



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

CONTROL DE FRECUENCIA Y TENSION EN MICRORREDES

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:
JOSÉ LUIS ROJAS MARTÍNEZ

T U T O R
DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ
Facultad de Ingeniería

MÉXICO, D.F., FEBRERO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente: DR. CÉSAR ÁNGELES CAMACHO
Secretario: DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ
Vocal: DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ
1.^{er} suplente: DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ
2.^o suplente: DR. CLAUDIO RUBÉN FUERTE ESQUIVEL

Tesis realizada en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.

Tutor de tesis:

DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	4
1.3. Formulación del problema	5
1.4. Contribuciones	5
1.5. Organización de la tesis	6
2. Marco teórico y herramientas de análisis	7
2.1. Introducción	7
2.2. Concepto de punto de equilibrio y estabilidad	7
2.2.1. Concepto de estabilidad	9
2.2.2. Estabilidad asintótica	10
2.2.3. Estabilidad local y global	11
2.3. Método directo de Lyapunov	11
2.3.1. Teorema de Lyapunov para estabilidad local	13
2.3.2. Teorema de Lyapunov para Estabilidad global	14
2.3.3. Teorema de invarianza de LaSalle	14
2.4. Sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCH)	15
2.5. Teoría de grafos	16
2.6. Control Droop	17
3. Microrredes	20
3.1. Estructura	22
3.2. Control Droop	23
3.3. Análisis de Estabilidad	25
3.3.1. Acotación de trayectorias	25
3.3.2. Prueba de estabilidad	28
3.4. Evaluación numérica	36
3.5. Discusión	43

4. Convertidores de potencia	44
4.1. Introducción	44
4.2. Estructura	44
4.3. Control	46
4.4. Evaluación numérica	49
4.5. Discusión	51
5. Microrredes con Convertidores de Potencia dinámicos	53
5.1. Estructura	53
5.2. Criterios de evaluación	54
5.2.1. Estabilidad de tensión	54
5.2.2. Estabilidad de frecuencia	54
5.2.3. Transferencia de potencia	55
5.3. Evaluación numérica	57
5.4. Discusión	61
6. Conclusiones y trabajo futuro	63
Bibliografía	65

Índice de figuras

1.1. Red eléctrica convencional	1
1.2. Evolución de la red eléctrica	2
1.3. Configuración típica de la Red Inteligente o Smart Grid	3
1.4. Esquema típico de una Microrred	3
2.1. Trayectoria original y trayectoria perturbada	9
2.2. Concepto de estabilidad	10
2.3. Concepto de estabilidad asintótica	11
2.4. Función positiva definida	12
2.5. Interpretación geométrica de una función de Lyapunov	13
2.6. Interpretación geométrica del teorema de invarianza de LaSalle	15
2.7. Control Droop en Generadores Síncronos.	18
2.8. Gobernador con <i>característica potencia velocidad</i>	18
2.9. Interpretación física de la ganancia droop	19
2.10. Carga compartida entre dos GS	19
3.1. Arquitectura básica de una Microrred	21
3.2. Modelo de Microrred a media tensión (20 kV).	36
3.3. Red con reducción de impedancias en serie	38
3.4. Red reducida de Kron	40
3.5. Grafo que representa a la red reducida de Kron	40
3.6. Frecuencias de los convertidores	41
3.7. Niveles de tensión de los convertidores de potencia	42
3.8. Potencias activas de los convertidores	42
3.9. Potencias reactivas de los convertidores	43
4.1. Modelo del convertidor con su dinámica	45
4.2. Modelo dinámico del convertidor de potencia	50
4.3. Controlador	50
4.4. Objetivo de control	51
4.5. Señal de control	51
5.1. Diagrama de bloques	53
5.2. Balance de frecuencia	55

5.3. Circuito π equivalente	55
5.4. Característica potencia ángulo	56
5.5. Característica $Q(V)$	57
5.6. Bloque para desacoplar magnitud y fase	58
5.7. Tensiones deseadas en terminales	59
5.8. Señales de control	59
5.9. frecuencias de operación	60
5.10. Niveles de tensión alcanzados por los convertidores	60
5.11. Potencia activa de salida proporcionada por cada convertidor	61
5.12. Potencia reactiva de salida proporcionada por cada convertidor	61

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Actualmente la red eléctrica ha sido rebasada respecto a los requerimientos en la calidad de la tensión y la energía, demandada por las cargas, éstas han evolucionado de manera considerable en su estructura y características debido al desarrollo de la electrónica en las últimas décadas.

La red eléctrica actual tiene una estructura unidireccional, esto significa que la energía fluye en un solo sentido a través de la red desde las grandes centrales generadoras (termoeléctricas, hidroeléctricas y nucleares) hasta los centros de consumo como se ilustra en la Figura 1.1.

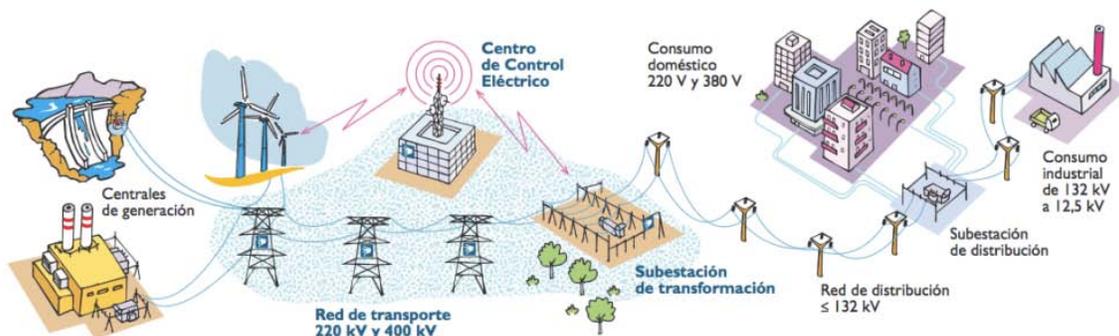


Figura 1.1: Red eléctrica convencional

Así, debido a la preocupación mundial por el cambio climático, los altos costos de los combustibles fósiles, la calidad en la tensión y la energía demandadas por los consumidores, ha surgido la necesidad de la evolución de la red eléctrica convencional hacia la llamada Red Inteligente (o Smart Grid), como se establece en Farhangi (2010), y se ilustra en la Figura 1.2.

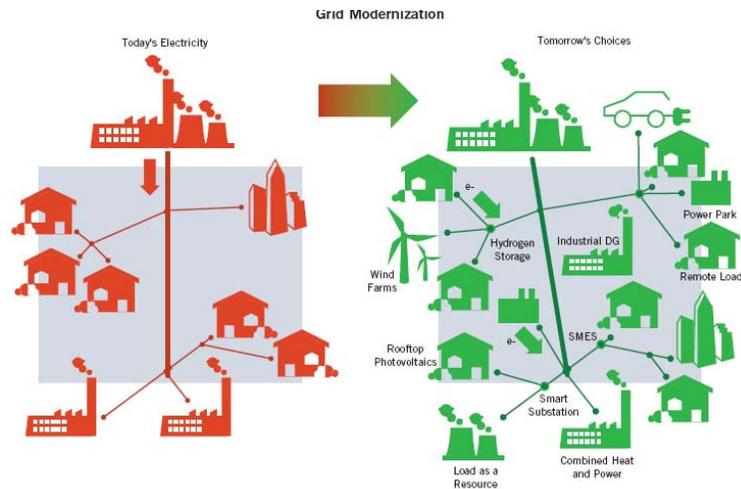


Figura 1.2: Evolución de la red eléctrica

El concepto Smart Grid fue desarrollado en el año 2006 por la **European Technology Platform for Smart Grids**¹, y se refiere a una red eléctrica que puede integrar de forma inteligente las acciones de todos los usuarios conectados a ella (generadores, consumidores o ambos) con el fin de entregar un suministro de energía eléctrica de manera: eficiente, sustentable, económica y segura.

En la Tabla 1.1 se muestran algunas características de la red convencional en comparación con la llamada Red Inteligente

RED CONVENCIONAL	RED INTELIGENTE
Electromecánica	Digital
Unidireccional	Bidireccional
Generación centralizada	Generación distribuida
Jerárquica	Red
Pocos sensores	Sensores a lo largo de la red
Ciega	Automonitoreada
Restauración manual	Autosaludable
Propensa a fallas/apagones	Adaptativa y aislada
Pruebas y monitoreo manual	Pruebas y monitoreo remoto
Control limitado	Control generalizado
Pocas opciones al consumidor	Múltiples opciones al consumidor

Tabla 1.1: Evolución de la red eléctrica.

El carácter de inteligente lo da la tecnología que provee la capa digital y que está superpuesta a la red convencional, lo que permite la comunicación bidireccional entre la parte de

¹<http://www.smartgrids.eu/ETPSmartGrids>

generación y la parte de consumo de energía eléctrica tal como se ilustra en la Figura 1.3.

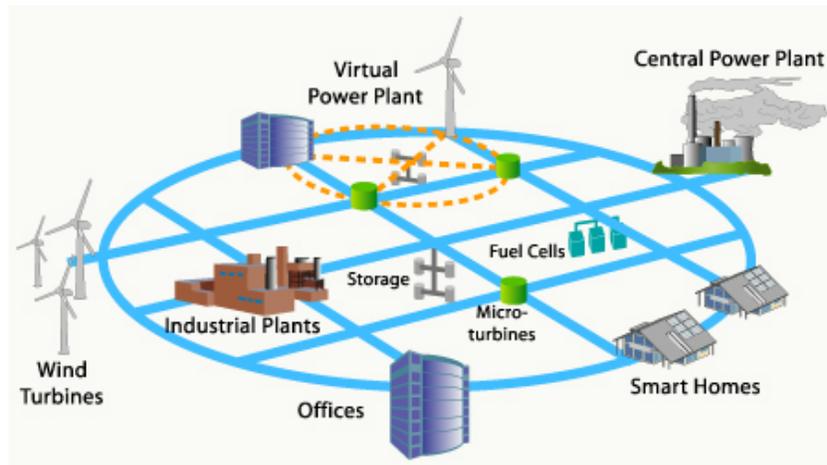


Figura 1.3: Configuración típica de la Red Inteligente o Smart Grid

De esta forma, la Red Inteligente o Smart Grid, se va conformando mediante la interconexión de pequeñas redes aisladas denominadas Microrredes (Farhangi (2010)). Así pues, una Microrred es una red a un nivel de distribución a media o baja tensión, que puede operar tanto en modo normal (conectada a la red de suministro) y en modo aislado (operación autónoma desconectada de la red principal) como un solo sistema que proporciona potencia localmente para su área, ver la Figura 1.4.



Figura 1.4: Esquema típico de una Microrred

La generación de energía dentro de una Microrred es heterogénea, en el sentido que permite la incorporación de fuentes de energía renovables de diferente naturaleza, esto es eólica

y solar como ejemplos más comunes, que se interconectan a la red vía Convertidores de Potencia, que son dispositivos de Electrónica de Potencia que permiten acondicionar las señales de salida, proporcionando el control y la flexibilidad requeridos por la Microrred.

Análogamente a los Sistemas Eléctricos de Potencia convencionales (SEPs), los cambios de carga en la Microrred se ven reflejados como un decaimiento en la frecuencia del sistema, variaciones súbitas en los niveles de tensión en los nodos se ven reflejados como flujos de altas corrientes reactivas que pueden dañar la estructura física del sistema. La técnica de control empleada usualmente para enfrentar estos problemas es el Control por Caída o Control Droop que se discutirá más adelante en este trabajo de tesis. Su estudio es similar a la característica *potencia velocidad* en máquinas síncronas (Kundur (1994)), siendo éstas las que permiten tomar las acciones de control para los SEPs convencionales. En Microrredes los Convertidores de Potencia tratan de imitar el comportamiento de una máquina síncrona mediante Control Droop.

1.2. Antecedentes

Los estudios sobre Microrredes, se centran en el modo de operación aislada, siendo éste el de mayor importancia para cuestiones en torno a la calidad de la tensión y la energía, así como la confiabilidad y seguridad del sistema eléctrico. La mayor parte de la literatura se centra en Microrredes con topologías radiales, donde los Convertidores de Potencia están conectados a un bus de alimentación principal, como en el trabajo de Peças Lopes *et al.* (2006) donde se evalúan dos estrategias de control para Convertidores de Potencia (control de potencia activa y reactiva por un lado y control de tensión y frecuencia por el otro), el trabajo de Guerrero *et al.* (2012) donde se estudia un esquema de control jerárquico que imita el comportamiento de una red convencional, así como el de Pogaku *et al.* (2007) donde se lleva a cabo un estudio de estabilidad de señal pequeña.

En trabajos como los de Chandorkar *et al.* (1993) y Coelho *et al.* (2002), muestran únicamente el control de Convertidores de Potencia conectados en paralelo alimentando a una carga en común, el primero usando solamente retroalimentación de variables medidas localmente y el segundo llevando a cabo un análisis de señal pequeña, mientras que en el trabajo de De Brabandere *et al.* (2004) se muestra la sincronización entre la tensión de la Microrred y el sistema AC mediante un transformador intercambiador de fase. Otro resultado importante es el reportado por Barklund *et al.* (2008) donde se modela un sistema administrador de energía que ajusta la salida de potencia de los convertidores para minimizar el consumo de combustible utilizado por las fuentes de generación, sin embargo, en este caso la red de estudio es una red radial de dos buses que alimentan a las cargas.

Son pocos los trabajos sobre Microrredes con topología de malla por la complejidad del análisis que implica. Recientemente en los trabajos de Schiffer *et al.* (2013) y Schiffer *et al.* (2014) se estudian las condiciones de estabilidad para una Microrred con topología de

mallada. En estos trabajos se incluyen consideraciones importantes, como un comportamiento sin pérdidas y predominantemente inductivo. Adicionalmente, se incluye el modelo de un inversor fuente de tensión (VSI por sus siglas en inglés) como Convertidor de Potencia como puede verse en la referencia Peças Lopes *et al.* (2006). En estos trabajos se tienen dos lazos de control para cada inversor, uno propio de cada convertidor que desacopla una señal senoidal en magnitud y fase y el otro que interconecta a los convertidores por medio de flujos de potencia con la Microrred. En este mismo contexto, otro trabajo importante es el de Bullo *et al.* (2013) donde al igual que Schiffer *et al.* (2014) usa un VSI como modelo del Convertidor de Potencia, pero considera niveles de tensión constantes y utiliza sólo el lazo que controla el flujo de potencia activa.

En este trabajo de tesis se evaluará numéricamente una nueva ley de control que garantiza estabilidad de frecuencia y tensión de la Microrred, con la novedad de incorporar un modelo para los Convertidores de Potencia mas detallado.

1.3. Formulación del problema

Considerando una Microrred mallada, formada por fuentes de generación de diferente naturaleza y cargas, donde para el acondicionamiento de la energía generada a una forma convencional de corriente alterna CA, se considera que asociada a cada fuente existe un Convertidor de Potencia. El problema radica en que las fuentes deberán cumplir la demanda de las cargas, satisfaciendo los flujos de potencia y manteniendo la estabilidad de frecuencia y tensión. El objetivo es sincronizar las frecuencias de dichas unidades, sin que las diferencias angulares entre ellas excedan los $\frac{\pi}{2}$ y se tengan magnitudes de tensión constantes.

A diferencia de los trabajos consultados relacionados con el tema de tesis, se considera que incluyendo un modelo dinámico mas detallado para un Convertidor de Potencia, se puede alcanzar el objetivo. Con el nuevo modelo se evidencian efectos que los otros modelos desprecian, y en adición a las estrategias de control reportadas para la red, se tiene que incluir una ley de control para los Convertidores.

1.4. Contribuciones

Con el modelo mas detallado del Convertidor de Potencia, se logra satisfacer la demanda de las cargas manteniendo la estabilidad de frecuencia y tensión en la red, se incluyó una ley de control para los Convertidores de Potencia y se muestra que el enfoque basado en pasividad es útil para resolver este tipo de problemas.

1.5. Organización de la tesis

El contenido se divide en cuatro capítulos principales. El Capítulo 2, se relaciona con los preliminares, comprende algunos conceptos y definiciones importantes a las cuales se hará referencia a lo largo del trabajo de tesis. Específicamente se analiza el concepto de puntos de equilibrio y estabilidad asintótica, así mismo presenta el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov con la teoría de grafos y los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCH) como herramientas de análisis. Adicionalmente se muestra el uso de la técnica de Control por Caída o Control Droop en SEPs convencionales.

En el Capítulo 3, se presenta el desarrollo matemático formal para el análisis de estabilidad de Microrredes con un modelo de Inversor fuente de tensión (VSI por sus siglas en inglés) como Convertidor de Potencia, donde se obtienen condiciones para la selección de ganancias y puntos de ajuste que hacen estable el comportamiento de la red, cuyos resultados son validados mediante una prueba de estabilidad formal y una evaluación numérica.

Mientras que en el Capítulo 4, se propone un modelo dinámico mas detallado del Convertidor de Potencia, incluyendo una nueva ley de control y un análisis formal, con el objetivo de lograr un comportamiento deseado para la tensión y corriente en sus terminales, que es validado mediante una evaluación numérica. En el Capítulo 5 se evalúa numéricamente el desempeño de este modelo de convertidor una vez interconectado en la Microrred, con los requerimientos para lograr satisfacer los flujos de potencia demandados por las cargas y manteniendo estabilidad de frecuencia y tensión. Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Marco teórico y herramientas de análisis

2.1. Introducción

Tanto en SEPs convencionales como en el nuevo concepto de Red Inteligente y Microredes, se está interesado en lograr la sincronización de las trayectorias del sistema, es decir sincronización en frecuencia de todos los convertidores de potencia, manteniendo las diferencias angulares entre ellos menores a $\frac{\pi}{2}$, y lograr además que las tensiones generadas sean constantes. El análisis de sincronización de la Microrred se realizará con herramientas estándar de estabilidad en el sentido de Lyapunov por lo que es necesario revisar algunos conceptos importantes tomados de Slotine y Weiping (1991).

En este sentido, la representación de sistemas físicos en forma Hamiltoniana controlada por puerto (PCH por sus siglas en inglés), con su carácter energético, facilita la obtención de la función candidata de Lyapunov, esto en conjunto con la teoría de grafos para el estudio de redes, son herramientas matemáticas importantes para el logro de los objetivos de este trabajo de tesis.

2.2. Concepto de punto de equilibrio y estabilidad

Un sistema dinámico puede ser representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.1}$$

con $f \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ y n el orden del sistema.

Una solución $x(t)$ de la ecuación (2.1) corresponde a una curva en el espacio de estados, como t varía desde cero a infinito, esta curva es generalmente referida como una *trayectoria*

de estado o una trayectoria del sistema.

Una clase especial de sistemas dinámicos son los sistemas lineales, los cuales son de la forma

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.2)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Además estos sistemas se clasifican ya sea como variantes o invariantes en el tiempo, dependiendo si la matriz A depende explícitamente o no del tiempo. En general estos adjetivos son reemplazados por autónomos y no autónomos (Slotine y Weiping (1991)).

Bajo estas consideraciones, se puede establecer la siguiente definición

Definición 2.2.1 *El sistema no lineal (2.1) se dice que es autónomo si f no depende explícitamente del tiempo, es decir si la ecuación de estado del sistema puede escribirse como*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

de otra manera el sistema es llamado no autónomo.

Otra definición importante es la de punto de equilibrio,

Definición 2.2.2 *Un estado x^* es un punto de equilibrio del sistema (2.3) si una vez que $x(t)$ es igual a x^* permanece en x^* para todo tiempo futuro.*

Matemáticamente esto significa que el vector x^* satisface

$$f(x^*) = 0 \quad (2.4)$$

y los puntos de equilibrio del sistema pueden ser encontrados resolviendo las ecuaciones (2.4). Cabe mencionar que se puede transformar el sistema de una manera tal que el punto de equilibrio sea el origen del espacio de estados, es decir que siempre se puede encontrar una transformación para analizar un punto de operación

$$y = x - x^*$$

En problemas prácticos la preocupación no siempre se refiere a la estabilidad alrededor de un punto de equilibrio, sino mas bien a la *estabilidad de trayectorias del sistema*. Sin embargo el problema de estabilidad de trayectorias puede ser transformado a un problema equivalente de estabilidad alrededor de un punto de equilibrio.

Así pues, sea $x^*(t)$ (solución de la ecuación (2.3)) la trayectoria de movimiento correspondiente a la condición inicial $x^*(0) = x_0$. Perturbando la condición inicial $x(0) = x_0 + \delta x_0$, se puede estudiar la variación del error de la trayectoria de movimiento mediante el cambio de coordenadas $e(t) = x(t) - x^*(t)$, como puede verse en la Figura 2.1.

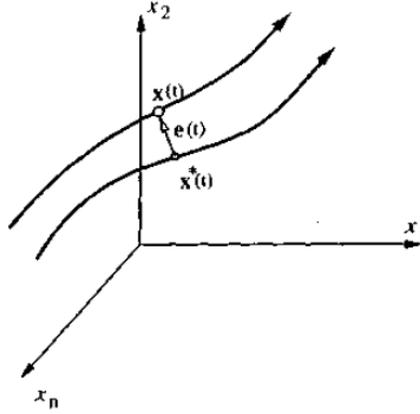


Figura 2.1: Trayectoria original y trayectoria perturbada

2.2.1. Concepto de estabilidad

Intuitivamente el concepto de estabilidad lo relacionamos con el comportamiento de un sistema alrededor de un punto de operación deseado, pero en muchas ocasiones los sistemas tienen un comportamiento complejo, donde esta noción de estabilidad no es suficiente para caracterizar al sistema, por lo que es necesario revisar algunos conceptos importantes sobre estabilidad.

Sea B_R la región esférica o bola definida por $\|x\| < R$ en el espacio de estados y sea S_R la esfera definida por $\|x\| = R$.

Definición 2.2.3 El estado de equilibrio $x = 0$ se dice que **es estable** si para cualquier $R > 0$ existe $r > 0$, tal que si $\|x(0)\| < r$, entonces $\|x(t)\| < R$ para todo $t \geq 0$. De otra manera el punto de equilibrio es inestable.

La definición puede escribirse como

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \|x(0)\| < r \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t)\| < R \quad (2.5)$$

o de igual forma

$$\forall R > 0, \exists r > 0, x(0) \in B_r \Rightarrow \forall t \geq 0, x(t) \in B_R \quad (2.6)$$

Formalmente la definición establece que el origen es estable si, dado que no queremos que la trayectoria $x(t)$ salga de la esfera de radio específico y arbitrario B_R , un valor $r(R)$ puede ser encontrado tal que a partir del estado dentro de la esfera B_r en el tiempo cero, garantiza que el estado se quedará dentro de la esfera B_R para todo tiempo. Un punto de equilibrio es inestable si la trayectoria deja a la esfera B_R . En la Figura 2.2 las trayectorias 1 y 2 son estables, mientras que la trayectoria 3 es inestable.

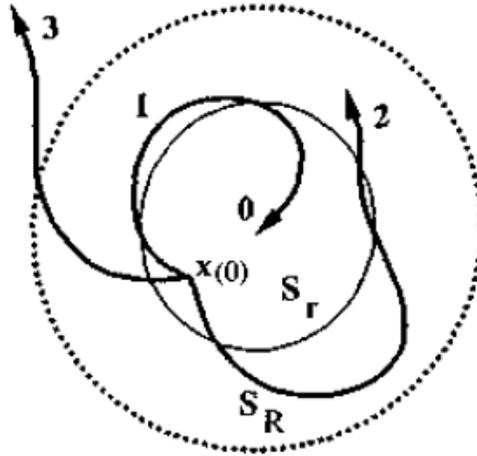


Figura 2.2: Concepto de estabilidad

Estabilidad en el sentido de Lyapunov o estabilidad de Lyapunov significa que la trayectoria del sistema se puede mantener arbitrariamente cercana al origen comenzando cerca de él.

2.2.2. Estabilidad asintótica

Definición 2.2.4 *Un punto de equilibrio 0 es **asintóticamente estable** si es estable y además existe algún $r > 0$ tal que $\|x(0)\| < r$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Estabilidad asintótica significa que el punto de equilibrio es estable y los estados que comenzaron cerca de cero, convergen a cero como el tiempo tiende a infinito, como se ilustra en la Figura 2.3 donde la trayectoria del sistema comienza dentro de la esfera B_R y converge al origen, en este caso B_R es llamado “dominio de atracción” del punto de equilibrio.

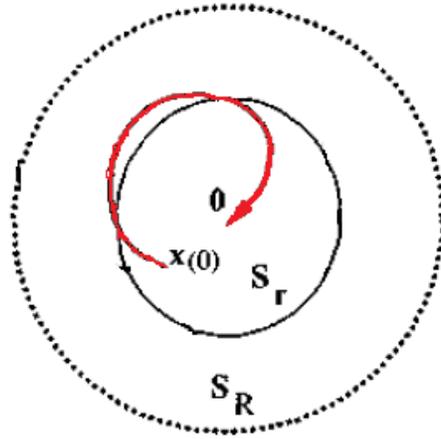


Figura 2.3: Concepto de estabilidad asintótica

Entonces, el dominio de atracción del punto de equilibrio se refiere a la más grande de estas regiones formada por el conjunto de todos los puntos tales que las trayectorias que comenzaron en esos puntos, y eventualmente convergen al origen.

2.2.3. Estabilidad local y global

Las definiciones anteriores se formulan para caracterizar el comportamiento local de los sistemas, es decir cómo evoluciona el estado después de iniciar cerca del punto de equilibrio, las propiedades locales proporcionan poca información sobre como se comportará el sistema cuando el estado inicial está a cierta distancia del punto de equilibrio.

Definición 2.2.5 *Si la estabilidad asintótica se mantiene para cualquier estado inicial, se dice que el punto de equilibrio es estable asintóticamente en lo amplio, esto es llamado también estabilidad global asintótica.*

2.3. Método directo de Lyapunov

La filosofía del método directo de Lyapunov es la extensión de una observación física fundamental: Si el total de energía de un sistema (por ejemplo mecánico o eléctrico) es continuamente disipada, entonces el sistema sea lineal o no lineal, debe eventualmente establecerse en un punto de equilibrio. Así se concluye la estabilidad de un sistema, examinando la variación de una sola función escalar.

Comparando las definiciones de estabilidad y energía, algunas relaciones conceptuales tomadas de Slotine y Weiping (1991) son:

- Energía cero corresponde al punto de equilibrio ($x = 0, \quad \dot{x} = 0$).
- Estabilidad asintótica implica la convergencia de la energía a cero.
- Inestabilidad está relacionada con el crecimiento de la energía.

Estas relaciones indican que el valor de la cantidad escalar energía, indirectamente refleja la magnitud del vector de estado y además el comportamiento del sistema a lo largo de sus trayectorias puede ser caracterizado por la variación de su energía. Así, ante un sistema caracterizado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, el procedimiento es generar una función escalar tipo “función de energía” para el sistema dinámico y examinando la variación con respecto al tiempo de esta función escalar, se pueden obtener conclusiones sobre la estabilidad del conjunto de ecuaciones diferenciales sin la dificultad que implica la definición o la obtención explícita de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

A continuación se enuncian algunas definiciones necesarias para enunciar formalmente el Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Definición 2.3.1 Una función escalar continua $V(x)$ se dice que es localmente definida positiva si $V(0) = 0$ y en una esfera B_{R_0} , $x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$

Si $V(0) = 0$ y la propiedad de arriba se mantiene dentro de todo el espacio de estados, entonces $V(x)$ se dice que es **globalmente positiva definida**.

Esto implica que la función V tiene un mínimo único en el origen $x = 0$, pero en realidad dada cualquier función teniendo un mínimo único en una cierta bola, se puede construir una función localmente positiva definida simplemente agregando una constante y por supuesto que la función con la constante agregada tendrá la misma derivada que la función original. Geométricamente una función positiva definida $V(x)$ de dos variables de estado, corresponde a una superficie de una copa trazada hacia arriba y el punto mas bajo de la copa se localiza en el origen, Figura 2.4.

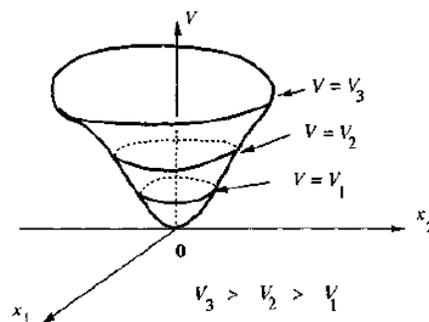


Figura 2.4: Función positiva definida

Con x denotando el estado del sistema, una función escalar $V(x)$ en realidad representa una función implícita de t . Asumiendo que $V(x)$ es diferenciable, su derivada se obtiene mediante la regla de la cadena

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

donde la última igualdad se obtiene de considerar que $\dot{x} = f(x)$,

Definición 2.3.2 Si en una bola B_{R_0} la función $V(x)$ es positiva definida y tiene derivadas parciales continuas y si su derivada respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema ($\dot{x} = f(x)$) es negativa semi-definida $\dot{V}(x) < 0$, entonces $V(x)$ se dice que es una **función de Lyapunov** del sistema.

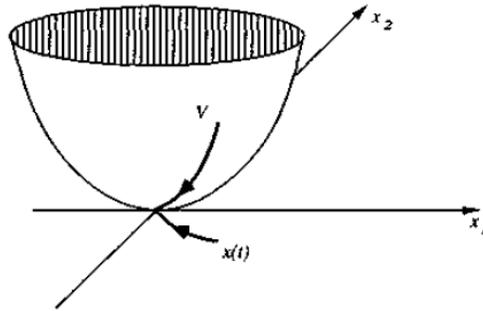


Figura 2.5: Interpretación geométrica de una función de Lyapunov

Una interpretación geométrica de la función de Lyapunov es el punto $V(x_1, x_2)$ en la Figura 2.5 que se ve apuntando hacia la parte baja de un tazón y moviéndose hacia abajo también a través de las curvas de contorno correspondientes $x(t)$, disminuyendo los valores de la función V .

2.3.1. Teorema de Lyapunov para estabilidad local

Teorema 2.3.1 (Estabilidad local) Si en una bola B_{R_0} , existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas tal que:

- $V(x)$ es positiva definida (Localmente en B_{R_0}).
- $\dot{V}(x)$ es negativa semi-definida (Localmente en B_{R_0}).

entonces el punto de equilibrio cero es estable. Si la derivada $\dot{V}(x)$ es negativa definida localmente en B_{R_0} , entonces la estabilidad es asintótica.

2.3.2. Teorema de Lyapunov para Estabilidad global

El teorema anterior aplica para un análisis de estabilidad local. Con el fin de hacer valer estabilidad global asintótica de un sistema, podría esperarse de manera natural que la esfera B_{R_0} en el teorema anterior tiene que ser ampliada a todo el espacio de estados. Esto es necesario pero no suficiente, una condición adicional sobre la función V que tiene que satisfacerse es que $V(x)$ deberá ser radialmente no acotada, lo que significa que $V(x) \rightarrow \infty$ conforme $\|x\| \rightarrow \infty$, es decir x tiende a infinito en cualquier dirección, ver Slotine y Weiping (1991) para más detalles.

Teorema 2.3.2 (Estabilidad global) *Asumiendo que existe una función escalar V del estado x con primeras derivadas continuas, tal que*

- $V(x)$ es positiva definida
- $\dot{V}(x)$ es negativa definida
- $V(x) \rightarrow \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$

entonces el equilibrio en el origen es global asintóticamente estable.

2.3.3. Teorema de invarianza de LaSalle

Aún cuando la derivada de la función candidata de Lyapunov sea solamente semidefinida negativa, se pueden dar conclusiones sobre estabilidad asintótica mediante los teoremas de invarianza, atribuidos a LaSalle. El concepto central de estos teoremas es el conjunto invariante, como una generalización del concepto de punto de equilibrio. Así pues, se establece la siguiente definición.

Definición 2.3.3 *Un conjunto G es un **conjunto invariante** de un sistema dinámico, si cada trayectoria del sistema inicia en un punto de G y permanece en G para todo tiempo futuro.*

Teorema 2.3.3 (Teorema de invarianza local) *Considere un sistema autónomo de la forma (2.3), con f continua, y sea $V(x)$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Considere que*

- para algunas $l > 0$, la región Ω_l definida por $V(x) < l$ es acotada
- $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in \Omega_l$

Sea R el conjunto de todos los puntos dentro de Ω_l donde $\dot{V}(x) = 0$, y sea M el mayor conjunto invariante en R . Entonces, cada solución $x(t)$ originada en $x \in \Omega_l$ tiende a M como $t \rightarrow \infty$

la interpretación geométrica del teorema se ilustra en la Figura 2.6

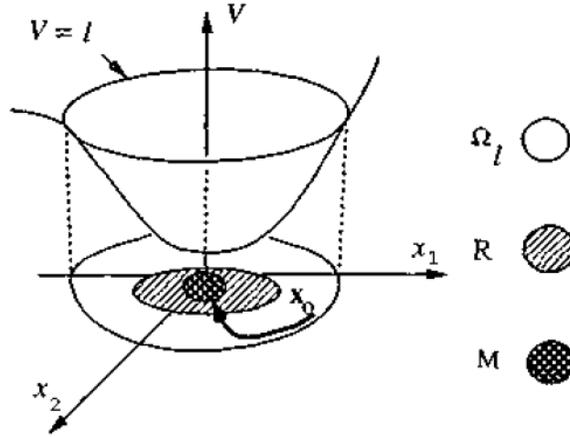


Figura 2.6: Interpretación geométrica del teorema de invarianza de LaSalle

Es decir, cualquier punto de equilibrio es un conjunto invariante y si el dominio de atracción del punto de equilibrio R es igual al mayor conjunto invariante M , implica que $\dot{V}(x) = 0$ para todo tiempo futuro, entonces V ya no requiere ser positiva definida para asegurar estabilidad asintótica.

2.4. Sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCH)

Como una alternativa para modelos clásicos, los modelos Hamiltonianos controlados por puerto PCH por sus siglas en inglés (Van der Schaft (2005)), además de capturar las características del balance de energía en sistemas físicos, proporcionan una clasificación de las variables y las ecuaciones asociadas a propiedades del sistema y definen una estructura de interconexión relacionada con el intercambio de energía entre el sistema y su ambiente, por ejemplo corrientes y tensiones en un circuito eléctrico o fuerzas y velocidades en sistemas mecánicos, que es la filosofía de análisis empleada en la técnica de Control Basado en Pasividad por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento, IDA-PBC por sus siglas en inglés (Ortega *et al.* (2002)).

El modelado de sistemas físicos de parámetros concentrados con elementos de almacenamiento de energía independientes, lleva a modelos de la forma llamada PCH:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \quad (2.7)$$

$$y = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \quad (2.8)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son las variables que almacenan energía, $H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ representa la energía total almacenada, $u, y \in \mathbb{R}^m$ son las variables de puerto de energía (entradas y salidas).

Las variables de puerto $u, y \in \mathbb{R}^m$ definen los flujos de energía intercambiados con el ambiente del sistema. La estructura de interconexión es capturada en la matriz de $n \times n$ antisimétrica $J(x) = -J^T(x)$ y en la matriz $g(x)$ de $n \times m$. Mientras la matriz $R(x) = R^T(x) \geq 0$ representa la disipación. Todas estas matrices son función del estado x .

Algunas propiedades básicas de los sistemas PCH tomadas de Van der Schaft (2005) y que serán retomadas posteriormente en este trabajo de tesis son:

- Un sistema PCH está definido por un espacio de estados X dotado de una tripleta (J, g, H) . El par $[J(x), g(x)]$, $x \in X$ captura la estructura de interconexión del sistema.
- $g(x)$ modela en particular los puertos del sistema.
- Independientemente de la estructura de interconexión, la función $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ define el total de energía almacenada del sistema.
- Los sistemas PCH son modulares en el sentido que una interconexión de conservación de energía de un número de sistemas PCH, define nuevamente un sistema PCH.
- Balance energético: Si se obtiene la derivada respecto al tiempo de $H(x)$ se tiene que $\frac{d}{dt}H[x(t)] = u^T(t)y(t)$, lo que físicamente corresponde al hecho que la estructura de interconexión interna es conservadora de energía (debido a la antisimetría de $J(x)$), siendo u, y las variables de energía de los puertos definidos por $g(x)$, entonces $u^T y$ es la potencia externa suministrada al sistema.

2.5. Teoría de grafos

La teoría de grafos proporciona las herramientas comunes para representar la interacción entre los elementos o agentes en una red, razón por la cual resulta importante hacer una revisión de estos conceptos ya que serán parte importante de los resultados obtenidos.

Un grafo o red es un conjunto de nodos interconectados por un conjunto de bordes. Así pues, se denota por $G(\nu, \varepsilon, A)$ un grafo ponderado y no dirigido (la comunicación puede ser bidireccional), ν es el conjunto de nodos de la red, $\varepsilon \subseteq \nu \times \nu$ es el conjunto de bordes y $A \in \mathbb{R}^{|\nu| \times |\nu|}$ es la matriz de adyacencia. Esta matriz es de orden nodos por nodos y esta formada de unos y ceros, considerando que un uno corresponde a que existe conexión entre los nodos y un cero en el caso contrario .

Si a $\ell \in \{1, \dots, |\varepsilon|\}$ se le asigna una dirección arbitraria para cada borde $i, j \in \varepsilon$ la matriz de incidencia $B \in \mathbb{R}^{|\nu| \times |\varepsilon|}$ es una matriz de orden nodos por bordes y está formada por 1, -1 y 0. Por convención el elemento $B_{k\ell} = 1$ si en el nodo k entra el borde ℓ y $B_{k\ell} = -1$ si en el nodo k sale el borde ℓ y los elementos restantes de la matriz son cero, lo cual se muestra a detalle en el trabajo de Ávila Becerril (2011).

Además si un borde $(i, j) \in \varepsilon$, entonces se dice que el nodo j es vecino del nodo i . Al conjunto de vecinos de un nodo i se le denota como \mathcal{N}_i .

2.6. Control Droop

Control por Caída o Control Droop es un control proporcional cuya ganancia determina la distribución de potencia en estado estable. Esta técnica de control es ampliamente usada en generadores síncronos (GS), y es conocida como *característica potencia velocidad* en SEPs convencionales para el control de potencia activa en la red. Tomando algunos conceptos importantes de Kundur (1994) se procede a revisar esta técnica de control.

En GS un cambio en la demanda de potencia activa se ve reflejado como un cambio en la frecuencia del sistema, es decir, cuando hay un cambio en la carga del sistema, éste se refleja instantáneamente como un cambio en el par eléctrico de salida, lo cual genera un desajuste entre el par mecánico y el par eléctrico como se ilustra en la Figura 2.6 a). Esto a su vez resulta en variaciones de velocidad Figura 2.6 b). Para facilitar el análisis es preferible trabajar con potencias en lugar de par, así, expresando las relaciones anteriores en términos de potencia de la forma $P = \omega_r T$ se obtiene la *característica potencia velocidad*, la cual se muestra en la Figura 2.6 c).

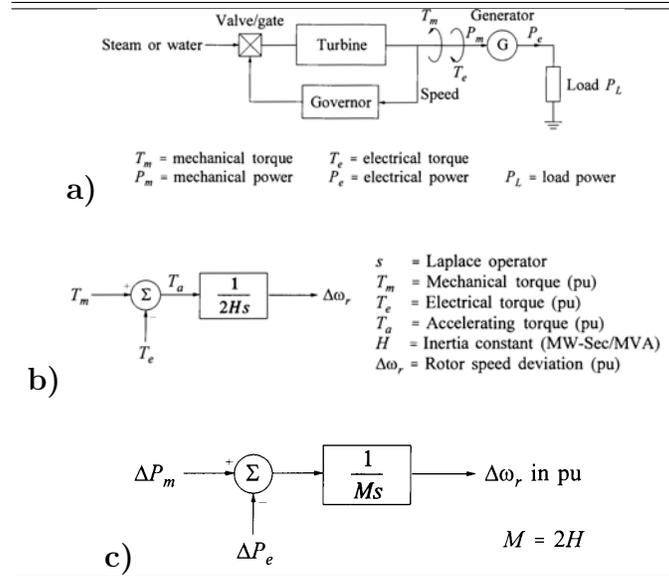


Figura 2.7: Control Droop en Generadores Síncronos.

a) Control de potencia activa en un GS, b) Función de transferencia con par, c) Función de transferencia con potencia.

La función primaria de control en un GS lo ejerce el gobernador de velocidad para el control de potencia activa y una división de carga estable entre dos o más unidades operando en paralelo. Los gobernadores son previstos con una *característica potencia-velocidad* de modo que la caída en velocidad es proporcional al incremento de carga. Este tipo de gobernador es caracterizado como un controlador proporcional con ganancia igual a $\frac{1}{R}$, el cual ajusta las válvulas de alimentación de la turbina para llevar a la frecuencia de nuevo al valor nominal, como se ilustra en la Figura 2.8.

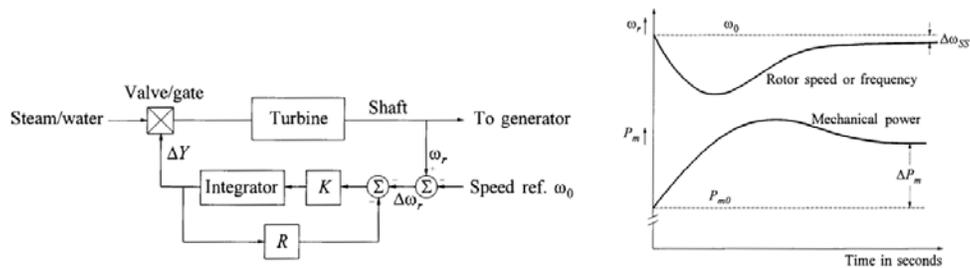


Figura 2.8: Gobernador con *característica potencia velocidad*

La ganancia droop (R) representa la relación entre la desviación de velocidad $\Delta\omega_r$ o desviación de frecuencia (Δf) para cambiar la posición ΔY de la válvula o compuerta de la turbina, lo cual implica cambiar la potencia de salida ΔP como se ilustra en la Figura 2.9.

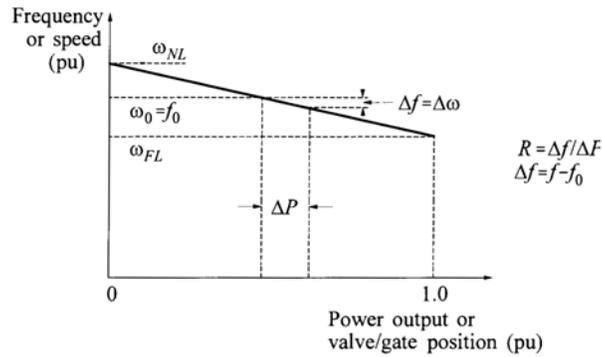


Figura 2.9: Interpretación física de la ganancia droop

Si dos ó mas GS equipados con gobernadores potencia velocidad son conectados a la red, habrá una frecuencia a la que ambos compartirán un cambio de carga y de acuerdo al valor de su pendiente (R) proporcionarán potencia activa de acuerdo a su capacidad nominal, es decir, tanto las unidades 1 y 2 están inicialmente a la misma frecuencia f_0 con salidas de potencia activa P_1 y P_2 respectivamente. Cuando un incremento de carga ΔP_L causa una reducción en la velocidad de las unidades, los gobernadores incrementan esta velocidad hasta alcanzar una nueva frecuencia de operación común f' , como se muestra en la Figura 2.10.

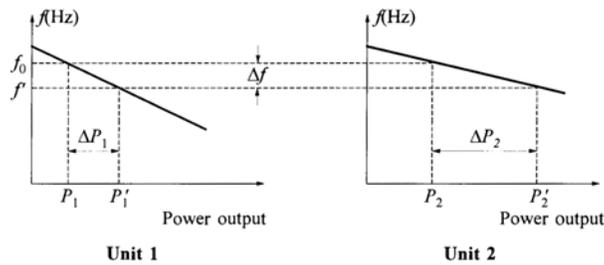


Figura 2.10: Carga compartida entre dos GS

Capítulo 3

Microrredes

La arquitectura básica de una Microrred se forma generalmente como se describe en los trabajos de Lubna *et al.* (2012) y Lasseter (2002) por:

- **Unidades de generación:** Son unidades de capacidad de potencia pequeña. Estas fuentes pueden ser los generadores diesel convencionales, microturbinas (generalmente de gas, hidrógeno y biocombustibles), pero sobre todo aquí aparecen las fuentes de energía no convencionales, renovables y limpias como lo son paneles solares y turbinas de viento.
- **Dispositivos de almacenamiento de energía:** Estos dispositivos juegan un papel fundamental en la operación de la Microrred ya que permiten el balance entre la generación y la demanda de energía. Dispositivos adecuados para Microrredes son las celdas de combustible (FC por sus siglas en inglés) y baterías.
- **Convertidores de Potencia:** Son dispositivos de electrónica de potencia, que interconectan a las fuentes de generación con el sistema de distribución de corriente alterna CA convencional.
- **Controladores:** Están asociados a los Convertidores de Potencia y se encargan de ajustar la potencia de salida para mantener magnitud de tensión y frecuencia deseados.
- **Cargas:** Son los elementos que consumen energía en la Microrred.
- **Sistema de distribución:** Son las líneas o elementos de transmisión en CA, donde la Microrred opera a la misma frecuencia que la red de CA.
- **Sistema de comunicación:** Es la capa digital que se superpone a la red eléctrica para la comunicación entre los sistemas de medición y las protecciones, principalmente.
- **Sistema administrador de energía (MGCC por sus siglas en inglés):** Utiliza la información obtenida por el sistema de comunicación para cubrir los requerimientos de calidad de la energía como criterio para operación en modo normal o aislado de la

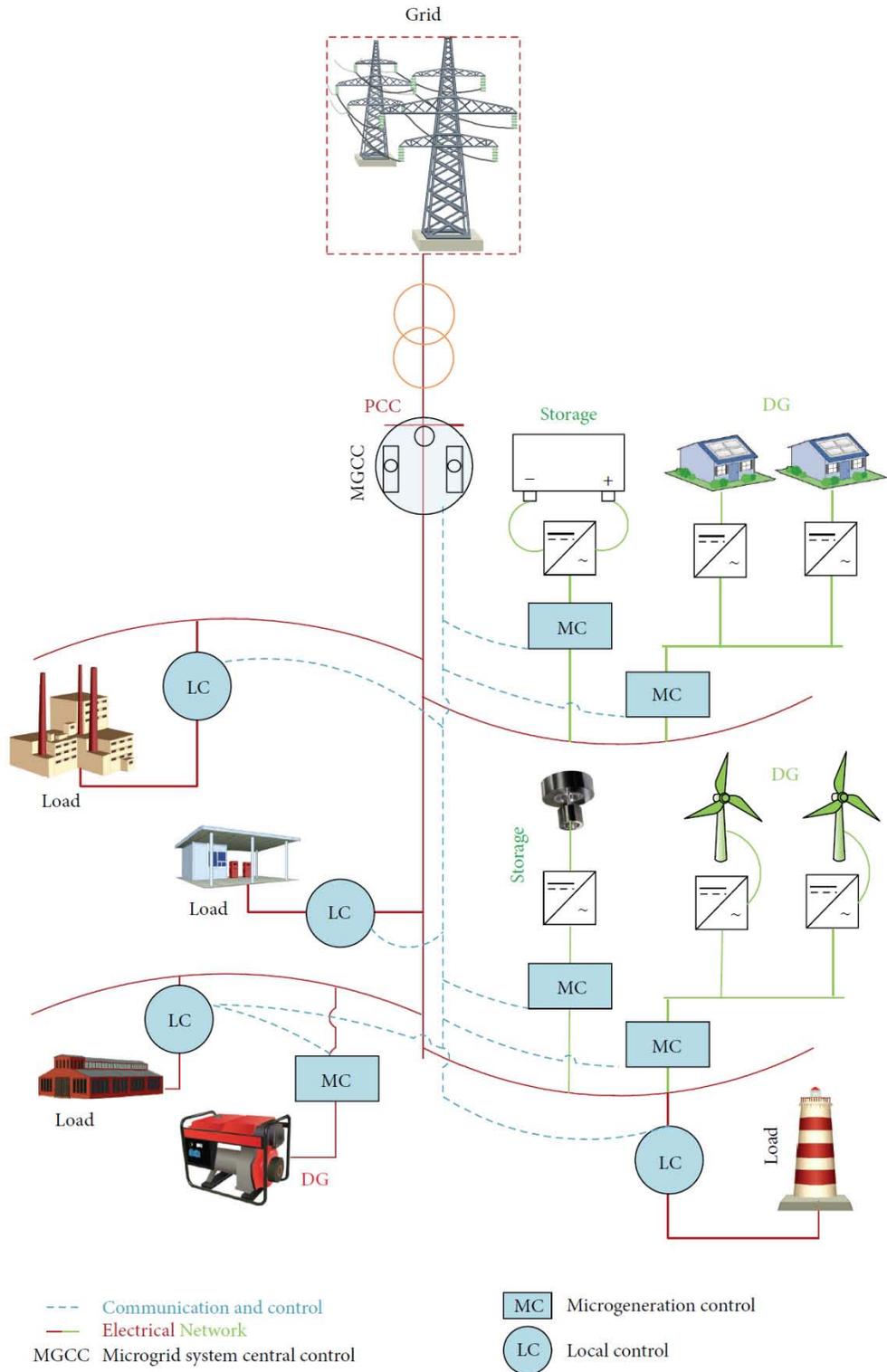


Figura 3.1: Arquitectura básica de una Microrred

Microrred y además establece los valores deseados de tensión, frecuencia y potencia para los controladores.

- **Protecciones:** Deben responder a fallas tanto del lado de la red de suministro principal como para fallas en la microrred, si la falla ocurre en el lado de la red de suministro, la respuesta deseada es aislar a la Microrred tan rápido como sea posible para proteger a las cargas, si la falla es dentro de la Microrred el coordinador de protecciones deberá aislar la sección mas pequeña posible del alimentador para eliminar la falla.

La arquitectura básica de una Microrred se ilustra en la Figura 3.1.

3.1. Estructura

Se considera una Microrred cuya topología en malla puede representarse por un grafo no dirigido, dicha Microrred está operando como un sistema trifásico balanceado, se considera además que en cada nodo está conectado al menos un Convertidor de Potencia y que las cargas se modelan como impedancias constantes. Bajo estas consideraciones, el modelo de la red puede representarse como un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales. Para eliminar las ecuaciones algebraicas se implementa un método de reducción de red, llamado reducción de Kron (Kundur (1994)), y trabajar así con una red reducida representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales únicamente.

De esta forma, la Microrred está compuesta de n nodos, cada uno caracterizado por una magnitud de tensión y un ángulo de fase. El conjunto $\bar{n} := \{1, \dots, n\}$ denota al conjunto de nodos de la red y el conjunto $\mathcal{N}_i := \{k \mid k \in \bar{n}, k \neq i, Y_{ik} \neq 0\}$ denota al conjunto de nodos vecinos del nodo i . Dos nodos i, k cualesquiera de la Microrred se interconectan entre sí por medio de una admitancia compleja de la forma $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik} \in \mathbb{C}$, donde $G_{ik} \in \mathbb{R}$ es la conductancia y $B_{ik} \in \mathbb{R}$ es la susceptancia, cuando no existe conexión entre los nodos el elemento $Y_{ik} = 0$. Mientras que los flujos de potencia entre cada pareja de nodos están dados por las ecuaciones mostradas a continuación

$$P_{ik} = G_{ii}V_i^2 - V_iV_k [G_{ik} \cos(\delta_{ik}) + B_{ik} \sin(\delta_{ik})]$$

$$Q_{ik} = -B_{ii}V_i^2 - V_iV_k [G_{ik} \sin(\delta_{ik}) + B_{ik} \cos(\delta_{ik})]$$

que determinan las condiciones de operación en estado estable del sistema (Elgerd (1981)). Y dada la topología considerada para la Microrred, los flujos de potencia activa $P_i : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y reactiva $Q_i : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para el i -ésimo nodo se obtienen como se detalla en Kothari y Nagrath (2003) y Stevenson y Grainger (1994), y se representan por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} P_i &= G_{ii}V_i^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_iV_k [G_{ik} \cos(\delta_{ik}) + B_{ik} \sin(\delta_{ik})] \\ Q_i &= -B_{ii}V_i^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_iV_k [G_{ik} \sin(\delta_{ik}) - B_{ik} \cos(\delta_{ik})] \end{aligned} \tag{3.1}$$

En (3.1) el primer término corresponde a los elementos conectados únicamente en el i -ésimo nodo, es decir $G_{ii} = \hat{G}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} G_{ik}$ y $B_{ii} = \hat{B}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} B_{ik}$, el segundo término esta relacionado a la interconexión con los nodos vecinos, por simplicidad de notación la diferencia angular se escribe como $\delta_{ik} = \delta_i - \delta_k$ y el símbolo $k \sim \mathcal{N}_i$ denota “para toda $k \in \mathcal{N}_i$ ”.

Por otra parte, los Convertidores de Potencia se modelan como inversores fuentes de tensión CA ideales (VSI por sus siglas en inglés) como se hace en los trabajos de Lasseter y Piagi (2000) y Peças Lopes *et al.* (2006). Se asume que los convertidores ya están operando en estado senoidal, con una regulación de frecuencia instantánea y de tensión con un retardo τ_{V_i} , modelado mediante un filtro de primer orden. Bajo estas consideraciones en los trabajos recientes de Schiffer *et al.* (2014) y Bullo *et al.* (2013), un convertidor conectado en el i -ésimo nodo de la Microrred puede representarse por

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= u_i^\delta \\ \dot{V}_i &= \frac{1}{\tau_{V_i}}(-V_i + u_i^V),\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde $u_i^\delta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es la entrada de control para frecuencia, $u_i^V : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es la entrada de control para la tensión, $\tau_{V_i} \in \mathbb{R}_{> 0}$ es la constante de tiempo del filtro, el cual desacopla la señal en magnitud y fase.

3.2. Control Droop

A diferencia de los GS, los Convertidores de Potencia no tienen una relación física directa entre frecuencia y potencia generada. Sin embargo, el Control Droop se utiliza aquí con el objetivo de crear artificialmente esta relación, es decir, para que un inversor imite el comportamiento de un GS, para esto se considera que

$$\begin{aligned}u_i^\delta &= \omega^d - k_{P_i}(P_i^m - P_i^d) \\ u_i^V &= V^d - k_{Q_i}(Q_i^m - Q_i^d),\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde $\omega^d \in \mathbb{R}_{> 0}$ y $V^d \in \mathbb{R}_{> 0}$ son la frecuencia y tensión nominal, $P_i^d \in \mathbb{R}$ y $Q_i^d \in \mathbb{R}$ son las referencias o setpoints para potencia activa y reactiva, $P_i^m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q_i^m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ son las potencias activa y reactiva medidas por el filtro, mientras que $k_{P_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $k_{Q_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son las ganancias para la frecuencia y la tensión respectivamente.

Mientras que las potencias son medidas y procesadas a través de filtros paso bajas, caracterizados de una forma tal como en los trabajos de Chandorkar *et al.* (1993) y Coelho *et al.* (2002), es decir

$$\begin{aligned}\tau_{P_i} \dot{P}_i^m &= -P_i^m + P_i \\ \tau_{Q_i} \dot{Q}_i^m &= -Q_i^m + Q_i\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde P_i y Q_i son obtenidos de las ecuaciones de flujos de potencia dadas en (3.1) y $\tau_{P_i} \in \mathbb{R}_{>0}$ es una constante de tiempo.

Así pues, sustituyendo las ecuaciones (3.3) y (3.4) en (3.2) se puede escribir el sistema en lazo cerrado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega^d - k_{P_i}(P_i^m - P_i^d) \\ \dot{P}_i^m &= \frac{1}{\tau_{P_i}}(-P_i^m + P_i) \\ \dot{V}_i &= \frac{1}{\tau_{V_i}}[-V_i + V^d - k_{Q_i}(Q_i^m - Q_i^d)] \\ \dot{Q}_i^m &= \frac{1}{\tau_{P_i}}(-Q_i^m + Q_i)\end{aligned}\tag{3.5}$$

Sin embargo, suponiendo que $\tau_{V_i} \ll \tau_{P_i}$ se puede asumir que $\tau_{V_i} = 0$, es decir, que la medición de tensión en el filtro es tan rápida que puede considerarse como instantánea, mientras que el filtro tarda τ_{P_i} [s] en obtener la medición de potencias.

Dado que $\dot{\delta}_i = \omega_i$, donde ω_i es la frecuencia del convertidor como se detalla en Schiffer *et al.* (2013), (3.5) puede reescribirse como

$$\dot{\delta}_i = \omega_i = \omega^d - k_{P_i}(P_i^m - P_i^d),\tag{3.6}$$

derivando (3.6) respecto al tiempo y sustituyendo \dot{P}_i^m se obtiene

$$\tau_{P_i}\dot{\omega}_i = -k_{P_i}(-P_i^m + P_i).\tag{3.7}$$

despejando P_i^m de (3.5) y bajo la consideración que $\dot{\delta}_i = \omega_i$ se tiene

$$P_i^m = \frac{-\omega_i}{k_{P_i}} + \frac{\omega^d}{k_{P_i}} + P_i^d\tag{3.8}$$

finalmente sustituyendo (3.8) en la ecuación (3.7) simplificando y ordenando, la ecuación diferencial para ω_i en lazo cerrado es

$$\tau_{P_i}\dot{\omega}_i = -\omega_i + \omega^d - k_{P_i}(P_i - P_i^d).\tag{3.9}$$

Un análisis similar puede hacerse para V_i , donde la ecuación diferencial correspondiente es

$$\tau_{P_i}\dot{V}_i = -V_i + V_i^d - k_{Q_i}(Q_i - Q_i^d)\tag{3.10}$$

De manera que usando (3.9) y (3.10), el modelo del sistema en lazo cerrado puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i \\ \tau_{P_i}\dot{\omega}_i &= -\omega_i + \omega^d - k_{P_i}(P_i - P_i^d) \\ \tau_{P_i}\dot{V}_i &= -V_i + V_i^d - k_{Q_i}(Q_i - Q_i^d)\end{aligned}\tag{3.11}$$

que puede reescribirse en forma vectorial para generalizarlo al conjunto \bar{n} de convertidores en la Microrred como

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ T\dot{\omega} &= -\omega + \mathbf{1}_n \omega^d - K_P (P - P^d) \\ T\dot{V} &= -V + V^d - K_Q (Q - Q^d)\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde P y Q son las ecuaciones de flujo de potencias dadas en (3.1) y se han definido los vectores y matrices del modelo como

$$\begin{aligned}P^d &:= \text{col}(P_i^d) \in \mathbb{R}^n & P &:= \text{col}(P_i) \in \mathbb{R}^n \\ Q^d &:= \text{col}(Q_i^d) \in \mathbb{R}^n & Q &:= \text{col}(Q_i) \in \mathbb{R}^n \\ V^d &:= \text{col}(V_i^d) \in \mathbb{R}^n & T &:= \text{diag}(\tau_{P_i}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ K_P &:= \text{diag}(k_{P_i}) \in \mathbb{R}^{n \times n} & K_Q &:= \text{diag}(k_{Q_i}) \in \mathbb{R}^{n \times n}\end{aligned}$$

y $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ un vector con todas sus entradas iguales a uno.

3.3. Análisis de Estabilidad

En esta sección se muestra el desarrollo matemático formal para análisis de estabilidad en Microrredes, detallando el análisis hecho en el trabajo de Schiffer *et al.* (2014).

3.3.1. Acotación de trayectorias

Con el fin de establecer las propiedades de estabilidad del sistema presentado en la sección anterior, en esta subsección se dan condiciones para el acotamiento de las trayectorias¹ (es decir se busca obtener un valor límite o frontera donde la función debe estar por debajo de ella) para los sistemas de ecuaciones (3.1) y (3.12) que viven en el conjunto denotado por el producto vectorial

$$\mathbb{M} := \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n\tag{3.13}$$

En este punto es conveniente establecer la siguiente consideración sobre la Microrred:

Consideración 3.3.1 *Se supone a la Microrred bajo comportamiento predominantemente inductivo*

$$\hat{B}_{ii} \leq 0 \text{ y } B_{ik} \leq 0, \quad i \sim \bar{n}, \quad k \sim \bar{n}$$

Bajo esta condición es posible establecer el siguiente resultado

¹Se busca acotar el lazo de control referido a la tensión, ya que análogo a SEPs convencionales, es más fácil modificar tensiones que ángulos mediante compensación con bancos de capacitores, máquinas síncronas, FACTS(Flexible AC Transmission systems), CEVs(Compensadores estáticos de VARs), etc.

Proposición 3.3.1 *Partiendo de los sistemas (3.1), (3.12) y bajo la Consideración 3.3.1. El conjunto definido en (3.13) es invariante y todas las trayectorias del sistema (3.1) y (3.12) son acotadas si se eligen V_i^d , k_{Q_i} , y Q_i^d tal que*

$$V_i^d + k_{Q_i} Q_i^d > 0, \quad i \sim \bar{n} \quad (3.14)$$

Prueba.- A partir de (3.1) y (3.11) se puede escribir $\tau_{P_i} \dot{V}_i = f_{3i}(\delta, V)$, para alguna función $f_{3i} := \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Evaluando esta función en cero

$$f_{3i}(\delta, V) |_{V_i=0} = V_i^d + k_{Q_i} Q_i^d$$

la cual, bajo la condición (3.14) es positiva, por lo tanto la siguiente implicación es verdadera

$$V_i(0) > 0 \Rightarrow V_i(t) > 0 \quad \forall t \geq 0,$$

es decir, si la derivada de V_i es positiva, significa que esta función crece y luego, si la condición inicial es positiva, esto implica que $V_i \in \mathbb{R}^+$ y por lo tanto no se sale del conjunto $\mathbb{R}_{>0}^n$. Esto demuestra que el conjunto (3.13) es invariante.

Para mostrar que las soluciones están acotadas se definen la matriz $\Gamma := \text{diag}(\frac{\tau_{P_i}}{k_{Q_i}})$, $i \sim \bar{n}$ y la función $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ relacionadas directamente con la tensión V , así pues se tiene

$$W(V) = \| \Gamma V \|_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_{P_i}}{k_{Q_i}} V_i, \quad (3.15)$$

siendo $\| \cdot \|_1$ la norma uno.²

Por definición la norma es positiva, entonces se usa a W como función Lyapunov, y luego mostrando que su derivada temporal es negativa o negativa semidefinida, se demuestra que sus argumentos están acotados. Así pues, evaluando la derivada de W a lo largo de las trayectorias se tiene

$$\dot{W} = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_{P_i}}{k_{Q_i}} \dot{V}_i$$

Obteniendo la expresión para \dot{V}_i del sistema de ecuaciones (3.11) y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\dot{W} = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_{P_i}}{k_{Q_i}} \frac{1}{\tau_{P_i}} [-V_i + V_i^d - k_{Q_i}(Q_i(\delta, V) - Q_i^d)]$$

o equivalentemente

$$\dot{W} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{k_{Q_i}} V_i \left(\frac{\tau_{P_i}}{\tau_{P_i}} \right) + \frac{1}{k_{Q_i}} V_i^d + Q_i^d - Q_i(\delta, V) \right]$$

²definida como $\| a_i \|_1 \triangleq \sum_{i=1}^n | a_i |$.

Como se busca acotar \dot{W} , se observa que el lado derecho de la expresión anterior se puede acotar por

$$\dot{W} \leq -\min \left\{ \frac{1}{\tau_{P_i}} \right\} \sum_{i=1}^n \frac{\tau_{P_i}}{k_{Q_i}} V_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k_{Q_i}} V_i^d + Q_i^d \right) - \sum_{i=1}^n Q_i(\delta, V)$$

con las constantes k_1 y k_2 definidas como

$$k_1 := \min_{i \in \bar{n}} \left\{ \frac{1}{\tau_{P_i}} \right\}, \quad k_2 := \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k_{Q_i}} V_i^d + Q_i^d \right)$$

de donde se obtiene que la aproximación debe ser menor o igual a la original W , es decir

$$\dot{W} \leq -k_1 W + k_2 - \sum_{i=1}^n Q_i$$

mas aún expresando Q en función de las tensiones como

$$V^T \mathcal{T}(\delta) V = \sum_{i=1}^n \left[-B_{ii} V_i^2 + \sum_{i \sim \mathcal{N}} B_{ik} V_i V_k \cos(\delta_{ik}) \right]$$

donde se define la matriz $\mathcal{T} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ con entradas

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}(\delta)]_{ii} &:= -B_{ii} \\ [\mathcal{T}(\delta)]_{ik} &:= B_{ik} \cos(\delta_{ik}), \quad i \neq k \end{aligned} \tag{3.16}$$

es posible escribir que

$$\dot{W} \leq -k_1 W + k_2 - V^T \mathcal{T}(\delta) V$$

Debe notarse que dado que $B_{ik} = B_{ki}$, implica que $\mathcal{T}(\delta)$ es simétrica y además $G_{ii} = \hat{G}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} G_{ik}$, $B_{ii} = \hat{B}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} B_{ik}$, donde $\hat{B}_{ii} \leq 0$, y $B_{ik} \leq 0$. Lo anterior implica que

$[\mathcal{T}(\delta)]_{ii} = -(\hat{B}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} B_{ik})$, $\therefore [\mathcal{T}(\delta)]_{ii} > 0$ y por lo tanto

$[\mathcal{T}(\delta)]_{ik} = B_{ik} \cos(\delta_{ik})$ no tiene signo definido.

Sin embargo $B_{ii} = \hat{B}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} B_{ik}$, por lo que es posible establecer que $[\mathcal{T}(\delta)]_{ii} \gg [\mathcal{T}(\delta)]_{ik}$ esto implica que $\mathcal{T}(\delta)$ es diagonalmente dominante, por lo tanto $\mathcal{T}(\delta)$ ésta acotada por alguna constante positiva de la forma $\mathcal{T}(\delta) \geq \Gamma$, o $\mathcal{T}(\delta) \leq nK_3\Gamma^2$, comparando con (3.15) si $V^T \mathcal{T}(\delta) V \leq nV^T \Gamma^2 V$ por lo que, observando que $nV^T \Gamma^2 V \geq \|\Gamma V\|_1^2 = W^2$ se tiene entonces

$$\dot{W} \leq -k_1 W + k_2 - k_3 W^2 \text{ con } k_3 > 0$$

lo cual establece una desigualdad diferencial. Para trabajar con esta expresión se hace uso del Lemma de comparación Khalil (2002), donde la desigualdad diferencial se representa por

una ecuación diferencial equivalente en z . Si la solución de la ecuación es acotada implica que la solución en W también lo es.

Así pues sea $\dot{z} = -k_1 z + k_2 - k_3 z^2$ con $z(0) = 0$, tiene como solución

$$z(t) = \frac{2k_2(-1 + e^{k_4 t}) + z_0(1 + e^{k_4 t}) + k_4(1 + e^{k_4 t})}{k_1(-1 + e^{k_4 t}) + k_4(1 + e^{k_4 t}) + 2k_3 z_0(-1 + e^{k_4 t})} \quad (3.17)$$

con

$$k_4 := \sqrt{4k_2 k_3 + k_1^2}$$

y además $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{2k_2 + z_0(-k_1 + k_4)}{k_1 + k_4 + 2k_3 z_0}$

Entonces del lemma de comparación para

$$\begin{aligned} W(V(0)) &\leq z_0 \\ W(V) &\leq z(t) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\tau_{P_i}}{k_{Q_i}} V_i(t) &\leq z(t) \end{aligned}$$

Lo anterior junto con la ecuación (3.17) implica que V está acotada, de donde implica que P y a su vez ω están acotadas, con lo cual la prueba esta completa.

3.3.2. Prueba de estabilidad

Una vez demostrado que las trayectorias de solución están acotadas, en esta subsección se procede a mostrar el análisis para obtener condiciones que aseguren estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de una Microrred sin pérdidas. En este sentido, la consideración de admitancias de línea sin pérdidas tiene su justificación en el hecho que la impedancia a la salida del convertidor (filtro) es típicamente inductiva mas la impedancia del transformador³ que es inductiva también, así la suma de las partes inductivas domina a la parte resistiva. Esta suposición permite establecer la siguiente consideración.

Consideración 3.3.2 $G_{ik} = 0$ y $B_{ik} \leq 0$, $i \sim \bar{n}$, $k \sim \bar{n}$.

Haciendo uso de la Consideración 3.3.2, las ecuaciones de flujo de potencia (3.1) se reducen a

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} |B_{ik}| V_i V_k \sin(\delta_{ik}) \\ Q_i &= |B_{ii}| V_i^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} |B_{ik}| V_i V_k \cos(\delta_{ik}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

³Se considera un transformador elevador de tensión de la misma capacidad de potencia del convertidor (por simplicidad de análisis) para la interconexión con el bus de CA de la Microrred

Otra consideración importante respecto al ángulo de fase δ es la siguiente

Consideración 3.3.3 *Existen constantes $\delta^s \in \Theta$, $\omega^s \in \mathbb{R}$ y $V^s \in \mathbb{R}_{>0}^n$, donde*

$$\Theta := \{\delta \in \mathbb{S}^n / |\delta_{ik}| < \frac{\pi}{2}, i \sim \bar{n}, k \sim \mathcal{N}_i\}$$

Tal que

$$\begin{aligned} 1_n \omega^s - 1_n \omega^d + K_P [P(\delta^s, V^s) - P^d] &= \underline{0}_n \\ V^s - V^d + K_Q [Q(\delta^s, V^s) - Q^d] &= \underline{0}_n \end{aligned} \quad (3.19)$$

En estado estable y bajo la Consideración 3.3.3 las trayectorias del sistema (3.12) y (3.1) están sincronizadas es decir, toman el mismo valor, si inician en un punto $(\delta^s, 1_n \omega^s, V^s)$ y están dadas por

$$\begin{aligned} \delta^*(t) &= \text{mod}_{2\pi} \{\delta^s + 1_n \omega^s t\} \\ \omega^*(t) &= 1_n \omega^s \\ V^*(t) &= V^s \end{aligned} \quad (3.20)$$

Puede observarse claramente que la trayectoria sincronizada (3.20) vive en el conjunto $\Theta \times 1_n \omega^s \times \mathbb{R}_{>0}^n$, donde ω^s es llamada frecuencia de sincronización y el operador $\text{mod}_{2\pi}(\cdot)$ se agrega para restar 2π si se rebasan los 360° .

Adicionalmente, para el desarrollo del análisis se introduce la siguiente consideración

Consideración 3.3.4 *De manera similar al procedimiento hecho en Bullo et al. (2013), es posible determinar ω^s bajo el supuesto que la red es un sistema sin pérdidas, es decir*

$$\sum_{i \sim \bar{n}} P_i^s = 0$$

Reemplazando la trayectoria sincronizada (3.20) en el modelo (3.11) puede encontrarse explícitamente la frecuencia de sincronización.

$$\begin{aligned} \omega^s - \omega^d + k_{P_i} (P_i^s - P^d) &= 0 \\ \omega^s = \omega^d + \frac{\sum_{i \sim \bar{n}} P_i^d}{\sum_{i \sim \bar{n}} \frac{1}{k_{P_i}}} &\Rightarrow \sum_{i \sim \bar{n}} \frac{\dot{\omega}_i}{k_{P_i}} \end{aligned}$$

Una importante observación sobre la dinámica de (3.12) y (3.1) es que su dependencia respecto a δ es vía la diferencia angular $\delta_i - \delta_k$, lo cual tiene dos implicaciones fuertes:

- i) Los flujos dados en (3.19) son invariantes a un desplazamiento de la forma $\delta + 1_n \omega^s t$, por lo cual también se puede estudiar la estabilidad de la trayectoria sincronizada (3.20) en coordenadas $\text{col}(\tilde{\delta}, \tilde{\omega}, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n$ dadas por

$$\tilde{\delta}(t) = \delta(0) + \int_0^t \tilde{\omega}(\tau) d\tau$$

$$\tilde{\omega}(t) = \omega(t) - 1_n \omega^s$$

donde por conveniencia, también se modifican las coordenadas de ω .

- ii) La convergencia de las dinámicas (3.12) y (3.1) a la trayectoria de sincronización (3.20), no está determinada por el valor de los ángulos sino por sus diferencias. Por lo tanto se puede elegir a un nodo n como referencia y expresar⁴ a $\tilde{\delta}_i \forall i \in \bar{n} \setminus \{n\}$ con respecto a $\tilde{\delta}_n$ vía la transformación

$$\begin{aligned} \theta &= \mathcal{R} \tilde{\delta}, \\ \mathcal{R} &:= [I_{n-1} \quad -1_{n-1}]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Bajo las implicaciones anteriores, se llega a un sistema reducido de orden $3n - 1$ con $\theta = \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ reemplazando a $\tilde{\delta}$. Por conveniencia para el análisis se definen, la constante $\theta_n := 0$ (no pertenece al vector de estados) y $\theta_{ik} \equiv \delta_{ik}$, que además cumplen con $\theta_{ik} := \theta_i - \theta_k, \forall k \neq n$ y $\theta_{in} \equiv \theta_i$. Así pues introduciendo la dinámica del error, el cambio de coordenadas esta dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_i &= \delta_i + \omega^s t \\ \tilde{\omega}_i &= \omega_i - \omega^s \end{aligned}$$

hacia este fin, es importante señalar que a la tensión no se le imprime dinámica de error, ya que el objetivo no es sincronizarla a un mismo valor, si no que se busca tener un valor constante.

Escribiendo la dinámica del sistema (3.12) y (3.1) en las nuevas coordenadas $x := \text{col}(\theta, \tilde{\omega}, V) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n$, para toda $i \in \bar{n} \setminus \{n\}$ y definiendo las siguientes constantes que serán útiles en el desarrollo de la prueba

$$\begin{aligned} c_{1i} &:= \omega^d - \omega^s + k_{P_i} P_i^d \\ c_{2i} &:= V^d + k_{Q_i} Q_i^d \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n \\ \tau_{P_i} \dot{\tilde{\omega}}_i &= -\tilde{\omega}_i - k_{P_i} \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\delta_{ik}) + c_{1i} \\ \tau_{P_i} \dot{V}_i &= -V_i - k_{Q_i} \left[|B_{ii}| V_i^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \cos(\delta_{ik}) \right] + c_{2i} \end{aligned} \tag{3.22}$$

mientras que la dinámica del enésimo nodo n que sirve como referencia, esta dada por

$$\begin{aligned} \tau_{P_n} \dot{\tilde{\omega}}_n &= -\tilde{\omega}_n - k_{P_n} \sum_{k \sim \mathcal{N}_n} V_n V_k |B_{nk}| \sin(\delta_n) + c_{1n} \\ \tau_{P_n} \dot{V}_n &= -V_n - k_{Q_n} \left[|B_{nn}| V_n^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_n} V_n V_k |B_{nk}| \cos(\delta_n) \right] + c_{2n}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

⁴Donde $\setminus \{n\}$ se lee como excepto el nodo n

El sistema (4.8)-(3.23) vive en el conjunto $\tilde{\mathbb{M}} := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n$, y tiene un equilibrio asintóticamente estable en el punto

$$x^s := \text{col}(\theta^s, \underline{Q}_n, V^s), \quad (3.24)$$

lo cual implica convergencia de todas las trayectorias del sistema (3.12) y (3.1) a la trayectoria sincronizada (3.20).

Bajo esta condición es posible establecer el siguiente resultado

Proposición 3.3.2 *Partiendo del sistema (3.12) y (3.1) con las Consideraciones (3.3.2) y (3.3.3). Se fijan τ_{P_i} , k_{P_i} , y P_i^d , $i \sim n$ y se seleccionan V_i^d , k_{Q_i} y Q_i^d de una manera, tal que*

$$\mathcal{D} + \mathcal{T}(\theta^s) - \mathcal{W}^T \mathcal{L}^{-1} \mathcal{W} > 0 \quad (3.25)$$

Entonces el punto de equilibrio (3.24) del sistema (4.8)-(3.23) es asintóticamente estable localmente.

Prueba

Definiendo el vector de estados del sistema como $x := \text{col}(\theta, \tilde{\omega}, V)$ y siguiendo un enfoque de Control Basado en Pasividad por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento, IDA-PBC por sus siglas en inglés (Ortega *et al.* (2002)), se puede representar al sistema (4.8)-(3.23) como un sistema Hamiltoniano controlado por puerto(PCH) de la forma

$$\dot{x} = [J - R(x)] \nabla H, \quad (3.26)$$

para identificar una función de Lyapunov candidata de energía.

Así pues, partiendo del sistema (3.11) expresado en forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i \\ \dot{V}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n \\ \frac{1}{\tau_{P_i}} \left\{ -\tilde{\omega}_i - k_{P_i} \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) + c_{1i} \right\} \\ \frac{1}{\tau_{P_i}} \left\{ -V_i - k_{Q_i} \left[|B_{ii}| V_i^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \right] + c_{2i} \right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n \\ \frac{-k_{P_i}}{\tau_{P_i}} \left(\frac{-c_{1i}}{k_{P_i}} + P \right) - \frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}^2} \left(\frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} [\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n] \right) \\ -\frac{k_{Q_i} V_i}{\tau_{P_i}} \left\{ \frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \right\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}} & 0 \\ -\frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}} & -\frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{Q_i}V_i}{\tau_{P_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{c_{1i}}{k_{P_i}} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \\ \frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n) \\ \frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \end{bmatrix}$$

se tiene finalmente al sistema en la forma Hamiltoniana (3.26)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i \\ \dot{V}_i \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}} & 0 \\ -\frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{Q_i}V_i}{\tau_{P_i}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{c_{1i}}{k_{P_i}} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \\ \frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n) \\ \frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \end{bmatrix},$$

donde se observa claramente que $J = -J^T$ y $R \geq 0$.

Ahora se procede a obtener la función candidata de energía a partir del vector ∇H , así pues

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial H_2}{\partial \tilde{\omega}_i} \\ \frac{\partial H_3}{\partial V_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{1i}}{k_{P_i}} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \\ \frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n) \\ \frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \end{bmatrix}$$

con $H(x) = H_1 + H_2 + H_3$. Siendo así

$$H_1 = \int_0^{\theta_i} \left[-\frac{c_{1i}}{k_{P_i}} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \right] d\theta_i$$

$$H_1 = \frac{c_{1i}}{k_{P_i}} \theta_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}),$$

teniendo en cuenta que θ_n no pertenece al vector de estados y por ende $\omega_n = 0$, se tiene

$$H_2 = \int_0^{\tilde{\omega}_i} \left[\frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n) \right] d\tilde{\omega}_i,$$

$$H_2 = \frac{\tau_{P_i}}{2k_{P_i}} \tilde{\omega}_i^2,$$

$$H_3 = \int_0^{V_i} \left[\frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \right] dV_i$$

$$H_3 = \frac{V_i}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{k_{Q_i}} \ln(V_i) + \frac{1}{2} |B_{ii}| V_i^2 - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}).$$

Generalizando a todos los nodos y tomando en cuenta al nodo referencia, se tiene

$$H(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\tau_{P_i}}{2k_{P_i}} \tilde{\omega}_i^2 + \frac{1}{k_{Q-i}} [V_i - c_{2i} \ln(V_i)] + \frac{1}{2} |B_{ii}| V_i^2 - 2 \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \right\} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{1i}}{k_{P_i}} \theta_i$$

Analizando la derivada de la función candidata de energía (H), mediante la regla de la cadena, se tiene

$$\dot{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^T \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^T \dot{x}$$

donde se transpone al vector gradiente para conservar las dimensiones, con $\frac{\partial H}{\partial x_i} = \nabla H$ y sustituyendo \dot{x} dada por la ecuación (3.26), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \nabla H^T [J - R(x)] \nabla H \\ \dot{H} &= \nabla H^T J \nabla H - \nabla H^T R(x) \nabla H \end{aligned}$$

dado que $J = -J^T$ es antisimétrica y $R(x) \geq 0$, usando propiedades de las matrices y el concepto de formas cuadráticas, se tiene

$$\dot{H} = -\nabla H^T [R(x)] \nabla H \leq 0. \quad (3.27)$$

Hasta aquí se tienen indicios de estabilidad, puesto que $\dot{H}(x)$ es negativa semidefinida, lo cual implica estabilidad mas no estabilidad asintótica. Bajo estas condiciones, se procederá a:

1. Demostrar que $H(x)$ es estrictamente positiva definida con un mínimo estricto en el punto de equilibrio (3.24), mediante un análisis de máximos y mínimos tradicional.
2. Con el teorema de invarianza de LaSalle probar estabilidad asintótica, lo cual es suficiente mostrando que a lo largo de las trayectoria de (3.26) \dot{H} tenderá al punto de equilibrio x^s como el tiempo tienda a infinito.

Así pues, con el criterio de la primera derivada se obtienen los puntos de inflexión que satisfacen $\nabla H(x^s) = \underline{0}$.

$$-\frac{c_{1i}}{k_{P_i}} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} \tilde{\omega}_i = 0, \quad \tilde{\omega}_i = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) = 0 \quad (3.30)$$

Reescribiendo las ecuaciones (3.28) y (3.30) tomado en cuenta la definición de las constantes c_{1i} y c_{2i} , simplificando y reordenando, se llega a

$$\omega_i^d = \omega_i^s - k_{P_i} P_i^d + k_{P_i} \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \quad (3.31)$$

$$V_i^d = V_i - k_{Q_i} Q_i^d + k_{Q_i} Q_i$$

igualando las ω^d 's y V^d 's del sistema de ecuaciones (3.31) con las de la trayectoria sincronizada (3.19)

$$\begin{aligned} \omega^s + k_{P_i} \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i^s V_k |B_{ik}| \sin(\delta_{ik}^s) - k_{P_i} P_i^d &= \omega_i^s - k_{P_i} P_i^d + k_{P_i} \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \\ V_i^s + k_{Q_i} Q_i^s - k_{Q_i} Q_i^d &= V_i - k_{Q_i} Q_i^d + k_{Q_i} Q_i, \end{aligned} \quad (3.32)$$

recordando que $\delta_{ik} \equiv \theta_{ik}$, para que se cumpla la igualdad (3.32) implica necesariamente que $\theta_i^s = \theta_i$ y $V_i^s = V_i$, que es el punto de equilibrio (3.24).

Ahora se utiliza el criterio de la segunda derivada para determinar si la función tiene un mínimo o un máximo, recordando que x se define como $x := \text{col}(\theta, \tilde{\omega}, V)$ implica que

$$\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_i^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_i} & \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\omega}_i} & \frac{\partial H_1}{\partial V_i} \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_i} & \frac{\partial H_2}{\partial \tilde{\omega}_i} & \frac{\partial H_2}{\partial V_i} \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_i} & \frac{\partial H_2}{\partial \tilde{\omega}_i} & \frac{\partial H_3}{\partial V_i} \end{bmatrix}$$

así pues, obteniendo dichas derivadas se tiene

$$\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_i^2} \Big|_{x^s} = \begin{bmatrix} V_i^s \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k^s |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}^s) & 0 & \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k^s |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}^s) \\ 0 & \frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} & 0 \\ \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k^s |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}^s) & 0 & |B_{ii}| + \frac{1}{(V_i^s)^2} \left\{ \frac{V_i^d + k_{Q_i} Q_i^d}{k_{Q_i}} \right\} \end{bmatrix}$$

Generalizando para todos los n nodos en la Microrred, se definen las matrices \mathcal{L} y \mathcal{W} , con $i \in \bar{n} \setminus \{n\}$, $k \in \bar{n} \setminus \{n\}$ y $m \in \bar{n}$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} &\begin{cases} \ell_{ii} := \sum_{m=1}^n |B_{im}| V_i^s V_m^s \cos(\delta_{im}^s) \\ \ell_{ik} := - |B_{ik}| V_i^s V_k^s \cos(\theta_{ik}^s) \end{cases} \\ \mathcal{W} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n)} &\begin{cases} w_{ii} := \sum_{m=1}^n |B_{im}| V_m^s \sin(\delta_{im}^s) \\ w_{ik} := |B_{ik}| V_i^s \sin(\theta_{ik}^s) \end{cases} \end{aligned}$$

donde \mathcal{L} está relacionada con $\frac{\partial P}{\partial \theta_i}$, \mathcal{W} con $\frac{\partial P}{\partial V_i}$ y \mathcal{W}^T a su vez con $\frac{\partial Q}{\partial \theta_i}$.

Recordando la matriz \mathcal{T} definida en (3.16), pero ahora evaluada en θ^s con $i \neq k$, $i \in \bar{n}$ y $k \in \bar{n}$, se tiene

$$\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} \begin{cases} t_{ii} := |B_{ii}| \\ t_{ik} := - |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}^s) \end{cases}$$

donde \mathcal{T} representa la matriz de admitancia de la Microrred. Se define a la matriz \mathcal{D} de la siguiente manera

$$\mathcal{D} := \frac{V_m^d + k_{Q_m} Q_m^d}{k_{Q_m} (V_m^s)^2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

y representa a la matriz de parámetros libres, la matriz \mathcal{A} , es una matriz de constantes de tiempo y ganancias reactivas, definida como

$$\mathcal{A} := \text{diag} \left(\frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Por lo tanto el Hessiano de $H(x)$ evaluado en x^s está dado por

$$\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_i^2} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & 0_{(n-1) \times n} & \mathcal{W} \\ 0_{n \times (n-1)} & \mathcal{A} & 0_{n \times n} \\ \mathcal{W}^T & 0_{n \times n} & \mathcal{D} + \mathcal{T}(\theta^s) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

el Hessiano es positivo definido si y solo si la submatriz (3.34) es positiva definida.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{W} \\ \mathcal{W}^T & \mathcal{D} + \mathcal{T}(\theta^s) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

con lo que la matriz (3.34) es positiva definida si y solo si

$$\mathcal{D} + \mathcal{T}(\theta^s) - \mathcal{W}^T \mathcal{L}^{-1} \mathcal{W} > 0 \quad (3.35)$$

que es la condición (3.25), bajo lo anterior $H(x)$ es positiva definida.

Ahora para probar estabilidad asintótica, se empleará el teorema de invarianza de LaSalle, para demostrar que a lo largo de las trayectoria de (3.26) \dot{H} tenderá al punto de equilibrio x^s como el tiempo tienda a infinito. Así, el conjunto invariante más grande donde $\dot{H} = 0$ está dado por

$$R[x(t)] \nabla H[x(t)] \equiv 0_{3n-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = x^s \quad (3.36)$$

así pues, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{P_i}}{\tau_{P_i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{Q_i} V_i}{\tau_{P_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{c_{1i}}{k_{P_i}} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_i V_k |B_{ik}| \sin(\theta_{ik}) \\ \frac{\tau_{P_i}}{k_{P_i}} (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_n) \\ \frac{1}{k_{Q_i}} - \frac{c_{2i}}{V_i k_{Q_i}} + |B_{ii}| V_i - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} V_k |B_{ik}| \cos(\theta_{ik}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tilde{\omega}_i}{\tau_{P_i}} \\ \frac{V_i}{\tau_{P_i}} - \frac{V_i^d}{\tau_{P_i}} - \frac{k_{Q_i} Q_i^d}{\tau_{P_i}} + \frac{k_{Q_i} Q_i}{\tau_{P_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 0 \\
\tilde{\omega}_i &= 0 \\
\frac{1}{\tau_{P_i}} [V_i - V_i^d + k_{Q_i}(Q_i - Q_i^d)] &= 0
\end{aligned}$$

sustituyendo $V_i = V_i^s$ obtenido de la trayectoria sincronizada (3.20) y resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se vuelve a obtener el punto de equilibrio (3.24)

$$x^s \begin{cases} \theta_{ik}^s = \theta_{ik} \\ \tilde{\omega}_i = 0 \\ V_i^s = V_i \end{cases}$$

por lo tanto se puede concluir que el punto de equilibrio (3.24) de (4.8)-(3.23) es **asintóticamente estable**.

3.4. Evaluación numérica

El análisis presentado en la sección anterior se valida numéricamente, considerando una sub-red de referencia del CIGRE a media tensión tomada de Rudion *et al.* (2006) y mostrada en la Figura 3.2.

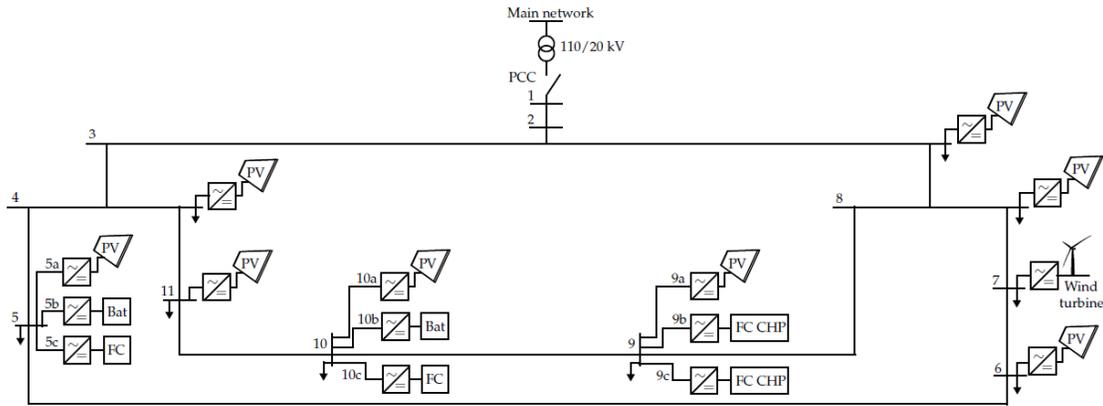


Figura 3.2: Modelo de Microrred a media tensión (20 kV).

Para esta red se denota la potencia nominal del i -ésimo convertidor como S_i^N , mientras que la impedancia de los transformadores a la salida de cada convertidor se compone por su resistencia interna dada por $R_{T_i} = \frac{0.01 S_{base}}{S_i^N} pu$, y su reactancia interna $X_{T_i} = \frac{0.06 S_{base}}{S_i^N} pu$.

Se asume que la potencia nominal del transformador es igual a la del convertidor y la inductancia del filtro de medición es igual a $X_F = 0.0005 pu$. Al considerar una red sin

pérdidas, todas las cargas y las fuentes no controladas de la Microrred son despreciadas. Se supone que las baterías en los nodos 5b y 10b están operando en modo carga y que la capacidad máxima de potencia para la i -ésima fuente es S_i^N .

- La ganancia y puntos de ajuste para potencia activa se seleccionan como $k_{P_i} = \frac{0.1}{S_i^N}$, $P_i^d = \alpha_i S_i^N$, con $\alpha_i = 0.5$ para inversores en modo generación y $\alpha_i = -0.4$ para inversores en modo carga.
- La ganancia y puntos de ajuste para potencia reactiva se seleccionan como $k_{Q_i} = \frac{0.2}{S_i^N}$, $Q_i^d = \beta_i S_i^N$, con $\beta = 0.01$ para todas las unidades.

Se considera una constante de tiempo del i -ésimo convertidor $\tau_{P_i} = 0.5$ [s], para todos los convertidores. Los parámetros de simulación para el caso de una red sin pérdidas se muestran en la Tabla 3.1.

VALORES BASE	$S_{Base} = 4.75 \text{ MVA}, V_{Base} = 20 \text{ kV}$
S_i^N	(0.505, 0.028, 0.261, 0.179, 0.168, 0.012)[pu]
P_i^d	(-0.202, 0.014, 0.131, 0.089, -0.067, 0.006)[pu]
k_{P_i}	(0.198, 3.599, 0.383, 0.560, 0.594, 8.482)[$\frac{Hz}{pu}$]
Q_i^d	(0.005, 0.000, 0.003, 0.002, 0.002, 0.000)[pu]
k_{Q_i}	(0.396, 7.197, 0.766, 1.120, 1.188, 16.964)[$\frac{pu}{pu}$]

Tabla 3.1: Parámetros de simulación.

Adicionalmente las cargas se modelan como impedancias constantes, se trabaja con una red reducida donde en los $n \geq 1$ nodos, hay por lo menos un Convertidor de Potencia. Los parámetros de la red, tomados de Rudion *et al.* (2006) se muestran en la Tabla 3.2.

El diagrama de la red evaluada es el que se muestra en la Figura (3.3). En ella se consideran como unidades base para los cálculos en por unidad a $S_B = 4.75 \text{ MVA}$ y $V_B = 20 \text{ kV}$, mientras que las unidades de generación se modelan como fuentes constantes de magnitud 1.0 pu . Despreciando todas las cargas, fuentes de generación no controlables (solar y eólica) y reduciendo impedancias en serie, se obtiene la red mostrada en la Figura 3.3.

Nodos	$R[\frac{\Omega}{km}]$	$X[\frac{\Omega}{km}]$	Longitud[km]	$R[\Omega]$	$X[\Omega]$
1 – 2	0.579	0.367	2.82	1.623	1.035
2 – 3	0.164	0.113	4.42	0.725	0.499
3 – 4	0.262	0.121	0.61	0.159	0.073
4 – 5	0.354	0.129	0.56	0.198	0.072
5 – 6	0.336	0.126	1.56	0.517	0.194
6 – 7	0.256	0.13	0.24	0.061	0.031
7 – 8	0.294	0.123	1.67	0.490	0.205
8 – 9	0.339	0.13	0.32	0.108	0.041
9 – 10	0.339	0.133	0.77	0.307	0.102
10 – 11	0.367	0.133	0.33	0.121	0.043
11 – 4	0.423	0.134	0.49	0.207	0.065
3 – 8	0.172	0.115	1.3	0.223	0.149

Tabla 3.2: Parámetros de la Microrred.

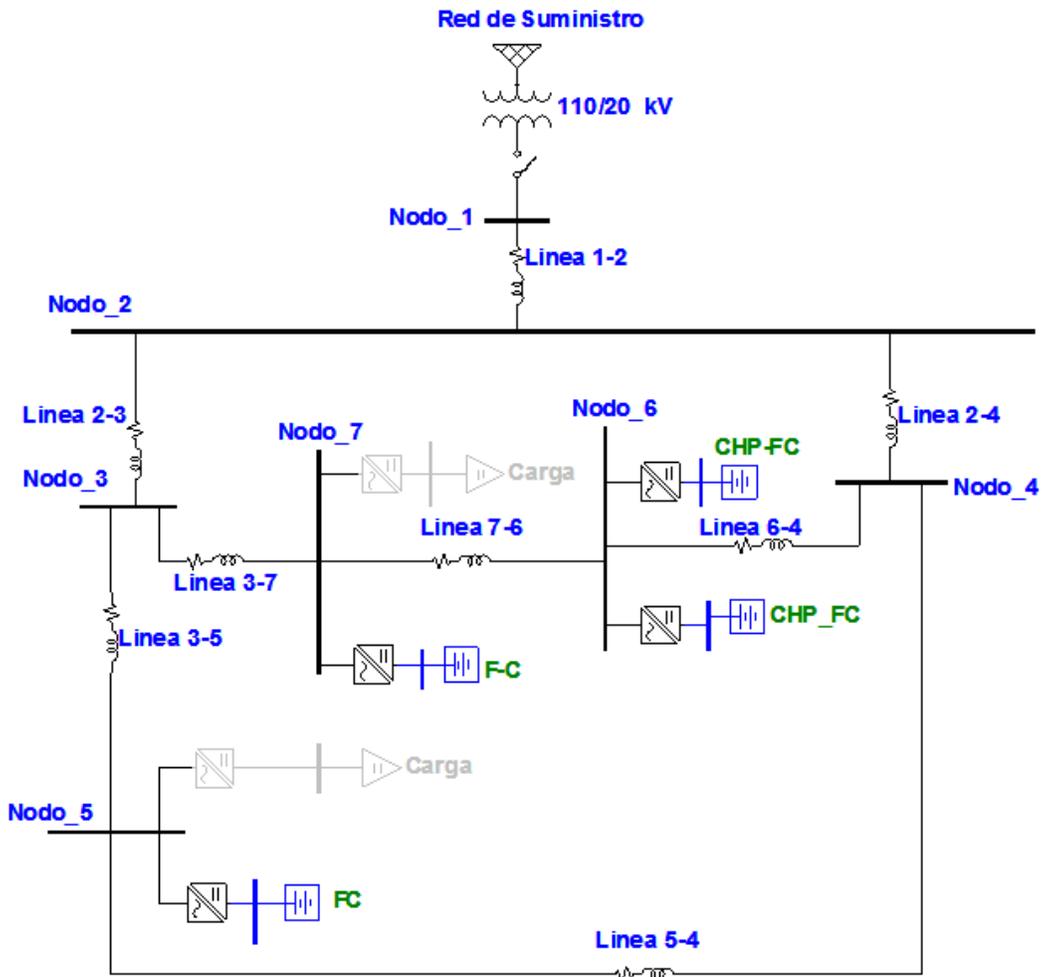


Figura 3.3: Red con reducción de impedancias en serie

Para realizar el análisis de la red, se obtiene un modelo reducido de la misma aplicando el método de reducción de Kron. En este sentido, la matriz de admitancia reducida está dada por $Y^{Kron} = Y_{ij} - Y_{ik}Y_{kk}^{-1}Y_{ki}$. Para la obtención de esta matriz se construye la matriz de admitancia de la red a partir de la expresión $I = YV$, es decir

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} & -y_{15} & -y_{16} & -y_{17} \\ -y_{21} & y_{22} & -y_{23} & -y_{24} & -y_{25} & -y_{26} & -y_{27} \\ -y_{31} & -y_{32} & y_{33} & -y_{34} & -y_{35} & -y_{36} & -y_{37} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} & y_{44} & -y_{45} & -y_{46} & -y_{47} \\ -y_{51} & -y_{52} & -y_{53} & -y_{54} & y_{55} & -y_{56} & -y_{57} \\ -y_{61} & -y_{62} & -y_{63} & -y_{64} & -y_{65} & y_{66} & -y_{67} \\ -y_{71} & -y_{72} & -y_{73} & -y_{74} & -y_{75} & -y_{76} & y_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix}$$

con $I_n = 0$ donde no haya inyección de corriente.

La matriz de admitancia de la red es entonces

$$Y^{bus} = \begin{bmatrix} Y_{12} & -Y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_{12} & Y_{22} & -Y_{23} & -Y_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{23} & Y_{33} & 0 & -Y_{35} & 0 & -Y_{37} \\ 0 & -Y_{24} & 0 & Y_{44} & -Y_{45} & -Y_{46} & 0 \\ 0 & 0 & -Y_{35} & -Y_{45} & Y_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{46} & 0 & Y_{66} & -Y_{67} \\ 0 & 0 & -Y_{37} & 0 & 0 & -Y_{67} & Y_{77} \end{bmatrix}$$

donde

$$Y_{22} = (Y_{12} + Y_{23} + Y_{24}), Y_{33} = (Y_{23} + Y_{35} + Y_{37})$$

$$Y_{44} = (Y_{24} + Y_{45} + Y_{46}), Y_{55} = (Y_{35} + Y_{45})$$

$$Y_{66} = (Y_{46} + Y_{67}), Y_{77} = (Y_{37} + Y_{67})$$

Aplicando reducción de Kron hasta tener únicamente nodos con Convertidores de Potencia, se llega a que la matriz de admitancia de la red reducida es

$$Y^{Kron} = \begin{bmatrix} 243.15 - j94.09 & -119.18 + j56.05 & -123.97 + j38.06 \\ -119.18 + j56.05 & 409.68 - j158.24 & -290.5 + j102.21 \\ -123.97 + j38.06 & -290.50 + j102.21 & 414.47 - j140.21 \end{bmatrix}$$

con lo que la red reducida obtenida es la que se muestra en la Figura 3.4.

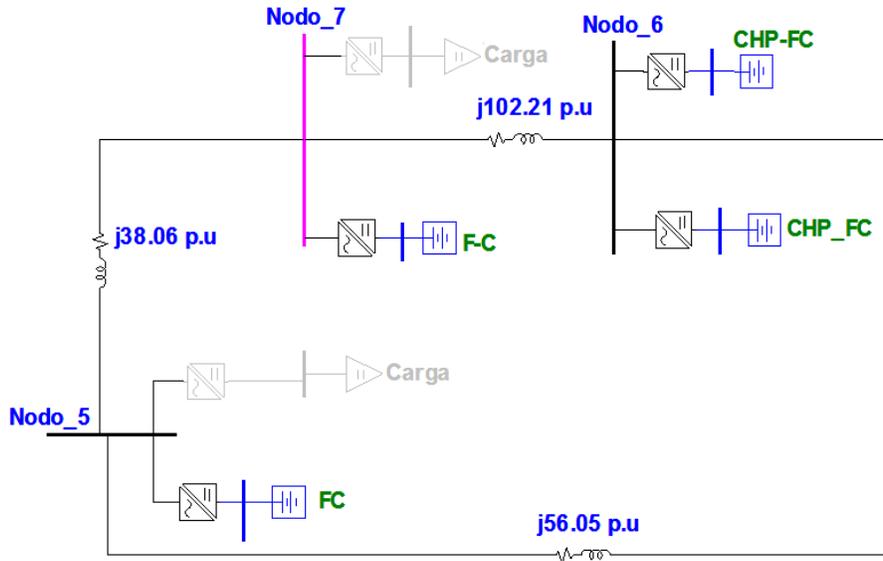


Figura 3.4: Red reducida de Kron

El grafo que representa a la red anterior se muestra en la Figura 3.5

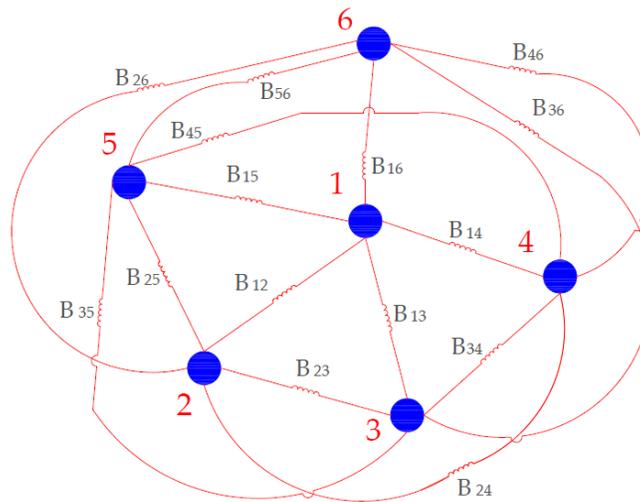


Figura 3.5: Grafo que representa a la red reducida de Kron

De esta forma el modelo que representa a la Microrred es

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \dot{\delta}_3 \\ \dot{\delta}_4 \\ \dot{\delta}_5 \\ \dot{\delta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \\ \dot{\omega}_5 \\ \dot{\omega}_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \omega^d - K_P \left\{ \begin{bmatrix} P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15} + P_{16} \\ P_{21} + P_{23} + P_{24} + P_{25} + P_{26} \\ P_{31} + P_{32} + P_{34} + P_{35} + P_{36} \\ P_{41} + P_{42} + P_{43} + P_{45} + P_{46} \\ P_{51} + P_{52} + P_{53} + P_{54} + P_{56} \\ P_{61} + P_{62} + P_{63} + P_{64} + P_{65} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1^d \\ P_2^d \\ P_3^d \\ P_4^d \\ P_5^d \\ P_6^d \end{bmatrix} \right\}$$

$$T \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \\ \dot{V}_5 \\ \dot{V}_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V^d \\ V^d \\ V^d \\ V^d \\ V^d \\ V^d \end{bmatrix} - K_Q \left\{ \begin{bmatrix} Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{15} + Q_{16} \\ Q_{21} + Q_{23} + Q_{24} + Q_{25} + Q_{26} \\ Q_{31} + Q_{32} + Q_{34} + Q_{35} + Q_{36} \\ Q_{41} + Q_{42} + Q_{43} + Q_{45} + Q_{46} \\ Q_{51} + Q_{52} + Q_{53} + Q_{54} + Q_{56} \\ Q_{61} + Q_{62} + Q_{63} + Q_{64} + Q_{65} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1^d \\ Q_2^d \\ Q_3^d \\ Q_4^d \\ Q_5^d \\ Q_6^d \end{bmatrix} \right\}$$

Los resultados de la simulación se presentan a continuación:

En la Figura 3.6 se muestra la sincronización de todas las frecuencias de los convertidores a un mismo valor, en este caso 60[Hz].

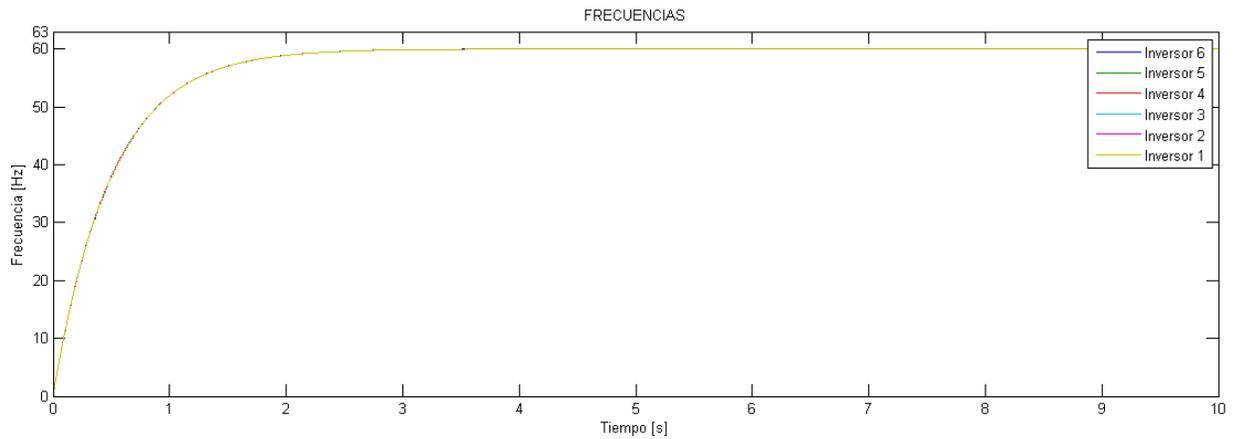


Figura 3.6: Frecuencias de los convertidores

En la Figura 3.7, se muestran los niveles de tensión alcanzados por cada uno de los convertidores

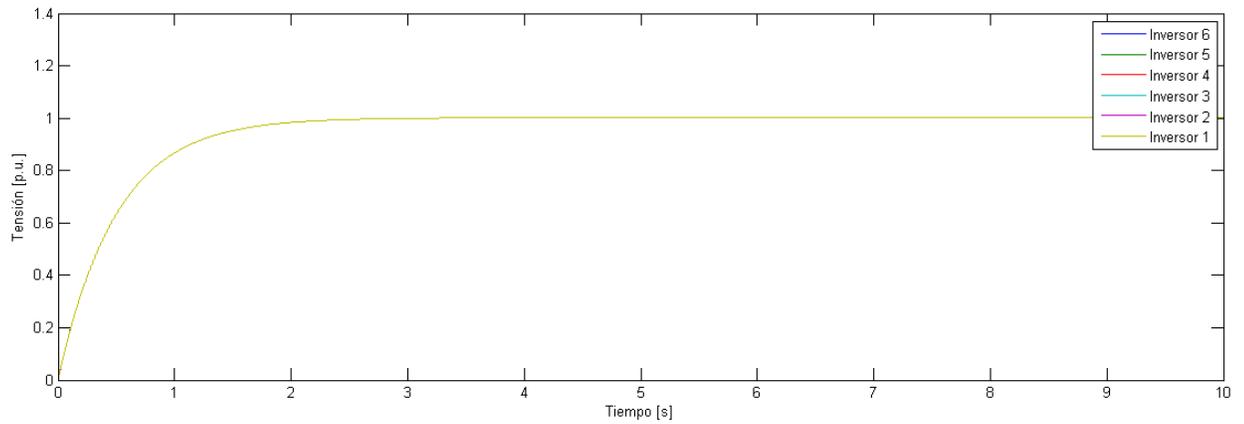


Figura 3.7: Niveles de tensión de los convertidores de potencia

La Figura 3.8, muestra la sincronización de las potencias activas, proporcionadas por los convertidores

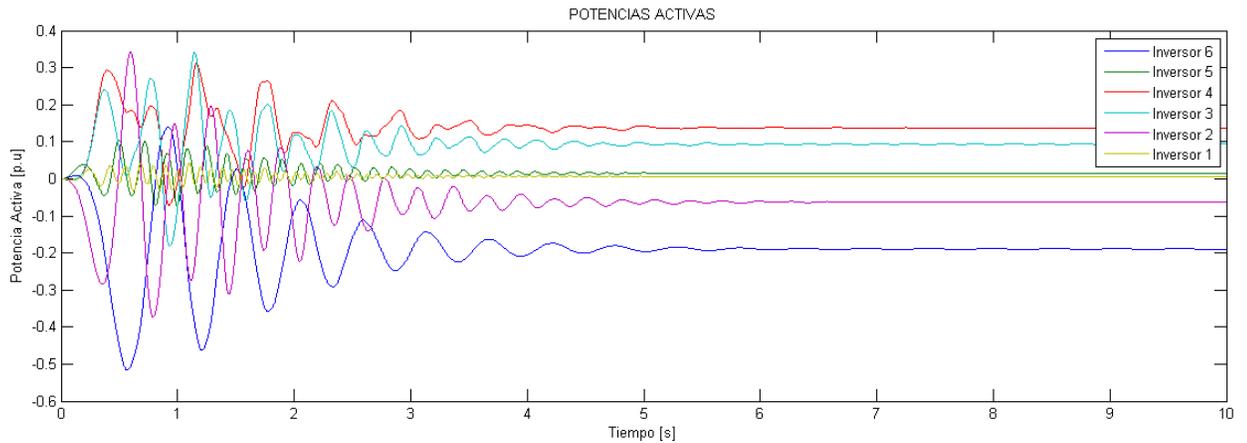


Figura 3.8: Potencias activas de los convertidores

Por último, en la Figura 3.9 se muestra la sincronización de potencia reactiva proporcionada por cada uno de los convertidores, a un nivel constante en estado estable.

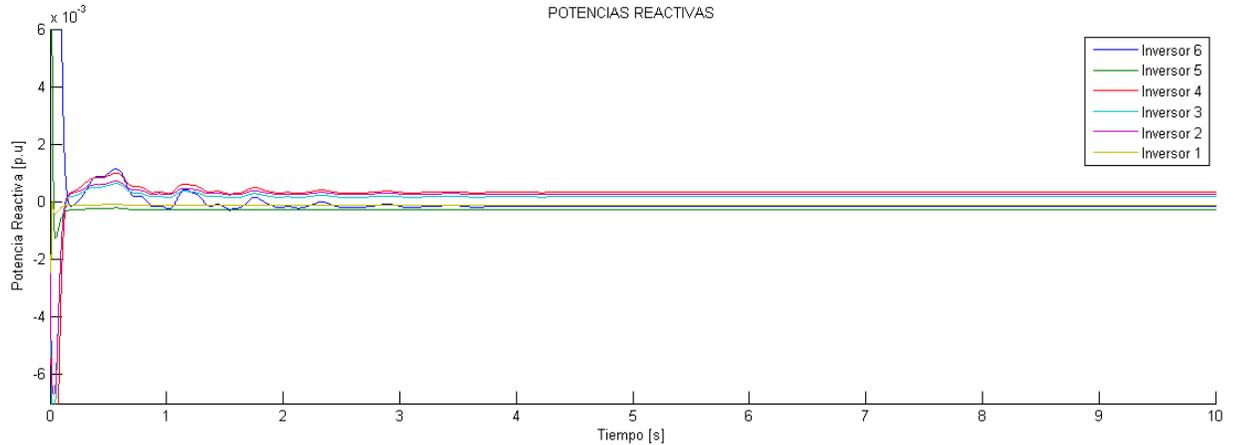


Figura 3.9: Potencias reactivas de los convertidores

3.5. Discusión

Como lo muestran las simulaciones, la frecuencia se sincroniza a un solo valor deseado o nominal, en este caso $60[Hz]$. La tensión también se logra sincronizar a un valor constante, siendo estas dos variables de vital importancia en operación aislada de la Microrred para cumplir con los lineamientos en calidad de la tensión y la energía estipulados en la normatividad, por ejemplo la *IEEE Application Guide for IEEE Std 1547(TM), IEEE Standard for Interconnecting Distributed Resources with Electric Power Systems* (2009).

Las potencias activas y reactivas logran el objetivo de sincronización a un valor constante en estado estable, lo cual es validado formalmente con una prueba de estabilidad que permitió establecer el criterio para la selección de ganancias y puntos de operación, aunado además a la evaluación numérica.

En este momento es conveniente recordar que los resultados mostrados se incluyen en el trabajo, pues ellos servirán como punto de comparación para mostrar que los resultados propuestos en esta tesis alcanzan el mismo objetivo de control, con la novedad de considerar un modelo más detallado de los convertidores de Potencia.

Capítulo 4

Convertidores de potencia

4.1. Introducción

En este capítulo se analiza el modelo dinámico del Convertidor de Potencia considerado en este trabajo de tesis, partiendo de los trabajos previos de Martínez Pérez (2005) y Vázquez Rueda (2014), donde está ampliamente caracterizado y estudiado. De una manera análoga al capítulo anterior se obtiene una representación Hamiltoniana del convertidor y se emplea un enfoque de Lyapunov para analizar de una manera formal las propiedades de estabilidad de la ley de control. Tal análisis es validado por medio de una evaluación numérica.

4.2. Estructura

Se analiza un modelo de Convertidor de Potencia para obtener una nueva ley de control que cumpla con el objetivo de lograr un comportamiento deseado para la tensión y corriente en sus terminales, modelo representado esquemáticamente en la Figura 4.1, el cual ha sido estudiado y caracterizado ampliamente en el trabajo de Martínez Pérez (2005), donde se orienta hacia una aplicación de sistema de alimentación ininterrumpida (UPS por sus siglas en inglés) y el trabajo de Vázquez Rueda (2014), donde se diseñan e implementan las etapas de un convertidor multinivel para evaluar diferentes esquemas de conmutación propuestos para el controlador.

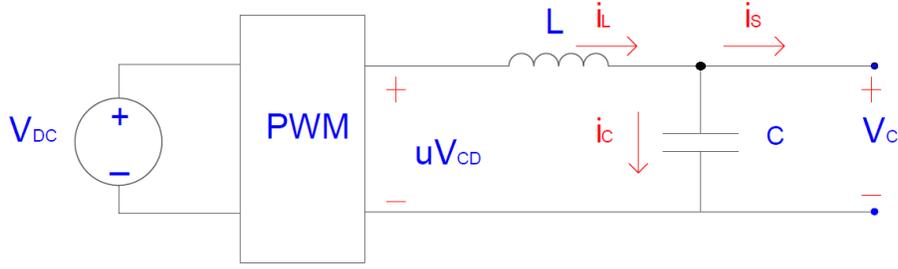


Figura 4.1: Modelo del convertidor con su dinámica

El Convertidor de Potencia está compuesto por una fuente de Corriente Directa (DC) y un filtro LC, de segundo orden, interconectados por un bloque de conmutación que incluye dispositivos semiconductores (Transistores bipolares de compuerta aislada, IGBTs por sus siglas en inglés). Este bloque puede exhibir diferentes topologías, pero dado que el interés en este trabajo de tesis no recae en este tema, en adelante sólo se considerará su efecto sobre las variables del circuito, es decir, con fines de modelado sólo se considerará que en el puerto en donde se conecta el filtro se genera una tensión cuyo valor es el de la fuente de CD modulado por una variable, que fungirá como variable de control, que varía en el intervalo $(-1, 1)$.

El análisis del circuito inicia con la Ley de voltajes de Kirchhoff de la malla del filtro

$$\mu V_{CD} + V_L + V_C = 0$$

y con la Ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo

$$i_L - i_C - i_s = 0,$$

como la tensión en el capacitor es la tensión en terminales del convertidor y la corriente en el inductor es la encargada de producir dicha tensión, estas son las variables de interés en el análisis, así pues se tiene

$$V_L + V_C = \mu V_{CD}$$

$$i_C - i_L = -i_s$$

Entonces se procede a sustituir las leyes de elemento (tensión en el inductor y corriente en el capacitor) en las leyes del conjunto, para obtener la siguiente representación del modelo del convertidor

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} + V_C &= \mu V_{CD} \\ C \frac{dV_C}{dt} - i_L &= -i_s \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.3. Control

En esta sección se concibe la ley de control μ que dará origen a la señal de conmutación de los IGBTs en el convertidor, para obtener la tensión y corriente deseadas en terminales. Debido a la técnica de diseño utilizada, es conveniente considerar una representación Hamiltoniana del modelo del sistema, mediante los elementos almacenadores de energía, es decir

$$\begin{aligned}\lambda &= Li_L \\ q &= CV_C.\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde λ es el encadenamiento de flujo magnético en la bobina, mientras que q es la carga eléctrica almacenada por el capacitor.

En términos de estas variables, se puede obtener la siguiente función de energía

$$H = \frac{1}{2}L^{-1}\lambda^2 + \frac{1}{2}C^{-1}q^2,\tag{4.3}$$

la cual presenta la propiedad de que obteniendo su derivada respecto a las variables de estado λ y q , se obtiene que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = L^{-1}\lambda = i_L\tag{4.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = C^{-1}q = V_C.$$

A partir de las ecuaciones (4.2) se obtiene

$$\dot{\lambda} = L \frac{di_L}{dt}\tag{4.5}$$

$$\dot{q} = C \frac{dV_C}{dt}$$

por lo que el modelo (4.1), considerando las ecuaciones (4.4) y (4.5), se puede re-escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial q} + \mu V_{CD} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} - i_s\end{aligned}\tag{4.6}$$

o equivalentemente en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} \end{bmatrix}}_{\nabla H} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mu V_{CD} \\ -i_s \end{bmatrix}}_G\tag{4.7}$$

La representación anterior, conocida en la literatura como representación Hamiltoniana, evidencia diferentes propiedades del sistema, entre ellas se observa claramente que $J = -J^T$ es una matriz antisimétrica, lo cual representa la interacción entre los elementos del circuito.

El objetivo de control es aproximar el valor de corriente y tensión en terminales del convertidor a valores deseados conforme el tiempo tienda a infinito, es decir que el $\lim_{t \rightarrow \infty} x = x^d$ donde x^d es el valor deseado de x . Con este fin se introduce el siguiente cambio de coordenadas (dinámica del error)

$$\tilde{x} = x - x^d \quad (4.8)$$

dado por las coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda - \lambda^d \\ \tilde{q} &= q - q^d \end{aligned} \quad (4.9)$$

Definiendo los vectores

$$x = \begin{bmatrix} \lambda \\ q \end{bmatrix}, \quad x^d = \begin{bmatrix} \lambda^d \\ q^d \end{bmatrix} \quad y \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

es posible replantear el objetivo como $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$, ya que esto implica que $x = x^d$. Para analizar el comportamiento de la variable de error se considera

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}^d \quad (4.11)$$

por lo que sustituyendo (4.7) en (4.11) genera

$$\dot{\tilde{x}} = \left[\mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial x} + G \right] - \dot{x}^d, \quad (4.12)$$

donde x^d representar la dinámica alcanzable del convertidor, es decir, los valores deseados que satisfacen las ecuaciones del modelo (4.1). Así pues, se debe cumplir que

$$\dot{x}^d = \mathbb{J} \frac{\partial H^d}{\partial x^d} + G^d \quad (4.13)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda^d &= Li^d \\ q^d &= CV_C^d \end{aligned}$$

y $G^d = \begin{bmatrix} \mu^d V_{DC} \\ -i_s \end{bmatrix}$. Adicionalmente su respectiva función de energía está dada por

$$H^d = \frac{1}{2} L^{-1} (\lambda^d)^2 + \frac{1}{2} C^{-1} (q^d)^2,$$

Sustituyendo (4.13) en (4.12) se tiene que la dinámica de error es

$$\dot{\hat{x}} = \mathbb{J} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H^d}{\partial x^d} \right\} + \{G - G^d\}$$

dado que es conveniente notar que la dinámica del error vuelve a tener una forma Hamiltoniana

$$\dot{\hat{x}} = \mathbb{J} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{G} \quad (4.14)$$

cuya función de energía es

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} L^{-1} \tilde{\lambda}^2 + \frac{1}{2} C^{-1} \tilde{q}^2. \quad (4.15)$$

Para lograr que la trayectoria del sistema converja asintóticamente al punto de equilibrio por el teorema de estabilidad de Lyapunov, se requiere que $\dot{\tilde{H}} < 0$, es decir, que esta función sea estrictamente negativa definida. Así pues, analizando la derivada de la función de energía y mediante la regla de la cadena se tiene

$$\dot{\tilde{H}} = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \dot{\hat{x}},$$

por lo que evaluando esta función en (4.14), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}} &= \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \left\{ \mathbb{J} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{G} \right\} \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{G} \end{aligned}$$

Dado que \mathbb{J} es antisimétrica, se tiene que

$$\dot{\tilde{H}} = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{G}. \quad (4.16)$$

Entonces para asegurar que $\dot{\tilde{H}}$ sea estrictamente negativa definida, se propone que

$$\tilde{G} = -K \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}, \quad (4.17)$$

con $K = K^T > 0$ y en particular $K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ con la definición anterior se genera $\dot{\tilde{H}} = - \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \right)^T K \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} < 0$, esto implica que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$, es decir la trayectoria del sistema (4.14) tiende asintóticamente al origen donde la función de energía tiene su mínimo (ya que esta formada de parabolos con vértice en el origen), con lo cual se logra el objetivo de control.

Para el diseño del controlador, de la ecuación (4.17) se tiene

$$G - G^d = -K \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}},$$

con G obtenida de la ecuación (4.7), de (4.13) se tiene $G^d = \dot{x}^d - \mathbb{J} \frac{\partial H^d}{\partial x^d}$, de (4.15) se puede obtener $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}$ y haciendo uso de los vectores definidos con anterioridad, se puede escribir la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \mu V_{DC} \\ -i_s \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^d \\ \dot{q}^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1} \lambda^d \\ C^{-1} q^d \end{bmatrix} \right\} = - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1} \tilde{\lambda} \\ C^{-1} \tilde{q} \end{bmatrix},$$

Así pues las dos expresiones que deben satisfacerse de manera simultanea son

$$\begin{aligned} \mu V_{DC} - \dot{\lambda}^d - C^{-1} q^d &= -k_1 L^{-1} \tilde{\lambda} \\ -i_s - \dot{q}^d + L^{-1} \lambda^d &= -k_2 C^{-1} \tilde{q} \end{aligned}$$

Recordando que $i_L = \frac{\lambda}{L}$ y $V_C = \frac{q}{C}$, ponderando la tensión y despejando μ e i^d , se obtiene la ley de control para el Convertidor de Potencia, dada por

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{V_{DC}} \left[-k_1 (i_L - i_L^d) + L \frac{di_L}{dt} + V_C^d \right] \\ i^d &= -k_2 (V_C - V_C^d) + i_s + C \frac{dV_c^d}{dt} \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.4. Evaluación numérica

En esta sección se procede a evaluar la ley de control (4.18). Para tal objetivo consideramos las características del convertidor empleadas en el trabajo de Pogaku *et al.* (2007) y que se muestran en la Tabla 4.1

Convertidor (10 kVA nominales)	
Parámetros	Valor
Tensión	220[V]
Capacitancia	50 [μF]
Inductancia	1.35 [mH]

Tabla 4.1: Parámetros de simulación.

El desempeño del convertidor se evalúa conectando en sus terminales una carga resistiva de 5.8[kW] y 25[Ω], la corriente demandada por la carga al convertidor, se puede obtener como

$$i_s = \frac{MVA}{\sqrt{3} kV}$$

$$i_s = \frac{5800}{\sqrt{3} \cdot 220} = 15.22[A]$$

Las simulaciones son llevadas a cabo en la plataforma *SIMULINK MATLAB*, donde el modelo dinámico (4.1) del convertidor de potencia se muestran en la Figura 4.2

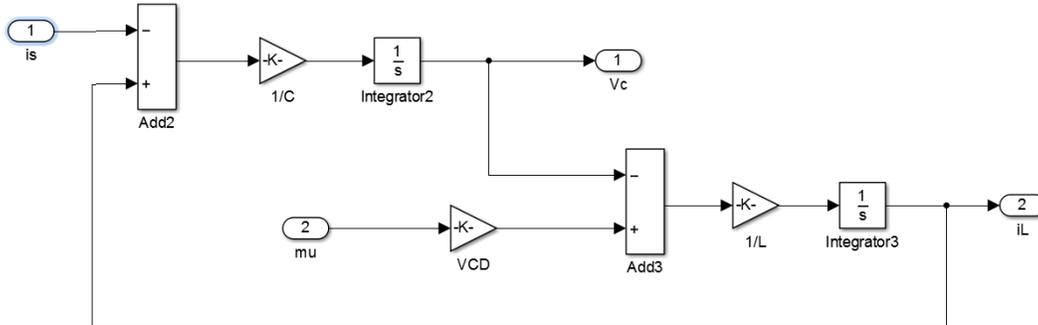


Figura 4.2: Modelo dinámico del convertidor de potencia

y el controlador descrito por las ecuaciones (4.18) se muestra en la Figura 4.3

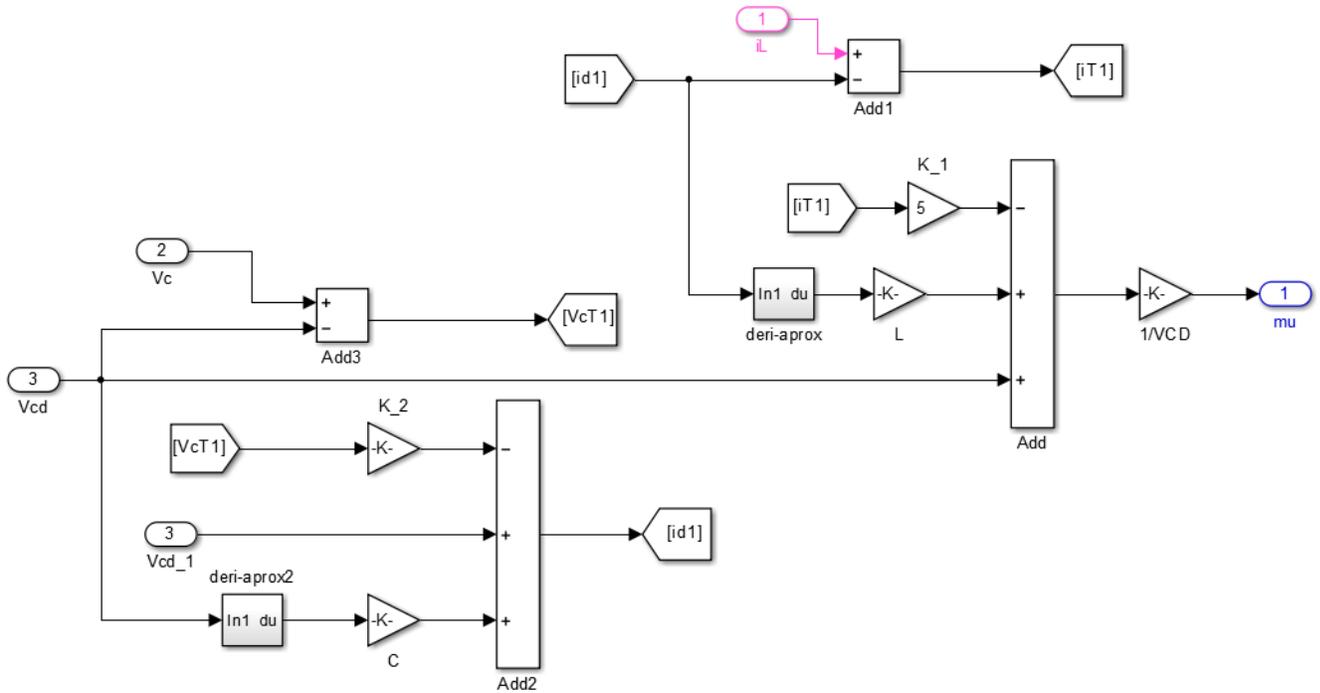


Figura 4.3: Controlador

Los resultados de la simulación se presentan a continuación, donde el objetivo de control es que la tensión en terminales del convertidor (V_C) se aproxime al valor deseado V_C^d como el tiempo tienda a infinito, lo cual se muestra en la Figura 4.4

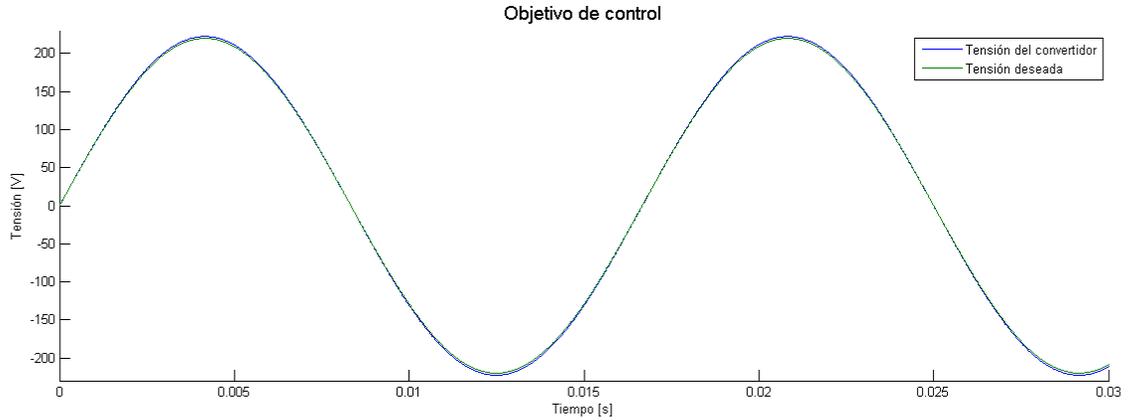


Figura 4.4: Objetivo de control

para lograr el objetivo, el controlador genera la señal μ que se muestra en la Figura 4.5.

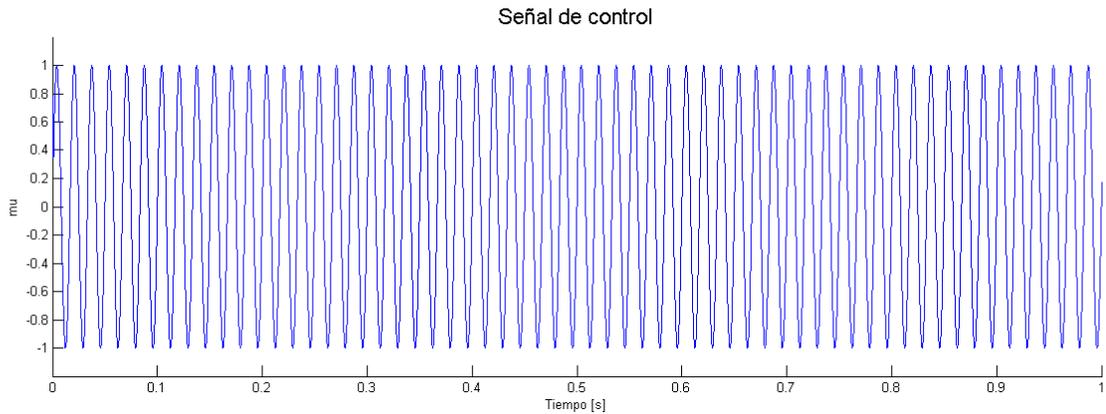


Figura 4.5: Señal de control

4.5. Discusión

La ley de control μ obtenida del análisis del Convertidor de Potencia, es la señal que dará origen a la frecuencia de conmutación de los IGBTs en el convertidor para lograr el objetivo de control, que es aproximar la tensión en sus terminales a un nivel deseado. Cabe destacar que la señal μ debe tener la misma frecuencia que la tensión en las terminales del convertidor, lo cual se valida en la simulación.

Además la misma señal μ generada por el controlador permite aproximar la tensión en terminales a la deseada, como también lo valida la simulación y se muestra en la Figura 4.4, cumpliéndose el objetivo de control. Es importante destacar que el error en las trayectorias del sistema tiende más rápido a cero como las ganancias sean altas, sobre todo la ganancia

k_2 relacionada con la tensión, ya que esta fue ponderada en el análisis.

Una característica muy importante respecto al comportamiento del convertidor respecto a la estructura del tipo de Microrredes estudiado en este trabajo de tesis, es la siguiente: debe notarse que si la estructura del comportamiento deseado para la tensión del capacitor es sinusoidal, entonces en esa variable se tendrá de manera implícita la magnitud de la tensión y su frecuencia. Dado que para el cálculo de flujo de potencias estas dos variables se requieren por separado, deberá de existir un mecanismo que permita desacoplar las variables. Esto impone un reto tecnológico no trivial que no será abordado en este trabajo, pero que se menciona para posibles estudios futuros.

Por otro lado, una vez teniendo desacopladas las dos variables, es importante reconocer que se recupera exactamente el mismo contexto descrito en el Capítulo 3, es decir, mediante la técnica de Control Droop será posible definir dos lazos de control, uno para la magnitud de tensión y otro para la frecuencia, retroalimentando los errores de potencia activa y reactiva. Esta estructura se detalla en el siguiente Capítulo.

Capítulo 5

Microrredes con Convertidores de Potencia dinámicos

5.1. Estructura

Se continúa bajo la misma línea de análisis, donde se considera una Microrred sin pérdidas con topología de malla y comportamiento predominantemente inductivo. Pero ahora se incluye un modelo de Convertidor de Potencia más detallado, con el objetivo de satisfacer la demanda de carga manteniendo la estabilidad de tensión y frecuencia en la Microrred. Este objetivo de control se ilustra en el diagrama de bloques de la Figura 5.1

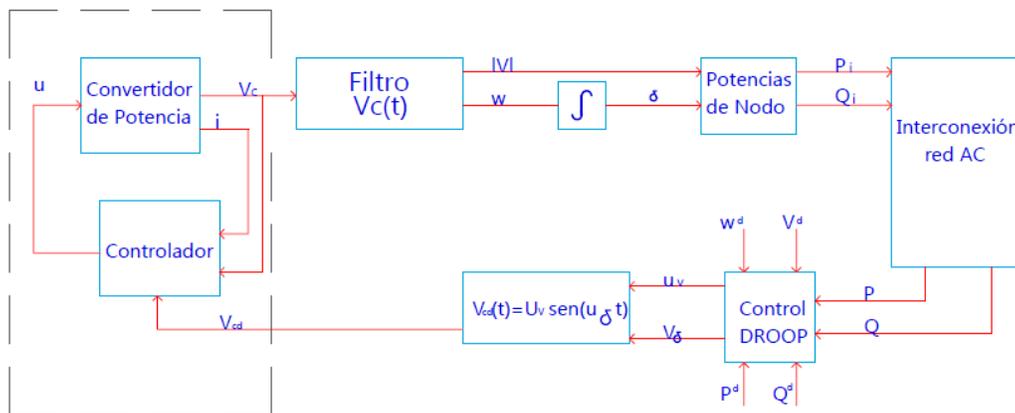


Figura 5.1: Diagrama de bloques

Tal como se mencionó en el Capítulo anterior, para la ley de control del convertidor se define a la tensión deseada en terminales del convertidor como¹

$$V_C^d = u_1 \sin(u_2 t), \quad (5.1)$$

¹Una señal senoidal que tendrá que ser desacoplada para obtener magnitud y ángulo.

mientras que mediante la técnica del Control Droop, se define a u_1 y u_2 como

$$u_1 = V_i^d - K_Q(Q_i - Q_i^d)$$

$$u_2 = \omega^d - K_P(P_i - P_i^d),$$

donde V^d y ω^d , son la tensión y frecuencia deseadas, K_P Y K_Q son las ganancias para el control potencia activa y reactiva respectivamente y P_i , Q_i los flujos de potencia definidos en el Capítulo 3. Así pues, re-escribiendo la ley de control obtenida en el Capítulo anterior, con la tensión deseada en terminales del convertidor de la forma (5.1), se tiene

$$\mu = \frac{1}{V_{DC}} \left[-k_1(i_L - i_L^d) + L \frac{di_L}{dt} + u_1 \sin(u_2 t) \right]$$

$$i_L^d = -k_2(V_C - V_C^d) + i_s + C \frac{d(u_1 \sin(u_2 t))}{dt} \quad (5.2)$$

5.2. Criterios de evaluación

A continuación se presentan los requerimientos a considerar para establecer el funcionamiento adecuado de la Microrred, los cuales se evaluarán numéricamente.

5.2.1. Estabilidad de tensión

Estabilidad de tensión está relacionada a la habilidad del sistema para mantener un nivel de tensión estable en todos sus buses o nodos de la red bajo condiciones normales de operación o después de un disturbio (Kundur *et al.* (2004)). Un sistema entra en un estado de inestabilidad de tensión ya sea por caída o elevación súbita en algunos nodos, el principal factor causante de inestabilidad son diferencias de tensión considerables entre nodos de la red que ocasionan grandes flujos de potencia reactiva. Por esta razón se busca que el controlador mantenga el nivel de tensión en 1.0 *p.u* o muy cercano a él, para mantener el equilibrio de potencia reactiva.

5.2.2. Estabilidad de frecuencia

Como se señala también en Kundur *et al.* (2004), estabilidad de frecuencia se refiere a la capacidad de un sistema para mantener la frecuencia en equilibrio después de una perturbación grave, resultado de un desbalance considerable entre la generación y la carga, como se muestra en la Figura 5.2.

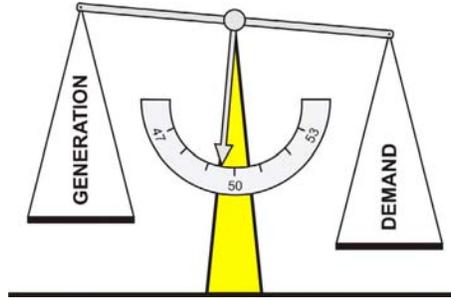


Figura 5.2: Balance de frecuencia determinado por la generación y la carga

así, mediante Control Droop al regular el balance de potencia activa, se tiene control sobre las diferencias angulares y por ende sobre la frecuencia.

5.2.3. Transferencia de potencia

Al igual que en los SEPs convencionales, en Microrredes también uno de los elementos importantes son las líneas de transmisión, que se modelan como un circuito π equivalente. Para el caso mas general, el cual consiste solamente de una inductancia y las partes en derivación o shunt son despreciadas. En la Figura 5.3 se muestra el circuito equivalente así como su diagrama fasorial

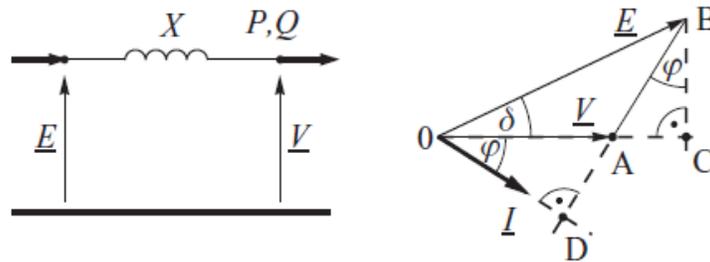


Figura 5.3: Circuito π equivalente y su diagrama fasorial

donde los fasores V y E son tensiones de fase, mientras que P y Q son las potencias monofásicas activa y reactiva respectivamente. El fasor E se obtiene sumando a la tensión V la caída debida jXI , que es perpendicular al fasor de corriente I .

Por semejanza entre los triángulos OAD y BAC , en el diagrama fasorial de la Figura (5.3) se puede determinar la ubicación del ángulo φ . Analizando los triángulos BAC y OBC se pueden obtener las siguientes relaciones, $\cos(\varphi) = \frac{|BC|}{|XI|}$, $|BC| = XI \cos(\varphi)$ del triángulo

BAC y $\sin(\delta) = \frac{|BC|}{E}$, $|BC| = E \sin(\delta)$ del triángulo $0BC$, igualando los $|BC|$ se tiene

$$|BC| = XI \cos(\varphi) = E \sin(\delta)$$

por lo que despejando a $I \cos(\varphi)$, se tiene

$$I \cos(\varphi) = \frac{E}{X} \sin(\delta) \quad (5.3)$$

De manera similar, se puede obtener otra relación importante dada por

$$|AC| = XI \sin(\varphi) = E \sin(\delta) - V$$

de donde, se tiene

$$I \sin(\varphi) = \frac{E}{X} \cos(\delta) - \frac{V}{X} \quad (5.4)$$

La potencia de salida del elemento está expresada como $P = VI \cos(\varphi)$, sustituyendo (5.3) en esta ecuación, se tiene

$$P = \frac{EV}{X} \sin(\delta) \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) muestra que la potencia real depende del producto de las tensiones de fase y el seno del ángulo δ entre sus fasores. Pequeñas variaciones entre tensiones de nodo no influyen directamente en el valor de P , sin embargo cuando el valor de reactancia X sea pequeño mayor será la amplitud de P . Los grandes cambios de potencia activa corresponden a los cambios en el seno del ángulo δ , la característica $P(\delta)$ es llamada característica potencia-ángulo y δ el ángulo de carga.

Para consideraciones de estabilidad (Machowski *et al.* (2008)) el sistema solo puede operar en la parte de la característica mostrada con línea continua en la Figura 5.4

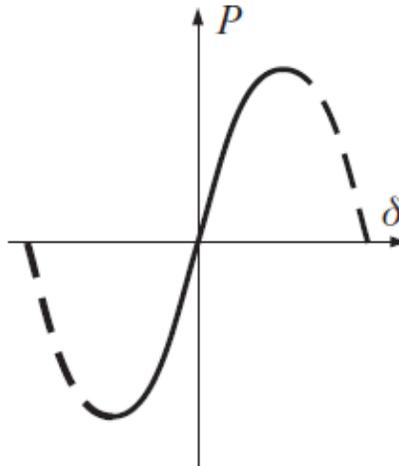


Figura 5.4: Característica potencia ángulo

La potencia reactiva de salida del elemento se expresa como $Q = VI \sin(\varphi)$, por lo que sustituyendo (5.4) en esta ecuación se tiene

$$Q = \frac{EV}{X} \cos(\delta) - \frac{V^2}{X} \quad (5.6)$$

El termino $\cos(\delta)$ es determinado por el valor de potencia real, ya que la relación entre seno y coseno es $\cos(\delta) = \sqrt{1 - \sin^2(\delta)}$ y haciendo uso de la ecuación (5.5) se tiene

$$Q = \sqrt{\left(\frac{EV}{X}\right)^2 - P^2} - \frac{V^2}{X} \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) es conocida como característica $Q(V)$ y corresponde a una parábola que abre hacia abajo como se muestra en la Figura 5.5

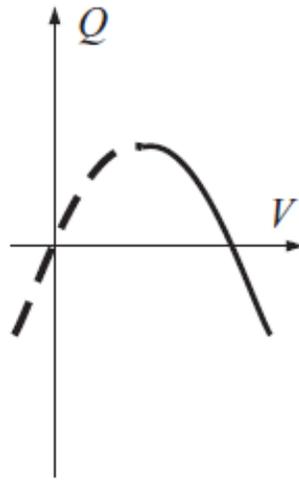


Figura 5.5: Característica $Q(V)$

Para cuestiones de estabilidad (Machowski *et al.* (2008)) el sistema debe operar en la zona mostrada por la línea continua en la Figura 5.5, aunque inclusive pequeños cambios en los niveles de tensión pueden causar grandes cambios en la potencia reactiva y viceversa.

5.3. Evaluación numérica

En esta sección se procede a evaluar el desempeño de la Microrred con el modelo de Convertidores de Potencia estudiado en el Capítulo anterior. La tensión deseada en terminales con magnitud $|V^d|$ y a frecuencia $\omega^d t$, se determinan por medio de la ecuación (5.1) que como se estableció anteriormente es una señal senoidal y tendrá que desacoplarse en magnitud y fase, lo cual se implementa con el siguiente bloque de control mostrado en la Figura 5.6

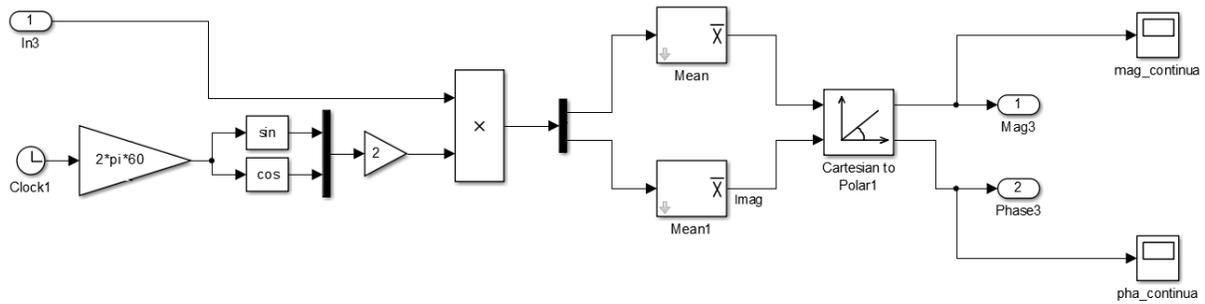


Figura 5.6: Bloque para desacoplar magnitud y fase

Las simulaciones se realizaron en la plataforma *SIMULINK MATLAB*, donde los parámetros de simulación (referencias o setpoints) son los mismos de la evaluación numérica del Capítulo 3. Los valores de capacitancia e inductancia son $8 [\mu F]$ y $1.5 [\mu H]$ para todos los convertidores. Las ganancias para el controlador del Convertidor de Potencia se muestran en la Tabla 5.1, mientras que las ganancias de sintonización para el bloque de Control Droop se muestran en la siguiente Tabla 5.2

Ganancia para Corriente	Ganancia para Tensión
$k_1 = 4.5$	$k_2 = 10.5$

Tabla 5.1: Ganancias para el controlador.

Ganancias Activas	Ganancias Reactivas
$k_{P_1} = 0.0000012$	$k_{Q_1} = 0.0015$
$k_{P_2} = 0.00001$	$k_{Q_2} = 0.0010$
$k_{P_3} = 0.0000$	$k_{Q_3} = 0.00013$
$k_{P_4} = 0.000069$	$k_{Q_4} = 0.0024$
$k_{P_5} = 0.00003$	$k_{Q_5} = 0.0015$
$k_{P_6} = 0.00005$	$k_{Q_6} = 0.006$

Tabla 5.2: Ganancias para el bloque de Control Droop.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación. El valor de tensión deseado en terminales de cada Convertidor de Potencia y obtenido del balance de potencias, se muestra en la Figura 5.7

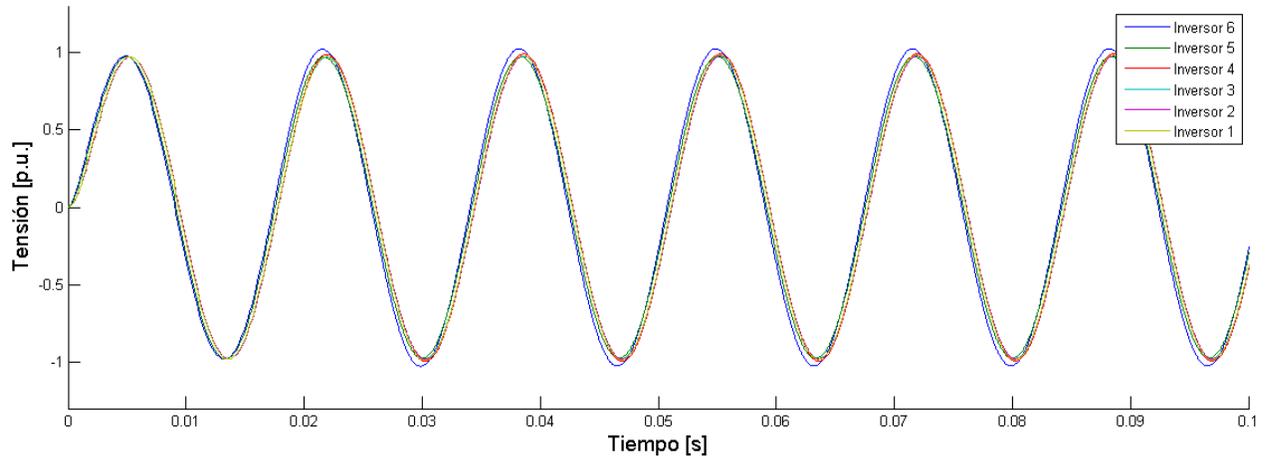


Figura 5.7: Tensiones deseadas en terminales

la Figura 5.8 muestra la señales se control generadas por el controlador, que darán origen a las señales de conmutación de los puentes H de cada Convertidor de Potencia, cuya amplitud de encuentra entre -1 y 1 .

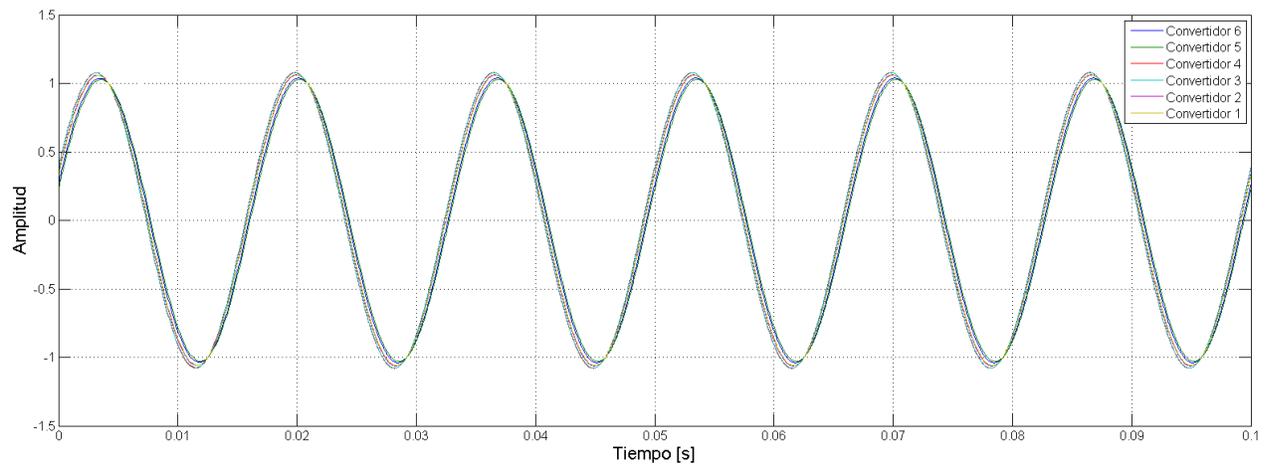


Figura 5.8: Señales de control

En la Figura 5.9 se muestra la sincronización de frecuencias de operación de los Convertidores de Potencia, lograda por el controlador

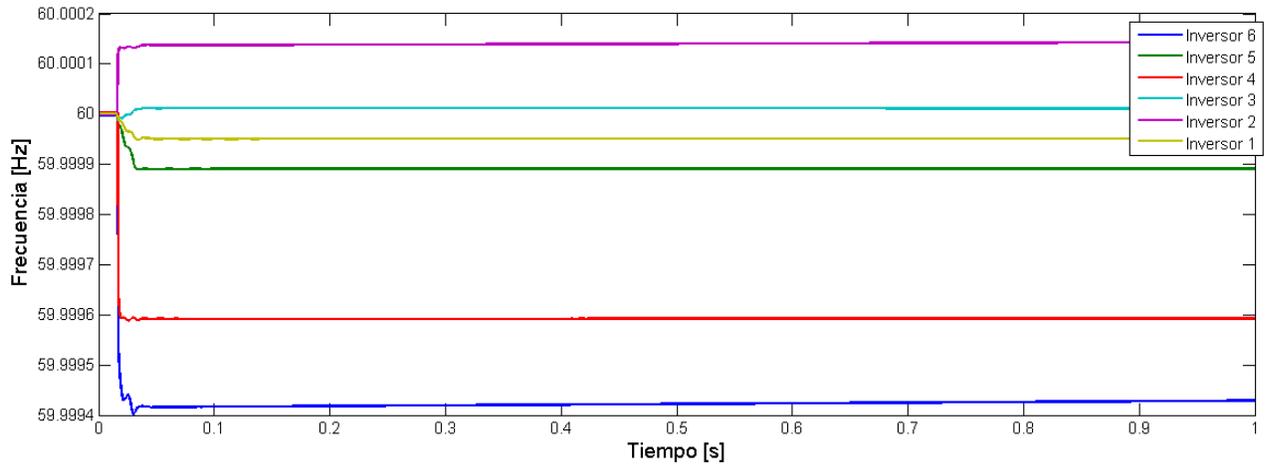


Figura 5.9: frecuencias de operación

mientras que la sincronización de tensiones en estado estable de los convertidores, se muestra en la Figura 5.10

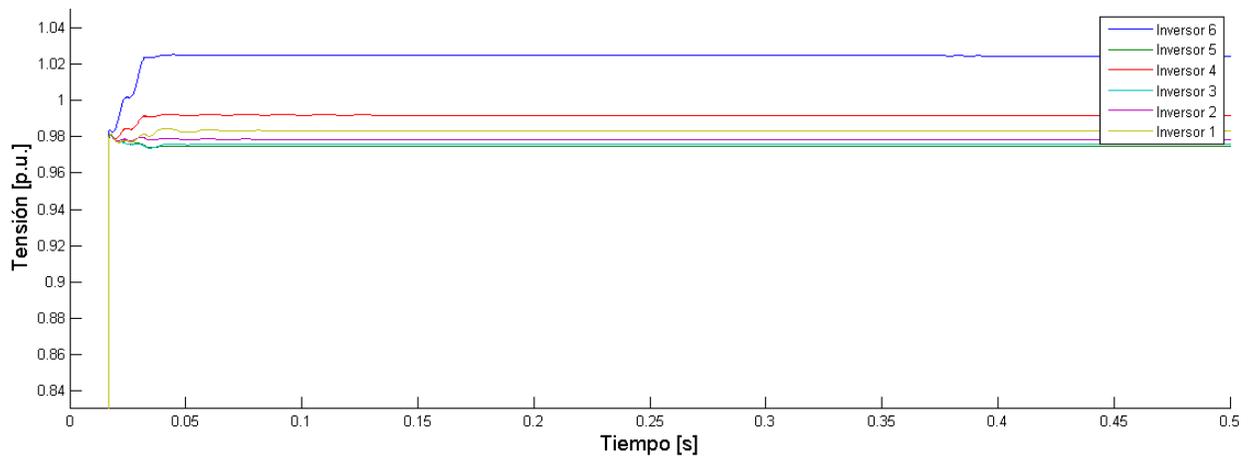


Figura 5.10: Niveles de tensión alcanzados por los convertidores

La potencia activa de salida que tendrá que ser proporcionada por cada uno de los convertidores, para cumplir la demanda de carga y mantener la estabilidad de frecuencia, se muestra en la Figura 5.11

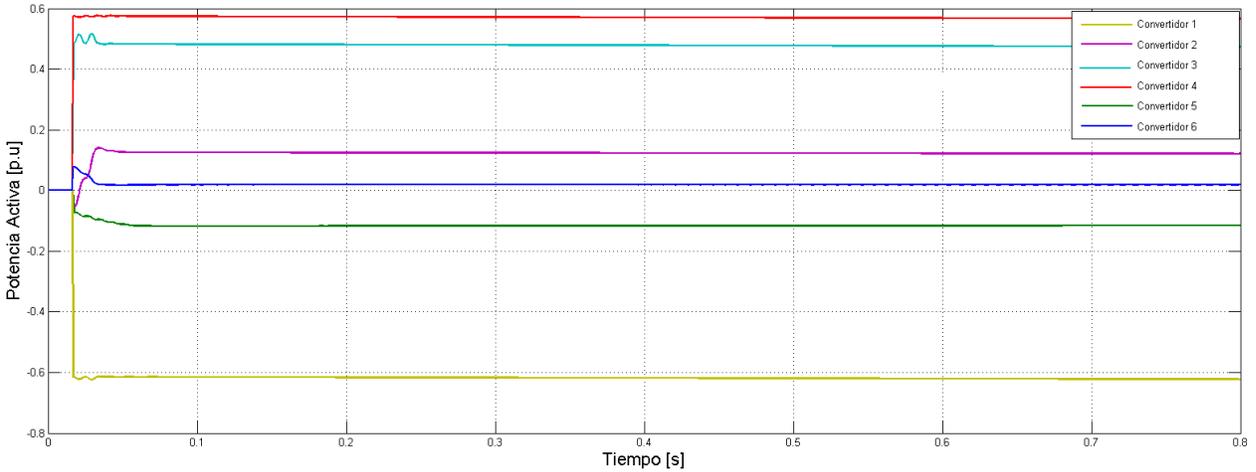


Figura 5.11: Potencia activa de salida proporcionada por cada convertidor

Finalmente, en la Figura 5.12, se muestra la potencia reactiva de salida proporcionada por cada convertidor para mantener la estabilidad de tensión en la Microrred.

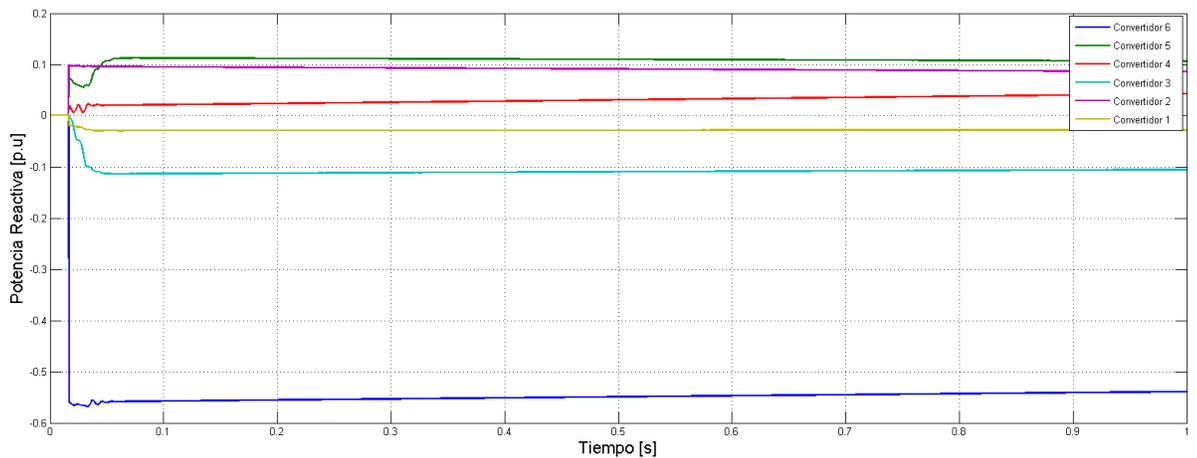


Figura 5.12: Potencia reactiva de salida proporcionada por cada convertidor

5.4. Discusión

El desempeño del modelo dinámico del Convertidor de Potencia ya interconectado en la Microrred, resultó ser satisfactorio. A partir del balance de potencias activas y reactivas en la Microrred, la señal de control (μ) generada por el controlador logra mantenerse entre -1 y 1 , como se requiere para poder generar la señal a la que deberán conmutar los IGBT's del convertidor para lograr tensión y corriente deseados en sus terminales, tema ampliamente estudiado en los trabajos de Martínez Pérez (2005) y Vázquez Rueda (2014).

Con la nueva ley de control también se logra el objetivo de satisfacer la demanda de carga, con sincronización en frecuencia de todos los convertidores muy cercana a $60[Hz]$, donde la potencia activa de salida que tiene que proporcionar cada convertidor cumple con el flujo de potencia manteniendo estabilidad de frecuencia. También los niveles de tensión se mantienen muy cercanos al $1.0 p.u$ lo cual no permite flujos de potencia reactiva grandes manteniendo la estabilidad de tensión en la Microrred.

Con las ganancias k_1 y k_2 menores a un valor de 100 y K_P , K_Q menores que la unidad, se asegura estabilidad asintótica de las trayectorias, si se exceden estos valores de ganancias, el sistema se vuelve inestable. Estas cuatro ganancias permiten ejercer mayores acciones de control sobre el Convertidor de Potencia, a diferencia de las dos que tiene el modelo VSI.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis, se abordó el problema clásico de balance entre generación y demanda, es decir que la generación de energía debe satisfacer la demanda de carga, manteniendo la estabilidad de frecuencia y tensión en la red. Bajo el concepto de Microrred como parte medular del proceso de evolución hacia la Red Inteligente o Smart Grid, donde la generación heterogénea debe ser acondicionada a una forma de CA convencional por medio de un Convertidor de Potencia, el modelo VSI del convertidor empleado en los trabajos consultados resuelve el problema, pero las condiciones de operación con este modelo de convertidor, distan de un escenario real.

Así pues, con un modelo mas detallado del convertidor, aprovechando su representación Hamiltoniana y dadas sus propiedades energéticas, empleando un enfoque de Control Basado en Pasividad (PBC) para su análisis, la ley de control incluida en el modelo dinámico una vez interconectado en la Microrred, también resuelve el problema. Esta ley de control, genera la señal μ a la que tendrán que conmutar los IGBTs en cada convertidor para mantener los valores de tensión y corriente deseados en sus terminales.

Se mantiene el balance entre la generación y la demanda, lo cual permite la sincronización de frecuencias y por ende se tiene estabilidad de frecuencia. Los niveles de tensión permanecen muy cercanos a 1.0 *p.u.*, lo cual no permite flujos de potencia reactiva grandes, manteniendo así, la estabilidad de tensión en la Microrred. Se tienen dos lazos de control adicionales uno para la corriente y otro para la tensión en terminales, a diferencia del modelo VSI que cuenta con solamente dos (el de potencia activa y el de potencia reactiva), en suma el modelo de Convertidor de Potencia incluido, tiene cuatro ganancias que permiten ejercer mayores acciones de control sobre el convertidor, se encontró que las las ganancias de los lazos de control para corriente y tensión pueden ser inclusive muy grandes, mientras que con ganancias grandes para el control de los flujos de potencia, el sistema se vuelve inestable.

Como parte del trabajo futuro, esta la implementación de un PLL (Phase Locked Loop, por sus siglas en inglés). Bajo el contexto de Microrredes estudiado en este trabajo de tesis, el comportamiento deseado para la tensión en terminales del Convertidor de Potencia es

sinusoidal, entonces en esta variable se tiene de manera implícita la magnitud de la tensión y su ángulo de fase para el cálculo de los flujo de potencias. Estas dos variables se requieren por separado, siendo el PLL el mecanismo que permitirá desacoplarlas.

Así como también, la obtención de un modelo matemático que permita el desarrollo de una prueba de estabilidad formal para establecer los criterios de selección para ganancias y puntos de referencia del controlador que aseguren estabilidad asintótica de las trayectorias del sistema.

Importante será la realización del modelado de la capa digital y un sistema administrador de energía que permita el despacho energético.

Bibliografía

- Ávila Becerril, Sofía. (2011). Control de sistemas multiagente lagrangianos. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Barklund, E., N. Pogaku, M. Prodanovic, C. Hernandez-Aramburo y T.C. Green (2008). Energy management in autonomous microgrid using stability-constrained droop control of inverters. *Power Electronics, IEEE Transactions on* **23**(5), 2346–2352.
- Bullo, F., J. W. Simpson-Porco y Dörfler F. (2013). Synchronization and power sharing for droop-controlled inverters in islanded microgrids.
- Chandorkar, M.C., D.M. Divan y R. Adapa (1993). Control of parallel connected inverters in standalone ac supply systems. *Industry Applications, IEEE Transactions on* **29**(1), 136–143.
- Coelho, E.A.A., P.C. Cortizo y P.F.D. Garcia (2002). Small-signal stability for parallel-connected inverters in stand-alone ac supply systems. *Industry Applications, IEEE Transactions on* **38**(2), 533–542.
- De Brabandere, K., B. Bolsens, J. Van den Keybus, A. Woyte, J. Driesen, R. Belmans y K.U. Leuven (2004). A voltage and frequency droop control method for parallel inverters. En: *Power Electronics Specialists Conference, 2004. PESC 04. 2004 IEEE 35th Annual*. Vol. 4. pp. 2501–2507 Vol.4.
- Elgerd, Olle I. (1981). Control of electric power systems. *Control Systems Magazine, IEEE* **1**(2), 4–16.
- Farhangi, H. (2010). The path of the smart grid. *Power and Energy Magazine, IEEE* **8**(1), 18–28.
- Guerrero, J.M., M. Chandorkar, T. Lee y P.C. Loh (2012). Advanced control architectures for intelligent microgrids part i: Decentralized and hierarchical control. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* (4), 1254–1262.
IEEE Application Guide for IEEE Std 1547(TM), IEEE Standard for Interconnecting Distributed Resources with Electric Power Systems
- IEEE Application Guide for IEEE Std 1547(TM), IEEE Standard for Interconnecting Distributed Resources with Electric Power Systems (2009). IEEE Std 1547.2-2008 pp. 1–217.

- Khalil, H. (2002). Nonlinear Systems. Prentice Hall.*
- Kothari, D. P y I. J. Nagrath (2003). Modern Power System Analysis. Tata McGraw-Hill.*
- Kundur, P., J. Paserba, V. Ajjarapu, G. Andersson, A. Bose, C. Canizares, N. Hatziargyriou, D. Hill, A. Stankovic, C. Taylor, T. Van Cutsem y V. Vittal (2004). Definition and classification of power system stability iee/cigre joint task force on stability terms and definitions. Power Systems, IEEE Transactions on **19**(3), 1387–1401.*
- Kundur, Praba (1994). Power System Stability and Control. McGraw Hill.*
- Lasseter, R.H. (2002). Microgrids. En: Power Engineering Society Winter Meeting, 2002. IEEE. Vol. 1. pp. 305–308 vol.1.*
- Lasseter, Robert y P. Piagi (2000). Providing premium power through distributed resources. En: System Sciences, 2000. Proceedings of the 33rd Annual Hawaii International Conference on. pp. 9 pp.–.*
- Lubna, M., M. Basu y M. F. Conlon (2012). A review of existing microgrid architectures. Journal of Engineering.*
- Machowski, J., J. W. Bialek y J. R. Bumby (2008). Power System Dynamics: stability and Control. John Wiley & Sons, Ltd.*
- Martínez Pérez, Iván (2005). Control de un convertidor dc/ca monofásico. Tesis de licenciatura, Facultad de ingeniería UNAM.*
- Ortega, R., A. Van der Schaft, B. Maschke y G. Escobar (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. Automática.*
- Peças Lopes, J.A., C.L. Moreira y A.G. Madureira (2006). Defining control strategies for microgrids islanded operation. Power Systems, IEEE Transactions on **21**(2), 916–924.*
- Pogaku, N., M. Prodanovic y T.C. Green (2007). Modeling, analysis and testing of autonomous operation of an inverter-based microgrid. Power Electronics, IEEE Transactions on **22**(2), 613–625.*
- Rudion, K., A. Orths, Z.A. Styczynski y K. Strunz (2006). Design of benchmark of medium voltage distribution network for investigation of dg integration. En: Power Engineering Society General Meeting, 2006. IEEE. pp. 6 pp.–.*
- Schiffer, J., D. Goldin, J. Raisch y T. Sezi (2013). Synchronization of droop-controlled microgrids with distributed rotational and electronic generation. En: Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on. pp. 2334–2339.*
- Schiffer, J., Ortega R, A. Astolfi, J. Raisch y T. Sezi (2014). Conditions for stability of droop-controlled inverter-based microgrids.*

Slotine, E. y L. Weiping (1991). APPLIED NONLINEAR CONTROL. Prentice Hall.

Stevenson, W. y J. Grainger (1994). Power Systems analysis. McGraw Hill.

Van der Schaft, A. (2005). Theory of port-hamiltonian systems chapter 1: Port-hamiltonian formulation of network models; the lumped-parameter casetheory of port-hamiltonian systems. Network Modeling and Control of Physical Systems, DISC.

Vázquez Rueda, Óscar (2014). Control basado en pasividad de convertidores multinivel. Tesis de licenciatura, Facultad de ingeniería UNAM.