



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RESONANCIAS ESPÍN-ÓRBITA EN CUERPOS
CELESTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

MIGUEL ANGEL CADENA NEGRETE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RENATO CALLEJA CASTILLO

Ciudad Universitaria, D.F.

2015





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Cadena

Negrete

Miguel Angel

53-55-30-90

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

40900250-8

2. Datos del tutor

Dr.

Renato Carlos

Calleja

Castillo

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Arturo

Olvera

Chávez

4. Datos del sinodal 2

Dr.

David Philip

Sanders

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Ricardo

Méndez

Fragoso

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Antonio

Capella

Kort

7. Datos del trabajo escrito

Resonancias espín-órbita en cuerpos celestes

88 p

2015

“Así actuamos: introducimos la mano en el caos más vertiginoso y extraemos de él algún abalorio brillante y nos agarramos a él diciéndonos que significa algo y que el mundo es bueno, que no somos malos y que al final nos salvaremos todos.”

— Anne Rice, El ladrón de cuerpos

RESUMEN

La motivación de este trabajo tiene su origen en una pregunta que tal vez todos nos hemos planteado alguna vez: ¿Por qué la Luna siempre muestra la misma cara a la Tierra?. La respuesta a esta pregunta aún no se conoce del todo, a pesar de los muchos avances en la Mecánica Celeste. Recientemente se han realizado diversos estudios en esta dirección, éstos se han desarrollado principalmente dentro del contexto de la teoría de los Sistemas Dinámicos. Así mismo, se han tratado los aspectos conservativo y disipativo del problema. En el marco conservativo se ha basado en la existencia de toros invariantes, mientras que en el marco disipativo se ha dedicado un gran esfuerzo a calcular la probabilidad de caer en un estado de resonancia de espín-órbita.

El objetivo de este trabajo es contestar, al menos en parte, la pregunta de por qué la Luna (así como otros cuerpos celestes) presentan resonancias de espín-órbita. En esta tesis se pretende realizar un estudio teórico, pero sobre todo numérico, acerca de las condiciones para las que se obtienen resonancias espín-órbita en objetos orbitando alrededor de un cuerpo central; por ejemplo, satélites alrededor de planetas, o planetas alrededor de estrellas. Se espera que este trabajo contribuya a la comprensión de las resonancias espín-órbita en general, y en particular al entendimiento del movimiento de satélites naturales e incluso artificiales. Es importante recalcar que no se iniciará una investigación desde cero, pues se comenzará con base en la investigación de A. Celletti y L. Chierchia, quienes han atacado el problema en el contexto de la teoría de sistemas dinámicos [CC08].

A continuación se describe de forma panorámica el contenido y estructura de esta tesis: En el **primer capítulo** se expone una introducción al problema que se pretende estudiar en esta tesis, así como una revisión histórica de las ideas que permitieron que la humanidad pudiera embarcarse en el estudio de éste y otros problemas semejantes. Para conocer más datos históricos de la Mecánica Celeste se pueden consultar por ejemplo la referencia [Mou70]. Gran parte de la información histórica presentada aquí fue tomada de un manuscrito de notas escrito por el Dr. Gerard Gómez en la Universidad de Barcelona [Góm00].

El propósito del **segundo capítulo** es dar una breve exposición de la formulación Newtoniana de la mecánica, que será el marco teórico dentro del cual centraremos el estudio de las resonancias espín-órbita. Será fundamental conocer la dinámica del cuerpo rígido, pues los sistemas que se pretenden describir constan de cuerpos no puntuales. Es por ello que se dedica un capítulo de esta tesis a enunciar las leyes de Newton en términos modernos, a discutir brevemente su significado y a exponer algunos resultados de utilidad en el estudio de la Mecánica Celeste.

El **tercer capítulo** tiene por objeto presentar los conceptos y definiciones fundamentales de la Mecánica Celeste, sin las cuales sería muy difícil realizar una formulación adecuada del problema de espín-órbita. Se estudia la geometría de las órbitas keplerianas elípticas. También se estudia como calcular la posición de un cuerpo celeste en una órbita kepleriana como función del tiempo. El **cuarto capítulo** puede considerarse como el corazón de esta tesis. Aquí investigaremos el movimiento de espín de un satélite oblato en una órbita Kepleriana elíptica, alrededor de un planeta central. Primero consideraremos el caso en que el planeta central tiene simetría esférica, para luego tratar el caso en que el planeta tiene una estructura oblata. Para derivar las ecuaciones

de movimiento asumimos que las desviaciones de simetría esférica en la Luna son permanentes, es decir que ésta no sufre deformaciones debido a efectos de rotación o de marea. A continuación corregimos las ecuaciones obtenidas tomando en cuenta la contribución de disipación debida a la no-rigidez interna del cuerpo.

En el **quinto capítulo** nos centraremos en exponer el método utilizado para implementar el problema de espín-órbita en un programa de computadora. El objetivo es estudiar numéricamente el movimiento de un satélite no-homogeneo alrededor de un cuerpo central, el cual puede ser puntual, homogéneo o no-homogeneo.

Miguel Angel Cadena Negrete, 2015

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	v
1. INTRODUCCIÓN	1
2. MECÁNICA NEWTONIANA	7
2.1. Las leyes de movimiento de Newton	7
2.2. La ley de gravitación universal	9
2.3. Dinámica de un cuerpo rígido	12
2.3.1. Angulos de Euler	14
2.3.2. El tensor de inercia	17
2.3.3. Momento angular y las ecuaciones de Euler	19
3. ÓRBITAS KEPLERIANAS	23
3.1. Campos de fuerzas centrales	24
3.2. Leyes de conservación o integrales primeras	25
3.2.1. Conservación de la energía	26
3.2.2. Conservación del momento angular	26
3.3. El problema de dos cuerpos	27
3.4. La ecuación de las órbitas y su geometría	30
3.5. Relaciones entre las integrales primeras	33
3.6. Cálculo de efemérides	34
3.6.1. Expansión en serie de funciones de Bessel	36
3.7. Los parámetros orbitales	37
4. EL PROBLEMA DE ESPÍN-ÓRBITA	39
4.1. Dinámica alrededor de un planeta esférico	39
4.2. Resonancias espín-órbita	43
4.3. Cuerpos celestes oblatos	44
4.4. Disipación debido a las torcas de marea	45
4.5. Modelo discreto del planeta oblatos	47
4.6. Dinámica alrededor de un cuerpo oblatos	49
5. SIMULACIONES NÚMERICAS DEL PROBLEMA DE ESPÍN-ÓRBITA	53
5.1. Implementación del modelo de espín-órbita conservativo	53
5.2. Solución numérica de la ecuación de Kepler	56
5.3. Implementación del modelo espín-órbita disipativo	58
5.4. Simulaciones y análisis de resultados	60
6. CONCLUSIONES	65

A. SISTEMAS DINÁMICOS	67
A.1. Estabilidad lineal	68
A.2. Sistemas conservativos y disipativos	69
A.3. Atractores y cuencas de atracción	69
B. POLINOMIOS DE LEGENDRE	71
C. INTERPOLACIÓN	73
C.1. Interpolación lineal	73
C.2. Interpolación de Lagrange	74
C.3. Interpolación por funciones spline	75
D. DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DE MacCULLAGH	79
E. SUBROUTINA RK78	83

INTRODUCCIÓN

La Luna es un objeto fascinante. El lector estará muy probablemente familiarizado con el hecho de que nuestra Luna gira alrededor de su eje de tal manera que siempre nos muestra la misma cara. En otras palabras, su rotación está sincronizada con su movimiento orbital alrededor de la Tierra. En este trabajo nos referiremos como *espín*¹ al movimiento de un cuerpo celeste alrededor de un eje, y su *órbita* será la trayectoria que describa al girar alrededor del cuerpo primario (ver Figura 1.1).

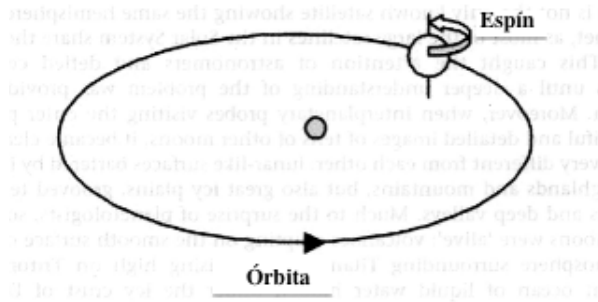


Figura 1.1: Espín y órbita. Imagen tomada de [CP07] pp. 60.

La Luna no es el único satélite que muestra siempre el mismo hemisferio al planeta alrededor del cual gira. No es corta la lista de objetos en el Sistema Solar cuya rotación ha evolucionado en este tipo de sincronía además de la Luna: Deimos y Phobos, los dos satélites de Marte; los cuatro grandes satélites Galileanos de Júpiter (Io, Europa, Ganymede y Calisto) y su pequeña luna Amalthea; la mayoría de los satélites de Saturno (Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea, Titan, Iapetus, Janus y Epimetheus); Miranda, Ariel, Umbriel, Titania y Oberon, las lunas de Urano; y Tritón, el satélite retrogrado de Neptuno [CP07].

Se cree que esta sincronía se originó de la siguiente manera: Cuando inicialmente se formó, la Luna giraba a una velocidad más grande que una revolución por órbita. Sin embargo, con el paso del tiempo la ligera asimetría en la masa de la Luna, junto al hecho de que la fuerza gravitacional de la Tierra va como el inverso del cuadrado de la distancia, llevó a una serie de *compresiones y estiramientos* de la Luna durante su órbita. En este proceso se disipó energía, debido a fricción interna, lo que causó que la velocidad angular decreciera. Eventualmente, esta velocidad angular igualó la velocidad del movimiento orbital, y en ese momento un efecto conocido como *resonancia espín-órbita* entró al juego y añadió la suficiente energía a la rotación de la Luna en cada órbita y así evitar más disipación debido a la fricción. Los movimientos rotación y traslación se sincronizaron y esta situación ha persistido hasta nuestros días. En la Figura 1.2 se ilustra una Luna que no tiene espín, y que por lo tanto no muestra siempre la

¹En este trabajo no se utiliza la palabra espín con el significado que tiene en Mecánica Cuántica. Simplemente se utiliza para nombrar a la rotación alrededor de un eje en un cuerpo celeste.

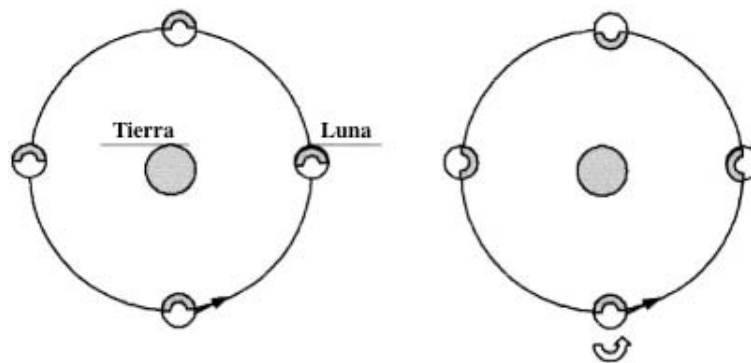


Figura 1.2: Una Luna que no muestra siempre la misma cara a la Tierra (der.). Una Luna que muestra siempre la misma cara a la Tierra (izq.). Imagen tomada de [CP07] pp. 61.

misma cara a la Tierra (derecha). También se muestra en la Figura 1.2 una Luna que muestra siempre la misma cara a la Tierra (izquierda).

Parece contradictorio pero, pese a que la Luna es el cuerpo celeste más próximo a la Tierra, ha costado mucho trabajo entender su movimiento. Los primeros intentos en predecir el movimiento de los cuerpos celestes en el cielo se remontan a los albores de la civilización. Los griegos creían que los planetas se tenían que mover en la trayectoria de mayor perfección, el círculo. Sin embargo, lo que ahora se conoce propiamente como *Mecánica Celeste* surgió en un largo proceso, que comenzó con la obra *De Revolutionibus Orbium Caelestium* de Nicolás Copérnico publicada en 1543, y que culminó con la formulación de la Ley de la Gravitación Universal por Isaac Newton en 1687. Lo que vino después fue lo que se puede considerar como la edad de oro de la Mecánica Celeste, que fue el período comprendido entre la época de Laplace (1749–1827) hasta la muerte de Poincaré en 1912.

El problema de los tres cuerpos

Newton se encargó de resolver completamente el problema teórico del movimiento de dos masas puntuales, sometidas a una ley de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambas. Cuando consideró las múltiples atracciones que influyen en el movimiento de cada planeta, Newton consideró que

...definir estos movimientos a partir de leyes exactas y que admitan un cálculo sencillo excede, si no estoy equivocado, la fuerza de cualquier mente humana.

Para más de dos cuerpos únicamente se pudieron encontrar aproximaciones al movimiento; siguiendo esta línea de investigación, muchos matemáticos dedicaron grandes esfuerzos para intentar resolver el problema de tres cuerpos. Incluso el problema del movimiento del sistema Luna-Tierra puede llegar a complicarse bastante, pues pese a ser un problema de dos cuerpos sus órbitas no son simples elipses Keplerianas. La razón es que ni la Tierra ni la Luna son esferas perfectas, por lo tanto no se comportan como puntos materiales. El estudio de este tipo de sistemas condujeron al desarrollo de la dinámica de sólidos rígidos; y aún así, esto no nos permite obtener una solución exacta del problema de dos cuerpos reales, ya que la presencia de fuerzas de marea implica que los cuerpos no son rígidos.

Leonhard Euler, en 1760, fue el primero en estudiar el problema general de los tres cuerpos bajo su interacción gravitacional mutua. Aunque al principio solo consideró lo que se conoce como el problema restringido de tres cuerpos, en el que se asume que uno de los cuerpos tiene

masa despreciable. Incluso en esta versión simplificada las soluciones a las que se llega no son exactas; Euler, sin embargo, encontró una solución particular en la que los tres cuerpos están en una línea recta. En 1772 Joseph Louis Lagrange (1736–1813) presentó un trabajo titulado *Essai sur le problème des trois corps*. En él demostró que la solución de Euler al problema restringido de tres cuerpos se mantenía en el problema general de tres cuerpos. Lagrange también encontró una solución en la que los tres cuerpos se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero. En ese entonces Lagrange afirmaba que sus soluciones no correspondían a ningún caso del Sistema Solar, pero actualmente se sabe que la Tierra y Júpiter comparten sus órbitas en la configuración del triángulo equilátero descubierta por Lagrange. En el caso de Júpiter a estos asteroides se les conoce como Troyanos, siendo Aquiles el primero en ser descubierto en el año de 1908. Los asteroides Troyanos se mueven en dos grupos, uno 60° delante de Júpiter en su órbita y el otro 60° atrás, en ubicaciones que recibieron el nombre de puntos de Lagrange.

Henri Poincaré, en los tres tomos de *Los nuevos métodos de la mecánica celeste*, publicados entre 1892 y 1899, demostró que el problema de los tres cuerpos en interacción gravitatoria no tiene una solución exacta. Esto ocurre porque las series que están involucradas en los cambios de variables de los métodos perturbativos son, en general, divergentes. En 1912 Poincaré introdujo métodos de topología en su estudio de la estabilidad de las órbitas en el problema de tres cuerpos; de hecho, Poincaré esencialmente inventó la topología en su intento por responder las cuestiones de estabilidad en el Sistema Solar. Él conjeturó que existe una infinidad de soluciones periódicas al problema de tres cuerpos. Dicha conjetura fue demostrada tiempo después por G. D. Birkhoff.

El determinismo de Laplace

La gran revolución que constituyó la teoría de Newton consiguió predecir y analizar muchos de los fenómenos celestes desde una perspectiva increíblemente general y elegante. Parecía que cualquier anomalía en el movimiento de los cuerpos celestes podía ser explicada en términos de la Mecánica Newtoniana, cuyo éxito llevo a Pierre-Simon Laplace (1749–1827) a forjar una fe absoluta en el determinismo, en sus propias palabras:

Podemos considerar al estado actual del universo como el efecto de su pasado y la causa de su futuro. Una inteligencia que en un cierto instante pueda conocer todas las fuerzas que ponen a la naturaleza en movimiento, así como todas las posiciones de todos los objetos que la componen (a la naturaleza), si esta inteligencia fuese lo suficientemente vasta para someter esos datos a análisis, podría abarcar, en una sola fórmula, tanto los movimientos de los más grandes cuerpos en el universo como aquellos (los movimientos) del más diminuto átomo.

esta idea caracterizó a la ciencia del siglo XIX. Desde el siglo XVIII, con los trabajos de Laplace y Lagrange, se ha buscado encontrar soluciones a los sistemas de ecuaciones en mecánica celeste; esto dio origen al desarrollo de métodos perturbativos, los cuales consisten en buscar la solución en forma de series por aproximaciones sucesivas. Pero estos cálculos se vuelven muy confusos y tediosos. Ya que al truncar las series conservando sólo los primeros términos se desconoce si los efectos de los términos despreciados son o no importantes.

Laplace y Lagrange elaboraron un cambio de variables para el movimiento del sistema solar y con algunas aproximaciones demostraron que este movimiento es casi periódico, lo que implica la existencia de un sistema estable. Cuando Le Verrier rehizo los cálculos de Lagrange, en 1856, encontró que al introducir términos que fueron despreciado, los valores eran sensiblemente diferentes para las frecuencias fundamentales del sistema solar. Y peor aún, cuando Hill revisó los cálculos de éste, en 1897, usando un número mayor de términos, demostró que sus cálculos también estaban equivocados.

La Mecánica Celeste de esta época aparecía entonces, y aún ahora, como un monumento científico de la mayor importancia. En primer lugar, sus propios métodos consisten en la pura y simple aplicación de métodos ya conocidos. Pero fueron mejorados de manera decisiva, y de los progresos que se iban obteniendo de otras ramas de la ciencia; este es el caso, por ejemplo, de los métodos para resolver sistemas canónicos como los del trabajo de Delaunay.

Uno de los métodos desarrollados consiste en hacer un cambio de variables al sistema canónico. De esta manera Delaunay, en su teoría de la Luna, reduce el Hamiltoniano a un solo término periódico, que es una combinación lineal de tres variables angulares y del tiempo. Esta combinación lineal se toma como la única variable angular del nuevo sistema canónico que es entonces integrable. Esta operación se repite tomando sucesivamente distintos términos periódicos del Hamiltoniano. Este procedimiento mereció muchos elogios por parte de Hill que en 1907 generalizó su aplicación a su trabajo titulado “The extension of Delaunay’s method in the lunar theory to the general problem of planetary motions”.

Ya por la década de 1960, surgió la teoría KAM, cuyos autores son Kolmogorov, Arnold y Mösér; la cual demostró que para algunos valores de condiciones iniciales, los movimientos son cuasiperiódicos, pero que para otras condiciones arbitrariamente próximas, aparecen zonas de inestabilidad en las que los métodos perturbativos no son aplicables. Sin embargo, si las perturbaciones son pequeñas, muchos movimientos son cuasiperiódicos y las zonas de inestabilidad son también pequeñas. La Mecánica Celeste dio origen al estudio de los fenómenos no lineales debido a que fue a través de ella que se desarrollaron los métodos perturbativos del siglo XVIII. El tema de estudio de esta rama de la mecánica es la evolución de los cuerpos del sistema solar sometidos a sus interacciones gravitatorias; estos cuerpos son tanto planetas y satélites, como cometas y meteoritos. La no linealidad del comportamiento de los sistemas implica que no podemos encontrar una solución explícita. El único caso en el que la predicción de la trayectoria puede hacerse explícitamente es el de las órbitas keplerianas, las cuales son elípticas.

Las teorías del movimiento de la Luna

Los triunfos de la ley de gravitación universal de Newton llegaron suficientemente lejos como para ser capaces de descubrir, mediante el cálculo puro, la existencia del planeta Neptuno en 1846; antes de tener las primeras teorías satisfactorias del movimiento lunar. Entre 1860 y 1867 se publicó la teoría del movimiento de la Luna de Delaunay, la cual a pesar de ser admirable y una de las más completas hasta entonces, no pudo producir cálculos de efemérides precisos, debido a la gran cantidad de cálculos que conlleva. El método propuesto por Hill en 1877, para estudiar el movimiento lunar, fue el punto de partida de la teoría de la Luna de Brown. Las tablas obtenidas por Brown fueron publicadas en 1919 y sirvieron como base para el cálculo de efemérides lunares en Gran Bretaña y Estados Unidos hasta 1959; estas tablas fueron refinadas por W. J. Eckert.

La principal preocupación de la gente dedicada a la Mecánica Celeste a lo largo del siglo XIX era determinar efemérides que pudiesen determinar la posición de los planetas y los satélites lo más concordante posible con las observaciones. Las teorías de la Luna son características de la época, y que además han continuado sirviendo como base para la construcción de efemérides en el tercer cuarto del siglo XIX.

La Luna está muy próxima a la Tierra y es relativamente brillante; por lo que su movimiento es muy fácil de observar. Esto explica el porqué de muchas idiosincrasias de su movimiento, tales como la rotación de la línea de nodos, la ecuación del centro y la elevación ya eran conocidas por Hiparco, Tolomeo y los astrónomos árabes. Tycho Brahe observó más desigualdades, pero fue necesario esperar hasta Newton y todos los que fundamentaron la Mecánica Celeste del siglo XVIII, antes de poder ver teorías matemáticas de su movimiento basadas en la Ley de la Gravitación Universal.

Charles Delaunay (1816–1872) construyó la teoría más precisa y completa de todas las relativas al movimiento de la Luna, este fue un trabajo prodigioso que duró veinte años en completar; se publicó en 1860 y 1867 en dos volúmenes enormes de las *Mémoires* de la Academia de Ciencias. La teoría de Delaunay, con todo de ser admirable, debido a la gran cantidad de cálculos que conlleva no pudo producir cálculos de efemérides muy precisas. Además de su teoría de la Luna, publicó cálculos sobre los términos de segundo orden en el movimiento de Urano y un artículo sobre la aceleración de la Luna.

George W. Hill (1838–1914) fue uno de los más afamados astrónomos norteamericanos de finales del siglo diecinueve. Se crió en el campo en una época en la que el transporte era lento e incierto y fue muy afortunado de ingresar al Rutgers College donde tuvo como profesor de matemáticas a Theodore Strong, que lo encaminó a que leyese las traducciones de Nathaniel Bowditch de la *Mecánica Celeste* de Laplace. Continuó leyendo las obras de Poisson, Pontécoulant, Lagrange, Legendre y de otros más. También bajo la influencia de Strong se convirtió en un gran admirador de Euler. En 1861 comenzó su trabajo para la *American Ephemeris and Nautical Almanac* de Cambridge (Massachusetts). Los trabajos de Hill fueron el punto de partida de la teoría de la Luna elaborada por E. W. Brown. Las tablas que Brown obtuvo a partir de su teoría fueron publicadas en 1919 y sirvieron como base para el cálculo de efemérides lunares británicas y norteamericanas hasta 1950; estas fueron refinadas por W. J. Eckert.

Cuando en 1877 Newcomb se convirtió en el director del Nautical Almanac Office, se trasladó a sus oficinas en Washington y se propuso revisar y rehacer las teorías lunares y las tablas del movimiento de la Luna y de los planetas, entonces solicitó la colaboración de Hill.

Ernest W. Brown (1866–1938) nació en Inglaterra y emigra a Estados Unidos en 1891 donde muere, luego como profesor de la Universidad de Yale, finalizó su carrera. Instigado por G. H. Darwin, Brown atacó el problema del movimiento de la Luna utilizando el método de Hill. La teoría quedó terminada en 1908; las tablas que resultan de la teoría fueron publicadas en 1919. Hill había calculado todos los términos que tenían un coeficiente más grande que una centésima de segundo de arco, pero la precisión de la teoría era de hecho menor. En particular Hill encontró desigualdades en la longitud que solo se podían explicar reconociendo la no uniformidad

Recientemente se han realizado distintos estudios en la dirección de la pregunta sobre la orientación de la Luna. Estos estudios se han desarrollado principalmente dentro del contexto de la *Mecánica Celeste* por el lado físico, y de los *Sistemas Dinámicos* por el lado matemático. Así mismo, se han tratado los aspectos conservativo y disipativo del problema. En el marco conservativo se han basado en la existencia de toros invariantes, mientras que en el marco disipativo se ha dedicado un gran esfuerzo a calcular la probabilidad de caer en un estado de resonancia de espín-órbita o phase-locking, como se le conoce en la literatura de *Sistemas Dinámicos*. El phase-locking es un fenómeno de carácter no lineal que ocurre cuando interactúan dos o más oscilaciones de frecuencias distintas, las frecuencias se bloquean en múltiplos enteros de una frecuencia principal. El plan de esta tesis será obtener unos modelos dinámicos, conservativos y disipativos, que nos permitirán estudiar el problema de las resonancias espín-órbita de un satélite alrededor de un planeta. Estos modelos son en realidad ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales resolveremos numéricamente para un amplio conjunto de condiciones iniciales. El motivo de utilizar un amplio conjunto de condiciones iniciales será obtener una estadística de los casos que evolucionan a las resonancias espín-órbita.

MECÁNICA NEWTONIANA

El pilar fundamental para las cuestiones tratadas en esta tesis es la Mecánica Newtoniana. Hasta principios del siglo XX, se tenía la certeza de que la Teoría de Newton constituía la descripción completa de todo tipo de movimiento en el Universo. Actualmente las cosas no son así, ya que con el desarrollo de la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica, el modelo de Newton se concibe ahora como una *aproximación* que es válida en circunstancias muy específicas. En este trabajo no se va a tratar con ningún caso en el que los efectos relativistas o cuánticos sean considerables. Los movimientos con los que nos topamos en Mecánica Celeste se dan, casi todos, en escalas espaciales grandes (comparadas con un átomo) y a velocidades lentas (comparadas con la de la luz). Un tratamiento mucho más completo de la mecánica newtoniana, que el expuesto en este capítulo, se puede encontrar en las referencias [Arn74, LL80, TM04].

2.1. Las leyes de movimiento de Newton

La *Mecánica Newtoniana* es un modelo matemático cuyo propósito es dar cuenta del movimiento de los distintos objetos materiales que hay en el Universo. En otras palabras, pretende describir de manera precisa y consistente la dinámica de sistemas de partículas, entendiendo la palabra sistema como un conjunto de partículas que interactúan entre sí. Los principios generales de este modelo fueron enunciados por Issac Newton en su obra titulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que fue publicada en 1687. Empecemos por enunciar las leyes de movimiento de Newton, de la forma convencional en que se emplean hoy en día:

1. Todo cuerpo permanece en estado de reposo, o movimiento rectilíneo uniforme, a no ser que se vea obligado a cambiar su estado original por fuerzas aplicadas en él.
2. El cambio en la cantidad de movimiento de un objeto es proporcional a la fuerza aplicada en él, y se da además en la dirección en que se imprime la fuerza.
3. A toda acción corresponde una reacción igual en magnitud y opuesta en dirección.

La *primera ley de movimiento* carece de sentido sin el concepto de *fuerza*, palabra que Newton utilizó en las tres leyes. Pero esencialmente establece que una partícula puntual, que no esté sujeta a fuerza externa alguna (fuerza cero), se mueve en línea recta con velocidad constante.

Para describir los procesos que se producen en la naturaleza, hay que elegir un *marco de referencia*. Se entiende por marco de referencia un sistema de coordenadas que sirve para indicar la posición de partículas en el espacio, junto con un reloj adscrito a dicho sistema, con el cual se mide el tiempo. Cabe preguntarse acerca de las características del marco de referencia con respecto al cual se mide el movimiento rectilíneo uniforme. Resulta que esto es válido solamente en los llamados marcos de referencia *inerciales*. De hecho se puede considerar a la Primera Ley como la definición de un marco inercial: *Un marco de referencia inercial es aquel en que*

una partícula sujeta a una fuerza externa neta igual a cero permanece en movimiento rectilíneo uniforme.

La segunda ley de movimiento es más explícita: La fuerza es la razón de cambio en el tiempo de una cantidad llamada momento. Newton no se olvidó de dar la definición del concepto *momento*, aunque él utilizó el término *cantidad de movimiento*, estableciendo que éste no es otra cosa que el producto de la masa por la velocidad del objeto en cuestión.

Uno de los conceptos fundamentales de la mecánica es el de *punto material*¹. Por esta denominación se entiende un cuerpo cuyas dimensiones se pueden despreciar al describir su movimiento. La posibilidad de omitir las dimensiones de un cuerpo depende de las condiciones concretas de cada problema. Por ejemplo, los planetas se pueden tratar como partículas cuando se estudian sus movimientos alrededor del Sol, pero no cuando se analiza la rotación diaria de los mismos.

En mecánica clásica una partícula se describe matemáticamente como un punto en el espacio, cuya ubicación está dada por una función

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

La derivada de esta función con respecto al tiempo es la velocidad de la partícula

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

y la derivada con respecto al tiempo de la velocidad es la aceleración

$$\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Trabajaremos con un punto material, de masa constante m , moviéndose en un campo de fuerzas \mathbf{F} . Matemáticamente \mathbf{F} es un campo vectorial en el espacio donde se mueve la partícula, que en nuestro caso será \mathbb{R}^3

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Traduciendo a un lenguaje más abstracto los conceptos físicos de las leyes de Newton, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es la fuerza ejercida en una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. La segunda ley de Newton aplicada a esta partícula nos da una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la partícula, y $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es su momento. Expresando esta ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

A este tipo de sistemas se les conoce como *sistemas mecánicos con 3 grados de libertad*. Cualquier solución $\mathbf{r}(t) \subset \mathbb{R}^3$ de la ecuación diferencial (2.1) se dice que se encuentra en el *espacio de configuración*. La solución $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ del sistema (2.2) se dice que está en el *espacio fase*.

Vale la pena tomarnos unos momentos para observar algunos puntos importantes. El primero es que, igual que la primera ley, esta ecuación es válida únicamente en un marco de referencia inercial. Es ahí, y sólo ahí, en donde la *masa inercial* de un cuerpo es la medida en que éste se resiste a cambiar su estado de movimiento rectilíneo uniforme (o de reposo).

¹En lugar del término punto material, con frecuencia se usará el de *partícula*.

Otro punto importante es el hecho de que la ecuación anterior se puede resolver sólo si se cuenta con una expresión para la fuerza.

Por último, una consecuencia del carácter vectorial de las fuerzas es que se cumple el *principio de superposición*, es decir, si $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{F}_N(\mathbf{r})$ son N fuerzas actuando sobre una partícula dada (en una posición \mathbf{r}), entonces la fuerza neta sobre la partícula es la suma vectorial de todas, es decir, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{r})$.

2.2. La ley de gravitación universal

Ya en 1666 Newton había formulado y verificado numéricamente la ley de gravitación, que publicó eventualmente en sus *Principia* en 1687. La ley de gravitación universal establece que *cada partícula con masa atrae a toda otra partícula mediante una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos*.

Considerando dos partículas de masa m_1 y m_2 , con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente, la fuerza \mathbf{F}_{12} con la que m_2 atrae a m_1 es

$$\mathbf{F}_{12} = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (2.3)$$

donde G es la *constante gravitacional universal*, cuyo valor es $G = 6.673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Además, la fuerza \mathbf{F}_{21} con la que m_1 atrae a m_2 es igual y opuesta, esto es, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Sean m y m' las masas de dos puntos materiales ubicados en \mathbf{r} y \mathbf{r}' respectivamente. La ley de gravitación universal nos dice que la aceleración \mathbf{g} de la masa m debido a la fuerza gravitacional ejercida por m' es de la forma

$$\mathbf{g} = G m' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}.$$

La componente x de esta aceleración es

$$g_x = G m' \frac{x' - x}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}},$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Se puede demostrar que

$$\frac{x' - x}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}} \right).$$

Por lo tanto,

$$g_x = G m' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right),$$

y análogamente para g_y y g_z . Se sigue que

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U,$$

donde a

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G m'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (2.4)$$

se le conoce como el *potencial gravitacional*, debido a la masa m' .

La fuerza de gravedad cumple con el principio de superposición, por lo que (usando (2.4)) si se tienen N partículas de masa m_i ubicadas en \mathbf{r}_i (con $i = 1, \dots, N$), entonces el potencial gravitacional generado en un punto en el espacio, con vector de posición \mathbf{r} , está dado por

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}. \quad (2.5)$$

Si en lugar de un conjunto discreto de partículas se considera una distribución continua, la suma se reemplaza por una integración, y el potencial gravitacional en un punto ubicado en \mathbf{r} queda dado por

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}', \quad (2.6)$$

donde $\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ es el elemento de masa en la posición \mathbf{r}' , $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad de masa local y $d^3\mathbf{r}'$ es el elemento de volumen. La integral (2.6), que se efectúa sobre el volumen total (V) de la distribución de masa, es la expresión general del potencial gravitacional de una distribución de masa arbitraria.

Supóngase el caso de una esfera uniforme de masa M , radio R y con densidad de masa ρ constante, que se halla en reposo y con su centro de masa en el origen del marco de referencia, como se puede ver en la figura 2.1. Entonces, el potencial gravitacional es (2.6).

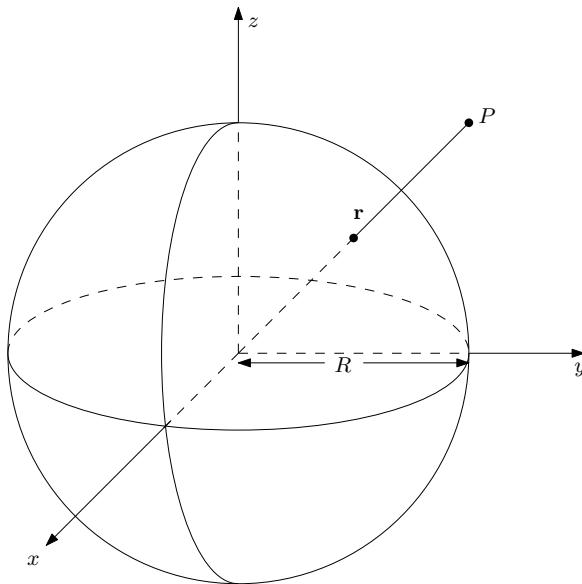


Figura 2.1: Un cuerpo esférico, de masa uniforme y centrado en el origen del marco de referencia

Utilizando coordenadas esféricas polares:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

En estas coordenadas el elemento diferencial de volumen es

$$d^3\mathbf{r}' = r'^2 \operatorname{sen} \theta' dr' d\theta' d\phi',$$

siendo r', θ', ϕ' las coordenadas para puntos del cuerpo. Por otra parte, el valor absoluto de la

diferencia de los radios vectores que aparece en el denominador del integrando es

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' &= xx' + yy' + zz' \\ &= (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi)(r' \operatorname{sen} \theta' \cos \phi') + (r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi)(r' \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \phi') + (r \cos \theta)(r' \cos \theta') \\ &= rr'(\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos \phi \cos \phi' + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi' + \cos \theta \cos \theta') \\ &= rr'[\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta'(\cos \phi \cos \phi' + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi') + \cos \theta \cos \theta'] \\ &= rr'[\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta']. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'[\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta']}, \quad (2.7)$$

donde r, θ, ϕ son las coordenadas del punto de observación, mismo que denotaremos por P . Supóngase por simplicidad, que el punto P se sitúa sobre el eje z , fuera del cuerpo. Haciendo esto se tiene que $\theta = 0$. Por lo tanto, la expresión (2.7) se convierte en

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}, \quad (2.8)$$

El potencial gravitacional (2.6) se puede calcular ahora con las condiciones hechas. En primer lugar, la integración que es necesario realizar es

$$U(\mathbf{r}) = -2\pi G\rho \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^2 \operatorname{sen} \theta' dr' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}.$$

La integración sobre la coordenada θ' se puede calcular de manera directa si se observa que

$$d\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'} = \frac{rr' \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}},$$

siempre que r y r' sean constantes. Si realizamos explícitamente la integración, obtenemos como resultado:

$$U(\mathbf{r}) = -4\pi \frac{G\rho}{r} \int_0^R r'^2 dr' = -\frac{4\pi G\rho R^3}{3r}.$$

Como el cuerpo tiene densidad de masa constante, su valor está dado por la razón de la masa M sobre el volumen V , es decir,

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

por lo que el potencial gravitacional del cuerpo esférico resulta ser

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}.$$

Esta expresión es equivalente al potencial de un punto material; este mismo resultado fue el que obtuvo Newton, y está incluido en sus Principia.

2.3. Dinámica de un cuerpo rígido

Un *cuerpo rígido* se puede definir en mecánica como un sistema de N partículas, que se encuentran vinculadas unas con otras de tal manera que en todo instante sus distancias relativas son constantes. Así, podemos decir que los puntos materiales que constituyen un cuerpo rígido se hallan siempre a distancias relativas invariables. Dados dos puntos materiales cualesquiera de un cuerpo rígido, la distancia entre ellos, medida desde un marco de referencia anclado en algún punto del espacio es

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \kappa_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N;$$

donde κ_{ij} es una constante que depende de \mathbf{r}_i y de \mathbf{r}_j , pero no del tiempo.

No importa la forma en que se desplace el cuerpo por el espacio, todas las partículas que lo componen se moverán de manera tal que sus distancias relativas permanecerán inalterables. Esta definición sirve para distinguir a los cuerpos rígidos de su contraparte, los llamados *cuerpos deformables*, para los cuales, al contrario de aquellos, las distancias entre sus partículas constitutivas no permanecen fijas, sino que cambian a lo largo del tiempo.

Antes de proseguir con el desarrollo de la formulación matemática del cuerpo rígido, es muy importante establecer ciertos conceptos con los cuales será posible avanzar en este desarrollo. Primero es necesario puntualizar que un cuerpo rígido es un sistema de partículas. Esto significa que, cuando se ve urgido por fuerzas aplicadas, su estado de movimiento cambiará, como si todas las fuerzas aplicadas se concentraran en su centro de masa. Ahora, puesto que en este sistema todas las partículas se hallan a distancias invariables entre sí, conocer el cambio de estado de movimiento del centro de masa es indicativo del cambio de movimiento de todo el sistema. En otras palabras, el cuerpo se desplaza siguiendo la trayectoria del centro de masa. De hecho, si la trayectoria del centro de masa es conocida, entonces cualquier otro punto material del cuerpo rígido se moverá siguiendo al centro de masa y a lo más podrá desplazarse en relación a él, moviéndose en una esfera centrada en ese punto (el centro de masa) y cuyo radio será igual a la distancia relativa entre esa partícula y el propio centro de masa. Así, si se supone por el momento que haya un marco de referencia anclado en el centro de masa, cualquier otro punto material sólo puede moverse alrededor de él sobre una superficie esférica, ejecutando giros o *pivoteos* alrededor del centro de masa del cuerpo. Todo punto del cuerpo rígido se mueve por consiguiente con un movimiento de rotación (alrededor del centro de masa) y otro de traslación (siguiendo al centro de masa).

El cuerpo rígido en su totalidad, al ser urgido por agentes físicos externos, se desplaza y pivotea. Estas cualidades acerca del movimiento fueron estudiadas por primera vez por un poco conocido matemático francés de nombre Michel Chasles (1793-1880), profesor de la Sorbona de París, quien propuso estos resultados como un teorema. Hasta la fecha se conoce como el teorema de Chasles y se enuncia diciendo que: *El movimiento más general del cuerpo rígido se puede descomponer en una rotación y una traslación* [Vin07].

Considérese un sistema compuesto de N partículas que interactúan entre sí, y sea m_i la masa de la i -ésima, donde $i = 1, \dots, n$. La masa total del sistema queda dada por $M = \sum_{i=1}^N m_i$. Si el vector que conecta el origen con la i -ésima partícula es \mathbf{r}_i , entonces el vector que define la posición del *centro de masa* se define como

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Podemos considerar un cuerpo rígido \mathcal{S} como un conjunto discreto de partículas, con lo que se consigue cierta simplificación en las deducciones. No obstante, esto no contradice el hecho de que

un cuerpo rígido en general puede ser considerado en mecánica como una distribución continua de masa, sin tener en cuenta para nada su estructura interna. Para pasar de las fórmulas que se refieren al cuerpo como suma de partículas a las fórmulas que se refieren al cuerpo como un continuo simplemente sustituimos las masas de las partículas por el elemento de masa ρdV contenida en un elemento de volumen dV (ρ es la densidad de masa) e integrando en todo el volumen V del cuerpo [TM04]. Así, la posición del centro de masa de \mathcal{S} es entonces

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV,$$

donde ahora $M = \int_{\mathcal{S}} dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$.

Para describir el movimiento del cuerpo rígido utilizaremos dos marcos de referencia: uno fijo, es decir, un marco inercial (X, Y, Z) con origen en \mathcal{O} , y otro móvil, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , que supondremos unido rígidamente al sólido y que participa en todos sus movimientos. La posición del cuerpo rígido respecto al marco de referencia fijo quedará perfectamente determinada si se da la posición del marco móvil. Supongamos que el radio vector \mathbf{R}_o indica la posición del origen del marco móvil, respecto al marco fijo. La orientación de los ejes de este sistema con relación al marco de referencia fijo vendrá determinada por tres ángulos independientes, de manera que junto con las tres componentes del vector \mathbf{R}_o tendremos un total de seis coordenadas. Por lo tanto, todo cuerpo rígido es un sistema mecánico con seis grados de libertad.

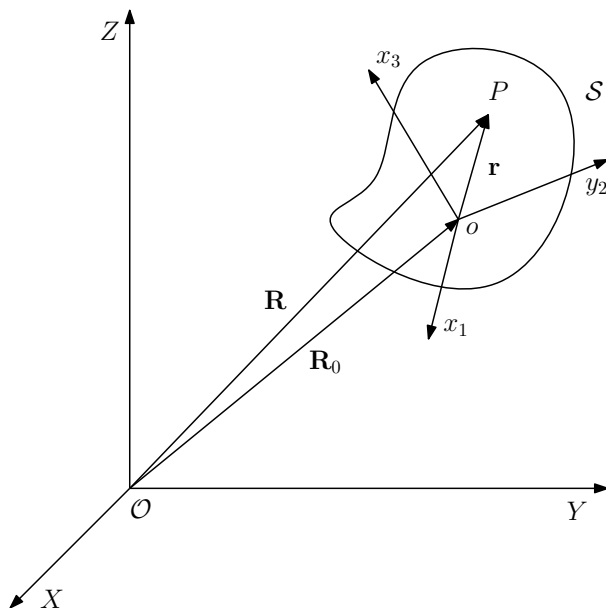


Figura 2.2: Coordenadas del cuerpo rígido

Llamemos \mathbf{r} al radio vector de un punto arbitrario P del cuerpo rígido en el marco móvil y \mathbf{R} al radio vector de ese mismo punto en el marco inercial fijo. Entonces, cualquier desplazamiento $d\mathbf{R}$ de P se compondrá de un desplazamiento $d\mathbf{R}_o$ de este punto junto con el centro de masa y de otro desplazamiento $d\varphi \wedge \mathbf{r}$ de P respecto al centro de masa al girar el ángulo $d\varphi$, es decir, [LL80]

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_o + (d\varphi \wedge \mathbf{r}).^2$$

Dividiendo esta igualdad por el tiempo dt durante el cual se produce el desplazamiento $d\mathbf{R}$, e introduciendo las velocidades

²A lo largo de este trabajo, se usará \wedge para denotar el producto vectorial.

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}_o}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \boldsymbol{\omega},$$

obtenemos la siguiente relación entre ellas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}).$$

El vector \mathbf{V} es la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido; esta velocidad suele llamarse velocidad del movimiento de *traslación*. El vector $\boldsymbol{\omega}$ se llama *velocidad angular* de la rotación del cuerpo; su dirección coincide con la dirección instantánea (lo mismo que la de $d\varphi$) del eje de rotación. Así, la velocidad \mathbf{v} de cualquier punto del cuerpo (respecto al marco inercial fijo) se puede expresar por medio de la velocidad de traslación de dicho cuerpo y de la velocidad angular de su movimiento de rotación.

2.3.1. Ángulos de Euler

Como ya se mencionó, el movimiento de un cuerpo rígido se puede describir mediante las tres coordenadas de su centro de masa y los tres ángulos que determinan la orientación de los ejes x_1, x_2, x_3 en el marco de referencia fijo al cuerpo. En general, es conveniente usar los llamados *ángulos de Euler*, los cuales no son únicos [LL80]. Por razones de comodidad, haremos coincidir al origen del marco móvil con el centro de masa del cuerpo rígido.

Denotamos por \mathcal{N} a la línea de nodos, definida como la intersección entre los planos (x_1, x_2) y (X, Y) . Los ángulos de Euler (ϕ, ψ, θ) se introducen de la siguiente manera [LL80, TM04]:

$0 \leq \phi \leq 2\pi$ es el ángulo de *precesión*, formado por las direcciones X y \mathcal{N} .

$0 \leq \psi \leq 2\pi$ es el ángulo de *rotación propia*, formado por las direcciones \mathcal{N} y x_1 .

$0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo de *nutación*, formado por las direcciones Z y x_3 .

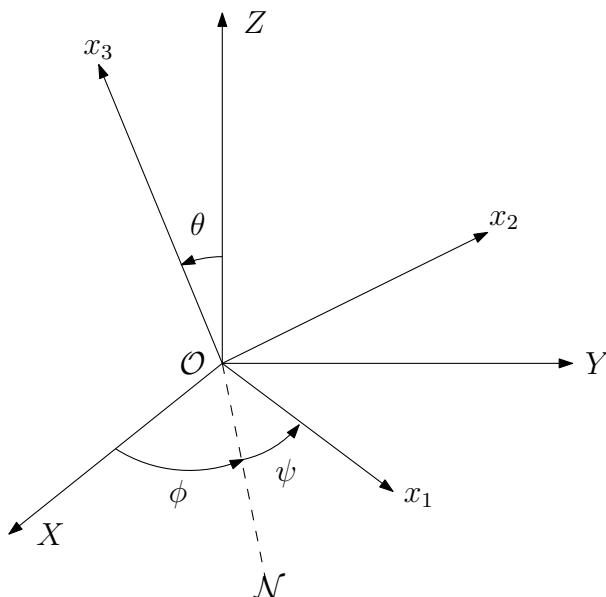


Figura 2.3: Ángulos de Euler.

Las velocidades angulares de nutación, de precesión y de rotación, se pueden describir vectorialmente considerando cada uno de los ejes alrededor de los cuales se han definido estas

cantidades. La velocidad de nutación $\dot{\theta}$ ha quedado definida con respecto a un marco de referencia cuyo eje de las abscisas es \mathcal{N} . No se trata del marco inercial, ni del marco fijo al cuerpo, sino más bien de un marco de referencia intermedio, al que se llega después de haber hecho una rotación (alrededor del eje Z del primero) por un ángulo ϕ [Vin07]. Desde este sistema intermedio, la velocidad de nutación $\dot{\theta}$ es un vector cuyas componentes se expresan así:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así mismo, la velocidad de rotación $\dot{\psi}$ se describe, desde el marco de referencia fijo al cuerpo, como un vector en la dirección del eje x_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Por último, desde la perspectiva del marco de referencia inercial, donde el eje Z es el eje de giro, la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

El vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo rígido (ese que describe la rapidez con que el cuerpo pivotea, así como la dirección y el sentido del pivote) debe estar descrita desde un solo marco de referencia, ya sea el inercial o el fijo al cuerpo. Hay que encontrar la forma de expresar $\boldsymbol{\omega}$ en el mismo marco de referencia, utilizando las transformaciones (rotaciones) adecuadas [Vin07].

La transformación de un sistema de coordenadas a otro puede representarse por una ecuación de la forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}',$$

donde \boldsymbol{R} es una *matriz de rotación*.

Si identificamos al sistema de coordenadas inercial (fijo en el espacio) con \boldsymbol{x}' y al sistema de coordenadas fijo al cuerpo con \boldsymbol{x} , entonces la matriz de rotación \boldsymbol{R} describe completamente la orientación relativa de ambos sistemas de coordenadas. La matriz de rotación \boldsymbol{R} está dada en términos de los tres ángulos de Euler. Éstos se obtienen a partir de una serie de rotaciones, que transforman al marco inercial (fijo en el espacio) \boldsymbol{x}' en el marco fijo al cuerpo \boldsymbol{x} . A continuación describimos esta serie de transformaciones (rotaciones).

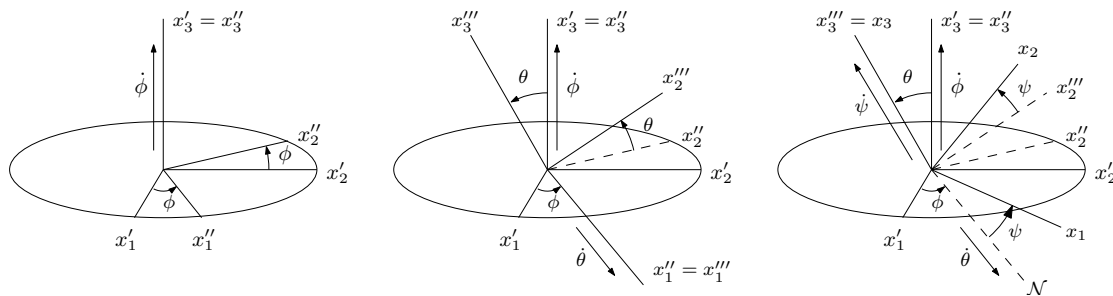


Figura 2.4: Rotaciones que llevan a los ángulos de Euler.

En la primera rotación se gira un ángulo ϕ alrededor del eje x'_3 , en sentido contrario a

las manecillas del reloj. En este caso, la rotación tiene lugar en el plano (x'_1, x'_2) y la matriz correspondiente es

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la segunda rotación se gira un ángulo θ alrededor del eje x''_1 , nuevamente en contra de las manecillas del reloj. Como la transformación se da en el plano (x''_2, x''_3) la matriz de rotación es

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En la tercera rotación se gira un ángulo ψ alrededor del eje x'''_1 , en contra de las manecillas del reloj. La rotación toma lugar en el plano (x'''_2, x'''_3) , por lo que la matriz de rotación es

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el marco de referencia del cuerpo, las componentes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de la velocidad angular de rotación se derivan a continuación. Empezamos por escribir la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ como la suma de las velocidades de rotación, de nutación y de precesión, es decir,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{nut}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{prec}}.$$

La velocidad de rotación ya está expresada en el marco fijo al cuerpo:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Recordemos que el vector de nutación ya está escrito en el marco de referencia de la línea de nodos. Para transformar este vector al marco de referencia fijo al cuerpo hay que hacer una rotación por el ángulo ψ , haciendo que \mathcal{N} coincida con el eje x_3 :

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{nut}} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \text{sen } \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inicialmente se expresó la velocidad de precesión en el marco de referencia inercial, por lo que para transformar sus componentes al marco fijo al cuerpo hay que aplicar consecutivamente las tres rotaciones que definen a los ángulos de Euler,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{\text{prec}} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \text{sen } \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \text{sen } \theta \text{sen } \psi \\ \dot{\phi} \text{sen } \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sumando las componentes de la velocidad angular, obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\phi} \text{sen } \theta \text{sen } \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\
\omega_2 &= \dot{\phi} \text{sen } \theta \cos \psi - \dot{\theta} \text{sen } \psi \\
\omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3.2. El tensor de inercia

En un cuerpo rígido compuesto por N puntos materiales, la energía cinética de la α -ésima partícula está dada por

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2,$$

así que la energía cinética total del cuerpo rígido es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N m_\alpha (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_\alpha)^2.$$

Expandiendo el término cuadrático, encontramos que

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N m_\alpha V^2 + \sum_{\alpha=0}^N m_\alpha \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_\alpha)^2. \tag{2.10}$$

Ésta es una expresión general para la energía cinética, y es válida para cualquier elección del origen desde el que se miden los vectores \mathbf{r}_α .

Si hacemos coincidir el origen del marco del cuerpo con el centro de masa de éste, resulta en una simplificación considerable. Primero notemos que en el segundo término del lado derecho de (2.10) ni \mathbf{V} ni $\boldsymbol{\omega}$ son características (exclusivas) de la α -ésima partícula, por lo que estas cantidades pueden sacarse de la suma, dando

$$\sum_{\alpha=0}^N m_\alpha \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\sum_{\alpha=0}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \right).$$

Pero $M\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha$ define el centro de masa del cuerpo, que se anula en el marco del cuerpo, ya que los vectores \mathbf{r}_α se miden desde el centro de masa³. La energía cinética puede escribirse como

³Recuérdese que el origen del marco del cuerpo rígido coincide con el centro de masa de éste.

$$T = T_{\text{tras}} + T_{\text{rot}},$$

donde

$$\begin{aligned} T_{\text{tras}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} V^2 = \frac{1}{2} M V^2 \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\alpha})^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De esta forma, la energía del cuerpo rígido se puede expresar en forma de una suma de términos. El primer término de (2.11) es la energía cinética del movimiento de traslación; la expresión de esta energía tiene aquí la misma forma que si toda la masa del cuerpo se encontrara en su centro de masa. El segundo término es la energía cinética del movimiento de rotación, con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

Escribiendo la energía cinética de rotación⁴ como

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} [\boldsymbol{\omega}^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2],$$

podemos ahora expresar la energía cinética de rotación T_{rot} por medio de las componentes ω_{α} y $x_{\alpha,i}$ de los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{r}_{α} . Tomando en cuenta que $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$ en el marco del cuerpo. Entonces

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} \left[\left(\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \right) \left(\sum_{k=1}^3 x_{\alpha,k}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i x_{\alpha,i} \right) \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j x_{\alpha,j} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N \sum_{i,j} m_{\alpha} \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right); \end{aligned}$$

aquí se ha utilizado la identidad $\omega_i = \sum_{j=1}^3 \omega_j \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Introduciendo el tensor

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right), \quad (2.12)$$

la energía cinética rotacional del cuerpo rígido queda como

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Los nueve términos I_{ij} constituyen los elementos de una matriz de 3×3 , designada por la letra \mathbb{I} . A esta matriz se le conoce como el *tensor de inercia* del cuerpo rígido. Para mayor claridad, escribimos \mathbb{I} en forma explícita:

⁴Utilizando la identidad vectorial $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} (x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & - \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & - \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ - \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & - \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ - \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & - \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_{\alpha=0}^N m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la diagonal, I_{11}, I_{22}, I_{33} , se llaman *momentos de inercia* respecto a los ejes x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Los elementos fuera de la diagonal son designados por el término *productos de inercia*. El tensor de inercia es simétrico, es decir, $I_{ij} = I_{ji}$, y por lo tanto solamente hay seis términos independientes en \mathbb{I} . Más aún, el tensor de inercia está compuesto por elementos aditivos; el tensor de inercia de un cuerpo rígido puede verse como la suma de los tensores de inercia de las partes que componen al cuerpo. En consecuencia, si consideramos al cuerpo rígido como una distribución continua de materia, con densidad de masa $\rho = \rho(\mathbf{r})$, entonces los elementos del tensor de inercia están dados por

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) dV. \quad (2.13)$$

Como todo tensor simétrico de segundo rango, el tensor de inercia se puede reducir a la forma diagonal eligiendo convenientemente las direcciones de los ejes x_1, x_2, x_3 . Estas direcciones se llaman *ejes principales de inercia*, y los valores correspondientes de las componentes del tensor de inercia son los *momentos principales de inercia*, que designaremos por I_1, I_2, I_3 . Si los ejes x_1, x_2, x_3 se eligen de esta forma, la energía cinética de rotación se expresa de una manera muy sencilla

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Un cuerpo rígido cuyos tres momentos de inercia principales son diferentes se dice que tiene estructura de *trompo asimétrico*. Si dos de sus momentos de inercia principales son iguales, por ejemplo $I_1 = I_2 \neq I_3$ la estructura del cuerpo rígido es la de un *trompo simétrico*. En este caso, la dirección de los ejes principales en el plano (x_1, x_2) puede escogerse arbitrariamente. Si se cumple que $I_1 = I_2 = I_3$ entonces se dice que el cuerpo rígido es un *trompo esférico* [LL80, TM04].

2.3.3. Momento angular y las ecuaciones de Euler

El valor del momento angular de un sistema depende del punto con respecto al cual se define. Respecto a algún punto fijo en el marco de referencia del cuerpo, el momento angular está definido por

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \wedge \mathbf{p}_{\alpha}.$$

Es conveniente elegir el origen del marco de referencia fijo al cuerpo (O), es decir, su centro de masa. Respecto a O , el momento lineal de la α -ésima partícula es

$$\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = m_{\alpha} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\alpha},$$

por lo que el momento angular del cuerpo rígido es

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\alpha}).$$

Entonces el vector \mathbf{L} queda⁵

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

La misma técnica para derivar T_{rot} se puede aplicar ahora para calcular la i -ésima componente del momento angular \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} \omega_j \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_j \left(\omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) \\ &= \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right). \end{aligned}$$

La suma sobre α no es otra cosa que el ij -ésimo elemento del tensor de inercia de la ecuación (2.12), por lo tanto

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j. \quad (2.14)$$

La relación más simple entre las componentes del momento angular \mathbf{L} de un cuerpo rígido y las componentes de la velocidad angular se expresa en el marco de referencia fijo al cuerpo (móvil en el espacio) y cuyos ejes coincidan con los momentos principales de inercia. Para obtener esta relación, primero hay que transformar las ecuaciones de movimiento en el marco inercial a las coordenadas x_1, x_2, x_3 , fijas al cuerpo rígido [LL80].

Sea $d\mathbf{A}/dt$ la derivada respecto al tiempo de un vector cualquiera \mathbf{A} . Si dicho vector no cambia en el marco de referencia móvil, su derivada en el marco inercial se debe únicamente a la rotación, de manera que $(d\mathbf{A}/dt)_{\text{fijo}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{A}$. En general, el lado derecho de la ecuación incluye también la derivada del vector \mathbf{A} respecto al marco móvil. Denotando esta derivada por $(d\mathbf{A}/dt)_{\text{movil}}$, obtenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{movil}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{A}.$$

Aplicando esta expresión a la torca $\boldsymbol{\tau}$, que definimos como $\boldsymbol{\tau} = (d\mathbf{L}/dt)_{\text{fijo}}$, nos queda que

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{movil}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}.$$

La componente de esta ecuación a lo largo del eje x_1 en el marco de referencia del cuerpo es

$$\dot{L}_1 + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = \tau_1.$$

Si elegimos un sistema de coordenadas tal que los ejes x_i coincidan con los ejes principales del cuerpo, tenemos que

⁵Utilizando la identidad vectorial $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) = A^2 \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$$L_i = I_i \omega_i,$$

y por lo tanto,

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3.$$

Permutando los subíndices adecuadamente en cada caso, obtenemos las tres componentes de la torca:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ \tau_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

A las expresiones (2.15) se les conoce como las *ecuaciones de Euler* para el movimiento de un cuerpo rígido en un campo de fuerzas ⁶.

⁶La relación entre $\boldsymbol{\tau}$ y el campo de fuerzas esta dada por la expresión $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$.

ÓRBITAS KEPLERIANAS

Al comienzo del siglo XVII, J. Kepler (1571-1630) estableció tres leyes de forma experimental para describir los movimientos planetarios alrededor del Sol. Las leyes las formuló a partir de las observaciones precisas de las órbitas de la Tierra y el planeta Marte hechas por el astrónomo danés T. Brahe (1546-1601), de quien fue su colaborador, que preparaba las tablas astronómicas conocidas como las Tablas Rudolfinas y que acabó publicando Kepler en el año de 1627. Las tres leyes de Kepler se enuncian a continuación:

1. Las órbitas de los planetas son elipses y el Sol está situado en uno de sus focos.
2. Cada planeta se mueve sobre su órbita de tal manera que una línea imaginaria que lo una con el Sol barrerá áreas iguales en intervalos de tiempo iguales. Esta ley se conoce también con el nombre de Ley de las Áreas.
3. El cuadrado de los períodos de dos planetas cualquiera están en la misma proporción que los cubos de sus distancias medias al Sol.

Las dos primeras leyes aparecieron publicadas en 1609 en la *Astronomía Nova* (De Motibus Stellae Martis), donde se discutía el movimiento del planeta Marte utilizando las observaciones de T. Brahe. A esta obra, que es uno de los fundamentos de la llamada Astronomía Dinámica, se da por primera vez una aproximación realista de las relaciones cinemáticas del sistema solar. La tercera ley de Kepler se publicó en 1619 en un trabajo titulado *Harmonice Mundi, libro V* y fue validada experimentalmente por Galileo con las observaciones del movimiento de las lunas de Jupiter. En la *Astronomía Nova*, Kepler también afirma que el movimiento planetario heliocéntrico (es decir, el movimiento respecto al Sol) tiene lugar en un plano que pasa por el Sol. En el sistema de Ptolomeo, la “primera desigualdad” de un planeta, que representa su movimiento heliocéntrico, se asignaba a un plano que pasaba por la posición media del Sol. Incluso en el sistema de Copérnico, esta posición media pasa a ser el centro de la órbita de la Tierra pero no la del Sol. Es por eso que ningún astrónomo anterior a Kepler había conseguido representar las latitudes de los planetas con precisión.

Brahe tenían el orden adecuado de precisión para los propósitos de Kepler y suficientemente precisos como para permitir discriminar en las hipótesis ciertas y las falsas y todavía tan refinadas como para tener que considerar el problema con toda su complejidad.

La suerte acompañó a Kepler en sus descubrimientos. En particular, el descubrimiento de la ley de áreas se basa en una combinación afortunada de errores. En primer lugar utiliza como hipótesis una órbita circular excéntrica, pero más tarde adapta la ley para el movimiento elíptico. En segundo lugar, Kepler supuso que: (a) el tiempo que transcurre en recorrer un arco finito es, por lo tanto, la suma de los radios de todos los puntos del arco y (c) que ésta suma es igual al área del sector. Tanto (a) como (c) son erróneas, de hecho Kepler sabía que (c) no era muy precisa. Matemáticamente este argumento se puede escribir como [Mou70]

$$hdt = rds, ht = \int rds = 2A$$

Tanto la hipótesis como el método de deducción son erróneos, a pesar que el resultado sea cierto.

La presentación de los temas de este capítulo sigue principalmente a las referencias [Cel10, Fit12, Pol66], donde el lector encontrará los detalles que aquí no se incluyen.

3.1. Campos de fuerzas centrales

Un campo \mathbf{F} se dice que es *central* si $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se encuentra en la misma línea que \mathbf{r} , es decir, si apunta hacia el origen o se aleja de éste para toda $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. En otras palabras, el vector $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es un múltiplo escalar de \mathbf{r} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda(r)\mathbf{r}, \quad (3.1)$$

donde el coeficiente λ es una función escalar que depende únicamente de la magnitud de \mathbf{r} .

En general, se dice que un campo de fuerzas $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es *conservativo* si existe una función suave $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, llamada *función potencial*, tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) = m \nabla U(\mathbf{r}),$$

donde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Nótese que la función potencial queda totalmente definida salvo una constante. La ecuación diferencial de movimiento (2.1) en este caso es

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

A continuación se enunciará y demostrará un teorema de gran importancia en el estudio de campos conservativos [HSD04].

Teorema. Sean $r \equiv |\mathbf{r}|$ la distancia entre el origen y el punto material, y f, g funciones continuas de r . Si \mathbf{F} es un campo de fuerzas conservativo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) \mathbf{F} es un campo de fuerzas central.
- ii) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mf(r)\mathbf{r}/r$.
- iii) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\nabla U(\mathbf{r})$ y $U(\mathbf{r}) = g(r)$.

Demostración. Supóngase que la afirmación (iii) es cierta. Para probar (ii) vemos que, de la regla de la cadena (haciendo $g'(r) \equiv dg(r)/dr$)

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = g'(r) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_1 + x_2 + x_3)^{1/2} = \frac{g'(r)}{r} x_k$$

para $k = 1, 2, 3$. Esto demuestra (ii), tomando $f(r) = g'(r)/r$.

Es fácil ver que (ii) implica (i), tomando $\lambda(\mathbf{r}) = -mf(r)/r$.

Para ver que (i) implica (iii) debemos probar que U es constante en cada esfera

$$\mathbb{S}_\alpha := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | r = \alpha > 0\}.$$

Ya que podemos unir por una curva a cualesquiera dos puntos en \mathbb{S}_α , basta mostrar que U es constante en cualquier curva en \mathbb{S} . Por lo tanto, si $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ es un intervalo real, y $\gamma : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{S}_\alpha$

es una curva suave, debemos ver que la derivada de la composición $U \circ \gamma$ es idénticamente cero. Esta derivada es (aplicando la regla de la cadena)

$$\frac{d}{dt}U(\gamma(t)) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t).$$

Ahora bien, $\nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})\mathbf{r}$, pues \mathbf{F} es campo central. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{d}{dt}U(\gamma(t)) = \lambda(\gamma(t))\gamma(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = \frac{\lambda(\gamma(t))}{2} \frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2 = 0,$$

ya que $|\gamma(t)| = \alpha$.

Ya que se tienen las implicaciones $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii)$, queda demostrado el teorema. \square

Un caso especial, de particular interés en este trabajo, es el del *campo central Newtoniano*. Éste se encarga del movimiento de un punto material alrededor de un centro fijo, que por conveniencia situamos en el origen de \mathbb{R}^3 . En este caso, la fuerza que experimenta la partícula en cada punto de \mathbb{R}^3 está dirigida hacia el centro fijo, y está dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{m\mu}{r^3}\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

donde μ es una constante positiva, que depende del origen del campo central y de las unidades elegidas [Pol66] (más adelante, en la sección 3.3 daremos la expresión explícita de μ). La ecuación (2.1) se vuelve entonces

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}, \quad (3.4)$$

y el sistema (2.2) queda como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2. Leyes de conservación o integrales primeras

Cuando un sistema mecánico evoluciona, las $2n$ cantidades x_i y \dot{x}_i (con $i = 1, \dots, n$) que determinan su estado (de movimiento) varían con el tiempo. No obstante, existen ciertas funciones de estas magnitudes que conservan su valor durante el movimiento y que dependen únicamente de las condiciones iniciales. Estas funciones se llaman *integrales primeras* del movimiento. El número de integrales primeras independientes que puede tener un sistema mecánico cerrado de n grados de libertad es $2n$ [LL80].

En un sistema mecánico determinado, la existencia de leyes de conservación fundamentales, o integrales primeras, se puede interpretar como una consecuencia de las propiedades de *homogeneidad* (que se entiende como la invariancia del sistema respecto a los desplazamientos paralelos) e *isotropía* (invariancia del sistema respecto a rotaciones alrededor de un eje) del espacio y del tiempo del sistema. Así, de la homogeneidad del espacio se puede deducir la integral del centro de masas, que ya hemos utilizado para la simplificación del estudio del problema de dos cuerpos al de un movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales. De la propiedad isotropía se deduce el teorema de conservación del momento angular; y el teorema de conservación de energía se deduce de la homogeneidad del tiempo¹.

¹Expresada por el hecho de que la función Lagrangiana de un sistema sobre el cual no actúan fuerzas externas, o

En este apartado demostraremos los teoremas de conservación de la energía y del momento angular para un campo de fuerzas centrales newtoniano. Estos teoremas no son más que un caso particular del *Teorema de Noether*, que se encarga de relacionar integrales de movimiento con simetrías, donde por *simetría* entendemos la invariancia de alguna propiedad que no cambia bajo ningún tipo de transformación. Sin embargo, la demostración del teorema de Noether requiere de la formulación Hamiltoniana de la mecánica, razón por la cual no se incluye en este trabajo. En lo que sigue daremos demostraciones directas de los teoremas de conservación que no utilizan la formulación Hamiltoniana.

3.2.1. Conservación de la energía

Consideremos un campo de fuerzas central conservativo, es decir, donde $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mf(r)\mathbf{r}/r$. El sistema dinámico que lo describe es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Efectuando el producto escalar de la segunda ecuación del sistema con \mathbf{v} obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot{v}v = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{f(r)}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -\frac{f(r)}{r}r\dot{r} = -f(r)\frac{dr}{dt}.$$

Integrando la expresión anterior, obtenemos como resultado

$$\frac{1}{2}v^2 = -\int_R^r f(r')dr' + h = \int_r^R f(r')dr' + h, \quad (3.6)$$

donde h es una constante de integración, y R se elige de tal manera que la integral sea convergente. Si $f(r)$ es de la forma $f(r) = \mu r^{-p}$, entonces

$$R = \begin{cases} \infty & \text{si } p > 1; \\ 0 & \text{si } p < 1; \\ 1 & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Nos concierne el caso en que $f(r) = \mu r^{-2}$, es decir, cuando trabajamos con un campo central Newtoniano. En este caso la función potencial está dada por $U(r) = \int_r^\infty f(r')dr' = \mu r^{-1}$. Definimos ahora la *energía potencial* (por unidad de masa) como $V(r) = -U(r)$, de forma que podemos escribir (3.6) como

$$h = \frac{1}{2}v^2 + V(r).$$

Si definimos la *energía cinética* (por unidad de masa) de la partícula como $T = v^2/2$, entonces $h = T + V$ define la *energía total* (por unidad de masa) de la partícula. Se concluye que *la energía total h de una partícula moviéndose en un campo de fuerzas central newtoniano es una integral primera de las ecuaciones de movimiento.*

3.2.2. Conservación del momento angular

Asumamos ahora que el sistema (3.5) se satisface para algún intervalo de tiempo con el par de funciones vectoriales $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$, las cuales escribimos, por simplicidad, como \mathbf{r} y \mathbf{v} . A partir de

bien que éstas sean constantes, no depende explícitamente del tiempo.

la segunda ecuación del par, se concluye que

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

ya que el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero. La derivada respecto al tiempo de $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ también se anula,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{v}}) + (\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

donde \mathbf{c} es un vector constante, y definimos a éste como el *momento angular* (por unidad de masa) de la partícula. Se concluye que *en un campo de fuerzas central newtoniano, el momento angular \mathbf{c} es una integral primera de las ecuaciones de movimiento.*

Veamos ahora algunas consecuencias de la conservación del momento angular. De acuerdo con (3.7) tenemos que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$. Si $c \neq 0$, esto significa que \mathbf{r} siempre es perpendicular a \mathbf{c} . En otras palabras, si $c \neq 0$, *todo el movimiento toma lugar en un plano fijo, perpendicular a \mathbf{c} y que pasa por el origen de \mathbb{R}^3 .* Si $c = 0$, consideremos la derivada respecto al tiempo de \mathbf{r}/r :

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\dot{\mathbf{r}}r - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}}{r^3} = \frac{(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \wedge \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{c} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.8)$$

donde se utilizó la identidad vectorial $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$.

En este caso, el vector \mathbf{r}/r es constante y *el movimiento toma lugar en una recta fija, que pasa por el origen de \mathbb{R}^3 .*

3.3. El problema de dos cuerpos

El *problema de dos cuerpos* se encarga de estudiar el movimiento de dos puntos materiales cuando ambos están sujetos a la atracción gravitacional mutua. Considerando un marco de referencia inercial, sean m_1 y m_2 las masas de dos partículas P_1 y P_2 . Si \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son los vectores de posición de P_1 y P_2 respectivamente, entonces $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ es la distancia entre ambas. La ley de gravitación universal de Newton (2.3) nos da la fuerza de atracción entre ambas partículas, y usando la tercera ley de movimiento obtenemos las dos ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r^3}, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= Gm_2 m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Es posible reducir estas ecuaciones a un sistema de campo central Newtoniano, como el de (3.5), mediante el uso de un proceso que se conoce como *reducción a coordenadas relativas* [Pol66]. Dividiendo la primera ecuación de (3.9) entre m_1 , la segunda entre m_2 y restando la primera de la segunda se obtiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Tomando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mu = G(m_1 + m_2)$, y reescribiendo la ecuación anterior como un sistema dinámico, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r},\end{aligned}\tag{3.10}$$

el cual es exactamente igual al sistema del campo central Newtoniano (3.5), con una elección especial de μ . Una vez que obtenemos \mathbf{r} , quedan inmediatamente determinadas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Dicho de otro modo, cada partícula se mueve como una partícula de masa uno atraída gravitacionalmente a otra partícula, de masa $\mu = G(m_1 + m_2)$, fija en el centro. Llamaremos *órbita* al conjunto de posiciones que ocupa una partícula (ya sea P_1 o P_2), sin hacer referencia alguna al tiempo en el que ésta se halle en una determinada posición. A la órbita de cada uno de los puntos materiales vista por el otro se le conoce como *órbita relativa*. El sistema (3.10) no se altera si reemplazamos \mathbf{r} por $-\mathbf{r}$, por lo que las órbitas relativas son geoméricamente idénticas.

En la sección 3.2 mostramos que el movimiento de una partícula material, en un campo central, se da en un plano fijo en \mathbb{R}^3 . Podemos introducir coordenadas cartesianas (x, y, z) , con origen en P_1 y tales que el eje z sea perpendicular al plano del movimiento, en donde $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ son los vectores unitarios correspondientes a los ejes x, y, z respectivamente. Utilizando coordenadas polares (r, θ) , las coordenadas del punto P_2 son $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$. Se tiene entonces que

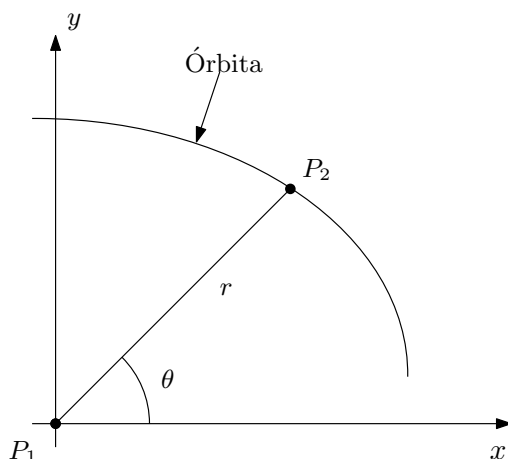


Figura 3.1: Configuración geométrica del problema de Kepler.

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta & \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z.$$

Denotando por c a la magnitud de \mathbf{c} , obtenemos una expresión para el momento angular en términos de r y θ :

$$c = r^2 \dot{\theta}.\tag{3.11}$$

La ecuación (3.11) nos permite dar una derivación de la segunda ley de Kepler. Evaluando el área ΔA , que barre el vector de posición \mathbf{r} en el intervalo de tiempo que va desde t hasta $t + \Delta t$, se tiene que

$$\Delta A = \frac{1}{2} r(t) r(t + \Delta t) \sin \Delta \theta,$$

donde $\Delta \theta$ representa el ángulo entre $r(t)$ y $r(t + \Delta t)$. La variación de A respecto al tiempo

está dada por

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r(t) r(t + \Delta t) \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Tomando el límite cuando Δt tiende a cero, se tiene que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r(t) r(t + \Delta t) \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

y dado que $\Delta\theta$ tiende a cero cuando Δt lo hace, entonces

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} r(t) r(t + \Delta t) \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \left(\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \right).$$

Se concluye que la *velocidad areolar* (\dot{A}) es

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}. \quad (3.12)$$

Recurriendo a la ecuación (3.11), el significado físico de (3.12) es que *el radio vector barre el área a razón constante*; esto demuestra la segunda ley de Kepler.

En el plano los vectores (unitarios) de la base en coordenadas polares se pueden expresar en términos de los vectores de la base cartesianos:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \end{aligned}$$

los cuales cumplen que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y) = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} (-\cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_y) = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Considerando que el vector de posición en coordenadas polares es entonces $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$, y calculando su derivada respecto al tiempo obtenemos el vector velocidad (que en coordenadas polares tiene una parte radial y una tangencial)

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta.$$

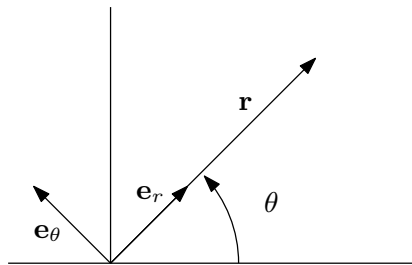


Figura 3.2: Coordenadas polares en el plano de movimiento.

Para calcular el vector aceleración, volvemos a derivar respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

Por lo tanto, las expresiones en coordenadas polares de la posición, la velocidad y la aceleración son:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \mathbf{e}_r + \left[r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right] \mathbf{e}_\theta. \quad (3.15)$$

3.4. La ecuación de las órbitas y su geometría

Vamos a ver cómo son las soluciones del sistema (3.10). Si multiplicamos por μ la ecuación (3.8) obtenemos que

$$\mu \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} = \mu \frac{\mathbf{c} \wedge \mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{c} \wedge \left(-\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \wedge \mathbf{c}.$$

Integrando ambos lados resulta en

$$\mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{c}. \quad (3.16)$$

El vector \mathbf{e} , que hemos introducido como constante de integración, se conoce como *vector de Laplace* o *vector excéntrico*, y su módulo se conoce como la *excentricidad*.

Y además, como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0$ también se cumple que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = 0$. Por lo tanto, si $c \neq 0$, el vector \mathbf{e} está contenido en el plano del movimiento. Si $c = 0$, entonces $\mathbf{r}/r = -\mathbf{e}$, así que \mathbf{e} es unitario y está sobre la línea del movimiento.

Daremos ahora una interpretación del vector de Laplace cuando $c \neq 0$. Calculando el producto escalar de (3.16) con \mathbf{r} , entonces

$$\mu(r + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}.$$

En consecuencia,

$$r + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = \frac{c^2}{\mu}, \quad (3.17)$$

donde c^2/μ es constante. Esta es una primera expresión para la ecuación de las órbitas.

Hay dos casos posibles. Si $e = 0$, entonces $r = c^2/\mu$ es constante y, por lo tanto, el movimiento es circular. De la descomposición de los vectores de posición y velocidad en coordenadas polares (ecuaciones (3.13) y (3.14)) se sigue que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r}$, y si el movimiento es circular $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$. En este caso, utilizando la identidad vectorial $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})^2 = r^2 v^2$, tenemos que $c = rv$, de donde resulta que la magnitud de la velocidad también se mantiene constante.

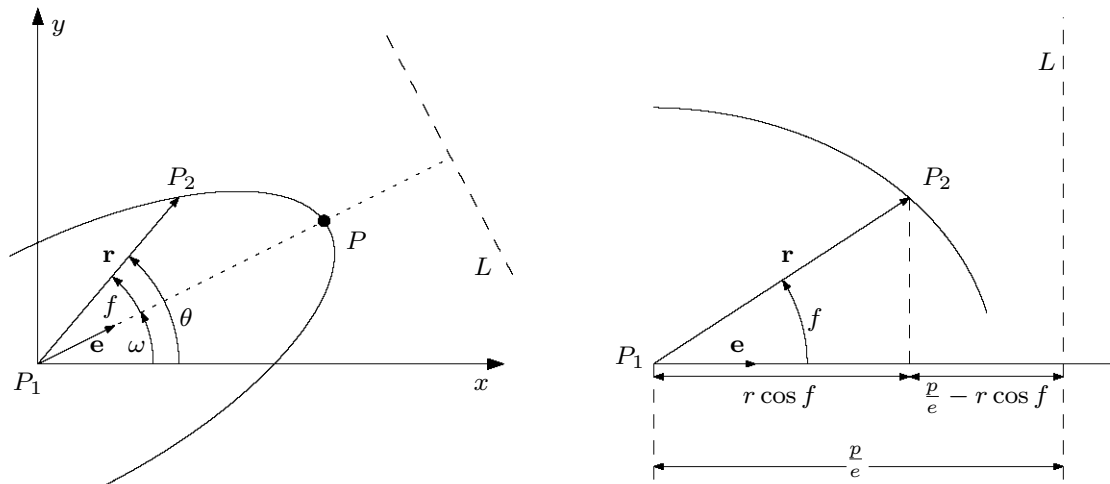


Figura 3.3

Supóngase ahora que $e \neq 0$. En el plano del movimiento coloquemos al vector e como se muestra en la figura. Denotemos por ω al ángulo fijo entre el eje x y e . Si (r, θ) nos indica la posición de P_2 , y llamamos f al ángulo $\theta - \omega$, entonces la misma posición de P_2 puede ser representada por (r, f) si usamos al vector e como el eje de las abscisas. De esta manera se tiene que $e \cdot r = er \cos f$, y la ecuación (3.17) se escribe como

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (3.18)$$

donde introducimos la cantidad $p \equiv c^2/\mu$, llamada *parámetro de la órbita*. Se obtiene la ecuación que nos da el radio vector en función del ángulo f , al cual se le conoce comúnmente, en la literatura astronómica, como *anomalía verdadera* [Pol66]. Llamamos *pericentro* al punto P donde r alcanza su valor mínimo, y corresponde a $f = 0$.

Considerando la recta L , a una distancia p/e de P_1 , perpendicular a e y del mismo lado en que éste vector se dirige. La ecuación (3.18), que se puede escribir como $r = e \left(\frac{p}{e} - r \cos f \right)$, nos dice que la longitud P_1P_2 es e veces la distancia de P_2 a L . Dicho de otro modo, *P_1 se mueve a lo largo de una cónica con excentricidad e y un foco en P_1* ; esto demuestra la primera ley de Kepler.

A continuación se hará un análisis geométrico de (3.18). La teoría de secciones cónicas nos dice que si $0 < e < 1$, la órbita es una *elipse*; si $e = 1$, es una *parábola*; si $e > 1$, la órbita cae en una de las ramas de una *hipérbola*; y si $e = 0$ ésta tiene la forma de un *círculo*.

Vale la pena tener presente un resultado de la teoría de cónicas, y es que en los casos $0 < e < 1$ y $e > 1$ el semieje mayor de la cónica correspondiente tiene una longitud a dada por $a|e^2 - 1| = p$. De esta manera, (3.18) adopta la forma

$$r = \frac{a|e^2 - 1|}{1 + e \cos f}. \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta que en todos los casos anteriores $c > 0$, y dado que $r^2 \dot{\theta} = c$ y $\dot{\theta} = \dot{f}$, se sigue que la órbita se trazará en la dirección en que f aumenta.

Estudieemos el caso en que $0 < e < 1$. A partir de ahora trabajaremos con un sistema coordenado con origen en P_1 , y con el eje de las abscisas coincidiendo con el eje excéntrico. En este marco, las coordenadas de la partícula P_2 están dadas por $(x, y) = (r \cos f, r \sin f)$. De la ecuación (3.19) y recordando que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, podemos ver lo siguiente:

$$r + er \cos f = \sqrt{x^2 + y^2} + ex = a(1 - e^2).$$

Luego de un poco de álgebra llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.20)$$

donde

$$x_0 = ae, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (3.21)$$

La ecuación (3.20) es precisamente la de una elipse (en su forma canónica), con semieje mayor a y semieje menor b , orientados en los ejes x e y respectivamente. Se encuentra, a partir de (3.21), que la excentricidad de la elipse es $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Es evidente también, que $|x_0| = ae$ es la distancia del centro de la elipse a cualquiera de los focos.

Vemos de la segunda ecuación en (3.21) (y recordando que $p = c^2/\mu$) que el momento angular, en el caso elíptico, es $c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$. Considerando la velocidad areolar (3.12) y el momento angular (3.11) tenemos que:

$$c = r^2 \dot{\theta} = 2\dot{A} = 2 \frac{\pi ab}{T} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)},$$

donde πab es el área total de la elipse, y T el período de una revolución completa de P_2 alrededor de P_1 . Entonces (utilizando la segunda ecuación de (3.21))

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\mu a(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^2 a^2 (1 - e^2)}{\mu a(1 - e^2)},$$

Llegamos finalmente a que el período de revolución y el semieje mayor están relacionados de la siguiente manera:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3, \quad (3.22)$$

es decir, *el cuadrado del período es proporcional a la tercera potencia del semeje mayor*; esto demuestra la tercera ley de Kepler.

Cuando $e > 1$, la ecuación polar de la órbita (3.19), adopta la forma $r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f}$. Recordando que $x = r \cos f$ y que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, vemos que:

$$r + er \cos f = \sqrt{x^2 + y^2} + ex = a(e^2 - 1).$$

Manipulando algebraicamente la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde

$$x_0 = ae, \quad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

que es la ecuación canónica de una hipérbola. Se tiene además que $|x_0| = ae$ es la distancia del centro a cualquiera de los focos (igual que en el caso elíptico).

Cuando $e = 1$, la órbita queda descrita por $r = \frac{p}{1 + \cos f}$. Se sigue de esta ecuación que

$$p = r + r \cos f = \sqrt{x^2 + y^2} + x.$$

Se sigue que $y^2 = -2px + p^2$, y despejando x

$$x = -\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2},$$

esta es la ecuación de una parábola en el plano (x, y) con vértice en el punto $(\frac{p}{2}, 0)$.

3.5. Relaciones entre las integrales primeras

La ecuación (3.18) expresa la geometría de la órbita en el problema de Kepler, pero no resuelve la ecuación diferencial de movimiento; aún falta determinar cuánto valen las coordenadas en función del tiempo, dadas las condiciones iniciales $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ para un cierto instante inicial. Considerando el sistema (3.10), vemos que cada una de las ecuaciones en éste representa tres ecuaciones escalares, de tal manera que el par constituye un sistema de orden seis, de la forma [Pol66]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{v}_1, \\ \dot{x}_2 = \dot{v}_2, \\ \dot{x}_3 = \dot{v}_3, \\ \dot{v}_1 = -\frac{\mu}{r^3}x_1, \\ \dot{v}_2 = -\frac{\mu}{r^3}x_2, \\ \dot{v}_3 = -\frac{\mu}{r^3}x_3, \end{cases}$$

donde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Regresando a lenguaje vectorial, se sigue que (3.10) tiene una única solución $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$ con valores iniciales $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ al tiempo $t = 0$.

En el caso de un campo de fuerzas central newtoniano, hemos encontrado tres integrales primeras del movimiento. Como su valor permanece constante para todo t , éste queda determinado por las condiciones iniciales, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{c}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}, \\ h &= \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dado que $\mathbf{c}, \mathbf{e}, h$ constituyen siete cantidades escalares, entonces las integrales primeras deben estar relacionadas entre sí. Vimos ya en la sección 3.4 que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = 0$, por lo que a lo más seis de las siete cantidades pueden ser independientes; de hecho hay otra relación posible, que permite reducir el número a cinco.

Para obtener esta relación, elevemos al cuadrado ambos lados de (3.16). Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0$, y utilizando la identidad $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}| = \sqrt{v^2 c^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})^2}$, llegamos a

$$\mu^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right)^2 = \mu^2 \left(e^2 + \frac{2}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} + 1 \right) = v^2 c^2.$$

Aplicando, en la expresión anterior, a (3.17) y a la integral de energía:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}, \tag{3.24}$$

obtenemos finalmente la nueva relación entre las integrales primeras:

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hc^2. \quad (3.25)$$

Según sea el caso, la relación anterior implica lo siguiente:

- Si $c = 0$, entonces $e = 1$.
- Si $e = 0$, entonces $h = -\mu^2/(2c^2) < 0$.
- Si $c \neq 0$, entonces $e < 1$, $e = 1$ o $e > 1$ de acuerdo a si $h < 0$, $h = 0$ o $h > 0$ respectivamente.

A partir del semieje mayor de la cónica $a|e^2 - 1| = p$ (que vimos en 3.4), una de las consecuencias de (3.25) es que

$$a = \frac{\mu}{2|h|}. \quad (3.26)$$

En conjunto con la integral de energía (3.24), obtenemos una forma bastante útil de expresar el cuadrado de la velocidad:

$$v^2 = \begin{cases} \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) & \text{si } h > 0; \\ \mu \left(\frac{2}{r} \right) & \text{si } h = 0; \\ \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) & \text{si } h < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

3.6. Cálculo de efemérides

Se le conoce como *cálculo de efemérides* al problema de determinar la posición de una partícula en la órbita, como función del tiempo. En la práctica es difícil dar la posición $\mathbf{r}(t)$ como una función explícita del tiempo. Un procedimiento común para resolver el problema, es cambiar del tiempo original t a un “tiempo artificial” u , mediante un cambio de variable $t = t(u)$. Este cambio de variable se elige de tal manera que sea sencillo ubicar a la partícula para un cierto valor u_1 de u . Para encontrar la posición de la partícula al tiempo t_1 bastará con resolver la ecuación $t_1 = t(u_1)$. A la u se le conoce en la literatura astronómica con el nombre de *anomalía excéntrica*. [Pol66]

Empecemos por definir u de tal manera que $r\dot{u}$ sea una constante k :

$$u = k \int_{t_p}^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \quad (3.28)$$

donde las constantes k y t_p serán determinadas más adelante.

Recordando la identidad $r^2v^2 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})^2 = (r\dot{r})^2 + c^2$, y haciendo uso de la integral de energía (3.24), obtenemos

$$(r\dot{r})^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2). \quad (3.29)$$

Dado que $\dot{r} = (dr/du)\dot{u} = (dr/du)(k/r)$, la ecuación (3.29) se convierte en

$$k^2 \left(\frac{dr}{du} \right)^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2). \quad (3.30)$$

Supongamos que $h \neq 0$ (además de $c \neq 0$). Vimos anteriormente que las órbitas son hiperbólicas cuando $h > 0$, y elípticas cuando $h < 0$. Nuevamente empezamos el análisis con (3.28) y (3.30). Esta vez escogemos $k^2 = 2|h|$, de donde $k^2 = \mu/a$, usando (3.26). Dividiendo entre k^2 , (3.30) adopta la forma

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \frac{ac^2}{\mu} = 2ar + \sigma(h)r^2,$$

donde $\sigma(h)$ denota el signo de la energía h ; $\sigma(h) = +1$ si $h > 0$, y $\sigma(h) = -1$ si $h < 0$. Si sumamos $\sigma(h)a^2$ en ambos lados, y usamos el hecho de que $c^2/\mu = a|e^2 - 1| = a(e^2 - 1)\sigma(h)$ (como vimos en la sección 3.4), obtenemos

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + a^2e^2\sigma(h) = \sigma(h)[a + \sigma(h)r]^2.$$

Definamos la función $\rho(u)$ como $eap(u) = a + \sigma(h)r$; ésta nos permite escribir a la ecuación anterior para dr/du como

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 - \sigma(h)\rho^2 = -\sigma(h).$$

Es fácil ver que, dejando a un lado las soluciones singulares $\rho = \pm 1$, esta última ecuación diferencial tiene por solución

$$\rho(u) = \begin{cases} \cosh(u + k_1) & \text{si } h > 0, \\ \cos(u + k_2) & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

La definición de u (3.28) nos dice que, cuando no se ha especificado a t_p , somos libres de elegir $k_1 = k_2 = 0$. A partir de la definición de $\rho(u)$, se muestra que

$$r(u) = a(1 - e \cos u) \quad \text{si } h < 0.$$

De acuerdo con (3.28) $kdt = rdu$, y ya que $u = 0$ cuando $t = t_p$, podemos integrar ambos lados para obtener $k(t - t_p) = \int_0^u rdu$. Sustituyendo las expresiones para $r(u)$ que acabamos de obtener, el resultado es

$$n(t - t_p) = u - e \sen u \quad \text{si } h < 0,$$

donde el coeficiente n está definido por $n = k/a = (\mu/a^3)^{1/2}$, y se le conoce con el nombre de *movimiento medio*. Esta ecuación es conocida en la literatura astronómica como la *ecuación de Kepler*. Para el caso elíptico, vimos en la sección 3.4, que la tercera ley de Kepler establece que $(2\pi/T)^2 = (\mu/a^3)^{1/2}$, por lo que el movimiento medio queda expresado por $n = 2\pi/T$.

Podemos entender mejor el significado de la anomalía excéntrica si consideramos el siguiente argumento, de naturaleza puramente geométrica. Haciendo referencia a la figura 3.4, tenemos que $P_1B = CB - CP_1 = a \cos u - ae$, y dado que $P_1B = r \cos f$, se sigue que

$$r \cos f = a(\cos u - e). \quad (3.31)$$

Haciendo uso de propiedades elementales de geometría, es fácil ver que $\frac{P_2B}{QB} = \frac{r \sin f}{a \sin u} = \frac{b}{a}$; se tiene entonces que

$$r \sen f = a\sqrt{1 - e^2} \sen u. \quad (3.32)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo P_1P_2B y usando las ecuaciones (3.31) y (3.32),

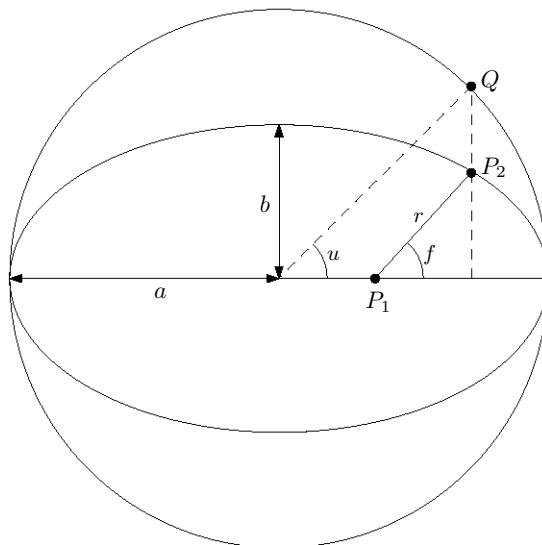


Figura 3.4: La anomalía excéntrica.

$$\begin{aligned}
 r^2 &= (P_1B)^2 + (P_2B)^2 \\
 &= r^2 \cos^2 f + r^2 \sin^2 f \\
 &= a^2(\cos u - e)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 u \\
 &= a^2 + a^2 e^2 \cos^2 u - 2a^2 e \cos u,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

lo que implica que

$$r = a(1 - e \cos u). \tag{3.34}$$

Consideremos ahora las conocidas identidades trigonométricas

$$\sin^2 \frac{f}{2} = \frac{1 - \cos f}{2}, \quad \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{1 + \cos f}{2}. \tag{3.35}$$

A partir de estas, y después de algo de álgebra, llegamos a

$$\begin{aligned}
 2r \sin^2 \frac{f}{2} &= a(1 + e)(1 - \cos u) \\
 2r \cos^2 \frac{f}{2} &= a(1 - e)(1 + \cos u).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Calculando la razón de ambas ecuaciones nos quedamos con

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2}, \tag{3.37}$$

que nos da a la anomalía verdadera como función de la anomalía excéntrica.

3.6.1. Expansión en serie de funciones de Bessel

Al estudiar el cálculo de efemérides, en el caso de órbitas elípticas llegamos a la ecuación de Kepler

$$M \equiv n(t - t_p) = u - e \sin u, \tag{3.38}$$

donde la cantidad M recibe el nombre de *anomalía media* [Pol66]. Vamos a estudiar la solución de esta ecuación. Si $0 < e < 1$, la función $u(M)$ definida por (3.38) tiene la propiedad de que $u(M) - M$ es periódica de período 2π en M y tiene derivada continua. Por lo tanto, puede desarrollarse en series de Fourier uniformemente convergentes [Cel10, Pol66], es decir,

$$u(M) - M = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kM) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(kM),$$

donde $a_k = 0$, por tratarse de una función impar. Si denotamos $b_k \equiv u_k$, los coeficientes de la serie son

$$u_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [u(M) - M] \sin(kM) dM.$$

Sustituyendo $u(M) - M = e \sin u$, podemos desarrollar los coeficientes u_k de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e \sin u \sin(kM) dM \\ &= -\frac{e}{\pi k} [\sin u \cos k(u - e \sin u)] + \frac{e}{\pi k} \int_0^{2\pi} \cos u \cos k(u - e \sin u) du \\ &= \frac{e}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos[(k+1)u - ke \sin u] du + \frac{e}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos[(k-1)u - ke \sin u] du. \end{aligned}$$

La anomalía excéntrica puede expresarse finalmente como

$$u(M) = M + e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke)] \sin kM,$$

donde $J_k(x)$ son las *funciones de Bessel* de orden k y argumento x , y están definidas por la relación

$$J_k(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\phi - x \sin \phi) d\phi.$$

3.7. Los parámetros orbitales

Hasta ahora hemos estudiado el problema de dos cuerpos que se atraen según las leyes de Newton en el plano. Si consideramos el movimiento en el espacio, las soluciones de las ecuaciones diferenciales de movimiento dependen de seis constantes de integración que se conocen como los elementos orbitales. De estas constantes, hasta ahora hemos introducido ocho de ellas: la energía h , el momento angular \mathbf{c} , el vector excéntrico \mathbf{e} y la época del paso por el pericentro t_p . No obstante, las relaciones que existen entre ellas reducen el número total de constantes independientes a seis [Góm00].

El problema de Kepler tiene tres grados de libertad, por lo que debemos considerar solamente seis constantes de movimiento; cinco de ellas se relacionan con las coordenadas y cantidades de movimiento de la partícula para dar una descripción de su órbita en el espacio $(i, \Omega, \omega, a, e)$ y la última concierne a la posición de la misma en el tiempo (T) . A este conjunto de valores se les denomina *parámetros orbitales* y daremos una breve descripción de ellos a continuación [OZ02, Pol66].

Supongamos el caso de una partícula girando alrededor de la Tierra. La partícula desarrolla

su movimiento en el plano orbital, la eclíptica; el ecuador de la Tierra también está contenido en un plano, y la línea que se forma de la intersección de ambos planos es la línea de nodos. En tanto que al ángulo que se forma entre el plano del ecuador y el plano orbital se le denomina *inclinación orbital* (i), y se mide desde el plano del ecuador tomando valores en el intervalo $[0, 2\pi]$.

La línea de nodos es cortada en dos puntos por la órbita elíptica: uno cuando la partícula va del polo norte al sur (baja), y el otro cuando va del polo sur al polo norte (sube); a este último se le conoce como el *nodo ascendente*.

Desde el equinoccio vernal (Υ) se traza una línea al centro de la Tierra; y al ángulo entre esta línea imaginaria y el nodo ascendente, medido desde el este, se le denomina *longitud del nodo ascendente* o *ascensión recta* (Ω).

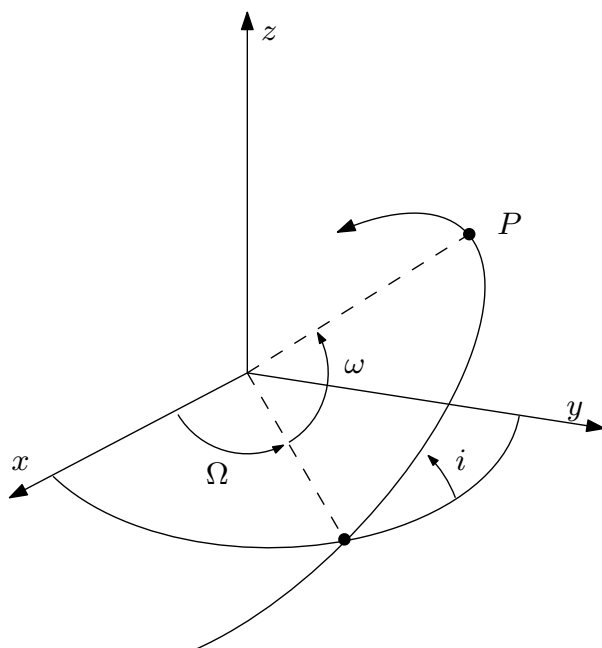


Figura 3.5: Esquema de los elementos orbitales.

Lo que nosotros necesitamos en este momento es orientar la órbita elíptica dentro del plano orbital. Para ello tomemos como punto de referencia al perigeo, en el cual la partícula está más próxima a la masa central y el punto en el cual está más alejada de ella, al que se denomina apogeo. Si trazamos una línea que una ambos puntos, ésta pasará también por el centro de la Tierra; a esta línea se le conoce como la línea de ápsides o eje mayor de la elipse. El ángulo formado entre la línea de ápsides y la línea de nodos es el *argumento del perigeo* (ω).

Para especificar el tamaño de la órbita utilizaremos el valor del semieje mayor de la elipse (a). Y para definir la forma de la elipse nos hace falta conocer su excentricidad (e).

Ya ubicamos a la partícula espacialmente, ahora debemos hacerlo temporalmente. Para hacerlo definimos el *período sideral* (T) como el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de la partícula por un punto fijo de la órbita. También es conveniente considerar el momento en el que la partícula pasa por el perigeo (t_p), así podremos determinar en qué punto de su trayectoria se encuentra.

EL PROBLEMA DE ESPÍN-ÓRBITA

*“The Moon shines bright: in such a night as this,
When the sweet wind did gently kiss the trees ...”*

— William Shakespeare

El movimiento de los planetas alrededor del Sol es descrito de forma bastante precisa por las leyes de Kepler, como vimos en el capítulo 3. Sin embargo, en primera aproximación el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra también se puede describir por la vía Kepleriana. En la observación del movimiento de la Luna, se encuentra, haciendo delicadas observaciones, que ésta no se mueve realmente sobre una elipse. La causa principal de esto es la fuerza gravitacional del Sol, y no fue sino hasta finales del siglo XIX que Hill estableció un método para poder tratar el problema de los tres cuerpos restringido.

Una característica no Kepleriana de la órbita de la Luna, que es lo suficientemente obvia para haber sido conocidas por los antiguos Griegos, es el hecho de que el pericentro de la Luna *precesa*, es decir que gira alrededor de la Tierra en la misma dirección que la Luna, de tal manera que completa un circuito cada 8.85 años. Los antiguos griegos también se dieron cuenta de que el nodo ascendente de la Luna (el punto en el que la Luna pasa por el plano fijo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol de norte a sur) *regresa* (es decir, que gira alrededor de la Tierra en dirección opuesta a la de la Luna) de modo tal que completa un circuito cada 18.6 años. Por supuesto que, de acuerdo con la teoría del problema de dos cuerpos, tanto el perigeo como el nodo ascendente de la Luna deben ser estacionarios.

Finalizando el siglo XVII, G.D. Cassini formuló tres leyes acerca del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, las cuales se pueden expresar de la siguiente manera:

1. La Luna rota alrededor de un eje principal en una resonancia sincrónica.
2. El eje de rotación y la perpendicular a la órbita forman un ángulo constante.
3. El eje de rotación, la perpendicular a la órbita y la perpendicular a la eclíptica se encuentran en un mismo plano.

En 1764, Lagrange ganó el premio de la Académie des Sciences por su trabajo dedicado a las libraciones de la Luna. Las libraciones son movimientos periódicos en el eje de la Luna que apunta hacia la Tierra, los cuales permiten observar más del 50 % de la superficie de la Luna en un determinado período de tiempo.

4.1. Dinámica alrededor de un planeta esférico

El principal objetivo de esta tesis es estudiar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, sin embargo, podemos ir un poco más lejos y generalizar la situación estudiando el movimiento

de un satélite alrededor de un planeta en el Sistema Solar. Consideremos el movimiento de un satélite rígido \mathcal{S} con una estructura triaxial¹, bajo la influencia gravitacional de un planeta esférico \mathcal{P} de masa M . Podemos tratar al planeta como un punto material, ya que posee simetría esférica. Asumiremos que [CC08, Cel10]:

1. \mathcal{S} se mueve en una órbita elíptica Kepleriana con semieje mayor a y excentricidad e (esto significa que las perturbaciones debido a otros cuerpos son despreciadas).
2. El eje de rotación coincide con el eje más pequeño del elipsoide (esto es, con el momento principal de inercia más grande).
3. El eje de rotación es perpendicular al plano orbital (la oblicuidad es cero).
4. Los efectos disipativos son despreciados.

Es conveniente analizar este movimiento en un marco de referencia cuyo origen siempre coincida con el centro de masa de \mathcal{S} , y al cual denotamos por \mathcal{O} . Podemos definir un sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) cuyos ejes estén alineados con los ejes principales de rotación de \mathcal{S} , y sean I_1, I_2, I_3 los momentos principales de inercia. Supongamos que $I_1 < I_2 < I_3$, lo que implica que el radio de \mathcal{S} alcanza sus valores máximo y mínimo en los puntos donde los ejes x_1 y x_3 (respectivamente) pasan por su superficie. En estas coordenadas el vector de posición de \mathcal{P} está dado por $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

El potencial gravitacional producido por el campo gravitacional de \mathcal{S} en \mathcal{P} está dado por

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_{|\mathcal{S}|} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}',$$

donde $|\mathcal{S}|$ representa el volumen de \mathcal{S} y \mathbf{r}' es el vector de posición de un punto \mathcal{Q} de \mathcal{S} .

Si r denota la distancia entre \mathcal{P} y \mathcal{O} , r' es la distancia \mathcal{OQ} y α es el ángulo formado por \mathcal{OP} y \mathcal{OQ} , entonces

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}. \quad (4.1)$$

Podemos expandir la cantidad $(1/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)$ en términos de los polinomios de Legendre P_n (ver apéndice B). Para hacerlo podemos proceder de la siguiente manera

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} \equiv \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

y de acuerdo con la fórmula general para el binomio de Newton, se tiene que [Vin07]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \alpha \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{6} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \alpha \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando de acuerdo a las potencias de $1/r$ se obtiene que

¹En otras palabras \mathcal{S} es un elipsoide no simétrico

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5}{2} \cos^3 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha \right) + \dots \right]. \quad (4.2)$$

Se puede ver de la expansión (4.2) que [Vin07]

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha).$$

Por lo tanto, podemos escribir el potencial como

$$U \equiv \sum_{n=0}^{\infty} U_n = -\frac{G}{r} \int_{|\mathcal{S}|} \rho(\mathbf{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) d^3 \mathbf{r}'. \quad (4.3)$$

Haciendo los cálculos explícitos para los primeros tres términos obtenemos²

$$U(\mathbf{r}) \simeq -\frac{GM}{r} - \frac{G(I_1 + I_2 + I_3)}{2r^3} + \frac{3G(I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2)}{2r^5}, \quad (4.4)$$

este resultado es conocido como la *fórmula de MacCullagh*, en honor a su descubridor, el matemático irlandés James MacCullagh [Fit12].

La fuerza gravitacional \mathbf{f} ejercida por \mathcal{S} en \mathcal{P} tiene las componentes

$$\begin{aligned} f_1 &= -M \frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ f_2 &= -M \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ f_3 &= -M \frac{\partial U}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La torca que actúa en \mathcal{P} , respecto del punto \mathcal{O} , está dada por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{f}$, y sus componentes son [Fit12]

$$\begin{aligned} \tau_1 &= x_2 f_3 - x_3 f_2 = -\frac{3GM(I_3 - I_2)x_3 x_2}{r^5}, \\ \tau_2 &= x_3 f_1 - x_1 f_3 = -\frac{3GM(I_1 - I_3)x_1 x_3}{r^5}, \\ \tau_3 &= x_1 f_2 - x_2 f_1 = -\frac{3GM(I_2 - I_1)x_2 x_1}{r^5}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Una torca igual en magnitud y opuesta en dirección actúa sobre \mathcal{S} . Las ecuaciones de Euler (que se estudiaron en la sección 2.3.3) para el movimiento de espín de \mathcal{S} toman la forma

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_3 \omega_2 &= -\tau_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 &= -\tau_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_2 \omega_1 &= -\tau_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ es el vector de velocidad angular asociado a la rotación de \mathcal{S} . Podemos suponer que el satélite está girando alrededor del eje x_3 (es decir, el eje principal de rotación

²La derivación de la fórmula de MacCullagh, se desarrolla en el apéndice D.

con el momento de inercia más grande), y que este eje es perpendicular al plano orbital (el cual está fijo por no haber perturbaciones debidas a otros cuerpos). Se sigue que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= (0, 0, \omega_3), \\ \mathbf{r} &= r(\cos \eta, \sin \eta, 0),\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde η es el ángulo de posición relativo de \mathcal{P} en el plano de la órbita kepleriana (ver Figura 4.1). Podemos escribir $\omega_3 = \dot{x}$, donde x es el ángulo subtendido entre el eje x_1 (el eje más largo del elipsoide) y una dirección fija (respecto a las estrellas distantes) en el plano de la órbita, por ejemplo la línea del perihelio.

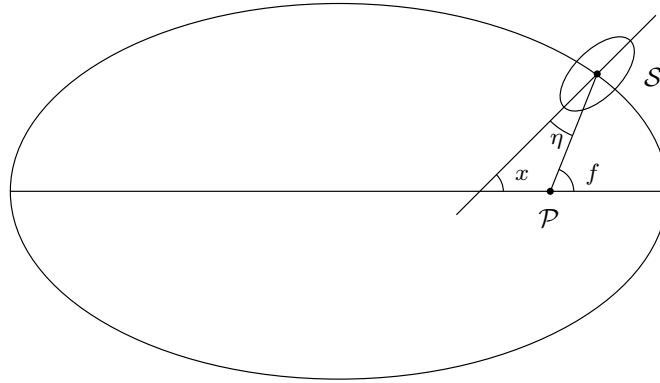


Figura 4.1: Configuración geométrica del problema de espín-órbita.

Convengamos que esta dirección sea paralela al eje mayor de la órbita de \mathcal{S} . En la Figura 4.1 se observa claramente que $\eta = f - x$, donde f es la anomalía verdadera de la órbita elíptica. Por lo tanto, de las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8) obtenemos

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2x - 2f) = 0.\tag{4.9}$$

Esta es la primera de las ecuaciones centrales de esta tesis, que resolveremos numéricamente en el Capítulo 5. Este es un sistema Hamiltoniano, y la demostración se puede consultar en [Cel10]. Es muy importante aclarar que en adelante nos referiremos a un sistema Hamiltoniano como *conservativo*. La razón es que no utilizamos la formulación Hamiltoniana en este trabajo. Sin embargo no hay que confundirse, el termino conservativo no se está utilizando para denotar la conservación de la energía física.

Adoptamos un sistema de unidades de medición tal que el movimiento medio es igual a uno, es decir, $n = (2\pi/T) = 1$. Definimos la *elipticidad ecuatorial* como

$$\varepsilon \equiv \frac{3}{2} \frac{I_2 - I_1}{I_3};$$

si este parámetro es cero ($\varepsilon = 0$), es decir en el caso en que haya simetría ecuatorial ($I_1 = I_2$), entonces la ecuación de movimiento es integrable de forma trivial. Para cuerpos como la Luna o Mercurio, la elipticidad ecuatorial es del orden de 10^{-4} y el sistema dinámico correspondiente es *cuasi-integrable*³.

El radio de la órbita y la anomalía verdadera son funciones del tiempo y se encuentran determinadas por las relaciones Keplerianas (3.34) y (3.37):

³El término cuasi-integrable simplemente se utiliza para referirnos a una pequeña perturbación del parámetro ε , sin meternos en complicaciones acerca de que tan pequeña sea esa perturbación.

$$r = a(1 - e \cos u),$$

$$f = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2} \right),$$

donde u se relaciona con la anomalía media M a través de la ecuación de Kepler (3.38):

$$M = u - e \sin u.$$

El radio orbital y la anomalía verdadera dependen de la excentricidad e . Cuando $e = 0$ se tiene que $r = a$ y $f = t + t_0$, para una constante t_0 adecuada. Esto significa que para órbitas circulares (4.9) se reduce a

$$\ddot{x} + \varepsilon \sin(2x - 2t - 2t_0) = 0,$$

que es una ecuación integrable.

4.2. Resonancias espín-órbita

Desviémonos un momento de la mecánica celeste para considerar un ejemplo de acústica. Un sonido es una vibración que se propaga en el aire a una cierta frecuencia ⁴. Si éste se encuentra con un obstáculo en su camino las vibraciones se transfieren a él, y el objeto comienza a oscilar a la misma frecuencia. Esto explica por qué nuestras ventanas tiemblan, al punto en que creemos que colapsarán, cuando cae un fuerte trueno en una noche de tormenta. A este fenómeno se le ha bautizado en física con el nombre de *resonancia*. Sin embargo, las oscilaciones no son en absoluto exclusivas de la acústica. Al contrario, ocupan una gran parte de los fenómenos estudiados en prácticamente todas las áreas de la ciencia, como en los latidos del corazón, los ciclos económicos, los ciclos depredador-presa en ecología, al estudiar los géiseres en geología, los disparos periódicos de las células en el cerebro, o en el movimiento de los cuerpos celestes.

Desde tiempos remotos el ser humano se ha percatado de la periodicidad que exhiben los cuerpos celestes. Desde la Tierra observamos que la mayoría de los cuerpos celestes se mueven, en primera aproximación, siguiendo trayectorias cerradas con una frecuencia regular. En este sentido los movimientos orbitales, por ejemplo de los planetas alrededor del Sol, pueden considerarse (desde un punto de vista matemático) como oscilaciones cuyo período es el tiempo que se necesita para completar una órbita.

Regresando al caso concerniente a esta tesis, diremos que ocurre una *resonancia espín-órbita* de orden $p : q$ cuando la razón de las derivadas respecto al tiempo de x y de la anomalía media M es igual a p/q , es decir

$$\frac{\dot{x}}{\dot{M}} = \frac{p}{q} \tag{4.10}$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.

La ecuación (4.10) significa que en el transcurso de q revoluciones alrededor de \mathcal{P} , el satélite \mathcal{S} lleva a cabo p rotaciones alrededor de su eje (de espín). Por *resonancia sincrónica* entendemos aquella que está caracterizada por $p = q = 1$, lo que implica que el satélite siempre da la misma cara hacia el planeta, ya que el período de rotación alrededor del eje de espín coincide con el período de revolución alrededor de \mathcal{P} . Este es el caso del movimiento de la Luna alrededor de la

⁴La frecuencia de una vibración se relaciona con el período de oscilación de la siguiente manera: mientras mayor sea la frecuencia, menor es el tiempo que se requiere para completar una oscilación completa.

Tierra, en donde sabemos, a partir de las observaciones astronómicas, que el período de rotación de la Luna alrededor de su eje es de 27.322 días.

Teniendo en cuenta la elevación del ángulo x en \mathbb{R} , podemos interpretar una resonancia espín-órbita de orden $p : q$, para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 0$, como una solución periódica $x(t)$ de la ecuación (4.9), esto es:

$$x(t + 2\pi q) = x(t) + 2\pi p \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{R}.$$

Las observaciones astronómicas muestran que un gran número de satélites del sistema solar se mueven en una órbita periódica sincronizada (i.e. resonancia 1:1), siempre dando la misma cara al planeta central. En el caso de Mercurio se observa que su órbita tiene una resonancia espín-órbita de 3:2, esto significa que completa tres rotaciones alrededor de su eje durante dos revoluciones en su órbita alrededor del Sol. También existen ejemplos de rotación caótica y órbitas cuasiperiódicas como el caso de Hyperion, ya que su eje de rotación se mueve caóticamente en el espacio y su movimiento no se encuentra en ninguna resonancia como las anteriores [CC08].

4.3. Cuerpos celestes oblatos

Hasta ahora hemos mantenido la suposición de que la Tierra es una esfera perfecta y, en cuanto a la gravedad respecta, un cuerpo esférico puede ser tratado matemáticamente como un punto material. En realidad ningún cuerpo celeste real tiene una forma completamente esférica. La razón principal es que los cuerpos rígidos son solo una idealización, una forma de atacar los fenómenos de la naturaleza en primera aproximación.

Si a un objeto masivo se le considera a gran distancia, con toda tosquedad se afirma que tan solo posee una masa M , sin entrar en mayores detalles acerca de cómo está distribuida en su volumen. De hecho, si el cuerpo se halla muy distante, se ve como un mero punto de masa en el espacio. Sin embargo, a medida que se mira más y más de cerca, el cuerpo comienza a exhibir su estructura. Por ejemplo, podrá aparecer ante los ojos del observador que no es esférico, sino que es más achatado de un lado que de otro. También comenzará a hacerse evidente que es más denso en ciertas regiones y menos denso en otras. Así pasa con la Tierra o la Luna, que a distancia parecen esféricas, pero que al acercarse a ellas se ve que están achatadas de los polos, pero más anchas en el ecuador, similares a un elipsoide de revolución⁵, es decir, tienen la forma de un geoide [Kau66, Vin07]. En 1712 Cassini realizó una medición, con una precisión de un arco de longitud, en la que concluyó erróneamente que la Tierra está alargada en los polos. En 1736 Maupertuis obtuvo el resultado correcto, verificando así las predicciones de Newton de que en verdad la Tierra está alargada en el ecuador.

El geoide se caracteriza matemáticamente por medio de su *elipticidad*, que definimos como [Kau66]

$$\epsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e},$$

donde R_p es el radio polar (a lo largo del eje de rotación) y R_e el radio ecuatorial (en el plano que biseca al geoide y que perpendicular al eje). Supongamos que $|\epsilon| \ll 1$, de tal forma que el geoide está muy cerca de ser una esfera. Si $\epsilon < 0$, entonces el geoide está ligeramente aplastado respecto al eje simetría, y se dice que el geoide es *oblato*. Así mismo, si $\epsilon > 0$, entonces el geoide está ligeramente alargado, en dirección de su eje de simetría, y se dice que el geoide es *prolato*. Si $\epsilon = 0$, entonces el geoide se reduce a una esfera.

⁵En realidad, si se observa con mayor cuidado, resulta que en realidad tiene la forma de una pera, que es más gruesa en su hemisferio sur que en el norte.

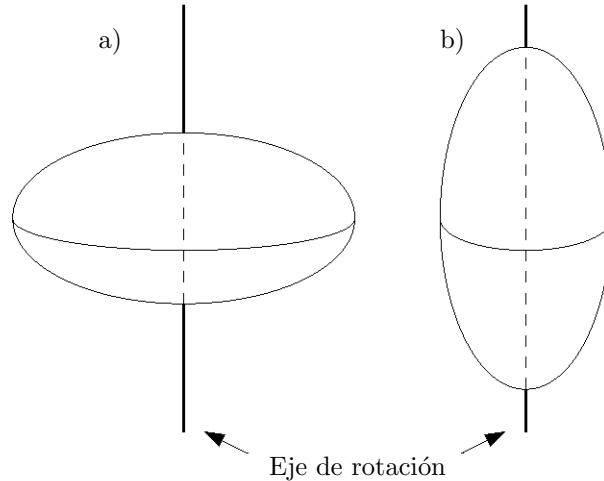


Figura 4.2: a) Geoide oblatado y b) geoide prolato.

Si pensamos que los cuerpos celestes (por ejemplo la Luna o la Tierra) se comportan como fluidos autogravitantes, es posible demostrar que por el simple hecho de estar girando alrededor de su propio eje éstos se alargan en la dirección del ecuador. La demostración se logra considerando la configuración de equilibrio de un cuerpo celeste autogravitante, compuesto de fluido incompresible, que gira continuamente y uniformemente alrededor de un eje fijo que pase por su centro de masa y que además coincida con su eje de simetría [Fit12].

La forma oblata de un planeta no solo se debe a los efectos de rotación, sino también al campo gravitacional de un satélite orbitando alrededor de éste. Esto se debe a las denominadas *fuerzas de marea*. Estas fuerzas se originan por la variación espacial del campo gravitacional en el interior del satélite, y actúan de tal manera que éste termina alargándose en dirección de la línea que une su centro con el del planeta y comprimiéndose en la dirección perpendicular, contribuyendo a la oblatez del satélite. Además la magnitud de la fuerza de marea aumenta considerablemente a medida que el satélite esté más cerca del planeta [Fit12].

Recordando el potencial de un cuerpo continuo dado por la ecuación (4.3), tenemos que para el caso de un geoide se cumple que $I_1 = I_2$. El potencial del geoide está dado hasta segundo orden):

$$U(\mathbf{r}) \simeq -\frac{GM}{r} - \frac{GMR_e^2}{r^3} J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \right), \quad (4.11)$$

donde

$$J_2 \equiv \frac{I_3 - I_1}{MR_e^2},$$

y el ángulo α se define de la misma manera que en la ecuación (4.1).

4.4. Disipación debido a las torcas de marea

Al escribir la ecuación (4.9) hemos omitido deliberadamente los efectos de disipación. Entre los términos disipativos considerados comúnmente, la contribución más importante se debe a que internamente el cuerpo celeste \mathcal{S} no es rígido, y se puede describir mediante un modelo de torcas de marea [Gol66, GP66, Mac64, Pea05].

Existen distintas expresiones en la literatura del tema, en este trabajo utilizamos una torca de mareas, $\mathcal{T}(\dot{x}; t)$, que depende linealmente en la velocidad angular relativa. Su derivación se

encuentra detallada en [Pea05]

$$\mathcal{T}(\dot{x}; t) = -K_d [L(e, t)\dot{x} - N(e, t)],$$

donde

$$L(e, t) = \frac{a^6}{r^6}, \quad N(e, t) = \frac{a^6}{r^6} \dot{f}.$$

Al coeficiente K_d se le nombra *constante disipativa*, y depende de las características físicas y orbitales del satélite. Para ser precisos, K_d toma la forma

$$K_d \equiv 3n \frac{k_2}{\xi Q} \left(\frac{R_e}{a} \right)^3 \frac{M}{m},$$

donde n es el movimiento medio, k_2 es el *numero de Love* (que depende de la estructura del satélite), Q recibe el nombre de *factor de calidad* y compara la frecuencia de oscilación del sistema con la razón de disipación de energía, ξ es una constante relativa a la estructura interna y es tal que $I_3 = \xi m R_e^2$, y R_e es el radio ecuatorial. Como en el caso anterior, M es la masa del cuerpo central \mathcal{P} y m es la masa del satélite \mathcal{S} . Las observaciones astronómicas sugieren que, para cuerpos como la Luna o Mercurio, la constante disipativa K_d es del orden de 10^{-8} .

Para derivar la torca de mareas que se cita en esta tesis, S.J. Peale [Pea05] utiliza el hecho de que hay un retardo en el tiempo entre el paso de \mathcal{S} por el pericentro y el alargamiento máximo del mismo, como se muestra en la figura 4.3. Además, los gradientes espaciales del campo gravitacional de \mathcal{P} producen un ligero alargamiento (por acción de las fuerzas de marea) en \mathcal{S} . Sin embargo, debido a efectos de fricción, este alargamiento no se encuentra alineado a lo largo de la línea que une los centros de masa de \mathcal{S} y de \mathcal{P} . De hecho, el máximo en el alargamiento debido a las fuerzas de marea se encuentra adelantado respecto a esta línea por un ángulo ψ como se muestra en la figura 4.3.



Figura 4.3: Origen de las torcas de marea

La expresión para la torca de mareas puede simplificarse asumiendo (como en [CL04]) que la dinámica esta gobernada esencialmente por los promedios de $L(e, t)$ y de $N(e, t)$ en un periodo orbital:

$$\bar{\mathcal{T}} \equiv \bar{\mathcal{T}}(\dot{x}) = -K_d [\bar{L}(e)\dot{x} - \bar{N}(e)], \quad (4.12)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{L}(e) &\equiv \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \right), \\ \bar{N}(e) &\equiv \frac{1}{(1-e^2)^6} \left(1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \right). \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite escribir la ecuación de movimiento del problema de espín-órbita con disipación:

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2x - 2f) = -K_d [\bar{L}(e)\dot{x} - \bar{N}(e)]. \quad (4.13)$$

Esta es la segunda de las ecuaciones centrales de esta tesis, que resolveremos numéricamente en el Capítulo 5. Este modelo no es Hamiltoniano [CC08, Cel10], y nos referiremos a ella como el modelo de espín-órbita *dissipativo*.

Haciendo unas ligeras manipulaciones algebraicas en las expresiones anteriores, podemos considerar la ecuación de movimiento [CC08]

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2x - 2f) = -\eta(e)[\dot{x} - \nu(e)], \quad (4.14)$$

donde $f = f_e(t)$ y $r = r_e(t)$ quedan determinadas por las relaciones Keplerianas (3.34), (3.37) y (3.38)

$$\eta(e) \equiv K_d \tilde{L}(e), \quad \nu(e) \equiv \frac{\tilde{N}(e)}{\tilde{L}(e)} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6}{1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4}.$$

La función $\eta(e)$ proporciona una medida de la intensidad de la disipación, mientras que la función $\nu(e)$ (la cual es una función monótona creciente de e y toma valores entre 1 y $+\infty$) desempeña el papel de una “frecuencia impulsora” (ver [CC08]).

Notemos que cuando $\varepsilon = 0$ pero $K_d \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación (4.14) es

$$x(t) = x(0) + \nu t + \frac{1 - e^{-\eta t}}{\eta} [v(0) - \nu],$$

donde $(x(0), v(0))$ denotan a la posición y velocidad iniciales respectivamente. Más aún, la solución particular

$$x(t) = x(0) + \nu t, \quad \dot{x}(t) = \nu,$$

a la ecuación (4.14), cuando $\varepsilon = 0$ pero $K_d \neq 0$, es un *atractor global*; si ν es un número irracional, dicho atractor es además *quasi-periódico* (ver [CC08]). La definición de atractor, junto con otras definiciones básicas de la teoría de sistemas dinámicos, se pueden consultar en el apéndice A.

4.5. Modelo discreto del planeta oblato

En esta sección se describe el problema de \mathcal{S} girando alrededor de un cuerpo oblato \mathcal{P} , modelando a éste como una masa central M_c , y dos masas perturbadoras M_δ ; se cumple además que la masa total de \mathcal{P} es $M = M_c + 2M_\delta$.

En este trabajo se construyó un modelo (susceptible de implementar en un programa de computadora) del planeta oblato colocando dos masas perturbativas, M_δ , en los extremos del cuerpo central \mathcal{P} de masa M_c , alineadas sobre el eje axial, representando así la no-homogeneidad en la distribución de masa del cuerpo que ejerce la fuerza atractora⁶ sobre el satélite \mathcal{S} , cuyo centro de masa está situado a una distancia r de M . Las masas M_δ están ubicadas a una distancia δ del cuerpo central, como se muestra en la figura 4.4.

El potencial en este caso es

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GM_c}{r} - \frac{GM_\delta}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|} - \frac{GM_\delta}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|}.$$

⁶Recordemos que la Tierra está achatada por los polos debido a su movimiento de rotación y a fuerzas de marea.

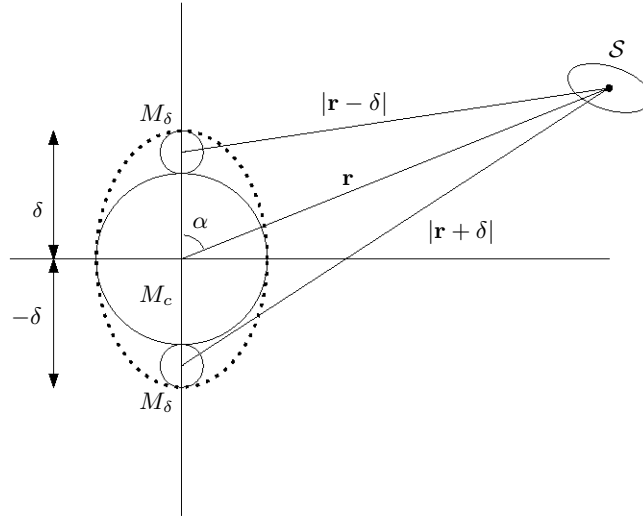


Figura 4.4: Modelo de \mathcal{P} como cuerpo oblatos.

Los denominadores de los términos perturbativos se pueden desarrollar usando la ley de los cosenos, como se muestra a continuación:

$$|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^{-1} = (r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos \alpha)^{-1/2} = r^{-1} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{r} \right) \cos \alpha \right] \right\}^{-1/2}.$$

Análogamente, para $|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^{-1}$ tenemos que

$$|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^{-1} = (r^2 + \delta^2 + 2r\delta \cos \alpha)^{-1/2} = r^{-1} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\delta}{r} \right) \cos \alpha \right] \right\}^{-1/2}.$$

Si hacemos el desarrollo en series de Taylor y sólo tomamos los dos primeros términos de la serie, en una primera aproximación tenemos que:

$$|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^{-1} \simeq r^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{r} \right) \cos \alpha \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{r} \right) \cos \alpha \right]^2 \right\},$$

y análogamente:

$$|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^{-1} \simeq r^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\delta}{r} \right) \cos \alpha \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\delta}{r} \right) \cos \alpha \right]^2 \right\}.$$

Por lo tanto

$$U(\mathbf{r}) \simeq -\frac{GM}{r} - \frac{GM\delta^2}{r^3} [1 - 3 \cos^2 \alpha] \quad (4.15)$$

En el caso de un cuerpo continuo con simetría axial, el potencial está dado por la ecuación

(4.11), que es

$$U(\mathbf{r}) \simeq -\frac{GM}{r} - \frac{GMR_e^2}{2r^3}(1 - 3\cos^2\alpha),$$

4.6. Dinámica alrededor de un cuerpo oblató

El potencial gravitacional producido por el campo gravitacional de \mathcal{S} en \mathcal{P} está dado por (ver figura 4.4)

$$U = \left(-\frac{GM}{r} - \frac{A}{2r^3} - \frac{3B}{2r^5} \right) + \left(-\frac{GM_\delta}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|} - \frac{A}{2|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^3} - \frac{3B}{2|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} \right) \\ + \left(-\frac{GM_\delta}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|} - \frac{A}{2|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^3} - \frac{3B}{2|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right),$$

donde $A = G(I_1 + I_2 + I_3)$ y $B = G(I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2)$. La fuerza gravitacional \mathbf{f} ejercida por \mathcal{S} en \mathcal{P} tiene entonces las componentes

$$f_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} (M_c U_1 + M_\delta U_2 + M_\delta U_3),$$

donde

$$U_1 = \left(-\frac{GM}{r} - \frac{A}{2r^3} - \frac{3B}{2r^5} \right), \\ U_2 = \left(-\frac{GM_\delta}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|} - \frac{A}{2|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^3} - \frac{3B}{2|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} \right), \\ U_3 = \left(-\frac{GM_\delta}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|} - \frac{A}{2|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^3} - \frac{3B}{2|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right).$$

Más aún, las componentes de la torca $\boldsymbol{\tau}$, actuando en \mathcal{P} respecto del punto \mathcal{O} son [Fit12] :

$$\tau_1 = x_2 f_3 - x_3 f_2 = -3G \left(\frac{M(I_3 - I_2)x_3x_2}{r^5} + \frac{\varepsilon(I_3 - I_2)x_3x_2}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{\varepsilon(I_3 - I_2)x_3x_2}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right), \\ \tau_2 = x_3 f_1 - x_1 f_3 = -3G \left(\frac{M(I_1 - I_3)x_1x_3}{r^5} + \frac{\varepsilon(I_1 - I_3)x_1x_3}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{\varepsilon(I_1 - I_3)x_1x_3}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right), \quad (4.16) \\ \tau_3 = x_1 f_2 - x_2 f_1 = -3G \left(\frac{M(I_2 - I_1)x_2x_1}{r^5} + \frac{\varepsilon(I_2 - I_1)x_2x_1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{\varepsilon(I_2 - I_1)x_2x_1}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right).$$

Una torca igual en magnitud y opuesta en dirección actúa sobre \mathcal{S} . Las ecuaciones de Euler para el movimiento de espín de \mathcal{S} toman la forma

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_3\omega_2 = -\tau_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 = -\tau_2, \quad (4.17) \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_2\omega_1 = -\tau_3.$$

donde $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$, por el mismo razonamiento que precede a la ecuación (4.8). Nos quedamos únicamente con la tercera ecuación de (4.17), pues $\boldsymbol{\omega}$ solo tiene componente ω_3

$$\begin{aligned}
I_3 \dot{\omega}_3 &= 3G(I_2 - I_1) \left[\frac{M_c}{r^5} + \frac{M_\delta}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{M_\delta}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right] x_1 x_2, \\
&= 3(I_2 - I_1) \left[\frac{(GM_c)}{r^3} + \frac{(GM_\delta)r^2}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{(GM_\delta)r^2}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right] \text{sen } \eta \cos \eta.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

donde, de acuerdo con la ecuación (4.8), tenemos que $x_1 = r \cos \eta$ y $x_2 = r \sin \eta$. Ahora, puesto que $GM_c = a^3$, asumiendo que M_c es considerablemente mayor que la masa de \mathcal{S} , entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 3 \frac{(I_2 - I_1)}{I_3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[1 + \left(\frac{M_\delta}{M_c} \right) r^5 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right) \right] \cos \eta \text{sen } \eta, \\
&= -\frac{3}{2} \frac{(I_2 - I_1)}{I_3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[1 + \left(\frac{M_\delta}{M_c} \right) r^5 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right) \right] \text{sen}(2x - 2f).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

El modelo conservativo queda como

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[1 + \left(\frac{M_\delta}{M_c} \right) r^5 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right) \right] \text{sen}(2x - 2f) = 0.$$

Agregando torcas de marea, se vuelve un modelo disipativo.

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[1 + \left(\frac{M_\delta}{M_c} \right) r^5 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right) \right] \text{sen}(2x - 2f) = \bar{\mathcal{T}}(\dot{x}), \tag{4.20}$$

donde la torca de mareas $\bar{\mathcal{T}}(\dot{x})$ es de la forma (4.12). Ésta es la tercera de las ecuaciones centrales de esta tesis, que resolveremos numéricamente en el Capítulo 5; este modelo también es *disipativo*, pues contiene el término de torcas de marea que contribuye a la disipación.

Con el paso del tiempo se observó que el comportamiento de las órbitas reales de los satélites son prácticamente keplerianas a tiempos cortos, sin embargo a tiempos largos existen pequeñas variaciones que hacen que el cuerpo parezca moverse sobre una órbita cuyos parámetros orbitales son ligeramente distintos a los de la órbita original [OZ02, Pol66]. Aplicando la teoría de promedios⁷ sobre cada uno de los parámetros orbitales, debemos hacer una integración sobre el tiempo para considerar el efecto a tiempos largos, con lo que al integrar desde un tiempo $t_0 = 0$ hasta un tiempo t , tenemos que el parámetro Ω , que es el la longitud del nodo ascendente definida en la sección 3.7, adopta la forma [OZ02]:

$$\Omega = -6\sqrt{(1 - e^2)^3} [G\pi M_\delta \delta^2 \cos i] \left(\frac{\mu^3}{c^7} \right) t.$$

En este trabajo únicamente se considera el efecto del parámetro orbital Ω , sin embargo hay otros parámetros orbitales que también presentan variaciones a tiempos largos como se muestra en [OZ02].

El eje de rotación de la Tierra precesa, es decir, la dirección del eje de rotación gira en círculos con un período de aproximadamente 25000 años. Esta precesión es causada por la atracción gravitacional del Sol en la protuberancia ecuatorial predicha por Newton.

El vector $\boldsymbol{\delta}$ (que aparece en (4.16)) en el marco de referencia que tiene la eclíptica del planeta \mathcal{P} alrededor del Sol es

⁷Para conocer los detalles completos de la teoría de promedios aplicada a problemas de Mecánica Celeste, se puede consultar la referencia [OZ02].

$$\boldsymbol{\delta} = \delta \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \text{sen } \alpha \end{pmatrix}.$$

Efectuando las transformaciones (rotaciones) adecuadas podemos expresar este vector en el marco de referencia que tiene el plano de la eclíptica de \mathcal{S} alrededor de \mathcal{P}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{36} & \text{sen}(\frac{\pi}{36}) \\ 0 & -\text{sen} \frac{\pi}{36} & \cos(\frac{\pi}{36}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \text{sen } \Omega & 0 \\ -\text{sen } \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t & 0 \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \cos \alpha \\ 0 \\ \delta \text{sen } \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{36}) & \text{sen}(\frac{\pi}{36}) \\ 0 & -\text{sen}(\frac{\pi}{36}) & \cos(\frac{\pi}{36}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \text{sen } \Omega & 0 \\ -\text{sen } \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \cos \beta t \cos \alpha \\ -\delta \text{sen } \beta t \cos \alpha \\ \delta \text{sen } \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{36}) & \text{sen}(\frac{\pi}{36}) \\ 0 & -\text{sen}(\frac{\pi}{36}) & \cos(\frac{\pi}{36}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(\cos \alpha \cos \Omega \cos \beta t - \cos \alpha \text{sen } \Omega \text{sen } \beta t) \\ -\delta(\cos \alpha \text{sen } \Omega \cos \beta t - \cos \alpha \cos \Omega \text{sen } \beta t) \\ \delta \text{sen } \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{\delta}$ en el marco de referencia que tiene el plano de la eclíptica de \mathcal{S} alrededor de \mathcal{P} es

$$\boldsymbol{\delta} = \delta \begin{pmatrix} \cos \alpha (\cos \Omega \cos \beta t - \text{sen } \Omega \text{sen } \beta t) \\ -\cos \alpha \cos(\frac{\pi}{36}) (\text{sen } \Omega \cos \beta t + \cos \Omega \text{sen } \beta t) + \text{sen } \alpha \text{sen}(\frac{\pi}{36}) \\ \cos \alpha \text{sen}(\frac{\pi}{36}) (\text{sen } \Omega \cos \beta t + \cos \Omega \text{sen } \beta t) + \text{sen } \alpha \cos(\frac{\pi}{36}) \end{pmatrix}.$$

Para concluir este capítulo simplemente notamos que las ecuaciones de movimiento (4.20) consisten únicamente de una perturbación agregada al caso descrito por (4.13); esta perturbación es de apariencia bastante simple y está dada por

$$\left(\frac{M_\delta}{M_c}\right) r^5 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}|^5} \right).$$

Se puede apreciar que depende únicamente de las masas perturbativas que agregamos, así como de su ubicación relativa.

SIMULACIONES NÚMERICAS DEL PROBLEMA DE ESPÍN-ÓRBITA

Cuando nos encontramos con una ecuación diferencial (o sistema dinámico), en la mayoría de los casos no es posible escribir la solución en términos de funciones elementales. Sin embargo, podemos aproximar a la solución para obtener información sobre sus propiedades. Una manera de obtener aproximaciones es con los métodos numéricos. Los métodos que presentaremos son muy sencillos de implementar en cualquier lenguaje de programación. Es indispensable tener en mente que los métodos numéricos no sustituyen el análisis pero sí son un complemento invaluable. No se puede tener la seguridad de que la solución numérica sea una buena aproximación al problema que uno quería resolver. Sin embargo, la combinación de métodos analíticos (exactos o aproximados) con los métodos numéricos permiten resolver problemas muy complejos y tener una idea muy completa de los posibles comportamientos de las soluciones.

Hay una gran cantidad de material bibliográfico en el que pueden consultarse los métodos aquí utilizados, referencias que van desde recetarios para implementar los métodos numéricos, hasta tratados donde se realiza un análisis teórico y abstracto de los mismos. Entre las principales referencias a las que se apega este capítulo están [GN06, Pan06, PTVF92].

5.1. Implementación del modelo de espín-orbita conservativo

La ecuación (4.9) es no lineal y no posee una solución analítica general. Afortunadamente esta ecuación se puede integrar numéricamente de manera relativamente directa. Asumiendo que la excentricidad de \mathcal{S} es pequeña ($0 < e \ll 1$) se sigue de las expansiones en serie alrededor de e de la f y de a/r que

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 &= 1 + 3e \cos M + \mathcal{O}(e^2) \\ f &= M + 2e \operatorname{sen} M + \mathcal{O}(e^2) \end{aligned}$$

donde M es la anomalía media de la órbita de \mathcal{S} . Nótese que $dM/dt = 1$. Por lo tanto, la ecuación (4.9) toma la forma

$$\ddot{x} = -\varepsilon \left[-\frac{e}{2} \operatorname{sen}(2x - M) + \operatorname{sen}(2x - 2M) + \frac{7e}{2} \operatorname{sen}(2x - 3M) \right],$$

donde se omiten los términos $\mathcal{O}(e^2)$. Supongamos que el paso por el pericentro de \mathcal{S} en su órbita es $t_p = 0$, con lo cual $M = nt = t$ (pues $n = 1$). En ese caso la ecuación anterior es

$$\ddot{x} = -\varepsilon \left[-\frac{e}{2} \operatorname{sen}(2x - t) + \operatorname{sen}(2x - 2t) + \frac{7e}{2} \operatorname{sen}(2x - 3t) \right], \quad (5.1)$$

Recordemos que este modelo en realidad es Hamiltoniano, pero en este trabajo diremos simplemente que es conservativo, de ahí que el tiempo aparezca en la ecuación diferencial, pues además se trata de un sistema no autónomo.

Podemos transformar la ecuación de segundo orden (5.1), en un sistema dinámico de primer orden de la forma (A.1):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -\varepsilon \left[-\frac{e}{2} \operatorname{sen}(2x - t) + \operatorname{sen}(2x - 2t) + \frac{7e}{2} \operatorname{sen}(2x - 3t) \right], \\ \frac{dx}{dt} &= y.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Para resolver numericamente este sistema, necesitamos encontrar una forma de discretizar el tiempo. En primera aproximación podemos pensar en usar el método de Euler, que consiste en hacer [GN06]:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &\simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}, \\ \frac{dx}{dt} &\simeq \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Aplicando el método de Euler al sistema (5.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= -\varepsilon \left[-\frac{e}{2} \operatorname{sen}(2x_i - t_i) + \operatorname{sen}(2x_i - 2t_i) + \frac{7e}{2} \operatorname{sen}(2x_i - 3t_i) \right] \Delta t + y_i, \\ x_{i+1} &= y_i \Delta t + x_i, \\ t_{i+1} &= t_i + \Delta t.\end{aligned}$$

Sin embargo, no es muy conveniente utilizar este método en problemas que involucren oscilaciones y periodicidad [GN06], como sucede justamente para el sistema (5.2). El uso de integradores de propósito general, como el método de Euler, para la solución de ecuaciones de movimiento provenientes de la dinámica hamiltoniana conduce a errores tales como la no conservación de las integrales de movimiento del sistema y la aparición de inestabilidades numéricas en la propagación haciendo que éste se mueva por trayectorias no físicas [VA09]. Por ejemplo, para los sistemas hamiltonianos, la estructura simpléctica del espacio fase se destruye cuando se usan estos esquemas de solución para las ecuaciones de movimiento, y las cantidades conservadas, tales como la energía en sistemas conservativos, presentan grandes variaciones cuando los tiempos de integración son grandes [VA09]. En esta tesis no se trata la dinámica hamiltoniana ni la estructura simpléctica del espacio fase, sin embargo una referencia muy útil que relaciona esta formulación de la mecánica y el análisis numérico es [HLW00].

A pesar de que el método de Euler no es simpléctico¹, y por lo tanto no es estable, existe una forma muy sencilla de modificar el método de Euler para hacerlo más estable en estos casos. La modificación se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= -\varepsilon \left[-\frac{e}{2} \operatorname{sen}(2x_i - t_i) + \operatorname{sen}(2x_i - 2t_i) + \frac{7e}{2} \operatorname{sen}(2x_i - 3t_i) \right] \Delta t + y_i, \\ x_{i+1} &= y_{i+1} \Delta t + x_i, \\ t_{i+1} &= t_i + \Delta t.\end{aligned}$$

A esta aproximación se le conoce como el método de Euler-Cromer. Al hacer esta simple modificación el método numérico se vuelve simpléctico² y estable en problemas que describan osci-

¹Un método numérico es simpléctico, en este caso, si conserva la forma diferencial $dx \wedge dy$ en el espacio fase.

²Se trata de hecho de una primera aproximación a un integrador simpléctico.

laciones periódicas [GN06]. A continuación se muestra una parte del código (escrito en Fortran 90) para ejemplificar como se implementó el modelo de espín-órbita utilizando el método de Euler-Cromer:

```

1 DO i = 1, n-1
2   aux = e/2.0
3   y(i+1) = y(i) - eps*(-aux*dsin(2*x(i)-t(i))+dsin(2*(x(i)-t(i))) &
4     + 7*aux*dsin(2*x(i)-3*t(i)))*dt
5   x(i+1) = x(i) + y(i+1)*dt
6   t(i+1) = t(i) + dt
7   IF (x(i+1) >= pi/2.0) x(i+1)=x(i+1)-pi
8   IF (x(i+1) <= -pi/2.0) x(i+1)=x(i+1)+pi
9 END DO

```

La solución del sistema dinámico (5.2) puede representarse como una trayectoria en el espacio (x, \dot{x}, t) . Además el sistema es determinista, es decir, una trayectoria que corresponde a un único conjunto de condiciones iniciales no puede intersectar a una segunda trayectoria que corresponda a otro conjunto de condiciones iniciales. Desafortunadamente, es difícil visualizar una trayectoria en tres dimensiones. Sin embargo, podemos simplificar el problema graficando únicamente aquellos puntos donde la trayectoria atraviesa un conjunto de planos equidistantes y normales al eje t . Estos planos son tales que $t = k(2\pi)$, donde k es un número entero. Este procedimiento es equivalente a proyectar la trayectoria en el plano (x, \dot{x}) cada vez que \mathcal{S} pasa por el pericentro de su órbita alrededor de \mathcal{P} .

La gráfica resultante se conoce como *sección de Poincaré*, y es una forma muy útil de estudiar y graficar el espacio fase de un sistema dinámico como el descrito por (5.2). En este caso la sección de Poincaré coincide con lo que se conoce como una *sección estroboscópica*. La razón es que esta sección de Poincaré puede pensarse como si se le tomara una fotografía al espacio fase cada vez que \mathcal{S} pasa por el pericentro, en analogía al papel que desempeña un estroboscopio, que toma fotografías de un sistema cada cierto intervalo de tiempo. Para construir un algoritmo numérico para graficar una sección estroboscópica debemos tener en cuenta que el tiempo aumenta en pasos de tamaño Δt . Así, tenemos que guardar un punto en un archivo de datos (para luego graficarlos) siempre que se cumpla la condición $|t - 2k\pi| < \Delta t/2$ [GN06]. A continuación incluimos la parte del código donde se implementó el algoritmo descrito para obtener el mapeo estroboscópico del problema de espín-órbita:

```

1 OPEN (UNIT=10, FILE='seccion.dat', POSITION='append')
2 DO k = 1, 500
3   DO i=1, n-1
4     IF (ABS(t(i) - (2*k*pi)) < dt/2.0) THEN
5       WRITE(10,*) x(i), y(i)
6     END IF
7   END DO
8 END DO

```

En la figura 5.1 se muestran las secciones de Poincaré del sistema (5.2) para distintos valores del parámetro ε . Se utilizó el valor de la excentricidad correspondiente a la Luna, es decir, $e = 0.0549$. Este valor de la excentricidad es el que se utilizó para realizar todas las simulaciones de esta tesis.

Las trayectorias que se dibujan en las secciones de Poincaré (ver figura 5.1) están muy cerca de aquellas que denominamos *curvas invariantes* (es decir, que para condiciones iniciales que inicien en una de ellas, los demás puntos de la evolución permanecerán en esas curvas). En este caso las curvas invariantes no son otra cosa que trayectorias cuasi-periódicas en la evolución del sistema dinámico, pues un punto en el espacio fase (en cualquiera de dichas curvas) vuelve a un punto arbitrariamente cercano al punto inicial, luego de intervalos regulares de tiempo. Por

otro lado los puntos al centro de las *islas* que se forman en la sección de Poincarè (ver figura 5.1) corresponden a las trayectorias periódicas de la evolución [Cel10]. A partir de la definición (4.10), concluimos que las regiones (que cualitativamente parecen *islas* al ver las secciones de Poincarè) alrededor de las trayectorias periódicas corresponden a las resonancias de espín-órbita 1/1, 3/2 y 1/2 respectivamente. Resulta que cuando se agrega el término disipativo (ese que tiene que ver con la torca de mareas) al sistema dinámico, el sistema evoluciona a esas regiones dependiendo de la condición inicial. En otras palabras, podemos pensar a las resonancias de espín-órbita como atractores (ver apéndice A) periódicos en el en la dinámica (siempre en el mapeo estroboscópico).

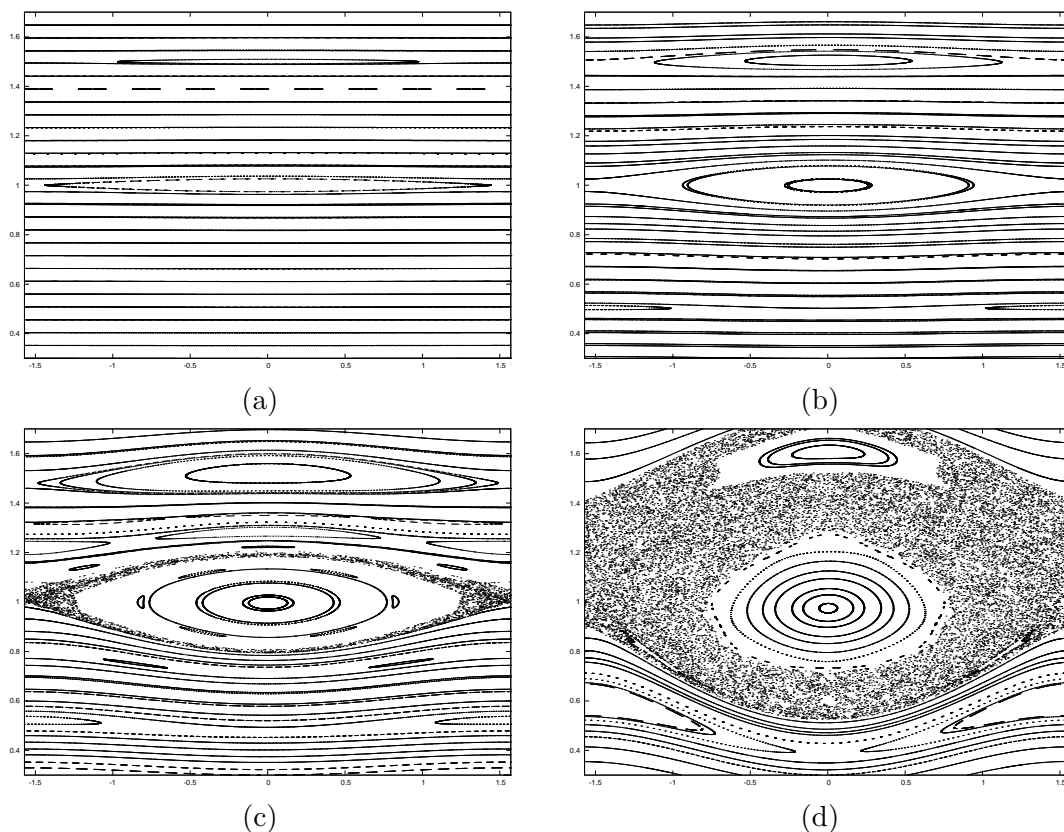


Figura 5.1: Secciones de Poincarè del sistema dinámico (5.2) para condiciones iniciales $x_0 = \pi$ y con y_0 variando en el intervalo $[0.8, 1.7]$, con paso en y de $1/200$. (a) $\varepsilon = 3.45 \times 10^{-4}$; (b) $\varepsilon = 5.0 \times 10^{-3}$; (c) 9.0×10^{-3} ; (d) $\varepsilon = 6.0 \times 10^{-2}$.

Observando la figura 5.1 es claro que, a medida que aumentamos el parámetro ε , van apareciendo cada vez más regiones de curvas cuasi-periódicas secundarias³. Sin embargo, para $y = \dot{x} = 1$, $y = \dot{x} = 1.5$ y $y = \dot{x} = 0.5$ se tienen las regiones de resonancia espín-órbita, esta es justamente la resonancia 1:1, que es el caso en el satélite siempre da la misma cara al cuerpo central.

5.2. Solución numérica de la ecuación de Kepler

Al estudiar el cálculo de efemérides, en el caso de órbitas elípticas llegamos a la ecuación de Kepler

³En sentido estricto no van apareciendo más de éstas regiones, sino que va aumentando su tamaño en el espacio fase a medida que aumenta el parámetro ε .

$$M \equiv n(t - t_p) = u - e \operatorname{sen} u, \quad (5.3)$$

donde a M le llamamos la *anomalía media*. Vamos a estudiar la solución de esta ecuación. En primer lugar, nos damos cuenta de que $k\pi \leq M \leq (k+1)\pi$, entonces la ecuación de Kepler tiene una solución u en este mismo intervalo. En efecto, si definimos

$$F(u) = u - e \operatorname{sen} u - M, \quad (5.4)$$

se verifica que $F(k\pi) = k\pi - M \leq 0$, y que $F((k+1)\pi) = (k+1)\pi - M \geq 0$.

Por otro lado, $u - e \operatorname{sen} u$ es una función monótona (estrictamente si $e \neq 1$) y, por tanto, la ecuación de Kepler tiene una única solución en este intervalo.

Para determinar los ceros de la ecuación de Kepler, basta con considerar el caso en que $M \in [0, \pi]$. Observemos, en primer lugar, que la ecuación (3.38) no se altera si a M y u les sumamos o restamos, simultáneamente, un múltiplo de 2π . Así entonces, dado M , le podemos sumar o restar un múltiplo de 2π , con el fin de que $-\pi \leq M \leq \pi$. Por otro lado, como u es una función impar de M , la ecuación no se altera si sustituimos simultáneamente M y u por $-M$ y $-u$. En conclusión, basta con estudiar la solución de (3.38) para $0 \leq M \leq \pi$.

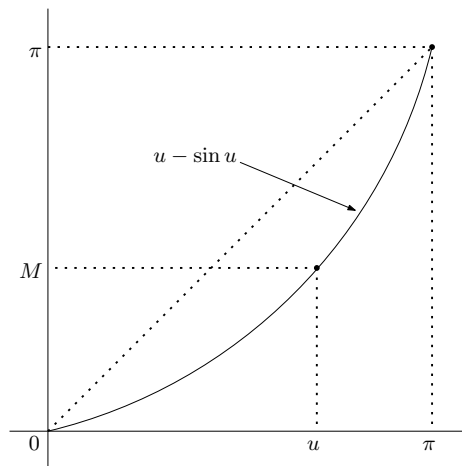


Figura 5.2: Gráfica de la función $u - e \operatorname{sen} u$, para $0 < e < 1$.

Escribamos la ecuación de Kepler como en (5.4) para encontrar una raíz⁴, es decir

$$F(u) = 0,$$

podemos aplicar un algoritmo iterativo simple de la forma

$$u_{k+1} = g(u_k).$$

La convergencia del algoritmo queda garantizada⁵, pues $|F'(u)| = e|\cos u| < 1$. Un algoritmo particularmente útil en este caso es el método de *Newton*; aplicándolo a la ecuación de Kepler obtenemos

$$u_{k+1} = u_k - \frac{u_k - e \operatorname{sen} u_k - M}{1 - e \cos u_k}.$$

⁴Frecuentemente nos encontramos con situaciones en las que necesitamos encontrar el valor de x tal que se cumpla la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es una función (explícita o implícita) de x . Llamamos a dicho valor de x una *raíz* o *cero* de la ecuación.

⁵Cuando la condición inicial es suficientemente cercana al punto fijo.

Para este algoritmo se verifica que

$$|u_{k+1} - u|^2 \leq \frac{e}{2(1-e)} |u_k - u|^2,$$

donde la convergencia cuadrática queda garantizada, excepto cuando $e = 1$. Una buena elección del valor inicial de u es $u_0 = \min(\pi, M - e)$. Para valores pequeños de M , o para valores de la excentricidad cercanos a la unidad, es necesario encontrar una mejor elección de u_0 .

El siguiente cuadro muestra un extracto de la subrutina de Fortran 90 utilizada para el cálculo de r y de f usando el método de Newton:

```

1 ! Normalizando el movimiento medio a uno, es decir (2*pi/P) = 1
2     M = t(i)
3     u0 = M
4     tol = 1.0E-14
5 ! Resolviendo la Ec. de Kepler por el Metodo de Newton
6     DO WHILE (abs(dif) .GT. tol)
7         u1 = u0 - (u0 - e * dsin(u0) - M) / (1 - e * dcos(u0))
8         dif = u1 - u0
9         u0 = u1
10    END DO
11 ! Calculo de la anomalia verdadera y de la distancia heliocentrica radial
12    CALL raiz(A1, B1, C1)
13    f(i) = 2 * atan(sqrt((1+e)/(1-e)) * tan(u0/2))
14    r(i) = asemi * (1 - e * cos(u0))

```

5.3. Implementación del modelo espín-órbita disipativo

A continuación se describe la forma en que puede resolverse numéricamente el problema de espín-órbita, trabajando primero con el modelo en que el cuerpo primario tiene simetría esférica. Podemos transformar la ecuación de segundo orden (4.13) en un sistema dinámico de primer orden de la forma (A.1):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon \left(\frac{a}{r}\right)^3 \operatorname{sen}(2x - 2f) - K_d(\bar{L}(e)y - \bar{N}(e)) \\ \frac{dx}{dt} &= y \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para resolver numéricamente (5.5) podemos utilizar el método de Euler-Cromer:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= - \left[\varepsilon \left(\frac{a}{r_i}\right)^3 \operatorname{sen}(2x_i - 2f_i) + K_d(\bar{L}(e)y_i - \bar{N}(e)) \right] \Delta t + y_i \\ x_{i+1} &= y_{i+1} \Delta t + x_i \\ t_{i+1} &= t_i + \Delta t \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, el método de Euler-Cromer es simpléctico (una primera aproximación de un integrador simpléctico) y estable en problemas que involucran oscilaciones periódicas.

A continuación se observa la parte del código en donde se muestra cómo se implementó el modelo de espín-órbita utilizando el método de Euler-Cromer (resolviendo las ecuaciones de Kepler con la subrutina descrita anteriormente):

```

1     IMPLICIT NONE
2     INTEGER :: N, i, j, k
3     REAL*8  :: asemi, Le, Ne
4     REAL*8  :: aux2, aux3, dt, tfin

```

```

5  REAL*8  :: fc , tc , xc , yc , jr
6  REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION (:) :: t , r , f
7  REAL*8, ALLOCATABLE, DIMENSION (:) :: x , y
8  tfin = 1*(2.*pi)
9  dt = 0.062831853
10 n = int(tfin/dt)
11 ALLOCATE(t(n),x(n),y(n),r(n),f(n))
12 DO i = 1,n-1
13     CALL kepler_EC()
14     aux2 = asemi/r(i)
15     aux3 = aux2**3
16     y(i+1) = y(i)-(eps*aux3*sin(2*(x(i)-f(i)))) + Kd*(Le*y(i)-Ne)*dt
17     x(i+1) = x(i)+y(i+1)*dt
18     t(i+1) = t(i)+dt
19 END DO

```

Se utilizó también un método de paso variable, el cual se basa en algoritmos de Runge–Kutta de ordenes 7 y 8 (método RK78). Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias se dividen comúnmente en dos clases: Métodos de paso fijo, y métodos de paso variable. Los métodos de paso variable necesitan realizar un procedimiento al inicio de cada paso de la integración, que requiere de información pasada de la simulación. Éstos son más eficientes que los métodos de paso simple; sin embargo, los métodos de paso simple son, por lo general, más fáciles de implementar [Jan74]. Se pueden consultar las referencias [Jan74, VA09], si se quieren conocer los detalles de los métodos Runge–Kutta de paso variable. La subrutina principal de este método fue proporcionada por el Dr. Arturo Olvera Chávez, y que fue desarrollada en el Depto. de Matemática i Anàlisi de la Universidad de Barcelona. En adelante nos referiremos a ésta como la subrutina RK78. El sistema (5.5) se implementó para poder realizar la integración con el método RK78.

Los algoritmos de integración numérica de la familia Runge–Kutta (RK) no tienen en cuenta las propiedades inherentes del sistema que integran; en otras palabras no son simplécticos. Aunque la implementación de los esquemas de paso variable disminuyen significativamente dichas variaciones, el tiempo de cómputo se incrementa drásticamente y no obstante, para intervalos de integración grandes, se observan crecimientos en la energía [VA09].

En [CC08, Cel10] se utiliza el método de Yoshida, que sí es simpléctico y por lo tanto más adecuado para resolver un problema que involucra un sistema Hamiltoniano, como el de espín–órbita. Sin embargo, el método RK78 nos proporciona información útil sobre los modelos de espín–órbita, ya que se realizan los cálculos a séptimo y octavo orden, a diferencia del método de Euler que es de primer orden.

El siguiente cuadro muestra un extracto del código en Fortran 90, en el cual se implementó el modelo de espín–órbita utilizando el método RK78:

```

1  cont = 1
2  DO WHILE(t0 .LT. tfin)
3      CALL RK78(t0 ,zx ,2 ,h78 ,hmi ,hmax ,err ,R78 ,BB78 ,FF78)
4      cont = cont + 1
5  END DO
6  CONTAINS
7  SUBROUTINE DERIV(te ,zx ,N ,zf)
8  IMPLICIT NONE
9  INTEGER :: N
10 REAL*8  :: te ,zx(2) ,zf(2)
11 REAL*8  :: xe ,ye ,aux1 ,aux2
12 CALL kepler_RK(te)
13 aux1 = (asemi/r)
14 aux2 = aux1**3
15 xe = zx(1)

```



```

16     ye      =  zx(2)
17     zf(1)  =  ye
18     zf(2)  =  -eps*aux2*dsin(2*(xe-f))-Kd*(Le*ye-Ne)
19     RETURN
20     END SUBROUTINE DERIV

```

En el código anterior aparece un llamado a la subrutina `RK78`, misma que, debido a su extensión, se incluye en el apéndice E. Hay también un llamado a `kepler_RK`. Ésta subrutina es la que resuelve las ecuaciones de Kepler, y que se explicó en la sección 5.2.

El modelo de espín-órbita perturbado (que obtuvimos agregando al potencial producido por el planeta \mathcal{P} la contribución de las dos masas M_δ) dado por la ecuación diferencial de segundo orden (4.20) se implementa de manera completamente análoga. Es importante mencionar que únicamente se implementó el método de Euler-Cromer en para integrar las ecuaciones de movimiento alrededor de un planeta \mathcal{P} oblató. Pues a pesar de que el método `RK78` es mucho más robusto que Euler-Cromer, se prefirió utilizar un método simpléctico para integrar este sistema dinámico [Jan74, VA09].

5.4. Simulaciones y análisis de resultados

Para poder encontrar resultados numéricos, tenemos que integrar las ecuaciones de movimiento. En este trabajo se reportan únicamente resultados obtenidos usando los métodos numéricos descritos en la sección anterior. Debemos dejar evolucionar el sistema un tiempo transitorio suficientemente largo, para asegurarnos de alcanzar el atractor esperado. Experimentalmente este tiempo debe ser $T_{K_d} \simeq 10^3/K_d$, este valor ha sido determinado para los casos de la Luna y Mercurio [CC08]. Según las observaciones astronómicas [CL04, Pea05], para los casos de la Luna y Mercurio, el valor de ε es del orden de 10^{-4} , mientras que K_d es debe ser del orden de 10^{-8} . Este valor de la constante de disipación K_d implica que se debería utilizar un tiempo transitorio del orden de $T_{K_d} \sim 10^{11}$, lo cual es una gran restricción en las capacidades de cómputo disponibles para la realización de esta tesis⁶. Por lo tanto, y siguiendo la línea planteada en [CC08], al realizar las simulaciones se utilizaron los valores de 10^{-4} y 10^{-5} para la constante disipativa K_d ⁷, manteniendo el valor de $\varepsilon = 10^{-4}$.

Se utilizó un método tipo Monte-Carlo para obtener la evolución de un conjunto condiciones iniciales $(x(0), \dot{x}(0))$, obtenidas con un generador de números pseudo-aleatorios, en el rectángulo compacto $\{0 \leq x \leq 2\pi, 0.3 \leq \dot{x} \leq 2.6\}$, y posteriormente observar qué porcentaje de estas condiciones iniciales evolucionan a los distintos atractores, que se pueden observar en el espacio fase del caso conservativo para el valor del parámetro $\varepsilon = 10^{-4}$. Se generaron 2000 condiciones iniciales para integrar las ecuaciones de movimiento cuando $K_d = 10^{-4}$, y 1000 condiciones iniciales para el caso $K_d = 10^{-5}$. Se realizaron las simulaciones únicamente en el caso en que $\varepsilon = 10^{-4}$. Es importante aclarar que para estudiar la evolución a las resonancias de espín-órbita se calculó el mapeo estroboscópico del sistema, es decir, únicamente se registraron los puntos de la evolución correspondientes al paso por el pericentro de la órbita kepleriana.

Para la obtención de resultados relevantes en nuestro estudio se realizó un proceso que consistió en la aplicación sistemática de varios algoritmos a los datos obtenidos en las simulaciones. Este proceso se describe a continuación únicamente para el par de condiciones iniciales $x(0) = 1.8784 \times 10^{-2}$ y $\dot{x} \equiv y = 7.2064 \times 10^{-1}$, quedando implícito que el proceso se realizó para cada una de las condiciones iniciales generadas aleatoriamente⁸.

⁶Como recurso computacional, se utilizó un cluster de CPU's en el IIMAS, para poder estudiar un conjunto amplio de condiciones iniciales.

⁷Estos valores del parámetro K_d tienen relevancia física para otros satélites del Sistema Solar.

⁸La elección de este par de condiciones iniciales fue completamente arbitraria, considerando que todas las condiciones generadas aleatoriamente se trataron de exactamente la misma manera.

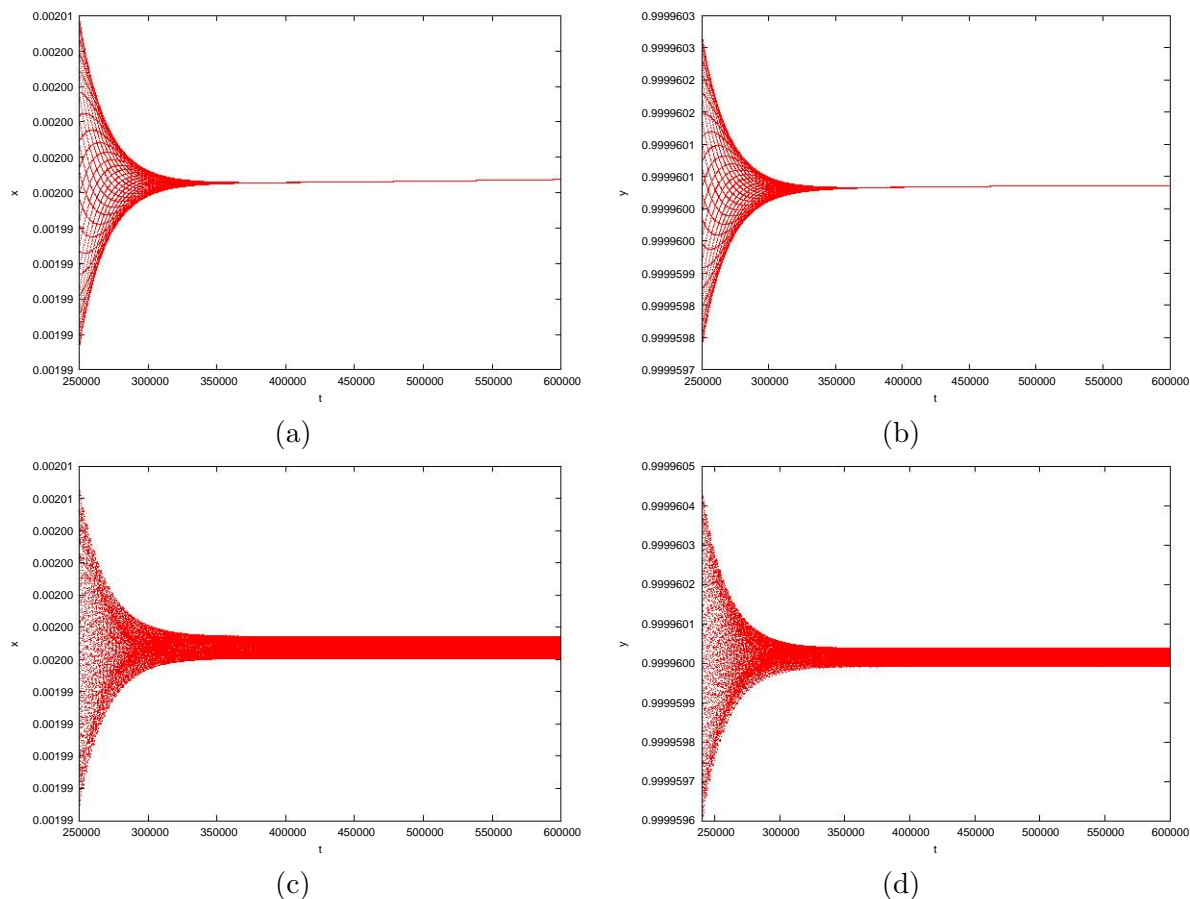


Figura 5.3: Mapeo estroboscópico del sistema (5.5), con $\varepsilon = 3.45 \times 10^{-4}$ y $K_d = 1.0 \times 10^{-4}$. (a) Evolución temporal estroboscópica de x , usando Euler-Cromer; (b) Evolución temporal estroboscópica de y , usando Euler-Cromer; (c) Evolución temporal estroboscópica de x , usando RK78; (d) Evolución temporal estroboscópica de y , usando RK78.

El tiempo total de las simulaciones cuando $K_d = 10^{-4}$ fue de $2\pi \times 10^5$, mientras que el tiempo de las simulaciones cuando $K_d = 10^{-5}$ fue de $2\pi \times 10^6$. Esto nos aseguró en ambos casos alcanzar la evolución al atractor del sistema dinámico. Recordemos que en la sección 4.1 definimos un sistema de unidades tal que el movimiento medio es igual a uno, es decir, $n = (2\pi/T) = 1$. Esto implica que el tiempo en nuestro sistema dinámico (esto aplica para las ecuaciones (4.9), (4.13) y (4.20)) es adimensional, y se mide de acuerdo a la relación 1 día = $\pi/14$.

En la figura 5.3 se puede ver, a manera de ejemplo, la evolución de un par de condiciones iniciales dentro del rectángulo $\{0 \leq x \leq 2\pi, 0.3 \leq \dot{x} \leq 2.6\}$. En la figura 5.3 no se gráfico para el tiempo total de la simulación. Se empezaron a registrar datos después de un tiempo transitorio $T/(1.0 \times 10^1)$, donde T es el tiempo total de la simulación, a fin de reducir la cantidad de puntos en la gráfica.

En la figura 5.4 se aprecia que la evolución temporal en la sección estroboscópica presenta oscilaciones que decaen hacia las resonancias espín-órbita. Después de obtener la evolución del sistema para cada par de condiciones iniciales, se interpolaron los máximos de los datos obtenidos mediante splines cúbicos (ver apéndice C.3). Esto nos permitió obtener los máximos de la curva interpolada, por los splines cúbicos, a los datos de la evolución temporal estroboscópica del sistema (5.5). El resultado de calcular los máximos, para el par de condiciones iniciales $x(0) = 1.8784 \times 10^{-2}$ y $\dot{x} \equiv y = 7.2064 \times 10^{-1}$, se muestra en la figura 5.5.

En la figura 5.3 se puede ver que para las simulaciones realizadas con el integrador RK78,

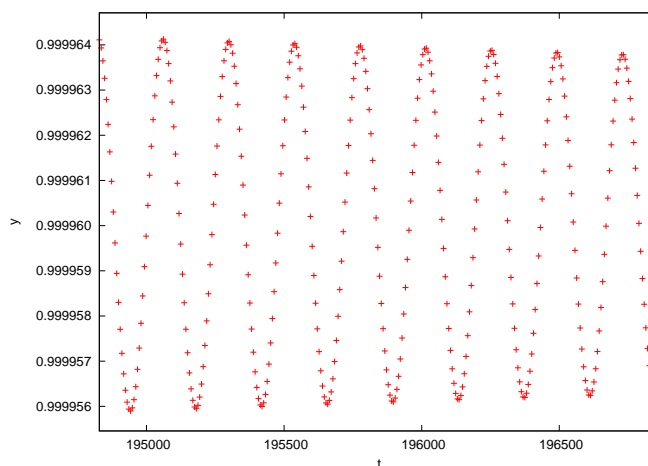


Figura 5.4: Evolución temporal estroboscópica de y , usando el método de Euler-Cromer. Se consideró el intervalo temporal [194500, 19700] para mostrar las oscilaciones que presenta la evolución. Los máximos fueron calculados por medio de splines cúbicos (ver apéndice C).

el decaimiento no llega hacia el atractor periódico, sino que queda una oscilación alrededor de éste. Así mismo, en la figura 5.6 vemos que al final de la recta hay una dispersión de puntos, que no caen en ésta. Todo indica que estos comportamientos son un indicativo de que el integrador RK78 no es simpléctico, y para tiempos largos la energía del sistema no se conserva en su totalidad, lo que da origen a trayectorias no físicas en el espacio fase.

Como se puede apreciar en la figura 5.5, los máximos de la evolución estroboscópica presentan un decaimiento, aparentemente asintótico, hacia el atractor. Al graficar los máximos con una escala logarítmica en el eje de ordenadas, podemos ajustar los datos (mediante una regresión lineal) a una recta, como se muestra en la figura 5.6. La pendiente de la recta ajustada nos da información sobre el decaimiento, que ahora podemos decir que es exponencial, del sistema hacia alguna de las resonancias espín-órbita. Las pendientes de las rectas ajustadas (que corresponden a la tasa de decaimiento del sistema hacia los atractores, que en este caso son las distintas resonancias) fueron para absolutamente todos los casos (en promedio) iguales a: -5.167×10^{-5} para la evolución de x , y -5.198×10^{-5} para la evolución de $y \equiv \dot{x}$.

En las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se muestran los porcentajes de condiciones iniciales que evolucionaron a las resonancias espín-órbita 1/1, 3/2 y 1/2. Las simulaciones se realizaron, como se mencionó anteriormente, para dos valores del parámetro K_d . Se incluyen también los resultados de la evolución del sistema perturbado (4.20).

K_d	Resonancia 1/1	Resonancia 3/2	Resonancia 1/2
10^{-4}	100.0 %	—	—
10^{-5}	99 %	0.8 %	0.2 %

Tabla 5.1: Para la dinámica alrededor de un cuerpo esférico, porcentaje de condiciones iniciales que evolucionan a cada una de las resonancias de espín-órbita; integrando con Euler-Cromer.

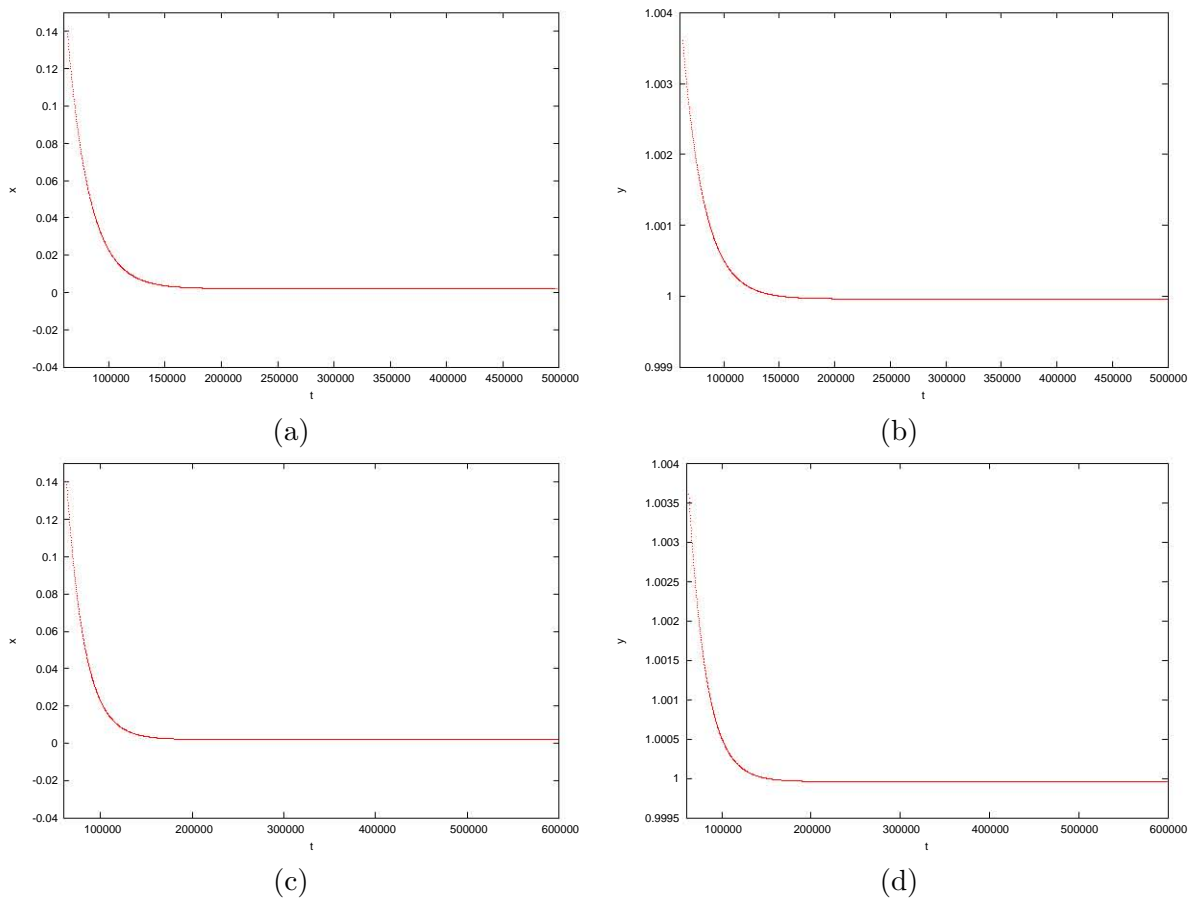


Figura 5.5: Gráfica que resulta de calcular los máximos de la evolución temporal estroboscópica de x y de y del sistema (5.5), con $\varepsilon = 1.45 \times 10^{-4}$ y $K_d = 1.0 \times 10^{-4}$. (a) y (b) Usando Euler-Cromer; (c) y (d) Usando RK78.

K_d	Resonancia 1/1	Resonancia 3/2	Resonancia 1/2
10^{-4}	100.0 %	—	—
10^{-5}	98.8 %	1.0 %	0.2 %

Tabla 5.2: Para la dinámica alrededor de un cuerpo esférico, porcentaje de condiciones iniciales que evolucionan a cada una de las resonancias de espín-órbita; integrando con RK78.

K_d	Resonancia 1/1	Resonancia 3/2	Resonancia 1/2
10^{-4}	100.0 %	—	—
10^{-5}	98.9 %	0.9 %	0.2 %

Tabla 5.3: Para la dinámica alrededor de un cuerpo oblató, porcentaje de condiciones iniciales que evolucionan a cada una de las resonancias de espín-órbita; integrando con Euler-Cromer.

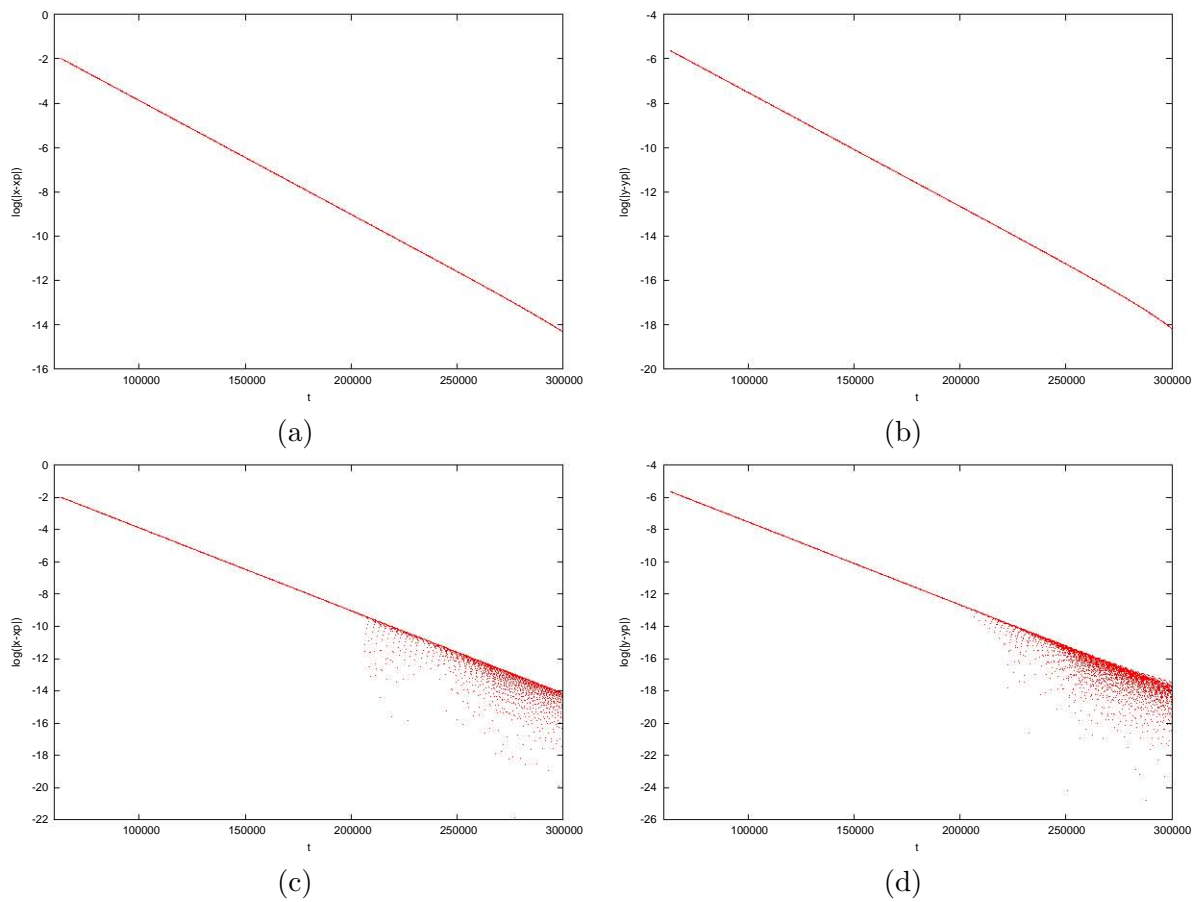


Figura 5.6: Gráfica en escala logarítmica de los máximos de la evolución temporal estroboscópica de x y de y del sistema (5.5), con $\varepsilon = 1.45 \times 10^{-4}$ y $K_d = 1.0 \times 10^{-4}$. En (a) y (b) se integra con Euler-Cromer; y en (c) y (d) se utiliza RK78.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado el movimiento de un satélite no-homogéneo alrededor de un cuerpo central, el cual puede ser puntual o no-homogéneo. El punto de partida consistió en derivar un modelo matemático que explique adecuadamente el caso astronómico; es por ello que antes se presentó la teoría de Kepler para el movimiento de dos cuerpos puntuales (problema de dos cuerpos).

Después se consideró el modelo planteado por A. Celletti y L. Chierchia [CC08] de un satélite triaxial alrededor de un planeta esférico. Este modelo es un sistema dinámico, es decir, un conjunto de ecuaciones diferenciales que requieren de condiciones iniciales para conocer su evolución en el tiempo. Para derivar el modelo se utilizó la descripción newtoniana del cuerpo rígido, y en consecuencia el modelo obtenido es conservativo. Posteriormente se agregó un término disipativo considerando las fuerzas y torcas de marea presentes en todos los cuerpos celestes, ya que ningún cuerpo es perfectamente rígido. La elasticidad inherente a todo cuerpo introduce forzosamente disipación debido a fricción interna. Es preciso que el satélite no sea simplemente una esfera para que ocurran las resonancias de espín-órbita. Las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de un sistema de este tipo consisten en un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden y dependientes del tiempo.

Los valores de los parámetros involucrados en estas ecuaciones rigen la dinámica y en particular determinan la existencia de atractores periódicos, que están relacionados con resonancias de espín-órbita, y que ocurren siempre que los períodos de revolución y rotación sean conmensurables. A partir de las simulaciones numéricas determinamos las condiciones iniciales para las que ocurren distintos tipos de resonancias espín-órbita. Las principales resonancias que observamos en este trabajo fueron 1:1, 3:2 y 1:2. La resonancia 1:1 es el caso que se da en el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, y el cual fue la motivación de estudiar este problema.

A partir de los resultados presentados en el capítulo anterior podemos ver que los parámetros ε y K_d , que corresponden a la elipticidad del satélite y a la disipación, juegan un papel de gran importancia para poder determinar las resonancias espín-órbita. Vemos que conforme va aumentando la elipticidad, va creciendo el tamaño (en el espacio fase) de las regiones de curvas cuasi-periódicas alrededor de las resonancias (o atractores periódicos en este caso), además de que aparecen también nuevas resonancias. En cuanto al parámetro de disipación K_d , los resultados estadísticos nos indican que, a medida que éste aumenta, hay mayor probabilidad de que el sistema sea atraído a resonancias distintas a la 1:1. Si el parámetro disipativo es de órdenes similares a los de los satélites del sistema solar (es decir, en el orden de 10^{-5} a 10^{-8}) prácticamente cualquier condición inicial evoluciona a la resonancia 1:1. Esto explica que la mayoría de los satélites en el sistema solar, se encuentren dando la misma cara al planeta central.

Algo que es interesante notar es que las estadísticas de las evoluciones, es decir el porcentaje de condiciones iniciales que fueron atraídas por las distintas resonancias, obtenidas para los distintos integradores (el Euler-Cromer y el RK78) no presentaron diferencias significativas. Y

puesto que se utilizó un método que podría considerarse como rudimentario (el Euler–Cromer) y un método mucho más sofisticado y robusto (como el RK78), pero no simpléctico, podemos concluir que otros integradores presentarán el mismo tipo de resultados, aunque por supuesto esto es una mera especulación de nuestra parte, y es necesario un análisis mucho más detallado. Este análisis se encuentra fuera de los alcances de esta tesis, pero vale la pena mencionar que actualmente se está realizando investigación con respecto a la implementación de métodos de Euler de ordenes mayores al problema de espín-órbita. Si el lector se encuentra interesado, se le invita a consultar la referencia [BDG14].

Una de las aportaciones que se realizaron en esta tesis, además de la implementación numérica del modelo de espín-órbita, consistió en agregar un término perturbativo, debido a que todo cuerpo celeste presenta un cierto grado de oblatez, es decir que no son esferas perfectas. Se modeló este efecto agregando dos pequeñas masas perturbativas a la masa puntual que componía originalmente al planeta central, obteniendo así un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento. Sin embargo, al hacer las simulaciones numéricas nos dimos cuenta que, eligiendo parámetros similares a los del sistema Luna–Tierra y con la Tierra oblata, los efectos de la perturbación no causan ningún efecto considerable.

Por supuesto que hay material cuyo estudio se quedó pendiente y que sería interesante abordar en trabajos futuros. Entrando un poco en el terreno de la especulación, y partiendo de que en nuestro estudio únicamente utilizamos parámetros del orden del sistema Luna–Tierra, podríamos considerar casos como el de satélites artificiales en sus órbitas alrededor de la Tierra. En algún punto, podría ser de interés estudiar estos casos, y dado que el radio de la órbita de un satélite es considerablemente menor al caso de la Luna, la oblatez de la Tierra puede tener un efecto mucho mayor en un satélite artificial oblato. En consecuencia, los resultados obtenidos podrían ser distintos en ese caso.

Algo más que podría ser de interés complicar el modelo que se realizó del planeta central, es decir que la no-homogeneidad del cuerpo central podría modelarse como un multipolo, es decir, un conjunto de masas puntuales en general, y no solo tres masas, como fue nuestro caso. Las uniones entre esas masas pueden ser resortes amortiguados, dando lugar a los términos disipativos correspondientes.

Apéndice A

SISTEMAS DINÁMICOS

La descripción de un problema físico está usualmente dada en términos de la evolución en el tiempo de un conjunto de coordenadas, las cuales pueden estar descritas como funciones continuas del tiempo o definidas en intervalos discretos en el tiempo. Un sistema dinámico nos da una descripción funcional de la solución de un problema físico o un modelo matemático que describa la situación física.

Podemos pensar en un sistema dinámico como la evolución en el tiempo de algún sistema físico, como el movimiento de unos cuantos planetas bajo la influencia de sus respectivas fuerzas gravitacionales. Usualmente queremos saber el destino del sistema en un tiempo muy largo, esto nos permite responder preguntas acerca de si los planetas chocarán eventualmente o permanecerán en órbitas estables [Per00] y [HSD04].

Matemáticamente hablando, un sistema dinámico es una función $\Phi(t, \mathbf{x})$, definida para toda $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$, la cual describe como se mueven los puntos $\mathbf{x} \in E$ con respecto al tiempo. Se pide además que la familia de mapeos $\Phi_t(\mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x})$ tenga las propiedades de un flujo.

Un *sistema dinámico* en E es un mapeo C^1

$$\Phi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$

donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , y si $\Phi_t(\mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x})$ entonces Φ_t satisface

1. $\Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in E$
2. $\Phi_t \circ \Phi_s(\mathbf{x}) = \Phi_{t+s}(\mathbf{x})$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in E$.

Se sigue de la definición que para cada $t \in \mathbb{R}$, Φ_t es un mapeo C^1 de E en E con inversa Φ_{-t} , también C^1 . En otras palabras, Φ_t con $t \in \mathbb{R}$ es una familia de difeomorfismos en E , que constituye un grupo conmutativo bajo la composición.

En general, si $\Phi(t, \mathbf{x})$ es un sistema dinámico en $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces la función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(t, \mathbf{x}) \right|_{t=0}$$

define un campo vectorial C^1 en E y para cada $\mathbf{x}_0 \in E$, $\Phi(t, \mathbf{x}_0)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}(0). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Podemos decir que un sistema dinámico continuo está descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución es función de una cantidad a la que llamaremos tiempo, y que varía continuamente en el conjunto de los números reales. El número de grados de libertad del sistema es el mínimo número de variables independientes con las que se puede caracterizar el sistema.

En general, un sistema dinámico continuo de n grados de libertad es descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.2})$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ es una función vectorial de \mathbb{R}^n en sí mismo. Se dice que el sistema es *autónomo* siempre que la función vectorial \mathbf{f} no dependa explícitamente del tiempo. En el caso en que sí dependa del tiempo, se dirá que el sistema es *no autónomo* y estará descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.3})$$

para alguna función vectorial $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$, que vaya de \mathbb{R}^{n+1} a \mathbb{R}^n . La solución de (A.2) o de (A.3) al tiempo t , con valor inicial \mathbf{x}_0 , se denota por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A.1. Estabilidad lineal

Consideremos el sistema dinámico descrito por la ecuación (A.2) con n grados de libertad, y sea J la matriz Jacobiana definida como

$$J(\mathbf{x}) \equiv D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Podemos estudiar la estabilidad del sistema no lineal (A.2) determinando sus puntos de equilibrio y describiendo el comportamiento cerca de ellos.

- Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio* de (A.2) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
- Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es *hiperbólico* si ninguno de los eigenvalores de la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tiene parte real igual a cero.

En la proximidad de un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 nos referimos a

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.4})$$

como el *sistema linealizado*.

Nótese que si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio de (A.2) y $\Phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo del sistema no lineal, entonces $\Phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, \mathbf{x}_0 es llamado un *punto fijo* del flujo Φ_t . También se le llama *cero*, punto crítico o *punto singular* del campo vectorial $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

A continuación se da una clasificación de los puntos de equilibrio de (A.2), de acuerdo a los signos de las partes reales de los eigenvalores de la matriz $J(\mathbf{x}_0)$.

- Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 de (A.2) es llamado un *atractor* si todos los eigenvalores de la matriz $J(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa.
- Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 de (A.2) es llamado un *repulsor* si todos los eigenvalores de $J(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real positiva.
- Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 de (A.2) es llamado un punto *silla* si es un punto hiperbólico y $J(\mathbf{x}_0)$ tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos un eigenvalor con parte real negativa.

- Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 de (A.2) es llamado *centro* si $J(\mathbf{x}_0)$ tiene eigenvalores con parte real nula.

Teorema (de Hartman-Grotman). *Considérese el sistema dinámico descrito por (A.2) y supóngase que admite un punto de equilibrio hiperbólico \mathbf{x}_0 . En una vecindad adecuada de \mathbf{x}_0 el sistema (A.2) es topológicamente equivalente al sistema linearizado.*

A.2. Sistemas conservativos y disipativos

Cualitativamente podemos decir que el sistema no lineal (A.2) es *conservativo* si el volumen del espacio fase se preserva, si el volumen se contrae o expande a lo largo del flujo decimos que el sistema es *disipativo*.

Cuando un flujo asociado a la evolución del sistema se interpreta como una transformación de \mathbf{x} a \mathbf{y} , representando las soluciones en los tiempos t_1 y t_2 , es decir,

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t_1) \rightarrow \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}(t_2) \tag{A.5}$$

entonces el volumen del espacio fase, que denotamos como V , cambia de acuerdo a la expresión

$$\int_V d\mathbf{y} = \int_V |det(J)| d\mathbf{x}, \tag{A.6}$$

donde J es la matriz de Jacobi de la transformación (A.5) y $det(J)$ es su determinante. Escribiendo (A.5) en la forma $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, para una función vectorial \mathbf{h} , se obtiene que J coincide con la matriz de Jacobi de \mathbf{h} , esto es $J = D\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Se dice que el sistema dinámico es conservativo si $|det(J)| = 1$, mientras que es contractivo si $|det(J)| < 1$ y expansivo si $|det(J)| > 1$.

Refiriéndonos a la ecuación (A.2), sea $\mathbf{F}_t = \Phi(t, \mathbf{x})$ el flujo al tiempo t con condición inicial \mathbf{x} , ya que $\mathbf{F}_t(\mathbf{x})_{t \in \mathbb{R}}$ es solución de (A.2), por definición se tiene que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{F}_t(\mathbf{x})).$$

Derivando respecto a \mathbf{x} obtenemos las llamadas *ecuaciones variacionales*

$$\frac{d}{dt} D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{F}_t(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}).$$

Sea $J_t \equiv D\mathbf{F}_t(\mathbf{x})$ y $A(t) \equiv \mathbf{f}'(\mathbf{F}_t(\mathbf{x}))$, entonces $\dot{J}_t = A(t)J_t$. De acuerdo con la fórmula de Liouville, denotando por $Tr(A)$ a la traza de la matriz A , se tiene que

$$\frac{d}{dt} (det(J_t)) = Tr(A(t)) \cdot det(J_t), \quad \text{donde} \quad det(J_0) = 1. \tag{A.7}$$

A partir de esta última expresión se puede mostrar que $det(J_t) = e^{\int_0^t Tr(A(s)) ds}$ y que el sistema es disipativo y contractivo si el volumen del espacio fase disminuye con el tiempo, es decir que $Tr(A(t)) < 0$ para cualquier $t > 0$. Si hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$ en la ecuación (A.6) obtenemos que $J_t = J$, de tal manera que $det(J_t) = det(J)$. En particular, el sistema es conservativo si $det(J_t) = 1$.

A.3. Atractores y cuencas de atracción

En el marco de la teoría de sistemas dinámicos un concepto relevante es el de *atractor*; cualitativamente se define como el conjunto al que evoluciona un sistema dinámico. Una definición más precisa es la siguiente:

Para un flujo continuo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ asociado a (A.1), el conjunto ω -*limite* que corresponde a la condición inicial \mathbf{x}_0 se define como

$$\omega(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe una sucesión } \{t_k\} \rightarrow \infty \text{ tal que} \\ \Phi(t_k; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x} \text{ cuando } k \rightarrow \infty \}.$$

Un atractor es un conjunto ω -*limite* que además tiene la propiedad de atraer a un conjunto, con medida distinta de cero, de condiciones iniciales. Si consideramos un sistema dinámico que admita un atractor, la *cuenca de atracción* correspondiente es el conjunto de condiciones iniciales que tienden al atractor conforme transcurre el tiempo.

Apéndice B

POLINOMIOS DE LEGENDRE

Se les conoce como *polinomios de Legendre*, en honor a Adrien Marie Legendre (1752-1833), quien en 1783 publicó su trabajo sobre la determinación de las órbitas de los cometas y en el cuál los propuso. La cantidad de textos en donde se encuentra un tratamiento de los polinomios de Legendre es, simple y llanamente, inmensa. En este apéndice se sigue el tema de acuerdo a la referencia [Vin07].

La familia se genera mediante la *fórmula de Rodrigues*:

$$P_n \equiv \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.1})$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} n = 0; & \quad P_0(x) = 1 \\ n = 1; & \quad P_1(x) = x \\ n = 2; & \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ n = 3; & \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ n = 4; & \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ n = 5; & \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

Si se sustituye la variable x por $\cos \theta'$ se obtiene precisamente la familia de términos cenitales en los cuales se descompone (4.2).

Sin entrar en mayores detalles a continuación se exhiben, sin demostración, algunas propiedades importantes de los polinomios de Legendre. El lector interesado en profundizar sobre este tópico puede acudir a alguno de los muchos textos que han sido publicados sobre el tema de las funciones especiales.

Se puede demostrar que toda función continua y con derivadas continuas de cualquier orden se puede expresar en términos de los polinomios de Legendre, pues estos forman un conjunto completo. Por lo tanto, dada una función $f(x)$, se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad (\text{B.2})$$

donde las a_n son ciertos coeficientes constantes.

Además, los polinomios de Legendre son funciones ortogonales, pues satisfacen la propiedad de que en el intervalo $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}, \quad (\text{B.3})$$

donde la cantidad δ_{nm} es la *delta de Kronecker*.

Utilizando la propiedad de ortogonalidad (B.3) en la expansión (B.2) se pueden calcular los valores de a_n . Si $f(x)$ es conocida, multiplicamos ambos lados de (B.2) por $P_m(x)$, obteniendo así

$$f(x)P_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)P_m(x).$$

Integrando ambos lados de -1 a 1 y usando la propiedad (B.3), obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 a_n P_n(x)P_m(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{2n+1} \delta_{nm} \\ &= \frac{2a_m}{2m+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada uno de los coeficientes a_n se puede calcular a partir de la función $f(x)$ original y de los polinomios de Legendre, esto es,

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx.$$

Apéndice C

INTERPOLACIÓN

Constantemente nos encontramos con situaciones en las que es necesario interpolar un conjunto discreto de datos o ajustarlos en alguna curva. La interpolación se necesita cuando queremos inferir información local a partir de un conjunto de datos. Existen muchas formas de definir las funciones de interpolación, lo que da origen a un gran número de métodos (polinomios de interpolación de Newton, polinomios de interpolación de Lagrange, interpolación de Hermite, etc.). Sin embargo, nos centraremos exclusivamente en dos tipos de interpolación:

1. Los polinomios de interpolación de Lagrange.
2. La interpolación por splines.

En este apéndice se desarrolla el tema de interpolación siguiendo la exposición y notación de la referencia [Pan06].

C.1. Interpolación lineal

Consideremos un conjunto discreto de datos obtenidos a partir de una función, también discreta, de la forma $f_i = f(x_i)$ con $i = 0, 1, \dots, n$. La forma más simple de obtener una aproximación de $f(x)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es construir una línea recta entre los puntos x_i y x_{i+1} , entonces la función $f(x)$ queda dada por

$$f(x) = f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(f_{i+1} - f_i) + \Delta f(x). \quad (\text{C.1})$$

Esta aproximación no es suficientemente precisa en la mayoría de los casos, pero sirve para empezar a entender otras formas de interpolación. De hecho, cualquier valor de $f(x)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es igual a la suma de la interpolación lineal y una contribución cuadrática igual a cero en x_i y en x_{i+1} . Esto significa que el error $\Delta f(x)$ en la interpolación lineal es

$$\Delta f(x) = \frac{\gamma}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad (\text{C.2})$$

donde γ es un parámetro que tiene que ver con la forma específica de $f(x)$. Si hacemos pasar una parábola por $f(x_i)$, $f(a)$ y $f(x_{i+1})$, es posible mostrar que la cuadratura es

$$\gamma = f''(a)$$

con $a \in [x_i, x_{i+1}]$; siempre y cuando la derivada k -ésima de $f(x)$ exista para toda k , en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Este es el resultado de la expansión de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = a$, con la condición de que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k > 2$. El error máximo en la ecuación (C.1) está entonces acotado por

$$|\Delta f(x)| \leq \frac{\gamma_1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2,$$

donde $\gamma_1 = \max[|f''(x)|]$. La cota superior del error en la ecuación anterior se obtiene de la ecuación (C.2), sustituyendo γ por γ_1 y resolviendo $d\Delta f(x)/dx = 0$ para x . Una manera de mejorar la precisión de la interpolación lineal es reduciendo el intervalo $h = x_{i+1} - x_i$, lo cual no siempre resulta ser práctico.

C.2. Interpolación de Lagrange

En el caso de la interpolación lineal, discutido en la sección anterior, la función interpolada pasa por los dos puntos usados en la interpolación. Es natural pensar que si utilizamos tres puntos, podremos construir un polinomio cuadrático que pase por los tres, esta vez con un error del orden de h^3 . A fin de obtener una fórmula de interpolación que generalice este proceso, pasando por $n + 1$ puntos del conjunto de datos, reescribimos la ecuación (C.1) en la forma simétrica

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} + \Delta f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} f_j p_{1j}(x) + \Delta f(x), \end{aligned}$$

donde

$$p_{1j}(x) = \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

con $k \neq j$. Considerando nuevamente un conjunto discreto de datos obtenidos a partir de una función discreta, de la forma $f_i = f(x_i)$ con $i = 0, 1, \dots, n$. Podemos entonces generalizar la expresión para una curva de orden n que pase por los $n + 1$ puntos,

$$f(x) = \sum_{j=0}^n f_j p_{nj}(x) + \Delta f(x), \quad (\text{C.3})$$

donde $p_{nj}(x)$ está dada por

$$p_{nj}(x) = \prod_{k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

En otras palabras, se cumple que $\Delta f(x_i) = 0$ en todos los puntos del conjunto de datos. Siguiendo un argumento similar al de la interpolación lineal en términos de la expansión de Taylor, se puede mostrar que el error en la interpolación de Lagrange de orden n es

$$\Delta f(x) = \frac{\gamma}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad (\text{C.4})$$

donde $\gamma = f^{(n+1)}(a)$, con $a \in [x_0, x_n]$. Nótese que $f(a)$ es un punto por el que pasa una curva de orden $n + 1$, la cual también pasa por todos los $f(x_i)$ con $i = 0, 1, \dots, n$. En consecuencia, el error máximo queda acotado por

$$|\Delta f(x)| \leq \frac{\gamma_n}{4(n+1)} h^{n+1} \quad (\text{C.5})$$

donde $\gamma_n = \max[|f^{(n+1)}(x)|]$ con $x \in [x_0, x_n]$. Además h es el más grande de todos los $h_i =$

$x_{i+1} - x_i$. La cota superior (C.5) se obtiene reemplazando γ por γ_n en la ecuación (C.4) y luego maximizando los pares $(x - x_0)(x - x_n)$, $(x - x_1)(x - x_{n-1})$, \dots , y $(x - x_{(n-1)/2})(x - x_{(n+1)/2})$ para $n + 1$ par. Para $n + 1$ impar, se puede escoger el valor máximo nh para el $(x - x_i)$ que no se encuentre apareado. La ecuación (C.3) se puede describir como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \Delta f(x),$$

donde a_k se obtiene al expandir $p_{nj}(x)$ en la ecuación (C.3). No está de más mencionar que la interpolación de Lagrange se reduce al caso lineal para $n = 1$.

C.3. Interpolación por funciones spline

En muchos casos, nos encontramos con un conjunto de datos que varía rápidamente en el intervalo de interés, entonces no existe un polinomio que se ajuste de manera global a los datos. Sin embargo, podremos ajustar polinomios localmente por pedazos y conectarlos de manera suave.

Supongamos que intentamos crear una función spline que aproxime un conjunto discreto de datos $f_i = f(x_i)$, con $i = 0, 1, \dots, n$. Podemos usar un polinomio de orden m de la forma

$$p_i(x) = \sum_{k=0}^m c_{ik} x^k$$

para aproximar $f(x)$ en el intervalo $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Los coeficientes c_{ik} quedan determinados a partir de las condiciones de suavidad

$$p_i^{(l)}(x_{i+1}) = p_{i+1}^{(l)}(x_{i+1}) \quad \text{con } l = 0, 1, \dots, m - 1.$$

en los puntos que no están en la frontera. El superíndice (l) se usa aquí para denotar la l -ésima derivada respecto de la variable x . Estas condiciones junto con los valores $p_i(x_i) = f_i$ proporcionan $(m + 1)(n - 1)$ ecuaciones, así que aún se necesitan $m + 1$ ecuaciones a fin de obtener todos los $(m + 1)n$ coeficientes c_{ik} . Es fácil ver que dos de estas ecuaciones son $p_0(x_0) = f_0$ y $p_{n-1}(x_n) = f_n$. Las $m - 1$ ecuaciones restantes salen de la elección de algunas de las derivadas $p_0^{(l)}(x_0)$ y $p_{n-1}^{(l)}(x_n)$ para $l = m - 1, m - 2, \dots$. Una de las elecciones más comunes es la de igualar a cero las derivadas del orden más alto en ambos extremos, a esto se le conoce como *spline natural*.

La función spline más utilizada es el *spline cúbico*, esto es cuando $m = 3$. En este caso, el número de ecuaciones que se necesitan de las derivadas de los polinomios en los puntos frontera es $m - 1 = 2$. En el caso cúbico, el spline natural está dado por la elección de $p_0''(x_0)$ y $p_{n-1}''(x_n)$.

Para construir el spline cúbico, podemos empezar con la interpolación lineal de la derivada de segundo orden en $[x_i, x_{i+1}]$:

$$p_i''(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} [(x - x_i)p_{i+1}'' - (x - x_{i+1})p_i'']$$

donde $p_i'' = p_i''(x_i) = p_{i-1}''(x_i)$ y $p_{i+1}'' = p_{i+1}''(x_{i+1}) = p_i''(x_{i+1})$. Si integramos la ecuación anterior dos veces y usamos que $p_i(x_i) = f_i$ y $p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$, entonces

$$p_i(x) = \alpha_i(x - x_i)^3 + \beta_i(x - x_{i+1})^3 + \gamma_i(x - x_i) + \eta_i(x - x_{i+1}), \quad (\text{C.6})$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{p''_{i+1}}{6h_i}, \\ \beta_i &= -\frac{p''_i}{6h_i}, \\ \gamma_i &= \frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i p''_{i+1}}{6}, \\ \eta_i &= \frac{h_i p''_i}{6} - \frac{f_i}{h_i},\end{aligned}$$

con $h_i = x_{i+1} - x_i$. Así que si encontramos todas las p''_i , encontramos el spline. Aplicando la condición

$$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$$

al polinomio de la ecuación (C.6), tenemos que

$$h_{i-1}p''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)p''_i + h_i p''_{i+1} = 6 \left(\frac{g_i}{h_i} - \frac{g_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

donde $g_i = f_{i+1} - f_i$. Este es un sistema ecuaciones lineales con $n - 1$ incógnitas p''_i , con $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Nótese que los valores en los extremos $p''_0 = p''_n = 0$. Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en forma matricial como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} d_1 & h_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_1 & d_2 & h_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-3} & d_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-2} & d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p''_1 \\ p''_2 \\ \vdots \\ p''_{n-2} \\ p''_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

donde $d_i = 2(h_{i-1} + h_i)$ y $b_i = 6(g_i/h_i - g_{i-1}/h_{i-1})$. De forma equivalente, pero más compacta, se tiene que

$$\mathbf{A}p'' = \mathbf{b}.$$

La matriz de coeficientes \mathbf{A} es real, simétrica y tridiagonal con elementos

$$A_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j, \\ h_i & \text{si } i = j - 1, \\ h_{i-1} & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Debido a la simplicidad de esta matriz, se puede resolver el sistema de ecuaciones de manera bastante directa. En general, una matriz cuadrada \mathbf{A} de $m \times m$ puede descomponerse en el producto de una matriz triangular inferior \mathbf{L} y una matriz triangular superior \mathbf{U} , esto es,

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}, \tag{C.7}$$

con $L_{ij} = 0$ para $i < j$, y $U_{ij} = 0$ para $i > j$. Podemos elegir ya sea $L_{ii} = 1$ o $U_{ii} = 1$. Este esquema se conoce como descomposición LU . A la elección de $L_{ii} = 1$ se le conoce como factorización de Doolittle, alternativamente se conoce como factorización de Crout a la elección $U_{ii} = 1$. En este trabajo consideramos únicamente la factorización de Crout. Para una matriz

tridiagonal \mathbf{A} con

$$A_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j, \\ e_i & \text{si } i = j - 1, \\ c_{i-1} & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

las matrices \mathbf{L} y \mathbf{U} tienen formas muy sencillas, y están dadas por

$$L_{ij} = \begin{cases} w_i & \text{si } i = j, \\ v_{i-1} & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

y

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ t_i & \text{si } i = j - 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se puede ver claramente una relación entre los elementos de \mathbf{L} y de \mathbf{U} y las cantidades d_i , c_i y e_i si hacemos el producto de \mathbf{L} con \mathbf{U} y comparamos ambos lados de la ecuación (C.7). Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} v_i &= c_i, \\ t_i &= e_i/w_i, \\ w_i &= d_i - v_{i-1}t_{i-1}, \end{aligned}$$

donde $w_1 = d_1$. La solución de la ecuación lineal $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ se obtiene mediante sustituciones hacia adelante y hacia atrás, ya que

$$\mathbf{Az} = \mathbf{LUz} = \mathbf{Ly} = \mathbf{b}.$$

Primero podemos resolver $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ y posteriormente $\mathbf{Uz} = \mathbf{y}$ con

$$\begin{aligned} y_i &= (b_i - v_{i-1}y_{i-1})/w_i, \\ z_i &= y_i - t_i z_{i+1}, \end{aligned}$$

donde $y_1 = b_1/w_1$ y $z_m = y_m$.

Apéndice D

DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DE MacCULLAGH

Una versión de la derivación de la fórmula de MacCullagh, en donde se considera un cuerpo \mathcal{S} compuesto de partículas discretas, se puede encontrar en [Fit12]. Aquí realizamos la derivación para un cuerpo continuo.

Consideremos el cuerpo rígido \mathcal{S} con una estructura triaxial, bajo la influencia gravitacional de una partícula \mathcal{P} , y con todas las suposiciones que se mencionan en el la sección 4.1. El potencial gravitacional producido por el campo gravitacional de \mathcal{S} en \mathcal{P} esta dado por (de acuerdo con la ecuación (4.3))

$$U \equiv \sum_{n=0}^{\infty} U_n = -\frac{G}{r} \int_{|\mathcal{S}|} \rho(\mathbf{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \alpha) d^3 \mathbf{r}'.$$

donde $|\mathcal{S}|$ representa el volumen de \mathcal{S} y \mathbf{r}' es el vector de posición de un punto \mathcal{Q} de \mathcal{S} , r denota la distancia entre \mathcal{P} y \mathcal{O} , r' es la distancia \mathcal{OQ} y α es el ángulo formado por \mathcal{OP} y \mathcal{OQ} , entonces

$$U_0 = -\frac{GM}{r}$$

donde $M = \int_{|\mathcal{S}|} dm = \int_{|\mathcal{S}|} \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$ es la masa total de la distribución.

Por otra parte, como estamos considerando que el movimiento se da en un marco de referencia cuyo origen \mathcal{O} coincide con el centro de masa de \mathcal{S} , se sigue que

$$\int_{|\mathcal{S}|} x'_1 \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_{|\mathcal{S}|} x'_2 \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_{|\mathcal{S}|} x'_3 \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = 0, \quad (\text{D.1})$$

Supongamos que los ejes coinciden con los ejes principales de rotación de la distribución, entonces

$$\int_{|\mathcal{S}|} (x'_2 x'_3) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_{|\mathcal{S}|} (x'_1 x'_3) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_{|\mathcal{S}|} (x'_1 x'_2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = 0; \quad (\text{D.2})$$

y además los momentos principales de inercia de la distribución son (de acuerdo con (2.13)):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|\mathcal{S}|} (x_2'^2 + x_3'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \\ I_2 &= \int_{|\mathcal{S}|} (x_1'^2 + x_3'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \\ I_3 &= \int_{|\mathcal{S}|} (x_1'^2 + x_2'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\frac{G}{r} \int_{|S|} \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha d^3 \mathbf{r}' \\
&= -\frac{G}{r} \int_{|S|} \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \cos \alpha d^3 \mathbf{r}' \\
&= -\frac{G}{r} \int_{|S|} \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{x'_1 x_1 + x'_2 x_2 + x'_3 x_3}{r^2} \right) \cos \alpha d^3 \mathbf{r}',
\end{aligned}$$

donde se han utilizado las ecuaciones (D.1). Por lo tanto

$$U_1 = 0$$

El potencial (hasta segundo orden) entonces toma la forma

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} \int_{|S|} r'^2 (2 - 3 \sin^2 \alpha) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

Calculando ahora el segundo término del potencial (U_2), usando la expresión del polinomio de Legendre de segundo orde del apéndice B:

$$\begin{aligned}
U_2 &= -\frac{G}{r} \int_{|S|} \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \alpha) d^3 \mathbf{r}' \\
&= -\frac{G}{2r^3} \int_{|S|} \rho(\mathbf{r}') r'^2 (2 - 3 \sin^2 \alpha) d^3 \mathbf{r}' \\
&= -\frac{G}{2r^3} \left[2 \int_{|S|} r'^2 \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' - 3 \int_{|S|} (r'^2 \sin^2 \alpha) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \right].
\end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones (D.3), podemos ver que

$$\begin{aligned}
2 \int_{|S|} r^2 dm &= \int_{|S|} (x_2^2 + x_3^2) dm + \int_{|S|} (x_1^2 + x_3^2) dm + \int_{|S|} (x_1^2 + x_2^2) dm \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

donde $dm = \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{|S|} (r'^2 \sin^2 \alpha) dm &= \int_{|S|} \frac{r^2 r'^2 \sin^2 \alpha}{r^2} dm \\
&= \int_{|S|} \frac{r^2 r'^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{r^2} dm \\
&= \int_{|S|} \frac{r^2 r'^2}{r^2} dm - \int_{|S|} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} dm \\
&= \int_{|S|} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)}{r^2} dm - \int_{|S|} \frac{(x'_1 x_1 + x'_2 x_2 + x'_3 x_3)^2}{r^2} dm \\
&= \int_{|S|} \frac{(x_2'^2 + x_3'^2)x_1^2 + (x_1'^2 + x_3'^2)x_2^2 + (x_1'^2 + x_2'^2)x_3^2}{r^2} dm \\
&= \frac{I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2}{r^2}.
\end{aligned}$$

donde se han utilizado las ecuaciones (D.2). Se tiene entonces que

$$U_2 = -\frac{G}{2r^3} \left[(I_1 + I_2 + I_3) - \frac{3}{r^2} (I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2) \right]$$

Por lo tanto, la fórmula de MacCullagh se puede escribir como

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G(I_1 + I_2 + I_3)}{2r^3} + \frac{3G(I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2)}{2r^5}. \quad (\text{D.4})$$

Apéndice E

SUBROUTINA RK78

El siguiente cuadro muestra el código en Fortran 90, que contiene el método RK78:

```
1  SUBROUTINE RK78(X,Y,N,H,HMI,HMA,E1,R,B,F)
2  IMPLICIT NONE
3  INTEGER N,J,L,K,J1,JK,II
4  REAL*8 X,Y(N),HMI,HMA,E1,H,R(13,N),B(N),F(N)
5  REAL*8 A,BET,D,DD,E3
6  DATA II/0/
7  IF(II.NE.0) GO TO 9
8  II=1
9  ALFA(1)=0.D0
10 ALFA(2)=2.D0/27.D0
11 ALFA(3)=1.D0/9.D0
12 ALFA(4)=1.D0/6.D0
13 ALFA(5)=5.D0/12.D0
14 ALFA(6)=.5D0
15 ALFA(7)=5.D0/6.D0
16 ALFA(8)=1.D0/6.D0
17 ALFA(9)=2.D0/3.D0
18 ALFA(10)=1.D0/3.D0
19 ALFA(11)=1.D0
20 ALFA(12)=0.D0
21 ALFA(13)=1.D0
22 BETA(1)=0.D0
23 BETA(2)=2.D0/27.D0
24 BETA(3)=1.D0/36.D0
25 BETA(4)=1.D0/12.D0
26 BETA(5)=1.D0/24.D0
27 BETA(6)=0.D0
28 BETA(7)=1.D0/8.D0
29 BETA(8)=5.D0/12.D0
30 BETA(9)=0.D0
31 BETA(10)=-25.D0/16.D0
32 BETA(11)=-BETA(10)
33 BETA(12)=.5D-1
34 BETA(13)=0.D0
35 BETA(14)=0.D0
36 BETA(15)=.25D0
37 BETA(16)=.2D0
38 BETA(17)=-25.D0/108.D0
39 BETA(18)=0.D0
40 BETA(19)=0.D0
41 BETA(20)=125.D0/108.D0
42 BETA(21)=-65.D0/27.D0
43 BETA(22)=2.D0*BETA(20)
44 BETA(23)=31.D0/300.D0
45 BETA(24)=0.D0
46 BETA(25)=0.D0
```

```
47 BETA(26)=0.D0
48 BETA(27)=61.D0/225.D0
49 BETA(28)=-2.D0/9.D0
50 BETA(29)=13.D0/900.D0
51 BETA(30)=2.D0
52 BETA(31)=0.D0
53 BETA(32)=0.D0
54 BETA(33)=-53.D0/6.D0
55 BETA(34)=704.D0/45.D0
56 BETA(35)=-107.D0/9.D0
57 BETA(36)=67.D0/90.D0
58 BETA(37)=3.D0
59 BETA(38)=-91.D0/108.D0
60 BETA(39)=0.D0
61 BETA(40)=0.D0
62 BETA(41)=23.D0/108.D0
63 BETA(42)=-976.D0/135.D0
64 BETA(43)=311.D0/54.D0
65 BETA(44)=-19.D0/60.D0
66 BETA(45)=17.D0/6.D0
67 BETA(46)=-1.D0/12.D0
68 BETA(47)=2383.D0/4100.D0
69 BETA(48)=0.D0
70 BETA(49)=0.D0
71 BETA(50)=-341.D0/164.D0
72 BETA(51)=4496.D0/1025.D0
73 BETA(52)=-301.D0/82.D0
74 BETA(53)=2133.D0/4100.D0
75 BETA(54)=45.D0/82.D0
76 BETA(55)=45.D0/164.D0
77 BETA(56)=18.D0/41.D0
78 BETA(57)=3.D0/205.D0
79 BETA(58)=0.D0
80 BETA(59)=0.D0
81 BETA(60)=0.D0
82 BETA(61)=0.D0
83 BETA(62)=-6.D0/41.D0
84 BETA(63)=-3.D0/205.D0
85 BETA(64)=-3.D0/41.D0
86 BETA(65)=-BETA(64)
87 BETA(66)=-BETA(62)
88 BETA(67)=0.D0
89 BETA(68)=-1777.D0/4100.D0
90 BETA(69)=0.D0
91 BETA(70)=0.D0
92 BETA(71)=-BETA(50)
93 BETA(72)=-BETA(51)
94 BETA(73)=-289.D0/82.D0
95 BETA(74)=2193.D0/4100.D0
96 BETA(75)=51.D0/82.D0
97 BETA(76)=33.D0/164.D0
98 BETA(77)=12.D0/41.D0
99 BETA(78)=0.D0
100 BETA(79)=1.D0
101 C(1)=41.D0/840.D0
102 C(2)=0.D0
103 C(3)=0.D0
104 C(4)=0.D0
105 C(5)=0.D0
106 C(6)=34.D0/105.D0
107 C(7)=9.D0/35.D0
```

```

108      C(8)=C(7)
109      C(9)=9.D0/280.D0
110      C(10)=C(9)
111      C(11)=C(1)
112      CP(1)=0.D0
113      CP(2)=0.D0
114      CP(3)=0.D0
115      CP(4)=0.D0
116      CP(5)=0.D0
117      CP(6)=C(6)
118      CP(7)=C(7)
119      CP(8)=C(8)
120      CP(9)=C(9)
121      CP(10)=C(10)
122      CP(11)=0.D0
123      CP(12)=C(1)
124      CP(13)=C(1)
125      EXPO=1.D0/8.D0
126  9      JK=1
127          DO 3 J=1,13
128          DO 6 L=1,N
129  6      B(L)=Y(L)
130          A=X+ALFA(J)*H
131          IF(J.EQ.1) GO TO 13
132          J1=J-1
133          DO 4 K=1,J1,1
134          JK=JK+1
135          BET=BETA(JK)*H
136          DO 4 L=1,N
137  4      B(L)=B(L)+BET*R(K,L)
138  13      CONTINUE
139          CALL DERIV(A,B,N,F)
140          DO 3 L=1,N
141  3      R(J,L)=F(L)
142          D=0
143          DD=0
144          DO 1 L=1,N
145          B(L)=Y(L)
146          F(L)=Y(L)
147          DO 5 K=1,11
148          BET=H*R(K,L)
149          B(L)=B(L)+BET*C(K)
150  5      F(L)=F(L)+BET*CP(K)
151          F(L)=F(L)+H*(CP(12)*R(12,L)+CP(13)*R(13,L))
152          D=D+DABS(F(L)-B(L))
153  1      DD=DD+DABS(F(L))
154          D=D/N
155          E3=E1*(1.D0+DD/100.D0)
156          IF(DABS(H).LE.HMI.OR.D.LE.E3) GO TO 7
157          H=H*0.9D0*(E3/D)**EXPO
158          IF(DABS(H).LT.HMI) H=HMI*H/DABS(H)
159          GO TO 9
160  7      X=X+H
161          IF(D.LE.E3)D=DMAX1(D,E3/512)
162          H=H*0.9D0*(E3/D)**EXPO
163          IF(DABS(H).GT.HMA) H=HMA*H/DABS(H)
164          IF(DABS(H).LT.HMI) H=HMI*H/DABS(H)
165  11      DO 10 L=1,N
166  10      Y(L)=F(L)
167          B(1)=D
168          RETURN

```


169

END SUBROUTINE RK78

Bibliografía

- [Arn74] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag New York, 1974.
- [BDG14] M. Bartuccelli, J. Deane, and G. Gentile, *The higher-order euler method and the spin-orbit model*, arXiv:1410.5982 [math.NA], Submitted on 22 Oct 2014.
- [CC08] A. Celletti and L. Chierchia, *Measures of basins of attraction in spin-orbit dynamics*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. **101** (2008), no. 1-2, 159–170.
- [Cel10] A. Celletti, *Stability and chaos in celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin; published in association with Praxis Publishing, Chichester, U. K., 2010.
- [CL04] A.C.M. Correia and J. Laskar, *Mercury's capture into the 3/2 spin-orbit resonance as a result of its chaotic dynamics*, Nature **429** (2004), 848–850.
- [CP07] A. Celletti and E. Perozzi, *Celestial mechanics: The waltz of the planets*, Springer-Verlag, Berlin; published in association with Praxis Publishing, 2007.
- [Fit12] R. Fitzpatrick, *An introduction to celestial mechanics*, Cambridge University Press, 2012.
- [GN06] N. J. Giordano and H. Nakanishi, *Computational physics*, second ed., Pearson Prentice Hall, 2006.
- [Gol66] P. Goldreich, *Final spin states of planets and satellites*, Astron. J. **71** (1966), no. 1, 1–7.
- [Góm00] G. Gómez, *Manuscrito de mecánica celeste*, Universidad de Barcelona, 2000.
- [GP66] P. Goldreich and S. Peale, *Spin-orbit coupling in the solar system*, Astron. J. **71** (1966), no. 6, 425–438.
- [HLW00] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric numerical integration: Structure preserving algorithms for ordinary differential equations*, second ed., Springer, 2000.
- [HSD04] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier Academic Press, USA, 2004.
- [Jan74] G. Janin, *Accurate computation of highly eccentric satellite orbits*, Celestial Mechanics **10** (1974), 451–467.
- [Kau66] W.M. Kaula, *Theory of satellite geodesy*, Dover Publications Inc., New York, 1966.
- [LL80] E. Lifschitz and L.D. Landau, *Mechanics*, third ed., Course of Theoretical Physics, vol. 1, Pergamon Press, 1980.

- [Mac64] G.J.F. MacDonald, *Tidal friction*, Rev. Geophys **2** (1964), 467–541.
- [Mou70] F. R. Moulton, *An introduction to celestial mechanics*, Dover Publications Inc., E. U., 1970.
- [OZ02] A. Olvera and S. Zambrano, *Breve introducción a la teoría de promedios*, 2002.
- [Pan06] T. Pang, *An introduction to computational physics*, second ed., Cambridge University Press, 2006.
- [Pea05] S.J. Peale, *The free precession and libration of mercury*, Icarus **178** (2005), 4–18.
- [Per00] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, third ed., Texts in applied mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Pol66] H. Pollard, *Mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice-Hall Inc., E. U., 1966.
- [PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes in F90: The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [TM04] S. T. Thorton and J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [VA09] C. A. Vera and Rodríguez B. A., *Integración simpléctica: Revisión y aplicaciones*, Revista Colombiana de Física **41** (2009), no. 2, 432–438.
- [Vin07] F. A. Viniegra, *Mecánica*, Libro 1, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias UNAM, 2007.