

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teoría de los Reactores Nucleares Homógenos

T E S I S

Que para obtener el Título de
Físico Teórico
presenta el pasante

ALEJANDRO MEDINA

México.

1953.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TEORIA DE LOS REACTORES NUCLEARES HOMOGENEOS.

INTRODUCCION.

En la teoría de la pila es costumbre hacer ciertas suposiciones respecto a los procesos físicos que se verifican en un reactor nuclear capaz de sostener una reacción en cadena. Estas suposiciones que se introducen con el objeto de simplificar el análisis matemático del reactor se refieren principalmente al mecanismo de producción y operación de los neutrones dentro del mismo y pueden resumirse de la siguiente manera:

1.- Se supone que como resultado del hendimiento de un núcleo se produce, entre otras cosas, un cierto número de neutrones que poseen la misma energía. Esta energía, llamada "energía de hendimiento" (alrededor de unos 2 MeV.), se considera como la energía primaria de los neutrones que inician un ciclo en el reactor. Los neutrones rápidos producidos por un hen-

dimiento se deceleran luego por colisión con los núcleos del moderador, obedeciendo una ecuación de edad. Algunos de ellos serán capturados en el proceso por reacciones (n, γ) pero los restantes eventualmente llegarán a un equilibrio térmico con el material del reactor y obedecen entonces a una ecuación de difusión.

2.- Se supone además que solo los neutrones térmicos son activos, es decir, que un neutrón producido en el reactor no efectúa hendimientos hasta que alcanza la edad térmica. Esto equivale a suponer que las secciones (n, f) son despreciables a energías mayores que la térmica.

Estas suposiciones parecen ser bastante radicales. Es bien sabido que, en el hendimiento de un núcleo se obtiene no un haz monocromático de neutrones primarios, sino un espectro continuo que va desde las energías térmicas hasta energías de 15 a 20 MeV. en la región estudiada. Evidentemente el espectro puede continuarse indefinidamente en la región de altas energías. Además, debido al decaimiento de aquellos productos de hendimiento que quedan sobre la línea de estabilidad, resulta un espectro discreto de neutrones retardados consistente de varias rayas monocromáticas. La producción de neutrones dista pues mucho de ser monocromática. La llamada "energía de hendimiento" no es sino el promedio de un espectro entero.

En cuanto a la segunda suposición hay que hacer notar que solo es válida para U^{235} cuya sección (n, f) cae rápidamente del valor inicial de 545b para energías térmicas, a valores despreciables para energías mayores. Si se consideran otros núcleos hendibles, sin embargo, se encuentra que

la situación es bien distinta. En el U^{238} la sección es muy pequeña ($\sim 0.01b$) para energías epitérmicas y aumenta rápidamente a partir de 1.5 MeV. Cosa análoga ocurre en el Np^{239} , etc.

Una pila térmica generalmente opera con uranio natural en el que el U^{235} solo entra en muy pequeña proporción. Es de esperarse por tanto que la gran abundancia de nucleos de U^{238} en cierto modo compense la pequeñez de la sección y que los hendimientos producidos por los neutrones rápidos tengan una influencia apreciable en el comportamiento de la pila.

En vista de las consideraciones anteriores es claro que sería interesante suprimir las dos suposiciones señaladas y construir una teoría de la pila en la que, por una parte se tenga en cuenta el espectro entero de neutrones continuo y discreto, y por otra, que se considere el curso entero de las secciones con la energía.

En este trabajo se ha abordado tal programa con ecuaciones de difusión. Con el objeto de describir adecuadamente las propiedades de la pila cuando se considera la distribución de los neutrones respecto a la energía, ha sido necesario, en primer lugar, generalizar el concepto de "constante de reproducción" e ideas a él asociadas, tales como los "factores de producción" y los distintos "factores de utilización". Se encontrará que, en vez de simples constantes calculadas a partir de los valores de las secciones a energía térmica, es necesario introducir funciones de la energía que describen propiedades correspondientes distribuidas a lo largo del espectro. Así resultan las "funciones de producción" que se introducen en el Capítulo I.

Por otra parte, la introducción de efectos espectrales conduce naturalmente a una descripción de la fuente que difiere profundamente de la ordinaria. En vez del término usual proporcional a la densidad de neutrones térmicos, resultan integrales sobre la distribución. Las ecuaciones de la pila quedan como ecuaciones integrodiferenciales cuya solución conduce a las ecuaciones de en horas y a las condiciones críticas.

CAPITULO I.

1.- Las Ecuaciones de la Pila.

Se va a considerar una pila homogénea no reflejada, que se va a caracterizar por las siguientes secciones macroscópicas:

Σ_s sección de dispersión.

Σ_c sección de captura.

Σ_f sección de hendimiento.

$\Sigma_a = \Sigma_c + \Sigma_f$ sección de absorción.

$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a$ sección total.

se designará por D el coeficiente de difusión, por ξ la pérdida logarítmica media de energía y por $T = \frac{1}{v\Sigma_a}$ la vida media de un neutrón de velocidad v en el reactor. El valor de T para energía térmica se designará por T_0 .

Sea $n(\underline{r}, E, t)$ el número de neutrones por unidad de volumen y por unidad de energía (p.u.v.e.) que al tiempo t se encuentran en el punto (\underline{r}, E) , $\underline{r} = ix + jy + kz$ representando el vector de posición en el reactor y E la ener-

gía. $n(\underline{r} \ E \ t)$ satisface una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n(\underline{r} \ E \ t)}{\partial t} = D \Delta n(\underline{r} \ E \ t) + \frac{\partial [n(\underline{r} \ E \ t) \ v \ \Sigma \xi \ E]}{\partial E} - n(\underline{r} \ E \ t) \ v \ \Sigma_a + Q(\underline{r} \ E \ t) \quad (1)$$

$$\text{con } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

El primer término representa las pérdidas por difusión espacial, el segundo las pérdidas por difusión energética (deceleración), el tercero las pérdidas por absorción y el último la producción, es decir, el número de neutrones producidos al tiempo t por unidad de volumen, unidad de energía y unidad de tiempo (p.u.v.e.t.). El flujo de neutrones será:

$$\phi(\underline{r} \ E \ t) = n(\underline{r} \ E \ t) \ v \quad (2)$$

y la absorción, o sea el número de neutrones absorbidos p.u.v.e.t.

$$a(\underline{r} \ E \ t) = n(\underline{r} \ E \ t) \ v \ \Sigma_a = \frac{n(\underline{r} \ E \ t)}{T} \quad (3)$$

Supondremos que, con un valor adecuado de $Q(\underline{r} \ E \ t)$, (1) describe el comportamiento de los neutrones para energías mayores que la térmica. Los neutrones térmicos se considerarán separadamente, designándose por $n_t(\underline{r} \ t)$ su densidad. Esta densidad claramente satisface una ecuación como (1) excepto por el término de deceleración:

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}, t)}{\partial t} = D_t \Delta n_t(\underline{r}, t) - \frac{n_t(\underline{r}, t)}{\tau_0} + Q_t(\underline{r}, t) \quad (1a)$$

aquí D_t es el valor del coeficiente de difusión para energías térmicas y $Q_t(\underline{r}, t)$ la producción de neutrones térmicos.

Nuestro principal problema consiste en calcular los términos de producción en (1) y (1a).

Imaginar un neutrón de energía E' que produce un hendimiento. Como resultado del mismo, aparecerá cierto número de neutrones inmediatos con un cierto espectro. Designamos por $\eta(E, E')$ el número de neutrones p.u.e. de energía E inmediatamente producidos por hendimiento causado por un neutrón de energía E' : $\eta(E, E')$ se llamará función de producción inmediata. El número total de neutrones inmediatos producidos por hendimiento será:

$$\eta_0(E') = \int_0^{\infty} \eta(E, E') dE \quad (4)$$

$\eta_0(E')$ se llamará factor de producción inmediata.

Además de los $\eta_0(E')$ neutrones inmediatos, se producen varias rayas de neutrones monocromáticos retardados. Sea $\eta_i(E')$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) el número de tales neutrones que se producen en el grupo i . El número total de neutrones producidos por hendimiento será entonces

$$\eta(E') = \eta_0(E') + \sum_1 \eta_1(E') \quad (5)$$

$\eta(E')$ se llama factor de producción. Si como es corriente, en vez de los números η_1 usamos las fracciones β_1 de neu-

trones retardados, claramente

$$\eta_1(E') = \beta_1(E') \eta(E') \quad (6)$$

y será como de costumbre

$$\beta(E') = \sum_i \beta_i(E') = \frac{\sum_i \eta_i(E')}{\eta(E')} = 1 - \eta_0(E') \quad (7)$$

la fracción de retardación, es decir, la fracción del número total de neutrones producidos que son retardados.

El número de hendimientos p.u.v.t. producidos por los neutrones que se encuentran en la banda (E', dE') es

$$n(\underline{r}, E', t) v' \Sigma_f' dE'$$

en donde v' es la velocidad correspondiente a la energía E' y $\Sigma_f' = \Sigma_f(E')$. El número de neutrones inmediatos producidos p.u.v.e.t. por estos neutrones será:

$$\eta(E, E') n(\underline{r}, E', t) v' \Sigma_f' dE'$$

y el número total

$$\int_{E_t}^{\infty} \eta(E, E') n(\underline{r}, E', t) v' \Sigma_f' dE' = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E, E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' \quad (8)$$

en donde

$$k(E, E') = \eta(E, E') \frac{\Sigma_f(E')}{\Sigma_a(E')} \quad (9)$$

es la función de reproducción inmediata, es decir, el número de neutrones p.u.e. de energía E producidos por neutrón absorbido de energía E' .

$$f(E) = \frac{\Sigma_f(E)}{\Sigma_a(E)} = \frac{\Sigma_f(E)}{\Sigma_f(E) + \Sigma_a(E)} \quad (10)$$

es el factor de utilización, o sea la fracción de neutrones absorbidos que produce hendidamiento, es decir, la probabilidad de que la absorción de un neutrón conduzca a un hendidamiento y no a una simple captura (n, γ) . (9) puede escribirse

$$k(E, E') = \eta(E, E') f(E') \quad (11)$$

Ahora

$$k_o(E') = \int_0^{\infty} k(E, E') dE' = \eta_o(E') f(E') \quad (12)$$

es el número total de neutrones inmediatos producidos por neutrón de energía E' absorbido y se llamará factor de reproducción inmediata. El número de neutrones retardados del grupo i que se producen p.u.v.t. es claramente

$$\int_{E_t}^{\infty} \eta_i(E') n(E, E', t) v' \Sigma_f' dE' = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k_i(E')}{T'} n(E, E', t) dE' \quad (13)$$

con

$$k_i(E') = \eta_i(E') \frac{\Sigma_f(E')}{\Sigma_a(E')} = \eta_i(E') f(E') \quad (14)$$

$k_1(E')$ es el factor de reproducción retardada del grupo i.

El número total de neutrones producidos por neutrón absorbido de energía E' es

$$k(E') = k_0(E') + \sum_1 k_1(E') = \eta(E') f(E') \quad (15)$$

y se llamará, como en la teoría ordinaria, factor de reproducción. De (6), (7), (12) y (15) se sigue que

$$\left. \begin{aligned} k_0(E') &= (1 - \beta(E')) k(E') \\ k_1(E') &= \beta_1(E') k(E') \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

usando las fracciones de retardación β_1 .

(8) y (13) representan los neutrones inmediatos y retardados producidos por neutrones epitérmicos y rápidos.

Hay que considerar además los neutrones producidos por neutrones térmicos. Sean

$$\left. \begin{aligned} f_t &= f(E_t) \\ \eta_t(E) &= \eta(E, E_t) \\ \eta_{1t} &= \eta_1(E_t) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

el factor de utilización térmica, las funciones de producción térmica inmediata y retardada respectivamente.

$$\eta_{ot} = \int_0^{\infty} \eta_t(E) dE \quad (18)$$

es el factor de producción térmica inmediata.

$$k_t(E) = \eta_t(E) f_t = k(E, E_t) \quad (19)$$

la función de reproducción térmica inmediata

$$k_{0t} = \int_0^{\infty} k_t(E) dE = \eta_{0t} f_t \quad (20)$$

el factor de reproducción térmica inmediata,

$$k_{1t} = \eta_{1t} f_t \quad (21)$$

los factores de reproducción térmica retardada.

$$T_{0t} = \frac{1}{v_t \Sigma_{at}} \quad (22)$$

el tiempo de generación inmediata, o sea, la vida media de un neutrón térmico en el reactor.

Puesto que el número de neutrones térmicos absorbidos p.u.v.t. es $\frac{n_t(\underline{r}, t)}{T_0}$ es claro que estos neutrones producirán

$$\frac{k_t(E)}{T_0} n_t(\underline{r}, t) \quad (23)$$

neutrones inmediatos de energía E y

$$\frac{k_{1t}}{T_0} n_t(\underline{r}, t) \quad (24)$$

neutrones retardados del grupo i . De (8) y (23) se sigue que la producción inmediata es

$$Q_p(\underline{r}, E, t) = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E, E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' + \frac{k_t(E)}{T} n_t(\underline{r}, t) \quad (25)$$

en tanto que el número de neutrones latentes de la clase i producidos p.u.v.t. es de (13) y (24):

$$\int_{E_t}^{\infty} \frac{k_i(E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' + \frac{k_{it}}{T_o} n_t(\underline{r}, t) \quad (26)$$

Sea ahora $c_i(\underline{r}, t)$ la concentración de neutrones latentes del grupo i y T_i su tiempo de generación. Habrá entonces $\frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i}$ neutrones retardados producidos p.u.v.t. a una energía E_i . La producción de neutrones retardados será:

$$Q_d(\underline{r}, E, t) = \sum_i \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \delta(E - E_i) \quad (27)$$

De (25) y (27) resulta una producción total

$$Q(\underline{r}, E, t) = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E, E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' + \frac{k_t(E)}{T_o} n_t(\underline{r}, t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \delta(E - E_i) \quad (28)$$

mas aún, de (26) resulta que la concentración de neutrones latentes $c_i(\underline{r}, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial c_i(\underline{r}, t)}{\partial t} = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k_i(E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' + \frac{k_{it}}{T_o} n_t(\underline{r}, t) - \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \quad (29)$$

El número total de neutrones producidos p.u.v.t. se tiene integrando (28) sobre E; recordando (12) y (20) resulta

$$Q(\underline{r}, t) = \int_0^{\infty} Q(\underline{r}, E, t) dE = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k_o(E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' + \\ + \frac{k_{ot}}{T_o} n_t(\underline{r}, t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \quad (30)$$

Substituyendo (28) en (1) se obtiene la ecuación de los neutrones rápidos:

$$\frac{\partial n(\underline{r}, E, t)}{\partial t} = D \Delta n(\underline{r}, E, t) + \frac{\partial [n(\underline{r}, E, t) v \Sigma \xi E]}{\partial E} - \\ - n(\underline{r}, E, t) v \Sigma_a + \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E, E')}{T'} n(\underline{r}, E', t) dE' + \\ + \frac{k_t(E)}{T_o} n_t(\underline{r}, t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \delta(E - E_i) \quad (31)$$

Dentro de la denominación "neutrón térmico" se agrupan todos los neutrones de muy variadas energías que se encuentran en equilibrio térmico con el material del reactor. Supondremos, como es costumbre que todos estos neutrones pueden caracterizarse por su energía de equilibrio E_t . Si introducimos la densidad de deceleración

$$q(\underline{r}, E, t) = n(\underline{r}, E, t) v \Sigma \xi E \quad (32)$$

que representa la corriente de neutrones a lo largo del eje de la energía, $q(\underline{r}, E_t, t)$ es el número de neutrones p.u.v.t.

que se hacen térmicos por colisión. Es pues la fuente de neutrones térmicos:

$$Q_t(\underline{r}, t) = q(\underline{r}, E_t, t) = n(\underline{r}, E_t, t) v_t \Sigma_t \xi E_t \quad (33)$$

Substitución de este valor en (1a) da la ecuación de los neutrones térmicos:

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}, t)}{\partial t} = D_t \Delta n_t(\underline{r}, t) - \frac{n_t(\underline{r}, t)}{T_0} + n(\underline{r}, E_t, t) v_t \Sigma_t \xi E_t \quad (34)$$

Las ecuaciones (29), (31) y (34) son las ecuaciones de la pila. Dado que hay seis grupos identificados de neutrones retardados, hay seis ecuaciones del tipo (29) correspondiente a las seis concentraciones latentes. Las ecuaciones de la pila aparecen bajo la forma de un sistema de ocho ecuaciones integrodiferenciales simultáneas. Estas deben resolverse con las usuales condiciones a la frontera:

$$[n(\underline{r}, E, t)]_{S'} = [n_t(\underline{r}, t)]_{S'} = [c_i(\underline{r}, t)]_{S'} = 0 \quad (A)$$

siendo S' la frontera extrapolada de la pila.

$$n(\underline{r}, E, 0) \quad , \quad c_i(\underline{r}, 0) \quad y \quad n_t(\underline{r}, 0) \quad (B)$$

son funciones dadas.

$$n(\underline{r}, \infty, t) = 0. \quad (C)$$

El problema es pues determinado ya que (A) determina la dependencia espacial de las soluciones, (B) su curso en

el tiempo cuando se parte de condiciones iniciales determinadas y (C) la dependencia de la energía. Nótese que es necesario especificar ocho distribuciones a $t = 0$.

Una simple ojeada a las ecuaciones (29), (31) y (34) bastaría para darse cuenta que la solución de las mismas en la forma en que están expresadas conduciría a dificultades considerables. Es pues conveniente transformarlas primero para dejarlas en una forma manejable y para ello es útil emplear la densidad de deceleración (32) en vez de la densidad $n(\underline{r}, E, t)$ de neutrones rápidos. Despejando esta última de (32) y substituyendo en (29), (31) y (34) se obtienen las ecuaciones de la pila en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v \Sigma_f E} \frac{\partial q(\underline{r}, E, t)}{\partial t} &= \frac{\lambda_t}{3 \Sigma_f E} \Delta q(\underline{r}, E, t) + \frac{\partial q(\underline{r}, E, t)}{\partial E} - \\ &- \frac{\Sigma_a}{\Sigma_f E} q(\underline{r}, E, t) + \int_{E_t}^{\infty} k(E, E') \frac{\Sigma_a'}{\Sigma_f E'} q(\underline{r}, E', t) dE' + \\ &+ \frac{k_t(E)}{T_0} n_t(\underline{r}, t) + \sum_1 \frac{c_1(\underline{r}, t)}{T_1} \delta(E - E_1) \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}, t)}{\partial t} = D_t \Delta n_t(\underline{r}, t) - \frac{n_t(\underline{r}, t)}{T_0} + q(\underline{r}, E_t, t) \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i(\underline{r}, t)}{\partial t} &= \int_{E_t}^{\infty} k_i(E') \frac{\Sigma_a'}{\Sigma_f E'} q(\underline{r}, E', t) dE' + \frac{k_{it}}{T_0} n_t(\underline{r}, t) - \\ &- \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_1} \end{aligned} \quad (35c)$$

en donde λ_t es el camino medio de transporte.

Es conveniente utilizar en vez de la energía E la "edad" de Fermi τ , que definiremos como

$$\tau = \tau(E) = \int_E^{\infty} \frac{\lambda_t}{3\Sigma_f E} dE = \int_E^{\infty} \frac{D}{v\Sigma_f E} dE \quad (36)$$

así que

$$d\tau = - \frac{\lambda_t}{3\Sigma_f E} dE = - \frac{D}{v\Sigma_f E} dE \quad (37)$$

$\tau(E)$ es una función monótonamente decreciente de E que se anula para $E = \infty$. Claramente

$$q(\underline{r}, E, t) = q(\underline{r}, \tau, t) \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} k(E, E') &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma_f E} k(\tau, \tau') \\ k_t(E) &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma_f E} k_t(\tau) \\ k_1(E) &= k_1(\tau) \\ \delta(E-E_1) &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma_f E} \delta(\tau-\tau_1) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

utilizando distribuciones por unidad de edad.

Las ecuaciones de la pila quedan ahora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \frac{\partial q(\underline{r}, \tau, t)}{\partial t} &= \Delta q(\underline{r}, \tau, t) - \frac{\partial q(\underline{r}, \tau, t)}{\partial \tau} - \frac{v\Sigma_a}{D} q(\underline{r}, \tau, t) + \\ &+ \int_0^{\tau} k(\tau, \tau') \frac{v'E'}{D'} q(\underline{r}, \tau', t) d\tau' + \\ &+ \frac{k_t(\tau)}{T_0} E_t(\underline{r}, t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \delta(\tau-\tau_i) \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}, t)}{\partial t} = D_t \Delta n_t(\underline{r}, t) - \frac{n_t(\underline{r}, t)}{T_0} + q(\underline{r}, \tau_t, t) \quad (40b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i(\underline{r}, t)}{\partial t} = & \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{v' \Sigma'_a}{D'} q(\underline{r}, \tau', t) d\tau' + \frac{k_{it}}{T_0} n_t(\underline{r}, t) - \\ & - \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \end{aligned} \quad (40c)$$

Se puede finalmente eliminar de (40a) el término de absorción de la manera usual, introduciendo la probabilidad de escape a la absorción

$$p(\tau) = \exp \int_{\tau}^{\infty} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau = p(E) = \exp \left(- \int_E^{\infty} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \frac{dE}{E} \right) \quad (41)$$

que satisface la ecuación

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp(\tau)}{d\tau} &= - \frac{v \Sigma_a}{D} p(\tau) \\ \frac{dp(E)}{dE} &= \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} p(E) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

y usando en vez de $q(\underline{r}, \tau, t)$ la densidad de deceleración que existiría si no hubiera absorción:

$$q(\underline{r}, \tau, t) = q'(\underline{r}, \tau, t) p(\tau) \quad (43)$$

Las ecuaciones (40) quedan:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{D} \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau, t)}{\partial t} &= \Delta q'(\underline{r}, \tau, t) - \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau, t)}{\partial \tau} - \\
 &- \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau', t) d\tau' + \\
 &+ \frac{k_t(\tau)}{p(\tau) T_0} n_t(\underline{r}, t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}, t)}{p(\tau_i) T_i} \delta(\tau - \tau_i) \quad (44a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}, t)}{\partial t} = D_t \Delta n_t(\underline{r}, t) - \frac{n_t(\underline{r}, t)}{T_0} + pq'(\underline{r}, \tau_t, t) \quad (44b)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial c_i(\underline{r}, t)}{\partial t} &= - \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau', t) d\tau' + \\
 &+ \frac{k_{it}}{T_0} n_t(\underline{r}, t) - \frac{c_i(\underline{r}, t)}{T_i} \quad (44c)
 \end{aligned}$$

siendo

$$p = p(\tau_t) = \exp \left[- \int_{\tau_t}^{\infty} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE}{E} \right] \quad (45)$$

la llamada probabilidad de escape a la resonancia.

De (32), (38) y (43) se ve que $q'(\underline{r}, \tau, t)$ satisface las mismas condiciones en la frontera espacial que $n(\underline{r}, E, t)$.

Usaremos como ecuaciones de la pila las ocho ecuaciones integrodiferenciales simultaneas (44) en q' , n_t y c_i con las condiciones a la frontera

$$[q'(\underline{r}, \tau, t)]_{S'} = [n_t(\underline{r}, t)]_{S'} = [c_i(\underline{r}, t)]_{S'} = 0 \quad (A)$$

$$q'(\underline{r}, \tau, 0), \quad c_1(\underline{r}, 0) \quad \text{y} \quad n_t(\underline{r}, 0) \quad \text{dadas} \quad (B)$$

$$q'(\underline{r}, 0, t) = 0 \quad (C)$$

2.- Condiciones estacionarias de una pila.

Establecidas ya las ecuaciones de la pila, vamos a investigar el efecto de las correcciones introducidas en los estados estacionarios de la misma. Las ecuaciones de la pila para el caso estacionario, según (44) serán:

$$\begin{aligned} \Delta q'(\underline{r}, \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau)}{\partial \tau} - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau') d\tau' + \\ + \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)T_0} n_t(\underline{r}) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r})}{p(\tau_i)T_i} \delta(\tau - \tau_i) = 0 \end{aligned} \quad (46a)$$

$$D_t \Delta n_t(\underline{r}) + pq'(\underline{r}, \tau_t) - \frac{n_t(\underline{r})}{T_0} = 0 \quad (46b)$$

$$\frac{c_i(\underline{r})}{T_i} = \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau') d\tau' + \frac{k_{i,t}}{T_0} n_t(\underline{r}) \quad (46c)$$

(46c) da inmediatamente el valor de las concentraciones latentes que pueden ser eliminadas de (46a) obteniéndose ésta última en la forma

$$\begin{aligned} \Delta q'(\underline{r}, \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau)}{\partial \tau} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau') q'(\underline{r}, \tau') d\tau' + \\ + \frac{\kappa_0(\tau)}{T_0} n_t(\underline{r}) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

siendo

$$\kappa_0(\tau, \tau') = - \left\{ \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} + \sum_1 \frac{k_1(\tau')}{p(\tau_1)} \delta(\tau - \tau_1) \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \quad (48)$$

$$\kappa_0(\tau) = \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)} + \sum_1 \frac{k_{1t}}{p(\tau_1)} \delta(\tau - \tau_1) \quad (49)$$

Las ecuaciones de la pila son ahora el par de ecuaciones integrodiferenciales simultáneas (47) y (48b) en $q'(\underline{r}, \tau)$ y $n_t(\underline{r})$ sujetas a las condiciones a la frontera:

$$[q'(\underline{r}, \tau)]_{S'} = [n_t(\underline{r})]_{S'} = 0 \quad (A)$$

$$q'(\underline{r}, 0) = 0 \quad (B)$$

Estas condiciones sugieren de inmediato que la solución debe ser de la forma

$$q'(\underline{r}, \tau) = n_t(\underline{r}) H(\tau) \quad (50)$$

siendo $n_t(\underline{r})$ y $H(\tau)$ funciones por determinar

Substituyendo (50) en (47) se puede constatar fácilmente que esta última es separable, descomponiéndose en el par de ecuaciones

$$\Delta n_t(\underline{r}) + \kappa_0^2 n_t(\underline{r}) = 0 \quad (51)$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + \kappa_0^2 H(\tau) = \frac{k_0(\tau)}{T_0} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau') H(\tau') d\tau' \quad (52)$$

siendo κ_0^2 la constante introducida al separar (47).

La ecuación (51) sujeta a la condición (A) es bien conocida en la teoría de la pila. Esta ecuación no tiene soluciones a menos que κ_0^2 sea real y positiva, o sea, que κ_0 debe ser real. En este caso hay un número infinito de soluciones que dependen tan solo de la forma y dimensiones de la pila y corresponden a diferentes armónicas posibles. Sin embargo, en el estado estacionario sólo la primera armónica es aceptable, así que (51) tiene una solución bien definida (hasta un factor de multiplicación arbitrario) y determinará el valor de κ_0^2 en función de la forma y dimensiones de la pila. En general

$$L_0^2 = \frac{1}{\kappa_0^2} \quad (53)$$

será el área característica, L_0 la longitud característica y κ_0 el valor característico de la pila. Simbólicamente

$$L_0 = G \delta \quad (54)$$

siendo δ alguna dimensión de la pila y G un factor de forma. Supondremos pues (51) resuelta y κ_0 determinada por la geometría del sistema.

La función de edad, $H(\tau)$, satisface la ecuación integrodiferencial (52) con la condición

$$H(0) = 0 \quad (B')$$

obtenida de (B). Para resolverla consideramos primero que una ecuación diferencial de la forma



$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + \kappa_0^2 H(\tau) = f(\tau) \quad (55)$$

tiene por solución

$$H(\tau) = H_0 e^{-\kappa_0^2 \tau} + e^{-\kappa_0^2 \tau} \int_0^{\tau} e^{\kappa_0^2 \tau''} f(\tau'') d\tau'' \quad (56)$$

en donde $H_0 = H(0)$ es una constante que depende del valor inicial de $H(\tau)$. En nuestro caso sera $H_0 = 0$ y

$$f(\tau) = \frac{k_0(\tau)}{T_0} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau') H(\tau') d\tau'$$

asi que (52) será equivalente a la ecuación

$$H(\tau) = e^{-\kappa_0^2 \tau} \int_0^{\tau} e^{\kappa_0^2 \tau''} \left[\frac{k_0(\tau'')}{T_0} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau'', \tau') H(\tau') d\tau' \right] d\tau''$$

que puede escribirse bajo la forma

$$H(\tau) = h(\tau) + \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau') H(\tau') d\tau' \quad (57)$$

con

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} k_0(\tau') d\tau' = \\ &= \frac{1}{T_0} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} \frac{k_t(\tau')}{p(\tau')} d\tau' + \sum_{\tau_1 < \tau} \frac{e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} k_{1t}}{p(\tau_1)} \right\} \quad (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(\tau, \tau') &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} K_0(\tau'', \tau') d\tau'' = \\
&= \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} \frac{k(\tau''\tau')}{p(\tau'')} d\tau'' + \sum_{\tau_1 < \tau} \frac{e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} k_1(\tau')}{p(\tau_1)} \right\} \times \\
&\times \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \quad (59)
\end{aligned}$$

En ambos casos aparece una función escalonada que depende de los factores de retardación. De (57) resulta que la función de edad satisface una ecuación integral que es la de Fredholm de segunda clase y puede ser resuelta por cualquiera de los métodos conocidos. Si se designa por $R(\tau, \tau')$ el resolvente de (57), la función de edad estará dada por

$$H(\tau) = h(\tau) + \int_0^{\tau_t} R(\tau, \tau') h(\tau') d\tau' \quad (60)$$

y $q'(\tau)$ quedará determinado por (50). De (58) y (59) se ve que el resolvente, y por tanto $H(\tau)$ sólo depende de κ_0^2 y las constantes conocidas de la pila.

Vemos ahora que una sola ecuación, la (47), nos ha bastado para encontrar todas las distribuciones de neutrones en la pila. Se infiere que el problema está sobredeterminado puesto que aún debemos resolver (46b). Esta última actuará pues como ecuación de condición. Substituyendo (50) en (46b) recordando (51) se obtiene por un sencillo cálculo:

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = p T_0 H(\tau_t) \quad (61a)$$

y según (60):

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = p T_0 h(\tau_t) + \int_0^{\tau_t} R(\tau_t, \tau) h(\tau) d\tau \quad (61)$$

en donde

$$L_t^2 = D T_0 \quad (62)$$

es la llamada área de difusión térmica. (61) es una ecuación de la que κ_0^2 puede obtenerse en función de las propiedades físicas del material del reactor. Como por otra parte (51) determina κ_0^2 en términos de la geometría de la pila, ambas ecuaciones pueden emplearse para calcular las dimensiones que requiere una pila de material y forma dadas. Se reconoce que (61) es la ecuación crítica de la pila.

Para hacer uso de (61) debemos conocer el resolvente de la ecuación integral (57), $R(\tau, \tau')$, o su solución, $H(\tau)$. En general, ambas se expresan como una serie infinita o como el cociente de dos series infinitas. Dado que expresiones de este tipo muy probablemente no nos serían de utilidad debido a su complejidad analítica, trataremos de simplificar nuestro problema utilizando para ello ciertas consideraciones físicas sencillas.

Sabido es que en el hendimiento de un núcleo activo hay una liberación de energía del orden de 200 MeV. cuya energía se distribuye entre los productos de la reacción (n,f). En otros términos, el valor Q de una reacción (n,f) promedio, es del orden de 200 MeV. En una reacción en cadena, cada reacción (n,f) es producida ya sea por neutrones que directamente provienen de núcleos hendidos o bien por neutrones que ya han sido decelerados en mayor o menor proporción por el moderador. Los neutrones produci-

d⁰s en una reacción (n,f) tienen una energía media de 2 MeV. y la fracción de los mismos cuya energía es mayor de unos 10 MeV., es, para nuestros propósitos, despreciable. Este hecho, añadido al efecto decelerador del moderador permite concluir que en un reactor usual que mantiene una reacción en cadena, la inmensa mayoría de los hendimientos serán producidos por neutrones cuya energía es menor de unos 10 MeV. Esto significa que con mucho, la mayor parte de las reacciones (n,f) que ocurren en el reactor se verifican en condiciones tales, que la energía del neutrón incidente que las provoca es siempre mucho menor que el valor Q de la reacción. En este caso es bien sabido que la forma particular en que la reacción ocurre no depende apreciablemente de la energía del neutrón incidente. En particular, en el análisis que hemos efectuado podemos suponer sin error apreciable que las funciones de producción $\eta(E, E')$ y $\eta_1(E')$ no dependen apreciablemente de E' y podemos sustituirlas para $E' = \bar{E}$, algún valor medio adecuado. Haremos pues $\eta(E, \bar{E}) = \eta(E)$ y $\eta_1(\bar{E}) = \eta_1$. Con esta simplificación, las funciones de reproducción (11) y (14) quedan en la forma

$$\left. \begin{aligned} k(E, E') &= \eta(E) f(E') \\ k_1(E') &= \eta_1 f(E') \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

puesto que

$$\left. \begin{aligned} f(E) &= f(\tau) \\ \eta(E) &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E} \eta(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

siendo $\eta(\tau)$ la función de producción por unidad de edad,

se sigue que

$$\begin{aligned} k(\tau, \tau') &= \eta(\tau) f(\tau') \\ k_1(\tau') &= \eta_1 f(\tau') \end{aligned} \tag{65}$$

y según (59) será

$$\begin{aligned} K(\tau, \tau') &= - \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} \frac{\eta(\tau'')}{p(\tau'')} d\tau'' f(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} - \\ &\quad - \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} \frac{\eta_1}{p(\tau_1)} f(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} = \\ &= - \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} \frac{\eta(\tau'')}{p(\tau'')} d\tau'' + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} \frac{\eta_1}{p(\tau_1)} \right\} \times \\ &\quad \times f(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \end{aligned} \tag{66}$$

Lo esencial de este kernel es que es separable. La ecuación de Fredholm (57) con el kernel (66) tiene una solución sencilla. Hagamos

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \left. \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} \frac{\eta(\tau'')}{p(\tau'')} d\tau'' + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} \frac{\eta_1}{p(\tau_1)} \right\} \\ G(\tau) &= - f(\tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} = \frac{v \sum_{\tau_1} f(\tau) p(\tau)}{D} \end{aligned} \tag{67}$$

de modo que

$$K(\tau, \tau') = F(\tau) G(\tau') \tag{68}$$

Además, según (17), (19) y (21):

$$k_t(\tau) = \eta(\tau) f_t \quad (69)$$

$$k_{it} = \eta_i f_t$$

de modo que (58) puede escribirse como

$$h(\tau) = \frac{1}{T_0} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} \frac{\eta(\tau')}{p(\tau')} d\tau' + \sum_{\tau_i < \tau} \frac{e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)} \eta_i}{p(\tau_i)} \right\} f_t$$

esto es,

$$h(\tau) = \frac{f_t}{T_0} F(\tau) \quad (70)$$

Substituyendo ahora (68) y (70) en (57) se obtiene

$$\begin{aligned} H(\tau) &= \frac{f_t}{T_0} F(\tau) + F(\tau) \int_0^{\tau_t} G(\tau') H(\tau') d\tau' = \\ &= \left(\frac{f_t}{T_0} + A \right) F(\tau) \end{aligned} \quad (71)$$

en donde

$$A = \int_0^{\tau_t} G(\tau) H(\tau) d\tau \quad (72)$$

necesariamente debe ser una constante. (71) ya da la forma de la solución. Con el objeto de determinar A , substituímos (71) en (72) obteniéndose

$$A = \left(\frac{f_t}{T_0} + A \right) \int_0^{\tau_t} F(\tau) G(\tau) d\tau = \left(\frac{f_t}{T_0} + A \right) \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau$$

Esta es una ecuación lineal ordinaria en A . Si la cantidad

$$D(\kappa_0^2) = 1 - \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau \quad (73)$$

no es nula, la ecuación anterior puede resolverse para A y substituyendo este valor en (71) se obtiene

$$H(\tau) = \frac{h(\tau)}{1 - \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau} \quad (74)$$

que es la solución de la ecuación integral. Es fácil ver que $D(\kappa_0^2)$ dada por (73) no es sino el determinante de Fredholm de la ecuación (57). Nuestra solución depende, para su validez, de que se cumpla la condición

$$D(\kappa_0^2) \neq 0 \quad (75)$$

de otro modo es fácil ver que (57) no tiene solución. Suponiendo pues que (57) tiene un determinante de Fredholm no nulo, substituyendo (74) en (81a) se obtiene

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = \frac{p T_0 h(\tau_t)}{1 - \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau} \quad (76)$$

que es la ecuación crítica de la pila.

Con el objeto de estudiar esta ecuación con más detalle, la escribiremos primero en la forma:

$$\frac{p T_0 h(\tau_t)}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} + \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau = 1$$

y utilizamos (58) recordando que $p = p(\tau_t)$ de modo que $\frac{p}{p(\tau')} = p(\tau', \tau_t)$ es la probabilidad de que un neutrón escape a la absorción cuando se descelera de la edad τ' a la edad térmica τ_t . Se obtiene pues:

$$l_t \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau')} p(\tau', \tau_t) k_t(\tau') d\tau' + \sum_i e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_i)} \times \right. \\ \left. \times p(\tau_i, \tau_t) k_{it} \right\} \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau = 1 .$$

en donde

$$l_t = \frac{1}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} \quad (77)$$

es la probabilidad de escape a la fuga térmica. Hágase

$$p_i = p(\tau_i, \tau_t) \quad (78)$$

siendo p_i la probabilidad de que un neutrón retardado de la clase i escape a la absorción;

$$L_{r1}^2 = \tau_t - \tau_i \quad (79)$$

el área de migración rápida para neutrones de la clase i ; entonces

$$1_t \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau')} p(\tau', \tau_t) k_t(\tau') d\tau' + \sum_1 e^{-\kappa_0^2 L_{f1}^2} p_1 k_{1t} \right\} + \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau = 1 \quad (80)$$

es la condición crítica de la pila. Esta ecuación consta de dos partes: el primer término describe el efecto de los neutrones térmicos en tanto que el segundo representa el de los neutrones rápidos. Es, además, una ecuación trascendente que debe resolverse para κ_0^2 con el objeto de determinar las condiciones de operación de la pila. Ahora obtendremos diversas aproximaciones.

A) Pila térmica.

Supóngase que el material hendible contenido en la pila es tal que la sección de hendimiento $\Sigma_f(E)$ es apreciable sólo para energías térmicas y cae rápidamente para energías mayores que la térmica, como ocurriría por ejemplo en un reactor de U^{235} . Entonces $f(E) = \Sigma_f(E)/\Sigma_a(E)$ sería extremadamente pequeño para energías mayores a E_t . De (11) y (14) se ve que tanto $k(E, E')$ como $k_1(E')$ serán muy pequeñas y de (59) se ve que $K(\tau, \tau')$ es también despreciable. Prácticamente todos los hendimientos son producidos por neutrones térmicos en tanto que los neutrones rápidos tienen un factor de utilización despreciable. En la ecuación (80) el segundo término es despreciable comparado con el primero, operando la pila substancialmente con neutrones térmicos. Tal pila se llama pila térmica.

Puede suponerse también, no que $f(E)$ es pequeña a altas energías, sino que el poder frenador de la pila,

$\Sigma_a \xi$ es muy grande comparado con el poder de absorción, Σ_a , de manera que la razón $\frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi}$ es muy pequeña. Tal cosa ocurriría en pilas con muy poco material hendible (Σ_a pequeño) y grandes cantidades de moderador ($\xi \Sigma_a$ grande) de muy buena clase (ξ grande). De (42) se ve que en tales condiciones será $\frac{dp(E)}{dE} \ll 1$. Podemos pues suponer que $p(E)$ prácticamente no varía con E , es decir, que $p(E_t) \approx 1$. La absorción es tan pequeña comparada con la deceleración, que un neutrón tiene muy poca probabilidad de ser absorbido antes de hacerse térmico por colisiones con el moderador. En estas condiciones, un grupo de neutrones de alta energía producidos en un hendimiento se harán térmicos tan rápidamente, que de nuevo, aunque por razones distintas esta vez, la pila funciona esencialmente con neutrones térmicos y es una pila térmica. Como $\frac{dp(\tau)}{d\tau}$ es también casi cero, de (59) se ve que $K(\tau, \tau)$ es muy pequeño y de nuevo el segundo término de (80) puede despreciarse comparado con el primero.

En cualquiera de los dos casos, la ecuación crítica de una pila térmica puede escribirse

$$1_t \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau')} p(\tau', \tau_t) k_t(\tau') d\tau' + \sum_1 e^{-\kappa_0^2 L_{f1}^2} p_1 k_{1t} \right\} = 1 \quad (8|a)$$

o en forma explícita

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau')} p(\tau', \tau_t) k_t(\tau') d\tau' + \sum_1 e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_1)} p(\tau_1, \tau_t) k_{1t} \quad (8|b)$$

Puede verse que nuestra ecuación (8|b) da el mismo

resultado que la teoría ordinaria si despreciamos el efecto producido por la distribución espectral de los neutrones rápidos. Supongamos, por ejemplo, que todos los neutrones se emiten a una sólo y misma energía E_0 . Tal energía podría definirse como

$$E_0 = \frac{\int_0^{\infty} E \eta(E) dE}{\int_0^{\infty} \eta(E) dE} \quad (82)$$

y, para U^{235} es $E_0 = 2$ MeV. Hay también una correspondiente edad de emisión τ_0 .

Ahora bien, si

$$\eta_0 = \int_0^{\infty} \eta(E) dE = \int_0^{\tau_0} \eta(\tau) d\tau \quad (83)$$

es el número total de neutrones inmediatos producidos por hendimiento, el espectro puede idealizarse bajo la forma

$$\left. \begin{aligned} \eta(E) &= \eta_0 \delta(E - E_0) \\ \eta(\tau) &= \eta_0 \delta(\tau - \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Entonces si hacemos

$$k_{ot} = \eta_0 f_t \quad (85)$$

será

$$k_t(\tau) = k_{ot} \delta(\tau - \tau_0) \quad (86)$$

La integración de (81) es inmediata:

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_0)} p(\tau_0, \tau_t) k_{0t} + \sum_i e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_i)} \times \\ \times p(\tau_i, \tau_t) k_{it}$$

y haciendo

$$p_0 = p(\tau_0, \tau_t) \quad p_i = p(\tau_i, \tau_t) \quad (87)$$

$$\tau_t - \tau_0 = L_{f_0}^2 \quad \tau_t - \tau_i = L_{f_i}^2 \quad (88)$$

podemos escribir

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = k_{0t} p_0 e^{-\kappa_0^2 L_{f_0}^2} + \sum_i k_{it} p_i e^{-\kappa_0^2 L_{f_i}^2} \quad (89)$$

Recordando (6) y (7):

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \sum_i \eta_i & \beta &= \sum_i \beta_i \\ \beta_1 &= \frac{\eta_1}{\eta} & 1 - \beta &= \frac{\eta_0}{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

y definiendo

$$k_t = \eta f_t \quad (91)$$

será

$$\left. \begin{aligned} k_{0t} &= (1 - \beta) k_t \\ k_{it} &= \beta_i k_t \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

de manera que nuestra ecuación crítica podrá escribirse como

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = k_t \left[(1-\beta) p_0 e^{-\kappa_0^2 L_{f0}^2} + \sum_1 \beta_1 p_1 e^{-\kappa_0^2 L_{f1}^2} \right] \quad (93)$$

se reconoce que k_t es la constante de reproducción, p_0 y p_1 las probabilidades de escape a la resonancia, L_{f0}^2 y L_{f1}^2 las áreas de migración rápida para neutrones inmediatos y retardados.

Como una primera aproximación para encontrar κ_0^2 puede desprejarse la diferencia entre E_0 y las diferentes E_1 , lo cual equivale a suponer $p_0 \approx p_1 = p$, $L_{f0}^2 \approx L_{f1}^2 = L_f^2$ obteniéndose

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = k_t p e^{-\kappa_0^2 L_f^2} = k e^{-\kappa_0^2 L_f^2} \quad (94)$$

siendo

$$k = k_t p = \eta f_t p \quad (95)$$

la constante de multiplicación de la pila. (94) es la ecuación crítica ordinaria. Sabido es que para grandes pilas, $\kappa_0^2 \ll 1$, $k \approx 1$, un valor aproximado de κ_0^2 es

$$\kappa_0^2 = \frac{k-1}{M^2} \quad (96)$$

en donde

$$M^2 = L_t^2 + L_f^2 \quad (97)$$

es el área de migración total. El primer valor (96) puede refinarse mediante (94) y este valor se mejoraría aún con el uso de (93). Un resultado más correcto que ya toma en cuenta la distribución espectral de neutrones resultaría

de (81b).

En todos estos cálculos para nada se ha tomado en cuenta el efecto de los neutrones rápidos. Puede, sin embargo, considerarse dicho efecto en la pila térmica como una corrección si se recuerda que

$$\int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau \ll 1$$

de manera que en lugar de desprestigiar el término completamente en (80) se emplea (76) desarrollando el denominador por el teorema del binomio. Así,

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = p T_0 h(\tau_t) \left\{ 1 + \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau \right\}$$

y haciendo

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau \quad (98)$$

el factor de utilización rápida, se ve que, en primera aproximación el efecto de los neutrones rápidos puede ser incluido substituyendo p por $p\epsilon$, lo cual da para (81b) la forma mas correcta:

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau')} p(\tau', \tau_t) k_t(\tau') d\tau' + \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_1)} p(\tau_1, \tau_t) k_{1t} d\tau_1 \right\} \quad (99)$$

para (81b):

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = k_t \epsilon [(1-\beta) p_0 e^{-\kappa_0^2 L_{r0}^2} + \sum_1 \beta_i p_i e^{-\kappa_0^2 L_{ri}^2}] \quad (100)$$

y para (94) la misma forma, excepto que la constante de multiplicación se define ahora como

$$k = k_t p \epsilon = \eta f_t p \epsilon \quad (101)$$

en vez de (95).

Respecto al valor de ϵ observemos que, de acuerdo con (59) y (42) será

$$\epsilon = 1 + \int_0^t d\tau \frac{v \Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^\tau d\tau' e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau')} p(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_1)} p(\tau_1, \tau) k_1(\tau) \right\} \quad (102)$$

Se puede obtener un valor aproximado de ϵ suponiendo un espectro de la forma (84), es decir, que todos los neutrones rápidos se producen a la edad τ_0 . Haciendo

$$k_0(\tau) = \eta_0 f(\tau) \quad (103)$$

$$k(\tau, \tau') = k_0(\tau) \delta(\tau' - \tau_0)$$

(102) se escribe:

$$\epsilon = 1 + \int_0^t \left\{ e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_0)} p(\tau_0, \tau) k_0(\tau) + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_1)} p(\tau_1, \tau) k_1(\tau) \right\} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau =$$

$$= 1 + \int_{E_t}^{E_0} \left\{ e^{-\kappa_0^2 \tau(E)} p(E_0, E) k_0(E) + \right. \\ \left. + \sum_{E_1 < E} e^{-\kappa_0^2 [\tau(E) - \tau(E_1)]} p(E_1, E) k_1(E) \right\} \frac{\sum_a}{\sum_s \xi} dE \quad (104)$$

en cuya última expresión se ha tomado $\tau(E_0) = \tau_0 = 0$.

Despreciando las diferencias entre τ_0 y las τ_1 y haciendo

$$k(\tau) = k_0(\tau) + \sum_1 k_1(\tau) = \eta f(\tau) = k(E) \quad (105)$$

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_0)} p(\tau_0, \tau) k(\tau) \frac{v \sum_a}{D} d\tau = \\ = 1 + \int_{E_t}^{E_0} e^{-\kappa_0^2 \tau(E)} p(E_0, E) k(E) \frac{\sum_a}{\sum_s \xi} dE \quad (106)$$

para pilas grandes, κ_0^2 es tan pequeño que puede hacerse $e^{-\kappa_0^2 \tau(E)} \approx 1$ y siendo la pila térmica a modo que $\frac{\sum_a}{\sum_s \xi}$ sea muy pequeño, puede hacerse $p(E_0, E) \approx 1$. Se obtiene

$$\epsilon \approx 1 + \int_{E_t}^{E_0} k(E) \frac{\sum_a}{\sum_s \xi} \frac{dE}{E} \quad (107)$$

De (106) resulta

$$\epsilon = 1 + e^{-\kappa_0^2 \overline{\tau(E)}} \overline{k(E)} \int_{E_t}^{E_0} \frac{dp(E)}{dE} dE \\ \epsilon = 1 + e^{-\kappa_0^2 \overline{\tau(E)}} \overline{k(E)} [1 - p(E_t)] \quad (108)$$

en cuya expresión se ha tomado el origen de las edades en E_0 , es decir, $\tau(E_0) = 0$. Las expresiones (107) y (108) pueden emplearse para obtener una idea del orden de magnitud de ϵ . Para grandes pilas será $e^{-\kappa_0^2 \overline{\tau(E)}} \approx 1$ y

$$\epsilon \approx 1 + \overline{k(E)} [1 - p(E_t)] \quad (108a)$$

De (99) puede inferirse que la constante de multiplicación efectiva de la pila térmica es:

$$k_{ef} = l_t \epsilon \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2 (\tau_t - \tau)} p(\tau, \tau_t) k(\tau) d\tau + \sum_i e^{-\kappa_0^2 (\tau_t - \tau_i)} p(\tau_i, \tau_t) k_{it} \right\} \quad (109)$$

Para la forma aproximada (100) es conveniente introducir

$$l_{fo} = e^{-\kappa_0^2 L_{fo}^2} \quad l_{fi} = e^{-\kappa_0^2 L_{fi}^2} \quad (110)$$

que son las probabilidades de escape a la fuga rápida para neutrones inmediatos y retardados. Se tiene entonces

$$k_{ef} = k_t l_t \epsilon [(1-\beta) p_0 l_{fo} + \sum_i \beta_i p_i l_{fi}] \quad (111)$$

y en el caso más simple en que se desprecian las diferencias de energía entre neutrones inmediatos y retardados,

$$k_{ef} = k_t p \epsilon l_t l_r = k l_t l_r = \eta p \epsilon f_t l_t l_r \quad (112)$$

que es la expresión usual.

En cualquier caso la condición crítica de la pila tiene la bien conocida forma

$$k_{er} = 1 \quad (113)$$

B) Pila epitérmica.

Cuando los hendimientos rápidos tienen un efecto comparable a los térmicos, ya no es posible despreciar el segundo término de (80), ni siquiera puede tratarsele como mera corrección. Se cae entonces al caso de la pila epitérmica o intermedia. Esta pila opera tanto con neutrones térmicos como rápidos. Ocurre cuando $f(E)$ es apreciable a altas energías o cuando $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_f}$ no es pequeño debido a la mayor proporción de material hendible respecto a moderador. La ecuación crítica para esta pila resulta ser:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} & \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau)} p(\tau, \tau_t) k_t(\tau) d\tau + \sum_i e^{-\kappa_0^2 L_{f1}^2} p_i k_{i1} \right\} + \\ & + \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v \Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' e^{-\kappa_0^2(\tau - \tau')} p(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\ & \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau - \tau_1)} p(\tau_1, \tau) k_i(\tau) \right\} = 1 \quad (114) \end{aligned}$$

que es (80) en forma explícita. Utilizando la aproximación de un espectro monocromático se obtiene la expresión aproximada

$$\begin{aligned}
& \frac{k_t \left[(1-\beta) p_0 e^{-\kappa_0^2 L_f^2} + \sum_1 \beta_1 p_1 e^{-\kappa_0^2 L_{f1}^2} \right]}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} + \\
& + \int_0^{\tau_t} \left\{ e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_0)} p(\tau_0, \tau) k_0(\tau) + \right. \\
& \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_1)} p(\tau_1, \tau) k_1(\tau) \right\} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau = 1 \quad (115)
\end{aligned}$$

Como primera aproximación para κ_0^2 puede emplearse la que resulta de despreciar en (115) las diferencias entre τ_0 y las τ_1 . Se obtiene

$$\frac{k e^{-\kappa_0^2 L_f^2}}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} + \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_0)} p(\tau_0, \tau) k(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau = 1 \quad (116)$$

El orden de magnitud κ_0^2 puede inferirse de la ecuación

$$\frac{k e^{-\kappa_0^2 L_f^2}}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} + k(\bar{\tau}) e^{-\kappa_0^2 \bar{\tau}} [1 - p(\tau_t)] = 1 \quad (117)$$

en la que se ha tomado E_0 como origen de las edades.

La constante efectiva de reproducción para una pila epitermica esta dada por el primer miembro de (114).

$$\begin{aligned}
k_{ef} = l_t & \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2 (\tau_t - \tau)} p(\tau, \tau_t) k_t(\tau) d\tau + \right. \\
& \left. + \sum_1 e^{-\kappa_0^2 L_{f1}^2} p_1 k_{1t} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v\Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} p(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\
& \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} p(\tau_1, \tau) k_1(\tau) \right\} \quad (118)
\end{aligned}$$

y la condición crítica sigue siendo (113).

C) Pila rápida.

Podemos considerar ahora la situación extrema que se presenta cuando la absorción es tan grande y la deceleración tan pequeña, $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s} \gg 1$, que tanto $p(\tau', \tau_t)$ como p_1 en (80) son prácticamente cero. En general, $p = p(\tau_t) \approx 0$. Los neutrones no tienen tiempo de hacerse térmicos y la pila es rápida, es decir, funciona esencialmente con neutrones rápidos. La ecuación crítica es ahora

$$\int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau) d\tau = 1 \quad (119)$$

o en forma explícita:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v\Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} p(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\
& \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} p(\tau_1, \tau) k_1(\tau) \right\} = 1 \quad (120)
\end{aligned}$$

Como primera aproximación:

$$\int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_0)} p(\tau_0, \tau) k(\tau) \frac{v\Sigma_a}{D} d\tau = 1 \quad (121)$$

El orden de magnitud de κ_0^2 puede inferirse de la relación

$$k(\bar{\tau}) e^{-\kappa_0^2 \bar{\tau}} = 1 \quad (122)$$

obtenida de (117) considerando como nulas k y $p(\tau_t)$. De aquí se obtiene

$$\kappa_0^2 = \frac{1}{\bar{\tau}} \log k(\bar{\tau}) \quad (123)$$

La constante efectiva de reproducción para la pila rápida es

$$k_{ef} = \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v \Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau')} p(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_0^2 (\tau - \tau_i)} p(\tau_i, \tau) k_i(\tau) \right\} \quad (124)$$

y la condición crítica está dada por (113).

El caso de la pila rápida merece una consideración especial. El caso límite representado por la ecuación (119) es precisamente, según (73), el que hace $D(\kappa_0^2) = 0$ y siendo nulo el determinante de Fredholm de la ecuación (57), la solución (74) no es válida. El mecanismo entero de operación de la pila rápida no corresponde pues a la situación considerada en las dos clasificaciones anteriores y necesita tratarse por separado.

Con el objeto de comprender el origen de la falla del método, es preciso regresar a las ecuaciones básicas (46). Hemos dicho que en la pila rápida la absorción es tan considerable que los neutrones no tienen oportunidad de ha-

cerse térmicos. Esto significa que debemos tener $n_t(\underline{r}) = 0$. Introduciendo esta condición en (46) obtenemos las ecuaciones diferenciales de la pila rápida:

$$\Delta q'(\underline{r}, \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau)}{\partial \tau} - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau') d\tau' + \sum_i \frac{c_i(\underline{r})}{p(\tau_i) T_i} \delta(\tau - \tau_i) = 0 \quad (125a)$$

$$\frac{c_i(\underline{r})}{T_i} = - \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau') d\tau' \quad (125b)$$

con las condiciones en la frontera:

$$[q'(\underline{r}, \tau)]_{S'} = 0 \quad (A')$$

$$q'(\underline{r}, \tau_t) = p q'(\underline{r}, \tau_t) = 0 \quad (B')$$

La nueva condición $p q'(\underline{r}, \tau_t) = 0$ resulta de (46b) haciendo $n_t(\underline{r}) = 0$. Se cumple automáticamente puesto que $p(\tau_t) = 0$.

La ecuación (125b) ya nos da $c_i(\underline{r})$ en términos de $q'(\underline{r}, \tau)$, así que solo debemos preocuparnos de esta última. El resultado de substituir (125b) en (125a) puede obtenerse haciendo $n_t(\underline{r}) = 0$ en (47). Se obtiene

$$\Delta q'(\underline{r}, \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau)}{\partial \tau} + \int_0^{\tau_t} K_0(\tau, \tau') q'(\underline{r}, \tau') d\tau' = 0 \quad (126)$$

con $K_0(\tau, \tau')$ dado por (48). Proponemos ahora

$$q'(\underline{r}, \tau) = S(\underline{r}) H(\tau) \quad (127)$$

y separando variables resulta:

$$\Delta S(\underline{r}) + \kappa_0^2 S(\underline{r}) = 0 \quad (128)$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + \kappa_0^2 H(\tau) = \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau') H(\tau') d\tau' \quad (129)$$

De nuevo, la solución de (128) con la condición $[S(\underline{r})]_{\underline{r}'} = 0$ no sólo determina el valor de la distribución espacial de neutrones rápidos, sino el de κ_0^2 en términos de la geometría de la pila. Queda pues por resolver la ecuación (129) con la condición $H(0) = 0$. Esta ecuación se obtiene de (52) haciendo $k_0(\tau) = 0$, así que la ecuación integral correspondiente será la ecuación homogénea

$$H(\tau) = \int_0^{\tau_t} K(\tau, \tau') H(\tau') d\tau' \quad (130)$$

La condición para que esta ecuación tenga solución es que su determinante de Fredholm se anule,

$$D(\kappa_0^2) = 0 \quad (131)$$

y es ahora esta relación la que va a actuar como ecuación crítica. Utilizando (68):

$$H(\tau) = F(\tau) \int_0^{\tau_t} G(\tau') H(\tau') d\tau' = A F(\tau) \quad (132)$$

Así que de (67) se obtiene la solución particular:

$$H(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} \frac{\eta(\tau')}{p(\tau')} d\tau' + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_1)} \frac{\eta_1}{p(\tau_1)} \quad (133)$$

que da la función de edad para el caso en consideración. De (132):

$$A F(\tau) = F(\tau) \int_0^{\tau_t} G(\tau') A F(\tau') d\tau' = A F(\tau) \int_0^{\tau_t} K(\tau', \tau') d\tau'$$

asi que si $A \neq 0$, deberá cumplirse (119). En tal caso A es arbitraria y la solución, como la de toda pila crítica, queda determinada hasta un factor multiplicativo. Este análisis demuestra que la ecuación previamente obtenida como condición crítica para la pila rápida es correcta y cubre el caso $D(\kappa_0^2) = 0$ que en los dos tipos de pila tratados anteriormente había quedado fuera de consideración.

Es interesante hacer notar que, dentro de las limitaciones de la teoría difusional, las ecuaciones (120) a (124) permitirían estimar, con distintos grados de aproximación, el tamaño y por tanto la masa de un bloque de material hendible puro que podría mantener una reacción en cadena. De acuerdo con (123) tales reacciones siempre son posibles - cuando $k(\bar{\tau}) > 1$. En tal caso, un trozo de material hendible de tamaño suficiente, se comportaría como una pila rápida no reflejada.

Estos resultados demuestran que existe un límite para la masa de bloques de material hendible que pueden almacenarse sin peligro de reacción. Pasado este límite, cual-

quier neutrón atmosférico, ya fuera de origen cósmico o de de contaminación radioactiva, provocaría en el bloque una reacción en cadena prácticamente imposible de controlar. Mas aún, si la masa de los bloques individuales es menor que la crítica pero estos se aglomeran en algún recinto, digamos un almacén, en forma tal que el recinto entero pudiera actuar como una pila heterogénea, el mismo fenómeno tendría lugar. Es pues aconsejable que para el almacenaje de materiales hendibles puros, el material se mantenga siempre dentro de un grado de división suficiente como para que los trozos individuales sean subcríticos y que el almacén como conjunto se haga suficientemente no-reactivo por introducción de una cantidad suficiente de absorbente, fierro o cadmio por ejemplo.

CAPITULO II

1.- La Dinámica de la pila.

En el capítulo anterior se resolvieron las ecuaciones de la pila para condiciones estacionarias y se determinaron las condiciones críticas. Ahora procederemos al exa-

men del caso general en que las condiciones varían con el tiempo y consideramos las ecuaciones completas establecidas en I(44) con las condiciones (A), (B) y (C). Se trata de encontrar la solución que inicialmente, es decir, para $t = 0$, se reduce a una distribución arbitrariamente asignada para cada densidad de neutrones. Supondremos pues que

$$q'(\underline{r}, \tau, 0) = Q'(\underline{r}, \tau)$$

$$c_i(\underline{r}, 0) = C_i(\underline{r}) \quad (1)$$

$$n_t(\underline{r}, 0) = N(\underline{r})$$

son funciones conocidas que satisfacen la condición de anularse en la frontera extrapolada de la pila.

Introduciremos la transformada de Laplace de cualquier función $\varphi(\underline{r}, \tau, t)$ de las que se consideran en el reactor (que puede ser independiente de τ):

$$L \varphi(\underline{r}, \tau, t) = \bar{\varphi}(\underline{r}, \tau, \lambda) = \int_0^{\infty} \varphi(\underline{r}, \tau, t) e^{-\lambda t} dt \quad (2)$$

$$L^{-1} \bar{\varphi}(\underline{r}, \tau, \lambda) = \varphi(\underline{r}, \tau, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{-}} \bar{\varphi}(\underline{r}, \tau, \tau) e^{-\lambda t} dt \quad (2a)$$

en donde la integral (2a) se efectúa en el plano complejo λ a lo largo del contorno de Bromwich.

El transformado de I(44a) se obtiene multiplicando por $e^{-\lambda t}$, integrando sobre t de 0 a ∞ , empleando la conocida expresión

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(\underline{x}, \tau, t)}{\partial t} e^{-\lambda t} dt = -\varphi(\underline{x}, \tau, 0) + \lambda \bar{\varphi}(\underline{x}, \tau, \lambda)$$

y teniendo en cuenta (1). Se tiene así:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \frac{\partial \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda)}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{D} \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \\ - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \bar{q}(\underline{x}, \tau', \lambda) d\tau' + \frac{k_t(\tau)}{T_{op}(\tau)} \bar{n}_t(\underline{x}, \lambda) + \\ + \sum_i \frac{\bar{c}_i(\underline{x}, \lambda)}{T_i p(\tau_i)} \delta(\tau - \tau_i) + \frac{1}{D} Q'(\underline{x}, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Transformando del mismo modo I(44c) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{c}_i(\underline{x}, \lambda) = \frac{T_i}{1 + \lambda T_i} \left\{ - \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \bar{q}'(\underline{x}, \tau', \lambda) d\tau' + \right. \\ \left. + \frac{k_{it}}{T_o} \bar{n}_t(\underline{x}, \lambda) + C_i(\underline{x}) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituyendo (4) en (3) resulta:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \frac{\partial \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda)}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{D} \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \\ - \int_0^{\tau_t} \left\{ \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} + \sum_i \frac{k_i(\tau')}{p(\tau_i)} \frac{\delta(\tau - \tau_i)}{1 + \lambda T_i} \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \bar{q}'(\underline{x}, \tau', \lambda) d\tau' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)} + \sum_i \frac{k_{it}}{p(\tau_i)} \frac{\delta(\tau - \tau_i)}{|1 + \lambda T_i|} \right\} \frac{\bar{n}_t(\underline{r}, \lambda)}{T_0} + \frac{Q'(\underline{r}, \tau)}{D} + \\
 & + \sum_i \frac{C_i(\underline{r}) \delta(\tau - \tau_i)}{p(\tau_i) (1 + \lambda T_i)} = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Hágase

$$\bar{q}'(\underline{r}, \tau, \lambda) = u(\underline{r}, \tau, \lambda) e^{-\lambda \theta(\tau)} \tag{6}$$

en donde $\theta(\tau)$ se define por

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{D'} = \int_E^\infty \frac{dE'}{v' \Sigma' \xi E'} = \theta(E) \tag{7}$$

y satisface las ecuaciones

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{D} \quad \frac{d\theta(E)}{dE} = - \frac{1}{v \Sigma \xi E} \tag{8}$$

Se advierte que $\theta(\tau)$, cuya introducción en (6) tiene por objeto eliminar el término $-\frac{\lambda}{D} \bar{q}'(\underline{r}, \tau, \lambda)$ de (5), es el tiempo de desceleración, es decir, el tiempo que tarda un neutrón para envejecer de la edad 0 a la edad τ por colisión con núcleos del material de la pila.

Substituyendo (6) en (5) se obtiene la ecuación integrodiferencial que satisface u :

$$\begin{aligned}
 \Delta u(\underline{r}, \tau, \lambda) - \frac{\partial u(\underline{r}, \tau, \lambda)}{\partial \tau} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau', \lambda) u(\underline{r}, \tau', \lambda) d\tau' + \\
 + \kappa_0(\tau, \lambda) \frac{\bar{n}_t(\underline{r}, \lambda)}{T_0} + M(\underline{r}, \tau, \lambda) = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

con

$$\kappa_0(\tau, \tau', \lambda) = - \left\{ \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} e^{\lambda[\theta(\tau) - \theta(\tau')] } + \sum_1 \frac{k_1(\tau')}{p(\tau_1)} e^{-\lambda[\theta(\tau_1) - \theta(\tau')] } \frac{\delta(\tau - \tau_1)}{1 + \lambda T_1} \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \quad (9a)$$

$$\kappa_0(\tau, \lambda) = \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)} e^{\lambda\theta(\tau)} + \sum_1 \frac{k_{1t}}{p(\tau_1)} e^{\lambda\theta(\tau_1)} \frac{\delta(\tau - \tau_1)}{1 + \lambda T_1} \quad (9b)$$

$$M(\underline{r}, \tau, \lambda) = \frac{1}{D} Q'(\underline{r}, \tau) e^{\lambda\theta(\tau)} + \sum_1 \frac{C_1(\underline{r})}{p(\tau_1)} \frac{e^{\lambda\theta(\tau_1)}}{1 + \lambda T_1} \delta(\tau - \tau_1) \quad (9c)$$

Para una pila de forma y dimensiones dadas, la ecuación

$$\Delta S(\underline{r}) + \kappa^2 S(\underline{r}) = 0 \quad (10)$$

con la condición

$$[S(\underline{r})]_{S'} = 0 \quad (10a)$$

siendo S' la frontera extrapolada de la pila, determina una infinidad de funciones propias $S_m(\underline{r})$ y de valores propios κ_m^2 , ($m = 0, 1, 2, \dots$) es decir, una fundamental $S_0(\underline{r})$ y sus armónicas $S_m(\underline{r})$ ($m > 0$), que satisfacen

$$\Delta S_m(\underline{r}) + \kappa_m^2 S_m(\underline{r}) = 0 \quad (11)$$

Supondremos que las funciones propias han sido debida-

mente normalizadas para establecer una base ortonormal en el espacio de Hilbert de las funciones cuyo recinto de definición es la región ocupada por la pila extrapolada. Así pues

$$\int_{\mathcal{V}} S_m(\underline{r}) S_n(\underline{r}) d\underline{r} = \delta_{mn} \quad (12)$$

Hagamos ahora:

$$\begin{aligned} u(\underline{r}, \tau, \lambda) &= \sum_m u_m(\tau, \lambda) S_m(\underline{r}) \\ \bar{n}_t(\underline{r}, \lambda) &= \sum_m \bar{n}_m(\lambda) S_m(\underline{r}) \\ M(\underline{r}, \tau, \lambda) &= \sum_m M_m(\tau, \lambda) S_m(\underline{r}) \end{aligned} \quad (13)$$

Substituyendo estos desarrollos en (9) teniendo presente el carácter completo de las $S_m(\underline{r})$ y la propiedad (11) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m(\tau, \lambda)}{\partial \tau} + \kappa_m^2 u_m(\tau, \lambda) &= k_0(\tau, \lambda) \frac{\bar{n}_m(\lambda)}{T_0} + M_m(\tau, \lambda) + \\ &+ \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau', \lambda) u_m(\tau', \lambda) d\tau' \end{aligned} \quad (14)$$

que es la ecuación integrodiferencial satisfecha por u_m y que debe resolverse con la condición

$$u_m(0, \lambda) = 0 \quad (14a)$$

Aplicando el mismo método seguido en I para ecuaciones de este tipo es fácil ver que u_m debe ser una solu-

ción de la ecuación de Fredholm

$$u_n(\tau\lambda) = \frac{n_n(\lambda)}{T_0} h_n(\tau\lambda) + I_n(\tau\lambda) + \int_0^{\tau} \kappa_n(\tau, \tau', \lambda) u_n(\tau'\lambda) d\tau' \quad (15)$$

con

$$I_n(\tau\lambda) = \int_0^{\tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau')} M_n(\tau'\lambda) d\tau' \quad (16)$$

$$\begin{aligned} h_n(\tau\lambda) &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau')} k_0(\tau'\lambda) d\tau' = \\ &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau')} \frac{k_t(\tau')}{p(\tau')} e^{\lambda\theta(\tau')} d\tau' + \\ &+ \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau_1)} \frac{k_1(\tau_1)}{p(\tau_1)} e^{\lambda\theta(\tau_1)} \frac{1}{1+\lambda T_1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \kappa_n(\tau, \tau', \lambda) &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau'')} \kappa_0(\tau'', \tau', \lambda) d\tau'' = \\ &= - \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau'')} \frac{k(\tau''\tau')}{p(\tau'')} e^{\lambda(\theta(\tau'')-\theta(\tau'))} d\tau'' + \right. \\ &+ \left. \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_n^2(\tau-\tau_1)} \frac{k_1(\tau_1)}{p(\tau_1)} e^{\lambda(\theta(\tau_1)-\theta(\tau'))} \frac{1}{1+\lambda T_1} \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \quad (18) \end{aligned}$$

Utilizando I(18) se puede escribir

$$\kappa_n(\tau, \tau', \lambda) = \frac{1}{f_t} h_n(\tau\lambda) \varepsilon_n(\tau'\lambda) \quad (19)$$

con

$$g_m(\tau\lambda) = - e^{-\lambda\theta(\tau)} f(\tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} = \frac{v\Sigma_a}{D} f(\tau) p(\tau) e^{-\lambda\theta(\tau)} \quad (20)$$

La ecuación (15) puede resolverse por el método seguido en I para ecuaciones semejantes, obteniéndose la solución

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{\frac{\bar{n}_m(\lambda)}{T_0} + \frac{1}{f_t} \int_0^{\tau_t} g_m(\tau\lambda) I_m(\tau\lambda) d\tau}{1 - \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau, \tau, \lambda) d\tau} h_m(\tau\lambda) + I_m(\tau\lambda) \quad (21)$$

cuya validez requiere que el determinante de Fredholm

$$D(\kappa_m^2, \lambda) = 1 - \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau, \tau, \lambda) d\tau \quad (22)$$

no se anule idénticamente.

Considérese ahora la ecuación de los neutrones térmicos. La transformada de Laplace de I(44b) puede escribirse en la forma

$$L_t^2 \Delta \bar{n}_t(\underline{r}\lambda) - (1 + \lambda T_0) \bar{n}_t(\underline{r}\lambda) + p T_0 \bar{q}'(\underline{r}\tau_t\lambda) + T_0 N(\underline{r}) = 0 \quad (23)$$

que con la ayuda de (6), (13) y el desarrollo

$$N(\underline{r}) = \sum_n N_n S_n(\underline{r}) \quad (24)$$

de la ecuación de la n -ésima armónica,

$$-(1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0) \bar{n}_m(\lambda) + p T_0 e^{-\lambda\theta(\tau_t)} u_m(\tau_t\lambda) + T_0 N_m = 0 \quad (25)$$

(21) y (25) son dos ecuaciones simultáneas en $u_n(\tau\lambda)$ y $\bar{n}_n(\lambda)$. Para obtener la solución, se hace en (21) $\tau = \tau_t$ y el valor de $u_n(\tau_t\lambda)$ así obtenido se substituye en (25) despejando $\bar{n}_n(\lambda)$. Esta expresión se substituye en (21) para obtener la forma explícita de $u_n(\tau\lambda)$. Después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\bar{n}_n(\lambda) = \frac{pT_0 e^{-\lambda\theta(\tau_t)} [J_n(\lambda)h_n(\tau_t\lambda) + D(\kappa_n^2\lambda)I_n(\tau_t\lambda)] + T_0 N_n D(\kappa_n^2\lambda)}{D(\kappa_n^2\lambda) [1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_n(\tau_t\lambda)} \quad (26)$$

$$u_n(\tau\lambda) = \frac{p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} I_n(\tau_t\lambda) + [1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0] J_n(\lambda) + N_n}{D(\kappa_n^2\lambda) [1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_n(\tau_t\lambda)} h_n(\tau\lambda) + I_n(\tau\lambda) \quad (27)$$

en donde se ha hecho

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{f_t} \int_0^{\tau_t} g_n(\tau\lambda) I_n(\tau\lambda) d\tau \quad (28)$$

De (6) y (13) se sigue que

$$\bar{q}^*(\xi\tau\lambda) = \sum_n S_n(\xi) u_n(\tau\lambda) e^{-\lambda\theta(\tau)} \quad (29)$$

$$\bar{n}_t(\xi\lambda) = \sum_n S_n(\xi) \bar{n}_n(\lambda)$$

y substituyendo en (4) resulta

$$\bar{c}_1(\xi\lambda) = \sum_n S_n(r) \bar{c}_{1n}(\lambda) \quad (30)$$

con

$$\bar{c}_{1m}(\lambda) = \frac{T_1}{1+\lambda T_1} \left\{ - \int_0^{\tau_t} k_1(\tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} u_m(\tau\lambda) e^{-\lambda\theta(\tau)} d\tau + \frac{k_{1t}}{T_0} \bar{n}_m(\lambda) + C_{1m} \right\} \quad (30a)$$

$$C_{1m} = \int_V C_1(\underline{r}) S_m(\underline{r}) d\underline{r} \quad (30b)$$

de esta manera la transformada de la solución queda completamente determinada. Para exhibir la solución final hay tan solo que invertir las ecuaciones (29) y (30). Resulta así

$$\begin{aligned} q'(\underline{r}t) &= \sum_m S_m(\underline{r}) q_m(\tau t) \\ n_t(\underline{r}t) &= \sum_m S_m(\underline{r}) n_m(t) \\ c_{1m}(\underline{r}t) &= \sum_m S_m(\underline{r}) c_{1m}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

siendo

$$\begin{aligned} q_m(\tau t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda\tau t - \theta(\tau)} u_m(\tau\lambda) d\lambda \\ n_m(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda t} \bar{n}_m(\lambda) d\lambda \\ c_{1m}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda t} c_{1m}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (32)$$

2.- La Pila con un hendimiento inicial.

Como una aplicación de la teoría general expuesta en la sección anterior, estudiaremos el comportamiento de una pila cuya operación se inicia cuando al tiempo $t = 0$ ocurre un hendimiento en el punto $P(\mathbf{r}_0)$ en el interior de la misma. Como resultado del hendimiento se producen en el punto $P(\mathbf{r}_0)$, $\eta(E)$ neutrones inmediatos de energía E por unidad de banda y η_1 neutrones latentes del grupo i . Será entonces

$$\begin{aligned}n(\mathbf{r}, E, 0) &= \eta(E) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\c_1(\mathbf{r}, 0) &= \eta_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\n_t(\mathbf{r}, 0) &= 0\end{aligned}\tag{33}$$

puesto que inicialmente no hay neutrones térmicos. Claramente

$$q(\mathbf{r}, E, 0) = v \Sigma_f E \eta(E) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

$$\text{y } q(\mathbf{r}, \tau, 0) = D \eta(\tau) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

de modo que

$$\begin{aligned}Q'(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{D\eta(\tau)}{p(\tau)} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\C_1(\mathbf{r}) &= \eta_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\N(\mathbf{r}) &= 0\end{aligned}\tag{34}$$

y por (9c) será

$$M(\underline{r}, \tau, \lambda) = \left\{ \frac{e^{-\lambda\theta(\tau)}}{p(\tau)} \eta(\tau) + \sum_i \frac{\eta_i}{p(\tau_i)} \frac{e^{-\lambda\theta(\tau_i)}}{1+\lambda T_i} \delta(\tau-\tau_i) \right\} \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \\ = \frac{k_0(\tau\lambda)}{f_t} \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \quad (35)$$

como puede verse fácilmente de (9b). De (13) se obtiene

$$K_m(\tau\lambda) = \int_V S_m(\underline{r}) M(\underline{r}, \tau, \lambda) d\underline{r} = \frac{k_0(\tau\lambda)}{f_t} S_m(\underline{r}_0) \quad (36)$$

y de (16), previa comparación con (17),

$$I_m(\tau\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} h_m(\tau\lambda) \quad (37)$$

En virtud de (19), (20) y (28) puede escribirse

$$J_m(\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\tau\lambda) d\tau = \frac{1-D(\kappa_m^2\lambda)}{f_t} S_m(\underline{r}_0) \quad (38)$$

además

$$N_m = \int_V S_m(\underline{r}) N(\underline{r}) d\underline{r} = 0 \quad (39)$$

Substituyendo estos valores en (26) y (27) pueden calcularse $\bar{n}_m(\lambda)$ y $u_m(\tau\lambda)$ obteniéndose

$$n_m(\lambda) = \frac{\frac{pT_0}{f_t} e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_m(\tau_t\lambda) S_m(\underline{r}_0)}{D(\kappa_m^2\lambda) [1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_m(\tau_t\lambda)} \quad (40)$$



FACULTAD DE CIENCIAS
Biblioteca

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{\frac{1}{f_t} [1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0] S_m(\underline{r}_0) h_m(\tau\lambda)}{D(\kappa_m^2 \lambda) [1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_m(\tau_t \lambda)} \quad (41)$$

En virtud de (30b) será

$$C_{1m} = \eta_1 S_m(\underline{r}_0) \quad (42)$$

Substituyendo (40), (41) y (42) en (30a), después de algunas reducciones y transformaciones se llega a la expresión

$$\bar{c}_{1m}(\lambda) = \frac{T_1 k_{1t} u_m(\tau\lambda)}{1 + \lambda T_1 h_m(\tau\lambda)} \quad (43)$$

Resta solamente invertir la transformación: de (41) y (32) resulta

$$q_m(\tau t) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{\lambda t} H_m(\tau\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} d\lambda \quad (44)$$

siendo

$$\begin{aligned} H_m(\tau\lambda) &= e^{-\lambda\theta(\tau)} h_m(\tau\lambda) = \\ &= \int_0^\tau e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} \frac{k_t(\tau')}{p(\tau')} e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau')] } d\tau' + \\ &+ \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_1)} \frac{k_{1t}}{p(\tau_1)} \frac{e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau_1)]}}{1 + \lambda T_1} \end{aligned} \quad (44a)$$

$$\Delta_m(\lambda) = 1 - \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\tau\lambda) d\tau - \frac{p H_m(\tau_t \lambda)}{1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0} \quad (44b)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\tau\lambda) d\tau &= \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v\Sigma_a}{D} \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} p(\tau'\tau) \times \\
&\times e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau')]} k(\tau'\tau) d\tau' + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_1)} \times \\
&\times p(\tau_1\tau) e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau_1)]} \frac{k_1(\tau)}{1+\lambda T_1} \quad (44c)
\end{aligned}$$

Sea

$$\varphi_m(\tau\lambda) = \frac{H_m(\tau\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (44d)$$

el integrando de (44).

Si $\lambda \sim -\frac{1}{T_1}$ se ve que $H_m \sim \frac{\text{const.}}{1+\lambda T_1}$ y $\Delta_m \sim \frac{\text{const.}}{1+\lambda T_1}$ así que $\varphi_m(\tau\lambda)$ no tiene singularidades cuando $1+\lambda T_1 = 0$. El integrando tendrá polos correspondientes a los ceros de $\Delta_m(\lambda)$. Debe pues estudiarse la ecuación

$$\Delta_m(\lambda) = 0 \quad (45)$$

que en virtud de (44a) y (44b) puede escribirse bajo la forma

$$\frac{p h_m(\tau_t\lambda) e^{-\lambda\theta(\tau_t)}}{1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0} + \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\tau\lambda) d\tau = 1 \quad (45a)$$

Esta es la ecuación de enhoras. Introduciendo la probabilidad de escape a la fuga térmica

$$l_{tm} = \frac{1}{1 + \kappa_m^2 L_t^2} \quad (46)$$

y utilizando (17) y (18) puede escribirse

$$\begin{aligned} & \frac{1_{t_n}}{1+\Gamma_0} \frac{1_{t_n}}{1_{t_n} \lambda} \int_0^{t_n} \left\{ e^{-\kappa_m^2(\tau_t - \tau)} p(\tau, \tau_t) e^{-\lambda[\theta(\tau_t) - \theta(\tau)]} k_t(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + \sum_1 e^{-\kappa_m^2(\tau_t - \tau_1)} p(\tau_1, \tau_t) e^{-\lambda[\theta(\tau_t) - \theta(\tau_1)]} \frac{k_{1t}}{1 + \lambda \Gamma_1} \right\} + \\ & \left. + \int_0^{t_n} d\tau \frac{\nu \Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau - \tau')} p(\tau', \tau) e^{-\lambda[\theta(\tau) - \theta(\tau')] } k(\tau', \tau) d\tau' + \right. \\ & \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau - \tau_1)} p(\tau_1, \tau) e^{-\lambda[\theta(\tau) - \theta(\tau_1)]} \frac{k_1(\tau)}{1 + \lambda \Gamma_1} \right\} = 1 \quad (47) \end{aligned}$$

Así como en la ecuación crítica de la pila estacionaria, se advierte que en la ecuación de enhoras aparecen dos términos, el primero debido a la acción de los neutrones térmicos y el segundo a los neutrones rápidos. Cabe observar que si se hace $\lambda = 0$ en (47) se obtiene precisamente la ecuación crítica I(80) que corresponde al caso $k_{er} = 1$. Para cada m hay una ecuación de enhoras (47) que tendrá ciertas raíces λ_{mj} ($j = 1, 2, 3, \dots$). Las cantidades

$$\pi_{mj} = \frac{1}{\lambda_{mj}} \quad (48a)$$

son los periodos de la pila. Los periodos reales se llaman crecientes si son positivos, decrecientes si son negativos, lentos si $|\pi_{mj}|$ es grande y rápidos si $|\pi_{mj}|$ es pequeño.

Consideremos primero el caso de la pila térmica. El segundo término del primer miembro de (47) es en este caso un valor correctivo pequeño en el que puede hacerse $\lambda = 0$.

Simbólicamente la ecuación (47) se puede escribir

$$\frac{l_{tm}}{1 + T_0 l_{tm} \lambda} \{ \} + \int = 1$$

y considerando que la integral es muy pequeña se puede escribir

$$l_{tm} (1 + \int) \{ \} = 1 + T_0 l_{tm} \lambda$$

pero la expresión $1 + \int$ con $\lambda = 0$ no es otra cosa que el factor de utilización rápida ϵ definido en I eqs. (98), (104) y (106). Resulta pues

$$l_{tm} \epsilon_m \{ \} = 1 + T_0 l_{tm} \lambda \quad (a)$$

De nuevo, si se hace $\lambda = 0$ en esta ecuación, se obtendría la condición crítica $k_{er} = 1$ con k_{er} dada por I(109). Por continuidad, si (a) deberá tener una raíz positiva pequeña correspondiente a un periodo creciente lento, k_{er} no deberá diferir mucho de la unidad.

Introduciendo las probabilidades de escape a la fuga rápida

$$l_{fmo}(\tau) = e^{-\kappa_m^2(\tau_t - \tau)} \quad l_{fmi} = e^{-\kappa_m^2(\tau_t - \tau_i)} \quad (48b)$$

y las probabilidades de escape a la absorción

$$p_0(\tau) = p(\tau, \tau_t) \quad p_1 = p(\tau_i, \tau_t) \quad (49)$$

de acuerdo con I (109) se puede definir

$$k_{\text{efn}} = l_{\text{tn}} \epsilon_n \int_0^{\tau_t} \left\{ l_{\text{fno}}(\tau) p_0(\tau) k_t(\tau) d\tau + \sum_i l_{\text{fni}} p_i k_{it} \right\} \quad (50)$$

que es la constante efectiva de reproducción para la enésima armónica. El valor particular de k_{efn} para la fundamental es la constante de reproducción efectiva de la pila.

Es conveniente introducir la magnitud

$$k_{\text{prn}} = \frac{k_{\text{efn}}}{l_{\text{tn}} \epsilon_n} = \int_0^{\tau_t} l_{\text{fno}}(\tau) p_0(\tau) k_t(\tau) d\tau + \sum_i l_{\text{fni}} p_i k_{it} \quad (51)$$

con cuya ayuda se pueden formar las cantidades

$$\alpha_{\text{no}}(\tau) = \frac{k_t(\tau)}{k_{\text{prn}}} \quad \alpha_{\text{ni}} = \frac{k_{it}}{k_{\text{prn}}} \quad (52)$$

que se llamarán fracciones efectivas de neutrones inmediatos y retardados, respectivamente. Introduciremos también la reactividad para la enésima armónica

$$\rho_n = \frac{k_{\text{en}}}{k_{\text{efn}}} = \frac{k_{\text{efn}} - 1}{k_{\text{efn}}} \quad (53)$$

cuyo valor para la fundamental es la reactividad de la pila, y los tiempos de relajamiento

$$t_{\text{ro}}(\tau) = \theta(\tau_t) - \theta(\tau) \quad t_{\text{ri}} = \theta(\tau_t) - \theta(\tau_i) \quad (54)$$

Con auxilio de las definiciones anteriores la ecuación de enclas (a) puede escribirse en la forma más conveniente

$$\begin{aligned}
 \frac{k_{\text{om}}}{k_{\text{efm}}} &= \sum_i \frac{T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi}}{\frac{1}{\lambda} + T_i} e^{-\lambda t_{ri}} + \frac{T_0 l_{tm}}{k_{\text{efm}}} \lambda - \\
 &- \int_0^{\tau_t} (e^{-\lambda t_{ro}(\tau)} - 1) l_{f_{mo}}(\tau) p_o(\tau) \alpha_{mo}(\tau) d\tau - \\
 &- \sum_i (e^{-\lambda t_{ri}} - 1) l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} \quad (55)
 \end{aligned}$$

Para el análisis de esta expresión hay que tener presente que en una pila típica, los tiempos de generación T_1 de los neutrones retardados se encuentran dentro de una zona que, a groso modo, va de 100 a 0.05 seg. El tiempo de generación T_0 de los neutrones inmediatos es del orden de 10^{-3} seg. y los tiempos de relajamiento del orden de 10^{-5} seg.

Designemos por $f_m(\lambda)$ el segundo miembro de (55) y consideremos su comportamiento para valores reales de λ .

$$\text{Si } |\lambda| \ll \frac{1}{T_1},$$

$$f_m(\lambda) \sim \lambda \sum_i T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} \quad (56a)$$

$$\text{Si } |\lambda| \sim \frac{1}{T_1} \text{ pero } |\lambda| \ll \frac{1}{T_0},$$

$$f_m(\lambda) \sim \sum_i \frac{T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi}}{\frac{1}{\lambda} + T_i} \quad (56b)$$

$$\text{Si } |\lambda| \sim \frac{1}{T_0} \text{ pero aún } |\lambda| \ll \frac{1}{t_{ro}},$$

$$f_m(\lambda) \sim \sum_i \frac{T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi}}{\frac{1}{\lambda} + T_i} + \frac{T_0 l_{tm}}{k_{\text{efm}}} \lambda \quad (56c)$$

En la zona en que $|\lambda| \sim \frac{1}{t_{r0}}$, $f_m(\lambda)$ está dada por el segundo miembro de (55) incluyendo todos sus términos. Si $\lambda \rightarrow +\infty$

$$f_m(\lambda) \sim \frac{T_0 l_{tm}}{k_{efm}} \lambda \quad (56d)$$

asi que $f_m(\lambda) \rightarrow +\infty$ linealmente con λ . Finalmente si $\lambda \rightarrow -\infty$

$$f_m(\lambda) \sim - \int_0^{\tau_0} e^{-\lambda t_{r0}(\tau)} l_{fmo}(\tau) p_0(\tau) \alpha_{mo}(\tau) d\tau \quad (56e)$$

de manera que $f_m(\lambda) \rightarrow -\infty$ exponencialmente con λ . Es además de notarse que $f_m(\lambda)$ tiene singularidades en cada uno de los valores $\lambda = -\frac{1}{T_1}$ correspondientes a los distintos tiempos de generación retardada. Así pues, para valores reales de λ , $f_m(\lambda)$ consiste de $l + 1$ ramas (ver Fig. 1) que corren de $-\infty$ a $+\infty$, una a la izquierda de todos los $-\frac{1}{T_1}$, otra a la derecha de los mismos y una entre cada par de valores consecutivos de $-\frac{1}{T_1}$. Esta curva se asemeja mucho, pero difiere en varios importantes aspectos, de la que resulta considerando la teoría ordinaria¹.

Las raíces reales de la ecuación de enhoras se obtienen, de la manera usual, trazando en la gráfica de $f_m(\lambda)$ una recta horizontal a una distancia $\frac{k_{om}}{k_{efm}}$ del origen. Puesto que según (50) siempre es $k_{ofm} > 0$, la posición de la recta depende del signo de k_{om} . En cualquier caso habrá $l + 1$ periodos reales. Si $k_{om} > 0$, habrá un periodo positivo y l negativos; si $k_{om} = 0$ un periodo es infinito y

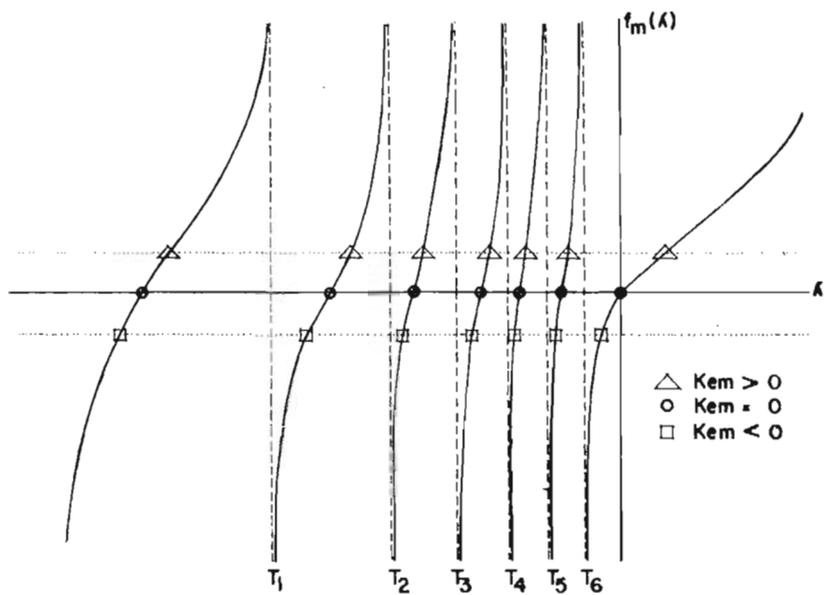


FIG 1

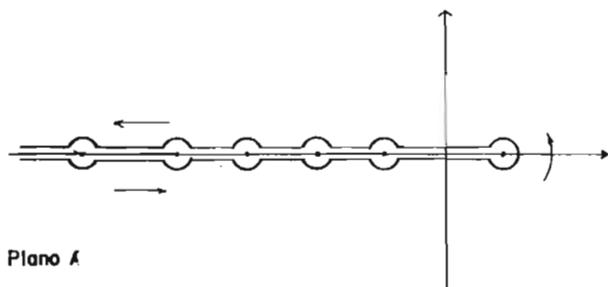


FIG 2

l son negativos; si $k_{on} < 0$ todos los periodos son negativos.

Ahora bien, la ecuación (10) con la condición (10a) de termina un espectro numerable de valores propios κ_m^2 . Supondremos que el índice m ha sido escogido de manera de ordenar los valores propios en sucesion creciente, $\kappa_0^2 < \kappa_1^2 < \kappa_2^2 < \dots$. Además utilizaremos la convención de suprimir el indice para todas las cantidades que se refieran a la fundamental. Así por ejemplo, $\kappa_0 = \kappa$, $l_{t_0} = l_t$, $l_{f_0} = l_f$, $k_{of_0} = k_{of}$, $k_{o_0} = k_o$, etc.

De (48) y (50) es fácil ver que con la convención adoptada, k_{ofm} es una función decreciente de m , es decir que $k_{of} = k_{of_0} > k_{of_1} > k_{of_2} > \dots$. Del mismo modo todas las reactividades $k_{om} = k_{ofm} - 1$ serán funciones decrecientes de m . Si $k_{of} = 1$, la reactividad de la pila k_o es nula, en tanto que todas las restantes k_{om} serán negativas. Se sigue que habrá un periodo infinito en la fundamental (solución estacionaria) en tanto que todos los demás periodos π_{mj} serán negativos. Se dice en este caso que la pila es crítica. Si $k_{of} > 1$, $k_o > 0$ y hay un periodo creciente en la fundamental. Generalmente k_{of} es tan poco mayor que la unidad, que todos los restantes k_{ofm} son menores que uno y por tanto todas las reactividades harmónicas son negativas. En este caso hay un solo periodo creciente en tanto que todos los demás son negativos: la pila es supercrítica. Finalmente, si $k_{of} < 1$, todos los periodos, incluida la fundamental, son negativos y la pila es subcrítica.

Nos preguntamos ahora si la ecuación de enhoras

$$f_m(\lambda) = \frac{k_{om}}{k_{ofm}} \quad (a)$$

tiene raíces complejas. Desde luego cabe considerar que si λ es una solución de (a), $\bar{\lambda}$ deberá satisfacer la misma ecuación,

$$f'_m(\bar{\lambda}) = \frac{k_{cm}}{k_{efm}} \quad (b)$$

y de aquí se sigue que

$$f_m(\lambda) - f_m(\bar{\lambda}) = 0 \quad (c)$$

Este criterio aplicado a las formas asintóticas (56) muestra que, en virtud de las diferencias tan considerables que existen entre los tiempos de generación retardada e inmediata y los tiempos de relajamiento, $f_m(\lambda)$ no tiene más que los polos reales anteriormente mencionados ya que, debido a las dichas diferencias es posible dividir el plano complejo λ en anillos circulares en cada uno de los cuales $f_m(\lambda)$ está representada, con bastante buena aproximación por las formas asintóticas (56), ninguna de las cuales admite raíces complejas. En la zona en que $|\lambda| \sim \frac{1}{t_{r0}}$ (55) se puede expresar con buena aproximación como

$$f_m(\lambda) \sim \frac{T_0 l_{tm}}{k_{efm}} \lambda - \int_0^{\tau_t} (e^{-\lambda t_{r0}(\tau)} - 1) l_{f_{m0}}(\tau) p_0(\tau) \alpha_{m0}(\tau) d\tau + \sum_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} \quad (56f)$$

que tampoco admite raíces complejas. Supondremos pues que para los tiempos característicos que se presentan en las pilas usuales, (55) no tiene más que raíces reales. Volviendo

entonces a la ecuación (44d) cabe observar que en el semiplano $\text{Re } \lambda < 0$, $H_n(\tau\lambda)$ aumenta, conforme $\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty$, mas lentamente que $\exp\{|\lambda| \cos \alpha \theta(\tau_t)\}$ siendo $\alpha = \text{amp } \lambda$ y que $\Delta_n(\lambda)$ tiene un término dominante, el tercero, que aumenta como $\exp\{|\lambda| \cos \alpha \theta(\tau_t)\}$ de manera que el cociente $\frac{H_n(\tau\lambda)}{\Delta_n(\lambda)} e^{\lambda t}$ va a cero si $\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty$. Se sigue que $\varphi_n(\tau\lambda)$ es regular en la semicircunferencia infinita izquierda y que el contorno de Bromwich puede deformarse de la manera indicada en la Fig. 2 así que la integral (44) se reduce a una suma sobre los residuos de los polos, todos los cuales son obviamente simples. El residuo R_{nj} del polo $\lambda_{nj} = \frac{1}{\pi_{nj}}$ será el coeficiente de $(\lambda - \lambda_{nj})^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $\varphi_n(\tau\lambda)$, o sea

$$R_{nj} = \left[(\lambda - \lambda_{nj}) \frac{H_n(\tau\lambda)}{\Delta_n(\lambda)} e^{\lambda t} \right]_{\lambda=\lambda_{nj}} = \left[\frac{\lambda - \lambda_{nj}}{\Delta_n(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_{nj}} H_n(\tau\lambda_{nj}) e^{\lambda_{nj} t} = \frac{H_n(\tau\lambda_{nj})}{\left(\frac{d\Delta_n(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda_{nj}}} e^{\lambda_{nj} t} = \frac{H_n(\tau\lambda_{nj})}{\Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\lambda_{nj} t}$$

de modo que

$$q_n(\tau t) = \frac{S_n(\Sigma_0)}{f_t} \sum_j \frac{H_n(\tau\lambda_{nj})}{\Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\lambda_{nj} t} \quad (57)$$

y será entonces

$$q'(\Sigma \tau t) = \frac{1}{f_t} \sum_{nj} S_n(\Sigma_0) S_n(\Sigma) \frac{H_n(\tau\lambda_{nj})}{\Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\lambda_{nj} t} \quad (58)$$

Substituyendo (40) en (32) se obtiene

$$n_n(t) = \frac{pT_0}{f_t} S_n(x_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H_n(\tau_t \lambda) e^{\lambda t} d\lambda}{(1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0) \Delta_n(\lambda)} \quad (59)$$

y recordando que $\frac{1}{1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0} = \frac{l_{nt}}{1 + \lambda l_{nt} T_0}$, un análisis semejante al anterior muestra que

$$n_n(t) = \frac{pT_0}{f_t} S_n(x_0) \sum_j \frac{l_{nt} H_n(\tau_t \lambda_{nj})}{(1 + \lambda_{nj} l_{nt} T_0) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\pi_{nj} t} \quad (60)$$

obteniéndose

$$n_t(xt) = \frac{pT_0}{f_t} \sum_{nj} S_n(x_0) S_n(x) \frac{l_{nt} H_n(\tau_t \lambda_{nj})}{(1 + \lambda_{nj} l_{nt} T_0) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\pi_{nj} t} \quad (61)$$

Del mismo modo se demuestra que

$$c_1(xt) = \frac{1}{f_t} \sum_{nj} S_n(x_0) S_n(x) \frac{T_1 k_{1t}}{(1 + \lambda_{nj} T_1) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\pi_{nj} t} \quad (62)$$

Los términos que contienen periodos decrecientes representan transitorios cuya vida media es $|\pi_{nj}|$. Si la pila es subcrítica todos los términos serán transitorios: cualquier proceso de hendimientos iniciado en el reactor se apagará con una vida media igual a $\max\{|\pi_{nj}|\}$ de manera que éste no puede mantener una reacción en cadena. Si la pila es crítica hay un término estático y todos los restantes son transitorios: a un tiempo suficientemente grande, $t \gg \max\{|\pi_{nj}|\}$, el reactor se encontrará en estado de

equilibrio. Por último, en la pila supercrítica habrá un periodo creciente de manera que todos los restantes son transitorios. El comportamiento del reactor para tiempos suficientemente grandes como para que el efecto de las condiciones transitorias haya substancialmente desaparecido, puede describirse tomando el primer componente de la fundamental en (58), (61) y (62). Esta solución, que podríamos llamar permanente en contraposición a los términos transitorios, aumenta con el tiempo como e^{t/π_01} .

Si $E_f(E)$ designa la energía producida cuando un neutrón de energía E produce un hendimiento y E_{ft} es el valor correspondiente para un neutrón térmico, la potencia de la pila será

$$P(t) = \int_V dR \left\{ \int_{E_t}^{\infty} n(R, E, t) v \Sigma_f E_f dE + n_t(R, t) v_t \Sigma_{ft} E_{ft} \right\} \quad (63)$$

que se puede escribir como

$$P(t) = \int_V dR \left\{ \int_0^t q'(R, \tau, t) \frac{v \Sigma_a}{D} p(\tau) f(\tau) E_f(\tau) d\tau + \frac{n_t(R, t)}{T_0} f_t E_t \right\} \quad (64)$$

Utilizando (58) y (61) se ve que

$$P(t) = \sum_{nj} S_n(E_0) V_n (P_{nj} + P_{tnj}) e^{t/\pi_{nj}} \quad (65)$$

con

$$V_n = \int_V S_n(R) dR \quad (65a)$$

$$P_{mj} = \int_0^{\tau_t} \frac{H_m(\tau \lambda_{mj})}{\Delta'_m(\lambda_{mj})} \frac{v \Sigma_m}{D} p(\tau) \frac{f(\tau)}{f_t} E_f(\tau) d\tau \quad (65b)$$

$$P_{tmj} = \frac{p l_{mt} H_m(\tau_t \lambda_{mj}) E_{tf}}{(1 + \lambda_{mj} l_{mt} T_0) \Delta'_m(\lambda_{mj})} \quad (65c)$$

como la pila es térmica, puede suponerse $P_{mj} \ll P_{tmj}$ con lo cual será aproximadamente

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{mj} S_m(\underline{E}_0) V_m P_{tmj} \times e^{t/\pi_{mj}} = \\ &= p E_{ft} \sum_{mj} \frac{S_m(\underline{E}_0) V_m l_{mt} H_m(\tau_t \lambda_{mj})}{(1 + \lambda_{mj} l_{mt} T_0) \Delta'_m(\lambda_{mj})} \times e^{t/\pi_{mj}} \end{aligned} \quad (66)$$

En una pila supercrítica, a tiempos suficientemente grandes, la potencia se puede expresar aproximadamente por el primer término de este desarrollo. Se ve entonces que la potencia aumenta como $e^{t/\pi_{01}}$. Así pues, para que la pila sea controlable es necesario que π_{01} sea suficientemente grande, lo cual, como resulta inmediatamente de la Fig. 1, requiere una reactividad positiva pero pequeña. Si fuera $k_0 = \sum_i l_{fi} p_i \alpha_i$, la raíz positiva de la ecuación de enhoras caería justamente en la región en que la influencia de los neutrones inmediatos empieza a hacerse sentir. Para valores menores de k_0 , la raíz caería en una región en que $f_0(\lambda)$ depende preponderantemente del mecanismo de retardación. Se sigue que con el objeto de asegurar un periodo creciente suficientemente largo a modo de que la pila esté controlada por los neutrones retardados deberá tenerse

$$0 < \frac{k_0}{k_{ef}} < \sum_i l_{fi} p_i \alpha_i \quad (67)$$

que es la "condición de seguridad".

Demostraremos ahora que la ecuación de enhoras (55) se reduce a la forma usual cuando se hacen las aproximaciones ordinarias. Si el espectro se supone de la forma I(84), $k_t(\tau)$ estará dada por (86) y k_{of} por (111), con ϵ definido por (106). Haciendo

$$(pl_f)_{pr} = (1 - \beta) p_0 l_{fo} + \sum_i \beta_i p_i l_{fi} \quad (68)$$

será

$$k_{of} = k_t l_t \epsilon (pl_f)_{pr} \quad (69)$$

$$k_{pr} = \frac{k_{of}}{l_t \epsilon} = k_t (pl_f)_{pr} \quad (70)$$

$$\alpha_0(\tau) = \frac{(1-\beta)}{(pl_f)_{pr}} \delta(\tau-\tau_0) \quad \alpha_1 = \frac{\beta_1}{(pl_f)_{pr}} \quad (71)$$

y la ecuación de enhoras se reduce a

$$\frac{k_o}{k_{of}} = \sum \frac{\beta_i T_i}{\lambda + T_i} e^{-t_{ri}\lambda} \frac{p_i l_{fi}}{(pl_f)_{pr}} + \frac{T_0 l_t}{k_{of}} \lambda -$$

$$-(e^{-t_{r0}\lambda} - 1) (1-\beta) \frac{p_0 l_{fo}}{(pl_f)_{pr}} - \sum_i (e^{-t_{ri}\lambda} - 1) \frac{l_{fi} p_i}{(pl_f)_{pr}} \beta_i \quad (72)$$

en tanto que la condición de seguridad se puede escribir como

$$0 < \frac{k_o}{k_{of}} < \sum_i \beta_i \frac{p_i l_{fi}}{(pl_f)_{pr}} \quad (73)$$

la cual, haciendo

$$(pl_f)_r = \frac{1}{\beta} \sum_i \beta_i p_i l_{fi} \quad (74)$$

se transforma en

$$k_e < \frac{\beta \frac{(pl_f)_r}{p_o l_{fo}}}{1 - \beta} \quad (75)$$

Se puede obtener una mayor simplificación si se desprecian las diferencias entre las energías correspondientes a los neutrones inmediatos y retardados. Será entonces $p_o = p_i = p$, $l_{fo} = l_{fi} = l_f$, $t_{ro} = t_{ri} = t_r$, $(pl_f)_{pr} = pl_f$, k_{ef} estará dada por I(112) y la ecuación de enhoras se simplifica a

$$\frac{k_e}{k_{ef}} = \sum_i \frac{\beta_i T_i}{1 + T_i} + \frac{T_o l_t}{k_{ef}} \lambda + (e^{-\lambda t_r} - 1) \left(\frac{T_o l_t}{k_{ef}} \lambda + \frac{1}{k_{ef}} \right) \quad (76)$$

Cuando $\pi = \frac{1}{\lambda}$ es muy grande, (76) da

$$k_e = \frac{\sum_i \beta_i T_i}{\pi} = \frac{0.0943}{\pi} \quad (77)$$

con una constante independiente de la pila particular. Así, una pila con una reactividad de una enhora tiene $k_e = 2.62 \times 10^{-5}$. La condición de seguridad a esta aproximación es

$$k_e < \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (78)$$

o sea $k_e < 7.59 \times 10^{-3}$.

La ecuación (50) aplicada a la fundamental ($m = 0$) nos da la k_{er} de la pila. El segundo miembro, considerado como una función $\varphi(\kappa^2)$ del valor propio κ^2 , es una función monótonamente decreciente de esta variable. Para un valor propuesto de k_0 o k_{er} , la ecuación $k_{er} = \varphi(\kappa^2)$ determina el valor de κ^2 y por tanto las dimensiones de la pila que son proporcionales a $L = \frac{1}{\kappa}$. Si $k_{er} = 1$, $\varphi(\kappa^2) = 1$ tiene por raíz $\kappa^2 = \kappa_0^2$, el valor característico de la pila crítica cuyas dimensiones son proporcionales a la longitud característica $L_0 = \frac{1}{\kappa_0}$. Si la pila es supercrítica, es decir, si $k_0 > 0$ ó $k_{er} > 1$, debido al carácter monótonamente decreciente de $\varphi(\kappa^2)$ la raíz de $\varphi(\kappa^2) = k_{er}$ será $\kappa^2 < \kappa_0^2$ de donde se infiere que $L > L_0$, lo cual implica que las dimensiones de la pila deberán ser mayores que las correspondientes a la pila crítica. Del mismo modo se demuestra que una pila sub-crítica con $k_0 < 0$ ó $k_{er} < 1$ deberá tener $\kappa^2 > \kappa_0^2$ ó $L < L_0$ y es por tanto mas pequeña que la pila crítica.

3.- La Pila con un número arbitrario de hendimientos iniciales.

El comportamiento de un reactor cuya operación se inicia no con uno, sino con cualquier número de hendimientos iniciales puede obtenerse fácilmente de los resultados de la sección anterior aprovechando la circunstancia de que las ecuaciones integrodiferenciales de la pila, son lineales. Si se supone pues que al tiempo $t = 0$ ocurren varios hendimientos en los puntos x_μ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$), la solución será meramente la suma de las soluciones obtenidas previa-

mente, para $\epsilon_0 = \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$. Así, de (58), (61) y (62) se obtiene

$$q'(\underline{x}t) = \frac{1}{f_t} \sum_{\mu n j} S_n(\underline{x}\mu) S_n(\underline{x}) \frac{H_n(\tau \lambda_{nj})}{\Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\frac{t}{\pi_{nj}}}$$

$$n_t(\underline{x}t) = \frac{pT_0}{f_t} \sum_{\mu n j} S_n(\underline{x}\mu) S_n(\underline{x}) \frac{l_{nt} H_n(\tau \lambda_{nj})}{(1+\lambda_{nj} l_{nt} T_0) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\frac{t}{\pi_{nj}}} \quad (79)$$

$$o_1(\underline{x}t) = \frac{1}{f_t} \sum_{\mu n j} S_n(\underline{x}\mu) S_n(\underline{x}) \frac{T_1 \cdot k_{1t}}{(1+\lambda_{nj} T_1) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\frac{t}{\pi_{nj}}}$$

La potencia desarrollada por la pila será

$$P(t) = \sum_{\mu n j} S_n(\underline{x}\mu) V_n(P_{nj} + P_{t_{nj}}) e^{t/\pi_{nj}} \quad (80)$$

Es obvio que la efectividad de un hendimiento para hacer marchar la pila depende considerablemente de la posición en que ocurre. Un hendimiento inicial en el punto $\underline{x}\mu$ no podrá excitar aquellas armónicas que tengan un nodo en $\underline{x}\mu$. En cualquier caso la amplitud de la excitación es proporcional a $S_n(\underline{x}\mu)$.

4.- Pila Epitérmica.

El comportamiento dinámico de la pila epitérmica no es esencialmente diferente al de la pila térmica, por lo menos en lo que se refiere a la reactividad. La constante de reproducción efectiva está dada por I(118) y la ecuación de

enhoras por (47). Además de las definiciones (48) y (49) es conveniente introducir las funciones

$$\left. \begin{aligned} l_{fom}(\tau', \tau) &= e^{-\kappa_m^2(\tau - \tau')} & l_{fim}(\tau) &= e^{-\kappa_m^2(\tau - \tau_1)} \\ p_o(\tau', \tau) &= p(\tau', \tau) & p_i(\tau) &= p(\tau_1, \tau) \\ t_{ro}(\tau', \tau) &= \theta(\tau) - \theta(\tau') & t_{ri}(\tau) &= \theta(\tau) - \theta(\tau_1) \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

de modo que

$$\begin{aligned} k_{ofm} &= l_{it} \left\{ \int_0^{\tau_t} l_{fom}(\tau) p_o(\tau) k_t(\tau) d\tau + \sum_i l_{fmi} p_i k_{it} \right\} + \\ &+ \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v \sum_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' l_{fom}(\tau', \tau) p_o(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\ &\left. + \sum_{\tau_1 < \tau} l_{fim}(\tau) p_i(\tau) k_i(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (82)$$

Introduciendo las magnitudes

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mo}(\tau) &= \frac{l_{tm} k_t(\tau)}{k_{ofm}} & \alpha_{mi} &= \frac{l_{tm} k_{it}}{k_{ofm}} \\ \alpha_{mo}(\tau', \tau) &= \frac{k(\tau', \tau)}{k_{ofm}} & \alpha_{mi}(\tau) &= \frac{k_i(\tau)}{k_{ofm}} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Después de alguna manipulación algebraica, la ecuación de enhoras puede escribirse en la siguiente forma:

$$\rho_m = \frac{k_{om}}{k_{ofm}} = \sum_i \frac{T_i}{\lambda + T_i} l_{fmi} p_i \alpha_{mi} e^{-t_{ri} \lambda} +$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + T_0 l_{tm} \lambda) \int_{\tau_1}^{\tau_t} l_{f_{mi}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau + \\
& + T_0 l_t \lambda \left\{ \frac{1}{k_{eff}} - \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \left(\int_0^{\tau} l_{f_{om}}(\tau' \tau) p_o(\tau' \tau) \alpha_{mo}(\tau' \tau) d\tau' + \right. \right. \\
& + \left. \left. \int_{\tau_1}^{\tau} l_{f_{i}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) d\tau \right) \right\} - \\
& - \int_0^{\tau_t} (e^{-\lambda t_{ro}(\tau)} - 1) l_{f_{om}}(\tau) p_o(\tau) \alpha_{mo}(\tau) d\tau - \\
& - \sum_i (e^{-\lambda t_{r1}} - 1) l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} - \\
& - (1 + T_0 l_t \lambda) \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \left\{ \int_0^{\tau} (e^{-\lambda t_{ro}(\tau' \tau)} - 1) l_{f_{om}}(\tau' \tau) p_o(\tau' \tau) \alpha_{mo}(\tau' \tau) d\tau' + \right. \\
& + \left. \int_{\tau_1}^{\tau} (e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} - 1) l_{f_{mi}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) d\tau \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

Llamando de nuevo $f_m(\lambda)$ la función que aparece en el segundo miembro de esta ecuación se observa que si $|\lambda| \ll T_1$

$$f_m(\lambda) \sim \lambda \sum_i T_1 (l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} + \int_{\tau_1}^{\tau_t} l_{f_{mi}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau) \quad (85a)$$

Si $|\lambda| \sim \frac{1}{T_1}$,

$$f_m(\lambda) \sim \sum_i \frac{T_1}{\frac{1}{\lambda} + T_1} \left\{ l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} + \int_0^{\tau_t} l_{f_{mi}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \right\} \quad (85b)$$

Se observa que el efecto de los neutrones rápidos se manifiesta en la alteración de los valores numéricos de los coeficientes de estas ecuaciones y no en la estructura fun-

cional de las mismas. Para valores reales y muy pequeños de λ , $f_n(\lambda)$ varía linealmente con λ en tanto que para valores un poco más grandes aparece ya la estructura típica consistente en varias ramas separadas. El comportamiento de $f_n(\lambda)$ para valores mayores de λ depende en gran parte de las relaciones de magnitud que existan entre el tiempo de generación inmediata T_0 y los tiempos de relajamiento. El tiempo de relajamiento tiene por valor

$$t_{r_0} = \theta(\tau_t) = \int_{E_t}^{E_0} \frac{dE}{v \sum \xi E} \approx \frac{1_n(E_0/E_t)}{v \sum \xi}$$

y siendo $T_0 = \frac{1}{v_t \sum_{at}}$, en orden de magnitud será

$$\frac{t_r}{T_0} \sim \frac{v_t}{v} l_n \frac{E_0}{E_t} \frac{\sum_{at}}{\sum \xi}$$

Hemos dicho que la pila térmica se caracteriza por la condición $\frac{\sum_a}{\sum \xi} \ll 1$, cuya condición implica, según la ecuación anterior, que en esta pila será $t_{r_0} \ll T_0$. En una pila epitérmica, sin embargo, $\frac{\sum_a}{\sum \xi}$ no necesita ser muy pequeño y cabe pensar que llegara a ser del orden de uno. En tal caso sería $t_{r_0} \sim T_0$ de suerte que los tiempos de generación inmediata y de relajamiento entrarían en juego casi simultáneamente. En cualquier caso, por un argumento semejante al que fue empleado en el caso de la pila térmica se concluye que la condición de seguridad para el caso epitérmico es

$$0 < \frac{k_a}{k_{orf}} < \sum_i (l_{r_i} p_i \alpha_i + \int_{\tau_i}^{\tau_t} l_{r_i}(\tau) p_i(\tau) \alpha_i(\tau) \frac{v \sum_a}{D} d\tau) \quad (86)$$

Un análisis detallado del comportamiento de un reactor epitérmico sólo es posible cuando se conoce en detalle el curso de las secciones con la energía y sus valores relativos. Por lo pronto nos limitaremos a señalar dos características que se infieren directamente de las ecuaciones generales establecidas: la ecuación (65) muestra que, a igualdad de flujo térmico, la pila epitérmica desarrolla mas potencia que la pila térmica y I(118) muestra que el tamaño crítico de la primera es menor que el de esta última.

5:- Pila Rápida.

Supongamos ahora que la absorción de neutrones es tan intensa que éstos no llegan a establecer equilibrio térmico con el material de la pila. Podemos hacer $p = 0$, $n_t(rt) = 0$ en nuestras ecuaciones fundamentales I(44) obteniendo así el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de un reactor que trabaja tan solo con neutrones rápidos. Resulta de este modo,

$$\frac{1}{D} \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau, t)}{\partial t} = \Delta q'(\underline{r}, \tau, t) - \frac{\partial q'(\underline{r}, \tau, t)}{\partial \tau} - \int_0^{\tau} \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau', t) d\tau' + \sum_1 \frac{c_1(\underline{r}, t)}{T_1 p(\tau_1)} \delta(\tau - \tau_1) \quad (87a)$$

$$\frac{\partial c_1(\underline{r}, t)}{\partial t} = - \int_0^{\tau} k_1(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}, \tau', t) d\tau' - \frac{c_1(\underline{r}, t)}{T_1} \quad (87b)$$

que deben resolverse con las condiciones

$$A) \quad [q'(\underline{r}, \tau, t)]_{S'} = [c_1(\underline{r}, t)]_{S'} = 0$$

$$B) \quad q'(\underline{x} \tau 0) = Q'(\underline{x} \tau)$$

$$c_1(\underline{x} 0) = C_1(\underline{x}) \quad \text{dadas}$$

$$C) \quad q'(\underline{x} 0 t) = 0$$

Estas ecuaciones pueden resolverse por el mismo método que se siguió en la primera sección. Se encuentra el transformado de Laplace y se substituyen las $\bar{c}_1(\underline{x} \lambda)$ en la ecuación de los neutrones rápidos obteniéndose una expresión que es idéntica a (5) con $\bar{n}_t(\underline{x} \lambda) = 0$. Se efectúan luego las substituciones (6) y (7) obteniéndose para $u(\underline{x} \tau \lambda)$ una ecuación integrodiferencial que resulta de (9) haciendo $\bar{n}_t(\underline{x} \lambda) = 0$. Se emplea entonces el desarrollo (13) con el resultado de que $u_m(\tau \lambda)$, que también en este caso debe cumplir la condición (14a), debe ser una solución de la ecuación integral (15) con $\bar{n}_m(\lambda) = 0$. Resolviendo esta ecuación (para lo cual basta hacer $\bar{n}_m(\lambda) = 0$ en (21)) se obtiene

$$u_m(\tau \lambda) = \frac{J_m(\lambda)}{D(\kappa_m^2 \lambda)} h_m(\tau \lambda) + I_m(\tau \lambda) \quad (88)$$

en donde $J_m(\lambda)$, $D(\kappa_m^2 \lambda)$, $h_m(\tau \lambda)$ e $I_m(\tau \lambda)$ son las funciones definidas por (28), (22), (17) y (16) respectivamente.

La solución es ahora

$$\left. \begin{aligned} q'(\underline{x} \tau t) &= \sum_m S_m(\underline{x}) q_m(\tau t) \\ c_1(\underline{x} t) &= \sum_m S_m(\underline{x}) c_{1m}(t) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

con $q_m(\tau t)$ y $c_{1m}(t)$ dadas por (32).

Considerando el caso discutido en la sección 2 al que corresponden las condiciones iniciales (33), substituyendo (37) y (38) en (88) se obtiene

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{h_m(\tau\lambda)}{D(\kappa_m^2\lambda)} \quad (90)$$

en tanto que de (43) resulta

$$\bar{c}_{im}(\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{T_i k_{it} h_m(\tau\lambda)}{(1+\lambda T_i) D(\kappa_m^2\lambda)} \quad (91)$$

obteniéndose así

$$\left. \begin{aligned} q_m(\tau\lambda) &= \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{\lambda t} H_m(\tau\lambda)}{D(\kappa_m^2\lambda)} d\lambda \\ c_{im}(t) &= \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{T_i k_{it} e^{\lambda t} H_m(\tau\lambda)}{(1+\lambda T_i) D(\kappa_m^2\lambda)} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

que describen completamente la solución.

Se reconoce de inmediato que $H_m(\tau\lambda)$ es la misma función definida en (44a) y que $D(\kappa_m^2\lambda)$ es el valor particular de $\Delta_m(\lambda)$ en (44b) cuando $p = 0$. La ecuación de enhoras (45) se reduce ahora a

$$D(\kappa_m^2\lambda) = 0 \quad (93)$$

que puede escribirse bajo la forme

$$\int_0^{\tau t} d\tau \frac{v \Sigma_m}{D} \left\{ \int_0^{\tau} l_{f_{om}}(\tau'\tau) p_o(\tau'\tau) e^{-\lambda t_{ro}(\tau'\tau)} h_m(\tau'\tau) d\tau' + \right.$$

$$+ \left. \sum_{\tau_1 < \tau} l_{f_{im}}(\tau) p_1(\tau) e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} \frac{k_1(\tau)}{1 + \lambda T_1} \right\} = 1 \quad (94)$$

Como en este caso

$$k_{efm} = \int_0^t d\tau \frac{v \Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} l_{f_{om}}(\tau' \tau) p_0(\tau' \tau) k(\tau' \tau) d\tau' + \sum_{\tau_1 < \tau} l_{f_{im}}(\tau) p_1(\tau) k_1(\tau) \right\} \quad (95)$$

utilizando (83) se demuestra fácilmente que la reactividad tiene por valor

$$\rho_m = \frac{k_{em}}{k_{efm}} = \sum_i \frac{T_i}{\lambda + T_i} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_t} l_{f_{im}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau - \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \left\{ \int_0^{\tau} (e^{-\lambda t_{r0}(\tau' \tau)} - 1) l_{f_{om}}(\tau' \tau) p_0(\tau' \tau) \alpha_{m0}(\tau' \tau) d\tau' + \sum_{\tau_1 < \tau} (e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} - 1) l_{f_{im}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) \right\} \right\} \quad (96)$$

El comportamiento de la función $f_m(\lambda)$ que aparece en el segundo miembro de (96) para valores reales de λ , es bien distinto al de los casos anteriores. Si $|\lambda| \ll \frac{1}{T_1}$

$$f_m(\lambda) \sim \lambda \sum_i \int_{\tau_1}^{\tau_t} l_{f_{im}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{mi}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \quad (97a)$$

En la región en que $|\lambda| \sim \frac{1}{T_1}$ pero $|\lambda| \ll \frac{1}{t_{r1}}$

(88)

$$f_m(\lambda) \sim \sum_i \frac{T_i}{\lambda + T_i} \int_0^{\tau_i} l_{f_{12}}(\tau) p_i(\tau) u_{m1}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \quad (97b)$$

y en la zona en que $|\lambda| \gg \frac{1}{T_i}$ pero $|\lambda| \sim \frac{1}{t_{r1}}$

$$f_m(\lambda) \sim 1 - \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \int_0^{\tau} e^{-\lambda t_{r0}(\tau' \tau)} l_{f_{02}}(\tau' \tau) p_0(\tau' \tau) u_{m0}(\tau' \tau) d\tau' \quad (97c)$$

Para valores positivos de λ , $f_m(\lambda)$ varía entre 0 y 1 conforme λ varía entre 0 e ∞ . Para valores negativos de λ , $f_m(\lambda)$ muestra las típicas ramas separadas que corren de $-\infty$ a $+\infty$ de suerte que si $\rho_m > 0$ la pila tiene un período positivo y todos los restantes negativos, si $\rho_m = 0$ hay un período infinito correspondiente a la solución estacionaria en tanto que los restantes son negativos, si $\rho_m < 0$ todos los periodos son negativos.

Antes de concluir es conveniente hacer algunas consideraciones respecto a las limitaciones de la teoría desarrollada en este trabajo y en el que le precede. Es bien sabido que la teoría de la difusión no es válida en regiones del orden de tamaño de los caminos libres medios ni en regiones en que la absorción es muy intensa. Puesto que las dimensiones de una pila homogénea son del orden de la longitud característica $L = \frac{1}{\kappa_0}$, podemos establecer, como un criterio aproximado para juzgar la validez de las ecuaciones desarrolladas, las dos relaciones

$$\lambda_t \ll L \quad \text{ó} \quad \Sigma_t \gg \kappa_0 \quad (98)$$

y $\Sigma_a \ll \Sigma_m$

Ambas se cumplen bastante bien en las pilas térmicas. En ellas, por lo general Σ_t es del orden de uno, en tanto que κ_0 es del orden de 10^{-2} . Además, excepto en las bandas de resonancia, la sección de absorción es, por regla general, menor que la de dispersión. Podemos esperar que en tales casos la teoría describa bastante bien el comportamiento de los reactores. Sin embargo, conforme se procede a situaciones en las que los neutrones rápidos empiezan a tomar un papel importante, las dos condiciones (98) dejan de cumplirse y cabe esperar que la teoría muestre fallas cada vez más severas. Esto es particularmente cierto en pilas rápidas de dimensiones reducidas en las que la absorción juega un papel preponderante. Situaciones de este tipo deben ser analizadas con la teoría del transporte.

BIBLIOGRAFIA.

- Goodman, The Science and Engineering of Nuclear Power. Addison-Wesley Press, Cambridge, 1947.
- Soodack y Campbell, Elementary Pile Theory. John Wiley and Sons, New York, 1950.