



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

**PROPAGACIÓN MÁS ALLÁ DEL LÍMITE ÓPTICO CON GUÍAS DE ONDA
DIELÉCTRICAS.**

TESIS DE MAESTRÍA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
RICARDO PÉREZ PEÑA

TUTOR
Dr. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM.

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor de tesis el Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, por sus conocimientos, tiempo y esfuerzo para lograr la realización de este trabajo. Agradezco la paciencia y amabilidad que muestra con sus estudiantes y la ayuda que brinda en el ámbito académico y fuera de él.

Agradezco al honorable jurado conformado por

Dr. Carlos Gabriel Avendaño López

Dra. Catherine García Reimbert

Dr. Jesús Garduño Mejía

Dr. José Alberto Olivares Lecona

Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes

por la paciencia en la revisión de esta tesis y por sus comentarios que mejoraron el presente trabajo.

Agradezco al apoyo recibido, por parte de la Dirección General de Asuntos de Personal Académico, DGAPPA-PAPITT UNAM IN110012-3.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, sostenida por todos los mexicanos, a la cual debo mi formación académica y el acceso a gran parte de la producción cultural de la humanidad. Agradezco a sus profesores y a todos aquellos que hacen posible su funcionamiento.

A mis padres y hermanos que me han apoyado en todo momento y con su cariño me impulsan para seguir adelante.

Índice general

1. Metamateriales	4
2. Electromagnetismo en medios.	11
2.1. Condiciones de frontera.	12
2.2. Energía del campo electromagnético y vector de Poynting.	13
2.3. Ecuación de onda.	15
2.4. Materiales izquierdos.	17
2.5. Índice de refracción negativo.	18
2.6. Principio de fermat.	20
3. Guía de onda.	22
3.1. Tratamiento formal de una guía de onda.	22
3.2. Guía de onda dieléctrica.	25
3.2.1. Modo TM.	25
3.2.2. Modo TE.	30
3.3. Propagación de ondas con longitud de onda mayor al grosor de la guía.	33
4. Ondas superficiales.	38
4.1. Lentes perfectos con ondas superficiales, lentes de Pendry.	40
5. Sistema propuesto para propagar ondas sobre el límite óptico.	44
5.1. Modo TM.	45
5.2. Modo TE.	50
6. Discusión.	57

Resumen

El estudio de los metamateriales ha cobrado gran importancia debido a las propiedades que presentan en la propagación de ondas electromagnéticas, se han desarrollado metamateriales en la región de las microondas y grandes esfuerzos se están realizando para obtener metamateriales que operen en la región visible del espectro electromagnético. Una de las propiedades que se estudian es la propagación de plasmones superficiales polarizados (surface plasmon polaritons, SPP) para lo cual se crean micro estructuras metálicas sobre superficies que separen dos materiales dieléctricos con el objetivo de acoplar ondas evanescentes y propagarlas sobre una superficie. Con ayuda de los SSP se plantea la posibilidad de propagar ondas en regiones altamente localizadas y de superar la limitación de propagación en la región óptica.

El propósito de este trabajo consiste en proponer un sistema sencillo con el cual se piensa ir más allá del límite óptico en guías de onda. El sistema en cuestión es una guía de onda dieléctrica integrada con la cual se busca obtener un comportamiento similar al de un metamaterial al propagar ondas evanescentes altamente localizadas, sin necesidad de emplear microestructuras para obtener índices de refracción negativos debido a plasmas eléctricos o magnéticos. Esta guía consiste en un sustrato dieléctrico de grosor $2d$ con índice de refracción n_1 y en el medio de esta capa dieléctrica se sitúa una capa muy fina de dieléctrico con índice de refracción n_2 . La ventaja de esta configuración radica en que al no existir micro estructuras metálicas se reduce la pérdida propia de un conductor y con esto extender la propagación de un SPP al evitar las pérdidas del metal.

El presente trabajo se desarrollará en seis capítulos. En el primer apartado, se dará una introducción mediante un recorrido por el proceso de desarrollo de los metamateriales, que surgió con una propuesta teórica y cuyo estudio se vio impulsado por las prometedoras propiedades físicas predichas teóricamente. En la segunda sección se revisarán aspectos de los campos electromagnéticos en medios dieléctricos y se presentarán aspectos formales de los metamateriales. En la tercera sección se hará una revisión sobre la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de onda plana, considerando modos transversales del campo eléctrico y campo magnético (modos TE y TM). El capítulo cuatro se analizarán las condiciones necesarias para generar un SPP, las cuales se cumplen más comunmente con plasmas eléctricos con la ayuda de nano estructuras metálicas. En el capítulo cinco se analiza el sistema propuesto en este trabajo de tesis, mediante el cual se

desea propagar un SPP sin necesidad de emplear plasmas eléctricos, para así ampliar la distancia de propagación de estos. Es importante analizar este sistema por sus posibles aplicaciones es sistemas integrados pensados para superar las limitaciones que imponen los circuitos eléctricos, tanto en cuestión de escala como del tiempo de respuesta. Por último en el capítulo seis se discuten los resultados obtenidos para determinar la pertinencia y posibles aplicaciones de la propuesta de este trabajo.

Capítulo 1

Metamateriales

La mayoría de los fenómenos electromagnéticos y dispositivos resultan de la interacción entre los campos y los materiales. En este sentido, la realización de una aplicación se traduce en la manera de manipular los campos electromagnéticos, de la forma deseada mediante la elaboración de estructuras y geometrías con materiales disponibles. Para obtener nuevas propiedades al propagar ondas electromagnéticas por ejemplo, se crean compuestos artificiales, que surgen de conjuntar estructuras, cuyo tamaño es menor que la longitud de onda y mayor que las dimensiones tanto atómicas como moleculares. De este modo la interacción electromagnética puede expresarse en términos de parámetros efectivos del material. Este tipo de materiales diseñados para obtener nuevas propiedades son conocidos como metamateriales. El prefijo “meta” significa “más allá de” y en este sentido el término “metamaterial” sirve para denotar sistemas con propiedades más allá de las que poseen los materiales convencionales.

Las propiedades de un material dieléctrico están caracterizadas por la permitividad eléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ . Los valores más bajos de estos parámetros en la naturaleza son característicos del aire, que es muy similar a los del vacío ϵ_0 y μ_0 , mediante los cuales se define el índice de refracción de un medio $n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ que también expresa el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y en un medio material $n = \frac{c}{v}$. En la naturaleza generalmente se tienen materiales cuya permeabilidad es igual a la del vacío μ_0 y permitividad mayor que ϵ_0 . En un medio con pérdidas el índice de refracción depende de la frecuencia de las ondas electromagnéticas que se propaguen; además existe un término imaginario con el que se considera la atenuación en la amplitud de las ondas, $n(\omega) + i\frac{\alpha(\omega)}{4\pi}$. El término $\alpha(\omega)$ cambiará dependiendo si se tiene un material conductor o uno que no lo sea, véase el apéndice al final de este trabajo.

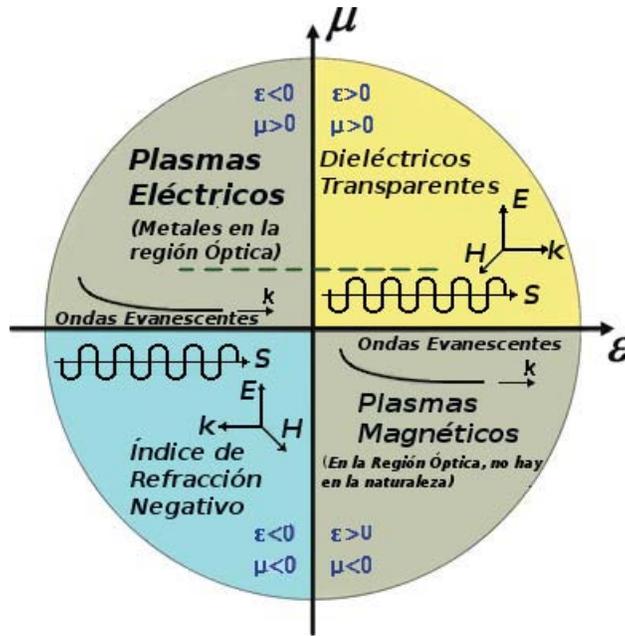


Figura 1.1: Plano $\epsilon - \mu$. Los dos ejes corresponden a valores reales de la permitividad eléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ . En el primer cuadrante tenemos a los materiales derechos con $\epsilon > 0$ y $\mu > 0$, en los que los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} forman un sistema derecho; mientras que en el tercer cuadrante con $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$ los vectores de \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} forman un sistema izquierdo. dentro de las consecuencias de los materiales izquierdos se encuentra la refracción de Snell con signo negativo, por lo que se dice que el índice de refracción es negativo. Figura modificada de [5].

Los metamateriales abren la posibilidad de realizar una gama muy grande de materiales con propiedades físicas de interés por sus aplicaciones, mediante el diseño de micro estructuras que de manera natural no se encuentran en la naturaleza. La figura 1.1 muestra en el plano $\epsilon - \mu$ todas las posibles propiedades de medios isotrópicos donde los valores de ϵ y μ son reales. El primer cuadrante ($\epsilon > 0$ y $\mu > 0$) representa a los materiales derechos que admiten la propagación de ondas hacia adelante. Los materiales derechos se definen a partir de las ecuaciones de Maxwell. Son aquellos en los cuales los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} forman un conjunto de vectores derecho, figura 1.2.

En la línea $\mu = \mu_0, \epsilon \geq \epsilon_0$ se encuentran la mayoría de materiales encontrados en la naturaleza. En el segundo cuadrante ($\epsilon < 0$ y $\mu > 0$) están los plasmas eléctricos, mientras que en el cuarto cuadrante se tiene a los plasmas magnéticos ($\epsilon > 0$ y $\mu < 0$), en ambas regiones existe la propagación de ondas evanescentes. Los metales y semiconductores con frecuencias en el óptico e infrarrojo son ejemplos de materiales con $\epsilon < 0$. Los materiales con $\mu < 0$ son menos comunes en la naturaleza debido a la débil interacción magnética. En los materiales ferromagnéticos las interacciones magnéticas son lo suficientemente intensas y las pérdidas pequeñas para producir regiones cuya permeabilidad magnética sea negativa. Los materiales ferromagnéticos cuando son saturados presentan elementos negativos en las componentes del tensor de permeabilidad magnética cerca de la frecuencia de resonancia [5]. El tercer cuadrante ($\epsilon < 0$ y $\mu < 0$) engloba a los materiales izquier-

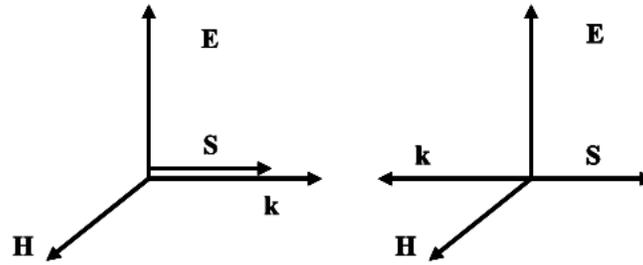


Figura 1.2: Sistemas de vectores \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} y \vec{S} para una onda plana. Si \vec{S} y \vec{k} son paralelos el sistema de vectores es derecho, los materiales donde la propagación de campos electromagnéticos tiene paralelos \vec{S} y \vec{k} se les conoce como materiales derechos, caso contrario cuando \vec{S} y \vec{k} son antiparalelos el sistema de vectores es izquierdo, materiales izquierdos. Figura modificada de [5].

dos propuestos por Veselago en 1964 [36]. En este tipo de materiales la dirección del vector de onda \vec{k} , y la dirección del vector de flujo de energía \vec{P} son opuestas. Veselago introdujo el término de materiales izquierdos debido a que los vectores de campo eléctrico \vec{E} , el campo magnético \vec{H} y el vector de onda \vec{k} forman un conjunto de vectores izquierdo, figura 1.2.

La mayoría de los materiales en la naturaleza se encuentran en la región $\mu = \mu_0, \epsilon > \epsilon_0$, y con rareza se encuentran plasmas eléctricos y magnéticos en pequeñas partes del segundo y cuarto cuadrante. Existen regiones particulares en el plano $\epsilon - \mu$ que indican propiedades especiales de los materiales, tal es el caso del punto $\mu = -\mu_0$ y $\epsilon = -\epsilon_0$ que tiene los valores del aire-vacío para la permitividad y la permeabilidad, pero con signos negativos. Con estos valores la impedancia del medio definida como $Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}$ se iguala a la del aire-vacío y en la interfase no hay reflexión, así la transmisión a través del material es total. Lo mismo sucede con los puntos sobre la línea $\epsilon = \mu$. También es de interés la región cercana al origen del plano $\epsilon - \mu$. En el punto $\epsilon = 0, \mu = 0$ se puede producir tunelaje perfecto [2, 38] y los puntos de la vecindad al origen también presentan propiedades interesantes. Tal es el caso de la poca variación de la fase al propagarse en grandes distancias a través del medio, además de la posibilidad de utilizar materiales con bajo índice de refracción para convertir frentes de onda curvos en frentes planos [1].

Los metamateriales se conocieron al inicio como materiales izquierdos o como materiales con índice de refracción negativos. Aunque el concepto de materiales izquierdos fue propuesto por Veselago en 1964 [36], las ideas sobre un índice de refracción negativo y sobre propagación en materiales donde la dirección del vector de onda \vec{k} y la dirección del vector de flujo de energía \vec{P} son opuestas, fueron halladas mucho antes [34, 19]. Entre las primeras publicaciones donde se trata el índice de refracción negativa están las notas del Prof. Mandelshtam de la Universidad de Moscú [19]. Luego está el estudio de Malyuzhinets en 1951 sobre la condición de radiación de Sommerfeld en medios con los vectores \vec{k} y \vec{P} opuestos, donde muestra que la velocidad de fase de las ondas apunta del infinito a la fuente [18]. Más adelante en 1957, Sivukhin en sus investigaciones sobre materiales

con índice de refracción negativo observó que los vectores \vec{k} y \vec{P} tienen direcciones opuestas [29], ya en 1968 se hicieron avances significativos con los trabajos de Veselago quien propuso un análisis sistemático del comportamiento electromagnético en materiales con permitividad eléctrica y permeabilidad magnética negativas [36], y no fue sino hasta 30 años después cuando en 1996 Pendry et al. produjeron un plasma eléctrico artificial con una estructura periódica compuesta por un número muy grande de alambres delgados del orden de una micra de grosor, que formaban una red cúbica y cuya permitividad era negativa [22]. Luego en 1999 Pendry et al. descubrieron los plasmas artificiales magnéticos con permeabilidad negativa [21]; en este trabajo utilizaron anillos abiertos como resonadores, ordenados periódicamente para obtener la respuesta magnética. El primer material izquierdo fue desarrollado por Smith et al. en 2001 utilizando la combinación de los alambres y anillos metálicos; con este experimento se verificó experimentalmente la refracción negativa [28]. Así fue como la atención sobre este tipo de materiales fue creciendo, tanto experimental como a nivel teórico, esto incluye las ideas que dieron principio a las lentes perfectas y las super lentes [20]; sin embargo los materiales izquierdos presentan la desventaja de disipar mucha energía y un ancho de banda muy pequeño, lo que reduce las posibles aplicaciones de estos materiales.

Un segundo momento de impulso resultó en 2005 cuando se realizó un material cuyo índice de refracción presentaba un gradiente que provocaba la deflexión de las ondas electromagnéticas [30], y en 2006 cuando se propuso la posibilidad de realizar mantos invisibles al controlar la propagación de las ondas electromagnéticas [23, 14]. Después de la realización experimental del manto invisible en la región de microondas [26, 30], se ha puesto gran atención a los metamateriales y se han hecho esfuerzos para desarrollarlos en la región óptica.

La electrodinámica clásica impone un límite de resolución cuando se utilizan lentes convencionales. Esta limitación es conocida como el límite de difracción, depende de la longitud de onda con la que se ilumina un objeto y de la longitud característica del instrumento. El detalle mínimo de resolución Δx está dado por la relación de incertidumbre de la transformada de Fourier, $k_{max}\Delta x \sim 2\pi$. Entonces la resolución máxima será $\Delta x \sim 2\pi/k = \lambda$ y el límite de difracción se manifiesta como un punto desenfocado del tamaño de una longitud de onda de diámetro. Las ondas dispersadas por un objeto tienen componentes del vector de onda en todo el espectro, en la dirección de propagación de la onda. Si suponemos que la dirección de propagación es en la dirección z , tendremos $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$, donde k_0 es la magnitud del vector de onda en el vacío, y (k_x, k_y) corresponde a las componentes transversales. La componente transversal total del vector de onda es $k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Cuando la componente transversal es más pequeña que k_0 , k_z es un número real y la onda puede propagarse en cualquier material común sin pérdidas significativas. Sin embargo, cuando el valor de k_t excede el de k_0 , k_z toma un valor imaginario y la onda decae exponencialmente en la dirección de propagación; a estas ondas usualmente se les conoce como ondas evanescentes y permanecen confinadas en la vecindad del objeto, no tienen contribución

en la imagen del objeto al utilizar lentes estándares. Estas ondas evanescentes llevan los detalles del objeto cuyo orden de magnitud es menor que la longitud de onda de las ondas utilizadas ya abarcan todo el espectro las componentes del vector de onda. A fin de superar el límite de difracción y obtener imágenes con resolución menor a la longitud de onda es deseable coleccionar las ondas evanescentes antes de que decaigan. Este es el mecanismo detrás de el barrido de campo cercano en microscopía óptica, donde una sonda se coloca en el campo cercano para recolectar las ondas evanescentes.

En el año 2000, Pendry predijo que los lentes hechos con materiales cuya permitividad eléctrica y permeabilidad magnética fueran negativas podrían superar esta limitación óptica [20]. En su artículo Pendry mostró que la amplitud de una onda evanescente puede recuperarse por medio de una placa de material izquierdo, y por medio de esta propiedad, un lente perfecto podía vencer el límite de difracción en la resolución de lentes convencionales.

La recuperación de las ondas evanescentes con una placa de material izquierdo se puede entender si analizamos lo siguiente. A lo largo de la dirección de propagación, la componente del campo de cada modo de Fourier proveniente del objeto puede ser expresado como $\exp(-i\omega t + ik_z z)$. En el vacío $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ es una cantidad positiva para ondas que se propagan y $k_z = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} = i\kappa$ para los campos cercanos que decaen exponencialmente; por lo que se observa el decaimiento exponencial $\exp(-i\omega t + -\kappa z)$.

En un material con índice de refracción negativo $\bar{\epsilon}$, \bar{H} y \bar{k} forman un conjunto de vectores izquierdo, por lo que el vector de onda estará en sentido contrario a la dirección de propagación; $k_z = -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} = -i\kappa$. De este modo las componentes del campo de Fourier en un material izquierdo crecen exponencialmente a lo largo de la dirección z de acuerdo a la función siguiente, $\exp(-i\omega t + \kappa z)$, donde κ es un número positivo. Cuando un material izquierdo es utilizado como lente de Veselago, la amplificación de las ondas evanescentes dentro del material izquierdo compensa el decaimiento en el resto del camino óptico, de modo que las ondas evanescentes pueden recuperar su amplitud original en el plano de la imagen, ver figura 1.3.

Existe otro tipo de lentes conocidos como lentes de Pendry en donde el mecanismo crítico está relacionado con la excitación de ondas superficiales para propagar ondas evanescentes en la superficie de un material. Una forma de producir este fenómeno es por medio de plasmas eléctricos y magnéticos; por esta razón a este tipo de ondas se les conoce como plasmones superficiales polarizados o bien por su acrónimo en inglés SPP (Surface Plasmon Polaritons). Esta capacidad de propagar modos evanescentes es de interés para el sistemas de procesamiento de señales, resolución nanométrica y para técnicas de detección.

La funcionalidad, eficiencia y facilidad de uso de dispositivos semiconductores y circuitos, se debe a la miniaturización e integración con dispositivos externos. Sin embargo, la integración de nuevos dispositivos electrónicos para el procesamiento de señales y sensores esta alcanzando rá-

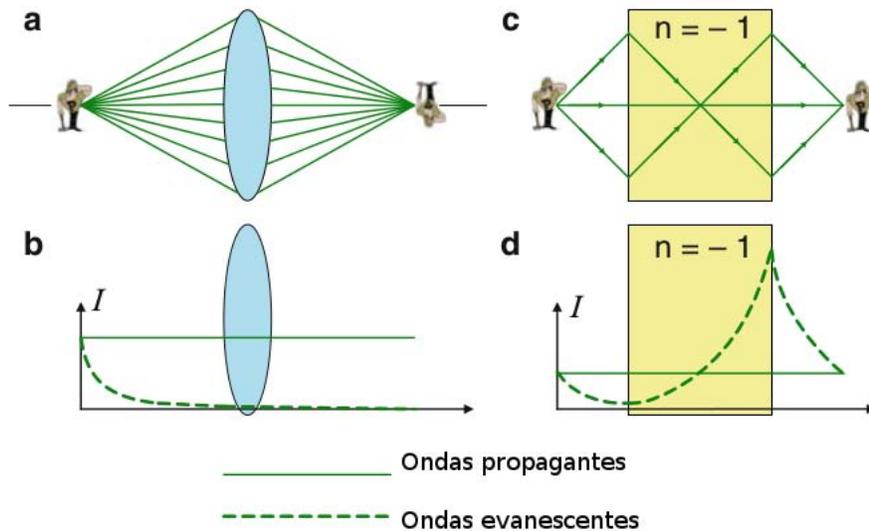


Figura 1.3: Limitación de lentes comunes ante los lentes de Veselago con placas de índice de refracción negativo. (a) Un lente convencional sólo transmite las ondas propagantes. (b) Las pérdida de las ondas evanescentes en un sistema convencional de formación de imágenes. (c) La capacidad de enfocar en un placa de material izquierdo. (d) El crecimiento de las ondas evanescentes en la placa de material izquierdo y el restablecimiento tanto de las ondas propagantes como de las evanescentes. Figura modificada de [5].

pidamente sus límites de operación, en velocidad y ancho de banda, razón por la cual se aumentan los esfuerzos que permitan sobrepasar estas limitantes. Una propuesta muy favorable consiste en sustituir circuitos eléctricos por circuitos integrados que funcionen con luz. Sin embargo la dificultad para transmitir información con los dispositivos para el procesamiento óptico de señales y los circuitos integrados, es el bajo nivel de integración y la miniaturización disponible en comparación con la electrónica existente. Este impedimento es consecuencia del límite de difracción de la luz en medios dieléctricos, el cual no permite la propagación de ondas electromagnéticas en escalas nanométricas, mucho menores que las longitudes de onda de la luz en el material [8].

Las guías de onda en circuitos integrados han despertado interés debido a la posibilidad de propagar luz sobre el límite óptico, debido al potencial que presentan en la integración de circuitos, sobre las guías de onda convencionales [7]. El Silicio ha demostrado ser de utilidad al colocarlo en sustratos con algún dieléctrico (SOI, Silicon-On-Insulator) en la generación de plasmones debido al alto contraste en el índice de refracción que presentan [25]. Experimentalmente los circuitos integrados con SOI, se han logrado con diferentes geometrías y modos de excitación [6, 10, 25, 33, 39, 40]. Hoy en día se presenta una opción para dar la vuelta a la limitación impuesta por el límite de difracción presente en guías de ondas, mediante el uso de metamateriales fotónicos, los cuales presentan propiedades ópticas inusuales [32]. La presencia de modos evanescentes como componentes dominantes de los campos en estos sistemas, permitirían sobrepasar el límite de difracción. La forma más sencilla de realizar esto es por medio del uso de metales por debajo de la frecuencia

de plasma. Las estructuras metálicas e interfaces son conocidas por propagar modos plasmónicos polarizados [24], en estas configuraciones existe un acoplamiento entre las ondas electromagnéticas con las oscilaciones en el plasma electrónico en el metal; como resultado la plasmónica es una área de la nanofotónica por encima del límite óptico que estudia la propagación, localización y guía de plasmones superficiales fuertemente localizados, utilizando nano estructuras metálicas. Los dispositivos con metamateriales son estructuras altamente complejas en su elaboración, compuestas de nanoestructuras densamente compactas con elementos metálicos y dieléctricos cuyas dimensiones son menores que las de una longitud de onda.

Capítulo 2

Electromagnetismo en medios.

Los campos electromagnéticos están descritos por dos campos vectoriales que son funciones de la posición y del tiempo, el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y el campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Se requieren dos campos vectoriales adicionales, la densidad de flujo eléctrico, también llamado desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\vec{r}, t)$ y la densidad de flujo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Los cuatro campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, $\vec{D}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$ están relacionados por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

La relación entre la densidad de flujo y el campo eléctrico depende de las propiedades eléctricas del medio, que está caracterizado por la densidad de polarización \vec{P} . En un medio dieléctrico la densidad de polarización es la suma macroscópica de los momentos dipolares eléctricos inducidos por el campo eléctrico \vec{E} . De modo similar la relación entre la densidad de flujo magnético \vec{B} y el campo magnético \vec{H} , depende de las propiedades magnéticas del medio contenidas en la densidad de magnetización \vec{M} , definida de forma análoga a la densidad de polarización.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}, \quad (2.6)$$

Los campos \vec{P} y \vec{M} están relacionados con los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} respectivamente, mediante las ecuaciones constitutivas. En la mayoría de los medios las ecuaciones constitutivas se separan en un par de ecuaciones, una entre \vec{P} y \vec{E} , y la otra entre \vec{M} y \vec{H} . En muchas aplicaciones del electromagnetismo en materiales, la polarización es proporcional a \vec{E} y la magnetización es proporcional a \vec{H} . Los materiales con estas características son llamados materiales lineales.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (2.7)$$

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}, \quad (2.8)$$

donde χ_e y χ_m son las susceptibilidades eléctricas y magnéticas respectivamente, con las que se define la permitividad eléctrica, ϵ , y la permeabilidad magnética, μ , mediante

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e), \quad (2.9)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m), \quad (2.10)$$

2.1. Condiciones de frontera.

En un medio homogéneo las componentes de \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} y \vec{B} son funciones continuas de la posición. En las fronteras entre dos medios dieléctricos, en ausencia de cargas y corrientes libres, las componentes tangenciales del campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} , así como las componentes normales de los flujos eléctrico \vec{D} y magnético \vec{B} son continuas.

La forma de justificar la continuidad de las componentes antes mencionadas, consiste en suponer una superficie S que separa a dos medios con constantes materiales ϵ_i y μ_i de un lado de S y ϵ_j , μ_j del otro lado.

$$\vec{D}_{i\perp} - \vec{D}_{j\perp} = 0, \quad (2.11)$$

$$\vec{B}_{i\perp} - \vec{B}_{j\perp} = 0, \quad (2.12)$$

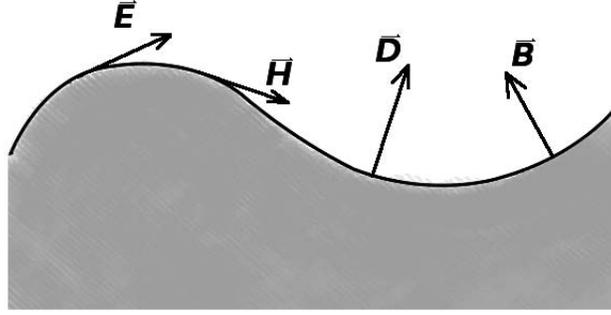


Figura 2.1: Componentes tangenciales de \vec{E} y \vec{H} y componentes normales de \vec{D} y \vec{B} son continuas en la frontera entre dos medios en ausencia de cargas libres.

$$\vec{E}_{i\parallel} - \vec{E}_{j\parallel} = 0, \quad (2.13)$$

$$\vec{H}_{i\parallel} - \vec{H}_{j\parallel} = 0, \quad (2.14)$$

donde \perp y \parallel denota la componente normal y paralela a S . Las ecuaciones (2.11) y (2.12) resultan de integrar el flujo de \vec{D} y \vec{B} sobre una superficie Gaussiana que encierra a la frontera S . Aplicando el teorema de Gauss sobre las ecuaciones (2.1) y (2.2) respectivamente en donde la superficie Gaussiana se elige con la forma de una caja de altura δ que se hace tender a cero. Estas condiciones de frontera son válidas para campos dependientes del tiempo debido a que las ecuaciones (2.1) y (2.2) no involucran derivadas temporales.

Las condiciones (2.13) y (2.14) se obtienen de considerar la circulación de \vec{E} y \vec{H} a lo largo de un circuito rectangular C que corta a la superficie S , con dimensiones l para el segmento tangencial a S y altura δ para el segmento normal a S . Al aplicar el teorema de Stokes en las ecuaciones (2.3) y (2.4) junto con el límite $\delta \rightarrow 0$ se obtienen las ecuaciones (2.13) y (2.14). Los términos que involucran derivadas temporales no adquieren relevancia ya que, al hacer tender δ a cero, el área del circuito cerrado C es nula y las integrales de área no contribuyen.

2.2. Energía del campo electromagnético y vector de Poynting.

La energía es una cantidad que debe ser conservada y en el caso eléctrico esto se debe cumplir puntualmente en todo el espacio, i.e. la energía esta localmente conservada. Si tenemos en un elemento de volumen campos y cargas y la energía total dentro de dicho volumen cambia entonces

debe existir un flujo de energía a través de la superficie que encierra al volumen. Es necesario considerar tanto campos como cargas, ya que en general existe un intercambio de energía entre estos debido a su interacción

$$\nabla \cdot \bar{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad (2.15)$$

donde \bar{S} es el flujo de energía, u la energía por unidad de volumen y u_k es la densidad de energía cinética de las partículas. Si una partícula con carga q se mueve, entonces el cambio de su energía cinética K es igual al trabajo realizado sobre q ; esto es, $dK = \bar{F} \cdot \bar{v} dt$, donde la fuerza es $q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$; pero las fuerzas magnéticas no hacen trabajo, por lo que $dK/dt = q\bar{E} \cdot \bar{v}$. Lo anterior es para una sola partícula por lo que en una distribución continua cuya densidad de carga sea $\rho(\bar{x}, t)$ junto con la densidad de energía cinética $u_k(\bar{x}, t)$, se debe considerar la energía cinética en un volumen infinitesimal d^3x en x . De este modo debido al trabajo ejercido sobre las cargas, el cambio en su energía cinética es

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} d^3x = (\rho d^3x) \bar{E} \cdot \bar{v}, \quad (2.16)$$

donde \bar{v} es la velocidad media de las cargas en x , además $\rho\bar{v}$ es la densidad de corriente $\bar{J}(\bar{x}, t)$; por lo que la razón de cambio de la energía cinética de las partículas por unidad de volumen es

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \bar{E} \cdot \bar{J}, \quad (2.17)$$

entonces la ecuación de continuidad que representa la conservación de la energía es $\nabla \cdot \bar{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{E} \cdot \bar{J}$. Con ayuda de la ley de Ampère, ecuación (2.4), se reescribe el término $\bar{E} \cdot \bar{J}$

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{B}) - \epsilon \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad (2.18)$$

que mediante la identidad vectorial $\bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{B}) = -\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{B}) + \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{E})$, y con la ley de Faraday $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ finalmente queda

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B} \right) - \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \epsilon \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

comparando con la ecuación (2.15)

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}, \quad (2.20)$$

$$u = \frac{1}{8\pi} (\bar{E} \cdot \bar{D} + \bar{H} \cdot \bar{B}). \quad (2.21)$$

Destacamos que las ecuaciones (2.20) y (2.21) son válidas únicamente para materiales lineales, en un medio dispersivo por el que se propague un paquete de ondas cuasimonocromático la expresión para la densidad de energía u es la siguiente

$$u = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} |\bar{E}|^2 + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} |\bar{H}|^2 \right), \quad (2.22)$$

donde utilizamos las ecuaciones constitutivas (2.5) y (2.6), y las derivadas parciales con respecto a la frecuencia ω se evalúan en la frecuencia central del paquete de ondas. Como la densidad de energía es una cantidad positiva se obtienen las condiciones siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} &> 0, \\ \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} &> 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3. Ecuación de onda.

Las ecuaciones (2.1)- (2.4), describen a los campos electromagnéticos, y mediante estas ecuaciones es posible encontrar las ecuaciones que describen la propagación de dichos campos en forma de ondas. Para ello se sigue el procedimiento habitual que consiste en tomar el rotacional de las ecuaciones (2.3) y (2.4), suponiendo ausencia de cargas y corrientes libres

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{B}, \quad (2.24)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{D}. \quad (2.25)$$

Utilizando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$ en las ecuaciones anteriores, junto con (2.1) y (2.2) se obtienen las expresiones

$$-\nabla^2 \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{B}, \quad (2.26)$$

$$-\nabla^2 \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{D}. \quad (2.27)$$

Nuevamente por medio de las ecuaciones (2.3) , (2.4) junto con las ecuaciones constitutivas (2.5) y (2.6)

$$-\nabla^2 \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mu \bar{H}), \quad (2.28)$$

$$-\nabla^2 \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \epsilon \bar{E}), \quad (2.29)$$

y suponiendo que el medio es isotrópico

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right), \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \epsilon \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right). \quad (2.31)$$

Finalmente para un medio lineal quedan las ecuaciones de onda

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}, \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}, \quad (2.33)$$

donde $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ es la velocidad de la onda en el medio.

Suponiendo que los campos \bar{E} y \bar{H} se pueden expresar de la siguiente forma

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}(\bar{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.34)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \bar{H}(\bar{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.35)$$

y sustituyendo en las ecuaciones (2.32) y (2.33), estas se simplifican del siguiente modo

$$\nabla^2 \bar{E}(\bar{r}) = \mu \epsilon \omega^2 \bar{E}(\bar{r}), \quad (2.36)$$

$$\nabla^2 \bar{H}(\bar{r}) = \mu \epsilon \omega^2 \bar{H}(\bar{r}), \quad (2.37)$$

Es muy conocida la propagación de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos que caen en el primer cuadrante de la figura 1.1 y el estudio sus propiedades es ampliamente explotado para encontrar nuevas aplicaciones técnicas. En el siguiente capítulo se revisará la propagación de campos electromagnéticos para materiales cuyo índice de refracción es negativo.

2.4. Materiales izquierdos.

Para analizar la propagación de ondas en materiales izquierdos donde no hay pérdidas, partimos de las ecuaciones de onda (2.32) y (2.33), donde $\mu\epsilon = \frac{n^2}{v^2}$. Pudiera pensarse que las soluciones de la ecuación de onda no distinguen cambios en el signo de ϵ y μ simultáneamente. Sin embargo, al considerar las ecuaciones de Maxwell (2.3) y (2.4)

|

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -i\omega\mu\vec{H}, \\ \nabla \times \vec{H} &= i\omega\epsilon\vec{E},\end{aligned}\tag{2.38}$$

se ve que las soluciones si cambian. Si consideramos ondas planas de la forma $E_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)$ para el campo eléctrico y $H_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)$ para el campo magnético, las ecuaciones anteriores se reducen del siguiente modo

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= \omega\mu\vec{H}, \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega\epsilon\vec{E}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Considerando ϵ y μ positivos, \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} formarán un sistema ortogonal derecho de vectores; en cambio si ϵ y μ son ambos negativos las ecuaciones (2.39) se reescriben como

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= -\omega|\mu|\vec{H}, \\ \vec{k} \times \vec{H} &= \omega|\epsilon|\vec{E}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Observamos que el sistema de vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} forman un sistema de vectores izquierdo, figura 2. Por esta razón este tipo de materiales fue nombrado como materiales izquierdos. La principal consecuencia de lo anterior es la propagación de las ondas electromagnéticas hacia atrás. En este tipo de ondas, el flujo de energía determinado por la parte real del vector de Poynting, ecuación

(2.20), no es afectado al cambiar los signos de ε y μ , con lo cual \vec{E} , \vec{H} y \vec{S} forman un sistema derecho, pero la dirección del flujo de energía y la propagación de los frentes de onda viajan en direcciones opuestas. La propagación de este tipo de ondas es un fenómeno ya conocido en guías de onda no uniformes [15], sin embargo esta propiedad en un medio infinito, homogéneo e isotrópico parece ser única de medios izquierdos. De esta propiedad se derivan varias características que se describirán a continuación.

2.5. Índice de refracción negativo.

Consideremos la refracción de un haz sobre la interfase entre dos medios, uno de ellos lo consideramos ordinario, con ε y μ positivos, mientras el otro se considera como un medio izquierdo. Por las condiciones de frontera se impone la continuidad de la componente tangencial del vector de onda en la interfase. Como consecuencia de la propagación de las ondas en un medio izquierdo, el ángulo de refracción será de signo opuesto al ángulo de incidencia, Figura 2.2. De la ley de snell tenemos

$$\frac{\text{Sen}(\theta_i)}{\text{Sen}(\theta_t)} = \frac{-k_t}{k_i} \equiv \frac{n_t}{n_i} < 0, \quad (2.41)$$

donde n_t y n_i son los índices de refracción de los medios izquierdo y ordinario respectivamente. Suponiendo que $n_i > 0$, se obtiene que $n_t < 0$, entonces

$$n_t = -c\sqrt{\varepsilon\mu} < 0, \quad (2.42)$$

Con esta propiedad un lente convexo será divergente y un lente cóncavo será convergente [36], figura 4. Dentro de las consecuencias de este tipo de materiales negativos se encuentra un efecto de bastante interés el cual consiste en el enfocamiento de haces provenientes de una fuente puntual por medio de una placa de material izquierdo [36], Figura 2.3a. Si el índice de refracción del material izquierdo se elige $n_t = -1$, no existe la restricción de rayos paraxiales, ya que para cualquier ángulo de incidencia el ángulo del rayo refractado es igual en magnitud y en sentido contrario, ecuación (2.41). En la figura 2.3b se muestra una placa de material izquierdo cuyo grosor es d , la fuente se ubica en el punto A a una distancia l de la placa y después de atravesar se enfoca en el punto B a una distancia $d - l$ a la derecha de la placa, lo anterior se obtiene mediante geometría utilizando triángulos semejantes.

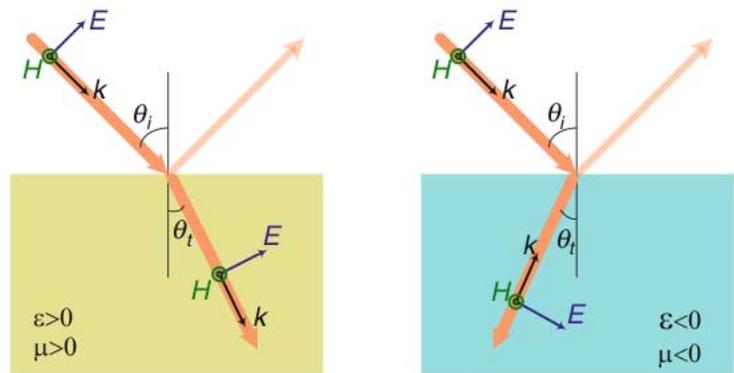


Figura 2.2: Refracción de luz entre dos medios cuando se tienen materiales derechos y cuando uno de ellos es un material izquierdo. Figura de [5].

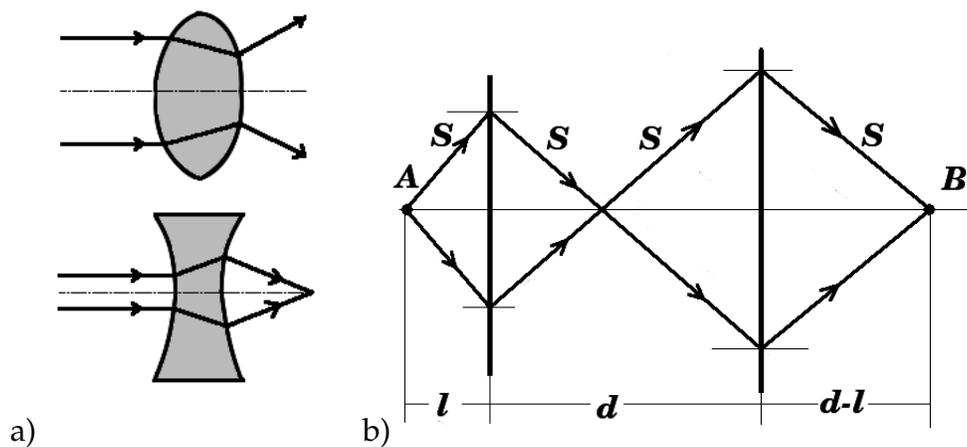


Figura 2.3: a) Trayectoria de rayos de luz a través de lentes hipotéticas, hechas con materiales izquierdos. b) Trayectoria de rayos de luz al atravesar una placa de grosor d , hecha de material izquierdo. A es la fuente de la radiación y B el lugar donde se enfocan los rayos.

2.6. Principio de Fermat.

El principio de Fermat surge de un problema variacional, en el cual el camino óptico de un haz es un extremal. El camino óptico está definido como el producto de la longitud que recorre el haz entre dos puntos A y B , por el índice de refracción del medio. Al integrar sobre un segmento el camino óptico, L , queda establecido de la siguiente forma

$$L = \int_A^B n \, dl,$$

$$\delta L = 0. \quad (2.43)$$

Debido a que la ley de Snell es válida para medios izquierdos, el principio de Fermat continúa siendo válido en este caso al considerar el índice de refracción negativo en la ecuación (2.43). En el caso de materiales izquierdos no necesariamente se cumple que el camino óptico sea un mínimo, de hecho esta cantidad puede ser negativa e incluso nula, si se considera un índice de refracción negativo, este va restando camino óptico, lo cual se ve de la ecuación (2.43). El aumento en la fase al recorrer el camino óptico entre los puntos A y B , figura 2.4, $\Delta\varphi = -k \overline{AB} = -n \frac{\omega}{c} \overline{AB} = -\frac{\omega}{c} L$ será nulo en caso que el camino óptico sea cero, por lo que todos los rayos provenientes de una fuente se enfocarán en un punto con la misma fase de la fuente [35]. Si el índice del medio izquierdo refracción se toma $n = -1$, el coeficiente de reflexión se anula y el campo en la fuente será el mismo que en el foco [20].

Además de la propagación de luz en materiales con índice de refracción negativa y la posibilidad de obtener propagación sin aumento de fase en materiales izquierdos, es posible encontrar otros fenómenos interesantes producto del índice negativo; tal es el caso de el efecto Doppler inverso [36], la radiación de Cerenkov inversa [36, 17] y el corrimiento negativo de Goos-Hänchen [3, 13, 27].

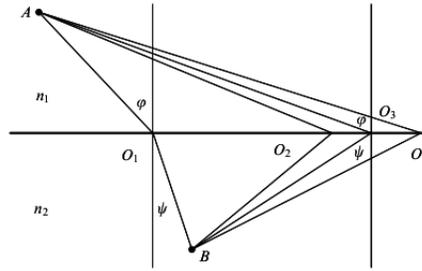


Figura 2.4: Transmisión de luz de una fuente A a un punto B a través de una interfase plana que divide dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 . En el caso en que $n_2/n_1 > 0$, la luz viaja por la trayectoria AO_1B . El caso en que $n_2/n_1 < 0$ la luz viaja por la trayectoria AO_3B . Las trayectorias AO_2B y AO_4B son trayectorias hipotéticas. Figura tomada de [35].

Las propiedades presentadas son de gran interés ya que como se ha mencionado, es posible explotar estas propiedades nuevas para mejorar la resolución de instrumentos ópticos, o bien para hacer materiales invisibles en la región visible del espectro electromagnético, lo cual no parece tan descabellado, ya que estos materiales existen para la región de las microondas.

Capítulo 3

Guía de onda.

Una guía de onda es una estructura que direcciona la propagación de energía en forma de onda electromagnética a lo largo de una trayectoria predeterminada e idealmente debería realizar lo anterior sin pérdidas de energía y sin distorsionar la forma de la onda; situación que en la realidad no sucede.

Las guías de onda pueden tener diversas formas dependiendo en gran medida de la banda de frecuencias en la que se opere. Algunos ejemplos de guías de onda son un tubo de paredes metálicas, un cable coaxial y fibras ópticas.

Las dimensiones de las guías de onda están íntimamente relacionadas con la longitud de onda de la radiación dentro de la guía. Mientras más corta sea la longitud de onda, más pequeñas deberán ser las dimensiones de la estructura. Una guía rectangular metálica para frecuencias de 10 GHz tendrá una sección transversal de 2 cm por 1 cm , mientras que en una fibra óptica para una longitud de onda de $1.3\mu\text{m}$, tendrá un diámetro de $8\mu\text{m}$.

En ocasiones es de mucha utilidad transmitir haces ópticos a través de conductos dieléctricos en vez del espacio libre. Los dispositivos para llevar esto a cabo pueden ser utilizados para propagar señales a grandes distancias sin utilizar amplificadores; estos dispositivos hoy en día tienen numerosas aplicaciones como son las comunicaciones, formación de imágenes en dispositivos médicos y sistemas optoelectrónicos, por mencionar algunos.

En las siguientes secciones se hará una revisión teórica de las guías de ondas, para lo cual se tomo como base el desarrollo presentado en el capítulo 7 del libro señalado en la referencia [11].

3.1. Tratamiento formal de una guía de onda.

Los campos electromagnéticos dentro de una guía de onda deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell (2.1)-(2.4) y las condiciones de frontera (2.11)-(2.14), además dichos campos se propaga-

rán según las ecuaciones de onda para el campo eléctrico (2.32) y el magnético (2.33). Debido a la simetría de las guías de ondas, se separa la variación espacial en la dirección z y se supone una solución del siguiente tipo

$$\begin{aligned}\bar{E}(x, y, z, t) &= \bar{E}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}, \\ \bar{B}(x, y, z, t) &= \bar{B}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t},\end{aligned}\quad (3.1)$$

donde k es la proyección del vector de onda en la dirección z , el cual es un parámetro desconocido que puede ser real o complejo. Con los campos (3.1), las ecuaciones de onda (2.32) y (2.33) resultan en las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\nabla_t^2 \bar{E} + (\mu\epsilon\omega^2 - k^2) \bar{E} &= 0, \\ \nabla_t^2 \bar{B} + (\mu\epsilon\omega^2 - k^2) \bar{B} &= 0,\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde $\nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ denota las componentes transversales x e y del operador laplaciano.

Separando los campos en su parte transversal y paralela al eje z

$$\bar{E} = \bar{E}_z + \bar{E}_t, \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{E}_z &= \hat{z}E_z, \\ \bar{E}_t &= (\hat{z} \times \bar{E}) \times \hat{z},\end{aligned}\quad (3.4)$$

\hat{z} es el vector unitario en la dirección del eje z . Escribiendo el campo magnético de forma similar, las ecuaciones de Maxwell se reescriben en términos de las componentes transversales y paralelas del campo eléctrico y magnético.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} + i\omega \hat{z} \times \bar{B}_t &= \nabla_t E_z, \\ \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \bar{E}_t) &= i\omega B_z,\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{B}_t}{\partial z} - i\mu\epsilon\omega\hat{z} \times \bar{E}_t &= \nabla_t B_z, \\ \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \bar{B}_t) &= -i\mu\epsilon\omega E_z,\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{E}_t &= -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \\ \nabla \cdot \bar{B}_t &= -\frac{\partial B_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

A partir de la primera ecuación de (3.5) y (3.6) respectivamente, se nota que si conocemos E_z y B_z , las componentes transversales de \bar{E} y \bar{B} están determinadas. Tal es el caso de la ecuación (3.1). De las ecuaciones anteriores se encuentra que los campos transversales son los siguientes

$$\bar{E}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} (\pm k \nabla_t E_z - \omega \hat{z} \times \nabla_t B_z), \quad (3.8)$$

$$\bar{B}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} (\pm k \nabla_t B_z + \mu\epsilon\omega \hat{z} \times \nabla_t E_z), \quad (3.9)$$

El signo de k sirve para indicar la dirección de propagación; el signo positivo corresponde a propagación en la dirección positiva del eje z y el signo negativo a la dirección contraria.

Las ecuaciones (3.2) en dos dimensiones para los campos E_z y B_z , junto con las condiciones de frontera (2.11)-(2.14) forman un problema de valores propios. Dada una frecuencia ω , solamente ciertos valores de k son posibles (en guías de onda), o bien dado cierto valor de k , solamente ciertos valores de la frecuencia ω son posibles (en cavidades resonantes). Debido a las condiciones de frontera sobre las componentes E_z y B_z los eigenvalores en general serán diferentes. Entonces los campos se dividen de forma natural en dos categorías distintas comúnmente llamados modos TM y modos TE .

En el vacío una onda electromagnética plana tiene los campos eléctrico y magnético transversales. A las ondas cuyos campos E y B son ortogonales a la dirección de propagación se conocen como ondas TEM ("transverse electric and magnetic"). Una onda TEM propagándose en dirección z tiene las componentes $E_z = 0$ y $B_z = 0$. En una región cerrada también existen soluciones para las cuales sólo una componente de $E_z = 0$ ó $B_z = 0$ se anula; tales soluciones con $E_z = 0$ se conocen como ondas TE y aquellas con $B_z = 0$ como TM . Las ondas TM y TE junto con la onda TEM , constituyen un conjunto completo de campos por medio de los cuales se puede expresar una onda electromagnética arbitraria en una guía de onda.

3.2. Guía de onda dieléctrica.

Consideremos una guía de onda plana, figura 3.1, que se caracteriza por tener fronteras planas, en nuestro caso las elegiremos paralelas al plano $y - z$, el índice de refracción de la guía de onda será n_1 y el del medio circundante n_0 , que corresponde al vacío. Ambos medios se consideran homogéneos, isotrópicos, lineales y que no disipan energía. La permeabilidad magnética en ambos medios se considera constante μ_0 . Se elige como dirección de propagación el eje Oz y en la dirección Oy la estructura se considera de dimensiones infinitas, además de considerarse invariante en dicha dirección. Por las razones anteriores la dependencia en la componente y no se considera. Resolver este problema, consiste en encontrar soluciones a las ecuaciones de Maxwell (2.1)-(2.4) que satisfagan las condiciones de frontera impuestas por la estructura. Los campos tendrán la forma dada en la expresión (3.1), los cuales satisfacen las ecuaciones de onda dadas por (3.2).

A partir de las componentes en la dirección z de los campos eléctrico y magnético se obtienen las componentes transversales, (3.8) y (3.9).

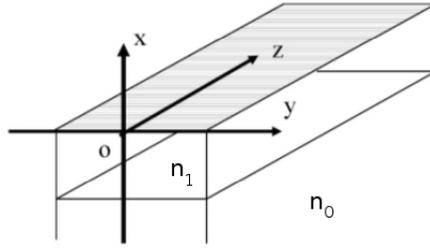


Figura 3.1: Esquema de una guía de onda plana con índice de refracción n_1 inmersa en un medio cuyo índice de refracción es n_0 .

3.2.1. Modo TM.

En el modo TM la componente z del campo magnético es nula $B_z = 0$, por lo que solamente tendremos solución del campo eléctrico en esta componente, $E_z \neq 0$. De la ecuación (3.8) y (3.9)

$$\begin{aligned}\bar{E}_t &= \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} (\pm k\nabla_t E_z - \omega\hat{z} \times \nabla_t B_z) \\ \bar{B}_t &= \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} (\pm k\nabla_t B_z + \mu\epsilon\omega\hat{z} \times \nabla_t E_z),\end{aligned}$$

se obtienen las componentes transversales del campo eléctrico y magnético en términos de E_z .

$$E_x = \frac{ik}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3.10)$$

$$B_y = \frac{i\mu\epsilon\omega}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3.11)$$

$$E_y = 0, \quad (3.12)$$

$$B_x = 0, \quad (3.13)$$

Estos campos deben satisfacer las condiciones (2.11) a (2.14), que en ausencia de cargas y corrientes superficiales se reescriben en el caso de las componentes tangenciales a la frontera, (2.13) para la componente E_z y (2.14) para la componente B_y

$$E_{iz}|_S - E_{jz}|_S = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\mu_i} B_{iy}|_S - \frac{1}{\mu_j} B_{jy}|_S = 0, \quad (3.15)$$

donde el subíndice S indica que se evalúan ambas condiciones sobre la superficie que separa a ambos dieléctricos. Ahora las condiciones sobre las componentes normales a la interfase, (2.11) para la componente E_x y (2.12) para la componente B_x

$$\epsilon_i E_{ix}|_S - \epsilon_j E_{jx}|_S = 0, \quad (3.16)$$

$$\bar{B}_{ix} - \bar{B}_{jx} = 0, \quad (3.17)$$

E_{iz} y B_{iy} denotan las componentes en z del campo eléctrico e y del campo magnético en el medio con índice de refracción $n_i = \sqrt{\frac{\epsilon_i \mu_i}{\epsilon_0 \mu_0}}$. De modo similar el subíndice j para identificar los campos en el dieléctrico con índice de refracción $n_j = \sqrt{\frac{\epsilon_j \mu_j}{\epsilon_0 \mu_0}}$.

En la ecuación (3.15) consideramos que la permeabilidad magnética en ambos medios es la misma, μ_0 , y sustituimos B_y de la ecuación (3.11), quedando la ecuación de la siguiente forma

$$\frac{\epsilon_i}{\mu_i \epsilon_i \omega^2 - k^2} \frac{\partial E_{iz}}{\partial x} \Big|_S - \frac{\epsilon_j}{\mu_j \epsilon_j \omega^2 - k^2} \frac{\partial E_{jz}}{\partial x} \Big|_S = 0. \quad (3.18)$$

Escribiendo $\mu_i \varepsilon_i \omega^2$ en términos del índice de refracción y del vector de onda al multiplicar por $\mu_0 \varepsilon_0$ y dividir por $\mu_0 \varepsilon_0$, se reescribe del siguiente modo $\mu_i \varepsilon_i \omega^2 = n_i^2 k_0^2$. Así la ecuación anterior queda del siguiente modo

$$\frac{\varepsilon_i}{n_i^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{iz}}{\partial x} \Big|_S - \frac{\varepsilon_j}{n_j^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{jz}}{\partial x} \Big|_S = 0. \quad (3.19)$$

Para simplificar dividimos ambos términos de la ecuación entre ε_0 . Notamos que $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \sim n_i^2$ al considerar que $\mu_i \approx \mu_0$ y de manera similar, $\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} \sim n_j^2$; por lo que ahora se tiene finalmente la siguiente expresión

$$\frac{n_i^2}{n_i^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{iz}}{\partial x} \Big|_S - \frac{n_j^2}{n_j^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{jz}}{\partial x} \Big|_S = 0. \quad (3.20)$$

De modo similar se procede con la ecuación (3.16), sustituyendo en ella la expresión de E_x según la ecuación (3.10) y al dividir ambos términos entre ε_0 , se obtiene la misma expresión que la dada por la anterior $\frac{n_i^2}{n_i^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{1z}}{\partial x} \Big|_S - \frac{1}{k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \Big|_S = 0$. Por otro lado, como el campo magnético en la dirección x es nulo, ecuación (3.13), la condición de frontera dada por la ecuación (3.17) se satisface.

Las soluciones que deben satisfacer las condiciones (3.14) y (3.20) se obtienen a partir de la ecuación de onda para el campo eléctrico (3.2)

$$\nabla_t^2 \bar{E} = - \left(n_i^2 k_0^2 - k^2 \right) \bar{E}. \quad (3.21)$$

Observamos que dependiendo del signo del factor $n_i^2 k_0^2 - k^2$, donde n_i es el índice de refracción del medio de propagación, la solución del campo eléctrico puede tener dos comportamientos distintos. Considerando el caso en que $n_j = n_1 > 1$ y $n_i = n_0 = 1$, el vacío.

$$E_{0z} = A e^{-\beta_0 x}, \quad (3.22)$$

$$E_{1z} = C e^{i\beta_1 x} + D e^{-i\beta_1 x}, \quad (3.23)$$

donde $\beta_1^2 = n_1^2 k_0^2 - k^2 > 0$ y $\beta_0^2 = k^2 - k_0^2 > 0$. Entonces en el medio con índice de refracción n_1 la solución es armónica; mientras que en el vacío las soluciones serán exponenciales decrecientes, ya que en este medio el cual circunda a la guía se radiará energía al suponerse que es de dimensiones infinitas. Así las expresiones de β_0 y β_1 son las siguientes

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k^2}, \\ \beta_0 &= \sqrt{k^2 - k_0^2}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Antes de proceder a resolver nuestro sistema, realizamos el cambio de variable $x \rightarrow d\chi$, donde d es el grosor de la guía de onda y χ una variable adimensional. Con este cambio de variable las ecuaciones (3.22) y (3.23) se reescriben de la siguiente manera

En la región $1 \leq |\chi| \leq \infty$, tomando en cuenta que para esta región la función debe ser una exponencial decreciente

$$E_z = A e^{-\beta_0 d \chi}, \quad (3.25)$$

mientras en la región $0 \leq |\chi| \leq 1$ se busca que la solución sea una función par, por lo que se escoge una función tipo $\cos(\chi)$.

$$E_z = B \cos(\beta_1 d \chi), \quad (3.26)$$

bajo el cambio de variable mencionado anteriormente se redefinen $\beta_0 d^2 = kd^2 - k_0 d^2$ y $\beta_1 d^2 = n_1^2 k_0 d^2 - kd^2$. En este caso las cantidades $\beta_0 d$, $\beta_1 d$, $k_0 d$, $k_1 d$ y kd , son adimensionales. La condición (3.20) se reescribe del siguiente modo

$$\frac{1}{-\beta_0 d^2} \left. \frac{\partial E_{0z}}{\partial \chi} \right|_s - \frac{n_1^2}{\beta_1 d^2} \left. \frac{\partial E_{1z}}{\partial \chi} \right|_s = 0, \quad (3.27)$$

Aplicando las condiciones de frontera (3.14) y (3.27) sobre las soluciones (3.25) y (3.26), se obtiene la ecuación trascendente

$$\beta_1 d + n_1^2 \beta_0 d \tan(\beta_1 d) = 0. \quad (3.28)$$

Tenemos entonces un problema de eigenvalores y para cada valor de $\beta_{1,\lambda} d$ hay una función propia del campo eléctrico E_z que corresponde a un modo de propagación en la guía. Dado un valor de $k_0 d$ el valor de kd está determinado para cada eigenvalor $\beta_{1,\lambda} d$.

$$kd_\lambda^2 = n_1^2 k_0 d^2 - \beta_{1,\lambda} d^2, \quad (3.29)$$

recordemos que al ser $\beta_{1,\lambda} d^2 = n_1^2 k_0 d^2 - kd_\lambda^2 > 0$, da lugar a las soluciones oscilantes. Si sucede que $n_1^2 k_{1,\lambda} d^2 > \beta_{1,\lambda} d^2$, entonces kd_λ será real. En caso contrario kd_λ será imaginario y las

soluciones serán de tipo evanescentes. Con objeto de visualizar las soluciones de la ecuación trascendente (3.28), la reescribimos como una función $\beta_0 d(\beta_1 d)$ en términos de $\beta_1 d$. Por otro lado de las ecuaciones (3.24) al despejar la componente z del vector de onda e igualarlas se obtiene $\beta_0 d^2 + \beta_1 d^2 = (n_1^2 - 1)k_0 d^2$. Finalmente nos quedan dos funciones $\beta_0 d(\beta_1 d)$ y sus intersecciones son las soluciones buscadas, ver figura 3.2.

$$\beta_0 d = -\beta_1 d / (n_1^2 \tan(\beta_1 d)), \quad (3.30)$$

$$\beta_0 d = \sqrt{(n_1^2 - 1)k_0 d^2 - \beta_1 d^2}. \quad (3.31)$$

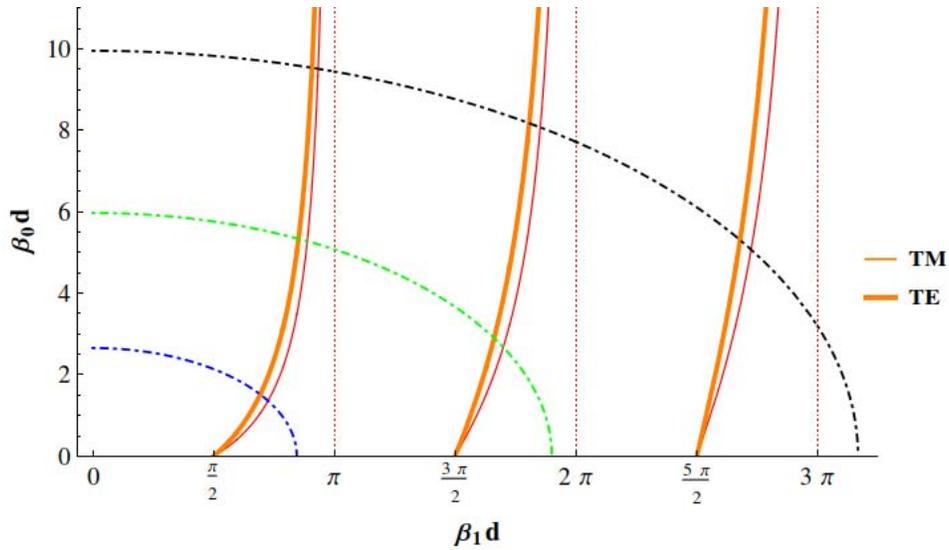


Figura 3.2: Gráficas de las ecuaciones (3.30), línea conína delgada (modo *TM*) y (3.31), línea con segmentos y puntos. Las líneas verticales son las asíntotas de la ecuación (3.30). La línea conína y gruesa corresponde a la ecuación $\beta_0 d = -\beta_1 d / (\tan(\beta_1 d))$, análoga a (3.30); pero en este caso corresponde al modo *TE*. Las intersecciones de las ecuaciones antes mencionadas representan las soluciones, es decir, los modos presentes en la guía de onda. $\beta_0 d$ se toma positivo debido a que las soluciones en el vacío son exponenciales decrecientes, $\exp(-\beta_0 d \chi)$. Los puntos donde $\beta_0 d$ se anula nos da información sobre las frecuencias de corte, ecuación (3.31), $\beta_1 d = (2N + 1)\pi/2 = (n_1^2 - 1)k_0 d$ con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

Cuando la ecuación (3.31) se anula $(n_1^2 - 1)k'_{0,\lambda} d^2 - \beta'_{1,\lambda} d^2 = 0$, entonces se obtiene la frecuencia de corte a partir de la cual existirán los modos de propagación en la guía,

$$k'_{0,\lambda} d = \frac{\beta'_{1,\lambda} d}{\sqrt{(n_1^2 - 1)}}. \quad (3.32)$$

Recordemos que $\beta_0 d$, $\beta_1 d$, $k_0 d$, $k_1 d$ y kd surgen a partir del cambio de variable $x \rightarrow d\chi$. En este

momento nos interesa el término $k_0 d$ para obtener la frecuencia de corte, ya que $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, entonces $k_0 d = \frac{\omega}{c} d = \pi \frac{2d}{\lambda}$, donde $2d$ es el ancho de la guía de onda.

$$\omega'_\lambda = \frac{c\beta'_{1,\lambda}}{\sqrt{(n_1^2 - 1)}}. \quad (3.33)$$

El número de onda en la dirección de propagación depende de la frecuencia de la onda. En la figura 3.3a, se muestra el comportamiento de kd conforme varía $k_0 d$ y en la figura 3.3b se muestra el comportamiento normalizado de $kd/k_0 d$.

3.2.2. Modo TE.

En el modo *TE* la componente z del campo eléctrico es nula, $E_z = 0$, mientras que la componente z del campo magnético es distinta de cero $B_z \neq 0$, y nuevamente de las ecuaciones (3.8) y (3.9) se obtienen las componentes transversales del campo eléctrico y magnético.

$$E_y = \frac{-i\omega}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (3.34)$$

$$B_x = \frac{-ik}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (3.35)$$

$$E_x = 0, \quad (3.36)$$

$$B_y = 0, \quad (3.37)$$

Nuevamente estos campos deben satisfacer las condiciones de frontera (2.11) a (2.14). Las condiciones para las componentes tangenciales a la interfase son las siguientes

$$E_{iy}|_S - E_{jy}|_S = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{\mu_i} B_{iz}|_S - \frac{1}{\mu_j} B_{jz}|_S = 0. \quad (3.39)$$

En la primera ecuación de las condiciones tangenciales se sustituye E_y de (3.34), y en la segunda se considera que $\mu_i \approx \mu_j \approx \mu_0$, entonces resulta el sistema

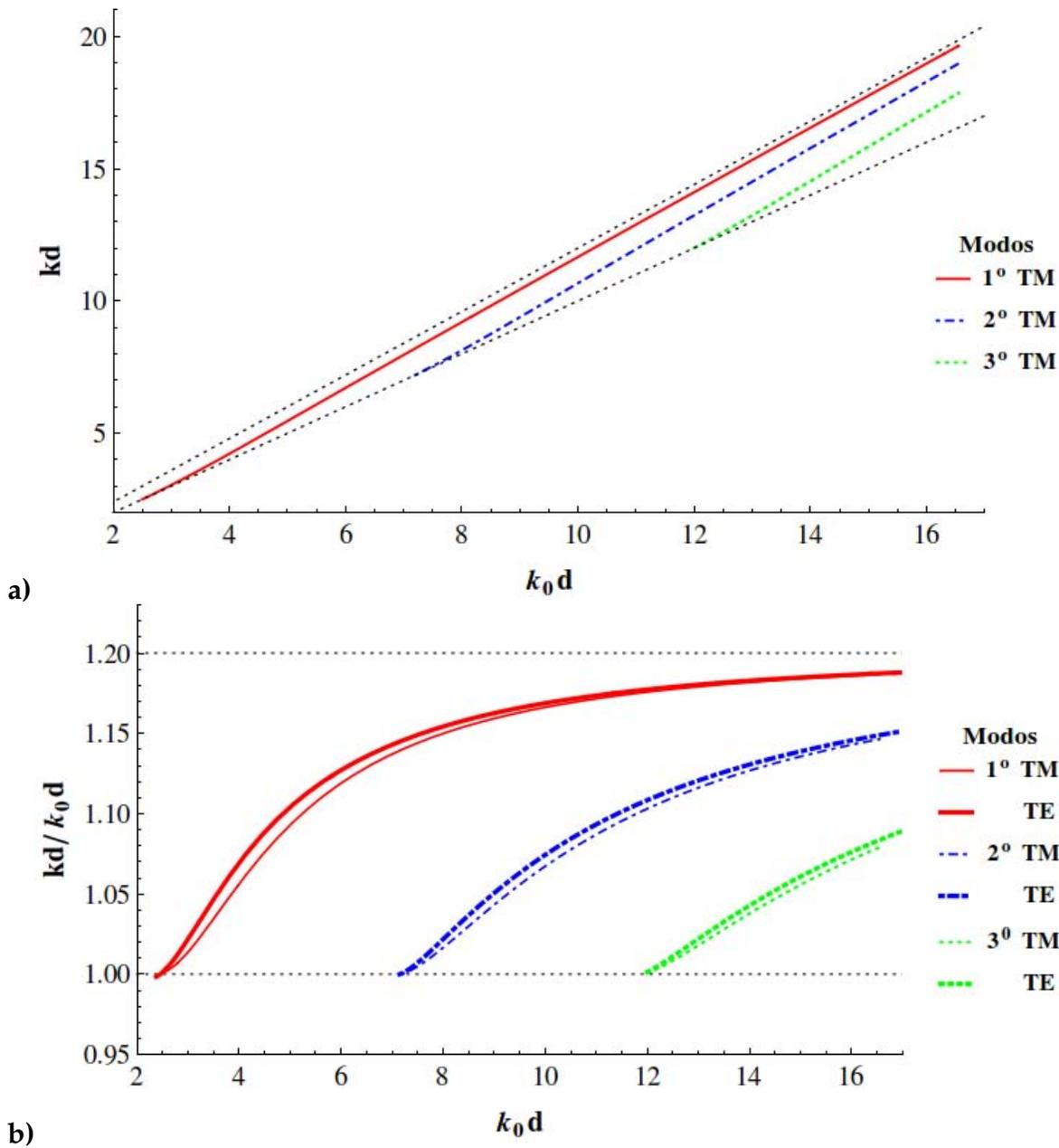


Figura 3.3: Modos *TM* y *TE* en una guía de onda de grosor $2d$ inmersa en un medio infinito. El índice de refracción de la guía de onda se eligió $n_1 = 1.2$, y el medio circundante como el vacío. a) Número de onda en la dirección de propagación kd vs k_0d . El primer modo presente en la guía de onda corresponde a la línea sólida, el segundo modo a la línea con puntos y rayas, mientras que el tercero es la línea punteada. b) Número de onda en la dirección de propagación normalizado kd/k_0d vs k_0d . Las líneas punteadas que acotan a los tres modos en a) representan las relaciones de dispersión en medios infinitos, la de menor pendiente corresponde al vacío y la de mayor pendiente corresponde a un medio con índice de refracción $n_1 = 1.2$.

$$\frac{1}{n_i^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial B_{iz}}{\partial x} \Big|_S - \frac{1}{n_j^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial B_{jz}}{\partial x} \Big|_S = 0, \quad (3.40)$$

$$B_{iz}|_S - B_{jz}|_S = 0. \quad (3.41)$$

Ahora las condiciones sobre las componentes normales son

$$B_{ix}|_S - B_{jx}|_S = 0, \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_i E_{ix}|_S - \varepsilon_j E_{jx}|_S = 0. \quad (3.43)$$

La segunda ecuación de las componentes normales se cumple inmediatamente, ya que $E_x = 0$; mientras que la primera ecuación al sustituir B_x de la ecuación (3.35) resulta la misma ecuación que (3.40). Entonces el sistema de ecuaciones que deben satisfacer las soluciones en la guía de onda para el modo TE , son las ecuaciones (3.40) y (3.41).

Al igual que en los modos TM , se toma el cambio de variable $x \rightarrow d\chi$. En la región $|\chi| \geq 1$ la solución debe ser una exponencial decreciente, ya que en esta región se radía energía de la guía de onda, por lo tanto

$$B_z = A' e^{-\beta_0 d \chi}, \quad (3.44)$$

mientras que en la región $0 \leq |\chi| \leq 1$, debemos cuidar que la solución sea par

$$E_z = B' \cos(\beta_1 d \chi), \quad (3.45)$$

donde $\beta_0 d^2 = kd^2 - k_0^2 d^2$ y $\beta_1 d^2 = n_1^2 k_0^2 d^2 - kd^2$. Sustituyendo $\beta_0 d^2$ y $\beta_1 d^2$ en (3.40), resulta

$$\frac{1}{-\beta_0 d^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \Big|_S - \frac{1}{\beta_1 d^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} \Big|_S = 0. \quad (3.46)$$

Aplicando las condiciones de frontera (3.40) y (3.41), junto con el hecho de que el campo E_z es par en la región $-1 \leq |\chi| \leq 1$, da como resultado la ecuación trascendental

$$\beta_1 d + \beta_0 d \tan(\beta_1 d) = 0. \quad (3.47)$$

La ecuación anterior es prácticamente la misma que en el caso anterior, salvo que la frecuencia de corte en cada modo es menor. Al resolver numéricamente se obtiene la relación de dispersión, que

3.3. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON LONGITUD DE ONDA MAYOR AL GROSOR DE LA GUÍA.

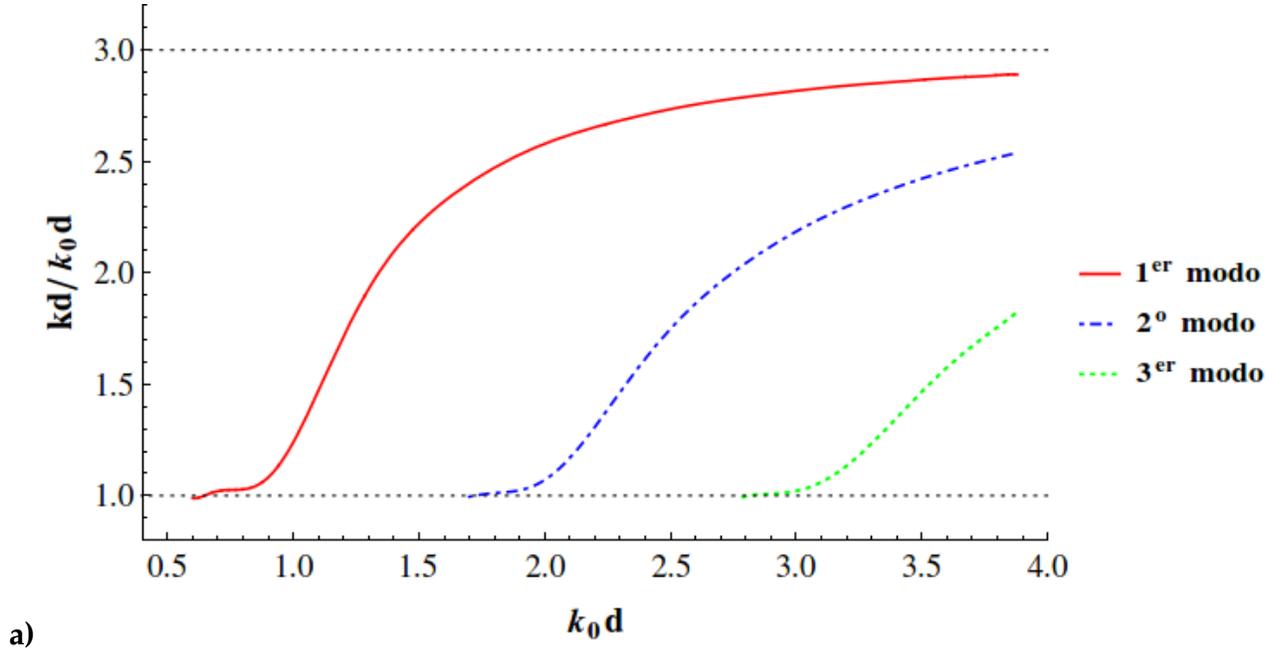
no difiere mucho de la que se obtuvo en el modo TM . En la figura 3.3 b se muestra la gráfica de el número de onda en la dirección de propagación normalizado kd/k_0d vs k_0d , en esta gráfica se ve más claramente la diferencia entre los dos modos.

Lo desarrollado en las secciones 3.1 y 3.2 servirá como base para la propuesta de este trabajo, donde se propone una guía de onda integrada de materiales dieléctricos cuyo índice de refracción es positivo. En la propuesta se aplicará un procedimiento similar a las secciones mencionadas para buscar modos de propagación de ondas superficiales polarizadas en la guía integrada; pero antes de entrar en la propuesta central de esta tesis, se analiza la propagación superando el límite óptico para una guía de onda plana típica de grosor $2d$, con índice de refracción $n > 0$, inmersa en un medio infinito (vacío).

3.3. Propagación de ondas con longitud de onda mayor al grosor de la guía.

Retomando el mismo sistema que consiste en una guía de onda de grosor $2d$ inmersa en un medio infinito, el cual se considera como el vacío; pero se considera que el índice de refracción de la capa dieléctrica tiene un valor más grande, $n_1 = 3$. Al resolver la ecuación (3.28) se obtiene una gráfica similar a la de la figura 3.3, salvo que el intervalo donde las raíces de (3.28) es $0.6 \leq k_0d \leq 3.88$ (para la línea sólida en la figura 3.4).

A su vez el valor mínimo de k_0d es 0.6, por lo que recordando que $k_0d = \frac{2\pi d}{\lambda} = \pi \frac{2d}{\lambda}$, encontramos que $2d = \frac{0.6}{\pi} \lambda \sim 0.2\lambda$ lo cual indica que en un sistema como este existe propagación de ondas cuya longitud de onda es mayor al grosor de la guía. En la figura 3.4, se muestra el comportamiento de la componente del vector de onda en la dirección de propagación normalizado, al variar k_0d , para el modo TM solamente.



a)

Figura 3.4: Modo TM en una guía de onda de grosor $2d$ inmersa en un medio infinito. El índice de refracción de la guía de onda se eligió $n_1 = 3$, y el medio circundante como el vacío. Número de onda en la dirección de propagación normalizado kd/k_0d vs k_0d . Las líneas punteadas que acotan a los tres modos en a) representan las relaciones de dispersión en dieléctricos infinitos, la de menor pendiente corresponde al vacío y la de mayor pendiente corresponde a un medio con índice de refracción $n_1 = 3$. Los intervalos de las curvas: continua, con rayas-puntos y punteada son respectivamente $0.63 \leq k_0d \leq 3.88$, $1.73 \leq k_0d \leq 3.88$ y $2.79 \leq k_0d \leq 3.88$.

La velocidad de fase de la onda propagada esta dada por $v_f = \frac{\omega}{k} = c \frac{k_0}{k}$, entonces $\frac{k}{k_0} = \frac{c}{v_f}$. En un dieléctrico infinito, la velocidad de fase es el cociente entre la velocidad de la luz y el índice de refracción del medio, $v_f = \frac{c}{n}$.

En la guía de onda, la velocidad de fase esta dada por $v_f = \frac{\omega}{k}$, donde k es la componente z del vector de onda. De la ecuación (3.24) tenemos $k^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta_1^2$ en el medio con índice de refracción n_1 y en el vacío $k^2 = k_0^2 + \beta_0^2$, entonces

$$v_{f,1} = \frac{c}{n_1 \sqrt{1 - \beta_1^2 / n_1^2 k_0^2}}, \quad (3.48)$$

$$v_{f,0} = \frac{c}{\sqrt{1 + \beta_0^2 / k_0^2}}, \quad (3.49)$$

mientras que la velocidad de grupo.

$$v_{g,1} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n_1} \sqrt{1 - \beta_1^2 / n_1^2 k_0^2} = \left(\frac{c}{n_1} \right)^2 \frac{1}{v_{f,1}}, \quad (3.50)$$

3.3. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON LONGITUD DE ONDA MAYOR AL GROSOR DE LA GUÍA.

$$v_{g,0} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 + \beta_0^2/k_0^2} = \frac{c^2}{v_{f,0}}, \quad (3.51)$$

donde $\beta_1^2/n_1^2 k_0^2 < 1$, lo que acota a $\frac{c}{n_1} < v_{f,1} < \infty$ y $0 < v_{g,1} < \frac{c}{n_1}$. En el caso de las velocidades de fase y de grupo en el vacío, si hacemos tender k_0 a cero $v_{f,0} \rightarrow 0$, mientras que $v_{g,0} \rightarrow \infty$.

Ambas velocidades están orientadas en la dirección de propagación del paquete de ondas. Lo anterior se observa partiendo de lo siguiente

$$\frac{\partial k^2}{\partial \omega} = 2k \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{2\omega}{v_g v_f}, \quad (3.52)$$

junto con la condición (2.23) se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{\partial k^2}{\partial \omega} = \omega \varepsilon \frac{\partial (\omega \mu)}{\partial \omega} + \omega \mu \frac{\partial (\omega \varepsilon)}{\partial \omega} > 0, \quad (3.53)$$

es posible mostrar que ambas velocidades de fase y de grupo tienen la misma dirección ya que todas las cantidades de la ecuación anterior son positivas, esto debido a que el producto de ambas velocidades es positivo

$$v_g v_p > 0,$$

Al resolver la ecuación trascendente (3.28) se hallan las raíces kd y al elegir una de ellas tenemos un modo propagándose en la guía de onda, ver ecuación (3.29),

$$\begin{aligned} kd_\lambda^2 &= \beta_{0,\lambda} d^2 + k_0 d^2, \\ kd_\lambda^2 &= n_1^2 k_0 d^2 - \beta_{1,\lambda} d^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

La frecuencia de corte para cada modo en la guía es el valor en el cual kd_λ se anula. Para la primera expresión no tendremos frecuencia de corte en ningún caso y para la segunda expresión será $k_0 d = \beta_{1,\lambda} d / n_1^2$. Apartir de la frecuencia de corte se tendrán ondas propagándose en la guía. En la figura 3.5a se muestra el caso de las curvas $kd/k_0 d$ vs $k_0 d$ para modos oscilantes ($kd = \sqrt{n_1^2 k_0 d^2 - \beta_{1,\lambda} d^2}$) y se indica el valor de las frecuencias de corte. En la figura 3.5b se muestra la gráfica $kd/k_0 d$ vs $k_0 d$ para modos evanescentes ($kd = \sqrt{k_0 d^2 + \beta_{0,\lambda} d^2}$). En el segundo caso no se tienen frecuencias de corte y cabe notar que las velocidades de fase y de grupo en ambos casos, a) y b) difieren en su comportamiento. En el caso a) conforme $k_0 d$ tiende a la frecuencia de corte la velocidad de fase $v_f = \frac{\omega}{k} = c \frac{k_0 d}{kd} \rightarrow \infty$ y la velocidad de grupo $v_g = c \left(\frac{\partial kd}{\partial k_0 d} \right)^{-1} \rightarrow 0$, por otro lado conforme $k_0 d$

aumenta la velocidad de fase y de grupo tienden al valor que toma la velocidad de fase y de grupo en un medio infinito con índice de refracción $n = 3$. En el caso b) conforme $k_0d \rightarrow 0$, $v_f = c \frac{k_0d}{kd} \rightarrow 0$ y $v_g = c \left(\frac{\partial kd}{\partial k_0d} \right)^{-1} \rightarrow \infty$.

Este sistema en el cual se considera un índice de refracción alto para la guía de onda, nos da la idea de que posiblemente el sistema propuesto en este trabajo supere el límite óptico en la propagación de ondas. En la propuesta, buscamos que exista un contraste alto en los índices de refracción de las componentes de la guía de ondas integrada, y variamos las dimensiones de los componentes internos para buscar alguna configuración que posibilite la propagación de ondas superficiales. Cabe resaltar que buscamos propagar ondas superficiales que superen el límite óptico utilizando materiales dieléctricos con índices de refracción que estén dentro del primer cuadrante de la figura 1.1. Para propagar ondas superficiales (SPP) es necesario que la permitividad eléctrica sea negativa, o bien la permeabilidad magnética sea negativa. En el siguiente capítulo, capítulo 4, analizaremos estos requerimientos para propagar SPP, con el fin de clarificar y mostrar la importancia que tendría el sistema propuesto en caso de que propague SPP. En el capítulo 5 se hará una revisión de los lentes de Pendry, los cuales utilizan SPP para su funcionamiento, para mostrar las posibilidades tecnológicas que presenta el uso de SPP.

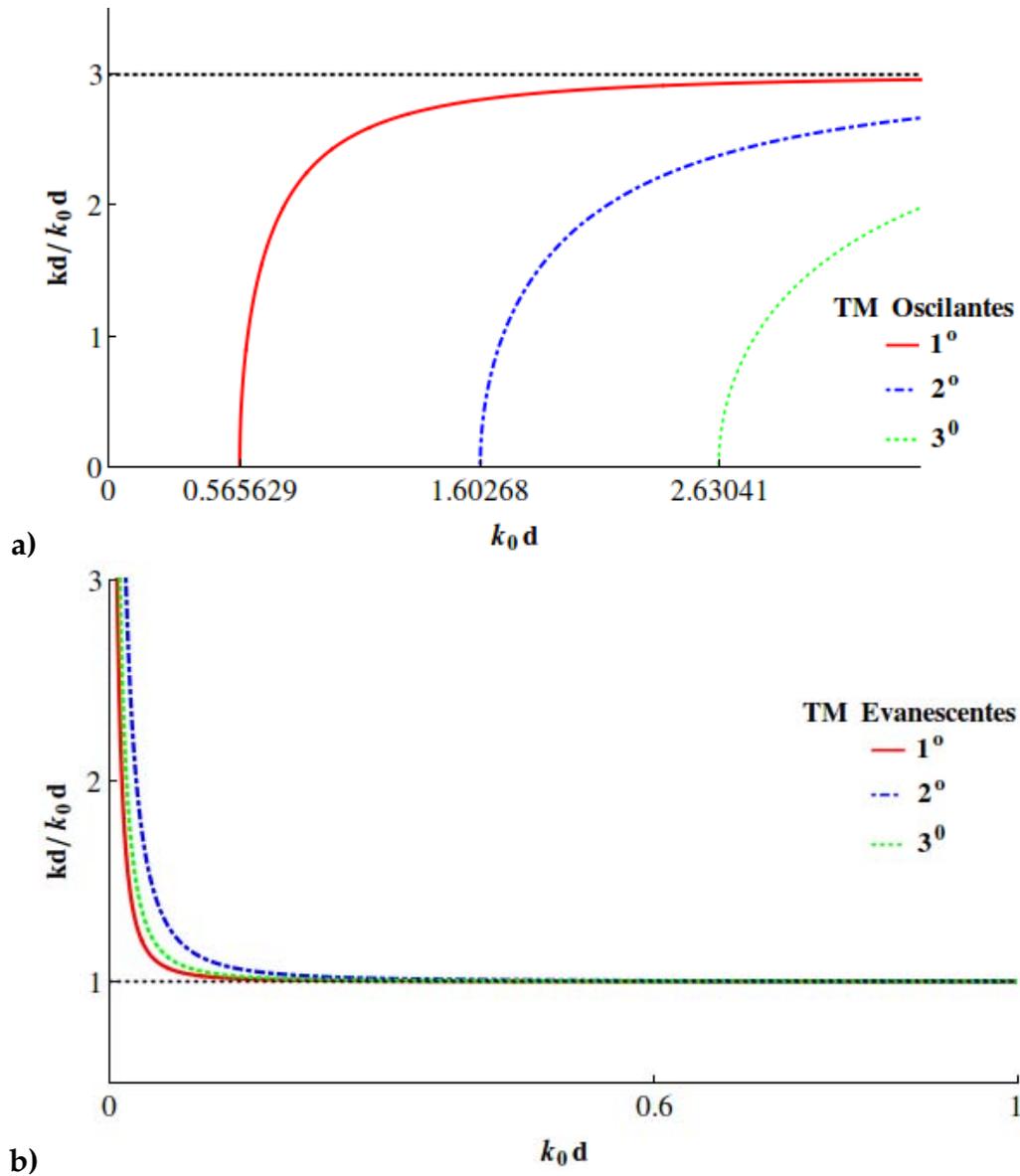


Figura 3.5: Modo TM en una guía de onda de grosor $2d$ inmersa en un medio infinito. El índice de refracción de la guía de onda se eligió $n_1 = 3$, y el medio circundante como el vacío. a) kd/k_0d vs k_0d ($kd = \sqrt{n_1^2 k_0^2 d^2 - \beta_{1,\lambda}^2 d^2}$). Las frecuencias de corte son los valores para los cuales kd se anula. b) kd/k_0d vs k_0d ($kd = \sqrt{k_0^2 d^2 + \beta_{0,\lambda}^2 d^2}$), en este caso no hay frecuencias de corte.

Capítulo 4

Ondas superficiales.

Cuando una onda electromagnética incide de un medio con índice de refracción n_1 a otro con índice n_2 , se presenta el fenómeno de reflexión y refracción de la onda, el cual está descrito por la ley de Snell. Analizaremos ahora otro aspecto de la propagación de ondas en la interfase de dos medios, en el cual se dice que la onda se pega a la interfase. Cuando esto sucede se tiene una onda superficial, figura 4.1.

Para abordar este aspecto, asumamos que tenemos una interfase (paralela al eje z) entre dos medios infinitos con índices de refracción n_1 y n_2 ; la normal a esta superficie esta en dirección x e ignoramos la dependencia en y al considerar que las dimensiones en esta dirección son infinitas. Junto a estas consideraciones agregamos la existencia de un campo transversal magnético TM que va a incidir en la superficie. Dadas estas condiciones sabemos que las componentes E_x y B_y están dadas por las ecuaciones (3.10) y (3.11) en ambos lados de la interfase. Las ondas electromagnéticas se propagan en la dirección z a lo largo de la superficie, y su amplitud decae exponencialmente al alejarse de la interfase, como se muestra en la figura 8. De la ecuación de onda (3.2) tenemos

$$\nabla_t^2 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = - (n^2 k_0^2 - k^2) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix},$$

en donde n es el índice de refracción del medio de propagación de la onda electroamagnética. La componente x del vector de onda, β , viene dada por

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= k^2 - n_1^2 k_0^2 > 0, \\ \beta_2^2 &= k^2 - n_2^2 k_0^2 > 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

n_1 y n_2 son los índices de refracción de dos medios distintos separados por una interfase. Por lo

tanto tendremos como soluciones de la ecuación de onda (3.2) exponenciales reales, de las cuales sólo se eligen las que son decrecientes, en la coordenada x .

$$\begin{aligned}\nabla_t^2 \bar{E} &= -\beta_i^2 \bar{E}, \\ \bar{E} &= A e^{-\beta_i x} e^{-ikz}, \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$\beta_i = \sqrt{k^2 - n_i^2 k_0^2}, \quad (4.3)$$

En la coordenada z la dependencia será del tipo $e^{\pm ikz}$, tal como se propuso en la ecuación (3.1). Los campos eléctricos y magnéticos en ambas regiones son los siguientes, tomando en cuenta las ecuaciones (3.10) y (3.11)

$$\begin{aligned}E_{z1} &= A e^{-\beta_1 x} e^{-ikz}, \\ E_{x1} &= -A \frac{ik}{\beta_1} e^{-\beta_1 x} e^{-ikz}, \\ B_{y1} &= -A \frac{in_1^2 k_0}{c\beta_1} e^{-\beta_1 x} e^{-ikz},\end{aligned}\quad (4.4)$$

en el medio con índice n_1 , mientras que para el medio con índice n_2 donde $x < 0$

$$\begin{aligned}E_{z2} &= B e^{\beta_2 x} e^{-ikz}, \\ E_{x2} &= -B \frac{ik}{\beta_2} e^{\beta_2 x} e^{-ikz}, \\ B_{y2} &= -B \frac{in_2^2 k_0}{c\beta_2} e^{\beta_2 x} e^{-ikz},\end{aligned}\quad (4.5)$$

en ambos casos, al aplicar la condición sobre la componente tangencial del campo eléctrico E_z (2.13) y evaluar en $x = 0$, se obtiene la condición sobre las amplitudes

$$A = B. \quad (4.6)$$

Por otro lado al evaluar la condición normal sobre el campo eléctrico E_x (2.11) en $x = 0$ se obtiene la condición sobre la componente del vector de onda en x

$$\beta_2 = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \beta_1. \quad (4.7)$$

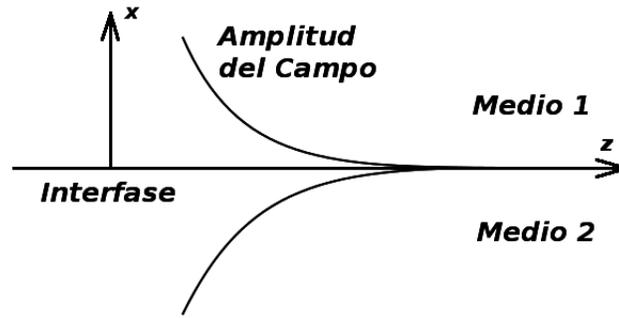


Figura 4.1: Onda superficial en la frontera entre dos medios.

Como β_1 y β_2 son positivas, la ecuación (4.7) se cumplirá cuando $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, es decir que sea negativa una de las permitividades eléctricas. Esta es la condición para que exista una onda superficial propagándose sobre la interfase. Supongamos que uno de los medios es el vacío, $n_1 = 0$, entonces, el medio con índice de refracción n_2 , deberá tener la permitividad negativa y se tiene la propagación de una onda superficial.

La componente en la dirección de propagación \hat{z} , \hat{k} , es la misma en los casos (4.4) y (4.5), y de la ecuación (4.7) se obtiene la componente del vector de onda que cumple la condición de resonancia para formar ondas superficiales

$$k_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (4.8)$$

En la naturaleza no hay materiales conocidos que tengan simultáneamente su permitividad eléctrica y su permeabilidad magnética negativas simultáneamente. Se han creado metamateriales con estas características para longitudes de onda muy específicas. Un ejemplo de material con índice de refracción negativo consiste en un arreglo periódico de delgados alambres metálicos y anillos abiertos que funcionan como resonadores magnéticos. Es por esa razón que los lentes de Pendry cobran importancia, como una alternativa para realizar lentes con mejor resolución.

4.1. Lentes perfectos con ondas superficiales, lentes de Pendry.

De acuerdo a la teoría de difracción de Abbe, la separación mínima Δx entre dos puntos que pueden ser distinguidos en una imagen producida por un lente, bajo el criterio de Rayleigh es

$$\Delta x = \frac{0.61\lambda}{n \text{ sen}(\theta)} \quad (4.9)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz utilizada, n el índice de refracción de la lente, y 2θ es la apertura angular del lente del lado del objetivo. Dado que el índice de refracción y la apertura del lente están limitados físicamente, sólo queda disminuir la longitud de onda para lograr mayor resolución espacial sin salirse del rango del espectro visible.

La longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia angular $\lambda = 2\pi c/\omega$, donde c es la velocidad de la luz. Si se pudiera lograr disminuir la velocidad de la luz manteniendo la frecuencia angular constante, la longitud de onda podría disminuir y la resolución de la imagen aumentaría. Esto se puede lograr llenando el espacio entre la lente y la superficie de la muestra con un medio cuyo índice de refracción sea más alto, por ejemplo al sumergirlo en aceite. Este método mejora la resolución con la limitante de mantener los medios transparentes dada la longitud de onda.

Existe otra forma para disminuir la velocidad de una onda al propagarla en la superficie de un metal, con un perfil evanescente asociada a las oscilaciones colectivas de los electrones. A este tipo de ondas, plasmones superficiales polarizados, se les conoce por su acrónimo en inglés como SSP (Surface Plasmon Polaritons) y pueden ser de utilidad para aumentar la resolución de imágenes [12].

Una forma de excitar a los SPP con luz, consiste en hacer incidir un haz a un ángulo θ_0 sobre una superficie rugosa, por ejemplo una rejilla de constante a . La componente del vector de onda sobre la superficie toma la forma $k = \frac{\omega}{c} \text{Sen}(\theta_0) \pm \Delta k = k_{SPP}$, donde $\Delta k = m 2\pi/a$, y m es un entero. La resonancia corresponde a un mínimo de la luz reflejada [24]. El proceso inverso también puede presentarse al propagarse un SPP en una superficie rugosa o una rejilla, al reducirse el vector de onda en la dirección de propagación k por Δk , entonces el SPP es transformado en luz. Otro método resulta al hacer incidir luz sobre una superficie metálica cubierta con un medio dieléctrico cuya permitividad eléctrica sea mayor que la del vacío, $\epsilon > 1$, por ejemplo un prisma de cuarzo y debajo de la capa metálica otro medio por ejemplo aire. La relación de dispersión del sistema cuarzo/metal/aire esta por debajo la línea c , y se intersecta con la línea $c/\sqrt{\epsilon}$ [24], figura 4.2. Al incidir la luz a través del cuarzo la magnitud del vector de onda es $\sqrt{\epsilon}(\frac{\omega}{c})$ y su proyección sobre la superficie metálica será $k = \sqrt{\epsilon}(\frac{\omega}{c}) \text{sen}(\theta_0)$. θ_0 es el ángulo de incidencia en la frontera cuarzo-metal y dicho ángulo se encuentra en la región de reflexión total. La excitación del SPP ocurre cuando se cumple la condición de resonancia, ecuación (4.8)

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_r} = c \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon} \text{sen}(\theta_0)}, \quad (4.10)$$

donde k_r esta dado por la ecuación (4.8). Si se satisface esta condición se forma una onda evanescente cuya velocidad de fase es $v = \omega/k = c/\sqrt{\epsilon_0} \text{sen}(\theta_0)$, y en donde $\sqrt{\epsilon_0} \text{sen}(\theta_0) > 1$. Así el SPP viaja sobre la película metálica con una velocidad menor, $v \leq c$. Se muestra esquemática-

mente la configuración en la figura 4.3b. Una configuración similar a la anterior consiste en dejar una separación de aire del orden de una longitud de onda, entre el prisma de cuarzo y la película metálica, con la finalidad de no maltratar la superficie metálica y evitar daños que generen dispersión, figura 4.3a.

El uso de SPP sobre una película delgada de oro para la formación de imágenes fue hecha por Smolyaninov et al [31], quién utilizó luz de 502 nm de un laser de argón, para excitar los SPP, colocó una muestra sobre la superficie metálica (agujeros nanométricos) y encima de la muestra colocó una gota de glicerina; luego observó con un microscopio ordinario. La longitud de onda del SPP al ser excitado con luz de 502 nm es del orden de 70 nm, que resulta en un mejoramiento de la resolución por un factor de ~ 7 [12].

En el caso límite en el cual la frecuencia ω se aproxima a la frecuencia de resonancia de los electrones ω_{SPP} , el número de onda k_{SPP} asociado con el SPP tiende a infinito, debido a que la velocidad de propagación tiende a cero. Este es el caso de los superlentes que permitirían formar imágenes completamente nítidas [36]. Los superlentes fueron explicados en un principio por medio del índice de refracción negativo (Lentes de Veselago) y de forma análoga se puede entender este fenómeno al considerar a los SPP (Lentes de Pendry).

Los superlentes tienen varias limitantes para obtener alta resolución. Algunos factores que afectan el desempeño son: i) la calidad de la estructura por ejemplo para las rejillas o las superficies rugosas; ii) la oxidación de los recubrimientos metálicos; iii) la pérdida de energía que se genera debido a la parte imaginaria de la permitividad eléctrica, que en un metal no es despreciable. Debido a las pérdidas de energía los SPP sólo se mantienen por algunos pico segundos [12].

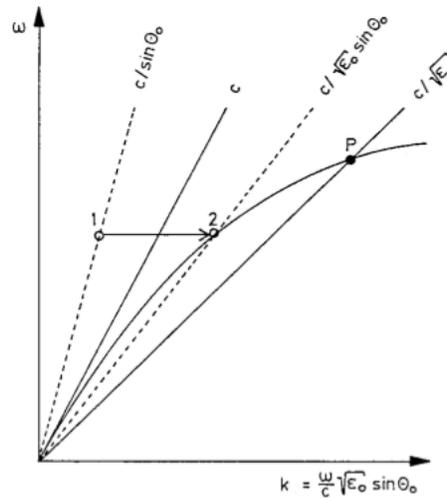


Figura 4.2: Cuando la luz es reflejada por una superficie metálica cubierta con un dieléctrico ($\epsilon_0 > 1$) por ejemplo cuarzo, la proyección del vector de onda en la interfase será $k = \sqrt{\epsilon_0} \frac{\omega}{c} \text{sen}(\theta_0)$. La relación de dispersión (4.8) para un SPP propagándose en la interfase ϵ_2/ϵ_1 (aire/metál) se puede satisfacer entre las líneas c , por encima de la cual el límite de reflexión en la interfase 0/1 se presenta, y $c/\sqrt{\epsilon_0}$. La excitación del SPP ocurre cuando una onda evanescente con velocidad de fase $v = \omega/k = c/(\sqrt{\epsilon_0} \text{sen}(\theta_0))$ se propaga en la interfase con $v \leq c$. La condición de resonancia para el SPP (4.8) se satisface si $c\sqrt{\epsilon + 1/\epsilon} = c/(\sqrt{\epsilon_0} \text{sen}(\theta_0))$. Figura de [24].

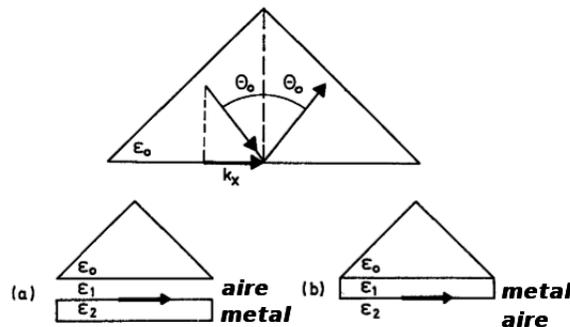


Figura 4.3: Configuraciones para excitar un SPP. (a) Entre el prisma y la película metálica existe una separación con aire; la separación es del orden de una longitud de onda. El campo evanescente se acopla con el SPP en la interfase 1/2. Esta configuración se conoce como configuración de Otto y esta pensada para evitar daño en las superficies. (b) La película metálica ϵ_1 cuyo grosor es del orden de micras esta en contacto con el medio ϵ_0 . El campo electromagnético decae exponencialmente en la película metálica y excita al SPP en la interfase 1/2, esta es la configuración de Kretschmann-Raether. Figura de [24].

Capítulo 5

Sistema propuesto para propagar ondas sobre el límite óptico.

En la sección anterior se mencionaron las limitaciones que existen al crear un SPP, entre las que se destacan la oxidación de los recubrimientos metálicos, la pérdida de energía y por lo tanto la corta vida media del SPP. También podríamos agregar el costo que implica hacer recubrimientos de oro en la industria. En el presente trabajo se propone un sistema para el cual se analizará si es capaz de propagar ondas superficiales, compuesto por materiales dieléctricos con el cual se busca que la pérdida de energía sea considerablemente menor que en el caso de materiales metálicos al propagar un SPP. El tratamiento básicamente es el que se desarrolló en las secciones 3.2.1 y 3.2.2.

Con lo anterior y teniendo en mente a los superlentes con ondas evanescentes, en los cuales está presente el problema de la absorción por parte de los recubrimientos metálicos, se propone en este trabajo un sistema el cual consiste en una guía de onda plana formada por tres placas de dieléctrico dispuestas según se muestra en la figura 5.1. En la región intermedia el medio tiene índice de refracción n_2 , mientras que los medios superior e inferior a la región intermedia tienen índice de refracción n_1 . El medio que circunda a la guía de onda se toma como el vacío. Se ha mencionado que la idea de formar un SPP consiste en disminuir la velocidad de propagación de una onda en una superficie, y al imponer la condición $n_2 > n_1$, básicamente estamos forzando a que suceda. Ahora consideramos como punto de partida una placa de grosor $2d$ inmersa en el vacío de dimensiones infinitas; si deseamos realizar algún dispositivo sería deseable tener una configuración como la dada en la figura 5.1, y con esto en mente abordaremos el problema de una forma similar a la desarrollada en la sección 3.1. Se considerará la propagación de los modos TM y TE , se aplicaran las condiciones de frontera y se obtendrán dos ecuaciones trascendentes, una para cada modo; y al resolverlas se obtendrán los modos de propagación presentes en la guía de onda propuesta.

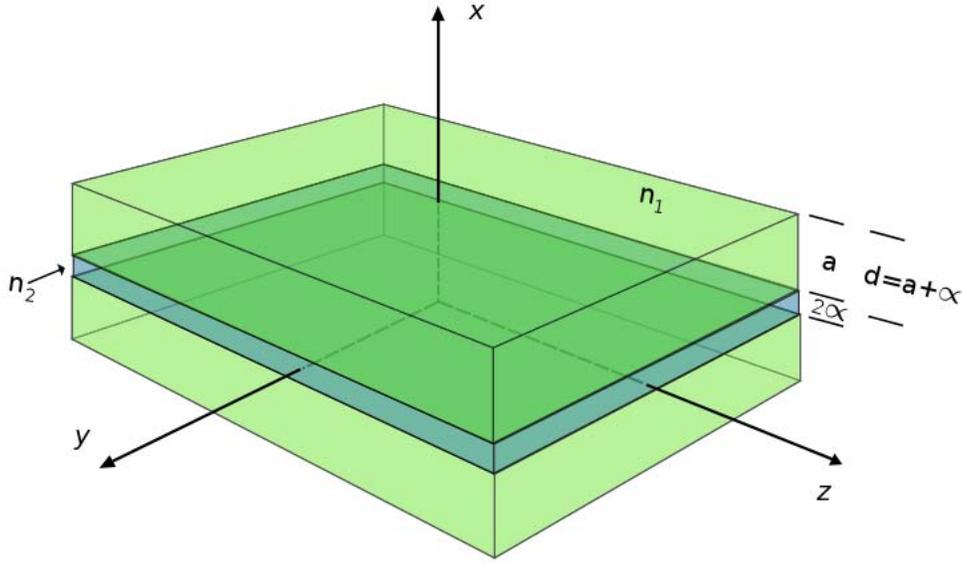


Figura 5.1: Guía de onda plana de grosor $2d$, formada por tres placas dieléctricas. En la región intermedia la placa con grosor 2α el índice de refracción es n_2 , mientras que los medios superior e inferior a la región intermedia, cada uno con grosor a , tienen índice de refracción n_1 , así $2d = 2\alpha + 2a$. El medio que circunda a la guía de onda, se toma como el vacío. Se considera el caso en que $n_2 > n_1$.

5.1. Modo TM.

Las componentes del campo electromagnético en este modo son $E_x, B_y, E_y = 0$ y $B_x = 0$ expresadas por las ecuaciones (3.10) a (3.13). De forma similar a como se definieron las ecuaciones (3.24) definimos lo siguiente

$$\beta_0^2 = k^2 - k_0^2 > 0,$$

$$\beta_1^2 = k^2 - k_0^2 n_1^2 > 0,$$

$$\beta_2^2 = k_0^2 n_2^2 - k^2 > 0, \quad (5.1)$$

que surgen de la ecuación de onda $\nabla_t^2 \bar{E} = -(n_i^2 k_0^2 - k^2) \bar{E}$, la forma de β_i^2 determina el tipo de solución en cada región. Se busca que en la región donde el índice de refracción es n_1 y en el exterior de la guía de onda, el vacío, las soluciones sean de perfil evanescente, razón por la cual se define $\beta_0^2 = k^2 - k_0^2 > 0$ y $\beta_1^2 = k^2 - k_0^2 n_1^2 > 0$. Mientras que β_2^2 se define con signo contrario,

dado que en la región central de la guía de onda la solución será de tipo coseno. Se elige como un coseno para fijar la solución simétrica con respecto al plano yz . A continuación se presentan las soluciones de los campos considerando la variable adimensional $\chi = \frac{x}{d}$, con $d = \alpha + a$. De esta adimensionalización surge la necesidad de redefinir los términos $\beta_0^2 \rightarrow \beta_0 d^2 = kd^2 - k_0 d^2$, $\beta_1^2 \rightarrow \beta_1 d^2 = kd^2 - n_1^2 k_0 d^2$ y $\beta_2^2 \rightarrow \beta_2 d^2 = n_2^2 k_0 d^2 - kd^2$. Así quedan definidas las tres regiones $0 \leq \chi \leq \frac{\alpha}{d}$, $\frac{\alpha}{d} \leq \chi \leq \frac{\alpha+a}{d}$ y $1 \leq \chi$. Las soluciones propuestas en cada región son las siguientes.

$$E_z = A_1 e^{-\beta_0 d \chi} \quad 1 \leq \chi, \quad (5.2)$$

$$E_z = B_1 e^{-\beta_1 d \chi} + C_1 e^{\beta_1 d \chi} \quad \frac{\alpha}{d} \leq \chi \leq \frac{\alpha+a}{d}, \quad (5.3)$$

$$E_z = D_1 \text{Cos}(\beta_2 d \chi) \quad 0 \leq \chi \leq \frac{\alpha}{d}. \quad (5.4)$$

Al aplicar las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.11) a (2.14) a las componentes tangenciales, E_z , B_y y $E_y = 0$, y a las componentes normales en la dirección χ , se obtienen las expresiones

$$E_{iz}|_S - E_{jz}|_S = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\mu_i} B_{iy}|_S - \frac{1}{\mu_j} B_{jy}|_S = 0, \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_i E_{i\chi}|_S - \varepsilon_j E_{j\chi}|_S = 0, \quad (5.7)$$

en donde i y j denotan dos medios distintos. Manipulando las ecuaciones anteriores, se puede demostrar que las ecuaciones (5.6) y (5.7) generan la misma condición. El sistema de ecuaciones obtenido al aplicar las condiciones de frontera en una interfase entre dos medios con índices n_i y n_j esta dado por el siguiente par de ecuaciones, caso análogo a (3.14) y (3.27).

$$\begin{aligned} E_{iz}|_S - E_{jz}|_S &= 0, \\ \frac{n_i^2}{n_i^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{iz}}{\partial \chi} \Big|_S - \frac{n_j^2}{n_j^2 k_0^2 - k^2} \frac{\partial E_{jz}}{\partial \chi} \Big|_S &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Las interfases S se ubicarán en $\chi = \pm y$ y $\chi = \pm \alpha/d$, por lo que se tendrán en principio 8 ecuaciones que fijarán las condiciones sobre las soluciones y nuevamente se obtendrá un problema de

valores propios. Al presentar simetría el sistema respecto al plano yz se simplificará el sistema y se reducirá a 4 ecuaciones, eligiendo aquellas con $\chi = 1$ y $\chi = \alpha/d$.

El sistema que resulta de la interfase $\chi = \alpha/d$, entre los medios con índices de refracción n_2 y n_1 es el siguiente

$$\begin{aligned} E_{2z}|_{\chi=\alpha/d} - E_{1z}|_{\chi=\alpha/d} &= 0, \\ \frac{n_2^2}{\beta_2 d^2} \frac{\partial E_{2z}}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\alpha/d} + \frac{n_1^2}{\beta_1 d^2} \frac{\partial E_{1z}}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\alpha/d} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

mientras que en $\chi = 1$, la interfase entre el medio con índice de refracción n_1 y el vacío, se obtiene el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} E_{1z}|_{\chi=1} - E_{0z}|_{\chi=1} &= 0, \\ -\frac{n_1^2}{\beta_1 d^2} \frac{\partial E_{1z}}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} + \frac{1}{\beta_0 d^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sustituyendo las soluciones propuestas, ecuaciones (5.2) a (5.4) en (5.9) y (5.10), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$B_1 e^{-\frac{\alpha}{d}\beta_1 d} + C_1 e^{\frac{\alpha}{d}\beta_1 d} - D_1 \text{Cos} \left(\frac{\alpha}{d}\beta_2 d \right) = 0, \quad (5.11)$$

$$-B_1 e^{-\frac{\alpha}{d}\beta_1 d} \frac{n_1^2}{\beta_1 d} + C_1 e^{\frac{\alpha}{d}\beta_1 d} \frac{n_1^2}{\beta_1 d} - D_1 \text{Sen} \left(\frac{\alpha}{d}\beta_2 d \right) \frac{n_2^2}{\beta_2 d} = 0, \quad (5.12)$$

$$A_1 e^{-\beta_0 d} - B_1 e^{-\beta_1 d} - C_1 e^{\beta_1 d} = 0, \quad (5.13)$$

$$A_1 e^{-\beta_0 d} \frac{1}{\beta_0 d} - B_1 e^{-\beta_1 d} \frac{n_1^2}{\beta_1 d} + C_1 e^{\beta_1 d} \frac{n_1^2}{\beta_1 d} = 0. \quad (5.14)$$

Por medio del determinate del sistema anterior se obtiene la siguiente ecuación trascendente que fija un problema de valores propios en términos de los parámetros que fijan las dimensiones del sistema, y los índices de refracción de los medios de propagación.

$$\left(e^{\frac{2\alpha}{d}\beta_1 d} \left(-n_1^2 \beta_0 d + \beta_1 d \right) + e^{2\beta_1 d} \left(n_1^2 \beta_0 d + \beta_1 d \right) \right) \beta_2 d + \gamma \beta_1 d \left(e^{\frac{2\alpha}{d}\beta_1 d} \left(n_1^2 \beta_0 d - \beta_1 d \right) + e^{2\beta_1 d} \left(n_1^2 \beta_0 d + \beta_1 d \right) \right) \tan \left(\frac{\alpha}{d} \beta_2 d \right) = 0. \quad (5.15)$$

La idea es resolver la ecuación anterior y encontrar la componente del vector de onda en la dirección de propagación, kd , ya que $\beta_0 d^2 = kd^2 - k_0 d^2$, $\beta_1 d^2 = kd^2 - k_0 d^2 n_1^2$ y $\beta_2 d^2 = n_2^2 k_0 d^2 - kd^2$. La solución dependerá de la elección de los parámetros $\frac{\alpha}{d} = \eta$, $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \gamma$, $k_0 d$ y n_1 . Al Fijar el valor de η , automáticamente queda determinado a , ya que $\alpha + a = d$. A su vez se tomará un valor fijo de n_1 y al variar γ , tendremos los distintos valores de n_2 .

En las figuras 5.2, 5.3 y 5.4 se muestra el comportamiento de la solución a la ecuación (5.15) conforme se varían los parámetros γ , η y $k_0 d$ respectivamente. Una vez hallada una raíz de la ecuación trascendente queda determinado un modo normal en la guía de onda, este valor de kd se introduce en el sistema de ecuaciones (5.11) a (5.14) y se resuelve para encontrar las amplitudes de A_1 , B_1 , C_1 y D_1 . Con lo anterior los perfiles expresados en las ecuaciones (5.2) a (5.4) quedan completamente determinados y en la figura 5.5 se muestran graficados con distintos valores de los parámetros γ y η .

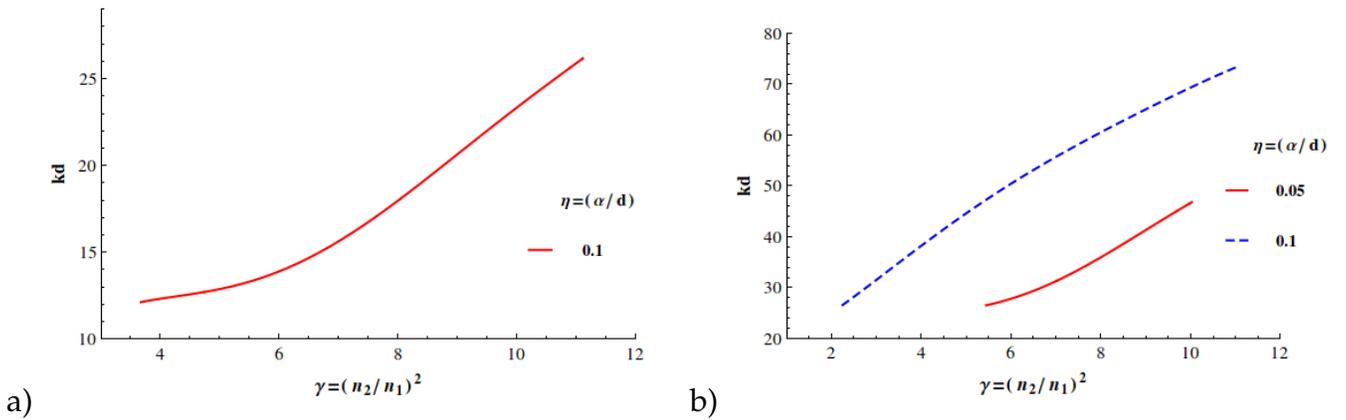


Figura 5.2: Modo *TM*. Al Resolver (5.15) variando el parámetro $\gamma = (n_2/n_1)^2$, donde n_2 es el índice de refracción de la región central de la guía de onda y n_1 el de la región contigua. Al considerar valores distintos de $\eta = \alpha/d$. El intervalo de γ , para cada grosor, η , corresponde a la región donde la ecuación (5.15) presenta soluciones reales, estos intervalos son respectivamente a) $k_0 d = 10, (2.3/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$ y en b) $k_0 d = 20, (2.38/1.2)^2 \leq \gamma \leq (3.8/1.2)^2$, línea sólida y $(1.8/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$, línea segmentada.

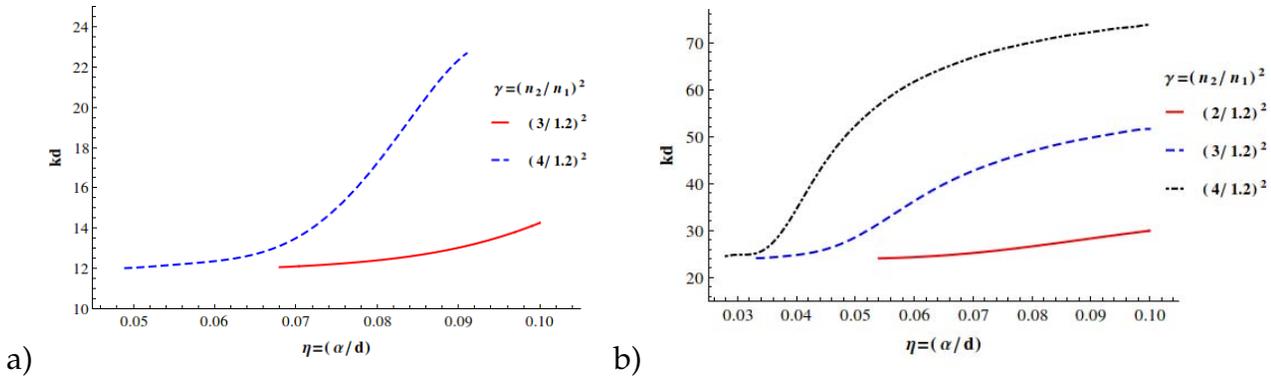


Figura 5.3: Modo *TM*. Al Resolver la ecuación trascendente (5.15) variando el parámetro $\eta = \alpha/d$. tomando valores distintos de γ . El intervalo de η para cada valor de γ , corresponde a la región donde la ecuación (5.15) presenta soluciones reales, estos intervalos son respectivamente a) $k_0d = 10$, $0.068 \leq \eta \leq 0.1$ línea sólida, $0.049 \leq \eta \leq 0.91$, línea segmentada. b) $k_0d = 20$, $0.054 \leq \eta \leq 0.1$ línea sólida, $0.033 \leq \eta \leq 0.1$ línea segmentada y $0.028 \leq \eta \leq 0.1$ línea segmentada con puntos.

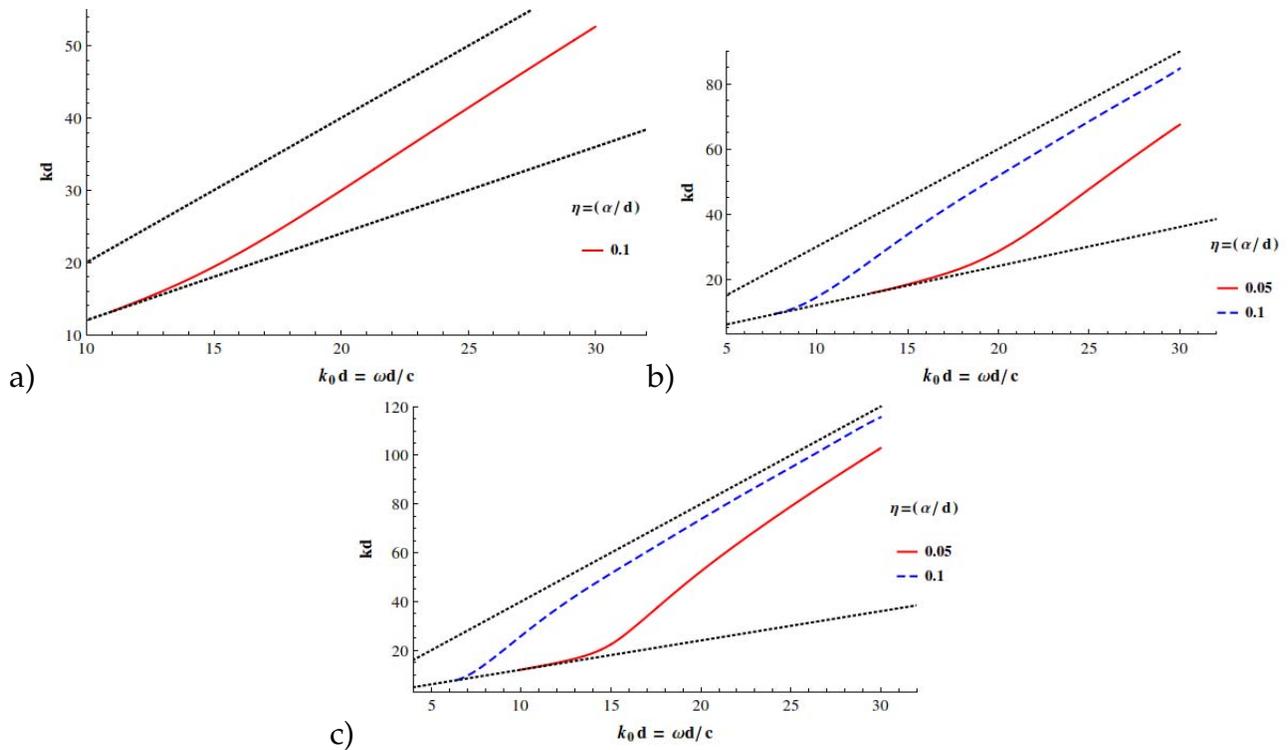


Figura 5.4: Modo *TM*. Gráficas de los valores kd encontrados al resolver la ecuación (5.15), al tomar como parámetro independiente a $k_0d = \frac{\omega}{c}d$, considerando distintos grosores de la región central de la guía. a) En este caso $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (2/1.2)^2$ y la region donde la ecuación (5.15) presenta soluciones reales es $11 \leq k_0d \leq 30$. b) Se tomó $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (3/1.2)^2$ y las regiones donde las soluciones son reales son $13 \leq k_0d \leq 30$ línea continúa, $7.7 \leq k_0d \leq 30$ línea segmentada. c) $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (4/1.2)^2$ y las regiones donde las soluciones se mantienen reales $10 \leq k_0d \leq 30$ línea continúa y $6.45 \leq k_0d \leq 30$ línea segmentada. En los tres casos las líneas punteadas inferiores corresponden a la línea con pendiente 1.2 y la superior con pendiente 2 en a), 3 en b) y 4 en c) . Esta pendiente representa el inverso de la velocidad de grupo en un medio infinito cuyo índice de refracción es el valor de la pendiente.

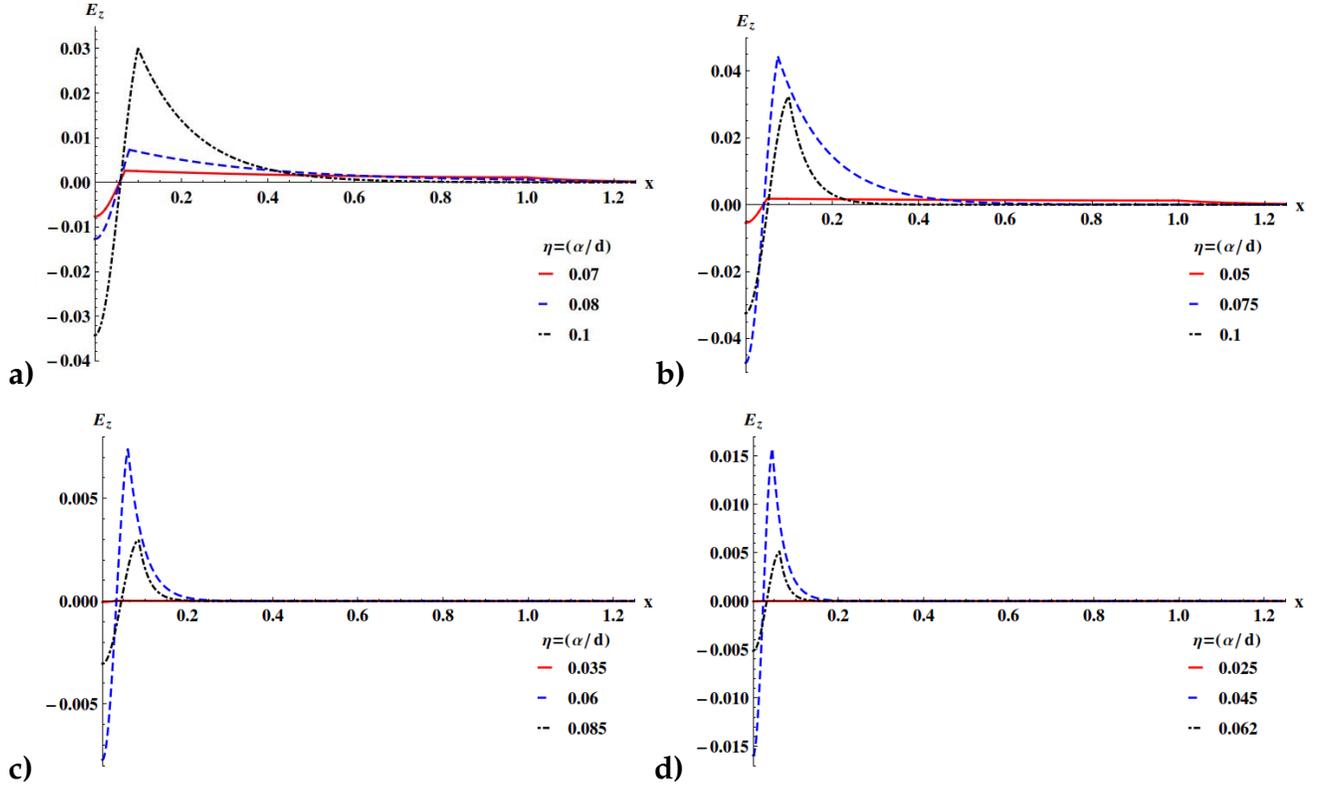


Figura 5.5: Modo TM . Perfiles del campo eléctrico E_z . En a) y b) $k_0d = 10$ y $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (3/1.2)^2$, $\gamma = (4/1.2)^2$ respectivamente. En c) y d) $k_0d = 20$ y $\gamma = (3/1.2)^2$, $\gamma = (4/1.2)^2$ respectivamente.

5.2. Modo TE .

Ahora procederemos con los modos de propagación TE . Las componentes del campo electromagnético en este modo son $B_x, E_y, B_y = 0$ y $E_x = 0$, expresadas por las ecuaciones (3.34) a (3.37). Nuevamente utilizamos las ecuaciones (5.1) para diferenciar las soluciones a la ecuación de onda $\nabla_t^2 \vec{E} = -(n_i^2 k_0^2 - k^2) \vec{E}$ en las distintas regiones. De igual forma se considera el cambio de variable $\chi = \frac{x}{d}$, con lo cual $\beta_0^2 \rightarrow \beta_0 d^2 = kd^2 - k_0 d^2$, $\beta_1^2 \rightarrow \beta_1 d^2 = kd^2 - n_1^2 k_0 d^2$ y $\beta_2^2 \rightarrow \beta_2 d^2 = n_2^2 k_0 d^2 - kd^2$.

Para las regiones de la guía de onda se propone la componente z del campo eléctrico como

$$B_z = A_2 e^{-\beta_0 d \chi} \quad 1 \leq \chi, \quad (5.16)$$

$$B_z = B_2 e^{-\beta_1 d \chi} + C_2 e^{\beta_1 d \chi} \quad \frac{\alpha}{d} \leq \chi \leq \frac{\alpha + a}{d}, \quad (5.17)$$

$$B_z = D_2 \cos(\beta_2 d \chi) \quad 0 \leq \chi \leq \frac{\alpha}{d}. \quad (5.18)$$

Aplicando las condiciones de frontera (2.11) a (2.14) a las las componentes tangenciales B_z , E_y y normales B_x , del campo entre dos medios con índices n_i y n_j , se obtienen ecuaciones análogas a (3.40) y (3.41)

$$\frac{1}{n_i^2 k_0 d^2 - k d^2} \frac{\partial B_{iz}}{\partial \chi} \Big|_S - \frac{1}{n_j^2 k_0 d^2 - k^2} \frac{\partial B_{jz}}{\partial \chi} \Big|_S = 0,$$

$$B_{iz}|_S - B_{jz}|_S = 0.$$

De las dos ecuaciones anteriores se obtiene el sistema de 4 ecuaciones que resulta de aplicar las condiciones de frontera en $\chi = \alpha/d$ y $\chi = 1$, el cual se escribe a continuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_2 d^2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \chi} \Big|_{z=\alpha} + \frac{1}{\beta_1 d^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \chi} \Big|_{z=\alpha} &= 0, \\ B_{2z}|_{z=\alpha} - B_{1z}|_{z=\alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_1 d^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \chi} \Big|_{z=d} - \frac{1}{\beta_0 d^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial \chi} \Big|_{z=d} &= 0, \\ B_{1z}|_{z=d} - B_{0z}|_{z=d} &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aplicamos las condiciones (5.19) y (5.20) a las soluciones propuestas (5.16) a (5.18) y resolvemos para determinar las amplitudes A_2 , B_2 , C_2 , D_2 y kd .

$$-\frac{B_2 e^{-\frac{\alpha}{d} \beta_1 d}}{\beta_1 d} + \frac{C_2 e^{\frac{\alpha}{d} \beta_1 d}}{\beta_1 d} - \frac{D_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{d} \beta_2 d\right)}{\beta_2 d} = 0, \quad (5.21)$$

$$B_2 e^{-\frac{\alpha}{d} \beta_1 d} + C_2 e^{\frac{\alpha}{d} \beta_1 d} - D_2 \cos\left(\frac{\alpha}{d} \beta_2 d\right) = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{A_2 e^{-\beta_0 d}}{\beta_0 d} - \frac{B_2 e^{-\beta_1 d}}{\beta_1 d} + \frac{C_2 e^{\beta_1 d}}{\beta_1 d} = 0, \quad (5.23)$$

$$A_2 e^{-\beta_0 d} - B_2 e^{\beta_1 d} - C_2 e^{\beta_1 d} = 0. \quad (5.24)$$

De las ecuaciones (5.21) a (5.24) es posible obtener una ecuación trascendente, por medio del determinante del sistema de ecuaciones, que determina a kd , en términos de los parámetros $\frac{\alpha}{d} = \eta$, $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \gamma$ y k_0 definidos en en el modo TM .

$$\begin{aligned} & \left(e^{2\frac{\alpha}{d}\beta_1 d}(-\beta_0 d + \beta_1 d) + e^{2\beta_1 d}(\beta_0 d + \beta_1 d) \right) \beta_2 d \\ & + \beta_1 d \left(e^{2\frac{\alpha}{d}\beta_1} \left(e^{2\frac{\alpha}{d}\beta_1 d}(\beta_0 d - \beta_1 d) + e^{2\beta_1 d}(\beta_0 d + \beta_1 d) \right) \right) \tan \left(\frac{\alpha}{d} \beta_2 d \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

Una vez encontrado kd , el sistema de ecuaciones (5.21) a (5.24) se resuelve para determinar las amplitudes A_2 , B_2 , C_2 y D_2 y los perfiles propuestos en las ecuaciones (5.16) a (5.18) quedan determinados completamente. En las figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se graficó kd en función de los parámetros $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \gamma$, $\frac{\alpha}{d} = \eta$ y k_0 respectivamente. En la figura 5.9 se muestran gráficas de los perfiles B_z en función de la posición dentro de la guía de onda.

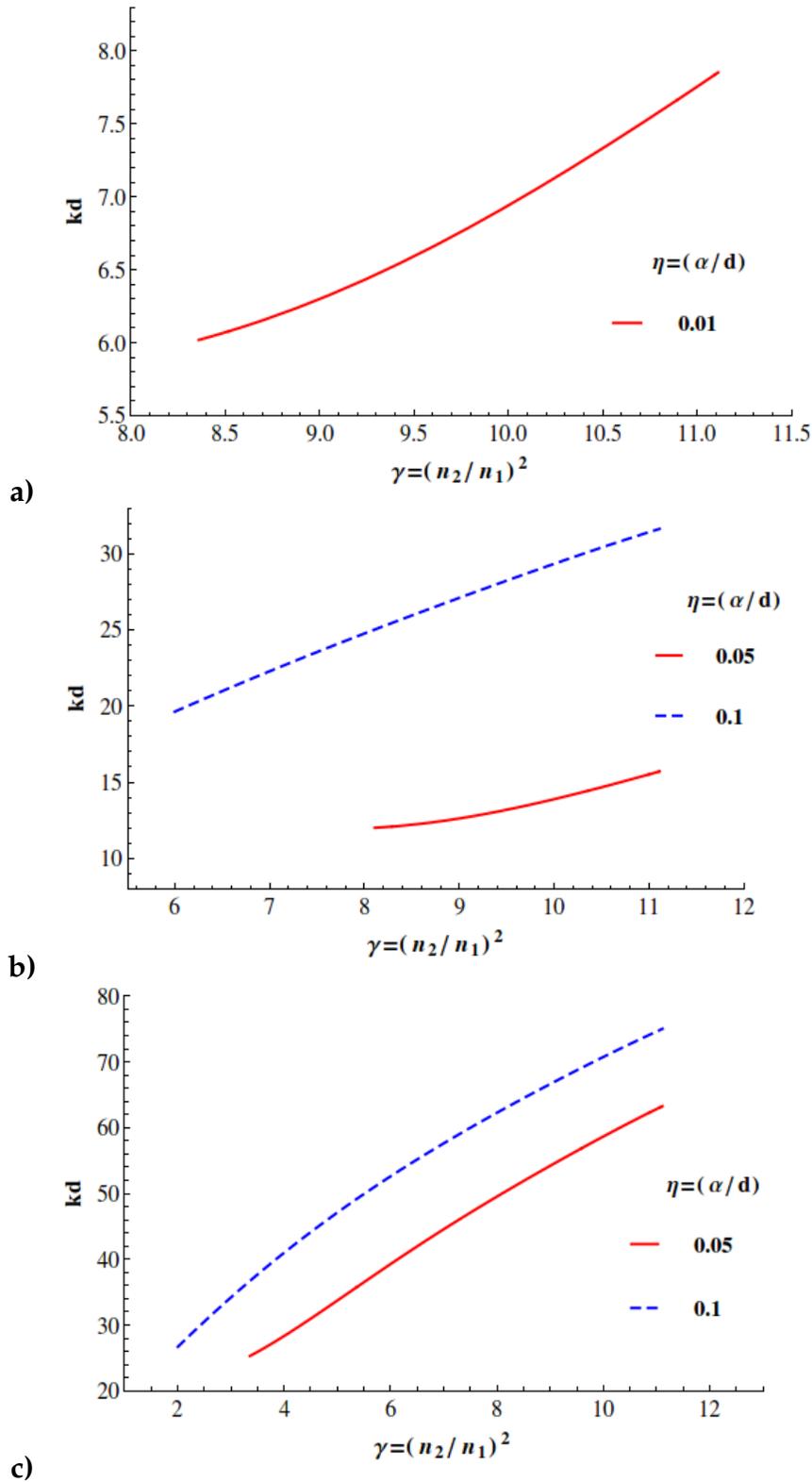


Figura 5.6: Modo TE. Las soluciones de la ecuación (5.25) al variar el parámetro $\gamma = (n_2/n_1)^2$, donde n_2 es el índice de refracción de la región central de la guía de onda y n_1 el de la región contigua considerando valores distintos de $\eta = \alpha/d$. El intervalo de γ , para cada grosor η , corresponde a la región donde la ecuación (5.25) presenta soluciones reales, estos intervalos son respectivamente a) $k_0d = 5$, $(3.47/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$. b) $k_0d = 10$, $(3.417/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$, línea sólida y $(2.13/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$, línea segmentada. c) $k_0d = 20$, $(2.2/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$ línea sólida y $(1.7/1.2)^2 \leq \gamma \leq (4/1.2)^2$ línea segmentada.

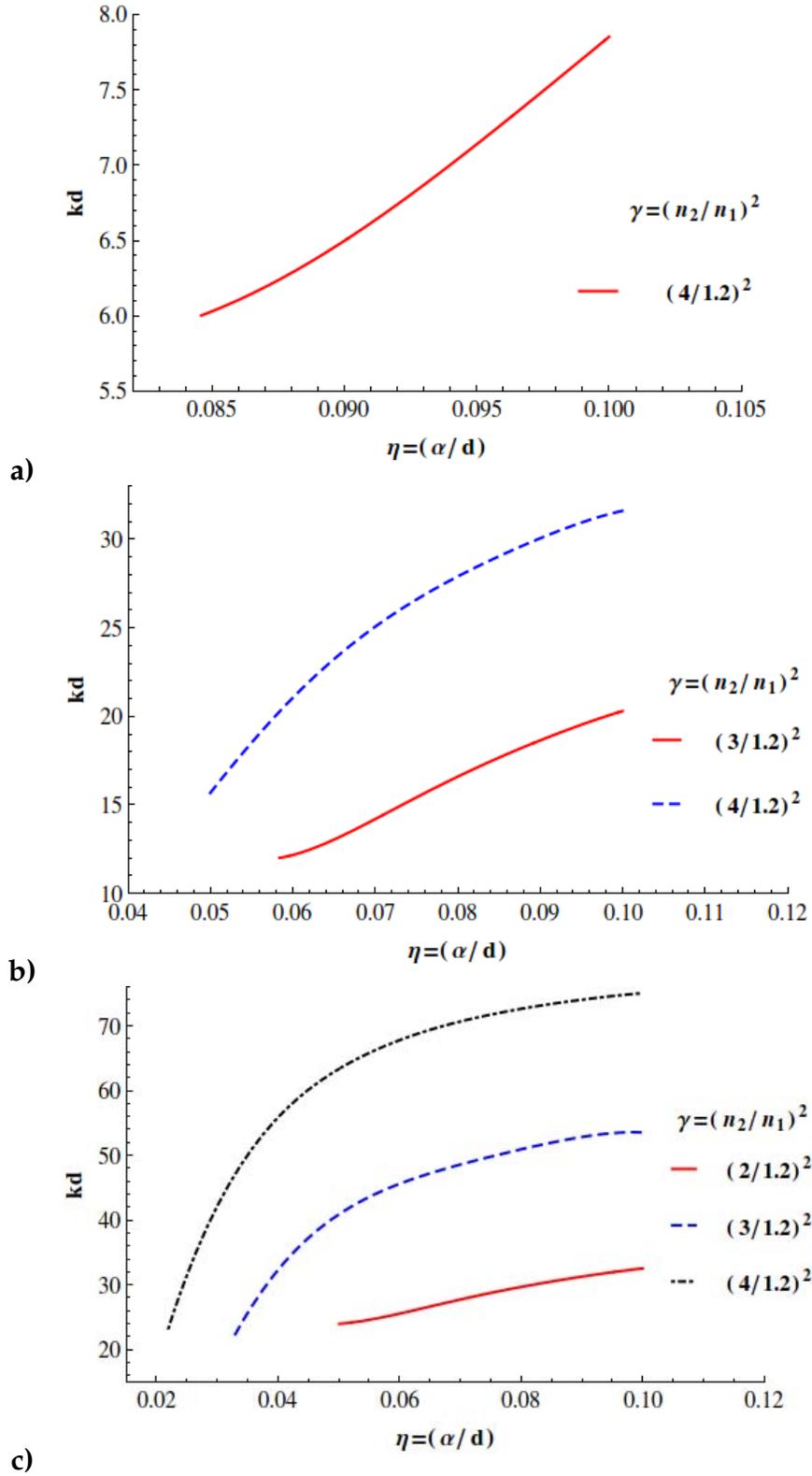


Figura 5.7: Modo TE . Soluciones de la ecuación (5.25) en función del grosor adimensional de la región central de la guía de onda, η . Se tomaron valores distintos del parámetro $\gamma = (n_2/n_1)^2$, a) $k_0d = 5$, $0.0846 \leq \eta \leq 0.1$. b) $k_0d = 10$, $0.0584 \leq \eta \leq 0.1$ línea sólida, $0.042 \leq \eta \leq 0.1$ línea segmentada. c) $k_0d = 20$, $0.0501 \leq \eta \leq 0.1$ línea sólida, $0.033 \leq \eta \leq 0.1$ línea segmentada, $0.022 \leq \eta \leq 0.1$ línea segmentada con puntos.

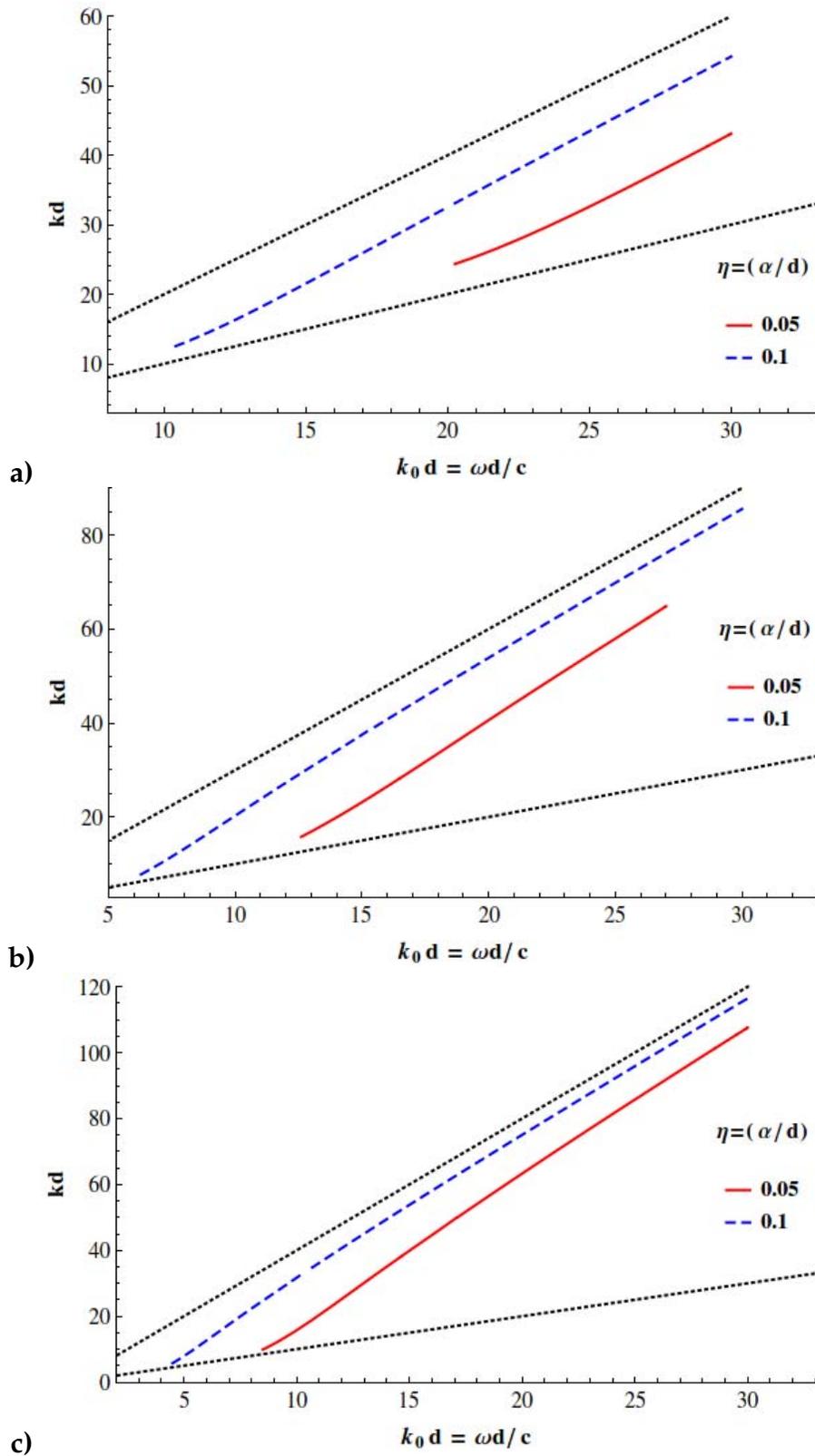


Figura 5.8: Modo TE. Gráfica de los valores kd encontrados al variar $k_0d = \frac{\omega}{c}d$. En las tres gráficas se utilizaron distintos valores para los grosores de la región central, $\eta = 0.05$ y $\eta = 0.1$. a) Se fijó el valor del cociente $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (2/1.2)^2$, $20.25 \leq k_0d \leq 30$ línea sólida, $10.4 \leq k_0d \leq 30$ línea punteada. b) se fijó $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (3/1.2)^2$ y las regiones $12.6 \leq k_0d \leq 27$ línea sólida, $15 \leq k_0d \leq 30$ línea punteada. c) $\gamma = (n_2/n_1)^2 = (4./1.2)^2$ con las regiones $8.5 \leq k_0d \leq 30$ línea sólida, $4.5 \leq k_0d \leq 30$ línea segmentada.

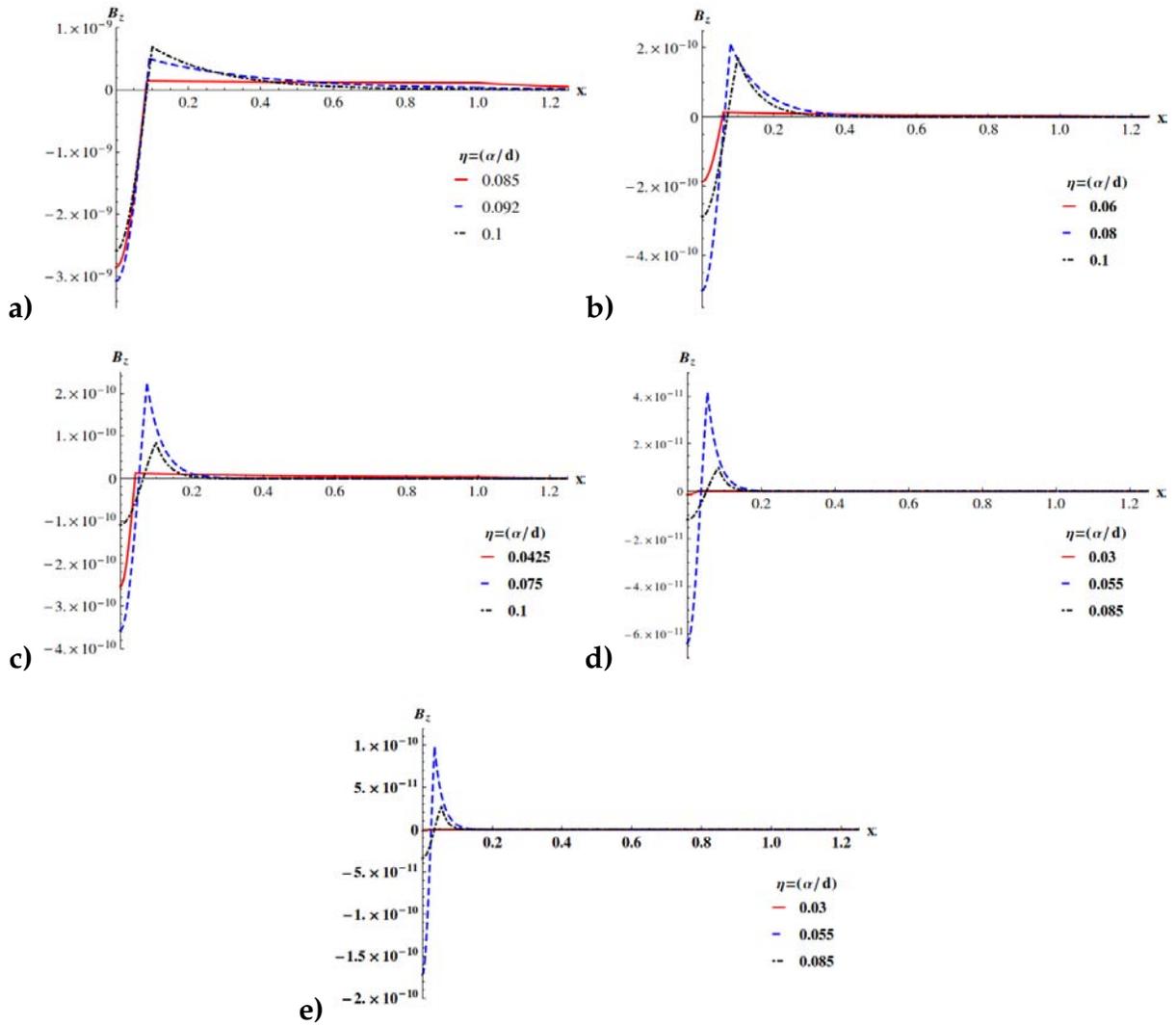


Figura 5.9: Modo TE. a) $k_0d = 5$, $\gamma = (4/1.2)^2$. b) y c) $k_0d = 10$ y $\gamma = (3/1.2)^2$, $\gamma = (4/1.2)^2$ respectivamente. d) y e) $k_0d = 20$ y $\gamma = (3/1.2)^2$, $\gamma = (4/1.2)^2$, respectivamente.

Capítulo 6

Discusión.

El objetivo principal de este trabajo es buscar alternativas a la utilización de metamateriales para lograr propagación de ondas superando el límite óptico. El potencial práctico que presentan este tipo de dispositivos ópticos para formar circuitos integrados, que puedan suplir a los actuales, es grande. La explotación de modos evanescentes en la propagación de ondas, ha mostrado ser de utilidad para sobrepasar el límite óptico mediante el uso de metamateriales; con ellos se ha observado que la excitación de plasmones superficiales polarizados (SPP) es posible. El objetivo de estos metamateriales es lograr que las frecuencias de ondas lumínicas se acoplen con la frecuencia de resonancia del plasma. La principal limitante de estos metamateriales es la disipación de energía y un ancho de banda estrecho.

A partir de la sección 3.1.3, se puede dilucidar la idea central del sistema propuesto en este trabajo. En la sección antes mencionada, se tiene una placa de dieléctrico de grosor $2d$, inmersa en el vacío, este último con dimensiones infinitas. El índice de refracción de la placa dieléctrica se toma lo más alta posible para obtener un alto contraste entre índices de refracción. En la figura 3.4 se observa la relación de dispersión normalizada (kd/k_0d vs k_0d), donde $k_0d = \frac{2\pi}{\lambda}d$, $2d$ es el grosor de la guía y λ es la longitud de la onda que se propaga. Entonces observando el grosor de la guía en términos de la longitud de onda, $2d = \frac{k_0d}{\pi}\lambda$, notamos que si $k_0d < \pi$ habrá propagación con longitudes de onda mayores al grosor de la guía de onda.

El origen del límite de difracción para haces ópticos puede entenderse de la superposición de ondas planas en 3 dimensiones. Al considerar una onda plana propagándose en un medio dieléctrico cuyo índice de refracción es n , el vector de onda $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ satisface $|k|^2 = n^2k_0^2 = \epsilon\mu(\omega/c) = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, donde el número de onda, $k_0 = 2\pi/\lambda$, la permitividad ϵ y la permeabilidad μ . En el espacio k , las ondas cuyo vector de onda sea k , formarán una esfera. Si las componentes del vector de onda son reales, cada componente estará acotada $-|k| \leq k_j \leq |k|$. Esto significa que la fluctuación de la frecuencia espacial $\Delta k = 2|k| = 2nk_0$. De acuerdo a la relación de incertidumbre de la transformada de Fourier Δk y la desviación en el espacio real Δr satisfacen $\Delta k \Delta r \geq \pi$.

$$\Delta r \geq \pi / \Delta k = \lambda / (4n), \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) implica que el tamaño mínimo de un haz formado por la superposición de ondas en el espacio esta limitado por la longitud de onda λ . Entonces la propagación de un haz por una guía de onda esta limitada según sea el ancho de la guía y la longitud de la onda propagada. En el caso de los metamateriales se tiene por ejemplo $\varepsilon < 0$, entonces una o dos de las componentes de k debe ser imaginaria de acuerdo a la definición. Considerando ondas en 2 dimensiones, $k_z^2 + k_y^2 + (ik_x)^2 = \varepsilon\mu (\omega/c)^2 < 0$, y para ondas en 1 dimensión $k_z^2 + (ik_y)^2 + (ik_x)^2 = \varepsilon\mu (\omega/c)^2 < 0$. Si se desea sobrepasar el límite óptico necesitamos tomar el caso 1D o 2D con valores de k mayores que en el caso 3D. Si $\Delta k > 2|k| = 2nk_0$, entonces Δr será menor que $\lambda / (4n)$, ecuación (6.1).

En el presente trabajo no se propuso propiamente una permitividad negativa, $\varepsilon < 0$, para obtener un SPP, más bien se consideró $k_z^2 - k_x^2 = \varepsilon\mu (\omega/c)^2 > 0$ en un arreglo mostrado en la figura 5.1, donde la dirección de propagación es el eje z y en la coordenada transversal se consideró un perfil evanescente con la finalidad de analizar la propagación sobre el límite óptico. En la sección 3.1.3 tomando el caso más sencillo de una placa dieléctrica inmersa en el vacío, se encontró la posibilidad de propagar ondas sobrepasando el límite de difracción si se incrementa el índice de refracción de la placa. Lo anterior lo podemos comprobar del siguiente modo.

La relación de incertidumbre en nuestro caso se escribe como

$$\Delta\chi\Delta kd \geq \pi, \quad (6.2)$$

en donde χ es la coordenada adimensional perpendicular a la dirección de propagación z , $\Delta k = 2|k|d = 2nk_0d$ y utilizando $\frac{2d}{\lambda} = \frac{k_0d}{\pi}$, se obtiene

$$\Delta\chi \geq \frac{\pi}{2nk_0d} = \frac{\pi}{2n} \frac{\lambda}{2d}. \quad (6.3)$$

El intervalo de la coordenada transversal es $-1 \leq \chi \leq 1$, por lo que al tomar $\Delta\chi = 2$, obtenemos que

$$\lambda = n 2d, \quad (6.4)$$

esto es, conforme aumentemos el índice de refracción n , podremos propagar longitudes más grandes por la guía de onda, o bien hacer más pequeño el grosor de la guía dejando una longitud de onda fija. En el *Ápndice* se presentan tablas con índices de refracción para distintos materiales y se nota la limitante de estos, ya que el valor más grande en la región óptica sería para el GaAs cuyo índice es $n = 4.02$ con una longitud de onda de $632.8nm$; mientras que en el infrarrojo el

índice para el PbTe $n = 5.35$ con una longitud de onda de $3\mu m$ y para el Si $n = 4.4777$ con una longitud de onda de $1.55\mu m$.

De la ecuación (6.3) se observa que si el valor de $k_0d = \pi \frac{2d}{\lambda}$ es menor que 1 entonces $\Delta\chi > \frac{\pi}{2n}$, donde el valor $\frac{\pi}{2n}$ corresponde al caso en que $\lambda = 2d$. Es decir, que al ser λ cada vez más grande comparado con el grosor de la guía, el haz se deslocaliza por el perfil evanescente del campo. Caso contrario al ser $k_0d > 1$, $\Delta\chi < \frac{\pi}{2n}$. Es decir que en el límite $k_0d \gg 1$, la longitud de onda disminuye y el sistema se ve como el de una placa dieléctrica inmersa en un medio infinito, en este caso, el haz está altamente localizado.

En el sistema que se propone, figura 5.1, sección 4, analizamos la propagación de ondas evanescentes que sobrepasan el límite óptico. A partir de las soluciones propuestas como perfiles evanescentes dentro de la guía de onda y al aplicar las condiciones de frontera se obtuvieron las ecuaciones trascendentes (5.15, 5.25) para los modos TM y TE respectivamente, cuyas raíces indican los modos propagantes en la guía. En la figura 5.2, se muestra el comportamiento de las raíces (kd), de la ecuación trascendente para el modo TM en la guía, con dos valores distintos de k_0d , al variar el contraste $\gamma = (n_2/n_1)^2$, donde n_2 es el índice de refracción de la placa intermedia, figura 5.1. Las raíces se encontraron para valores de $k_0d = 10$ en adelante. En las gráficas antes mencionadas se consideró también grosores distintos de la región central de la guía con índice n_2 , el grosor más bajo en estas gráficas fue aquel en donde se comenzó a obtener raíces de la ecuación trascendente (5.15). En la figura 5.3, se grafican las raíces (kd) para el modo TM variando el grosor de la región central con índice n_2 , considerando valores distintos del contraste $\gamma = (n_2/n_1)^2$. Mientras que en la figura 5.4, se grafican las raíces (kd) al variar $k_0d = \pi \frac{2d}{\lambda}$. En los tres casos (a), (b) y (c) de la figura 5.4, los valores más bajos de k_0d fueron respectivamente $k_0d = 11$, $k_0d = 7.7$ y $k_0d = 6.45$. Con estos tres valores observamos que aunque existe propagación con perfiles evanescentes no se presenta propagación sobre el límite óptico; pero se presenta alta localización del campo en la región central que tiene índice n_2 . Esta localización del campo en la placa central, figura 5.5, podría ser de utilidad en alguna configuración pensada para elaborar detectores. El caso de los modos TE en este sistema es muy similar al del modo TM .

Apéndice. Índices de refracción.

Suponinedo que no existe magnetización en un medio dieléctrico (i.e. no existen dipolos magnéticos microscópicos) y suponiendo que el medio es electricamente neutro y no conductor, de tal modo que no existen densidades de carga ni corrientes libres. Bajo estas suposiciones la ecuación de onda que describe la propagación de una onda eléctrica esta dada por

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{P}}}{\partial t^2}, \quad (6.5)$$

donde $c = 3 \times 10^8 m/s$ es la velocidad de la luz en el vacío. Cuando la intensidad de la luz es lo suficientemente alta, aparece una polarización adicional

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_L + \bar{\mathbf{P}}_{NL}, \quad (6.6)$$

donde $\bar{\mathbf{P}}_{NL}$ es una función no lineal del campo eléctrico aplicado. Sustituyendo (6.6) en (6.5)

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{P}}_L}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{P}}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (6.7)$$

vemos que la polarización no lineal actúa como una fuente en la ecuación inhomogénea. Cuando la polarización no lineal es despreciable, el lado izquierdo de la ecuación se puede reescribir nuevamente como una ecuación homogénea

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}, \omega) + \frac{\omega}{c^2} \bar{\epsilon}(\omega) \cdot \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}, \omega) = 0, \quad (6.8)$$

donde $\bar{\epsilon}$ es el tensor lineal dieléctrico igual a ϵ/ϵ_0 , donde

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \left(\delta_{ij} + \chi_{ij}^1(\omega) \right), \quad (6.9)$$

con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \quad (6.10)$$

Para muchas situaciones en óptica no lineal, el campo eléctrico total se puede considerar como una superposición de ondas cuasi monocromáticas.

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \sum_m \hat{e}_m A_m(\bar{\mathbf{r}}, \omega) \exp[(i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)] + c.c., \quad (6.11)$$

donde la suma es sobre m ondas con frecuencia ω_m y vector de onda \mathbf{k}_m . La amplitud $A_m(\bar{\mathbf{r}}, \omega)$ varía lentamente en el espacio y el tiempo, comparada con la parte oscilante de la onda. Si la variación es lo suficientemente lenta, la componente μ es una onda monocromática.

Para el caso en el que la polarización no lineal representa una pequeña perturbación de la polarización total, también se puede escribir

$$\bar{\mathbf{P}}_{NL}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \sum_{\mu} \bar{\mathbf{P}}_{NL,\mu}(\bar{\mathbf{r}}, t) \exp(-i\omega_{\mu}t) + c.c., \quad (6.12)$$

donde $\bar{\mathbf{P}}_{NL,\mu}(\bar{\mathbf{r}}, t)$ es la amplitud de polarización compleja y varía muy lentamente, comparada con la variación de la parte oscilante de la onda. Entonces, por la linealidad de la ecuación de onda, cada componente de la frecuencia del campo total también satisface la ecuación (6.7) con la correspondiente componente de la frecuencia de la polarización no lineal del lado derecho de la ecuación. Entonces, habrá m ecuaciones de onda inhomogéneas describiendo la interacción. También, la constante dieléctrica en cada ecuación de onda es evaluada a cada frecuencia ω_{μ} .

Para medios homogéneos, la ecuación de onda se puede simplificar tomando

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{E}} \approx -\nabla^2 \bar{\mathbf{E}}. \quad (6.13)$$

Óptica lineal.

En el régimen de la óptica lineal, la parte no lineal de la polarización debe ser despreciada y la ecuación (6.7) será una ecuación homogénea. Sus soluciones serán en su forma más simple

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \hat{e} A(\bar{\mathbf{r}}, t) \exp[(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + c.c., \quad (6.14)$$

Medios Isotrópicos.

En un medio isotrópico, la aproximación (6.13) es exacta para una onda plana y la susceptibilidad es una cantidad escalar. Esta última puede ser una función compleja de la frecuencia y la podemos escribir como

$$\chi^{(1)} = \chi_R^{(1)} + i\chi_I^{(1)}, \quad (6.15)$$

donde el subíndice R e I denotan la parte real e imaginaria respectivamente. La constante dieléctrica es también compleja

$$\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}} = n(\omega) + i\frac{\alpha(\omega)}{4\pi}, \quad (6.16)$$

donde el índice de refracción $n(\omega)$

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_R^{(1)}(\omega)}, \quad (6.17)$$

y $\alpha(\omega)$ es el coeficiente de absorción

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega\chi_I^{(1)}(\omega)}{n(\omega)c}. \quad (6.18)$$

Las propiedades de absorción de los materiales están descritas en términos de la sección transversal de absorción σ , la cual se relaciona con el coeficiente de absorción mediante $\alpha = \sigma N$, donde N es el número de moléculas absorbentes por unidad de volumen. Cuando el medio es conductor, como puede ser un semiconductor o una solución salina, la conductividad del medio σ_c contribuirá al coeficiente de absorción $\alpha(\omega)$, el cual se puede escribir de un modo más general como

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega \left[\chi_I^{(1)}(\omega) + \sigma_c / \varepsilon_0 \omega \right]}{n(\omega)c}. \quad (6.19)$$

En este caso la solución a la ecuación de onda será de la forma (6.14)

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = \hat{e}A_0 \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \exp[i(kz - \omega t)] + c.c., \quad (6.20)$$

En donde se tomó como la dirección de propagación la dirección z . A_0 es la amplitud en $z = 0$ y el vector de onda obedece la relación de dispersión dada por la ecuación

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}, \quad (6.21)$$

La onda viaja con una velocidad de fase $v_f = c/n$. En un medio isotrópico, el campo eléctrico es siempre perpendicular al vector de onda y la velocidad de fase de la onda es independiente de la dirección de propagación.

En un medio homogéneo e isotrópico también existirá propagación de pulsos ópticos ultracortos, estos pulsos son cuasi monocromáticos, es decir que están compuestos por varias frecuencias agrupadas alrededor de una frecuencia central. Cuando el esparcimiento en el pulso es tal que la dispersión en el índice de refracción no puede ser ignorada, el concepto de una única velocidad de fase no tiene significado. Lo que cobra sentido es la velocidad del pulso en sí, esto es,

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_c}^{-1}, \quad (6.22)$$

donde ω_c es la frecuencia central del pulso. Cuando la dispersión no puede ser ignorada, la onda no tendrá la forma dada por la ecuación (6.20) debido a que la dispersión ocasionará que el pulso decrezca y esparza conforme se propaga. La velocidad de grupo a su vez exhibe dispersión, la cual está caracterizada por el coeficiente de dispersión de la velocidad de grupo k_2 definido por

$$k_2 = \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_c}. \quad (6.23)$$

Debido a que los detectores no pueden responder tan rápido como varía la frecuencia óptica, la cantidad a medir experimentalmente es el promedio en el tiempo del flujo del campo, donde el promedio se toma sobre varios ciclos. La cantidad de interés es entonces la irradianza, que se relaciona con la amplitud del campo mediante

$$I(z, t) = 2\varepsilon_0 n c |A(z, t)|^2. \quad (6.24)$$

Índice de refracción no lineal.

Varios efectos físicos contribuyen al índice de refracción no lineal. Generalmente puede ser definido como el cambio en el cambio en el índice de refracción o como la distribución espacial del índice de refracción en el medio debido a la presencia de ondas electromagnéticas en el visible. Hay diferentes tipos de efectos que caen dentro de esta definición general.

Efecto Kerr. Este fenómeno está directamente relacionado con el tercer orden no lineal de polarización. El cambio en el índice es proporcional al promedio en el tiempo de la amplitud al cuadrado del campo eléctrico, $\langle \vec{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$, es decir que el cambio en el índice depende linealmente de la intensidad óptica.

Efectos no locales. En este caso, el cambio en el índice depende del promedio en el tiempo del campo, este efecto se debe al gradiente en el campo en el medio. El gradiente puede ser causado por un haz enfocado, por la superposición de haces coherentes produciendo un patrón de interferencia.

Saturación. En este tipo de efecto, el cambio en el índice esta acompañado de absorción de energía óptica por el medio, este caso implica pérdidas. Para intensidades bajas, el índice cambia aproximadamente de forma proporcional a la intensidad.

Cambios en las propiedades físicas del medio. En algunos casos, un campo intenso induce cambios en las propiedades físicas del medio. Como ejemplos se pueden mencionar a la temperatura o concentración en el medio. El cambio en el índice a menudo es proporcional a la intensidad; pero puede también depender de la potencia.

Efectos de cascada. Un cambio efectivo en el índice puede resultar de una combinación de efectos de segundo orden, o una secuencia de efectos lineales y fenómenos de segundo orden. Un ejemplo de lo anterior es el cambio de fase de la onda de bombeo en un proceso de generación de segundos armónicos o en un proceso de mezcla de frecuencias. En procesos donde se presenta este efecto, el cambio en el índice no depende de la magnitud de la intensidad; pero tampoco de la modulación espacial de la intensidad.

El índice de refracción no lineal puede causar efectos no deseados, como pueden ser las aberraciones de fase o incluso daño óptico.

La dependencia general del índice de refracción no lineal con la intensidad se puede expresar como

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}, t) + \Delta n[I(\mathbf{r}, t)]. \quad (6.25)$$

Esta ecuación indica que el cambio en el índice de refracción Δn tiene una dependencia funcional de la intensidad $I(\mathbf{r}, t)$. En un medio donde se presente el efecto Kerr el cambio del índice se puede escribir como

$$\Delta n = n_2 \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle, \quad (6.26)$$

donde n_2 se conoce como el coeficiente no lineal del índice, y los brackets indican el promedio en el tiempo sobre al menos un ciclo óptico. Además como $I \propto |\vec{E}|^2$, entonces

$$\Delta n = \gamma I, \quad (6.27)$$

En la literatura esta constante se encuentra como γ o algunas veces como simplemente n_2 .

El factor de conversión entre n_2 y γ esta dado por

$$n_2 \left[cm^3/erg \right] = (c n_0 / 40\pi) \gamma \left[m^2/W \right] = 238.7 n_0 \gamma \left[cm^2/W \right]. \quad (6.28)$$

En términos del tensor de susceptibilidad de tercer orden $\chi^{(3)}(-\omega, \omega, \omega, -\omega)$ del medio, el índice de refracción no lineal para luz linealmente polarizada y circularmente polarizada en un material isotrópico se escribe como

$$\begin{aligned} n_2(LP) &= (12\pi/n_0) \chi_{1111}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega, -\omega), \\ n_2(CP) &= (24\pi/n_0) \chi_{1122}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega, -\omega). \end{aligned} \quad (6.29)$$

A continuación se presentan unas tablas con el índice de refracción de distintos materiales.

A menos que se especifique, los índices de refracción son valores promedio con luz de día estándar o son valores medidos con una longitud de onda de 632.8 nm a temperatura ambiente (la diferencia entre luz de día y la de un láser de He-Ne es de 0.1 %). En algunos casos los materiales pueden ser opacos con luz visible, entonces los índices se miden con una fuente en el infrarrojo. En estos casos la luz de onda se pone entre paréntesis. Las tablas se obtuvieron de [37].

Cristales Isotrópicos		
<i>Material Cúbico</i>	<i>Transmisión (μm)</i>	<i>n</i>
AgBr	0.49 – 35	2.242
AlAs	0.6 – 15	2.87
$Bi_{12}GeO_{20}$	0.47 – 7	2.5476
CdTe	0.9 – 30	2.817
CsI	0.25 – 62	1.7806
GaAs	0.9 – 17.3	4.02
GaP	0.54 – 10.5	3.350
GaSb	1.7 – 20	3.82(1.8 μm)
Ge	1.8 – 15	4.052(2.8 μm)
InAs	3.8 – 15	4.10
InP	0.93 – 14	3.43
InSb	6 – 25	5.13
PbS	3 – 7	4.1(3 μm)
PbTe	4 – 30	5.35(3 μm)
Si	1.1 – 6.5	4.4777(1.55 μm)

Índices de Refracción no Lineales				
Cristal	Pulso (ns)	$\lambda(nm)$	n_0	$\gamma (10^{-16}cm^2/W)$
Cds	20	694	2.42	3.5×10^3
CdTe	0.04	1064	2.84	± 3100
CdTe	15	1064	2.84	4.4×10^6
GaAs	0.03	1064	3.47	3260
GaP	2.7×10^{-3}	577	3.396	2.87×10^4
Ge	~ 200	9200 – 11800	4	9.9×10^3

Índices de Refracción de Vidrios				
Vidrio	Pulso (ns)	$\lambda(nm)$	n_0	$\gamma (10^{-16}cm^2/W)$
Beryllium fluoride	0.15	1064	1.28	0.75
Flint SF-55	20	1064	1.73	20
Gallate "RN"	0.09	1064	2.48	383
Germanate Q-5	0.09	1064	2.30	29
Silicate 8463	0.09	1064	1.94	42
Tellurite 3151	3	1064	2.05	47

Índices de Refracción de Polímeros				
Material	Pulso (ns)	λ (nm)	n_0	$\chi_{1111}^{(3)}$ ($10^{-12}cm^3/erg$)
3 – DDCTP ^a	0.0004	620	1.585	450
PDTT	0.008	530	2	11 400
PTS-PDA	0.006	651.5	3	9 000

Índices de Refracción de Soluciones Sólidas y Copolímeros				
Material	Pulso (ns)	λ (nm)	n_0	$\chi_{1111}^{(3)}$ ($10^{-12}cm^3/erg$)
AO	15 000	514	1.77	3×10^{10}
AY	15 000	514	1.77	6×10^{10}

Bibliografía

- [1] Alú, A., Engheta, N.: Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings. *Phys. Rev. E* 72, paper 016623, 2005.
- [2] Baena, J. D., Jelinek, L., Marques, R. and Medina, F.: Near-perfect tunneling and amplification of evanescent electromagnetic waves in a waveguide filled by a metamaterial: Theory and experiments. *Phys. Rev. B*, 72: paper 075116, 2005.
- [3] Bermann, P. R.: Goos-Hänchen shift in negative refractive media. *Phys. Rev. E*, vol. 66, paper 067603, 2002.
- [4] Born, M., Wolf, E.: *Principles of Optics* 7th edn, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [5] Cai, W. , Shalaev, V. :*Optical Metamaterials, Fundamentals and Applications*. Springer, New York, 2010.
- [6] Chen, J. Shakya, and M. Lipson, *Opt. Lett.* 31, 2133, 2006.
- [7] Gramotnev, D. K., Bozhevolnyi, S. I.: *Nat. Photonics* 4, 83, 2010.
- [8] Grbic, A., Eleftheriades, G., V.: Overcoming the Diffraction Limit with a Planar Left-Handed Transmission-Line Lens. *Phys. Rev. Lett.* Volume 92, Number 11, paper 117403, 2004.
- [9] Engheta, N. and Ziolkowski, R.W., eds.: *Electromagnetic Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*, Wiley, 2006.
- [10] Han, Z., Elezzabi, A. Y.: and V. Van, *Opt. Lett.* 35, 502, 2010.
- [11] Jackson, J. D.: *Classical electrodynamics*, 2nd ed, United States of America, 1975.
- [12] Kawata, S., Inouye, Y. and Verma, P.: plasmonics for near-field nano-imaging and superlensing. *Nature Photonics*, vol 3, july 2009.
- [13] Lakhtakia, A.: On planewave remittances and Goos-Hänchen shifts of planar slabs with negative real permittivity and permeability. *Electromagnetics*, vol. 23, pp. 71 –75, 2002.

- [14] Leonhardt, U.: Optical conformal mapping. *Science* 312, 1777–1780, 2006.
- [15] Lindell, I.V., Tretyakov, S. A., Nikoskinen, K.I. and Ilvonen, S.: BW-media with negative parameters, capable of supporting backward waves. *Microwave Opt. Tech. Lett.*, vol. 31, pp. 129–133, 2001.
- [16] Liu, R., Ji, C., Mock, J.J., Chin, J.Y., Cui, T.J., Smith, D.R.: Broadband ground-plane cloak. *Science* 323, 366, 2009.
- [17] Lu, J., Gregorczyk, T.M., Zhang, Y., Pacheco, J., Wu, B., Kong, J. A., and Chen, M. : Cerenkov radiation in materials with negative permittivity and permeability. *Opt. Express*, vol. 11, pp. 723 –734, 2003.
- [18] Malyuzhinets, G.D.: A note on the radiation principle. *Zhurnal Technicheskoi Fiziki* 21, 940–942, 1951.
- [19] Mandlshtam, L.: Group velocity in a crystal lattice. *Zhurnal Eksperimentalnoii Teoreticheskoi Fiziki* 15, 476–478, (1945) (in Russian. English translation in *Sov. Phys. ZETF*)
- [20] Pendry, J.B.: Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.* 85, paper 3966, 2000.
- [21] Pendry, J.B., Holden, A.J., Robbins, D.J., Stewart, W.J.: from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Trans. Micro. Theory Tech.* 47, 2075–2084, 1999.
- [22] Pendry, J.B., Holden, A.J., Stewart, W.J., Youngs, I.: Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Rev. Lett.* 76, 4773–4776, 1996.
- [23] Pendry, J.B., Schurig, D., Smith, D.R.: Controlling fields. *Science* 312, 1780–1782, 2006.
- [24] Raether, H.: *Surface Plasmons, on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*. Springer-Verlag, 1988.
- [25] Selvaraja, S. K., Boggaerts, W., Dumon P., Thourhout, D. V. , and Baets, R.: *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* 16, 316–324, 2010.
- [26] Schurig, D., Mock, J.J., Justice, B.J., et al.: Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science* 314, 977–980, 2006.
- [27] Shadrivov, I.V., Zharov, A.A. and Kivshar, Y.S.: Giant Goos-Hänchen effect at the refraction from left-handed metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 83, pp. 2713–2715, 2003.
- [28] Shelby, R.A., Smith, D.R., Schultz, S.: Experimental verification of a negative index of refraction. *Science* 292, 77–79, 2001.

- [29] Sivukhin, D.V.: The energy of electromagnetic waves in dispersive media. *Opt. Spektrosk.* 3, 308–312, 1957.
- [30] Smith, D.R., Mock, J.J., Starr, A.F., Schurig, D.: Gradient index metamaterials. *Phys. Rev. E* 71, paper 036609, 2005.
- [31] Smolyaninov, I. I., Davis, C. C., Elliott, J. & Zayats, A. V.: Resolution enhancement of a surface immersion microscope near the plasmon resonance. *Opt. Lett.* 30, 382–384, 2005.
- [32] Soukoulis, C. M. and Wegener, M.: *Nature Photonics* 5, 523, 2011.
- [33] Tobing, Tjahjana, and Zhang *Appl. Phys. Lett.* 101, 041117, 2012.
- [34] Tretyakov, S.A.: Research on negative refraction and backward-wave media: A historical perspective. *Negative refraction: revisiting electromagnetics from microwaves to optics*, EPFL Latsis Symposium, Lausanne, 2005.
- [35] Veselago, V.G.: Formulating Fermat’s principle for light travelling in negative refraction materials. *Physics–Uspekhi*, vol. 45, pp. 1097–1099, 2002.
- [36] Veselago, V.G.: The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Usp.* 10, 509, 1968.
- [37] Weber, M.J.: *Handbook of Optical Materials*. CRC Press, 2003.
- [38] Zhang, Z.M. and Fu, C. J.: Unusual photon tunneling in the presence of a layer with a negative refractive index. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 80, pp. 1097–1099, 2002.
- [39] S. Zhu, T. Y. Liow, G. Q. Lo, and D. L. Kwong, *Appl. Phys. Lett.* 98, 021107, 2011.
- [40] S. Zhu, T. Y. Liow, G. Q. Lo, and D. L. Kwong, *Opt. Express* 19, 8888–8902, 2011.