UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION DE SCHWARZSCHILD PARA LA TRANSMISION DE LA RADIACION

por

Guido Münch Paniagua

T E S I S presentada como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

de la

FACULTAD DE CIENCIAS

Mexico, D. F.

1944

INTRODUCCION

La publicación del artículo de Hilbert[1] conteniendo su demostración de las leyes de Kirchhoff hizo ver la ventaja de tratar con ecuaciones integrales los problemas relacionados con la parte fenomenológica de la Teoría de la Radiación. Desde entonces, con el gran desarrollo que ha tenido la Astrofísica Teórica, por los trabajos de K. Schwarzschild, A. S. Eddington, J.H. Jeans, E.A. Milne y otros, muchas soluciones de problemas de esa ciencia, que se relacionan con la interacción de Materia y radiacion, dependen de la solución de una ecuación integral. Estos problemas son del tipo general siguiente: cierta región del espacio esta continuamente llena de material excitado por una alta temperatura; sabiendo que en la frontera de esa región la intensidad especifica de radiación satisface ciertas condiciones, se pregunta por la distribución de intensidad de radiación y temperatura dentro del material, bajo ciertas hipótesis respecto del estado térmico del mismo. De todos estos problemas, el problema de Schwarzschild, que corresponde al caso de material gris (coeficiente de absorción independiente de longitud de onda), estratificado en planos paralelos, en equilibrio radiativo, con profundidad óptica infinita y con radiación incidente en la frontera nula, tiene importancia especial, porque parece

[1] D. Hilbert. Physikalische Zeitschrift, XII, 1056, 1912.

representar bastante bien la situación de la mayoría de las estrellas que no son componentes de binarias de separación pequeña; tal cosa ha tenido su mejor explicación en la concordancia entre las leyes observada y teórica del oscurecimiento hacia el limbo solar. Aparte de esto, otros problemas son formalmente equivalentes al de Schwarzschild, como son: a) El caso de material no gris estratificado en planos paralelos en las mismas condiciones que en el caso anterior, si en las ecuaciones que rigen el problema de Schwarzschild se reemplaza el coeficiente de absorción por el coeficiente medio de absorción de Rosseland; y b) El modelo de Schuster para una atmósfera estelar, o sea el caso de material puramente dispersivo, con coeficientes de absorción y emisión nulos.

El problema de Schwarzschild puede ser atacado por dos métodos distintos, según se estudie la ecuación diferencial o la integral a que da lugar. El primer método ha sido seguido por el propio Schwarzschild y después por Milne, Eddington, Gratton y Chandrasekhar. El segundo es mucho mas interesante desde el punto de vista matemático, pues la ecuación integral de que se trata, llamada de Milne, es homogénea lineal con núcleo singular. Ha sido estudiada, después de que Milne la trató por los Astrónomos rusos Kotitzin[1], Parchomenko[2], Amburzamian y Kosirev[3], quienes pretendieron probar que la ecuación

[1] Ann. d. Astrophys. Instit. Moscow. Bd. 2.

[2] Astronomisches Nachrichten, 227, No. 5443.

[3] Monthly Notices of the R. A. S., 87,209-215,1927

integral de Milne no tiene una solución distinta de la idénticamente nula. Sin embargo, E. Freundlich, E. Hopf y U. Wegner[1] hicieron ver la falsedad de las demostraciones de los autores anteriores, probando además la existencia de una solución no idénticamente nula. La solución explicita de la ecuación fué encontrada por N. Wiener y E. Hopf con la ayuda de la Teoria de las Integrales de Fourier en el plano complejo (ver referencia No. 10 del texto), pero las integrales por las que queda expresada son tan complicadas que no ha sido posible valuarlas numéricamente o expresarlas en términos de funciones ya conocidas, a pesar de los esfuerzos que al respecto se han hecho, - según dice Wiener[2]. El unico resultado numérico que ha dado el estudio de la ecuación de Milne es el valor de la solución en el origen y en el punto del infinito.

Por otro lado, se han hecho varias aproximaciones a la solucion de la ecuación diferencial, siendo notable la diferencia que hay de unas a otras, especialmente en la vecindad del origen. En el presente trabajo se comparan los valores - que dan estas diversas soluciones con los valores que se sacan de una fórmula de interpolación cuyas constantes numéricas se calculan de una ecuación integral, comparación que - está en el capitulo IV del texto.

[1] Monthly Notices of the R. A. S. 88, 139-142, 1927.

[2] Wiener and Paley. "The Fourier Transform in the Complex Plane" American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XIX, pág. 57.

Estoy muy reconocido al Dr. S. Chandrasekhar por la sugestión de estudiar los problemas matemáticos de la Teoría del equilibrio radiativo. Tambien deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Joaquin Gallo, Director del Observatorio Astronómico de Tacubaya, por permitirme hacer la presente tesis durante el tiempo que trabajo en ese Observatorio y a los Dres. Alfonso Nápoles Gándara y Carlos Graef y M. en C. Alberto Barajas por aceptar este trabajo como tesis para tomar el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Observatorio Astronómico de Tacubaya.
Agosto de 1944.

I: LA ECUACION DE TRANSMISION.

§ 1.1: En el caso que se va a tratar[1] esta ecuación es la integro-diferencial siguiente

$$\cos\varphi \frac{\partial I(\varphi,\tau)}{\partial\tau} = I(\varphi,\tau) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} I(\varphi,\tau) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \tag{1}$$

El resolverla consiste en expresar la "intensidad especifica de radiación" I en función explicita de la "profundidad óptica" τ ($0 \leqq \tau \leqq \infty$) y del ángulo φ ($0 \leqq \varphi \leqq \pi$), cuando $I(\tau,\varphi)$ - satisface condiciones dadas de antemano sobre cierta "frontera".

§ 1.2 Para el estudio de la ecuación (1) se introducen las - funciones auxiliares siguientes:

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} I(\tau,\varphi) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \tag{2}$$

$$F(\tau) = 2\int_0^{\pi} I(\tau,\varphi) \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \tag{3}$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} I(\tau,\varphi) \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \tag{4}$$

§ 1.3 Se supondrán como condiciones de frontera

i) $I(0,\varphi) = 0$ para $\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi$ (5)

ii) $F(\tau) =$ constante $= F$ para $0 \leqq \tau \leqq \infty$ (6)

§ 1.4 Si (2) se pone en (1) se obtiene

$$\cos\varphi \frac{\partial I(\tau,\varphi)}{\partial\tau} = I(\tau,\varphi) - J(\tau) \tag{7}$$

Esta ecuación puede considerarse como una ecuación diferencial de primer orden para $I(\tau,\varphi)$. Integrándola a lo largo de una "linea recta", teniendo en cuenta la condición (5), $I(\tau,\varphi)$ queda expresada en función de $J(\tau)$ de la siguiente manera:

$$I(\tau,\varphi) = \int_{\tau}^{\infty} J(t)\, e^{-(t-\tau)\sec\varphi} \sec\varphi\, dt \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi/2) \qquad (8)$$

$$I(\tau,\varphi) = -\int_{0}^{\tau} J(t)\, e^{-(\tau-t)\sec\varphi} \sec\varphi\, dt \qquad (\pi/2 \leq \varphi \leq \pi) \qquad (9)$$

§ 1.5 Si (8) y (9) se introducen en (2) se obtendrá una ecuación integral para la determinación de $J(\tau)$. Para posteriores generali·aciones se valuará la integral

$$G_j(\tau) = \int_{0}^{\pi} I(\tau,\varphi) \cos^j\varphi \,\mathrm{sen}\, \varphi\, d\varphi \qquad (10)$$

donde $I(\tau,\varphi)$ está dada por (8) y (9). Inmediatamente se tiene

$$G_j(\tau) = \int_{0}^{\pi/2} \left[\int_{\tau}^{\infty} J(t)\, e^{-(t-\tau)\sec\varphi} \sec\varphi\, dt \right] \cos^j\varphi \,\mathrm{sen}\, \varphi\, d\varphi$$
$$- \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\int_{0}^{\tau} J(t)\, e^{-(\tau-t)\sec\varphi} \sec\varphi\, dt \right] \cos^j\varphi \,\mathrm{sen}\, \varphi\, d\varphi$$

Siendo los integrandos medibles y no negativos es posible intercambiar el orden de integración y entonces

$$G_j(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} J(t) \left[\int_{0}^{\pi/2} e^{-(t-\tau)\sec\varphi} \cos^{j-1}\varphi \,\mathrm{sen}\, \varphi\, d\varphi \right] dt$$
$$- \int_{0}^{\tau} J(t) \left[\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-(\tau-t)\sec\varphi} \cos^{j-1}\varphi \,\mathrm{sen}\, \varphi\, d\varphi \right] dt$$

Haciendo el cambio de variable $\sec\varphi = \alpha$ se tiene

$$G_j(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} J(t) \left[\int_{1}^{\infty} e^{-(t-\tau)\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha^{j+1}} \right] dt + (-1)^j \int_{0}^{\tau} J(t) \left[\int_{1}^{\infty} e^{-(\tau-t)\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha^{j+1}} \right] dt$$

Por último definiendo las funciones

$$E_n(x) = \int_{1}^{\infty} e^{-\alpha x} \alpha^{-n}\, d\alpha \qquad (11)$$

resulta

$$G_j(\tau) = \int_\tau^\infty J(t)\, E_{j+1}(t-\tau)\, dt + (-1)^j \int_0^\tau J(t)\, E_{j+1}(\tau-t)\, dt \qquad (12)$$

§1.6 La ecuación integral de Milne. Si en (12) se hace $j = 0$ se obtiene, de acuerdo con (2) la ecuación integral de Milne para la determinación de $J(\tau)$ (Esta función fué llamada por Schwarzschild, quien la introdujo, el "Ergibigkeit")

$$J(\tau) = \tfrac{1}{2} \int_\tau^\infty J(t)\, E_1(t-\tau)\, dt + \tfrac{1}{2} \int_0^\tau J(t)\, E_1(\tau-t)\, dt$$

o lo que es lo mismo

$$J(\tau) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty J(t)\, E_1(|\tau-t|)\, dt \qquad (13)$$

Si en (12) se hace $j = 1$ y 2 se obtiene de acuerdo con (3) y (4)

$$F(\tau) = 2 \int_\tau^\infty J(t)\, E_2(t-\tau)\, dt - 2 \int_0^\tau J(t)\, E_2(\tau-t)\, dt \qquad (14)$$

$$K(\tau) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty J(t)\, E_3(|t-\tau|)\, dt \qquad (15)$$

§ 1.7 El operador integral Δ [2] Para el tratamiento de la ecuación integral de Milne se definirá el operador integral Δ por la identidad

$$\Delta(g)_\tau \equiv \tfrac{1}{2} \int_0^\infty J(t)\, E_1(|t-\tau|)\, dt \qquad (16)$$

Una obvia, a la vez que importante propiedad del operador Δ es su positividad, es decir, que su núcleo puede tomar valores positivos sólo. La positividad es una propiedad que ocurre en todos los núcleos de las ecuaciones integrales de problemas relacionados con la teoria de la radiación. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es el

§ 1.8 LEMA I: Para cualquier función $\gamma(\tau) \geq 0$, para la que la aplicación del operador Δ tenga algún sentido, se tiene $\Delta(\gamma)_\tau > 0$, a menos que $\gamma(\tau)$ sea identicamente nula.

Se puede expresar el Lema I por la expresión

$$\gamma \geq 0 \;\&\; \gamma \neq 0 \Rightarrow \Delta(\gamma)_\tau > 0 \text{ para toda } \tau \tag{17}$$

Otra forma equivalente es

$$\eta \geq \gamma \;\&\; \eta \neq \gamma \Rightarrow \Delta(\eta)_\tau > \Delta(\gamma)_\tau \text{ para toda } \tau \tag{18}$$

La equivalencia de las dos formas es consecuencia de la linealidad del operador, expresada por

$$\Delta(\eta) = \Delta(\gamma) + \Delta(\eta - \gamma)$$

§ 1.9 Algunas propiedades de las funciones $E_n(x)$. Ya se definió

$$E_n(x) = \int_1^\infty e^{-\alpha x}\, \alpha^{-n}\, d\alpha \tag{11}$$

Supondremos $x \geq 0$ y n entero positivo o nulo. Se tiene entonces

$$E_0(x) = e^{-x}/x \tag{19}$$

mientras que $E_1(x)$ es la bien conocida función integral-logaritmica, que algunos denotan por $-Ei(-x)$. Todas las funciones $E_n(x)$ son continuas para $x \geq 0$, excepto $E_0(x)$ que tiene un polo y $E_1(x)$ que tiene una singularidad logaritmica en el origen, es decir

$$E_1(x) = O(-\ln x) \quad \text{cuando } x \to 0 \tag{20}$$

Integración por partes de (11) da la simple fórmula de recurrencia

$$(n-1)E_n(x) = e^{-x} - x\, E_{n-1}(x) \tag{21}$$

mientras que la derivación respecto a x de (11) da

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x) \tag{22}$$

lo que implica

$$E_n(x) = \int_x^{\infty} E_{n-1}(x)\, dx \tag{23}$$

Es obvio que $\quad E_n(x) < E_{n-1}(x) \qquad (24)$

para toda $x \geqq 0$. Comparando esta desigualdad con la fórmula de recurrencia (21) se obtiene

$$(n-1)E_n(x) \leqq nE_{n+1}(x) \tag{25}$$

siendo válido el signo de igualdad para $x = 0$, si $n > 1$.

Para $n > 1$ se tiene

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1} \tag{26}$$

La comparación de (21), (24) y (25) da

$$\frac{e^{-x}}{x+n} < E_n(x) \leqq \frac{e^{-x}}{x+n-1} \tag{27}$$

el signo de igualdad siendo válido, como antes, para $x = 0$, si $n \geqq 1$.

Aplicando la desigualdad de Schwartz

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leqq \sqrt{\left[\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx\right]}$$

a la expresión

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\alpha x/2}}{\alpha^{(n-1)/2}} \frac{e^{-\alpha x/2}}{\alpha^{(n+1)/2}}\, d\alpha$$

sale la desigualdad

$$E_n^2(x) < E_{n-1}(x)\, E_{n+1}(x) \tag{28}$$

Esta desigualdad y (23) dan inmediatamente

$$\frac{d}{dx}\, \frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)} > 0 \tag{29}$$

Tambien se tiene

$$\frac{d}{dx}\frac{E_n(x+a)}{E_n(x)} < 0 \qquad (x>a) \qquad (30)$$

notando que el primer miembro de la desigualdad se puede escribir

$$\frac{E_n(x-a)}{E_n(x)}\left[\frac{E_{n-1}(x)}{E_n(x)} - \frac{E_{n-1}(x-a)}{E_n(x-a)}\right]$$

y la cantidad dentro del paréntesis cuadrado de esta expresión es siempre negativa por (29).

§ 1.10 <u>Algunas integrales definidas cuyos integrandos contienen a $E_n(x)$</u>.

Sea $$\underline{m_k} = \int_0^{\tau} x^k E_n(x)\,dx \qquad (31)$$

donde $k \geqq 0$ es entero. Sucesivas integraciones por partes, teniendo en cuenta (23) dan

$$\underline{m_k} = k!\left[\frac{1}{n+k} - E_{n+k+1}(\tau) - \tau E_{n+k}(\tau) - \frac{\tau^2}{2!}E_{n+k-1}(\tau) - \dots \right.$$
$$\left. \dots - \frac{\tau^k}{k!}E_{n+1}(\tau)\right] \qquad (32)$$

Ahora pongamos

$$\underline{M_k^n} = \int_0^{\tau} x^k E_n(\tau-x)\,dx = \int_0^{\tau}(\tau-t)^k E_n(t)\,dt \qquad (33)$$

que teniendo en cuenta (31) se puede escribir como

$$\underline{M_k^n} = \tau^k\underline{m_0} - k\tau^{k-1}\underline{m_1} + \frac{k(k-1)}{2!}\tau^{k-2}\underline{m_2} - \dots + (-1)^k\,\underline{m_k} \qquad (34)$$

que por (32) para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ se vuelve

$$\left.\begin{aligned}
&\underline{M_0^n} = \frac{1}{n} - E_{n+1}(\tau) \quad ; \quad \underline{M_1^n} = -\frac{1}{n+1} + \frac{\tau}{n} + E_{n+2}(\tau) \\
&\underline{M_2^n} = 2!\left[\frac{1}{n+2} - \frac{\tau}{n+1} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{1}{n} - E_{n+3}(\tau)\right] \\
&\underline{M_3^n} = 3!\left[-\frac{1}{n+3} + \frac{\tau}{n+2} - \frac{\tau^2}{2!}\frac{1}{n+1} + \frac{\tau^3}{3!}\frac{1}{n} + E_{n+4}(\tau)\right] \\
&\underline{M_4^n} = 4!\left[\frac{1}{n+4} - \frac{\tau}{n+3} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{1}{n+2} - \frac{\tau^3}{3!}\frac{1}{n+1} + \frac{\tau^4}{4!}\frac{1}{n} - E_{n+5}(\tau)\right] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Ahora llamando $\overline{m_k} = \int_0^{\infty} x^k\, E_n(x)\, dx$ (36)

donde k es entero como antes. Inmediatamente se obtiene

$$\overline{m_k} = \frac{k!}{n+k} \tag{37}$$

teniendo en cuenta este resultado se saca para la integral

$$\overline{M_k^n} = \int_\tau^{\infty} x^k E_n(x-\tau)\, dx = \int_0^{\infty} (y+\tau)^k E_n(y)\, dy \tag{38}$$

cuando k = 0, 1, 2, 3, 4, ...

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{M_0^n} = \frac{1}{n} \quad ; \quad \overline{M_1^n} = \frac{1}{n+1} + \frac{\tau}{n} \\
&\overline{M_2^n} = 2!\left[\frac{1}{n+2} + \tau\frac{1}{n+1} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{1}{n}\right] \\
&\overline{M_3^n} = 3!\left[\frac{1}{n+3} + \tau\frac{1}{n+2} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{1}{n+1} + \frac{\tau^3}{3!}\frac{1}{n}\right] \\
&\overline{M_4^n} = 4!\left[\frac{1}{n+4} + \tau\frac{1}{n+3} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{1}{n+2} + \frac{\tau^3}{3!}\frac{1}{n+1} + \frac{\tau^4}{4!}\frac{1}{n}\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

§ 1.11 <u>Desarrollo en serie para $E_1(x)$ en la vecindad del origen</u>[4]

Por definición

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} e^{-\alpha x}\, \alpha^{-1}\, d\alpha = \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}\, dt$$

Esta integral se puede transformar de la siguiente manera

$$E_1(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}\, dt - \int_0^{x} e^{-t}\, t^{-1}\, dt$$

$$= -\left[\int_0^{1}(1-e^{-t})t^{-1}\, dt - \int_1^{\infty} e^{-t}t^{-1}dt\right] + \int_0^{1} t^{-1}\, dt - \int_0^{x} e^{-t}\, t^{-1}\, dt$$

La cantidad dentro del paréntesis cuadrado es la constante de Euler

$$\left[\int_0^{1}(1-e^{-t})t^{-1}\, dt - \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}\, dt = \gamma = 0.5772156\ldots\right.$$

Por tanto

$$E_1(x) = -\gamma + \int_0^1 t^{-1}\,dt - \int_0^1 e^{-t}\,t^{-1}\,dt - \int_1^x e^{-t}\,t^{-1}\,dt$$

$$= -\gamma + \int_0^1 \frac{dt}{t} - \int_0^1 \left[\frac{1}{t} - 1 + \frac{t}{2!} - \frac{t^2}{3!} + \ldots (-1)^n \frac{t^{n-1}}{n!} \pm \ldots\right] dt$$

$$- \int_1^x \left[\frac{1}{t} - 1 + \frac{t}{2!} - \frac{t^2}{3!} + \ldots (-1)^n \frac{t^{n-1}}{n!} \pm \ldots\right] dt$$

Integrando término por término se obtiene finalmente

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x + x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} - \ldots - (-1)^n \frac{x^n}{n!n} \pm \ldots \qquad (40)$$

En esta expresión se ve claramente lo dicho en (20), esto es que

$$E_1(x) = O(-\ln x) \qquad \text{cuando } x \to 0$$

§ 1.12 Desarrollo de $E_1(x)$ en serie asintótica.

Integrando sucesivamente por partes a

$$E_1(x) = \int_x^\infty e^{-t}\,t^{-1}\,dt$$

sale

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}\right] +$$

$$+ (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n-1}}\,dt \qquad (41)$$

Si se define $S_n(x)$ por la igualdad

$$E_1(x) - S_n(x) = (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt \qquad (42)$$

como $x > 0$

$$E_1(x) - S_n(x) < \frac{(n-1)!}{x^n}\,e^{-x} \qquad (43)$$

Esto es, $S_n(x)$ cuando $n \to \infty$ es una serie asintótica para $E_1(x)$, pues el error cometido tomando hasta cierto término del desarrollo (41) es menor que el último término despreciado.

II: TEOREMAS FUNDAMENTALES ACERCA DE LA ECUACION INTEGRAL DE MILNE.[5]

§ 2.1 Teorema I[6]: La ecuación integral

$$J(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty J(t)\, E_1(|\tau-t|)\, dt \qquad (44)$$

admite una solución de la forma

$$J(\tau) = c\, f(\tau)$$

donde

$$f(\tau) = \tau + q(\tau) \qquad (45)$$

c es una constante y

$$\tfrac{1}{2} < q(\tau) < 1 \qquad (46)$$

Demostración: Por la definición del operador integral Δ tenemos que si a es una constante

$$\Delta(t+a)_\tau = (\tau+a) + \tfrac{1}{2}[E_3(\tau) - aE_2(\tau)] \qquad (47)$$

por (35) y (39).

Ahora, como $E_2(\tau) > E_3(\tau)$ y $E_3(\tau) = O[E_2(\tau)]$ para τ grande el más pequeño valor de a que hace la cantidad dentro del paréntesis cuadrado del segundo miembro de (47) negativa para toda τ es $a = 1$. Luego si

$$\bar{f}(\tau) = \tau + 1$$

$$\bar{f}(\tau) > \Delta(\bar{f})_\tau \qquad (48)$$

Ahora, como de acuerdo con (25), $2E_3(\tau) \geq E_2(\tau)$, $a=\frac{1}{2}$ es el mas grande valor de a que hace el paréntesis cuadrado del segundo miembro de (47) positivo para toda $\tau > 0$. Luego si

$$f_1(\tau) = \tau + \tfrac{1}{2}$$

$$f_1(\tau) < \Delta(f_1)_\tau \qquad (49)$$

Ahora hacemos sucesivamente

$$f_{n+1}(\tau) = \Delta(f_n)_\tau \qquad (50)$$

La desigualdad (49) toma entonces la forma

$$f_1(\tau) < f_2(\tau) \qquad (\tau > 0)$$

y de acuerdo con la positividad del operador Δ expresada por

(18) $$\Delta(f_1)_\tau < \Delta(f_2)_\tau$$

Aplicaciones sucesivas del operador Δ muestran en general que se tiene

$$f_n(\tau) < f_{n+1}(\tau) \qquad (\tau \geqq 0)$$

Por otro lado, de la desigualdad

$$f_1(\tau) < \bar{f}(\tau)$$

se saca de nuevo por la positividad del operador Δ

$$f_2(\tau) = \Delta(f_1)_\tau < \Delta(\bar{f})_\tau \qquad (\tau \geqq 0)$$

que por (48) se convierte en

$$f_2(\tau) < \bar{f}(\tau)$$

En general, es claro que se tiene la desigualdad

$$f_n(\tau) < \Delta(\bar{f})_\tau < \bar{f}(\tau) \qquad (\tau \geqq 0) \qquad (51)$$

Así hemos definido una sucesión de funciones $f_n(\tau)$ creciente y acotada, pues para cualquier n $f_n(\tau) < \bar{f}(\tau)$. Luego el límite

$$f(\tau) = \lim_{n \to \infty} f_n(\tau)$$

existe y satisface las desigualdades

$$\tau + \tfrac{1}{2} < f(\tau) < \tau + 1$$

Por tanto, se puede proceder al límite dentro del signo integral en (50). $f(\tau)$ es entonces una solución de $f = \Delta(f)$ con las propiedades (45) y (46).

§ 2.2 <u>Corolario</u>: La solución $f(\tau)$ del teorema anterior es una función continua para $\tau \geqq 0$.

Esto es consecuencia inmediata de la propiedad continuante de los operadores integrales.

§ 2.3 <u>Valuacion de la constante c de la solución del teorema I de las condiciones a la frontera.</u>

Si la ecuación de transmisión (7) es multiplicada por $\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi$ e integrado miembro a miembro de 0 a π se saca

$$\int_0^{\pi} \frac{dI}{d\tau}\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} I(\tau,\varphi)\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi - \int_0^{\pi} J(\tau)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi d\varphi$$

que por (3) y (4) se convierte inmediatamente en

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{4}F(\tau)$$

Pero como hemos impuesto la condición a la frontera (6):

$$F(\tau) = F = \text{constante}$$

se tiene inmediatamente

$$K(\tau) = \frac{1}{4} F\tau + \text{const} \tag{52}$$

Pongamos este valor en la ecuación (15) y se obtiene, en virtud de $J(\tau) = [\tau + q(\tau)]c$,

$$\frac{F}{4}\tau + \text{const} = \frac{c}{2}\int_0^{\infty}[t+q(t)]\, E_1(|\tau-t|)\, dt$$

o por (35) y (39)

$$\frac{F}{4}\tau + \text{const} = \frac{c}{2}[\tfrac{2}{3}\tau + E_5(\tau) + \int_0^{\infty} q(t)\, E_1(|\tau-t|)\, dt]$$

que para $\tau \neq 0$ se puede escribir

$$\frac{F}{4} = \frac{c}{3} + \frac{1}{\tau}[E_5(\tau) + \int_0^{\infty} q(t)\, E_1(|\tau-t|)\, dt - \text{const}]$$

como la función dentro del paréntesis cuadrado es acotada, en el límite cuando τ tiende a infinito se tendrá:

$$c = \frac{3}{4} F \tag{53}$$

con lo que queda demostrado el

<u>Teorema II</u>: Una solución de la ecuación integral de Milne, cuando $F(\tau) = F =$ constante, está dada por

$$J(\tau) = \frac{3}{4}[\tau + q(\tau)]\, F \tag{54}$$

donde $\frac{1}{2} < q(\tau) < 1$

§ 2.4 Ecuaciones integrales satisfechas por la función residuo $q(\tau)$. Si en $f(\tau) = \Delta(f)_\tau$ se pone $f(\tau) = \tau + q(\tau)$ teniendo en cuenta (35) y (39) se obtiene

$$q(\tau) = \tfrac{1}{2} E_3(\tau) + \Delta(q)_\tau \qquad (55)$$

Si en la ecuación (14) se pone la solución (54) se obtiene

$$\int_0^\infty q(t) E_2(t-\tau)\, dt - \int_0^\tau q(t) E_2(\tau-t)\, dt = E_4(\tau) \qquad (56)$$

Igualmente, poniendo (54) en (15), teniendo en cuenta (52), se obtiene

$$\int_0^\infty q(t) E_3(|\tau-t|)\, dt = a - E_5(\tau) \qquad (56)$$

donde a es una constante que se va a determinar después (§2.11)

§ 2.5 Teorema III [8]: Toda solución no negativa de la ecuación integral (44) es necesariamente de la forma $J(t) = \text{const}\ f(t)$, donde $f(t)$ es la solución del teorema I.

Demostración: Sea $J(\tau)$ una solución no negativa de (44) y póngase

$$b = \text{Extremo inferior de } \frac{J(\tau)}{f(\tau)} \qquad (5?)$$

y
$$J^0(\tau) = J(\tau) - b\, f(\tau)$$

$J^0(\tau)$ es entonces también una solución de (44) con las propiedades

$$J^0(\tau) \geq 0 \qquad (59)$$

$$\text{Ext.inf.de } \frac{J^0(\tau)}{f(\tau)} = 0 \qquad (60)$$

Lo que probaremos es que $J^0(\tau)$ se anula idénticamente.

De (60) y de la definición de extremo inferior inferimos la existencia de una sucesión infinita de números $\{\tau_n\}$ - - -

$n = 1, 2, 3, \ldots$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J^0(\tau_n)}{f(\tau_n)} = 0 \tag{61}$$

Aquí se deben distinguir dos casos: i) $\{\tau_n\}$ tiene un punto límite finito τ^0; ii) Se tiene $\tau_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

i) Es siempre posible sacar de $\{\tau_n\}$ una sucesión parcial que converja a τ^0 así, ninguna generalidad se pierde suponiendo que $\tau_n \to \tau^0$ cuando $n \to \infty$. De (61) y de $f(\tau^0) > 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} J^0(\tau_n) = 0$$

de donde se concluye por la ecuación integral que

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(J^0)_{\tau_n} = 0$$

Ahora, como función de τ, $\Delta(J^0)_\tau$ tiene la propiedad de ser semicontinua a la izquierda, lo que se probará después, lo cual quiere decir

$$\varliminf_{n\to\infty} \Delta(J^0)_{\tau_n} \geq \Delta(J^0)_{\tau^0}$$

Esto muestra, de acuerdo con (59) y con la positividad de Δ que $J^0(\tau) \equiv 0$.

La semicontinuidad a la izquierda de $\Delta(J^0)_\tau$ se prueba facilmente de la siguiente manera: de acuerdo con (59) para

$$\tau^0 - \delta < \tau < \tau^0 + \delta$$

se tiene

$$\Delta(J)_\tau \geq \frac{1}{2}\int_0^{\tau^0-\delta} J(t)\, E_1(\tau-t)\, dt + \frac{1}{2}\int_{\tau^0+\delta}^{\infty} J(t)\, E_1(t-\tau)\, dt \tag{62}$$

donde $0 < \delta < \tau^0$. Si $\tau^0 = 0$ el primer término del segundo miembro de la desigualdad se omite. El primer término es ahora una función continua dentro del intervalo $(\tau^0-\delta, \tau^0+\delta)$, estando excluída la singularidad logarítmica de E_1. Tenemos entonces

$$\underline{\lim}_{\tau\to\tau^0} \Delta(J)_\tau \geq \tfrac{1}{2}\int_0^{\tau^0-\delta} J(t)E_1(\tau^0-t)dt + \tfrac{1}{2}\int_{\tau^0+\delta}^{\infty} J(t)E_1(t-\tau^0)dt \qquad (63)$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier δ, cuando $\delta\to 0$ se tendrá

$$\underline{\lim}_{\tau\to\tau^0} \Delta(J)_\tau \geq \Delta(J)_\tau$$

desigualdad que expresa la semicontinuidad inferior.

ii) Como $f(\tau) = O(\tau)$ cuando $\tau\to\infty$, lo que tenemos que probar es que una solución $J^0(\tau)$ de (44) satisfaciendo

$$J^0(\tau) \geq 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{J^0(\tau_n)}{\tau_n} = 0 \quad \text{cuando } \tau_n \to \infty \qquad (64)$$

se anula identicamente. Como $J^0 \geq 0$ y $E_3 \leq E_1$ se tiene

$$\int_0^{\infty} J^0\, E_3(|\tau-t|)dt \leq 2\Delta(J^0)_\tau = 2J^0(\tau) \qquad (65)$$

Ahora valuaremos F. Es fácil ver que

$$F(\infty) = F = \lim_{\tau\to\infty} \frac{2}{\tau}\int_0^{\infty} J(t)E_3(|\tau-t|)dt$$

luego por (64) y (65) sacamos

$$F \leq 4 \lim \frac{J^0(\tau_n)}{\tau_n} = 0$$

dando así $F = 0$. Poniendo este valor en (14) para $\tau = 0$

$$\int_0^{\infty} J^0(t)\, E_2(t)\, dt = 0$$

cosa que es compatible con $J^0 \geq 0$ sólo si $J^0(\tau) \equiv 0$, lo que completa la prueba del teorema.

<u>Corolario</u>: Toda solución de (44) con una cota inferior - finita tiene la forma const.$f(\tau)$.

<u>Prueba</u>: En la solución $J^0(\tau) + c\, f(\tau)$ la constante c se pue de escoger tan grande para que esta solución sea en donde quiera positiva. El teorema anterior completa entonces la prueba.

§ 2.6 Serie de Neumann-Liouville para la función residuo $q(\tau)$.

$q(\tau)$ está representada por la serie de Neumann-Liouville de la ecuación (55)

$$q(\tau) = \tfrac{1}{2} E_2(\tau) + \Delta(q)_\tau \tag{55}$$

que es

$$q(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n[\tfrac{1}{2}E_2(\tau)] \tag{66}$$

donde Δ^n denota la enésima aplicación sucesiva del operador Δ, con $\Delta^0(f) = f$.

§ 2.7 Un teorema auxiliar. Sea Δ por un momento cualquier operador integral simétrico y definamos el producto (g,h) por la operación

$$(g,h) = \int_0^\infty g(t)h(t)dt \tag{67}$$

Entonces, para las soluciones de las ecuaciones integrales con el mismo núcleo

$$\begin{aligned} h_1 &= \Delta(h_1) + H_1 \\ h_2 &= \Delta(h_2) + H_2 \end{aligned} \tag{68}$$

se encuentra simbólicamente

$$(h_1,H_2) = (h_1,h_2) - (h_1,\Delta[h_2])$$

$$(h_2,H_1) = (h_2,h_1) - (h_2,\Delta[h_1])$$

de estas igualdades, por la simetria supuesta del operador Δ, se deduce que

$$(h_1,H_2) = (h_2,H_1) \tag{69}$$

TEOREMA AUXILIAR: Si Δ es un operador simétrico y positivo y en (68) $H_1 \geq 0$, $H_2 \geq 0$, entonces es válida la formula (69) si en (68) h_1 y h_2 son soluciones N (soluciones en series de Neumann de las respectivas ecuaciones integrales.

<u>Demostración</u>: Es evidente que los operadores iterados Δ^n son simétricos si Δ lo es. De tal hecho y de que h_1 y h_2 sean - soluciones N:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_0^\infty \Delta^n(H_1) \\ h_2 &= \sum_0^\infty \Delta^n(H_2) \end{aligned} \tag{70}$$

se deduce que

$$(H_2,h_1) = \sum_0^\infty (H_2,\Delta^n[H_1]) = \sum_0^\infty (H_1,\Delta^n[H_2]) = (H_1,h_2)$$

ya que la integración termino por término de la serie infinita de funciones está justificada por ser todos los términos no negativos.

§ 2.6 Defínase

$$g_\delta(\tau) = \frac{f(\tau+\delta) - f(\tau)}{\delta} \tag{71}$$

donde $f(\tau)$ es la solución de (44) del Teorema I y sea

$$G_\delta(\tau) = \frac{1}{2\delta} \int_\tau^{\tau+\delta} E_1(t)\, f(\tau+\delta-t)\, dt \tag{72}$$

Por otro lado, si Δ es el operador definido por (16) se verifica facilmente la identidad

$$\Delta(h)_\tau = \tfrac{1}{2} \int_0^\tau E_1(t)h(\tau-t)dt + \tfrac{1}{2} \int_0^\infty E_1(t)h(\tau+t)dt$$

que combinada con (71) y (72) da

$$g_\delta(\tau) = \Delta(g_\delta)_\tau + G_\delta(\tau) \tag{73}$$

esto es, $g_\delta(\tau)$ es la solución N de (73). Si en esta ecuación se hace $\delta \to 0$ se obtiene formalmente una ecuacion integral para la derivada de $f(\tau)$, pero como no se ha probado que tal derivada exista, se usara en la forma (73).

§ 2.9 [9] La aplicación del teorema auxiliar de § 2.7 a las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
1 &= \Delta(1)_\tau + \tfrac{1}{2}\, E_2(\tau) \\
q(\tau) &= \Delta(q)_\tau + \tfrac{1}{2}\, E_3(\tau)
\end{aligned}
\tag{74}
$$

da
$$(q, \tfrac{1}{2}E_2) = (1, \tfrac{1}{2}E_3) = \tfrac{1}{2}\, E_4(0) \tag{75}$$

pero como $(t, \frac{1}{2}E_2) = \frac{1}{2}\, E_4(0)$ y además $f = \tau + q$ se tiene

$$(f, \tfrac{1}{2}E_2) = E_4(0) \tag{76}$$

Por otro lado, el mismo teorema se puede aplicar a (73) y (55), obteniéndose

$$(q, G_\delta) = (g_\delta, \tfrac{1}{2}E_3) \tag{77}$$

Aún más, (71) da

$$(g_\delta, \tfrac{1}{2}E_3) = -\frac{1}{2\delta}\int_0^\delta f(t)E_3(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_\delta^\infty f(t)\frac{E_3(t-\delta)-E_3(t)}{\delta}\,dt$$

La fraccion de la segunda integral esta comprendida dentro de los valores $E_2(t-\delta)$ y $E_2(t)$, porque $E_3'(\tau) = -E_2$ es una función decreciente. Luego podemos proceder al limite dentro del signo integral y se encuentra

$$\lim_{\delta \to 0} (g_\delta, \tfrac{1}{2}E_3) = -f_0\, \tfrac{1}{2}E_3(0) + (f, \tfrac{1}{2}E_2) \tag{78}$$

Ahora, de (72) sale

$$\lim_{\delta \to 0} G_\delta(\tau) = f_0\, \tfrac{1}{2}E_1(\tau)$$

de aqui se deduce

$$\lim_{\delta \to 0} (q, G_\delta) = f_0 (q, \tfrac{1}{2}E_1) \tag{79}$$

y como para $\tau = 0$ (55) da

$$f_0 = (q, \tfrac{1}{2}E_1) + \tfrac{1}{2}E_3(0) \tag{80}$$

la combinación de (80), (79), (78) y (77) da

$$f_0^2 = (f, \tfrac{1}{2}E_2)$$

Luego de (76) sale

$$f_0^2 = E_4(0) \qquad \therefore \qquad f_0 = q_0 = 1/\sqrt{3} = 0.577350\ldots \tag{81}$$

§ 2.10 <u>Teorema IV:</u> La función $q(\tau)$ del teorema II es creciente para $\tau \geqq 0$.

<u>Demostración:</u> Sea $u(\tau)$ cualquier función positiva y no decreciente que satisface la desigualdad integral

$$u(\tau) \geqq \Delta(u)_\tau + \tfrac{1}{2} E_3(\tau) \qquad (82)$$

Por integración por partes del operador Δ es fácil deducir que

$$u(\tau) - \Delta(u)_\tau \doteq \tfrac{1}{2}\Big[u_0 E_2(\tau) + \int_0^\tau E_2(\tau - t)\,du(t) - \int_\tau^\infty E_2(t-\tau)\,du(t)\Big] \qquad (83)$$

y por el mismo procedimiento se saca de (55) que

$$\int_0^\tau E_2(\tau - t)\,dq(t) - \int_\tau^\infty E_2(t-\tau)\,dq(t) = E_3(\tau) - q_0 E_2(\tau) \qquad (84)$$

Sea, por otro lado, $U = U(\tau)$ el extremo inferior de todas las funciones $u(\tau)$ en el punto τ. $u \geqq 0$ y (82) implican

$$U(\tau) \geqq \tfrac{1}{2} E_3(\tau) > 0 \qquad (85)$$

Aún mas, $U(\tau)$ es evidentemente no decreciente y de (82) y de $u \geqq U$ se saca que

$$u(\tau) \geqq \Delta(U)_\tau + \tfrac{1}{2} E_3(\tau) \qquad (86)$$

es válida para todas las funciones $u(\tau)$ y por tanto para su extremo inferior $U(\tau)$.

LEMA: $U(\tau)$ es continua para $\tau \geqq 0$. En la desigualdad

$$U(\tau) \geqq \Delta(U)_\tau + \tfrac{1}{2} E_3(\tau) \qquad (87)$$

es válido el signo de igualdad para todo punto no interior de un intervalo de constancia de U ($\tau = 0$ inclusive)

Se pospondrá por un momento la prueba de este Lema y se demostrará apoyándose en él el teorema. Para lo cual se mostrará que U no puede tener un intervalo de constancia, probando así que aumenta y satisface la misma ecuación integral que $q(\tau)$.

Esto por el teorema III implica $U = q$ por (85). En efecto, si se supone que U tiene un intervalo de constancia $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$, tenemos por el Lema anterior y por (83) y (85)

$$U_0 - \frac{E_3(\tau)}{E_2(\tau)} + \int_0^{\alpha} \frac{E_2(\tau - t)}{E_2(\tau)}\, dU - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{E_2(t-\tau)}{E_2(\tau)}\, dU \quad \begin{matrix} = 0 & \text{si } \tau = \alpha \\ \geqq 0 & \text{si } \tau > \alpha \end{matrix} \qquad (87)$$

con $\alpha < \tau < \beta$. Esta expresión, sin embargo, es contradictoria, porque de acuerdo con (29)

$$\frac{d}{dx}\, \frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)} > 0$$

y así el segundo término del primer miembro de (87) decrece - (por tener signo menos) al crecer τ. Ahora de acuerdo con (30)

$$\frac{d}{dx}\, \frac{E_n(\tau - a)}{E_n(\tau)} < 0$$

luego, como $dU \geqq 0$, el tercer término nunca aumenta. Por último $E_2(t-\tau)/E_2(\tau)$ aumenta al aumentar τ, puesto que el numerador aumenta y el denominador disminuye, y como el cuarto - término, el que contiene esta fracción como integrando, esta afectado del signo menos, resulta tambien decreciente. Por - tanto, todo el primer miembro de (87) decrece al crecer τ, en abierta contradicción con el segundo miembro de la misma. Luego U no puede tener un intervalo de constancia, que era lo que - faltaba hacer ver para demostrar el Teorema.

<u>Demostración</u> <u>del</u> <u>Lema</u>: Para una función monótona no decreciente los límites $U(\tau - 0)$ y $U(\tau + 0)$ siempre existen . Como $U \leqq u$ se - tiene

$$U(\tau - 0) = U(\tau)$$

ya que de otra manera $u(\tau) = U(\tau - 0) < U(\tau)$, y U no sería el - extremo inferior de las $u(\tau)$.

Para probar la continuidad de U se mostrará ahora que

$$U(\tau_0+0) = U(\tau_0)$$

Sea $$2\eta = U(\tau_0+0) - U(\tau_0) \tag{88}$$

entonces es evidente que $2\eta \geqq 0$. Ahora, siendo el segundo miembro de (86) una función continua, de $u(\tau) \geqq U(\tau_0+0)$ $(\tau>\tau_0)$'

sacamos $$U(\tau) \geqq \Delta(U)_\tau + \tfrac{1}{2}E_3(\tau) + \eta \quad \text{donde } \tau_0<\tau<\tau_0+\delta \tag{89}$$

para cierto $\delta > 0$ convenientemente pequeño.

Definamos ahora la función auxiliar

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \in (\tau_0,\tau_0+\delta) \\ 0 & \text{si } \tau \notin (\tau_0,\tau_0+\delta) \end{cases} \tag{90}$$

Entonces

$$h(\tau) < \begin{cases} \Delta(h)_\tau + 1 & \text{si } \tau \in (\tau_0,\tau_0+\delta) \\ \Delta(h)_\tau & \text{si } \tau \notin (\tau_0,\tau_0+\delta) \end{cases} \tag{91}$$

Es geométricamente evidente que la función

$$u(\tau) = U(\tau) - \eta\, h(\tau) \tag{92}$$

no es decreciente y que $u \geqq 0$. Ahora, la segunda desigualdad de (91) muestra que fuera del intervalo $(\tau_0,\tau_0+\delta)$ u satisface (82). Por otro lado de (89) y de la primera desigualdad de (91) se infiere que (82) es satisfecha dentro de ese intervalo. $u(\tau)$ es pues un miembro de la clase introducida antes y entonces $u \geqq U$, lo que implica $\eta = 0$.

Para probar la segunda parte del Lema se ve primero que en (87) el signo de igualdad es válido para $\tau = 0$, ya que si no lo fuera se podria hacer el valor de $U(0)$ un poco menor sin afectar la desigualdad, en contradicción con la definicion de la "mas pequeña función u".

Un punto τ se llamará un punto propio de $U(\tau)$ cuando $U(\tau') > U(\tau)$ subsiste para cualquier $\tau' > \tau$. De acuerdo con la continuidad de U, un punto que no es propio (impropio) es o un punto extremo izquierdo o un punto interior de un intervalo de constancia de U. Un punto que no es interior a un tal intervalo es pues o propio o extremo izquierdo. En el primer caso y para $\tau > 0$ el punto es un límite superior de puntos propios. De acuerdo con la continuidad de U es suficiente probar la igualdad en (87) para todos los puntos propios τ_0. Definamos $\eta \geqq 0$ poniendo

$$2\eta = U(\tau_0) - \Delta(U)\tau_0 - \tfrac{1}{2}\, E_3(\tau_0) \qquad (93)$$

entonces se demostrará que $\eta > 0$ es imposible. Como U es contínua, (89) debe valer en un intervalo suficientemente pequeño $(\tau_0, \tau_0+\delta)$. Usemos otra función auxiliar definida por

$$h(\tau) = \begin{cases} U(\tau) - U(\tau_0) & \text{si } \tau \in (\tau_0, \tau_0+\delta) \\ 0 & \text{si } \tau \notin (\tau_0, \tau_0+\delta) \end{cases}$$

Como $0 < U \leqq 1$, $\eta < 1$, y entonces $h(\tau)$ satisface las desigualdades (91). La función u definida por (92) pertenece entonces a la clase de funciones definida, ya que u verifica a (82) y es no decreciente (evidencia geométrica), lo que completa la prueba del lema.

§ 2.11 <u>Una desigualdad para el valor de q(∞).</u>

Consideremos la ecuación (57)

$$\int_0^\infty q(t)\, E_3(|\tau-t|)\, dt = a - E_5(\tau) \qquad (57)$$

donde, como se dijo, <u>a</u> es una constante por valuarse. El límite del primer miembro de (57) es evidentemente el límite de

$$\int_{\lambda}^{\infty} q(t)\ E_3(|\tau-t|)\ dt$$

siendo λ una cantidad arbitraria fija. Esta integral está comprendida entre los límites

$$q(\lambda) \int_{\lambda}^{\infty} E_3(|\tau-t|)\ dt, \qquad q(\infty) \int_{\lambda}^{\infty} E_3(|\tau-t|)\ dt$$

y aquí las integrales tienden a $\frac{2}{3}$ cuando τ tiende a infinito. Luego

$$\tfrac{2}{3}q(\lambda) \leq a \leq \tfrac{2}{3}q(\infty)$$

o de acuerdo con la arbitrariedad de λ

$$a = \tfrac{2}{3}\ q(\infty) = \tfrac{2}{3}\ q_{\infty} \tag{94}$$

Por otro lado, de (57) sacamos para $\tau = 0$, teniendo en cuenta el resultado acabado de obtener

$$(q,E_3) = \tfrac{2}{3}\ q_{\infty} - \frac{1}{4} \tag{95}$$

y de (56) sale para $\tau = 0$

$$(q,E_2) = \tfrac{1}{3} \tag{96}$$

Las relaciones (95) y (96) junto con el hecho de $q(\tau)$ es una función monótona, permiten escribir una desigualdad para q_{∞} que fija su valor con una incertidumbre de uno por ciento, de la siguiente manera: De (95) y (96) sale

$$q_{\infty} = \frac{3}{2}\ (q,\ E_3 - \tfrac{1}{2}\ E_2) + \frac{5}{8}$$

Ahora, como $2E_3 > E_2$ para $\tau > 0$, podemos poner

$$q_{\infty} < \frac{3}{2}\ q_{\infty}\ (1,E_3 - \tfrac{1}{2}\ E_2) + \frac{5}{8}$$

y ya que

$$(1,\ E_3 - \tfrac{1}{2}E_2) = \frac{1}{12}$$

resulta

$$q_{\infty} < \frac{5}{7} \tag{97}$$

Por otro lado, de $3\ E_4 > 2\ E_3$ sale

$$\int_{0}^{\infty} (E_4 - \tfrac{2}{3}\ E_3)\ dq > 0$$

ya que dq es positiva. Como el integrando se anula para 0 e ∞, por integración por partes sale

$$(q, \tfrac{2}{3}E_2 - E_3) < 0$$

lo que con (95) y (96) da

$$\frac{2}{9} - \frac{2}{3}\, q_\infty + \frac{1}{4} < 0 \qquad \therefore \qquad \frac{17}{24} < q_\infty \qquad (98)$$

(97) y (98) dan así

$$5/7 > q_\infty > 17/24 \qquad ó \qquad .706 < q_\infty < .714$$

Redondeando a la segunda cifra decimal se saca el valor .71.

Independientemente de lo anterior, la teoría de Hopf-Wiener[10] para resolver ecuaciones integrales del tipo de la de Milne, aplicada a ésta permite calcular el valor de q_∞ exactamente, y es dado por la integral definida

$$q_\infty = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{\tan\varphi}{\varphi - \tan\varphi}\right] d\varphi \qquad (100)$$

que valuada numéricamente da 0.710447...

Luego el valor sacado de la desigualdad (99) tomando el promedio de los dos extremos, es aproximado hasta la tercera cifra decimal.

III: LAS SOLUCIONES APROXIMADAS DE LA ECUACION DE TRANSMISION.

§ 3.1 Método de Gratton-Chandrasekhar de aproximaciones sucesivas. Recientemente (1937) el Astrofísico italiano Livio Gratton [11] ideó un método general de aproximaciones sucesivas para resolver la ecuación fundamental

$$\cos\varphi \frac{\partial I(\tau,\varphi)}{\partial\tau} = I(\tau,\varphi) - J(\tau) \qquad (101)$$

con

$$J(\tau) = \int_0^{\pi} I(\tau,\varphi) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \qquad (102)$$

el principio fundamental del cual es postular una solución de la forma

$$I(\tau,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{n} I_\ell(\tau) \, P_\ell(\cos\varphi) \qquad (103)$$

donde $P_\ell(\cos\varphi)$ denotan los diversos polinomios de Legendre, con la esperanza de que al hacer n (entero) sucesivamente cada vez más grande, se vayan obteniendo soluciones cada vez más aproximadas. Debido a que el artículo original de Gratton estaba viciado no tan sólo de varios errores de cálculo, pero también de un error conceptual acerca de la valuación de las constantes de integración, todo el artículo tuvo que ser revisado por S. Chandrasekhar [12], a quien se deben tanto el desarrollo como los cálculos numéricos (que fueron verificados por mi) que siguen.

Si se pone $\xi = \cos\varphi$ en (101), (102) y (103) se puede escribir (101) en la forma

$$\xi \frac{dI}{d\tau} = I - I_0 \qquad (104)$$

donde obviamente I_0 representa el primer término del desarrollo (103). Si (103) es substituido en (104), teniendo presente que los polinomios de Legendre satisfacen la fórmula de recurrencia

$$\xi P_\ell = \frac{1}{2\ell+1}\left[(\ell+1)P_{\ell+1} + \ell P_{\ell-1}\right] \qquad (105)$$

se encuentra

$$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{2\ell+1}\left[(\ell+1)P_{\ell+1} + \ell P_{\ell-1}\right]\frac{dI_\ell}{d\tau} = \sum_{\ell=0}^{n} I_\ell P_\ell - I_0$$

en esta ecuación, por la ortogonalidad de los polinomios podemos igualar los coeficientes de un polinomio en ambos miembros y se encuentra

$$(\ell=1,2,\ldots) \quad \frac{\ell}{2\ell-1}\frac{dI_{\ell-1}}{d\tau} + \frac{\ell+1}{2\ell+3}\frac{dI_{\ell+1}}{d\tau} = I_\ell \qquad (106)$$

$$(\ell = 0) \quad \frac{1}{3}\frac{dI_1}{d\tau} = 0 \qquad (107)$$

De (107) sale inmediatamente la integral

$$I_1 = \text{constante} = \tfrac{3}{4}F \qquad (108)$$

(que $I_1 = \frac{3}{4}F$ se concluye haciendo $\ell = 1$ en la ecuación (112) de abajo). Para $\ell = 1$ (106) da

$$\frac{dI_0}{d\tau} + \frac{2}{5}\frac{dI_2}{d\tau} = I_1 = \tfrac{3}{4}F$$

y esta ecuación da inmediatamente otra integral

$$I_0 = \tfrac{3}{4}F\tau - \frac{2}{5}I_2 + a \qquad (109)$$

donde <u>a</u> es una constante de integración.

§ 3.2 <u>Las condiciones a la frontera</u>. Antes de hacer las distintas aproximaciones veremos en que forma son aplicables las condiciones a la frontera (5) y (6):

$$I(0,\xi) = 0 \quad \text{para} \quad -1 < \xi < 0 \qquad (110)$$

$$F = \int_{-1}^{1} I(\tau,\xi)\,\xi\,d\xi \qquad (111)$$

Ahora de (103) sale por la ortogonalidad de las P_ℓ

$$\frac{2}{2\ell+1} I_\ell(\tau) = \int_{-1}^{1} I(\tau,\xi) P_\ell(\xi) d\xi \tag{112}$$

ecuación que para $\tau = 0$, con la condición (110) se convierte en

$$\frac{2}{2\ell+1} I_\ell(0) = \int_{0}^{1} I(0,\xi) P_\ell(\xi) d\xi \tag{113}$$

Por otro lado

$$I(0,\xi) = \sum_{k=0}^{n} I_k(0) P_k(\xi) \tag{114}$$

ecuación que combinada con (113) da

$$\frac{2}{2\ell+1} I_\ell(0) = \sum_{k=0}^{n} I_k(0) \int_{0}^{1} P_\ell(\xi) P_k(\xi) d\xi \tag{115}$$

Así la condición a la frontera (110) es equivalente al sistema lineal (115) entre las $I_\ell(0)$. Por otro lado, es de esperarse que el sistema (115) no podrá ser satisfecho en su totalidad, por el hecho de que siempre habrá mas ecuaciones por satisfacer que constantes arbitrarias disponibles, debido a que no a cada I_ℓ le corresponde una constante de integración, ya que existen integrales del tipo de (108) y (109). Sin embargo, se satisfacerán tantas ecuaciones del sistema (115) como constantes de integración puedan introducirse en la solución. Es así como se ve que el orden de aproximación obtenido tomando para n un valor entero dado está fijado por el número de constantes arbitrarias que se tenga para valuarlas de (115), mas bien que por el número de términos retenidos en el desarrollo (103). Así se verá que las soluciones obtenidas reteniendo sólo los tres, cinco o siete primeros términos de (103) envuelven respectivamente una, dos o tres constantes de integración (diferentes de F). Estas serán la primera, segunda o tercera apro ximaciones para la solución de (101). (El error principal de Gratton es no haber reconocido este hecho y haber llamado, consecuentemente, segunda aproximación a la obtenida retenien do los cuatro primero términos de (103).

La ecuación (115) para ℓ = 0, 1, y 2 da respectivamente

$$2\,I_0(0) = I_0(0) + \frac{1}{2}I_1(0) - \frac{1}{8}I_3(0) + \frac{1}{16}I_5(0) + \dots$$

$$\frac{2}{3}I_1(0) = \frac{1}{2}I_0(0) + \frac{1}{3}I_1(0) + \frac{1}{8}I_2(0) - \frac{1}{48}I_4(0) + \frac{1}{128}I_6(0) + \dots \qquad (116)$$

$$\frac{2}{5}I_2(0) = \frac{1}{8}I_1(0) + \frac{1}{5}I_2(0) + \frac{1}{8}I_3(0) - \frac{5}{128}I\ (0) + \dots$$

donde en los segundos términos se han conservado hasta I_6 (inclusive). Teniendo en cuenta (108) estas ecuaciones (116) se pueden escribir

$$\frac{1}{2}I_0(0) + \frac{1}{16}I_3(0) - \frac{1}{32}I_5(0) + \dots = \frac{3}{16}F$$

$$\frac{1}{2}I_0(0) + \frac{1}{8}I_2(0) - \frac{1}{48}I_4(0) + \frac{1}{128}I_6(0) + \dots = \frac{1}{4}F \qquad (117)$$

$$\frac{2}{5}I_2(0) - \frac{1}{4}I_3(0) + \frac{5}{64}I_5(0) + \dots = \frac{3}{16}F$$

La última condición a la frontera que tenemos que conside rar es la correspondiente a $\tau = \infty$. Ya se vió que (Teorema II) $I_0(\tau) = O(\tau)$ cuando τ tiende a ∞. Por tanto, las $I_\ell(\tau)$ deben ser acotadas en $0 \leqq \tau \leqq \infty$

§ 3.3 <u>Primera aproximación</u>. Tomando $I_\ell = 0$ para $\ell \geqq 3$ tenemos la ecuación (106) para $\ell = 2$

$$\frac{2}{3}\frac{dI_1}{d\tau} + \frac{3}{7}\frac{dI_3}{d\tau} = I_2$$

Como $I_3 = 0$ teniendo en cuenta las integrales (108) y (109)

$$I_1 = \frac{3}{4}F \qquad (108)$$

$$I_0 = \frac{3}{4}F\tau + a - \frac{2}{5}I_2 \qquad (109)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{3}{4}\, F \\ I_0 &= \tfrac{3}{4}\, F\tau + a \\ I_2 &= 0 \end{aligned} \tag{118}$$

La constante de integración <u>a</u> puede valuarse de cualquiera de las dos primeras ecuaciones de (117) (las dos dan valores distintos), pero se escoge la segunda por ser la que asegura la condición F = Constante, obteniéndose así $a = \frac{1}{2} F$.

Luego la solución es

$$\begin{aligned} I_0(\tau) &= \tfrac{3}{4} F(\tau + \tfrac{2}{3}) \\ I_1 &= \tfrac{3}{4}\, F \end{aligned} \tag{119}$$

Esta aproximación fué obtenida primero por Milne con consideraciones diferentes de las usadas aquí y se conoce con su nombre.

§ 3.4 <u>Segunda</u> <u>aproximación</u>. Se obtiene tomando $I_\ell = 0$ para - $\ell \geqq 5$. Se tiene entonces en (106) para $\ell = 2, 3, 4$

$$\frac{3}{7}\,\frac{dI_3}{d\tau} = I_2 \tag{120}$$

$$\frac{3}{5}\,\frac{dI_2}{d\tau} + \frac{4}{9}\,\frac{dI_4}{d\tau} = I_3 \tag{121}$$

$$\frac{4}{7}\,\frac{dI_3}{d\tau} = I_4 \tag{122}$$

(120) y (122) dan

$$I_2 = \tfrac{3}{4}\, F \tag{123}$$

mientras que (120) (121) y (122) dan

$$\frac{16}{63}\,\frac{d^2I_3}{d\tau^2} = \frac{4}{9}\,\frac{dI_4}{d\tau} = I_3 - \frac{3}{5}\,\frac{dI_2}{d\tau} = I_3 - \frac{9}{35}\,\frac{d^2I_3}{d\tau^2} \qquad \therefore$$

$$\frac{23}{45}\,\frac{d^2I_3}{d\tau^2} = I_3$$

La solución de esta ecuación acotada cuando τ tiende a ∞ es

$$I_3 = A\, e^{-\alpha\tau} \tag{124}$$

donde A es una constante de integración y

$$\alpha = \sqrt{45/23} = 1.399 \qquad (125)$$

Para I_2 e I_4 sale

$$I_2 = -\frac{3}{7} A\alpha e^{-\alpha\tau} \quad ; \quad I_4 = -\frac{4}{7} A\alpha\, e^{-\alpha\tau} \qquad (126)$$

Mientras que para I_0 sale por (109)

$$I_0 = \tfrac{3}{4} F\tau + \frac{6}{35} A\alpha\, e^{-\alpha\tau} + a$$

Las constantes de integración A y α se valúan por las dos primeras ecuaciones de (117) que dan

$$\begin{aligned} A &= -\,0.517420\ F \\ a &= \ \ 0.5638\ \ \ F \end{aligned} \qquad (128)$$

Estos valores en (127), (108), (126) y (124) dan

$$\begin{aligned} I_0 &= \tfrac{3}{4} F(\tau + 0.7517 - 0.1654\ e^{-1.399\tau}) \\ I_1 &= \tfrac{3}{4} F \\ I_2 &= 0.3102\ F\ e^{-1.399\tau} \\ I_3 &= -0.5174\ F\ e^{-1.399\tau} \\ I_4 &= 0.4136\ F\ e^{-1.399\tau} \end{aligned} \qquad (129)$$

§ 3.5 <u>Tercera aproximación</u>. En este caso se toma $I_\ell = 0$ para $\ell \geqq 7$ y se tiene en (106) para $\ell = 2, 3, 4, 5, 6$

$$\frac{3}{7}\frac{dI_3}{d\tau} = I_2 \qquad (130)$$

$$\frac{3}{5}\frac{dI_2}{d\tau} + \frac{4}{9}\frac{dI_4}{d\tau} = I_3 \qquad (131)$$

$$\frac{4}{7}\frac{dI_3}{d\tau} + \frac{5}{11}\frac{dI_5}{d\tau} = I_4 \qquad (132)$$

$$\frac{5}{9}\frac{dI_4}{d\tau} + \frac{6}{13}\frac{dI_6}{d\tau} = I_5 \qquad (133)$$

$$\frac{6}{11}\frac{dI_5}{d\tau} = I_6 \qquad (134)$$

(130),(132) y (134) dan la integral

$$\frac{4}{3} I_2 + \frac{5}{6} I_6 = I_4 \qquad (135)$$

Tambien se saca de (134), (133) y (132)

$$\frac{6}{13} \frac{dI_6}{d\tau} = \frac{36}{143} \frac{d^2I_5}{d\tau^2} = I_5 - \frac{5}{9} \frac{dI_4}{d\tau} = I_5 - \frac{5}{9}(\frac{4}{7} \frac{d^2I_3}{d\tau^2} + \frac{5}{11} \frac{d^2I_5}{d\tau^2}) \qquad (136)$$

Similarmente, de (130), (131) y (132) sale

$$\frac{20}{99} \frac{d^2I_5}{d\tau^2} = \frac{4}{9}(\frac{dI_4}{d\tau} \quad \frac{4}{7} \frac{d^2I_3}{d\tau^2}) = - \frac{16}{63} \frac{d^2I_3}{d\tau^2} + I_3 - \frac{3}{5} \frac{dI_2}{d\tau}$$

$$= I_3 - \frac{16}{63} \frac{d^2I_3}{d\tau^2} - \frac{9}{35} \frac{d^2I_3}{d\tau^2} \qquad (137)$$

(136) y (137) pueden escribirse

$$\frac{59}{111} \frac{d^2I_5}{d\tau^2} = I_5 - \frac{20}{63} \frac{d^2I_3}{d\tau^2}$$

$$\frac{23}{45} \frac{d^2I_3}{d\tau^2} = I_3 - \frac{20}{99} \frac{d^2I_5}{d\tau^2} \qquad (138)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas es satis fecha por soluciones de las formas

$$I_5 = B\, e^{-\alpha\tau} \quad ; \quad I_3 = A\, e^{-\alpha\tau} \qquad (139)$$

donde A, B y α son constantes por determinarse. La substitución de (139) en (138) da

$$(\frac{59}{117} \alpha^2 - 1) B = - \frac{20}{63} \alpha^2 A$$

$$(\frac{23}{45} \alpha^2 - 1) A = - \frac{20}{99} \alpha^2 B$$

Luego α satisface la relación

$$(\frac{59}{117} \alpha^2 - 1)(\frac{23}{45} \alpha^2 - 1) = \frac{400}{6237} \alpha^4$$

Las soluciones de esta ecuación que satisfacen las condiciones a la frontera son

$$\alpha_1 = 1.9825 \quad ; \quad \alpha_2 = 1.1464$$

correspondientes a estos valores de α se tiene

$$B_1 = - 1.2706\, A_1 \quad ; \quad B_2 = 1.2368$$

Luego las soluciones para I_3 e I_5 son

$$I_3 = \qquad A_1 e^{-\alpha_1\tau} + \qquad A_2 e^{-\alpha_2\tau}$$
$$I_5 = -\,1.2706\ A_1 e^{-\alpha_1\tau} + 1.2368\ A_2 e^{-\alpha_2\tau} \tag{140}$$

y para las demás $I\ell$ se deduce fácilmente

$$I_2 = -\,0.8497\ A_1 e^{-\alpha_1\tau} - 0.4913\ A_2\ e^{-\alpha_2\tau}$$
$$I_4 = \ \ 0.0121\ A_1 e^{-\alpha_1\tau} - 1.2995\ A_2 e^{-\alpha_2\tau} \tag{141}$$
$$I_6 = \ \ 1.3740\ A_1 e^{-\alpha_1\tau} - 0.7733\ A_2 e^{-\alpha_2\tau}$$

Para valuar las constantes A_1, A_2 y a se usan ahora las tres ecuaciones de (117) Restando las dos primeras y con la última se sacan A_1 y A_2:

$$A_1 = -\,0.3931\ F\ ;\quad A_2 = 0.2384\ F \tag{142}$$

Cualquiera de las dos primeras ecuaciones de (117) determina ahora a y se obtiene

$$a = 0.5307\ F \tag{143}$$

Con estos valores la solución completa es

$$I_0 = \tfrac{3}{4}\ F(\tau+0.7077-0.1781e^{-\alpha_1\tau}+0.0625e^{-\alpha_2\tau})$$
$$I_1 = \tfrac{3}{4}\ F$$
$$I_2 = \ \ 0.3340\ e^{-\alpha_1\tau} - 0.1171\ e^{-\alpha_2\tau}$$
$$I_3 = -0.3931\ e^{-\alpha_1\tau} + 0.2384\ e^{-\alpha_2\tau} \tag{144}$$
$$I_4 = -0.0048\ e^{-\alpha_1\tau} - 0.3098\ e^{-\alpha_2\tau}$$
$$I_5 = \ \ 0.4995\ e^{-\alpha_1\tau} + 0.2948\ e^{-\alpha_2\tau}$$
$$I_6 = -0.5401\ e^{-\alpha_1\tau} - 0.1844\ e^{-\alpha_2\tau}$$

§ 3.6 La segunda aproximación de Eddington. Se tienen las ecuaciones integrales (13) y (15):

$$J(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty J(t)\ E_1(|t-\tau|)\ dt \tag{13}$$

$$K(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty J(t)\ E_3(|t-\tau|)\ dt \tag{15}$$

mientras que por otro lado se ha visto que $K(\tau)$ satisface (52):

$$K(\tau) = \frac{1}{4} F\tau + \text{const} \tag{52}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta esta expresión, se ve que las hipótesis hechas para obtener la primera aproximación de Milne (§3.3) para la solución de la ecuación de transmisión

$$J(\tau) = \tfrac{3}{4}F(\tau + \tfrac{2}{3}) \tag{119}$$

son equivalentes a poner

$$J(\tau) = \tfrac{1}{3} K(\tau) \tag{145}$$

valor que puede sugerirse a uno teniendo en cuenta el valor medio de $\cos^2\varphi$ sobre una semi-esfera. La segunda aproximación de Eddington consiste en postular entre $K(\tau)$ y $J(\tau)$ una - - relación

$$K(\tau) = \frac{J(\tau)}{3f(\tau)} \tag{146}$$

que substituya a (145), donde $f(\tau)$ es una función que va a - determinarse poniendo en las ecuaciones integrales (13) y (15), dentro del signo $\int$, por $J(t)$ el valor dado por (119). Así se obtiene

$$\begin{aligned} \tfrac{8}{3} J(\tau) &= F \int_0^\infty (t+\tfrac{2}{3})\, E_1(|t-\tau|)\, dt \\ \tfrac{8}{3} K(\tau) &= F \int_0^\infty (t+\tfrac{2}{3})\, E_3(|t-\tau|)\, dt \end{aligned} \tag{147}$$

Con la ayuda de las fórmulas (35) y (39) se encuentra

$$\int_0^\infty (t+c)\, E_n(|t-\tau|)\, dt = \frac{2(\tau+c)}{n} - c\, E_{n+1}(\tau) + E_{n+2}(\tau) \qquad (c=\text{const})$$

que aplicada a las ecuaciones (147) da

$$\begin{aligned} \tfrac{8}{3}J(\tau) &= \left[2(\tau+\tfrac{2}{3}) - \langle \tfrac{2}{3}E_2(\tau) - E_3(\tau)\rangle\right] \\ \tfrac{8}{3}K(\tau) &= \left[\tfrac{2}{3}(\tau+\tfrac{2}{3}) - \langle \tfrac{2}{3}E_4(\tau) - E_5(\tau)\rangle\right] \end{aligned} \tag{148}$$

De aquí, de acuerdo con (146) sale

$$\frac{K(\tau)}{J(\tau)} = \frac{1}{3f(\tau)} = \frac{\tfrac{2}{3}(\tau+\tfrac{2}{3}) - \left[\tfrac{2}{3}E_4(\tau) - E_5(\tau)\right]}{2(\tau+\tfrac{2}{3}) - \left[\tfrac{2}{3}E_2(\tau) - E_3(\tau)\right]} \tag{149}$$

Ahora, (52) se puede escribir

$$K(\tau) = \tfrac{3}{4} F\tau + K(0) \qquad (150)$$

y de la segunda de (148) se obtiene

$$K(0) = \frac{3}{8}\,\frac{17}{36}\,F$$

Por tanto, (150) puede escribirse

$$K(\tau) = \tfrac{3}{4}F(\tau + \frac{17}{24})$$

y de acuerdo con la hipótesis (146) tendremos para $J(\tau)$

$$J(\tau) = \tfrac{3}{4}F(\tau + \frac{17}{24})f(\tau) \qquad (151)$$

donde $f(\tau)$ está dada por (149). Esta expresión es la segunda aproximación de Eddington para el "Ergibigkeit".

§ 3.7 <u>La Ley de Oscurecimiento</u>. Se conoce con este nombre a la expresión $I(0,\varphi)$. De acuerdo con las ecuaciones (8) y (9), junto con la condición (5) vale

$$I(0,\varphi) = \int_0^{\infty} J(t)\, e^{-t \sec \varphi} \sec \varphi \, dt \qquad (152)$$

Poniendo aquí el valor de $J(t)$ dado por (54) se obtiene

$$I(0,\varphi) = \tfrac{3}{4}F\Big[\cos \varphi + \int_0^{\infty} q(t)\, e^{-t \sec \varphi} \sec \varphi \, dt \qquad (153)$$

Uno de los principales éxitos de la teoria de HOPF-WIENER (Ver el final del § 2.11) ha sido el que da una expresión exacta, susceptible de ser integrada numéricamente, para la ley de oscurecimiento, que resulta ser

$$I(0,\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{4}\, F\, (1+\cos \varphi)\, \exp.g(\varphi) \qquad (153)$$

donde

$$g(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln[(1-\beta \cot \beta)/\operatorname{sen}^2\beta]}{\cos^2\beta+\cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\beta}\, d\beta \qquad (154)$$

Para las tres primeras aproximaciones de los párrafos §§ 3.3, 3.4 y 3.5, se obtiene $I(0,\varphi)$ poniendo $J(t) = I_0(t)$ y se saca respectivamente

$$I(0,\varphi) = F(0.5000+0.75\cos\varphi) \tag{155}$$

$$I(0,\varphi) = F\left(0.5638+0.75\cos\varphi - \frac{0.1241}{1+1.399\cos\varphi}\right) \tag{156}$$

$$I(0,\varphi) = F\left(0.5307+0.75\cos\varphi - \frac{0.1336}{1+1.198\cos\varphi} + \frac{0.0469}{1+1.1464\cos\varphi}\right) \tag{157}$$

Es interesante hacer notar que la fórmula (155) puesta en la forma

$$\frac{I(0,\varphi)}{I(0,0)} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cos\varphi$$

fué encontrada primero empíricamente para representar las observaciones de intensidad de radiación en las distintas partes del disco del sol, pues las observaciones eran satisfechas por una expresión de la forma $1 - u + u\cos\varphi$, donde $u \sim 0.6$ - fue llamado el coeficiente de oscurecimiento hacia el limbo. En la Tabla II se comparan los valores aproximados (156) y - (157) con el exacto (154). La integración numérica de (154) es debida a Chandrasekhar [12].

§ 3.8 <u>Comparación de las distintas aproximaciones para $q(\tau)$</u>.

La Tabla I contiene los valores de $q(\tau)$ obtenidos de la segunda y tercera aproximaciones de Chandrasekhar y de la segunda - de Eddington. Allí se ve que diferencias apreciables existen - sólo para τ pequeño (sea $\tau < 0.5$), pues para valores más grandes se acercan rápidamente a sus valores $q(\infty)$, siendo el de Eddington el mas cercano al valor exacto dado por la Teoría de Hopf. La diferencia más notable (y la mas importante desde el punto de vista Astrofísico) es que la segunda aproximación de Eddington da un valor para la derivada de $q(\tau)$, en la vecindad del origen, mucho mayor que los que dan las otras aproximaciones consideradas. Sobre este punto se vuelve al final del - -

capítulo siguiente.

La aproximación de Eddington tiene el defecto, cuando se les compara con las de Chandrasekhar, que no da una expresión fácil de calcular para la ley de oscurecimiento hacia el limbo, por lo que, en lo que a ésta respecta, no es posible compararla con los resultados que da la fórmula exacta (154). Se podría calcular, por integración numérica la Ley de Oscurecimiento resultante de la Segunda aproximación de Eddington, llevando (151) en (152) e integrando numéricamente el resultado de tal substitución; pero, hasta donde estoy enterado, nadie lo ha hecho hasta hoy.

IV: UNA FORMULA DE INTERPOLACION PARA $q(\tau)$ EN LA VECINDAD DEL ORIGEN.

§ 4.1 La fórmula de interpolación. Dado que las diferentes aproximaciones para $q(\tau)$, expuestas en el capítulo anterior, difieren, como se dijo antes, especialmente en la vecindad del origen, se pensó en encontrar una fórmula de interpolación que representara a $q(\tau)$ en una cierta vecindad del origen, con una aproximación dependiente del número de constantes numéricas que esa fórmula contuviera, y que se determinarían haciendo que tal fórmula de interpolación satisficiera una ecuación integral para $q(\tau)$ en cierto número de puntos τ. Consideraciones de sencillez en la valuación de las integrales definidas que la substitución de la fórmula de interpolación por $q(\tau)$ en la ecuación integral implicaría, hicieron escoger un polinomio

$$P(\tau) = \sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k \tag{158}$$

para tal fórmula de interpolación. Así, si una expresión como (158) es substituida en lugar de $q(\tau)$, en una ecuación integral que esta función satisfaga -sea, por facilidad-

$$\int_0^\infty q(t)\, E_2(t-\tau)\, dt - \int_0^\tau q(t)\, E_2(\tau-t)\, dt = E_4(\tau) \tag{56}$$

(pudo haberse escogido (55) o (57)) se obtendrá una expresión de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\int_\tau^\infty t^k E_2(t-\tau)\, dt - \int_0^\tau t^k E_2(\tau-t)\, dt\right] = E_4(\tau)$$

que con la notación del § 1.10 se escribe

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\overline{M_k^2} - \underline{M_k^2} \right] = E_4(\tau)$$

Si esta igualdad se escribe para n puntos τ escogidos convenientemente se obtendrá un sistema de ecuaciones lineales para determinar las a_k.

Sin embargo, para aprovechar el conocimiento que da § 2.9 -

sobre el valor de $q(0)$, se pusc en (56)

$$q(\tau) = q_0 + r(t) \qquad (159)$$

La substitución de (159) en (56) da fácilmente

$$\int_{\tau}^{\infty} r(t)\, E_2(t-\tau)\, dt - \int_{0}^{\tau} r(t)\, E_2(\tau-t)\, dt = E_4(\tau) - q_0 E_3(\tau) \qquad (160)$$

Si aquí se pone

$$r(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k \qquad (161)$$

se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [\, \overline{M_k^2} - \underline{M_k^2} \,] = E_4(\tau) - q_0\, E_3(\tau) \qquad (162)$$

Para las funciones dentro del paréntesis cuadrado del primer miembro se tiene de (35 y (39)

$$\left.\begin{aligned} \overline{M_1^2} - \underline{M_1^2} &= \tfrac{2}{3} - E_4(\tau) \\ \overline{M_2^2} - \underline{M_2^2} &= 2!\left[\tfrac{2}{3}\tau + E_5(\tau)\right] \\ \overline{M_3^2} - \underline{M_3^2} &= 3!\left[\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\tfrac{\tau^2}{2!} - E_6(\tau)\right] \\ \overline{M_4^2} - \underline{M_4^2} &= 4!\left[\tfrac{2}{5}\tau + \tfrac{2}{3}\tfrac{\tau^3}{3!} + E_7(\tau)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

....

Si en (162) se pone $n=4$ se obtiene un polinomio de cuarto grado para $q(\tau)$. Para valuar las constantes del polinomio se escogie ron los puntos $\tau = 0,\ 0.01,\ 0.05$ y 0.2, habiendose calculado las funciones $E_n(\tau)$ en esos puntos por medio del desarrollo (40) y de la fórmula de recurrencia (21) para las funciones E_n. El sistema resultante resultó ser

$$\begin{array}{llll} a_1 + 1.500000a_2 & + 3.600000a_3 & + 12.000000a_4 & = 0.1339747 \\ \quad 1.497901 & \quad 3.591951 & \quad 11.967159 & \quad 0.1339734 \\ \quad 1.541077 & \quad 3.618326 & \quad 12.192591 & \quad 0.1240767 \\ \quad 1.560539 & \quad 3.699861 & \quad 12.203191 & \quad 0.1108565 \end{array} \qquad (166)$$

la solución del cual es

$$a_1 = 0.46142\ ;\ a_2 = -0.40641\ ;\ a_3 = -0.07592\ ;\ a_4 = 0.04462 \qquad (167)$$

Por tanto, para $0 \leq \tau \leq 0.2$

$$q(\tau) = 0.57735 + 0.48142\tau - 0.40642\tau^2 - 0.07592\tau^3 + 0.04462\tau^4 \qquad (168)$$

No se consideró un polinomio de orden superior al quinto, pues aparte de que las incógnitas a_k del sistema (162) decrecen al crecer k, porque sus coeficientes crecen como k!, para $\tau \leq 0.2$ $\tau^5 \leq 0.00032$ y el agregar un término más a (162) en ningún caso afectaría una unidad del quinto orden decimal.

§ 4.2 <u>Otra posible fórmula de interpolación</u>. La forma funcional de $q(\tau)$ que dan las dos aproximaciones de Chandrasekhar de §§ 3.4 y 3.5, sugiere el postular para $q(\tau)$ una expresión de la forma

$$q(t) = q_{\infty} - s(t) \qquad (169)$$

con

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \exp(-b_k t) \qquad (170)$$

pues se piensa que introduciendo (169) y (170) en una ecuación integral para $q(\tau)$, semejantemente a como se hizo en el párrafo anterior, se podría establecer un sistema de ecuaciones de condición de donde se sacarían las constantes a_j y b_j, ya que de esta manera se verificaría materialmente la exactitud de las mencionadas interpolaciones.

Enseguida se trata este problema. Primero, poniendo (169) en (56) se saca

$$\int_{\tau}^{\infty} r(t)E_2(t-\tau)\,dt - \int_{0}^{\tau} r(t)E_2(\tau-t)\,dt = q_{\infty}E_3(\tau) - E_4(\tau) \qquad (171)$$

Introduciendo aquí (170) se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\Big[\int_{\tau}^{\infty}\exp(-b_k t)E_2(t-\tau)dt - \int_{0}^{\tau}\exp(-b_k t)E_2(\tau-t)dt\Big] =$$
$$= q_{\infty}E_3(\tau) - E_4(\tau) \qquad (172)$$

Las integrales definidas que hay que valuar son de los tipos

$$I = \int_{\tau}^{\infty} e^{-bt}\, E_2(t-\tau)\, dt$$

$$II = \int_{0}^{\tau} e^{-bt}\, E_2(\tau-t)\, dt$$

Para las que tenemos

$$I = \int_{\tau}^{\infty} e^{-bt} \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-(t-\tau)\alpha}}{\alpha^2}\, d\alpha\, dt = \int_{1}^{\infty} \frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha^2} \int_{\tau}^{\infty} e^{-(b+\alpha)t} dt\, d\alpha$$

$$= e^{-b\tau} \int_{1}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2(\alpha+b)} = \frac{e^{-b\tau}}{b^2}[b - \ln(1+b)] \qquad (173)$$

Para la otra se tiene semejantemente

$$II = e^{-b\tau} \int_{1}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2(\alpha-b)} - \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2(\alpha-b)}\, d\alpha \qquad (174)$$

Estas integrales convergen si $b<1$. Descomponiendo en fracciones simples es fácil obtener

$$\int_{1}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2(\alpha-b)} = \frac{1}{b^2}\left(\ln \frac{1}{1-b} - b\right) \qquad (175)$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2(\alpha-b)}\, d\alpha = \frac{1}{b^2}\left[\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha-b} d\alpha - E_1(\tau) - bE_2(\tau)\right] \qquad (176)$$

Haciendo en la integral del segundo miembro de (176) el cambio de variable

$$\gamma = \frac{\alpha-b}{1-b}$$

sale

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha-b}\, d\alpha = e^{-b\tau}\, E_1[(1-b)] \qquad (177)$$

de tal manera que (174) queda

$$II = \frac{e^{-b\tau}}{b^2}\left[\ln \frac{1}{1-b} - b - E_1[(1-b)\tau]\right] + \frac{1}{b^2}[E_1(\tau) + bE_2(\tau)] \quad (178)$$

Teniendo en cuenta (173) y (178) se puede escribir (172)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k^2} \Big\} e^{-b_k t}\Big[2b_k - \ln\frac{1+b_k}{1-b_k} + E_1[1-b]\tau)\Big] - E_1(\tau) - b_k E_2(\tau) \Big\{ =$$

$$= q_\infty E_3(\tau) - E_4(\tau) \qquad (179)$$

en donde $b_k < 1$. Esto implica una contradicción con lo obtenido en las aproximaciones de Chandrasekhar, pues allí todas las exponenciales que aparecen tienen $b > 1$. No he podido explicar la razón de esta contradicción, ya que si la hipótesis fundamental del método de Chandrasekhar-Gratton está justificada, los coeficientes de τ en las exponenciales que resultan en la expresión para $J(\tau)$ deberían ser menores que la unidad.

Las ecuaciones (179) no son apropiadas para calcular b_k por la complejidad de la dependencia de ellas en esta constante. Aunque como son lineales en a_k, fijando arbitrariamente las b_k ($b_k < 1$), se pueden usar para determinar las resultantes a_k. Como un ensayo se puso

$$r(t) = a_1\, e^{-0.8t} + a_2\, e^{-0.4t}$$

y habiendo puesto en (179) $\tau = 1.0$ y 3.0 se obtuvo para $r(t)$

$$r(t) = 0.0760\, e^{-0.8t} - 0.0363\, e^{-0.4t}$$

que da para $q(0)$ un valor bastante lejano del verdadero: 0.67075 en lugar de 0.57735. Dada la poca aproximación que dió esta fórmula de interpolación se usó mejor el polinomio del párrafo anterior.

§ 4.3 Conclusión. Como se ve en la Tabla I, o mejor aún, en la figura I, el comportamiento de $q(\tau)$ para $\tau < 0.2$ indicado por la fórmula de interpolación (16?) es intermedio del que indicarían las dos aproximaciones de Chandrasekhar y la de Eddington, por lo menos en lo que se refiere a la rapidey con la que cae la pendiente de $q(\tau)$ al crecer τ. Para $\tau > 0.2$ la figura parece indicar que la segunda aproximación de Eddington representa más fielmente a $q(\tau)$, aunque para $\tau < 0.2$ puede decirse que las tres aproximaciones están igualmente retiradas de la función (168).

NOTAS BIBLIOGRAFICAS.

1 Los fundamentos físicos de la ecuación de transmisión se entran en

K. Schwarzschild. i) Gött. Nachr. Math. Phys. Klasse (1906) p. 41.

ii) Berliner Ber. Math. Phys. Klasse (1914) p. 1183.

E. A. Milne. Handbuch der Astrophysik. Band 3. No. 1. pp. 114-126. Berlin. Springer. 1933.

A. S. Eddington. "The Internal Constitution of the Stars". XII. Cambridge. 1926.

S. Chandrasekhar. i) "An Analysis of the Problems of the Stellar Atmospheres". Astr. Jour. of Soviet Union, Vol XI, 1934, Moscow.

ii) "An Introduction to Stellar Structure". Cap. V, 1936. Chicago.

A. Unsöld. "Physik der Sternatmosphären" pp. 89-104. 1938. Berlin, Springer. 1938.

2 El operador Λ fué introducido por

E. Hopf i) "Mathematical Problems of Radiative Equilibrium". Chap. I. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 31, 1934.

3 E. Hopf i) Loc. cit.

4 Nielsen. "Theorie der Integrallogarithmus". Leipzig, Teubner, (1906)

5 E. Hopf i) Loc. cit. Chap. II.

6 Este teorema aparece demostrado por primera vez en:

E. Hopf ii) Zeitschrift für Physik. 46 (1928), p. 155.

7 La relación $c = \frac{3}{4} F$ fué demostrada independientemente por

M. Bronstein Zeitschrift für Physik. 49 (1929), p. 144.

E. Hopf iii) Monthly Notices of The R.A.S. 90 (1930), p. 287.

8 Los Teoremas III y IV fueron demostrados por Hopf i) Loc. cit.

9 El valor de q_0 fué encontrado por Hopf iii) Loc. cit.

10 El método general de Wiener y Hopf, así como su aplicación a la ecuación de Milne está contenido en

N. Wiener und E. Hopf. Berliner Ber.Math.Phys.Klasse (1931)p.696.

Wiener and Paley. "The Fourier Transform in the Complex Plane" Chap. IV. Colloquium Series of the American Mathematical Society. No. 19.

E. C. Titchmarsh. "Introduction to the Theory of Fourier Series" pp. 344-349. Oxford at the Clarendon Press. (1937)

11 Livio Gratton. Societa Astronomica Italiana. 10, pp.309-325,1937.

12 S. Chandrasekhar. Astrophysical Journal. 99, pp.180-190,1944.

13 E.A.Milne. Loc. cit.

A. S. Eddington. Loc. cit.

A. Unsöld. Loc. cit.

TABLA I

τ	$q(\tau)$				
	a	b	c	d	e
0.00	0.586	0.592	0.583	0.577	0.577
.05	.597	.605	.620	.600	
.10	.608	.617	.635	.621	
.15	.617	.628	.645	.640	
.20	.627	.638	.653	.652	
.25	.635	.646	.660		
.30	.643	.654	.665		
.40	.657	.667	.673		
.50	.670	.677	.679		
.60	.680	.685	.683		
.80	.698	.696	.689		
1.0	.711	.703	.694		
1.4	.728	.709	.699		
1.8	.738	.711	.702		
2.2	.744	.710	.704		
2.6	.747	.710	.705		
3.0	.749	.709	.706		
∞	.752	.708	.710		.710

a: Segunda aproximación de Chandrasekhar de § 3.4
b: Tercera " " " " § 3.5
c; Segunda " " Eddington " § 3.6
d: Fórmula de interpolación (168)
e: Valores exactos de la Teoría de Hopf (Cap. II)

TABLA II

$\cos\varphi$	$I(0,\varphi)/I(0,0)$		
	a	b	e
0.0	0.3484	0.3530	0.3439
.1	.4199	.4264	.4290
.2	.4887	.4955	.4988
.3	.5557	.5620	.5649
.4	.6214	.6268	.6291
.5	.6860	.6904	.6922
.6	.7498	.7533	.7546
.7	.8130	.8156	.8164
.8	.8757	.8774	.8779
.9	.9380	.9388	.9391
1.0	1.0000	1.0000	1.0000