pequeño para que al caer el chorro de agua salada el haz de luz fuera interrumpido y esto fuera registrado por una fotocelda colocada para recibirlo del otro lado del recipiente de agua pura, así pudo ver que las oscilaciones del agua y las oscilaciones del potencial eléctrico estaban sincronizadas (fig. 1.5).

En el año 2000, Mina Okamura y Kenichi Yoshikawa [13] publicaron un estudio donde usaron las ecuaciones de Navier-Stokes y las integraron numéricamente con lo que obtuvieron una descripción del comportamiento de las oscilaciones del flujo entre los vasos que reproduce bien el comportamiento experimental. En dicho trabajo concluyen que su osci-

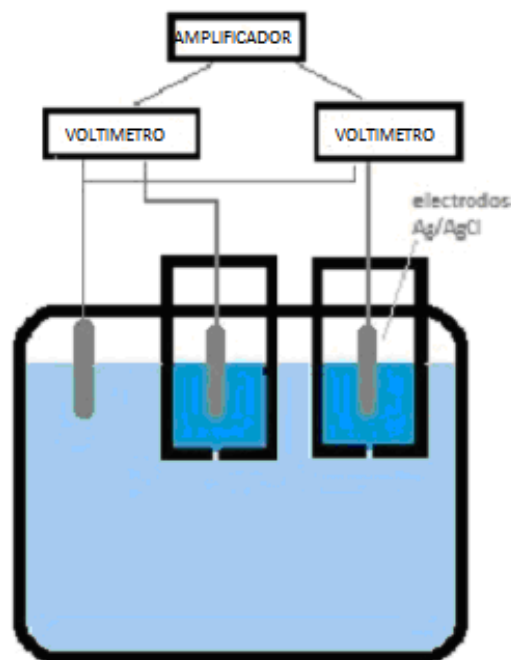


Figura 1.6: Arreglo para estudiar el acoplamiento entre dos osciladores.

lador salino puede ser visto como un oscilador de Rayleigh, el cual sería descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = A \frac{dy}{dt} - B \left( \frac{dy}{dt} \right)^3 + Cy, \quad (1.3)$$

donde  $A = 56$ ,  $B = 1.2 \times 10^8$  y  $C = 7$ . Este resultado es muy importante para este trabajo, ya que será esta ecuación diferencial la que se usará como base para realizar perturbaciones periódicas al oscilador de Rayleigh.

Otro tipo de estudio realizado en el oscilador salino es el acoplamiento entre dos o más osciladores. El estudio de estos sistemas es importante para entender algunos mecanismos de sincronización y de autoorganización en sistemas vivientes como células cardiacas o neuronales y en ritmos circadianos en organismos multicelulares.

Cuando ponemos dos recipientes pequeños que sean iguales con orificios del mismo tamaño y la misma concentración de cloruro de sodio dentro de un mismo recipiente grande de agua pura (fig. 1.6), los periodos de los osciladores son similares y los osciladores se acoplan. Es evidente que el agua pura es el factor que conecta ambos osciladores, en este caso las fases de los osciladores se invierten una con respecto a otra. Cuando los periodos internos de los osciladores difieren considerablemente, los osciladores se acoplan entre sí de manera más compleja, por ejemplo, la razón de los periodos puede ser 1:2, 1:3, 1:4, 2:3, 3:4, etc. Una variación de este arreglo experimental es colocar en el recipiente pequeño dos agujeros [14]. En este caso la distancia entre los agujeros definirá si las fases entre los dos osciladores están invertidas una respecto a la otra o no. Yoshikawa reportó que si los orificios son del mismo tamaño y están separados uno del otro más de 5 mm, el flujo será circular, es decir un chorro baja mientras el otro chorro sube. Pero si los orificios están a menos de 5 mm, el flujo es rítmico y tienen la misma fase, es decir ambos suben o ambos bajan (fig. 1.7).

Se han estudiado muchas variaciones de estos arreglos experimentales como poner una pared con un orificio que comunique ambos osciladores [15] o colocar muchos osciladores juntos [16] y el análisis de dichos acoplamientos puede ser muy complicado.

En los trabajos que mencionamos anteriormente sobre el oscilador salino, las perturbaciones se hacen entre dos o más osciladores acoplados, donde ambos osciladores se perturban mutuamente.

Una maniobra más simple que la anterior es utilizar una bomba de agua para perturbar el oscilador (fig. 1.8), es más simple puesto que el dispositivo con el que perturbamos no se verá afectado por la respuesta del oscilador salino. Las perturbaciones en el oscilador salino afectan de diferentes formas el periodo de éste. A veces el periodo se hace más grande y otras veces se reduce considerablemente, el efecto depende de en qué momento o fase de la oscilación se dé la perturbación. En 2008 se reportó un trabajo [17] en que se siguió el protocolo antes descrito con el oscilador salino, aplicando perturbaciones fuertes que siempre provocaban algún efecto sobre la oscilación; en el mismo trabajo se hicieron perturbaciones fuertes sobre el oscilador de Rayleigh, mismas que se estudiaron haciendo integraciones numéricas de las ecuaciones que simulaban este proceso. En octubre de 2013 se reportó en una tesis [18] el efecto de perturbaciones débiles sobre el oscilador salino, encontrándose que los ritmos resultantes de aplicar perturbaciones periódicas eran bastante distintos. En este trabajo aplicaremos perturbaciones débiles sobre el Oscilador de Rayleigh y comparemos con los resultados experimentales antes publicados. Antes de estas perturbaciones

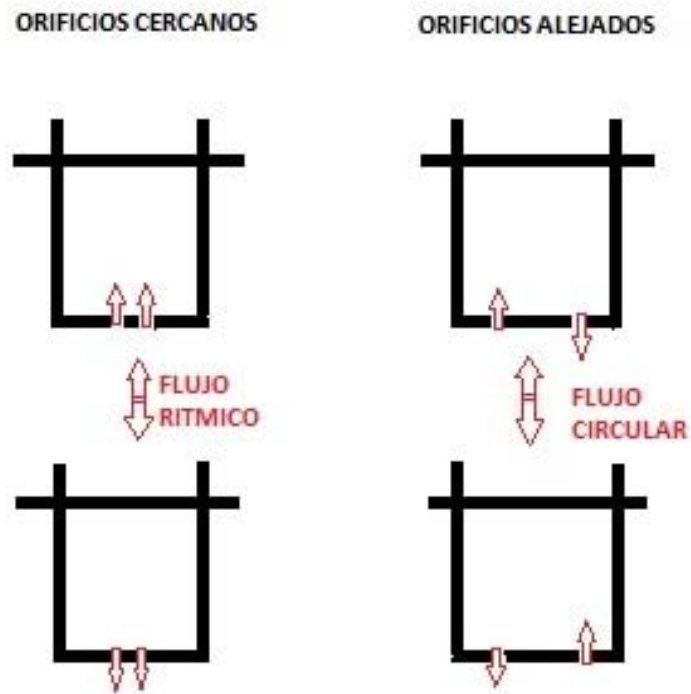


Figura 1.7: La organización de los flujos en un solo vaso con dos agujeros depende de la distancia entre los agujeros, el vaso grande no se muestra.

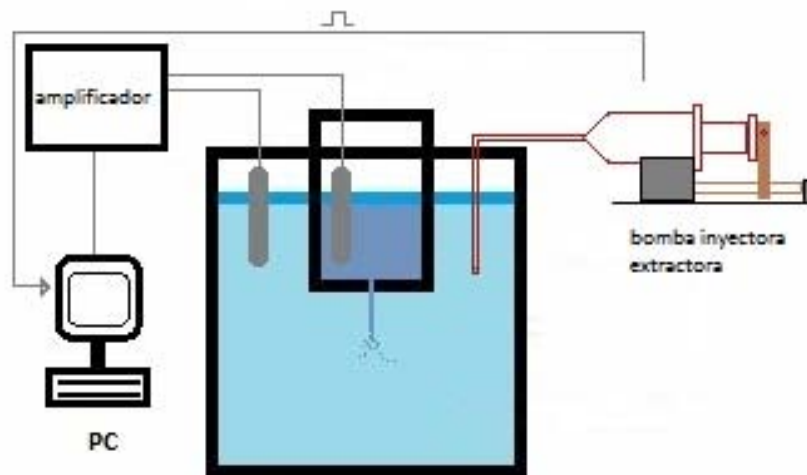


Figura 1.8: . Dispositivo experimental para perturbar al oscilador salino. Una bomba controla la inyección y recuperación de agua pura contenida en dos jeringas de 60 mililitros. Una computadora controla la bomba para definir los momentos y duraciones de los traslados de agua.

débiles, reproduciremos las simulaciones de las perturbaciones fuertes como una forma de verificar nuestro procedimiento de simulación.



# 2

## Método

### 2.1. El Oscilador de Poincaré

La teoría del reinicio permite estudiar el efecto de perturbaciones periódicas sobre un oscilador no lineal con un ciclo atractor robusto, a partir de conocer el efecto de perturbaciones aisladas. La hipótesis central que supone este enfoque es que el sistema regresará a su ciclo límite después de ser perturbado. En general regresará en un momento distinto de la oscilación de aquel en fue perturbado. En el lenguaje que se ha introducido para describir estos conceptos, al momento de la oscilación en que se realiza la perturbación se le llama fase vieja y al momento de la oscilación al que regresará el sistema después de la perturbación se le llama fase nueva. Con esta herramienta no necesitamos conocer una descripción detallada del sistema bajo estudio, que puede ser físico, químico, financiero, etc. Sólo necesitamos que el sistema regrese a su ciclo límite después de ser perturbado. El investigador Leon Glass del Centro de Dinámica no Lineal de la Universidad de McGill, ha introducido una manera sencilla de explicar algunos conceptos de la teoría del reinicio [3], a partir de considerar perturbaciones en el Oscilador de Poincaré, por lo cual pasaremos a estudiar este sistema. El Oscilador de Poincaré se describe mediante un par de ecuaciones diferenciales en coordenadas polares:

$$\frac{dr}{dt} = kr(1 - r), \quad (2.1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = C, \quad (2.2)$$

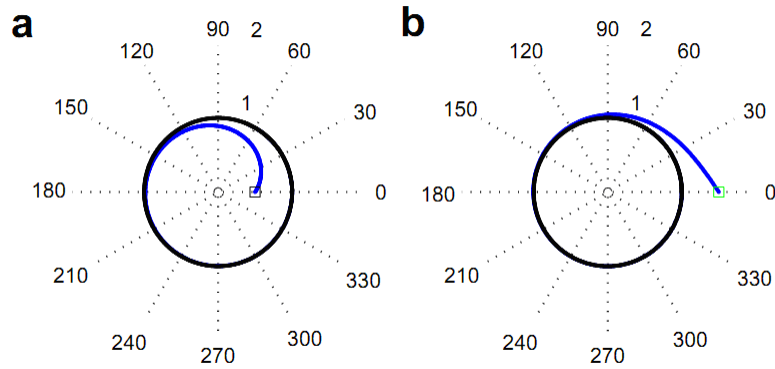


Figura 2.1: Trayectorias en el oscilador de Poincaré. La circunferencia negra corresponde al círculo de radio uno y es el ciclo atractor. En el panel (a) se ilustra el comportamiento de las condiciones iniciales al interior de la circunferencia, en el panel (b) de las condiciones iniciales exteriores a la circunferencia.

donde  $r$  y  $\theta$  corresponden al radio y al ángulo,  $k$  y  $C$  son constantes. Puede observarse que el ángulo crece siempre con la misma tasa. La derivada temporal del radio es cero para  $r = 0$  y  $r = 1$ . Para valores del radio iniciales menores que uno, la derivada del radio es positiva y éste crece:

$$r_0 < 1 \implies \frac{dr}{dt} > 0. \quad (2.3)$$

Mientras que si el radio inicial es mayor que uno, la derivada del radio es negativa y el radio decrece:

$$1 < r_0 \implies \frac{dr}{dt} < 0 \quad (2.4)$$

Estas condiciones son las que ilustramos en la figura 2.1

La rapidez con que el oscilador se acerca al ciclo límite desde cualquier condición inicial depende del valor de la constante  $k$  en la ecuación diferencial para el radio. En la figura 2.2 panel (a), mostramos la evolución del sistema cuando  $k = 0.1$ . La condición inicial se marca con un pequeño cuadrado negro y el sistema da un par de vueltas antes de estar muy cerca del círculo de radio uno, el cual se pintó de negro. En los paneles (b), (c) y (d) se ha representado la misma evolución pero cuando la constante  $k$  toma los valores 1.5, 5 y 50. Se puede observar que el acercamiento al ciclo límite es cada vez más rápido. En el

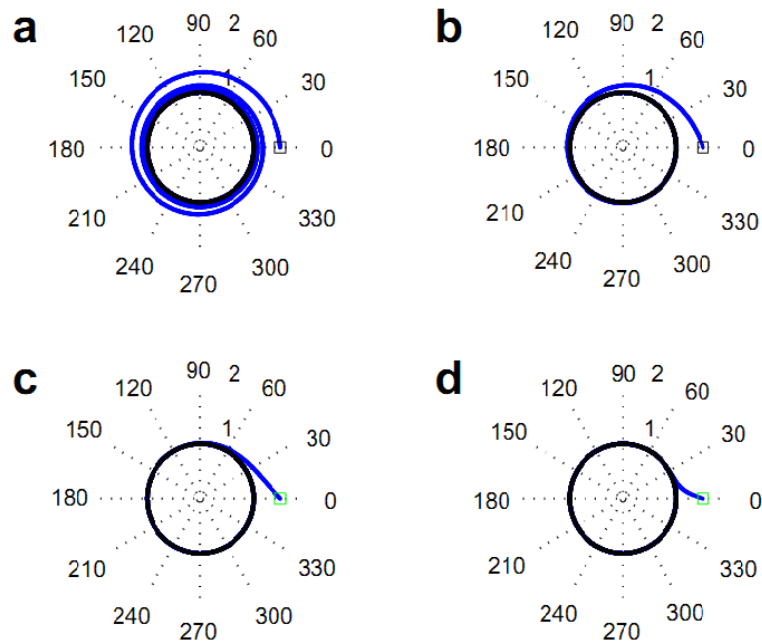


Figura 2.2: La velocidad con la que las trayectorias se acercan al ciclo límite depende del valor de  $k$ . En los paneles (a), (b), (c) y (d), la constante vale respectivamente 0.1, 1.5, 5 y 50.

panel (d), el acercamiento es prácticamente por el radio que une el centro del ciclo límite con el punto inicial.

## 2.2. La teoría del reinicio

La propuesta de L. Glass para estudiar la teoría del reinicio parte de considerar que la constante  $k$  tiene un valor infinito, de tal manera que desde cualquier condición inicial el sistema evolucionara instantáneamente hacia el ciclo límite, y lo hará por el radio vector que une el punto con el centro del ciclo límite. Para estudiar el efecto de las perturbaciones comenzaremos por marcar un punto en la oscilación, al cual denominaremos como el evento marcador, a partir del cual comenzaremos a medir la oscilación. En nuestro caso el evento marcador será el extremo derecho del círculo. Una vuelta completa nos regresará a ese punto, y usualmente se le asigna la magnitud  $2\pi$ , en nuestro caso consideraremos que tiene magnitud uno. Entonces todos los puntos del ciclo límite, o fases, tendrán valores ente 0 y

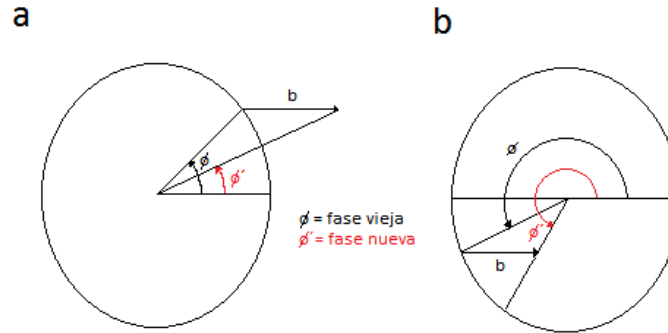


Figura 2.3: Una perturbación al Oscilador de Poincaré consistente en una traslación a la derecha por una distancia  $b$ , lleva instantáneamente al oscilador a una nueva posición en el ciclo. Las fases viejas y nuevas están representadas por  $\phi$  y  $\phi'$  respectivamente. En el panel (a) la oscilación se atrasa, en el panel (b) se adelanta.

1.

Si el oscilador se encuentra en una cierta fase  $\phi$  (fase vieja) y lo perturbamos en ese momento, lo sacaremos del ciclo límite hacia alguna otra posición en el espacio fase. Si convenimos que las perturbaciones son traslaciones a la derecha por una magnitud  $b$ , el sistema regresará instantáneamente al ciclo límite por la línea que une el centro del ciclo con el extremo de la traslación  $b$ . En la figura 2.3 hemos representado esta situación para dos momentos distintos de la oscilación. En el panel (a) la fase vieja se encuentra en el primer cuadrante y la fase nueva resulta menor que la fase vieja: el oscilador se atrasa. En el panel (b) la fase vieja se encuentra en el tercer cuadrante, y la fase nueva resulta mayor que la fase vieja: el oscilador se adelanta.

Con estas convenciones para las perturbaciones y las fases, es posible deducir trigonométricamente el valor de la fase nueva a partir del valor de la fase vieja. En la figura 2.4 se han marcado como  $x$  y  $y$ , los valores para el coseno y el seno de la fase vieja. Si calculamos la tangente de la fase nueva tenemos:

$$r = 1, \tag{2.5}$$

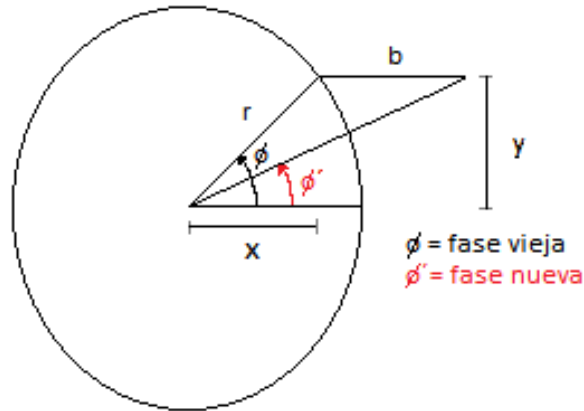


Figura 2.4: Es posible conocer la fase nueva a partir de la fase vieja, pues ambas tienen el mismo cateto opuesto, y el cateto adyacente de la fase nueva, es igual al de la fase vieja más  $b$ .

$$\cos(\phi) = \frac{x}{r} = x, \quad (2.6)$$

$$\sin(\phi) = \frac{y}{r} = y, \quad (2.7)$$

$$\tan(\phi') = \frac{y}{x + b} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi) + b}, \quad (2.8)$$

$$\phi' = \arctan\left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi) + b}\right). \quad (2.9)$$

La gran mayoría de las veces estamos interesados en la fase nueva producida después de cada perturbación, en otras ocasiones nuestro interés principal radica en el conocer el tiempo que dura la oscilación perturbada. En la figura 2.5 reelaboramos una de las figuras anteriores para aclarar estas medidas. Hemos indicado con un semicírculo en color azul la parte de la oscilación que le falta al sistema por recorrer cuando ya se encuentra en la fase nueva. A la longitud de este semicírculo se le conoce como cofase. Por construcción la suma de la fase nueva y la cofase es 1, esto es, el periodo no perturbado:

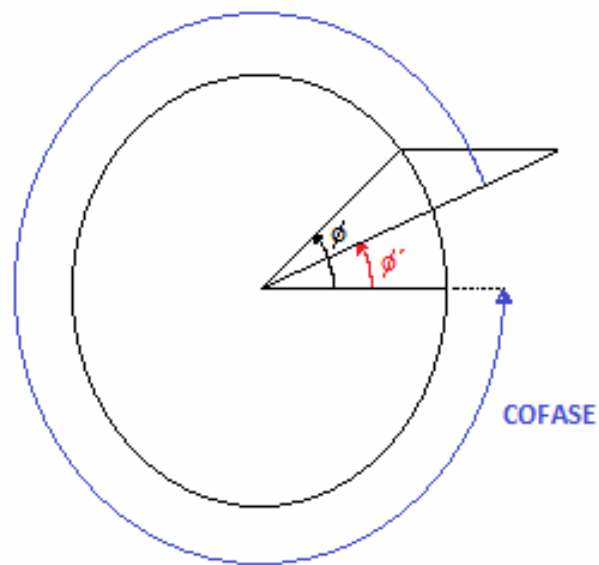


Figura 2.5: Se indica la fase vieja como  $\phi$ , la fase nueva como  $\phi'$  y la cofase corresponde al semicírculo en azul.

$$1 = \text{fase nueva} + \text{cofase.} \quad (2.10)$$

Sin embargo, el sistema se encontraba en la fase vieja cuando fue perturbado, lo cual quiere decir que ya había recorrido del ciclo de oscilación un intervalo de tiempo igual a la fase vieja, lo que durará la oscilación alterada será:

$$T_1 = \text{fase vieja} + \text{cofase} \quad (2.11)$$

Estas fórmulas en particular permitirán calcular la fase nueva si se conoce la cofase o el periodo perturbado. En el primer caso la fase nueva es:

$$\text{fase nueva} = 1 - \text{cofase.} \quad (2.12)$$

En el primer renglón de la figura 2.6 hemos gráficado la evolución de la fase nueva para dos intensidades de perturbación: 0.5 (gráfica izquierda) y 0.95 (gráfica derecha). En el renglón inmediatamente inferior mostramos la evolución de los periodos perturbados correspondientes.

### 2.3. Perturbaciones periódicas

Pasemos ahora a considerar la aplicación de trenes de perturbaciones periódicas al Oscilador de Poincaré. Supongamos que aplicamos pulsos con intervalos de perturbación  $\tau$ . Supongamos también que representamos la dependencia de las fases nuevas con las fases viejas con una función  $f$ :

$$\text{fase nueva} = f(\text{fase vieja}) \quad (2.13)$$

Si aplicamos una perturbación cuando el sistema se encuentra en la fase  $\phi_0$  tendremos:

$$\phi'_0 = f(\phi_0) \implies \phi_1 = f(\phi_0) + \tau. \quad (2.14)$$

Si nuevamente aplicamos una perturbación cuando el sistema se encuentra en  $\phi_1$ :

$$\phi'_1 = f(\phi_1) \implies \phi_2 = f(\phi_1) + \tau. \quad (2.15)$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos la secuencia de fases por las que pasa el sistema antes de cada perturbación. Debe considerarse que existen casos en que la fase

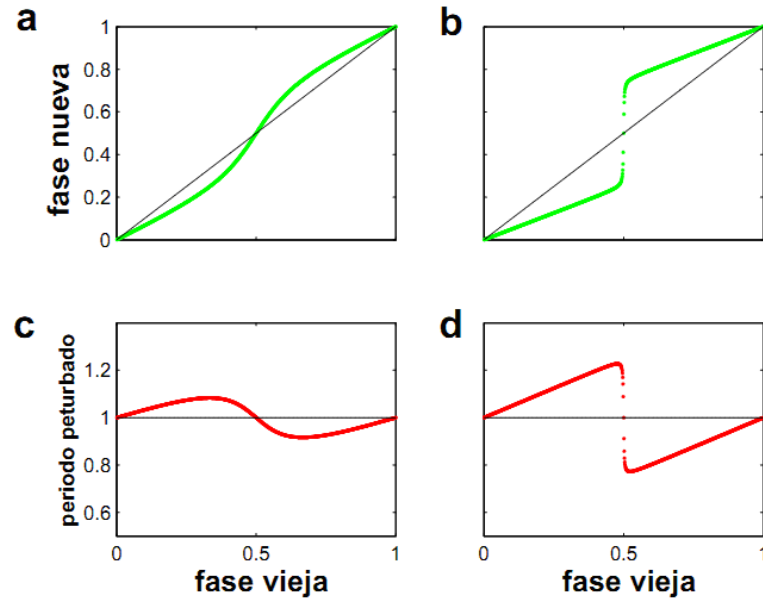


Figura 2.6: Efectos de las perturbaciones sobre la fase nueva (renglón superior) y el periodo de oscilación (renglón inferior). En los paneles (a) y (b) se muestra la dependencia de las fases nuevas con las fases viejas para perturbaciones con intensidad 0.5 y 0.99 respectivamente. En los paneles (c) y (d) se muestra el efecto sobre el periodo perturbado para las mismas intensidades. Puede notarse que en la primera mitad de las fases viejas el periodo se alarga y para la segunda mitad se acorta.



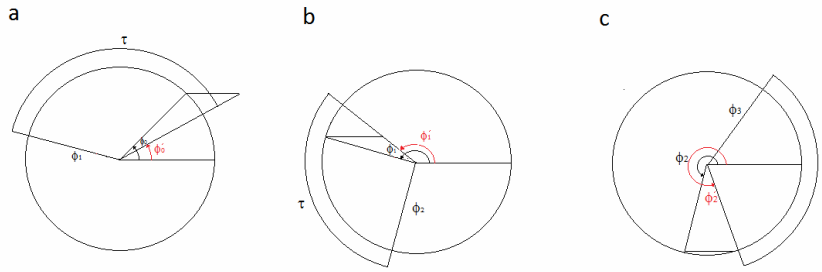


Figura 2.7: Representación de perturbaciones periódicas en el Oscilador de Poincaré. El periodo de perturbación es  $\tau$ . En el momento de la perturbación el oscilador se encuentra en  $\phi_i$ , la perturbación lo lleva a  $\phi'_i$ , la siguiente perturbación se dará en  $\phi_{i+1} = \phi'_i + \tau \bmod 1$ .

resultante de estas operaciones se mayor que uno. Por ejemplo si  $f(\phi_n) = 0.9$  y  $\tau$  es 0.4, tendremos

$$\phi_{n+1} = 0.9 + 0.4 = 1.3 \quad (2.16)$$

Pero el oscilador sólo tiene fases entre 0 y 1. Como  $\phi_{n+1}$  se pasó 0.3 del evento marcador, la fase será precisamente ese valor: 0.3. De manera que el procedimiento para calcular la secuencia de fases será:

$$\phi_{n+1} = f(\phi_n) + \tau \bmod 1 \quad (2.17)$$

En la figura 2.7 hemos representado gráficamente este proceso en el Oscilador de Poincaré.

Aunque la ilustración de la figura 2.7 permite construirse una imagen del proceso que ocurre con las perturbaciones periódicas, en la mayoría de los osciladores con un ciclo atractor robusto la trayectoria del ciclo no es tan sencilla. Es por ello que hemos construido otro par de figuras en las cuales seguiremos paso a paso el proceso de la perturbación periódica pero ahora describiéndolo en la gráfica de la función fase vieja – fase nueva o Curva de Transición de Fases. En la figura 2.8 hemos reproducido en cuatro paneles la curva de transición de fases correspondiente a la intensidad de perturbación 0.5. En el primer panel, marcamos en el eje horizontal el valor de la primera fase donde se aplicará una perturbación:  $\phi_0$ . El efecto de la perturbación es colocar el sistema en la fase  $\phi'_0$ . El intervalo entre perturbaciones es  $\tau$ , de manera que debemos esperar ese tiempo antes de aplicar una nueva perturbación. Entonces la fase donde se aplicará la perturbación será  $\phi_1 = \phi'_0 + \tau$ .

Debemos ahora localizar en el eje horizontal ese valor  $\phi_1$ , para ello aprovecharemos la línea diagonal en la gráfica, que representa la función identidad, ya que cada punto tiene

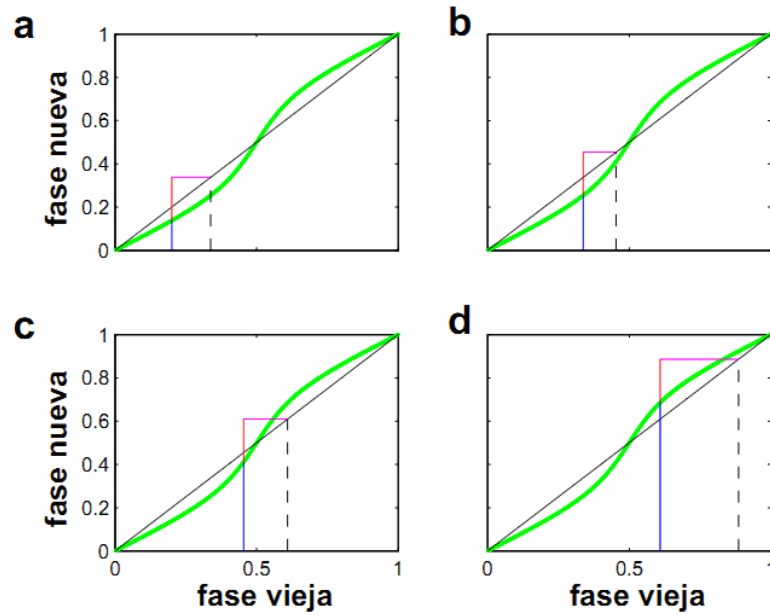


Figura 2.8: Representación de perturbaciones periódicas con intensidad 0.5 y periodo 0.2. En el panel (a) la condición inicial,  $\phi_0$ , es la intersección del eje horizontal con la línea azul, la fase nueva es la intersección de la línea azul con la CTF. El tiempo que hay que esperar antes de dar otra perturbación es 0.2 y esa es la longitud de la línea vertical roja. La longitud total de la azul más la roja define la fase  $\phi_1$  que es donde se dará la nueva perturbación, y que se localiza en la base de la línea punteada. Esta línea es la condición inicial en el panel (b). El proceso se repite cuantas veces sea necesario.

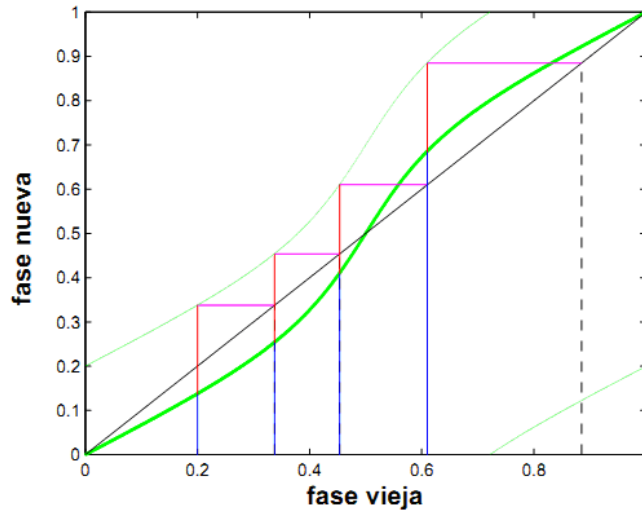


Figura 2.9: El procedimiento desplegado paso por paso en la Figura 2.8, se resume en esta figura. La iteración puede verse como segmentos de líneas rectas que van de la CTF trasladada una distancia  $\tau$  en la dirección vertical a la línea diagonal que representa a la función identidad.

la misma coordenada en el eje horizontal y en el eje vertical. Trazamos una línea recta horizontal hasta la línea diagonal y “bajamos” ese valor trazando una línea vertical desde la intersección hasta el eje, localizando de esa manera el valor de  $\phi_1$  en el eje horizontal. Si repetimos todo el procedimiento antes descrito, pero tomando ahora como condición inicial el valor  $\phi_1$  panel (b), obtenemos el valor  $\phi_2$ . Repitiendo este procedimiento varias veces, obtenemos la secuencia de fases en las que se encuentra el oscilador antes de cada perturbación. En la figura 2.9 se resume el proceso seguido en los cuatro paneles de la figura 2.8. Puede verse que el procedimiento se simplifica si trasladamos la curva de transición de fases verticalmente una distancia  $\tau$ , y repetimos la localización de las intersecciones entre la curva de transición de fases y la función identidad.

Este análisis de la secuencia de estados por los que pasa un oscilador cuando se le aplican perturbaciones periódicas se ha aplicado a diversos sistemas, encontrándose algunas veces que el sistema tiende a un solo estado o punto fijo, a una secuencia de estados o

comportamiento periódico, o a una secuencia irregular de estados lo cual algunas veces se ha demostrado que es un comportamiento caótico. En el siguiente capítulo aplicaremos este tipo de análisis al oscilador de Rayleigh en dos situaciones distintas: perturbándolo fuertemente o suavemente, encontraremos en todos los casos comportamientos periódicos, pero en el segundo caso el conjunto de comportamientos será más variado.

# 3

## Perturbando al Oscilador de Rayleigh

### 3.1. Las ecuaciones diferenciales

El objetivo central de esa tesis es obtener los ritmos o acoplamientos que ocurren cuando aplicamos perturbaciones bifásicas al Oscilador de Rayleigh, usando como herramienta de predicción de estos acoplamientos la Teoría del Reinicio. Estas perturbaciones serán fuertes o débiles. La ecuación diferencial que usaremos, será la que construyeron como un modelo del Oscilador Salino Okamura y Yoshikawa en el 2000 [13], para lo cual aproximaron y estudiaron la descripción que en términos de las ecuaciones de Navier-Stokes se hace del Oscilador Salino en coordenadas cilíndricas. La ecuación es la siguiente:

$$\ddot{y} = A\dot{y} - B\dot{y}^3 - \omega_0^2 y, \quad (3.1)$$

con  $A = 56$ ,  $B = 1.2 \times 10^8$  y  $\omega_0^2 = 7$ . Esta es una ecuación diferencial de segundo orden que puede ser convertida en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo el cambio de variable  $\dot{y} = x$ , con lo que resulta:

$$\dot{x} = Ax - Bx^3 - \omega_0^2 y, \quad (3.2)$$

$$\dot{y} = x. \quad (3.3)$$

Para tener una idea del tipo de soluciones que podemos esperar de este sistema de ecuaciones, procedemos a graficar las dos isóclinas, esto es, dibujamos el lugar geométrico que

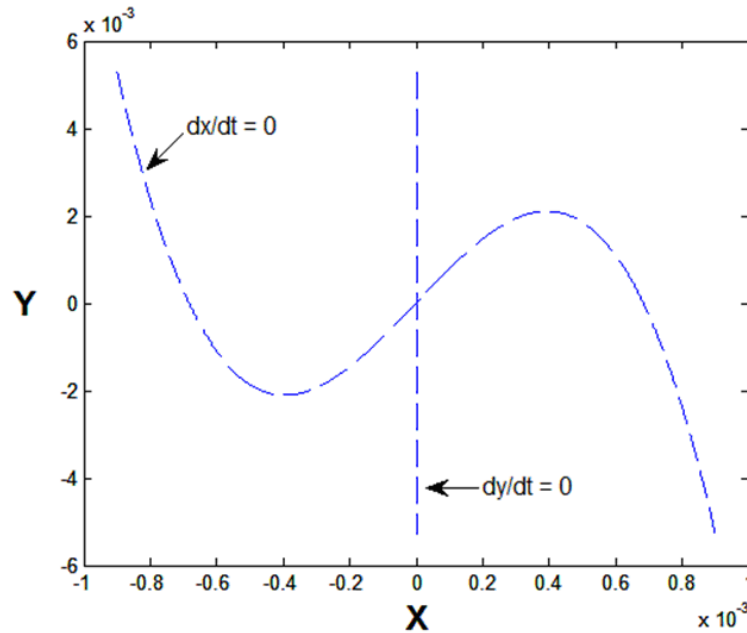


Figura 3.1: Gráficas de las isóclinas de las ecuaciones de Rayleigh.

corresponde a  $x' = 0$  y  $y' = 0$ . En el primer caso obtenemos la ecuación:

$$y = \frac{A}{\omega_0^2}x - \frac{B}{\omega_0^2}, \quad (3.4)$$

que corresponde a una cúbica centrada en el origen, como se muestra en la Figura 3.1. La segunda ecuación es:  $x = 0$ , que corresponde a una línea recta vertical. Puede observarse que ambas isóclinas se cruzan en el origen, de manera que este será un punto fijo del sistema de ecuaciones.

En la Figura 3.2 hemos agregado a la gráfica de las isóclinas una indicación del flujo del sistema de ecuaciones diferenciales, para lo cual hemos definido una malla de puntos equidistantes en el plano, en cada punto hemos calculado el valor de las derivadas en  $x$  y en  $y$ , representando luego como vectores los valores resultantes. La primera característica que resalta del diagrama de flujo, es que este es básicamente horizontal, esto se debe a que las derivadas en  $x$  tienen valores muchos mayores que las derivadas en  $y$ . Si graficáramos solo las derivadas en  $y$  tendríamos que a la izquierda de la isóclina vertical el flujo es hacia abajo, y a la derecha apunta hacia arriba. La segunda característica que podemos observar

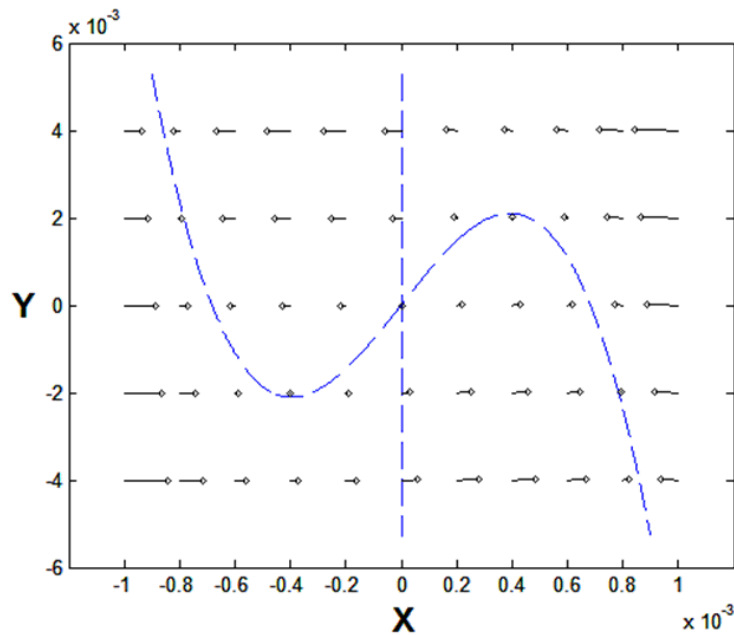


Figura 3.2: Flujo alrededor de las isóclinas de las ecuaciones de Rayleigh. Las líneas discontinuas son las isóclinas, las puntas de las flechas indican el flujo. La rama interna de la isóclina cubica repele el flujo y las externas lo atraen.

es que el flujo apunta hacia la izquierda para los puntos por encima de la isóclina cúbica, y a la derecha para puntos por debajo de ésta. Finalmente puede notarse que la magnitud de los vectores es mayor a medida que nos alejamos de las isóclinas.

El análisis anterior nos lleva a inferir que cualquier trayectoria que arranque en cualquier punto del plano viajará hacia las ramas exteriores de la isóclina. La porción que se encuentra entre el mínimo y el máximo de la isóclina repele las trayectorias, mientras que las porciones restantes las atraen. Una vez que las trayectorias son atrapadas por estas ramas exteriores ya no se mueven en la dirección horizontal, puesto que por definición en estas la derivada en  $x$  es cero. Pero si se mueven en la dirección vertical, si la trayectoria fue atrapada por la rama izquierda, baja por esta hasta el mínimo, se sale de la rama y es movida fuertemente por el flujo a la derecha, hasta alcanzar la otra rama. En esta rama el flujo es hacia arriba, de manera que la trayectoria se mueve hasta alcanzar el máximo, se sale de este y es movida rápidamente a la izquierda. De manera que todas las trayectorias, sin importar en que punto comiencen, forman un ciclo que gira alrededor del punto fijo y en sentido

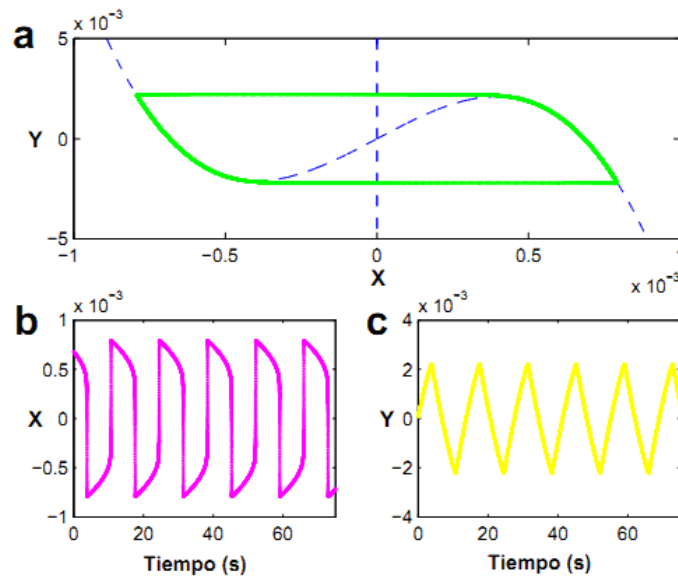


Figura 3.3: (a) Ciclo límite en el oscilador de Rayleigh; (b) oscilación en la variable  $x$ ; (c) oscilación en la variable  $y$ .

contrario a las manecillas del reloj.

Para tener una idea más precisa de las soluciones de este sistema de ecuaciones hay que integrarlo numéricamente. Hay muchos métodos de integración numérica, pero siguiendo a la referencia [17], nos bastará con un método muy sencillo, el método de Euler, con un paso de integración temporal de una milésima de segundo. Los resultados de este procedimiento de integración los podemos ver en la Figura 3.3. En el panel (a) hemos dibujado en verde la trayectoria del ciclo límite, que se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj. En los paneles (b) y (c), desplegamos la evolución temporal de las variables  $x$  y  $y$  respectivamente. En particular en el panel (b), puede verse que el sistema evoluciona “a dos velocidades”, una que se recorre muy rápido y corresponde en el panel (a) a los cambios de una rama a otra, y en el panel (b) corresponde a los trazos casi verticales de la variable  $x$ . La parte lenta ocurre cuando el sistema se mueve en las ramas en (a), y se grafican como trazos casi horizontales en el panel (b).



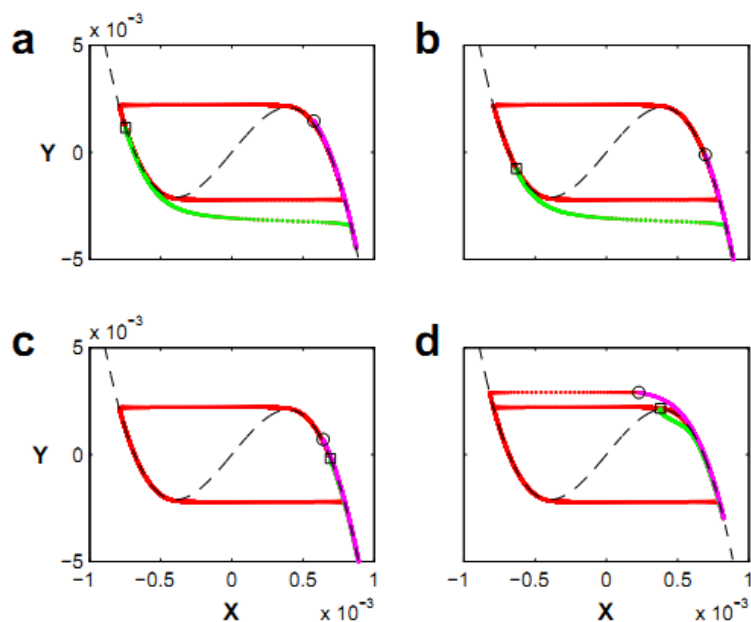


Figura 3.4: El efecto de las perturbaciones mostrado en el espacio fase. Cada uno de los paneles corresponde con los de la Figura 3.5. El cuadrado indica el inicio de la perturbación y el círculo vacío su final. En los dos primeros paneles las perturbaciones adelantan fuertemente al oscilador, mientras que en el último panel se induce un atraso al imponerse al sistema recorrer un tramo extra de la rama izquierda de la isóclina.

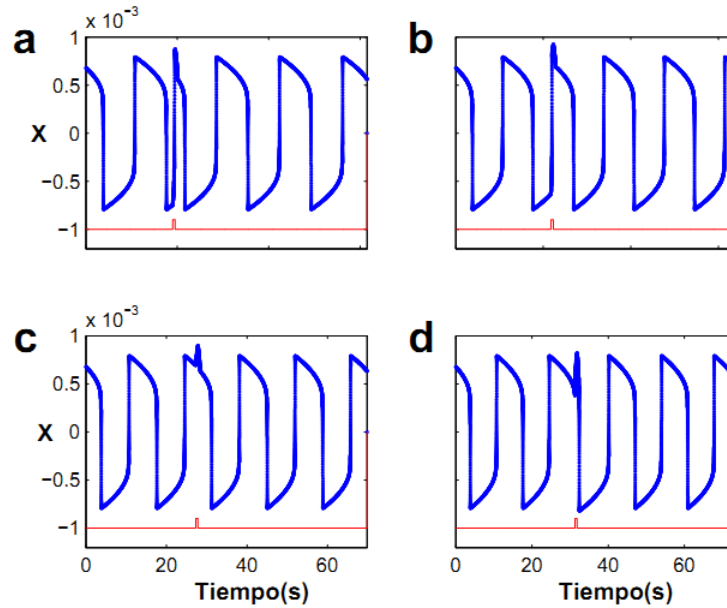


Figura 3.5: Efecto de perturbaciones fuertes sobre el oscilador de Raleigh. (a) Perturbación al comienzo de la oscilación ( $\phi = 0.1$ ), provoca una oscilación muy breve. (b) Perturbación cuando la  $\phi = 0.3$ , provoca una oscilación de duración mayor que en el inciso anterior pero menor que la oscilación normal. (c) Perturbación para la fase 0.7 que no provoca prácticamente ningún efecto. (d) Perturbación al final de la oscilación ( $\phi = 0.9$ ), alarga ligeramente la oscilación.

### 3.2. Perturbaciones Fuertes al Oscilador de Rayleigh

Vamos a proceder ahora a perturbar la oscilación. Como nos interesa controlar el momento en que se dan estos pulsos, marcaremos un momento de la oscilación al cual llamaremos el evento marcador. Este momento será el valor mínimo de la variable  $x$ . De mínimo a mínimo de esta variable se mide el periodo de oscilación, que para esta realización del Oscilador de Rayleigh tiene un valor de 13.8 segundos. En el diagrama del ciclo de la Figura 3.3, panel (a), este evento marcador corresponde a la esquina superior izquierda.

Las perturbaciones serán bifásicas, esto es, aplicaremos incrementos y decrementos en la variable  $y$ , por pasos. En la Figura 3.4 hemos marcado el comienzo de la primera parte de la perturbación con un cuadrado, mientras que el final de la segunda parte de la perturbación corresponde a un círculo vacío. Durante 552 pasos de integración incrementaremos  $y$ ,

durante otros 552 pasos reduciremos  $y$ . Estos 552 pasos corresponden al 4% de la duración del periodo normal de este Oscilador de Rayleigh, y se toma el 4% porque fue la duración de las perturbaciones que se aplicaron en el Oscilador Salino que inspiró este trabajo. La magnitud de la perturbación aplicada en cada uno de estos pasos, es de  $1 \times 10^{-5}$ , y se ha establecido buscando que aunque se aplique uno de estos estímulos al principio de la oscilación se provoque un cambio en el periodo de oscilación perturbado. En las Figuras 3.4 y 3.5 mostramos el efecto de este tipo de perturbación en cuatro momentos distintos del ciclo. En los paneles (a) y (b) la perturbación se aplica en la primera mitad de la oscilación, cuando el sistema se encuentra recorriendo el lado izquierdo del ciclo (véase Figura 3.4). En ambos casos puede verse que al principio de la perturbación el sistema se mueve dentro de la rama izquierda de la isóclina, pero al descender más allá del mínimo la trayectoria se mueve hacia la rama derecha (trazo verde). Durante la segunda parte de la perturbación, que produce la trayectoria dibujada en magenta el sistema se mueve dentro de la rama derecha de la isóclina.

En la Figura 3.5 puede verse que el efecto de esta maniobra es reducir la duración de la oscilación perturbada. La reducción es mayor en el panel (a) que en el panel (b), porque en el primer caso la perturbación se aplicó en una fase más temprana de la oscilación. En los paneles (c) y (d) de la Figura 3.4 se muestra el efecto de aplicar la perturbación bifásica en la segunda mitad del ciclo. En ambos casos el efecto es muy pequeño, lo cual puede advertirse porque el cuadradito y el círculo que indican el principio y el final de la trayectoria perturbada, están muy cercanos. En el panel (c) de la Figura 3.5 no puede notarse efecto en la duración del periodo perturbado, pero en el panel (d), se observa que éste se alarga ligeramente. Este último efecto solo ocurre cuando se perturba muy cerca del final del ciclo, y se debe a que el impulso final de la perturbación saca al sistema de su ciclo límite obligándolo a recorrer una trayectoria más larga.

Hay diversas maneras de tipificar el efecto de las perturbaciones sobre el ciclo límite y de seguir puntualmente sus efectos. En esta tesis seguiremos el esquema que se discutió en el capítulo anterior: la construcción de la Curva de Transición de Fases. La idea central de este esquema es suponer que la perturbación hace pasar al sistema instantáneamente de un momento a otro del ciclo límite. Al momento en el que iba el oscilador justo antes de la perturbación se le llama la fase vieja, al momento del ciclo posterior a la perturbación se le llama la fase nueva. En la Figura 3.6 hemos reproducido la evolución de la variable  $x$ , cuando se le da una perturbación en la primera mitad del ciclo, panel (a); y en la segunda mitad del ciclo, panel (b). En los dos esquemas se ha indicado los intervalos de tiempo

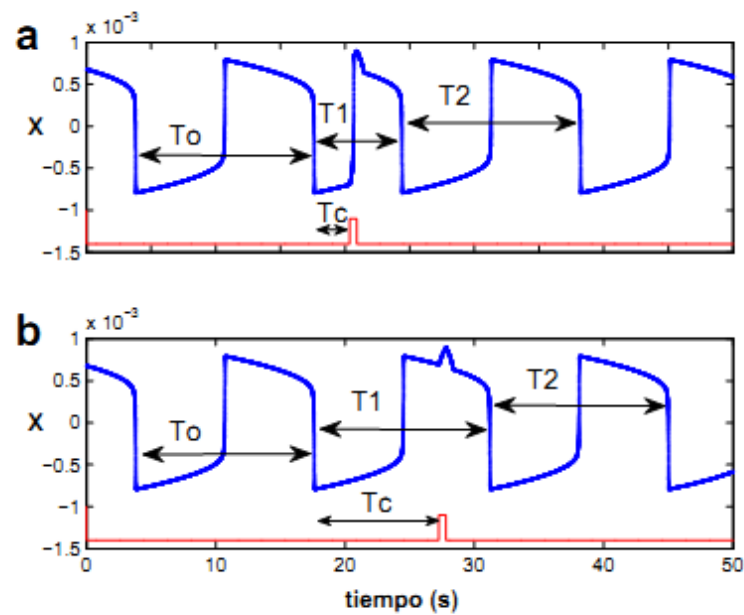


Figura 3.6: Diagramas para medir las fases viejas y nuevas para dos perturbaciones distintas en el oscilador salino. Se toma como el inicio de la oscilación el mínimo de la variable  $v$ .  $T_0$  y  $T_2$  corresponden a oscilaciones no perturbadas. En ambos paneles la perturbación se aplica en el momento  $T_c$  y el periodo resultante de aplicar la perturbación es  $T_1$ .

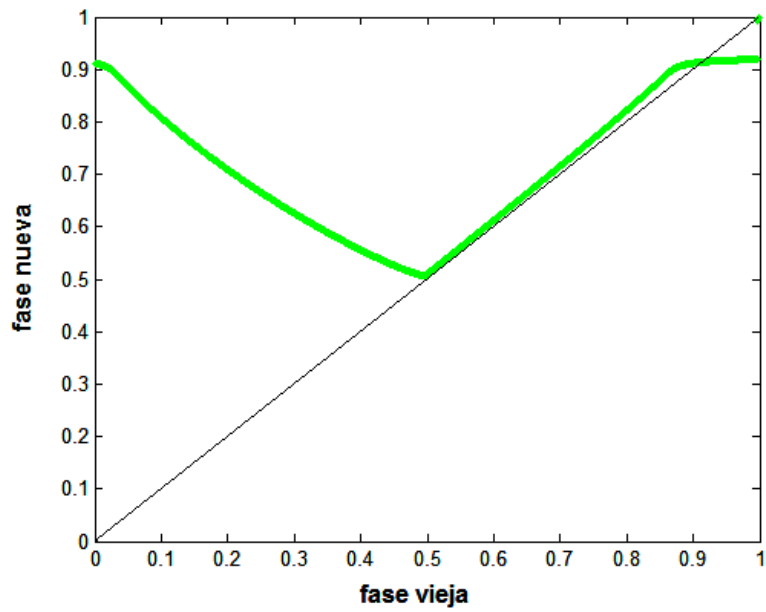


Figura 3.7: Curva de transición de fases para perturbaciones fuertes, esto es, que provocan inversiones de la oscilación cuando se aplican en su primera mitad.

correspondientes al periodo antes de la perturbación:  $T_0$ ; al periodo del ciclo perturbado:  $T_1$ ; y al periodo posterior a la perturbación:  $T_2$ . Se ha marcado en rojo, como un pulso cuadrado, el momento de aplicación del pulso bifásico, y se ha indicado el intervalo de tiempo entre la perturbación y el evento marcador próximo anterior como  $T_c$ . El efecto del pulso será, en general, adelantar o atrasar la oscilación, para saber si la atrasó o la adelantó, mediremos el tiempo que pasa entre la perturbación y el siguiente evento marcador, esto es  $T_1 - T_c$ , a este intervalo temporal se le denomina la cofase. Para deducir el momento o fase a la que se pasó la oscilación restamos a  $T_0$  la cofase.

Como será necesario comparar con los comportamientos de otros osciladores no lineales con un ciclo atractor robusto, normalizamos las distintas cantidades dividiéndolas entre  $T_0$ , resultando la fase vieja:

$$\phi = \frac{T_c}{T_0} \quad (3.5)$$

y la fase nueva

$$\phi' = \frac{T_0 - (T_1 - T_c)}{T_0} \quad (3.6)$$

La Figura 3.7 muestra la dependencia de los valores de la fase nueva con la fase vieja para 13,810 valores, es decir cada milésima de segundo. En esta gráfica también se dibuja a la función identidad como una línea diagonal en negro. Esta línea representa el lugar geométrico en que los valores de las fases nuevas son iguales a los valores de las fases viejas, físicamente correspondería a un experimento en que las perturbaciones no hicieron ningún efecto. Si para un valor de la fase vieja, la fase nueva está por encima de la función identidad quiere decir que el pulso bifásico adelantó la oscilación, en cambio si la fase nueva está por debajo de la identidad quiere decir que el pulso atrasó al oscilador. En la Figura 3.7 puede verse que para nuestro caso el oscilador se adelanta para la gran mayoría de las fases viejas. Estos adelantos son grandes para la primera mitad del intervalo de fases viejas, y apenas perceptibles para la segunda mitad de este intervalo. Hacia el final de las fases viejas el oscilador se atrasa ligeramente.

### 3.3. Perturbaciones periódicas fuertes

La Curva de Transición de Fases nos muestra cómo se comporta el oscilador ante perturbaciones aisladas, pero su utilidad principal es permitir la predicción del comportamiento del oscilador ante perturbaciones periódicas. La hipótesis esencial es que el oscilador se mantiene en su ciclo límite, y en caso de ser perturbado fuera de éste, regresará a él. Para

hacer los cálculos supondremos que regresará instantáneamente a él. De manera que si aplicamos trenes de perturbaciones en intervalos de tiempo iguales y sabemos en qué fase se encuentra el oscilador cuando aplicamos la primera perturbación, podemos deducir la secuencia de fases en que se encontrará el oscilador antes de cada perturbación. Explicaremos el procedimiento de deducción paso a paso, para después hacer su representación algebraica y geométrica.

Supongamos que daremos perturbaciones cada  $0.05 T_0$ , a lo cual nos referiremos de manera abreviada como cada  $0.05$ . Tomemos como la condición inicial la fase  $0.4$ , esto quiere decir que la primera perturbación la aplicaremos en ese valor de la fase, a la cual llamaremos  $\phi_0$ . La perturbación hará pasar el oscilador desde  $0.4$  a una nueva fase, la cual se encuentra descrita por la función plasmada en la Curva de Transición de Fases. Para encontrar ese valor de la fase nueva a partir de nuestros datos “experimentales”, podemos ajustar la CTF con alguna función o funciones si la CTF fuera discontinua. Alternativamente podemos tomar la fase nueva directamente del valor correspondiente de la fase vieja, en el caso de que la fase vieja no coincida con alguno de los valores calculados “experimentalmente”, se asignara como valor de la fase nueva el correspondiente a la fase vieja inmediatamente anterior. Este será el procedimiento que sigamos en esta tesis, de esa manera encontramos que el valor de fase nueva es  $0.61$ . Debemos ahora esperar un intervalo de tiempo  $0.05$  para aplicar la segunda perturbación, en ese momento la fase vale  $0.56 + 0.05$ , valor al que llamaremos  $\phi_1$ . Repitiendo nuevamente el cálculo con la CTF, tenemos que la siguiente nueva fase será  $0.61$ , y  $\phi_2$  tendrá el valor  $0.61 + 0.05$ . Este procedimiento de iteración se repetirá cuantas veces sea necesario.

Si representamos como  $f$  a la función que describe a la CTF, podemos escribir el procedimiento anterior como:

$$\phi_0 \rightarrow \phi'_0 = f(\phi_0) \rightarrow \phi_1 = f(\phi_0) + \tau \pmod{1} \quad (3.7)$$

$$\phi_1 \rightarrow \phi'_1 = f(\phi_1) \rightarrow \phi_2 = f(\phi_1) + \tau \pmod{1} \quad (3.8)$$

etc. Aquí la  $\tau$  representa el periodo de perturbación. La prima en las  $\phi$ 's se refiere a las fases nuevas. La operación  $\pmod{1}$ , se aplica cuando el valor de  $f(\phi_i) + \tau$  excede a la unidad, y significa restar la parte entera en esta cantidad, pues las fases solo pueden tomar valores entre cero y uno.

Para ilustrar un poco estas ideas en la Figura 3.8 hemos representado la condición

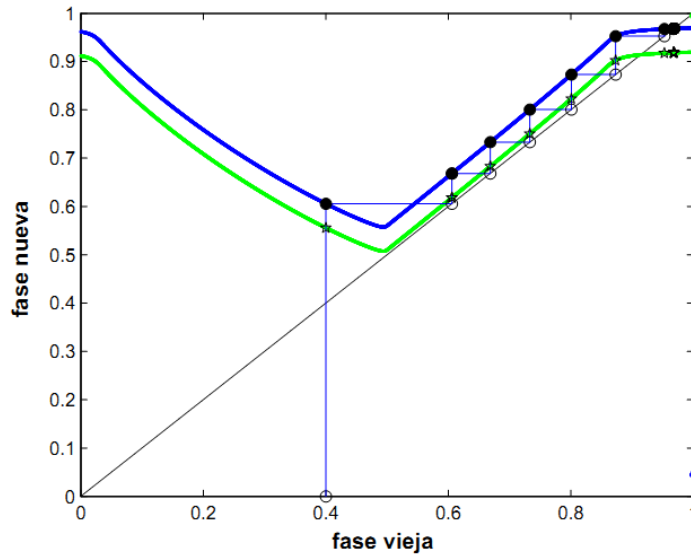


Figura 3.8: Iterando la curva de transición de fases. Explicación en el texto.

inicial como un círculo vacío en el eje horizontal. Al aplicar la perturbación en esta fase, por hipótesis pasamos inmediatamente al valor  $0.56 = f(0.4)$ , el cual hemos representado como una pequeña estrella en el CTF, curva que hemos graficado en verde. Para aplicar una nueva perturbación debemos esperar un intervalo de tiempo  $\tau$ , ese intervalo lo hemos representado con un segmento vertical recto, y al valor resultante de esta espera lo hemos representado con un círculo lleno. Este es el valor de la fase en que aplicaremos la nueva perturbación. Para utilizar nuevamente la CTF para calcular el efecto de la perturbación, debemos localizar este valor en el eje horizontal, lo cual realizamos trasladando con una línea horizontal el valor del círculo lleno hasta la línea diagonal (recuérdese que para esta línea los valores verticales y horizontales son los mismos por construcción), a partir de ese momento repetimos el mismo procedimiento cuantas veces consideremos necesario, produciendo en cada paso un círculo vacío para la fase inicial, una estrella para el valor perturbado y un círculo lleno para el valor después del tiempo de perturbación periódica. Puede observarse que el conjunto de círculos llenos es parte de la CTF, pero trasladada en la dirección vertical una distancia  $\tau$ , de tal manera que el procedimiento anterior puede simplificarse si de entrada se traslada la CTF una distancia  $\tau$  vertical, y se realizan las



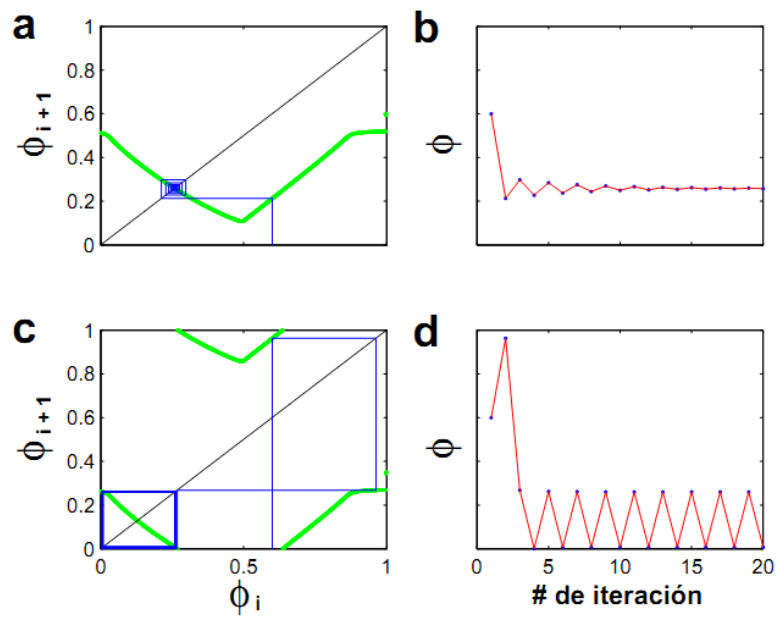


Figura 3.9: Representación de perturbaciones periódicas como iteraciones. (a) Periodo de perturbación  $\tau = 0.6$ , la órbita tiende hacia un solo punto. (b) Periodo de perturbación  $\tau = 0.4$ , la órbita se alterna entre dos puntos.

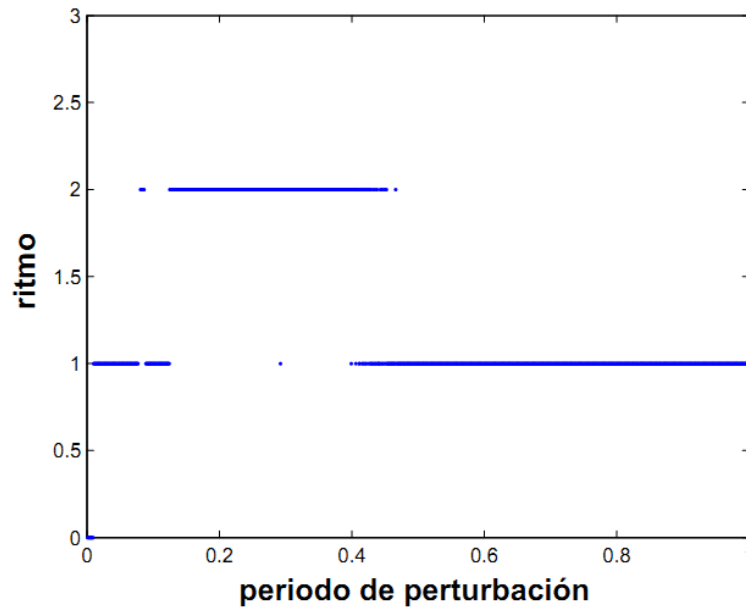


Figura 3.10: Diagrama de ritmos para perturbaciones fuertes. En el eje horizontal se indica el periodo de perturbación, en el vertical las fases hacia las cuales tiende asintóticamente el sistema.

iteraciones directamente de la línea diagonal a la curva trasladada. Una vez efectuada esta simplificación se realizan muchas iteraciones para entender a largo plazo cual es el comportamiento del sistema. A las construcciones geométricas como la ilustrada en la Figura 3.8 se les denomina “diagramas de telaraña”.

En la Figura 3.9 hemos dibujado dos ejemplos de la aplicación de este método, usando en ambos casos 0.6 como condición inicial. En el panel (a) el periodo de perturbación es 0.6 y puede verse que la órbita de las iteraciones tiende muy rápido a un solo punto, en el panel (b) graficamos el valor de las fases para cada iteración y se observa como convergen a un solo valor. En el panel (c) hemos aplicado perturbaciones cada 0.4 y ahora la órbita se queda alternando entre dos fases, tal como puede observarse en el panel (d).

Hemos aplicado el procedimiento ejemplificado usando mil valores del periodo de perturbación igualmente espaciados entre 0 y 1. En cada caso la condición inicial es 0.1 y se realizaron 2560 iteraciones. Se analizaron las últimas 32 fases para identificar hasta el ritmo

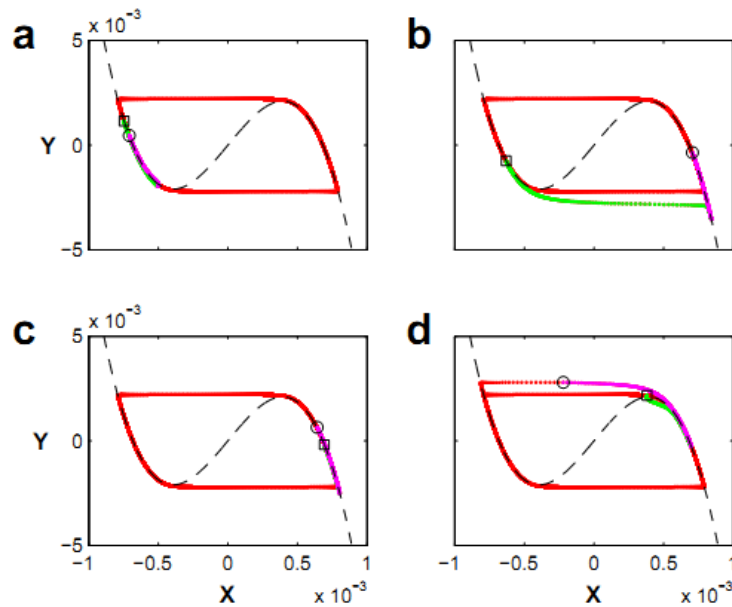


Figura 3.11: Representación en el espacio fase del efecto de perturbaciones débiles sobre el oscilador de Rayleigh. El cuadrado indica el comienzo de la perturbación y el círculo vacío su final.

16 y los resultados se muestran en la Figura 3.10. Puede verse que para esta magnitud de perturbación sólo existen dos ritmos, el ritmo uno en cada una de las órbitas converge a una sola fase, y el ritmo dos en que las órbitas se quedan alternando entre dos valores de la fase.

### 3.4. Perturbaciones débiles al Oscilador de Rayleigh

La segunda parte de este capítulo estudiaremos el efecto de perturbaciones débiles al Oscilador de Rayleigh. Como veremos la riqueza de ritmos de acoplamiento que obtendremos será cuatro veces la de las perturbaciones fuertes. Definimos las perturbaciones fuertes como aquellas que aplicadas en cualquier punto de la primera mitad de la oscilación, generan una nueva oscilación que es de duración diferente que las normales. Como vimos en la sección 3.2, al observar el comportamiento en el espacio fase, esto se debe a que para

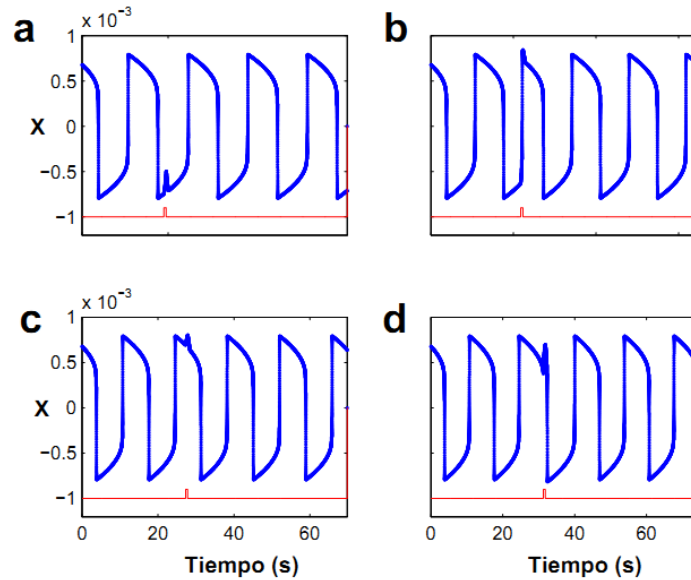


Figura 3.12: Cuatro efectos típicos de perturbaciones débiles sobre el oscilador de Rayleigh. (a) Prácticamente no hay efecto. (b) La oscilación se adelanta. (c) Adelanto de pequeña magnitud. (d) La oscilación se atrasa.

cualquier punto del ciclo límite que corresponda a la primera mitad de la oscilación, la trayectoria del sistema bajo la primera mitad de la perturbación siempre “cae” por debajo del mínimo de la isóclina cúbica, de donde se mueve con gran rapidez hacia la rama derecha de esa misma isóclina. Vamos a definir las perturbaciones débiles como aquellas que para un intervalo de las fases viejas, próximas al evento marcador, no caen por debajo del mínimo de la isóclina. En esas condiciones toda la trayectoria del sistema bajo la perturbación bifásica, cursa en la rama izquierda de la isóclina. Estas perturbaciones no provocan nuevas oscilaciones.

Para estudiar el comportamiento de nuestro sistema bajo este tipo de perturbaciones, tomaremos como la intensidad, la mitad de la usada para las perturbaciones fuertes, esto es  $0.5 \times 10^{-5}$ . En la Figura 3.11 puede verse en el espacio fase el efecto de cuatro de estas perturbaciones, aplicadas en distintos momentos del ciclo límite. En el panel a la perturbación se aplica en la fase 0.1, el cuadrado pequeño indica el comienzo de la perturbación y el círculo su final. Como puede verse no hay prácticamente diferencia entre ambas posiciones.

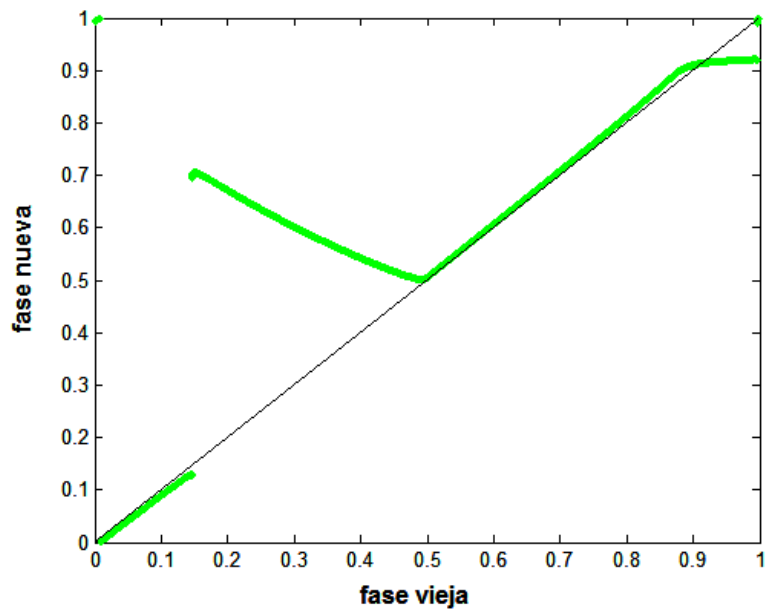


Figura 3.13: Curva de transición de fases para perturbaciones débiles.

En el panel (a) de la Figura 3.12 se grafica el efecto sobre la variable  $x$ , y puede verse que el efecto de la perturbación sólo es una pequeña deflexión en esta variable. En los paneles (b), (c) y (d), de las Figuras 3.11 y 3.12 se muestran los efectos de perturbaciones aplicadas en las fases 0.3, 0.7 y 0.99. Si se comparan con los paneles respectivos de las figuras 3.4 y 3.5, se puede notar que los efectos de las perturbaciones son cualitativamente iguales, esto es, para los paneles (b)'s se induce una nueva oscilación, para los paneles (c)'s no hay casi efecto, y para los paneles (d)'s se alarga la duración de la oscilación.

La similitud entre los efectos cuando se aplican pulsos débiles o cuando se aplican pulsos fuertes, para los últimos tres paneles en las Figuras 3.4, 3.5, 3.11 y 3.12, se reflejará en que las Curvas de Transición de Fases tendrán una porción semejante. Veanse las Figuras 3.7 y 3.13. La diferencia entre ambas curvas ocurre para las fases tempranas, en el caso de las perturbaciones débiles para las fases iniciales casi no hay efecto, entonces las fases nuevas son muy parecidas a las fases viejas y caen en la línea diagonal. El cambio, en la Figura 3.13, entre la ausencia de una oscilación inducida por la perturbación y la aparición de esta oscilación, es muy brusca. En general la CTF tiene una evolución suave con excepción del punto antes mencionado, y otro punto hacia el final de la CTF. Consideraremos como hipótesis de trabajo que la CTF es continua en todas partes con la excepción de los dos puntos antes mencionados.

### 3.5. Perturbaciones periódicas débiles al Oscilador de Rayleigh

Al igual que hicimos en la sección III.3 de este capítulo, utilizaremos la CTF recién obtenida para inferir los ritmos que pueden inducirse en el Oscilador de Rayleigh dando perturbaciones bifásicas suaves. En todos los casos tomaremos como la condición inicial la fase 0.1, aunque en la mayoría de los paneles de las Figuras 3.14 y 3.15 los diagramas se muestran arrancando de algunas de las fases que asintóticamente adquiere la órbita. La excepción la constituye el diagrama que se muestra en el panel (a) de la Figura 3.14, allí se muestra el comportamiento transitorio de la iteración en su acercamiento al punto fijo. Ocurrirá después de 20 iteraciones que el valor de la fase sea el mismo, si consideramos su valor hasta la tercera cifra decimal. Tenemos entonces la misma fase para cada iteración, y el valor de la fase coincide con el punto de intersección de la CTF con la línea identidad. Tal como se indica en las referencias [19-20], este punto corresponde a un punto fijo que atrae a las órbitas debido a que la pendiente de la CTF en el punto de intersección es menor que 1 en valor absoluto. Existe un amplio intervalo de periodos en que la condición anterior se

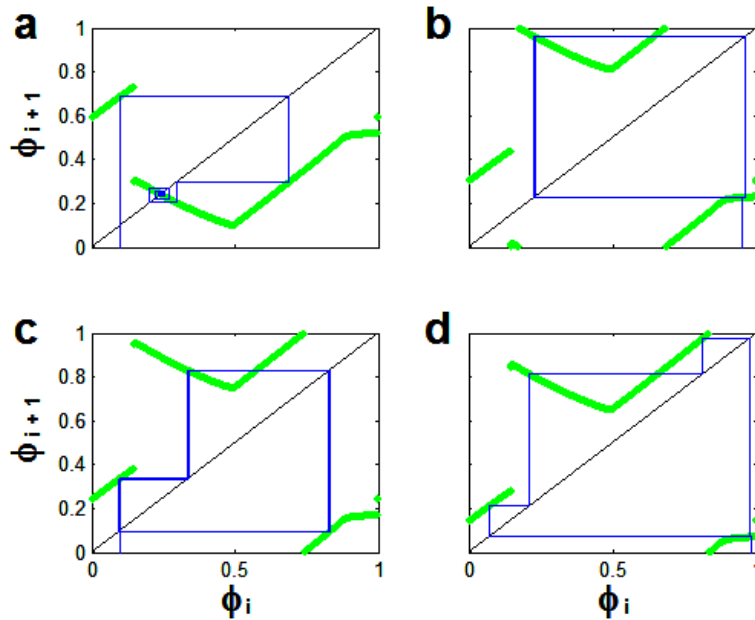


Figura 3.14: Efecto de perturbaciones periódicas para perturbaciones débiles. (a) Periodo de perturbación con  $\tau = 0.6$ , el ritmo resultante tiene periodo 1. (b) Periodo de perturbación  $\tau = 0.31$ , el ritmo resultante tiene periodo 2. (c) Periodo de perturbación  $\tau = 0.25$ , resulta un ritmo con periodo 3. (d) Periodo de perturbación  $\tau = 0.15$ , ritmo con periodo 4.

cumple, y eso implica que tenemos un amplio intervalo de periodos en que ocurre el ritmo 1.

Existe otro amplio intervalo de periodos en que no existe intersección entre la CTF y la función identidad. En estas condiciones las iteraciones llegarán a otros ritmos, como los ritmos 2, 3, 4 y 5 que se muestran en los paneles (b), (c) y (d) de la Figura 3.14 y (b) de la Figura 3.15. Estos ritmos aparecen para los periodos de perturbación 0.31, 0.25, 0.15 y 0.11, periodos cada vez más pequeños. Como puede verse en los paneles mencionados líneas arriba, estos ritmos están apareciendo porque la CTF y la gráfica de la función identidad forman un canal cada vez más angosto, en que la iteración tiene que dar cada vez más pasos para completar su órbita. Este crecimiento en el número de pasos de la órbita no es indefinido, pues se interrumpe cuando aparece la intersección entre el extremo derecho de la CTF y la función identidad. Existen otras maneras de tener órbitas cerradas, por ejemplo en el panel (a) de la Figura 3.15 se muestra otro tipo de “telaraña”, que da lugar

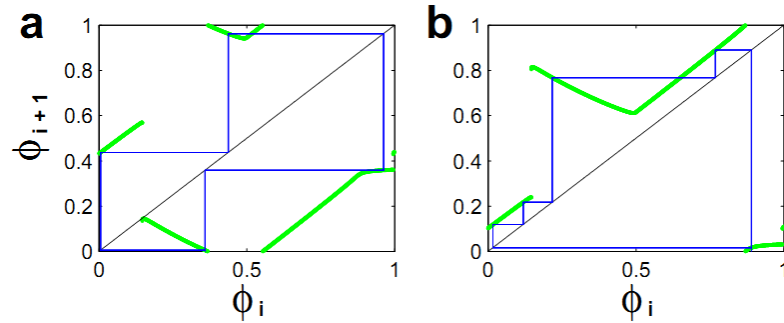


Figura 3.15: Efecto de perturbaciones periódicas para perturbaciones débiles. (a) Periodo de perturbación  $\tau = 0.47$ , aparece un ritmo con periodo 4. (b) Periodo de perturbación con  $\tau = 0.11$ , resulta un ritmo con periodo 5.

a un ritmo 4 y que ocurre para un periodo de perturbación de 0.47.

La Figura 3.16 nos permite presentar un concentrado de los ritmos que se encuentran explorando 1000 periodos de perturbación entre 0 y 1, igualmente espaciados. En cada caso se realizaron 2560 iteraciones y se investigó la periodicidad hasta periodo 16 de las últimas 32 iteraciones. En la Figura se indica el ritmo para cada periodo de perturbación, puede notarse que los ritmos se establecen en intervalos y el diagrama de ritmos toma forma de escaleras. La primera escalera se forma aproximadamente del periodo 0.4 hacia la izquierda, a los periodos más cortos corresponden los peldaños más altos. Esto se debe a que estos periodos se forman por el canal entre la CTF y la función identidad, que impone para periodos más cortos órbitas con un mayor número de pasos. La otra escalera tiene sus peldaños alternados alrededor del centro de la gráfica, y las órbitas correspondientes son semejantes a las mostradas en la Figura 3.15 panel (a).

### 3.6. Comprobación numérica de ritmos para perturbaciones fuertes y débiles

La comprobación de los ritmos desplegados en el diagrama de las Figuras 3.10 y 3.16, la realizamos haciendo integraciones numéricas como las que se hicieron para obtener las Curvas de Transición de Fases para perturbaciones fuertes y débiles. La diferencia consis-



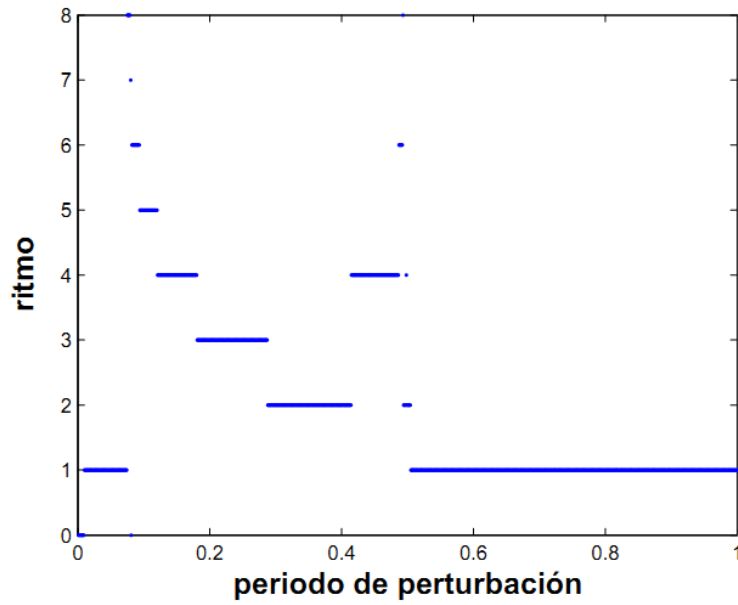


Figura 3.16: Diagrama de ritmos para perturbaciones débiles. Los ritmos se organizan por escaleras.

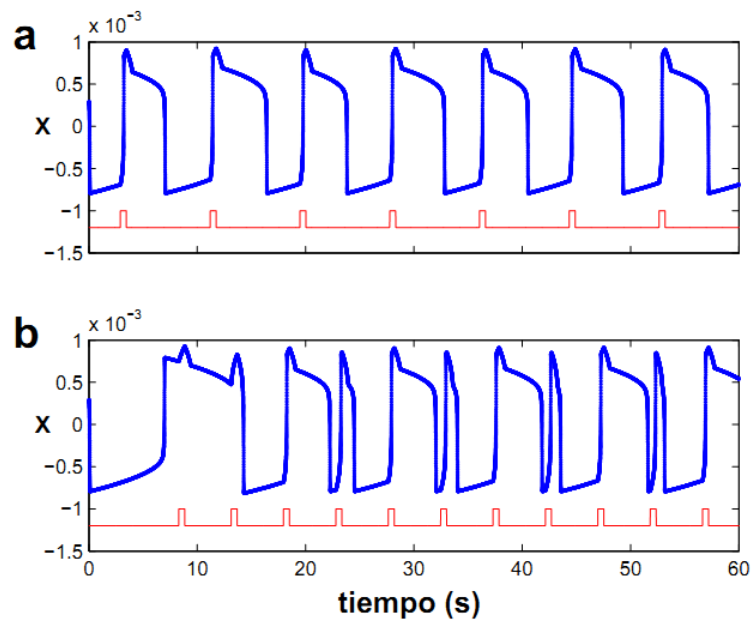


Figura 3.17: Ritmos obtenidos mediante la integración numérica de las ecuaciones de Rayleigh, cuando se aplican perturbaciones periódicas fuertes. El trazo azul es la solución de las ecuaciones, el trazo rojo indica el momento de las perturbaciones. Panel (a) ritmo 1:1, periodo de perturbación 0.6. Panel (b) ritmo 2:2, periodo de perturbación 0.35.

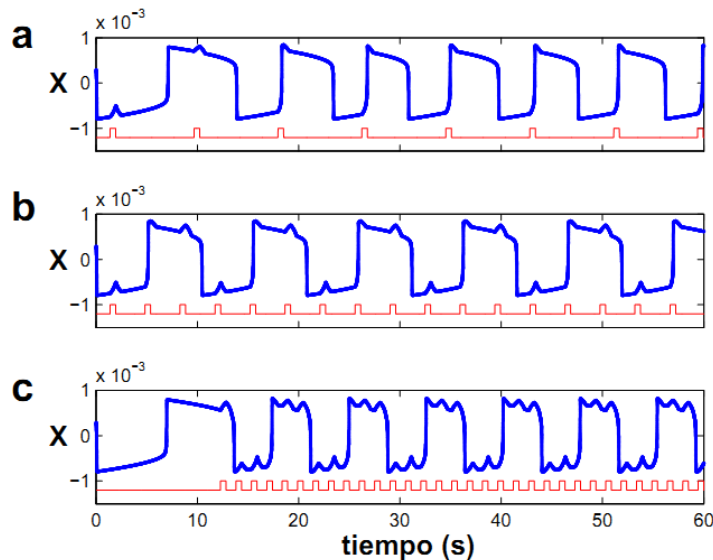


Figura 3.18: Ritmos obtenidos mediante la integración numérica de la ecuación de Rayleigh cuando se aplican perturbaciones periódicas débiles. Panel (a), periodo de perturbación 0.6, ritmo 1:1. Panel (b), periodo de perturbación 0.25, ritmo 3:1. Panel (c), periodo de perturbación 0.11, ritmo 5:1.

tió en aplicar perturbaciones periódicas en vez de perturbaciones aisladas, y la integración numérica se realizó durante 120 segundos. Probamos los ritmos dando pulsos cada décima de periodo: 0.1, 0.2, .. hasta 0.9. Para las perturbaciones fuertes todas las predicciones se cumplieron. En la Figura 3.17 mostramos los ritmos que se obtienen para los primeros 60 segundos cuando el periodo de perturbación es 0.6, panel (a), y 0.4, panel (b).

Para las perturbaciones débiles encontramos que todos los ritmos coinciden con excepción del periodo 0.4 donde en lugar de aparecer un ritmo 2 hay ritmo 4. Este ritmo 4 se encuentra en el Diagrama de Ritmos a la derecha del periodo 0.4, de manera que parecería que hay una traslación del ritmo encontrado con respecto al predicho. Investigando más cuidadosamente los ritmos para periodos cortos, encontramos que el mismo fenómeno ocurre en algunos otros casos: los ritmos encontrados están a la derecha o a la izquierda de los ritmos predichos. Parece entonces que las predicciones fallan para ritmos rápidos pues la predicción se encuentra trasladada con respecto al ritmo “experimental”. Esto puede

ser un efecto de la duración de las perturbaciones, que en las iteraciones de las CTF's se consideran instantáneas y en realidad tienen una duración de 0.08 del periodo de la oscilación natural. En la Figura 3.18 se ilustran tres ritmos obtenidos mediante la integración numérica de las ecuaciones de Rayleigh cuando se aplican perturbaciones periódicas débiles. Los periodos mostrados son 0.6, 0.25, 0.11. Como puede verse en los dos últimos casos los ritmos se establecen rápidamente. En el primer caso a primera vista parece un ritmo 2:2, es decir una alternancia entre oscilaciones "gordas y flacas", sin embargo es claro que las oscilaciones anchas se van haciendo más delgadas y las oscilaciones delgadas se van haciendo más anchas. De hecho si se observan las fases en que va cayendo cada perturbación, se nota una clara coincidencia con las fases que predice la iteración mostrada en la Figura 3.14 panel (a).

# 4

## Discusión, Conclusiones y Perspectivas

### 4.1. Comparación entre los acoplamientos para el Oscilador de Rayleigh y el Salino

El Oscilador de Rayleigh es un oscilador no lineal con un ciclo atractor robusto, del cual se reportó en un trabajo anterior [17] el efecto de perturbaciones fuertes, y se mostró que la teoría del reinicio es un buen método para predecir el efecto de trenes de perturbaciones periódicas. En esta tesis nos hemos propuesto estudiar, el efecto de perturbaciones débiles y verificar si la teoría del reinicio también describe adecuadamente el efecto de trenes de perturbaciones periódicas débiles. Este proyecto es inspirado en parte por una exploración similar que se realizó para el Oscilador Salino [18]. Se ha planteado en algunos trabajos que el Oscilador de Rayleigh es un buen modelo del Oscilador Salino, y en esta tesis estamos también poniendo a prueba esta afirmación.

La comparación entre los ritmos de acoplamiento por trenes de perturbaciones fuertes y trenes de perturbaciones débiles, muestra que en el segundo caso tenemos más ritmos que en el primero. Es exactamente el mismo resultado que se advierte comparando ambos tipos de perturbaciones para el Oscilador Salino [18]. Esta similitud en los tipos de ritmos obtenidos ocurre porque las CTF's para ambos osciladores son semejantes: para perturbaciones fuertes tienen forma de "V" y para las débiles aparece una discontinuidad que trunca la rama izquierda de la "V" apareciendo un segmento diagonal para una región de las fases viejas. Esta geometría es a su vez consecuencia de que las perturbaciones débiles para ambos osciladores, no tienen ningún efecto cuando son aplicadas al comienzo de la oscilación.

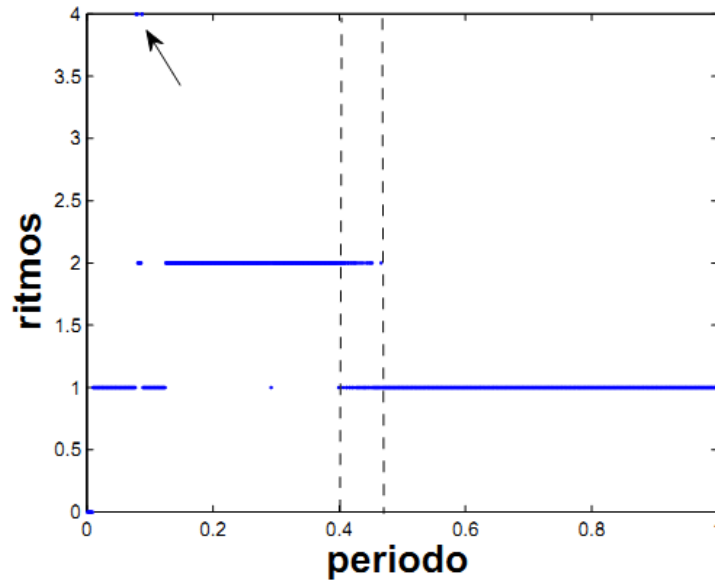


Figura 4.1: Diagrama de ritmos para perturbaciones fuertes. Las líneas verticales encierran una zona de aparente traslape de los ritmos 1 y 2.

Aunque esta es la conclusión general de la comparación del efecto de las perturbaciones fuertes y débiles para ambos osciladores, existen pequeñas diferencias entre ambos grupos de resultados que discutiremos a continuación.

#### 4.2. El diagrama para perturbaciones fuertes

Hay dos detalles que llaman la atención en el diagrama para perturbaciones fuertes en el Oscilador de Rayleigh. El primero es que cerca del periodo de perturbación 0.4 parece existir una región de traslape entre los ritmos 1 y 2, misma que hemos enmarcado entre dos líneas verticales punteadas en la Figura 4.1. La segunda es la ocurrencia de una minúscula región de ritmos 4 para periodos ligeramente mayor que el periodo 0.08, misma que hemos señalado con una flecha en la Figura 4.1. En la Figura 4.2 hemos realizado una ampliación de la zona de traslape de los ritmos, como puede verse más que un traslape

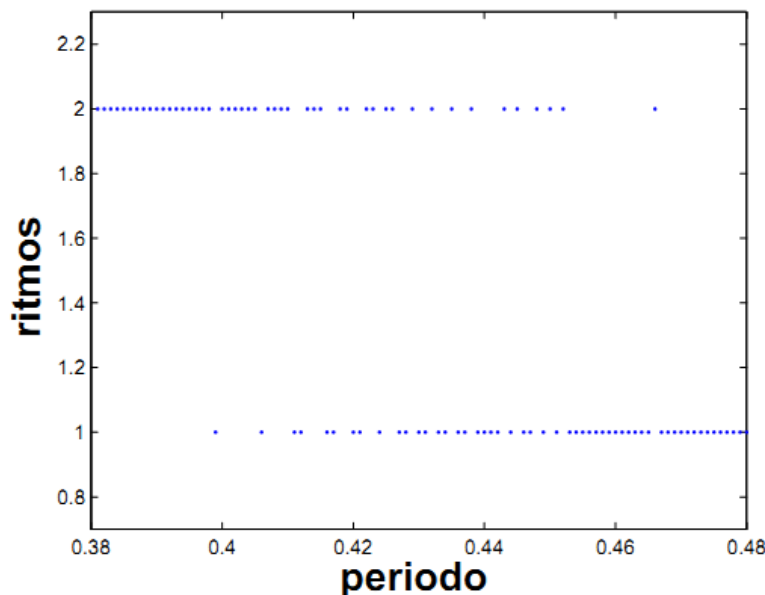


Figura 4.2: Ampliación de la zona entre las líneas verticales en la Figura 4.1, se muestra que los ritmos no están traslapados sino entrelazados.

es un entrelazado de los puntos en que se reporta uno u otro ritmo. La mayoría de esta zona se encuentra comprendida ente el periodo 0.4 y 0.44. Tomamos un par de puntos en el centro de esa zona, el primero con periodo 0.426 y que corresponde a un ritmo 2, y el segundo con periodo 0.427 y que corresponde a un ritmo 1. Para ambos periodos hicimos 1000 iteraciones, construimos el diagrama de telaraña y graficamos las mil fases correspondientes en su orden de aparición, en los paneles (a), (b), (d) y (e) de la Figura 4.3. Puede observarse que tanto los diagramas de telaraña como las secuencias de fases son prácticamente indistinguibles. En los paneles (c) y (f) hemos amplificado una pequeña región en que convergen las fases en los paneles (b) y (e), y puede notarse que en ambos casos se repiten fases distintas, de manera que para ambos casos tenemos ritmos 2, pero con valores de sus fases muy próximos. Esta dificultad para distinguir entre el ritmo 1 y el ritmo 2 en la región alrededor de la bifurcación, nos indica que esta ocurre de manera muy paulatina, de manera que estamos ante una bifurcación por duplicación de periodo.

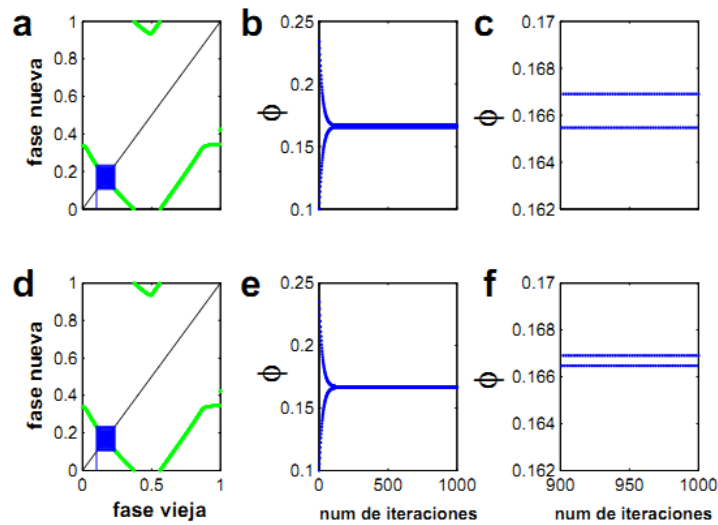


Figura 4.3: Resultados de 1000 iteraciones para el periodo de perturbación 0.426 (primer renglón), y 0.427 (segundo renglón). En los paneles (a) y (d) se muestran los diagramas de telaraña, que son prácticamente indistinguibles. En los paneles (b) y e los valores de las fases para las 1000 iteraciones, tampoco se distinguen. Sin embargo una ampliación de las ultimas 100 iteraciones en los paneles (c) y (f) muestra que las dos fases a las que se llega para cada periodo de perturbación son ligeramente distintas.



En cuanto a los ritmos 4 encontrados para periodos de perturbación alrededor de 0.085, lo primero que habría que comentar es que la duración del pulso bifásico es de 0.08, de manera que estas son perturbación muy difíciles de realizar en el caso experimental, ya que el dispositivo de inyección estaría en el límite de su desempeño. De cualquier manera realizamos los diagramas de telaraña para estos periodos, advirtiendo que es un efecto que ocurre por la discontinuidad de la CTF hacia su extremo derecho. De manera que desde el punto de vista de la teoría del reinicio este es un resultado correcto.

### 4.3. Diagrama de ritmos para perturbaciones débiles

La comparación de los diagramas de ritmos para perturbaciones débiles entre el Oscilador de Rayleigh (Figura 16 en el capítulo 3 de esta tesis) y el Oscilador Salino (Figura 3 -32 de la referencia [18]), muestra que cualitativamente son semejantes, en ambos casos los ritmos se organizan por escaleras. Pero no son iguales, en el caso del Oscilador Salino tenemos más ritmos. Esto puede deberse a varias circunstancias, la más importante es que no existe una correspondencia entre la intensidad utilizada en uno u otro oscilador. Hasta el momento no existe algún tipo de calibración o ajuste entre ambos sistemas. Otra razón puede ser que la CTF en el caso del Oscilador Salino se ajustó con un polinomio, lo cual produce una función más suave y exhibe sólo una discontinuidad, mientras que la de Rayleigh tiene dos discontinuidades. Las bifurcaciones que aparecen para el caso de perturbaciones débiles son bifurcaciones por colisión con el borde [21]. En la Figura 4.4 ilustramos cómo ocurre una bifurcación por colisión con el borde. En los paneles (a),(b) y (c) ilustramos la ocurrencia de ritmos 3, que ocurren para periodos de perturbación 0.2, 0.25 y 0.285 respectivamente. Señalamos con una flecha uno de los puntos de la órbita, que a medida que crece el periodo de perturbación se va acercando a la discontinuidad de la CTF, en el momento que el periodo crece lo suficiente y ocurre que la órbita toca la discontinuidad el periodo cambia a un ritmo 2. Todos los cambios de ritmos que ocurren para el caso que hemos estudiado, ocurren de esta manera.

### 4.4. Perspectivas

En este trabajo hemos explorado el comportamiento de los ritmos de acoplamiento entre una perturbación bifásica y el Oscilador de Rayleigh para una intensidad de perturbación débil. Lo que observamos es que para ese valor de perturbación débil, cuando se aplica en un intervalo de las fases viejas, que arranca desde el valor cero de esta fase y hasta un valor

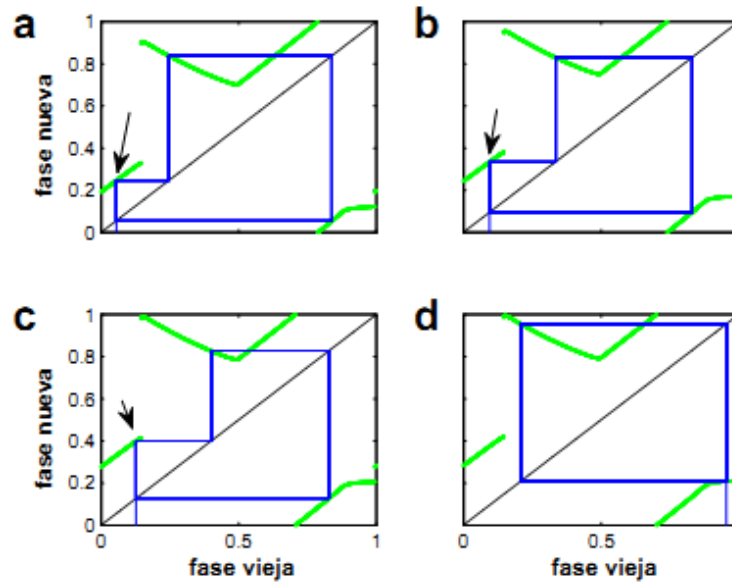


Figura 4.4: Cambio de ritmo por colisión de la órbita con la discontinuidad de la CTF. Se ha señalado con una flecha uno de los puntos de la órbita con ritmo 3. El periodo de la perturbación periódica es 0.2 para el panel (a), 0.25 para el panel (b), 0.285 para el panel (c). A medida que el periodo crece, el punto de la órbita indicado se acerca a la discontinuidad. En el momento que la toca ocurre el cambio hacia el ritmo 2.

umbral (que podríamos llamar fase vieja umbral), no hay efecto de la perturbación. Eso induce que en la CTF, hay una sección diagonal, cuya longitud depende de esa fase vieja umbral. Esa sección diagonal produce cuando se aplica un tren de perturbaciones que los ritmos tengan periodicidades largas.

Nos proponemos en una segunda parte de esta investigación, explorar más intensidades débiles. Nuestra hipótesis es que a medida que la fase vieja umbral sea mayor, la longitud de la sección diagonal de la CTF será mayor, y ello impondrá ritmos de periodicidad más y más larga.

Otro punto a explorar está relacionado con el tipo de bifurcaciones que tendremos. Hemos encontrado que para las perturbaciones fuertes sólo existen bifurcaciones por duplicación de periodo: de ritmo 1 a ritmo 2. Y para la intensidad débil estudiada sólo existen bifurcaciones por colisión de borde. Nos preguntamos: ¿existe alguna intensidad intermedia entre las dos estudiadas en que coexistan ambos tipos de bifurcaciones?.

#### 4.5. Conclusiones finales

Nuestras conclusiones podrían ser puntualizadas de la siguiente manera:

1. El Oscilador de Rayleigh bajo trenes de perturbaciones débiles bifásicas, exhibe más ritmos de acoplamiento, que bajo trenes de perturbaciones fuertes bifásicas.
2. El comportamiento del Oscilador de Rayleigh bajo perturbaciones fuertes y débiles exhibe, cualitativamente, el mismo tipo de comportamiento que el Oscilador Salino, de manera que el primero es un buen modelo del segundo.
3. Para convertir la comparación cualitativa entre ambos osciladores en una comparación cuantitativa, hace falta una calibración que nos diga a que intensidad de la perturbación en el salino corresponde una perturbación en el modelo. No se ve que esa calibración se realice en el futuro cercano, pues requiere de experimentos con equipo especializado en medir pequeñas diferencias de nivel en el salino, y del ajuste del correspondiente modelo físico-matemático.
4. Igualmente podemos decir que el oscilador de Rayleigh es un buen modelo para los osciladores no lineales con ciclo atractor robusto, en particular es un buen modelo del corazón por lo que de igual manera, con la debida calibración, éste modelo numérico, puede sustituir los corazones de muchos animales en el laboratorio.

5. Hay un conjunto interesante de resultados a explorar si se varia la intensidad de las perturbaciones débiles.

# Referencias

- [1] Mark, D. European Journal of Physics, 23 (2002) 449-458.
- [2] Fujisaka, H., Yamada, T. Z. Physik B, 37 (1980)256-275.
- [3] Glass, L., & Mackey, M. Princeton NJ (1a ed.,(1988) pp. 119-143). Princeton NJ: Princeton University Press.
- [4] Dong-Han Kim, Jong-Hwan Kin. Robotic and Autonomous Systems 1020 (2002) 1-15
- [5] Ljspeert Jan Auke, Alessandro Crespi, Dimitri Ryczko, Jean-Marie Cabelguen, Science, Vol. 135 num. 9 (2007)
- [6] Talanquer, V. Irazoque, G. (1991). N. Educacion Química, 3, 36.
- [7] Martin, S. (1970). Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics 1 (1970) 143-160.
- [8] Hubbard Escalera Aline. Tesis Facultad de Ciencias, UNAM. 2009
- [9] Noyes Richard M., J. Chem Education 66 (1989) 207-209.
- [10] O. Steinbock, A. Lange, I. Rehberg, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 798-801.
- [11] Alfredsson, P., Lagerstedt, T. Physics of Fluids 24 (1981) 10-14.
- [12] Yoshikawa, K., Oyama N., Am. J. Phys. 59 (1991) 137-141.
- [13] Okamura, M., Yoshikawa, K., Physical Review E,61 (2000) 2445-2452.
- [14] Yoshikawa, K., Nakata, S., Journal of Chemical,66 (1989) 205-207.
- [15] Miyakawa, K., Physica D: Nonlinear Phenomena, 127 (1999) 177-186.
- [16] Miyakawa, K., Yamada, K., Physica D: Nonlinear Phenomena, 151 (2001) 217-227.
- [17] González, H., Arce, H., Guevara, M., Physical Review E, 78 (2008) 78(3), 036217.
- [18] Alarcon, Martin. Tesis Facultad de Ciencias. UNAM.(2013).
- [19] Romero Hidalgo Silvia. Tesis Facultad de Ciencias. UNAM. (2004).
- [20] Daniel Kaplan, Leon Glass, 1995,Understanding Nonlinear Dynamics, Springer Verlag NY
- [21] Viktor Avrutin, Michael Schanz, Bjorn Schenke. Discrete dynamics in Nature and Society. Vol. 2011, (2011), 1-30.