

(1-10)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCRIPCION CAUSAL Y RELACIONES DE DISPERSION

Juan Manuel Lozano Mejia

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA

JUAN B. DE OYARZABAL

TESIS DOCTORAL

MEXICO 1960



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi esposa e hijos

*El autor agradece al Dr. Marcos Mosblansky
la valiosa ayuda que prestó a la realización
de este trabajo*

PREFACIO

Es bien sabido de la teoría cuántica de la dispersión, que hay varias maneras de obtener relaciones de dispersión para la matriz S cuando la interacción tiene alcance finito, mediante la imposición de la condición de causalidad expresada de un modo conveniente. En la primera parte de este trabajo se estudia una manera de obtener esas relaciones usando únicamente la condición inicial y un desarrollo en eigenfunciones, tanto en mecánica cuántica no relativista como en mecánica cuántica relativista.

Por otra parte es de interés ver como las propiedades analíticas de la matriz S se modifican cuando la interacción no se corta en cierto punto, sino que continúa hasta el infinito, tendiendo a cero asintóticamente para grandes distancias. La discusión se hace primero usando la condición de causalidad, que en el problema no relativista, que es el único que se estudia en la segunda parte de este trabajo, se puede formular diciendo que la función de onda asociada con cualquier paquete de onda inicial permanece acotada en todo tiempo. Como consecuencia se obtiene que ya no es la matriz S , sino una nueva función que se designará como función de dispersión, la que satisface las condiciones analíticas que implican relaciones de dispersión. Suponiendo que el dispersor es un potencial no cortado, se prueba también directamente las propiedades de la función de dispersión. La matriz S puede en este caso tener polos en la parte superior del plano complejo del momento, pero esos polos no tienen importancia en la descripción dependiente del tiempo del proceso de la dispersión, ya que en esta descripción temporal es la función de dispersión la -

que aparece, y no sólo la matriz S . Se introduce finalmente el concepto de función básica de interacción de Green asociada con cada uno de los polos de la función de dispersión, y mediante las propiedades asintóticas de dichas funciones se hace una discusión de la interpretación física de los polos de la función de dispersión. Se mencionan finalmente algunas posibles generalizaciones de las funciones básicas de interacción de Green a otro tipo de problemas.

INDICE

	Página
INTRODUCCION Y SUMARIO.	1
<u>SECCION I. Relaciones de dispersión para potenciales cortados</u>	9
<u>Capítulo 1. Caso no relativista.</u>	9
1.1 Planteamiento del problema	9
1.2 Obtención de las relaciones de dispersión	11
1.3 Determinación de la condición que anula a la integral $I_2(k,r)$	15
1.4 Relaciones de dispersión con la amplitud de dispersión	18
<u>Capítulo 2. Caso relativista. Ecuación de Klein-Gordon.</u>	20
2.1 Planteamiento del problema	20
2.2 Obtención de las relaciones de dispersión	24
2.3 Determinación de la condición que anula a la integral $I_1(k,r)$	29
2.4 Otra expresión para las relaciones de dispersión	32
<u>Capítulo 3. Caso relativista. Ecuación de Dirac.</u>	35
3.1 Planteamiento del problema	35
3.2 Obtención de las relaciones de dispersión	38
3.3 Determinación de la condición que anula a la integral $I_2(k,r)$	43
<u>Capítulo 4. Prueba directa de las relaciones de dispersión</u>	47

<u>SECCION II. Relaciones de dispersión para potenciales no cortados.</u>	50
<u>Capítulo 1. Descripción temporal de la dispersión, causalidad y relaciones de dispersión.</u>	50
<u>Capítulo 2. Propiedades de la función de dispersión.</u>	63
<u>Capítulo 3. Interpretación de los polos de la función de dispersión. Ejemplos.</u>	69
A) El potencial de Eckart.	71
B) El potencial de Bargmann.	73
C) Discusión General.	77
 <u>NOTAS FINALES</u>	 90
<u>Apéndice 1. La sección de dispersión para una partícula de Dirac.</u>	94
<u>Apéndice 2. La función de dispersión para el potencial de Eckart.</u>	101
<u>Apéndice 3. El potencial de Bargmann y las funciones de Jost.</u>	104
<u>Apéndice 4. La función de dispersión para el potencial de Bargmann</u>	110
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	 114

INTRODUCCION Y SUMARIO

El objeto de este trabajo es discutir, por un procedimiento relativamente simple, la dispersión de partículas por un potencial para establecer la conexión entre la condición de causalidad y las relaciones de dispersión.

Siguiendo una sugestión de Kramers ¹ y de Kronig ^{2,3}, varios autores han usado la condición de causalidad para discutir algunos problemas de dispersión ^{4,5}, y en particular para obtener relaciones de dispersión para el campo de Maxwell ^{6,7} y para partículas que obedecen las ecuaciones de Schrödinger ^{8,9}, de Klein-Gordon o de Dirac ¹⁰.

La condición de causalidad ha sido formulada de diferentes maneras por diferentes autores. Alguno de ellos ^{4,6,10} enuncian la llamada condición estricta de causalidad expresando simplemente que ninguna señal física se transmite con velocidad mayor que la velocidad de la luz en el vacío. Es claro que esta formulación de la condición de causalidad sólo es aplicable a teorías relativistas y que carece de significado en el caso de la ecuación de Schrödinger. Entonces si se quiere discutir el problema de la dispersión por un potencial, tanto en el caso no relativista como en el relativista, por un procedimiento análogo en ambos casos, es necesario formular la condición de causalidad de otra manera. Esta manera de formular la condición de causalidad, puesto que se aplicará al problema de la dispersión por un potencial, que por su estructura no es covariante, no será covariante, aunque la amplitud de dispersión en el caso relativista, sólo es, como ha sido probado por Moshinsky ¹¹.

La formulación de la condición de causalidad, que se usa en la primera sección de este trabajo, está relacionada con la condición inicial; más adelante se indicará el procedimiento que se sigue en esa sección para obtener relaciones de dispersión.

Las relaciones de dispersión son relaciones que expresan la parte real de la función de dispersión en la forma de una integral de la parte imaginaria de dicha función y viceversa; en otras palabras, la parte real y la parte imaginaria de la función de dispersión están ligadas por transformadas de Hilbert.

En los últimos años ha aparecido una serie de trabajos ¹²⁻¹⁴ en los que se estudian en la teoría cuántica del campo, las restricciones que la condición de causalidad impone en la matriz S ; aquí la condición de causalidad expresa que el conmutador (o anticonmutador) de dos variables del campo separadas espacialmente se anula. Esas -- restricciones se pueden poner como relaciones de dispersión. El interés que para la teoría cuántica del campo tienen las relaciones de dispersión, radica, en parte, en que estas relaciones dependen de la validez de principios muy generales como el de causalidad, y de suposiciones muy fundamentales como el de la localizabilidad de los campos y -- sus interacciones.

Como ha sido señalado por Lévy¹⁵, un examen del desarrollo histórico de la física teórica durante los últimos años, explica el interés actual en la teoría de las relaciones de dispersión y también el hecho de que esas relaciones, conocidas desde hace mucho tiempo en algunas ramas de la física clásica, tardarán mucho tiempo en ser incorporadas a la mecánica cuántica. Con el advenimiento de la teoría del -- campo, surgieron serias dificultades en la descripción causal detallada de la interacción, como es la descripción por medio de un hamiltoniano con el que se da el desarrollo de la función de onda en intervalos infinitesimales del tiempo, ya que no se conoce con seguridad dicho hamiltoniano, ni se dispone de un procedimiento completamente coherente para utilizar el hamiltoniano en la resolución de problemas físicos. -- Para evitar esas dificultades, Heisenberg^{16,17} propuso que se sustituyera el concepto de hamiltoniano por el concepto de matriz S que conecta el estado de un sistema en el tiempo $t=-\infty$ con el estado del sistema en el tiempo $t=+\infty$, sin dar una descripción del estado en los tiempos intermedios. Sin embargo, sólo fué posible calcular la matriz S -- utilizando un hamiltoniano y por tanto la dificultad subsiste. Ahora bien, la técnica de las relaciones de dispersión da la posibilidad de encontrar algunas características de la matriz S sin recurrir a ningún hamiltoniano particular de interacción. Las relaciones de dispersión constituyen entonces una de las técnicas de que se dispone para encontrar directamente algunas de las propiedades de la matriz S . Por tanto es importante tener una idea clara de la conexión entre las relaciones de dispersión para la matriz S y los principios generales como el de causalidad.

Por otra parte, como indica van Kampen ⁶, si la matriz S es el concepto fundamental en la descripción de los procesos físicos, tiene interés ver como están conectadas las propiedades de la matriz S con ciertas observables físicas; por ejemplo, entre la posición de los polos de la matriz S y la energía y la vida media de los estados quasi-estacionarios. De hecho es muy importante discutir el significado de los polos de la matriz S , ya que algunos de ellos contienen la información física sobre el resultado de la dispersión. Puede haber, en ciertos casos, polos redundantes de la matriz S . En la segunda sección de este trabajo se hace una discusión del significado de los polos. En este punto, el presente estudio está relacionado con los trabajos de Regge ^{13,19}, Nussenzveig ²⁰, Martin ²¹ y Beck, Nussenzveig ²².

Lo mencionado en los párrafos anteriores se refiere en su mayor parte al problema de las relaciones de dispersión en la teoría cuántica del campo, mientras que en este trabajo únicamente se estudian problemas de la teoría no cuantizada. Sin embargo, como señalan Knight y Toll ¹⁰, algunas características del problema de las relaciones de dispersión en el caso de la teoría con segunda cuantización, tienen su contrapartida en las teorías no cuantizadas y por tanto, el estudio de las relaciones de dispersión en estas teorías puede ser de interés para comprender mejor las dificultades del problema correspondiente en el caso de campos cuantizados. Para recalcar la importancia del estudio del problema de las relaciones de dispersión en teorías sin segunda cuantización, basta recordar que cuando en la teoría cuántica del campo se considera la presencia de una sola partícula ¹², el problema se reduce al caso de la teoría sin cuantizar, de modo que los resultados en esta teoría son casos particulares de la primera.

Como ha sido mencionado anteriormente, la condición de causalidad ha sido formulada de varias maneras diferentes. En la teoría cuántica del campo, parece ser necesario imponer la condición de causalidad como una restricción a los conmutadores (o anticonmutadores) de las variables del campo, para obtener relaciones de dispersión; este hecho ha llevado a varios autores ⁴⁻¹⁰ a usar en problemas no cuantizados, una condición de causalidad formulada de una manera adecuada al problema particular de que se trate. Así, para

el estudio de las relaciones de dispersión para el campo de Maxwell, o para las ecuaciones de Klein-Gordon o de Dirac, se ha usado la condición estricta de causalidad; como esta formulación no puede sostenerse en el caso de la ecuación de Schrödinger, debido a que en este caso no existe una velocidad máxima límite para la propagación de ondas, algunas veces se ha expresado la condición de causalidad en la forma en que fué introducida por Schützer y Tiommo²³, diciendo que no debe haber onda saliente antes de que la onda entrante llegue al dispersor. Esta manera de formular la condición de causalidad implica claramente que se supone que la onda entrante es rigurosamente cero hasta cierto momento, que es cuando empieza la interacción; dicho de otro modo, esta formulación sólo es aplicable a paquetes de ondas que en alguna región son nulos hasta cierto tiempo. Pero según señala van Kampen⁸ hay una seria objeción en este punto y es que en la mecánica cuántica de Schrödinger, no existen paquetes de ondas entrantes o salientes que sean rigurosamente cero hasta cierto tiempo. Para solventar esta dificultad, van Kampen propone enunciar la condición de causalidad en este caso en la siguiente forma: si el paquete de ondas inicialmente está normalizado de tal modo que para el tiempo $t = -\infty$ represente una partícula incidente, entonces la probabilidad total, en el tiempo $t = t_1$, de encontrar una partícula fuera de cualquier esfera de radio r , no puede ser mayor que la unidad.

Ahora bien, Khuri²⁴ y Khuri y Treiman²⁵ han obtenido relaciones de dispersión en los casos de Schrödinger y de Dirac respectivamente, sin usar, ni aún formular explícitamente, la condición de causalidad, sino que imponen ciertas restricciones sobre el potencial y siguen un trabajo de Jost y Pais²⁶ en el que se estudia la aplicación de la teoría de Fredholm de las ecuaciones integrales a los problemas de dispersión. También puede citarse un trabajo de Klein y Zemach²⁷ y uno de Faddeev²⁸ sobre el problema de las relaciones de dispersión para partículas de Schrödinger en el que tampoco usan la condición de causalidad, sino que imponen ciertas restricciones al potencial.

Cabe entonces preguntarse cual es el papel de la condición de causalidad en los problemas de las relaciones de dispersión en las teorías no cuantizadas, pues es posible obtener relaciones de dispersión usando la condición de causalidad y también no usando -

dicha condición, al menos en forma explícita. Sobre este punto es necesario mencionar que las relaciones de dispersión obtenidas por diferentes autores suelen diferir en su expresión y puede ser bastante difícil hacer una comparación de los resultados.

Para tratar de entender el papel de la condición de causalidad en este tipo de problemas, se puede observar que si bien en la teoría cuántica del campo dicha condición es necesaria para obtener relaciones de dispersión, en una teoría sin segunda cuantización, la condición de causalidad parece estar contenida en el formalismo de la teoría de la dispersión.

Puede entonces pensarse que en las diferentes formas de expresar la condición de causalidad, hay algo común a todas ellas y que ya está contenido en la teoría de la dispersión. Dicho de otro modo, parece haber cierto sentido de la noción de causalidad que está involucrado en el problema desde su misma formulación y que se manifiesta mediante las relaciones de dispersión. Las relaciones de dispersión aparecen, entonces, como una expresión de la noción de causalidad y es de interés investigar y poner en claro la manera en que la causalidad está contenida en las relaciones de dispersión. Un resultado de este trabajo aclara este punto. Las relaciones de dispersión indican, desde el punto de vista matemático, que cierta función, la que satisface las relaciones, tiene ciertas propiedades analíticas y estas propiedades permiten una descripción causal de la dispersión. En consecuencia, la noción de causalidad que aparece involucrada en la teoría de la dispersión es la de descripción causal. Por descripción causal de la dispersión se entiende la posibilidad de exhibir la conexión que hay, en el curso del tiempo, entre la forma inicial y la forma final de la función de onda, o sea encontrar la función de onda dependiente del tiempo, de modo que el comportamiento de los transitorios sea correcto, esto es, que tiendan a anularse cuando el tiempo tiende a infinito. Desde un punto de vista cualitativo, es muy clara la noción de descripción causal, pues si se tiene en cierto momento un paquete de onda que incide sobre un potencial, de ningún modo podría esperarse que el paquete saliente creciera indefinidamente en el curso del tiempo, sino todo lo contrario, esto es, que decrezca y tienda a desaparecer cuando el tiempo tiende a infinito. Este concepto de comportamiento causal es claramente el mismo tan-

to en el caso de dispersión no relativista como en el caso relativista y desde luego no es una condición que se añade a la teoría, sino que ya está contenido en el formalismo de la teoría.

Ahora es conveniente indicar el método que se ha seguido en este trabajo para estudiar el problema de la dispersión.

Por una parte, es posible obtener la función de onda dependiente del tiempo como un desarrollo en términos de las eigenfunciones estacionarias de la ecuación de onda; estas eigenfunciones contienen la matriz S en su expresión, de modo que si se conoce la forma inicial para $t=0$ de la onda, entonces al igualar la forma inicial de la onda con la expresión de la función de onda dependiente del tiempo para el tiempo $t=0$, se obtiene una relación que contiene a la matriz S . Dicha relación, se puede expresar como una relación de dispersión.

En consecuencia, las relaciones de dispersión se obtienen simplemente de las condiciones iniciales y la condición de que las eigenfunciones estacionarias formen un sistema completo. En la primera sección de este trabajo se usa este procedimiento para derivar relaciones de dispersión en el caso de partículas que obedezcan las ecuaciones de Schrödinger, de Klein-Gordon o de Dirac, suponiendo que el potencial dispersor tiene simetría esférica y es de alcance finito.

También se muestra que las relaciones de dispersión simplemente expresan que la función que cumple esas relaciones tiene ciertas propiedades analíticas y cierto comportamiento al infinito en el plano complejo del momento. Para estudiar el comportamiento al infinito de la función que satisface las relaciones de dispersión, y que es la matriz $S(k)$ multiplicada por $\exp(2ika)$, donde k es el momento y "a" es el alcance del potencial, se usa la aproximación de Born. De paso queda claro que no se pueden obtener relaciones de dispersión del tipo que en este trabajo se obtienen, para la matriz S sola.

En la segunda parte del trabajo se estudia la dispersión de ondas de Schrödinger por un potencial con simetría esférica de corto alcance pero no necesariamente finito.

En este caso no se emplea la condición de completax de las eigenfunciones, sino que se usa la transformada de Laplace y el teorema de inversión de la transformada para obtener la función de onda dependiente del tiempo. Ahora bien, la función transformada de Laplace de la función dependiente del tiempo, y que se designará -- por función de dispersión, satisface una ecuación diferencial que contiene la forma inicial del paquete ondas y cuya solución puede expresarse en términos de las funciones de Jost ²⁹, que representan ondas entrantes o salientes al infinito. A continuación, usando la condición de causalidad en el sentido que ha sido mencionado anteriormente, o sea, como una descripción causal de la dispersión, y algunas propiedades de simetría de la función de dispersión, se puede probar que dicha función tiene un comportamiento analítico y una forma asintótica que permite derivar relaciones de dispersión para la función de dispersión. Por otra parte, se muestra que las propiedades de la función de dispersión se pueden obtener directamente de las propiedades de las funciones de Jost, y también se hace ver que éstas permiten una descripción causal del proceso, confirmando-se entonces la existencia de la conexión entre las relaciones de dispersión que se encuentran en este caso se reducen a las obtenidas en la primera sección para un potencial cortado.

En la última parte del trabajo se ilustran los resultados obtenidos mediante la discusión de dos ejemplos en los que es posible construir explícitamente las funciones de Jost y la matriz S del problema, haciéndose además un estudio sobre la interpretación física de los polos de la matriz S. Para dar esa interpretación se obtiene la solución completa del proceso introduciendo una función asociada a cada uno de los polos de la matriz S y que se designa como función básica de interacción de Green (B.I.G.), la cual se expresa en términos de integrales de error y se pueden obtener, de las propiedades las funciones B.I.G., las restricciones que deben imponerse a los polos de la función de dispersión, así como la interpretación de cada uno de ellos, ya sea como estados ligados, o como estados quasi-estacionarios o como términos de difusión. En conclusión toda la información física sobre la interacción está contenida en los polos de la función de dispersión.

Finalmente es conveniente mencionar que, aunque no está incluido en este trabajo, es posible generalizar el concepto de función básica de interacción de Green a problemas relativistas ³⁰.

En resumen el plan de trabajo es el siguiente: la condición de completitud de las eigenfunciones estacionarias y las condiciones iniciales implican relaciones de dispersión (Sección I, capítulos 1, 2, 3), las cuales son una mera expresión de las propiedades analíticas y asintóticas de la función de dispersión (Sección I, capítulo 4). La condición de comportamiento causal de la función de onda impone cierto comportamiento analítico y por tanto unas relaciones de dispersión para la función de dispersión (Sección II, capítulo 1). Las propiedades analíticas de la función de dispersión (Sección II, capítulo 2), el cual es ilustrado por dos ejemplos -- (Sección II, capítulo 3), que permiten ver con claridad la interpretación física de los polos de la matrix S y en general de todo el proceso de la dispersión.

SECCION I. Relaciones de dispersión para potenciales cortados.

Capítulo 1. Caso no relativista.

1.1 Planteamiento del problema. - En este capítulo se estudiará la dispersión de partículas de Schrodinger por un centro dispersor - con simetría esférica y de alcance finito " a " por un procedimiento que permite una derivación matemáticamente muy simple de las relaciones de dispersión, y que básicamente consiste en el uso de una transformada generalizada de Hankel, que ha sido estudiada por Moshinsky³.

Las relaciones de dispersión se obtendrán haciendo uso de la condición inicial, esto es, en la forma de la función de onda dependiente del tiempo, se hace $t=0$ y se iguala a la forma que el paquete de onda tenía en $t=0$. Este punto de vista tiene una diferencia interesante respecto al procedimiento usual de obtener relaciones de dispersión, en el sentido de que no se utiliza el hecho de que hay una velocidad límite para la propagación de señales físicas, y por tanto este procedimiento es aplicable tanto al caso no relativista como al relativista.

A todo lo largo de este trabajo se usará el sistema natural de unidades $\hbar=c=1$. Además se pondrá la masa de la partícula incidente $m=1$.

El potencial dispersor es

$$V(r) = \begin{cases} V(r) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (1.1)$$

La parte radial de la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo es para el momento angular ℓ ,

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \psi_\ell(r,t) + V(r) \psi_\ell(r,t) = i \frac{\partial \psi_\ell(r,t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

De la ecuación (1.2) se sigue inmediatamente que las eigenfunciones estacionarias $u_\ell(k,r)$ correspondientes a la energía $E = \frac{1}{2} k^2$, satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_l(k, r)}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2V(r) \right] U_l(k, r) = 0 \quad (1.3)$$

Ahora bien, fuera del potencial dispersor, o sea, para $r > a$, las eigenfunciones $U_l(k, r)$ tienen la conocida forma

$$U_l(k, r) = \frac{1}{2} \left[h_l^-(kr) + S_l(k) h_l^+(kr) \right], \quad r > a \quad (1.4)$$

donde $h_l^\pm(kr)$ son las funciones de Hankel esféricas y $S_l(k)$ es la matriz S para el momento angular l .

Se supondrá ahora que inicialmente, se tenía una onda plana y que en el instante $t = 0$ se introduce el potencial dispersor. Entonces, la parte radial de la componente l esté dada, para $t = 0$, por la ecuación

$$\psi_l(r, 0) = j_l(kr), \quad (1.5)$$

y en general, para $t > 0$, se tiene

$$\psi_l(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty a_l(k, \kappa) U_l(k, r) e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa, \quad (1.6)$$

donde

$$a_l(k, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty j_l(kr) U_l^*(\kappa, r) r^2 dr \quad (1.7)$$

Este desarrollo está justificado por el hecho de que las eigenfunciones $U_l(k, r)$ forman un conjunto ortonormal, ya que según se muestra en otro lugar³²,

$$\int_0^\infty U_l^*(\kappa, r) U_l(\kappa', r) r^2 dr = \frac{\pi}{2\kappa^2} \delta(\kappa - \kappa') \quad (1.8)$$

1.2 Obtención de las relaciones de dispersión.- En este punto es fácil visualizar el procedimiento que conduce a obtener las relaciones de dispersión. Las eigenfunciones $u_\ell(k, r)$ se conocen explícitamente para $r > a$, en términos de la función $S_\ell(k)$, de modo que los coeficientes del desarrollo $A_\ell(k, \kappa)$ se obtienen en términos de $S_\ell(k)$; una vez encontrados dichos coeficientes, se introducen en la fórmula del desarrollo (1.6). Por último haciendo $t = 0$ y usando la condición inicial (1.5), se obtiene una relación que esencialmente es una relación de dispersión. La idea es entonces trabajar el problema de la dispersión como un problema de condiciones iniciales.

En primer lugar es necesario evaluar los coeficientes $A_\ell(k, \kappa)$. En vista de que la integral (1.7) es de 0 a ∞ , o sea que comprende valores de $r < a$, no es posible usar la forma (1.4) de las funciones $u_\ell(k, r)$ para todo el intervalo de integración. Entonces se puede proceder como sigue:

Se define una función $v_\ell(k, r)$ que tenga para toda r la forma que la función $u_\ell(k, r)$ tiene para $r > a$, esto es,

$$v_\ell(k, r) = \frac{1}{2} \left[h_\ell^-(kr) + S_\ell(k) h_\ell^+(kr) \right], \quad 0 \leq r < \infty \quad (1.9)$$

Es evidente que la función $v_\ell(k, r)$ satisface la ecuación (1.3) si se pone $V(r) = 0$. En términos de la función $v_\ell(k, r)$, se pueden poner los coeficientes $A_\ell(k, \kappa)$ en la forma

$$A_\ell(k, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_0^\infty j_\ell(kr) v_\ell^*(k, r) r^2 dr + \int_0^\infty j_\ell(kr) [u_\ell^*(k, r) - v_\ell^*(k, r)] r^2 dr \right\} \quad (1.10)$$

Pero como $u_\ell(k, r) = v_\ell(k, r)$ para $r > a$, la segunda integral en la ecuación anterior se reduce a una integral entre 0 y a . El cálculo de la primera integral es fácil usando la conocida fórmula³³.

$$\int_0^a f_\ell(kr) g_\ell(kr) r^2 dr = \frac{r^2}{k^2 - \kappa^2} \left[\kappa f_{\ell-1}(kr) g_{\ell-1}(kr) - k f_{\ell-1}(kr) g_\ell(kr) \right], \quad (1.11)$$

donde f_ℓ y g_ℓ son combinaciones de funciones de Bessel y de Neumann, y las formas asintóticas³⁴

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!} \\ h_\ell^\pm(kr) &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \mp i \frac{(2\ell-1)!!}{(kr)^{\ell+1}} \\ j_\ell(kr) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2}\ell)}{kr} \\ h_\ell^\pm(kr) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} (\mp i)^\ell \frac{e^{\pm ikr}}{\pm ikr} \end{aligned} \quad (1.12)$$

así como la fórmula

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} = i\pi \delta(k) \quad (1.13)$$

Los coeficientes $a_\ell(k, \kappa)$ quedan entonces,

$$\begin{aligned} a_\ell(k, \kappa) = & \frac{\sqrt{2\pi}}{4k\kappa} \left\{ [1 + S_\ell^*(\kappa)] \delta(\kappa - k) + (-1)^{\ell+1} [1 + S_\ell^*(\kappa)] \delta(\kappa + k) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i[1 - S_\ell^*(\kappa)]}{\kappa(\kappa^2 - k^2)} \left(\frac{k}{\kappa}\right)^\ell + I_1(k, \kappa) \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde I_1 es la segunda integral que aparece en la ecuación (30). - Obviamente $\delta(\kappa + k) = 0$. Sustituyendo ahora la expresión (1.14) en la fórmula del desarrollo (1.6), se tiene, si el cálculo se restringe a valores de $r > a$, esto es, fuera del potencial dispersor,

$$\begin{aligned} \psi_\ell(r, t) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{4} [1 + S_\ell^*(k)] \frac{1}{2} [h_\ell^-(kr) + S_\ell(k) h_\ell^+(kr)] e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} \\ & + \frac{1}{2\pi} P \int_0^\infty \frac{i[1 - S_\ell^*(\kappa)]}{\kappa^2 - k^2} \left(\frac{k}{\kappa}\right)^\ell [h_\ell^-(\kappa r) + S_\ell(\kappa) h_\ell^+(\kappa r)] e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t} \kappa d\kappa \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty I_1(k, \kappa) U_\ell(\kappa, r) e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa, \quad r > a, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde la P delante de la integral significa valor principal.

Se tiene aquí la expresión para la función de onda dependiente del tiempo, que se obtiene como resultado de introducir en una onda plana, un centro dispersor en el instante $t=0$. Como la forma inicial de la función de onda es conocida por la fórmula (1.5), se tiene, haciendo $t=0$ en la ecuación (1.15), y usando la bien conocida propiedad de la S de ser unitaria, o sea

$$S_\rho(k) S_\rho^*(k) = 1 \quad (1.16)$$

que la ecuación (1.15) se reduce a

$$\begin{aligned} j_\rho(kr) = & \frac{1}{4} [h_\rho^-(kr) + h_\rho^+(kr) + S_\rho(k)h_\rho^+(kr) + S_\rho^*(k)h_\rho^-(kr)] \\ & + \frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty \frac{h_\rho^+(kr)[S_\rho(k)-1] - h_\rho^-(kr)[S_\rho^*(k)-1]}{k^2 - k'^2} \left(\frac{k}{k'}\right)^\rho k dk \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty I_1(k, r) u_\rho(k, r) k^2 dk, \quad r > a \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ahora bien, como se demostrará en el siguiente inciso, $r > 2a$, la última integral en la ecuación (1.17), y que se denotará por $I_1(k, r)$, se anula; entonces se puede poner simplemente, sumando y restando $h_\rho^-(kr) + h_\rho^+(kr)$ a la expresión entre llaves $\{ \}$ en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} j_\rho(kr) = & j_\rho(kr) + \frac{1}{4} \{ [S_\rho(k)-1]h_\rho^+(kr) + [S_\rho^*(k)-1]h_\rho^-(kr) \} \\ & + \frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty \frac{[S_\rho(k)-1]h_\rho^+(kr) - [S_\rho^*(k)-1]h_\rho^-(kr)}{k^2 - k'^2} \left(\frac{k}{k'}\right)^\rho k dk, \quad r > 2a \end{aligned} \quad (1.18)$$

Entonces se tiene

$$[S_\rho(k)-1]h_\rho^+(kr) + [S_\rho^*(k)-1]h_\rho^-(kr) = -\frac{2i}{\pi} P \int_0^\infty \frac{[S_\rho(k)-1]h_\rho^+(kr) - [S_\rho^*(k)-1]h_\rho^-(kr)}{k^2 - k'^2} \left(\frac{k}{k'}\right)^\rho k dk, \quad r > 2a \quad (1.19)$$

Ahora bien, es conocido³³ que

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\rho+1}{r}\right) h_\rho^\pm(kr) = k h_{\rho-1}^\pm(kr), \quad (1.20)$$

de modo que aplicando el operador $\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) \dots \left(\frac{d}{dr} + \frac{\rho+1}{r}\right)$ a ambos miembros

bros de la ecuación (1.19), se tiene que el orden de las funciones de Hankel se reduce hasta llegar al orden cero. Por otra parte $h_0^{\pm}(z) = \frac{e^{\pm iz}}{iz}$, así que de la ecuación (1.19) se obtiene

$$[S_e(k)-1]e^{ikr} - [S_e^*(k)-1]e^{-ikr} = -\frac{2ki}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[S_e(k)-1]e^{ikr} + [S_e^*(k)-1]e^{-ikr}}{k^2 - k'^2} dk, \quad r \gg 2a \quad (1.21)$$

o sea

$$\text{Im}[S_e(k)-1]e^{ikr} = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re}[S_e(k)-1]e^{ikr}}{k^2 - k'^2} dk, \quad r \gg 2a \quad (1.22)$$

Por último, derivando respecto a r ambos miembros de la ecuación (1.21), se tiene

$$\text{Re}[S_e(k)-1]e^{ikr} = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}[S_e(k)-1]e^{ikr}}{k^2 - k'^2} k dk, \quad r \gg 2a \quad (1.23)$$

Las ecuaciones (1.22) y (1.23) son las relaciones de dispersión. También se pueden poner en la forma más simple

$$\text{Im} S_e(k) e^{zika} = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re} S_e(k) e^{zika}}{k^2 - k'^2} dk \quad (1.24)$$

$$\text{Re} S_e(k) e^{zika} = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} S_e(k) e^{zika}}{k^2 - k'^2} k dk \quad (1.25)$$

en donde se puso $r=2a$ y además se integró la parte $e^{ikr} + e^{-ikr}$ de la integral de la ecuación (1.21).

Una observación de cierto interés es que la ecuación (1.25) se obtiene de la ecuación (1.24) derivando esta respecto "a" como variable, pero también es posible derivar la ecuación (1.25) para obtener otra relación entre la parte imaginaria y la parte real de la expresión $S_e(k)e^{zika}$, y que es

$$\text{Im} S_e(k) e^{zika} = -\frac{2}{\pi k} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re} S_e(k) e^{zika}}{k^2 - k'^2} k^2 dk \quad (1.26)$$

Ahora bien, comparando las ecuaciones (1.24) y (1.26) se tiene que

$$k P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} S_2(k) e^{z_1 k a}}{k^2 - k^2} dk = \frac{1}{k} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} S_2(k) e^{z_1 k a}}{k^2 - k^2} k^2 dk ,$$

o sea

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} S_2(k) e^{z_1 k a}}{k^2 - k^2} (k^2 - k^2) dk = \int_0^{\infty} \operatorname{Re} S_2(k) e^{z_1 k a} dk = 0 ;$$

esta ecuación se puede poner inmediatamente como

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_2(k) e^{z_1 k a} dk = 0 . \quad (1.27)$$

Esta última ecuación, que se obtiene simplemente de las relaciones de dispersión, es, según se probará a continuación, la condición que hace que la última integral de la ecuación (1.17) se anule y que permitió obtener las relaciones de dispersión. Esto es, en cierta forma una comprobación de la autoconsistencia del método empleado en el presente estudio.

1.3 Determinación de la condición que anula a la integral $I_2(k, r)$.

El problema ahora es encontrar en que condiciones la última integral de la ecuación (1.17) es nula y en consecuencia, en que condiciones son válidas las relaciones de dispersión obtenidas.

Dicha integral es, salvo factores numéricos que no interesan,

$$\begin{aligned} I_2(k, r) &= \int_0^{\infty} I_1(k, \kappa) u_2(\kappa, r) \kappa^2 d\kappa \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} j_2(k\rho) [u_2^*(\kappa, \rho) - v_2^*(\kappa, \rho)] \rho^2 d\rho \right\} u_2(\kappa, r) \kappa^2 d\kappa \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ahora bien, intercambiando el orden de las integraciones, se puede poner

$$I_2(k, r) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} [u_2^*(\kappa, \rho) - v_2^*(\kappa, \rho)] u_2(\kappa, r) \kappa^2 d\kappa \right\} \rho^2 j_2(k\rho) d\rho . \quad (1.29)$$

La dificultad de la evaluación de la integral $I_1(k, \kappa)$ proviene de que no se conoce la forma explícita de las eigenfunciones $U_\ell(\kappa, r)$ para $r < a$, pero si se encuentra en que condiciones se anula la expresión entre llaves en la integral (1.29), se obtiene que aunque no se conozca la integral I_1 , su influencia en la integral I_2 y por tanto en la relación (1.17) que es la que conduce a las relaciones de dispersión, es nula.

llamando $I_3(p, r)$ a

$$I_3(p, r) = \int_0^\infty [U_\ell^*(\kappa, p) - v_\ell^*(\kappa, p)] U_\ell(\kappa, r) \kappa^2 d\kappa, \quad (1.30)$$

se tiene que por la definición (1.9) de la función $v_\ell(\kappa, p)$,

$$I_3(p, r) = 0 \quad \text{si } p > a \quad (1.31)$$

Recordando que la relación (1.17) es válida para $r > a$, se puede sustituir en la ecuación (1.30) la función $U_\ell(\kappa, r)$ por su forma explícita (1.4), entonces

$$I_3(p, r) = \int_0^\infty U_\ell^*(\kappa, p) U_\ell(\kappa, r) \kappa^2 d\kappa - \int_0^\infty v_\ell^*(\kappa, p) U_\ell(\kappa, r) \kappa^2 d\kappa = \frac{\pi}{2\rho^2} \delta(p-r) - \frac{1}{4} \left\{ \int_0^\infty [h_\ell^+(\kappa p) h_\ell^-(\kappa r) + h_\ell^-(\kappa p) h_\ell^+(\kappa r)] \kappa^2 d\kappa + \int_0^\infty [S_\ell^*(\kappa) h_\ell^+(\kappa p) h_\ell^+(\kappa r) + S_\ell^*(\kappa) h_\ell^-(\kappa p) h_\ell^-(\kappa r)] \kappa^2 d\kappa \right\} \quad (1.32)$$

Pero

$$\frac{1}{4} [h_\ell^+(\kappa p) h_\ell^-(\kappa r) + h_\ell^-(\kappa p) h_\ell^+(\kappa r)] = j_\ell(\kappa p) j_\ell(\kappa r) - \frac{1}{4} [h_\ell^+(\kappa p) h_\ell^+(\kappa r) + h_\ell^-(\kappa p) h_\ell^-(\kappa r)],$$

de modo que la ecuación (1.32) queda, tomando en cuenta la completitud de las funciones de Bessel,

$$I_3(p, r) = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left\{ [S_\ell^*(\kappa) - 1] h_\ell^+(\kappa p) h_\ell^+(\kappa r) + [S_\ell^*(\kappa) - 1] h_\ell^-(\kappa p) h_\ell^-(\kappa r) \right\} \kappa^2 d\kappa$$

y como $S_\ell^*(\kappa) = S(-\kappa)$ y $h_\ell^-(\kappa p) = h_\ell^+(\kappa p)$, es posible poner la integral en la forma

$$I_3(p, r) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k) - 1] h_2^+(kp) h_2^+(kr) k^2 dk \quad (1.33)$$

Ahora bien es sabido³⁵ que si no hay estados ligados, la función $S_2(k)$ es analítica en el semiplano superior del plano complejo del momento k , de modo que el contorno de integración puede deformarse a una semicircunferencia infinita en la parte superior de dicho plano, esto es,

$$I_3(p, r) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k) - 1] h_2^+(kp) h_2^+(kr) k^2 dk$$

Como la integración se hace para valores muy grandes de la variable k , se pueden usar las formas asintóticas de la función de Hankel y se tiene entonces

$$I_3(p, r) = \frac{(-1)^2}{4pr} \int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k) - 1] e^{ik(r+p)} dk = \frac{(-1)^2}{4pr} \int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k) - 1] e^{ik(p+r)} dk,$$

y por la ecuación (1.31), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k) - 1] e^{ik(p+r)} dk = 0 \quad \text{si } p, r \geq a, \quad (1.34)$$

esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k) - 1] e^{2ika} dk = 0 \quad (1.35)$$

Este resultado indica que si $p+r \geq 2a$, $I_3(p, r) = 0$, de modo que si se toma $r \geq 2a$, se tiene que $I_3(p, r) = 0$ para todo valor de p . Por tanto la integral $I_2(k, r)$ dada por (1.29) es nula si $r \geq 2a$ y la validez de las relaciones de dispersión (1.24) y (1.25) queda establecida.

1.4 Relaciones de dispersión con la amplitud de dispersión.-

En el inciso 1.2 se obtuvieron relaciones de dispersión para la expresión $S_e(k)e^{zika}$ y para $[S_e(k)-1]e^{zika}$, y es conveniente obtener ahora una relación en la que aparezca explícitamente la amplitud de dispersión que, como es sabido está relacionada con la función de dispersión $S(k)$ por la fórmula

$$f(k, \theta) = \frac{1}{zika} \sum_{\ell} (2\ell+1) [S_e(k)-1] P_{\ell}(\cos \theta), \quad (1.36)$$

donde θ es el ángulo de dispersión.

Tomando la relación (1.22) para $r=2a$, multiplicándola por $(2\ell+1)P_{\ell}(\cos \theta)$ y sumando sobre los momentos angulares ℓ , se tiene

$$\text{Im} \sum_{\ell} (2\ell+1) [S_e(k)-1] e^{zika} P_{\ell}(\cos \theta) = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re} \sum_{\ell} (2\ell+1) [S_e(k)-1] e^{zika} P_{\ell}(\cos \theta)}{k^2 - k'^2} dk' \quad (1.37)$$

y por la ecuación (1.36) se tiene, entonces

$$2k \text{Re} f(k, \theta) e^{zika} = \frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} 2k f(k', \theta) e^{zika'}}{k^2 - k'^2} k' dk',$$

o más brevemente,

$$\text{Re} f(k, \theta) e^{zika} = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} f(k', \theta) e^{zika'}}{k^2 - k'^2} k' dk', \quad (1.38)$$

que es una relación de dispersión para la amplitud de dispersión.

Procediendo de una manera análoga con la relación de dispersión (1.23), se obtiene

$$\text{Im} f(k, \theta) e^{zika} = -\frac{2}{\pi k} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re} f(k', \theta) e^{zika'}}{k^2 - k'^2} k'^2 dk' \quad (1.39)$$

que es otra relación de dispersión para la amplitud de dispersión.

Pero por otra parte, por el conocido teorema óptico³⁶, se tiene que

$$\text{Im} f(k, 0) = \frac{k}{4\pi} \sigma(k), \quad (1.40)$$

que es una relación entre la sección total y la amplitud de dispersión hacia adelante. En consecuencia, las relaciones de dispersión (1.38) y (1.39), se pueden poner como relaciones entre la sección total y la parte real de la amplitud de dispersión hacia adelante -- si se hace $\theta = 0$. Estas relaciones toman una forma mucho más simple si además se supone que el alcance del potencial se puede tomar como nulo, esto es, si la interacción se considera puntual. En tal caso se tiene

$$\operatorname{Re} f(k, 0) = \frac{1}{2\pi^2} P \int_0^\infty \frac{\sigma(k)}{k^2 - k^2} k^2 dk \quad (1.41)$$

$$y \quad \sigma(k) = -\frac{8}{k^2} P \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} f(k, 0)}{k^2 - k^2} k^2 dk \quad (1.42)$$

Estas relaciones son, en principio, relaciones entre cantidades observables exclusivamente.

Lo que hasta aquí se ha hecho es, en resumen, tratar el problema de la dispersión como un problema de condiciones iniciales, y entonces, del hecho de que las eigenfunciones estacionarias forman un conjunto completo de funciones y usando la condición inicial se siguen las relaciones de dispersión. Este resultado debe completarse con lo que se discutirá en el capítulo 4 y con los resultados de la sección II para entender su relación con la descripción causal de la dispersión, ya que en la derivación presentada aquí no se ha usado ni formulado la condición de causalidad; sin embargo, en otro trabajo³², usando también la condición inicial y desarrollando la función de onda dependiente del tiempo en términos de las eigenfunciones estacionarias, se ha obtenido una descripción en el curso del tiempo de la dispersión, que es causal en el sentido de dar el comportamiento correcto de los transitorios, lo que indica la existencia de una conexión entre la noción de causalidad y las relaciones de dispersión. En la segunda sección de este trabajo se aclara completamente este punto.

Capítulo 2. Caso relativista. Ecuación de Klein-Gordon.

2.1 Planteamiento del problema.- El procedimiento que se usará para obtener relaciones de dispersión para ecuaciones de onda relativistas es esencialmente el mismo que se empleó en el caso no relativista, con las diferencias inherentes al hecho de que en el caso relativista se tiene la posibilidad de tener energías positivas y negativas. En particular, en la ecuación de onda de Klein-Gordon se tiene una ligera complicación matemática debido a la presencia de una derivada de segundo orden respecto al tiempo, y que hace que la condición de ortonormalidad de las eigenfunciones no sea tan simple como en los casos de la ecuación de Schrödinger o de la de Dirac. Esa complicación dificulta un poco la evaluación de los coeficientes del desarrollo de la función de onda dependiente del tiempo en términos de las eigenfunciones estacionarias.

Una observación de interés es que con el método que se usará se puede ver con claridad que la condición inicial es, en cierto sentido, un caso particular de la condición de causalidad, la que en el caso de ecuaciones relativistas si tiene pleno sentido como un límite a la velocidad de propagación de señales físicas.

En esta discusión se considerará que el potencial dispersor actúa en la forma de la componente temporal de un cuadrivector o como un escalar. Hay una diferencia importante entre estas dos posibilidades, pues si el potencial es la componente temporal de un cuadrivector, la función S asociada al problema depende no sólo del momento k , sino también del signo de la energía, mientras que en el segundo caso la función S es independiente de dicho signo, como puede verse directamente de la ecuación. Esta diferencia se manifiesta en las relaciones de dispersión que se obtienen y son mucho más simples si se tiene solamente un potencial escalar.

Se tratará entonces la ecuación de Klein-Gordon con dos potenciales $V_1(r)$ y $V_2(r)$ sujetos a la condición (1.1), de los tipos mencionados. Entonces, la parte radial de la ecuación de Klein-Gordon dependiente del tiempo, para momento angular ℓ y masa $m=1$ es

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} - 1 \right] \psi_l(r, t) = -i \left[i \frac{\partial}{\partial t} + V_1(r) \right]^2 \psi_l(r, t) + V_2(r) \psi_l(r, t), \quad (2.1)$$

donde $V_1(r)$ es el potencial que es cuarta componente de vector y $V_2(r)$ es el potencial escalar.

De la ecuación (2.1) se sigue que las eigenfunciones estacionarias correspondientes a la energía $\varepsilon = \sqrt{k^2 + 1}$ satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_l(k, r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} U_l(k, r) - U_l(k, r) = - \left[\varepsilon + V_1(r) \right]^2 U_l(k, r) + V_2(r) U_l(k, r) \quad (2.2)$$

En esta ecuación se ve claramente que debido al término

$$\left[\varepsilon + V_1(r) \right]^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon V_1(r) + V_1^2(r),$$

si $V_1(r)$ no es idénticamente cero, las eigenfunciones $U_l(k, r)$ dependen del signo de la energía ε .

Ahora bien, la forma de las eigenfunciones fuera de la región de dispersión, esto es, para $r > a$ es

$$U_l(k, r) = A \left[h_l^-(kr) + S_l(k, \varepsilon) h_l^+(kr) \right], \quad r > a \quad (2.3)$$

de modo que si $V_1(r) \neq 0$ se tiene $S_l(k, \varepsilon) \neq S_l(k, -\varepsilon)$ y si $V_1(r) \equiv 0$, las eigenfunciones no dependen del signo de la energía y por tanto

$$S_l(k, \varepsilon) = S_l(k, -\varepsilon) \quad \text{si } V_1(r) \equiv 0. \quad (2.4)$$

Por brevedad se introduce la siguiente notación

$$S_{\ell \pm}(\kappa) = S_{\ell}(\kappa, \pm \varepsilon)$$

(2.5)

$$U_{\ell \pm}(\kappa, r) = A \left[h_{\ell}^{-}(\kappa r) + S_{\ell \pm}(\kappa) h_{\ell}^{+}(\kappa r) \right]$$

Es necesario ahora encontrar el factor de normalización A . Procediendo según el método usual, o sea multiplicando la ecuación (2.2) por $U_{\ell}^{*}(\kappa', r)$, la ecuación conjugada de la (2.2) escrita para el momento κ' por $U_{\ell}(\kappa, r)$ y restando, e integrando respecto a r se obtiene

$$\int_0^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon') [\varepsilon + \varepsilon' + 2V_{\ell}(r)] U_{\ell}^{*}(\kappa', r) U_{\ell}(\kappa, r) r^2 dr$$

$$= - \left[r U_{\ell}^{*}(\kappa', r) \frac{dr U_{\ell}(\kappa, r)}{dr} - r U_{\ell}(\kappa, r) \frac{dr U_{\ell}^{*}(\kappa', r)}{dr} \right]_0^{\infty}, \quad (2.6)$$

donde ε' es la energía correspondiente al momento κ' .

Suponiendo que las eigenfunciones $U_{\ell}(\kappa, r)$ tienen un comportamiento regular en el origen, basta evaluar el miembro derecho de la ecuación anterior para $r \rightarrow \infty$ usando la ecuación (2.3) y las propiedades asintóticas de las funciones de Hankel dadas por la forma (1.12), así como la fórmula (1.13) y la condición de unitariedad de la función S . El resultado es el siguiente:

$$\int_0^{\infty} [\varepsilon + \varepsilon' + 2V_{\ell}(r)] U_{\ell}^{*}(\kappa', r) U_{\ell}(\kappa, r) r^2 dr$$

$$= \frac{A^2}{\kappa \kappa'} 2\pi (\varepsilon + \varepsilon') \delta(\kappa' - \kappa) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{signe} \varepsilon \neq \text{signe} \varepsilon' \\ \frac{4\pi \varepsilon}{\kappa^2} A^2 \delta(\kappa' - \kappa) & \text{si } \text{signe} \varepsilon = \text{signe} \varepsilon' \end{cases} \quad (2.7)$$

El factor de normalización es entonces

$$A = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon}} \quad (2.8)$$



y las eigenfunciones normalizadas son, para $r > a$,

$$u_{\ell}(k, r) = \frac{k}{\sqrt{\pi \epsilon}} \frac{1}{2} \left[h_{\ell}^{-}(kr) + S_{\ell}(k, \epsilon) h_{\ell}^{+}(kr) \right] \quad r > a \quad (2.9)$$

Se supondrá ahora que inicialmente se tenía una onda plana y que en el instante $t = 0$ se introduce el dispersor, de modo que la función de onda para $t = 0$ es, para el momento angular ℓ ,

$$\psi_{\ell}(r, 0) = j_{\ell}(kr), \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_{\ell}(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -i E j_{\ell}(k, r),$$

donde $E^2 = k^2 + 1$

En general, para $t > 0$ se tiene

$$\psi_{\ell}(r, t) = \int_0^{\infty} a_{\ell+}(k, \epsilon) u_{\ell+}(k, r) e^{-i \epsilon t} dk + \int_0^{\infty} a_{\ell-}(k, \epsilon) u_{\ell-}(k, r) e^{i \epsilon t} dk. \quad (2.11)$$

Las condiciones (2.10) se pueden poner, por la ecuación (2.11), como

$$\int_0^{\infty} a_{\ell+}(k, \epsilon) u_{\ell+}(k, r) dk + \int_0^{\infty} a_{\ell-}(k, \epsilon) u_{\ell-}(k, r) dk = j_{\ell}(kr) \quad (2.12)$$

$$\int_0^{\infty} (-i \epsilon) a_{\ell+}(k, \epsilon) u_{\ell+}(k, r) dk + \int_0^{\infty} i \epsilon a_{\ell-}(k, \epsilon) u_{\ell-}(k, r) dk = -i E j_{\ell}(kr)$$

Ahora se construye la expresión

$$\begin{aligned} [\epsilon' + 2V_1(r)] j_{\ell}(kr) - E j_{\ell}(kr) &= \int_0^{\infty} [\epsilon' - \epsilon + 2V_1(r)] a_{\ell+}(k, \epsilon) u_{\ell+}(k, r) dk \\ &+ \int_0^{\infty} [\epsilon' + \epsilon + 2V_1(r)] a_{\ell-}(k, \epsilon) u_{\ell-}(k, r) dk. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $U_{\ell-}^*(\kappa', r)r^2$, integrando respecto a r , intercambiando el orden de las integra- ciones y usando la condición de ortonormalidad (2.7), queda simple- mente

$$a_{\ell-}(k, \kappa') = \int_0^{\infty} [\varepsilon' - E + 2V_{\ell}(r)] j_{\ell}(kr) U_{\ell-}^*(\kappa', r) r^2 dr. \quad ($$

Por un procedimiento análogo, construyendo la expresión $[\varepsilon' + 2V_{\ell}(r)] j_{\ell}(kr) + E j_{\ell}(kr)$, se puede encontrar $a_{\ell+}(k, \kappa)$.

En resumen se tiene

$$a_{\ell\pm}(k, \kappa) = \int_0^{\infty} [\varepsilon \pm E + 2V_{\ell}(r)] j_{\ell}(kr) U_{\ell\pm}^*(\kappa, r) r^2 dr. \quad (2.14)$$

2.2 Obtención de las relaciones de dispersión.— La ecuación (2.14) es la ecuación correspondiente a la fórmula (1.7) que se ob- tuvo para el caso de la ecuación de Schrödinger, y a partir de es- te punto, el procedimiento que conduce a las relaciones de disper- sión se puede seguir por analogía. En primer lugar, en la evalua- ción explícita de los coeficientes del desarrollo $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$, se presenta la dificultad de que las eigenfunciones $U_{\ell\pm}(\kappa, r)$ sólo se conocen para $r > a$, mientras que la integral que es necesario calcular se extiende a distancias menores que "a". Entonces, por analogía con el caso de Schrödinger, se definen unas funciones - $V_{\ell\pm}(\kappa, r)$ que tengan para toda r la forma que las - eigenfunciones $U_{\ell\pm}(\kappa, r)$ tienen para $r > a$, esto es,

$$V_{\ell\pm}(\kappa, r) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{1}{2} \left[h_{\ell}^-(kr) + S_{\ell\pm}(\kappa) h_{\ell}^+(kr) \right] \quad 0 \leq r < \infty \quad (2.15)$$

Los coeficientes $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$ se pueden poner en términos de las funciones $V_{\ell\pm}(\kappa, r)$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_{\ell\pm}(k, \kappa) &= (\varepsilon \pm E) \int_0^{\infty} j_{\ell}(kr) u_{\ell\pm}^*(k, r) r^2 dr \\
&+ \int_0^{\infty} 2V_1(r) j_{\ell}(kr) u_{\ell\pm}^*(k, r) r^2 dr \\
&= (\varepsilon \pm E) \int_0^{\infty} j_{\ell}(kr) v_{\ell\pm}^*(k, r) r^2 dr \\
&+ (\varepsilon \pm E) \int_0^{\infty} j_{\ell}(kr) [u_{\ell\pm}^*(k, r) - v_{\ell\pm}^*(k, r)] r^2 dr \\
&+ \int_0^{\infty} 2V_1(r) j_{\ell}(kr) u_{\ell\pm}^*(k, r) r^2 dr \quad (2.16)
\end{aligned}$$

La primera integral de la ecuación anterior es esencialmente la misma que ha sido calculada en el caso de Schrödinger, y a la suma de las otras dos se le llamará simplemente $I_{\ell\pm}(k, \kappa)$. Al igual que en el caso no relativista, $I_{\ell\pm}(k, \kappa)$ no dará contribución a la función de onda en ciertas condiciones. Tomando en cuenta el resultado (1.14) en la discusión del caso de Schrödinger, con las diferencias debidas a los factores de normalización, se tiene

$$\begin{aligned}
a_{\ell\pm}(k, \kappa) &= \frac{\varepsilon \pm E}{4k} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left\{ [1 + S_{\ell\pm}^*(\kappa)] \delta(\kappa - k) + (-1)^{\ell+1} [1 + S_{\ell\pm}^*(k)] \delta(\kappa + k) \right\} \\
&+ \frac{\varepsilon \pm E}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{i[1 - S_{\ell\pm}^*(\kappa)]}{\kappa^2 - k^2} \left(\frac{k}{\kappa}\right)^{\ell} + I_{\ell\pm}(k, \kappa) \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$ en la función de onda (2.11), y usando la expresión (2.9) para las eigenfunciones $u_{\ell\pm}(k, r)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \psi_{\ell}(r, t) &= \frac{1}{4} [1 + S_{\ell+}(k)] [h_{\ell}^{-}(kr) + S_{\ell+}(k) h_{\ell}^{+}(kr)] e^{-iEt} \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{i}{k^2 - k'^2} \left(\frac{k}{k'}\right)^{\ell} [1 - S_{\ell+}^{*}(k)] [h_{\ell}^{-}(kr) + S_{\ell+}(k) h_{\ell}^{+}(kr)] e^{-i\varepsilon t} k dk \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{i[1 - S_{\ell-}^{*}(k)]}{k^2 - k'^2} [h_{\ell}^{-}(kr) + S_{\ell-}(k) h_{\ell}^{+}(kr)] \left(\frac{k}{k'}\right)^{\ell} e^{i\varepsilon t} k dk \\
 &+ \int_0^{\infty} \mathbb{I}_{1+}(k, r) u_{\ell+}(k, r) e^{-i\varepsilon t} dk + \int_0^{\infty} \mathbb{I}_{1-}(k, r) u_{\ell-}(k, r) e^{i\varepsilon t} dk \quad r > a \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

En la segunda integral no se ha puesto el valor principal porque en realidad no hay polos, ya que $(1 - \frac{E}{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon - E}{\varepsilon}$ y $k^2 - k'^2 = \varepsilon^2 - E^2 = (\varepsilon - E)(\varepsilon + E)$.

Como se demostrará más adelante, las últimas dos integrales, - cuya suma se representará simplemente por $\mathbb{I}_2(k, r)$, se anulan si $r \geq 2a$ de modo que restringiéndose a esos valores de r , la función de onda se puede poner

$$\begin{aligned}
 \psi_{\ell}(r, t) &= j_{\ell}(kr) e^{-iEt} + \frac{1}{4} \left\{ [S_{\ell+}(k) - 1] h_{\ell}^{+}(kr) + [S_{\ell+}^{*}(k) - 1] h_{\ell}^{-}(kr) \right\} e^{-i\varepsilon t} \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{i \left\{ [S_{\ell+}(k) - 1] h_{\ell}^{+}(kr) - [S_{\ell+}^{*}(k) - 1] h_{\ell}^{-}(kr) \right\}}{k^2 - k'^2} \left(\frac{k}{k'}\right)^{\ell} e^{-i\varepsilon t} k dk \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{i \left\{ [S_{\ell-}(k) - 1] h_{\ell}^{+}(kr) - [S_{\ell-}^{*}(k) - 1] h_{\ell}^{-}(kr) \right\}}{k^2 - k'^2} \left(\frac{k}{k'}\right)^{\ell} e^{i\varepsilon t} k dk \quad (2.19) \\
 & \quad r > 2a
 \end{aligned}$$

En este punto, se puede imponer la condición inicial y obtener las relaciones de dispersión, pero es ilustrativo ver como la condición inicial está relacionada con la condición de causalidad, la cual impone que en el punto situado a la distancia r , no debe haber onda dispersa hasta que haya pasado un tiempo $t = r$ desde que se

tione una onda plana establecida hasta el instante $t = 0$ en el que se introduce el dispersor, no debe haber onda dispersa antes del tiempo $t = r$, entonces se tiene que la función de onda es

$$\psi_e(r, t) = j_e(kr) e^{-iEt} \quad t < r \quad (2.20)$$

Por tanto, de la ecuación (2.19) se sigue que los términos que dan la onda dispersa se anulan por $t < r$, esto es,

$$\begin{aligned} & \left\{ [S_{e+}(k) - 1] h_e^+(kr) + [S_{e+}^*(k) - 1] h_e^-(kr) \right\} e^{-iEt} \\ &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{i \left\{ [S_{e+}(k) - 1] h_e^+(kr) - [S_{e+}^*(k) - 1] h_e^-(kr) \right\} \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^l e^{-i\epsilon t}}{k^2 - \varepsilon^2} k dk \\ & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{E}{\varepsilon}\right) \frac{i \left\{ [S_{e-}(k) - 1] h_e^+(kr) - [S_{e-}^*(k) - 1] h_e^-(kr) \right\} \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^l e^{i\epsilon t}}{k^2 - \varepsilon^2} k dk \quad (2.21) \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el operador $\left(\frac{d}{dr} - \frac{2}{r}\right) \dots \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r}\right)$ a ambos miembros de esta ecuación, se reduce el orden de las funciones de Hankel y se obtiene, usando la forma de las funciones $h_0^{\pm}(kr)$,

$$\begin{aligned} \left\{ \text{Im} [S_{e+}(k) - 1] e^{ikr} \right\} e^{-iEt} &= -\frac{k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\left\{ \text{Re} [S_{e+}(k) - 1] e^{ikr} \right\} e^{-i\epsilon t}}{k^2 - \varepsilon^2} \left(1 + \frac{E}{\varepsilon}\right) dk \\ -\frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left\{ \text{Re} [S_{e-}(k) - 1] e^{ikr} \right\} e^{i\epsilon t}}{k^2 - \varepsilon^2} \left(1 - \frac{E}{\varepsilon}\right) dk & \quad (2.22) \end{aligned}$$

Esta relación es válida para tiempos $t < r$ y fuera del dispersor. Tiene una forma parecida a la relación de dispersión obtenida para el caso no relativista, pero es una relación que depende del tiempo a través de unas exponenciales. Esto es el resultado -- que se sigue de la imposición de la condición de causalidad. Ahora bien, puesto que la relación anterior vale para tiempos $t < r$, en

particular vale para $t = 0$, o sea para un caso particular, pero la condición en $t = 0$ es precisamente la condición inicial, que aparece como un caso particular de la condición de causalidad. Entonces, haciendo $t = 0$ en la ecuación (2.22) y tomando $r = 2a$ se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[S_{e+}(k)-1]e^{zika} &= -\frac{k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[S_{e+}(k)-1]e^{zika}}{k^2 - k'^2} \left(1 + \frac{E}{\epsilon}\right) dk \\ &- \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[S_{e-}(k)-1]e^{zika}}{k^2 - k'^2} \left(1 - \frac{E}{\epsilon}\right) dk \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ahora bien, esta relación se puede obtener directamente de la condición inicial sin mencionar y hasta sin formular la condición de causalidad.

Si se supone ahora que la interacción es sólo de tipo escalar, esto es, $V_i(r) \equiv 0$, se sigue de la ecuación (2.4) que $S_{e+}(k) = S_{e-}(k) = S_e(k)$ y la relación anterior se reduce a

$$\operatorname{Im}[S_e(k)-1]e^{zika} = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[S_e(k)-1]e^{zika}}{k^2 - k'^2} dk, \quad (2.24)$$

que es la misma relación de dispersión que se obtuvo en el caso de Schrödinger. Tomando la derivada respecto a "a" como variable se obtiene la otra relación de dispersión.

Una observación interesante es que para obtener estas relaciones sólo se usó la primera condición inicial (2.10) y podría pensarse que la condición inicial para la derivada $\frac{\partial \psi_2(r,t)}{\partial t}$, que está dada en la segunda ecuación (2.10), daría lugar a otro par de relaciones de dispersión. En el caso de que se tenga interacción del tipo de cuarta componente de cuadrivector, se obtienen en efecto -- otras relaciones de dispersión ligeramente distintas, pues en vez de los factores $\left(1 + \frac{E}{\epsilon}\right)$ y $\left(1 - \frac{E}{\epsilon}\right)$ en la ecuación (2.23), aparecen los factores $\left(1 + \frac{\epsilon}{E}\right)$ y $\left(1 - \frac{\epsilon}{E}\right)$, pero si la interacción es únicamente escalar, se obtiene exactamente la relación de dispersión (2.24).

2.3 Determinación de la condición que anula a $I_2(k, r)$.-

Ahora es necesario determinar las condiciones en que $I_2(k, r)$ se anula, ya que esas condiciones determinan la validez de las relaciones de dispersión encontradas. El procedimiento que se seguirá es muy semejante al que se siguió en la discusión del caso no relativista.

Las integrales $I_2(k, r)$ son, para el tiempo $t=0$,

$$I_2(k, r) = \int_0^{\infty} \bar{I}_{1+}(k, \kappa) U_{\ell+}(k, r) d\kappa + \int_0^{\infty} \bar{I}_{1-}(k, \kappa) U_{\ell-}(k, r) d\kappa \quad (2.25)$$

Llamando $\bar{I}_{2+}(k, r)$ y $\bar{I}_{2-}(k, r)$ respectivamente a las dos integrales anteriores, se tiene, por la ecuación (2.16), que contiene las definiciones de $\bar{I}_{1\pm}(k, \kappa)$,

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2+}(k, r) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[(\varepsilon + E) [U_{\ell+}^*(k, p) - V_{\ell+}^*(k, p)] + 2V_1(p) U_{\ell+}^*(k, p) \right] j_{\ell}(kp) p^2 dp \right\} \\ \times U_{\ell+}(k, r) d\kappa \end{aligned} \quad (2.26)$$

Intercambiando el orden de las integraciones, esta ecuación se puede poner

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2+}(k, r) = \int_0^{\infty} p^2 j_{\ell}(kp) dp \int_0^{\infty} \left\{ (\varepsilon + E) [U_{\ell+}^*(k, p) - V_{\ell+}^*(k, p)] + 2V_1(p) U_{\ell+}^*(k, p) \right\} \\ \times U_{\ell+}(k, r) d\kappa \end{aligned} \quad (2.28)$$

Una expresión análoga se obtiene para $\bar{I}_{2-}(k, r)$.

Ahora se designará por $\bar{I}_{3\pm}(p, r)$ a la integral

$$\bar{I}_{3\pm}(p, r) = \int_0^{\infty} \left\{ (\varepsilon + E) [U_{\ell\pm}^*(k, p) - V_{\ell\pm}^*(k, p)] + 2V_1(p) U_{\ell\pm}^*(k, p) \right\} U_{\ell\pm}(k, r) d\kappa \quad (2.29)$$

Pero de la fórmula del desarrollo (2.11), de la fórmula de los coeficientes (2.14) de dicho desarrollo y de la condición inicial (2.10), se sigue que

$$j_{\ell}(kr) = \int_0^{\infty} U_{\ell+}(k,r) dk \int_0^{\infty} [\varepsilon + E + 2V_+(p)] j_{\ell}(kp) U_{\ell+}^*(kp) p^2 dp \\ + \int_0^{\infty} U_{\ell-}(k,r) dk \int_0^{\infty} [\varepsilon - E + 2V_-(p)] j_{\ell}(kp) U_{\ell-}^*(kp) p^2 dp,$$

intercambiando el orden de las integraciones, se tiene

$$j_{\ell}(kr) = \int_0^{\infty} j_{\ell}(kp) p^2 dp \int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon + E + 2V_+(p)] U_{\ell+}^*(k,p) U_{\ell+}(k,r) \right. \\ \left. + [\varepsilon - E + 2V_-(p)] U_{\ell-}^*(k,p) U_{\ell-}(k,r) \right\} dk,$$

por tanto se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon + E + 2V_+(p)] U_{\ell+}^*(k,p) U_{\ell+}(k,r) \right. \\ \left. + [\varepsilon - E + 2V_-(p)] U_{\ell-}^*(k,p) U_{\ell-}(k,r) \right\} dk = \frac{\delta(r-p)}{p^2}, \quad (2.30)$$

que es la condición de cerradura para las eigenfunciones de la ecuación de Klein-Gordon.

Ahora bien,

$$I_2 = I_{2+}(k,r) + I_{2-}(k,r) \\ = \int_0^{\infty} [I_{3+}(p,r) + I_{3-}(p,r)] j_{\ell}(kp) p^2 dp \quad (2.31)$$

La dificultad de evaluar la integral $I_2(k,r)$ se debe a que la integral (2.31) comprende valores de $p < a$ y por la definición (2.29) de las integrales $I_{3\pm}(p,r)$ se tiene que para encontrar $I_{3\pm}(p,r)$ para $p < a$ sería necesario conocer las eigenfunciones $U_{\ell\pm}(k,p)$ para $p < a$ y estas sólo se conocen si $p > a$. Sin embargo se probará que si $r > 2a$, entonces $I_{3+}(p,r) + I_{3-}(p,r)$ es nula para toda p .

En primer lugar, por la definición de las funciones $U_{\ell\pm}(k, p)$ dada en la ecuación (2.15) se tiene que, por la ecuación (2.29),

$$I_{3\pm}(p, r) = 0 \quad \text{si } p > a \quad (2.32)$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} I_{3+}(p, r) + I_{3-}(p, r) &= \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon + E + 2V_1(p)] U_{\ell+}^*(k, p) U_{\ell+}(k, r) + [\varepsilon - E + 2V_1(p)] U_{\ell-}^*(k, p) U_{\ell-}(k, r) \right\} dk \\ &- \int_0^{\infty} \left\{ (\varepsilon + E) U_{\ell+}^*(k, p) U_{\ell+}(k, r) + (\varepsilon - E) U_{\ell-}^*(k, p) U_{\ell-}(k, r) \right\} dk \end{aligned} \quad (2.33)$$

La primera integral es conocida por la ecuación (2.30); queda entonces por evaluar la segunda integral. Para esto se supondrá que $r > a$, de modo de poder utilizar la forma (2.9) para las eigenfunciones $U_{\ell}(k, r)$; usando además la definición (2.9) de las funciones $U_{\ell}(k, p)$, se tiene

$$\begin{aligned} I_{3+}(p, r) + I_{3-}(p, r) &= \frac{\delta(r-p)}{p^2} + \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{E}{\varepsilon}\right) [h_{\ell}^+(kp) + S_{\ell+}^*(k) h_{\ell}^-(kp)] [h_{\ell}^-(kr) + S_{\ell+}(k) h_{\ell}^+(kr)] k^2 dk \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{E}{\varepsilon}\right) [h_{\ell}^+(kp) + S_{\ell-}^*(k) h_{\ell}^-(kp)] [h_{\ell}^-(kr) + S_{\ell-}(k) h_{\ell}^+(kr)] k^2 dk \\ &= \frac{\delta(r-p)}{p^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_{\ell}(kp) j_{\ell}(kr) k^2 dk \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{E}{\varepsilon} \left\{ [S_{\ell+}(k) - S_{\ell-}(k)] h_{\ell}^+(kp) h_{\ell}^+(kr) + [S_{\ell+}^*(k) - S_{\ell-}^*(k)] h_{\ell}^-(kp) h_{\ell}^-(kr) \right\} k^2 dk \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [S_{\ell+}(k) - 1 + S_{\ell-}(k) - 1] h_{\ell}^+(kp) h_{\ell}^+(kr) + [S_{\ell+}^*(k) - 1 + S_{\ell-}^*(k) - 1] h_{\ell}^-(kp) h_{\ell}^-(kr) \right\} k^2 dk \end{aligned} \quad (2.34)$$

y por la completez de las funciones de Bessel, y aprovechando el hecho de que $S_{\pm}^*(k) = S_{\pm}^*(-k)$ y que $h_{\pm}^*(-kp) = h_{\pm}^+(kp)$, se puede poner

$$I_{3+}(p, r) + I_{3-}(p, r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_{\pm+}(k) - 1 + S_{\pm-}(k) - 1] h_{\pm}^+(kp) h_{\pm}^+(kr) k^2 dk$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{\epsilon} [S_{\pm+}(k) - S_{\pm-}(k)] h_{\pm}^+(kp) h_{\pm}^+(kr) k^2 dk, \quad r > a \quad (2.35)$$

Ahora, por el procedimiento de deformar el contorno que se usó en la discusión del problema no relativista, se puede ver que la suma $I_{3+}(p, r) + I_{3-}(p, r)$, que se anula si $p > a$, se anula para toda p si $r \geq 2a$, de modo que queda establecida la condición que, por la ecuación (2.31), anula la integral $I_2(k, r)$ y que establece las relaciones de dispersión obtenidas.

2.4 Otra expresión para las relaciones de dispersión. - La relación de dispersión en el caso de interacción puramente escalar, dada en la ecuación (2.24) es una forma bastante simple, pero en el caso en que la interacción pueda ser también del tipo de la componente temporal de cuadrivector, la relación de dispersión está dada por la ecuación (2.23) que no tiene una forma tan sencilla, entonces es conveniente expresar esa relación en una forma más simple. Esto es posible haciendo un cambio de variable y poniendo la ecuación (2.23) como una integral sobre un cierto contorno.

En primer lugar, del hecho de que $S_{\pm+}(-k) = S_{\pm+}^*(k)$, se sigue que la ecuación (2.23) se puede poner como

$$i \left\{ [S_{\pm+}(k) - 1] e^{2ika} - [S_{\pm+}(-k) - 1] e^{-2ika} \right\} \frac{\pi}{k} =$$

$$= p \int_0^{\infty} \frac{[S_{\pm+}(k) - 1] e^{2ika} + [S_{\pm+}(-k) - 1] e^{-2ika}}{k^2 - k'^2} \left(1 + \frac{E}{\epsilon}\right) dk$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{[S_{\pm-}(k) - 1] e^{2ika} + [S_{\pm-}(-k) - 1] e^{-2ika}}{k^2 - k'^2} \left(1 - \frac{E}{\epsilon}\right) dk \quad (2.36)$$

Ahora bien, el miembro izquierdo es

$$- \left\{ \int_0^{\infty} \frac{[S_{\pm+}(k) - 1] e^{2ika}}{k^2 - k'^2} \left(1 + \frac{E}{\epsilon}\right) dk + \int_{-k}^k \frac{[S_{\pm+}(k) - 1] e^{2ika}}{k^2 - k'^2} \left(1 + \frac{E}{\epsilon}\right) dk \right\}$$

por tanto la ecuación (2.36) se puede poner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[S_{e+}(k)-1]e^{2ika}}{k^2 - k^2} \left(1 + \frac{E}{\varepsilon}\right) dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[S_{e-}(k)-1]e^{ika}}{k^2 - k^2} \left(1 - \frac{E}{\varepsilon}\right) dk = 0 \quad (2.37)$$

Siguiendo una sugerencia de Moshinsky³⁰, se puede hacer en la primera integral el cambio de variable

$$\zeta = k + \varepsilon \quad (2.38)$$

y llamando

$$z = k + E \quad (2.39)$$

se tiene que

$$k = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1}) \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \quad (2.40)$$

además los límites de la integral se convierten en $(0, \infty)$ para la ζ , de modo que la integral queda

$$\int_0^{\infty} 2 \frac{[S_e(\zeta)-1]e^{ia(\zeta-\zeta^{-1})}}{(\zeta-z)(\zeta-z^{-1})} d\zeta$$

Si en la segunda integral se hace el cambio $\zeta = k - \varepsilon$, se tiene que esa integral queda

$$\int_{-\infty}^0 2 \frac{[S_e(\zeta)-1]e^{ia(\zeta-\zeta^{-1})}}{(\zeta-z)(\zeta-z^{-1})} d\zeta$$

Entonces la ecuación (2.37) queda en la forma reducida

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_e(\zeta)-1}{(\zeta-z)(\zeta-z^{-1})} e^{ia(\zeta-\zeta^{-1})} d\zeta = 0 \quad (2.41)$$

En este capítulo se hizo una generalización al caso relativista de partículas que obedezcan la ecuación de Klein-Gordon, del método que se empleó en el caso de partículas de Schrödinger para obtener relaciones de dispersión. Como ya se indicó, en el caso relativista podría formularse una condición estricta de causalidad, pero es suficiente atacar el problema como un problema de condiciones iniciales para obtener relaciones de dispersión. También se indicó co-

no la condición inicial es un caso particular de la condición estricta de causalidad. Este estudio podría completarse haciendo una descripción dinámica de la dispersión, del mismo tipo de la que se hace en la sección IX de este trabajo para partículas de Schrödinger y que exhibe la conexión entre las relaciones de dispersión y la noción de descripción causal.

Capítulo 3. Caso relativista. Ecuación de Dirac.

3.1 Planteamiento del problema. - Se discutirá en este capítulo el problema de obtener relaciones de dispersión para la ecuación de onda relativista de Dirac por el mismo procedimiento que ha servido para establecer relaciones de dispersión tanto en el caso no relativista con la ecuación de Schrödinger, como en el caso relativista con la ecuación de Klein-Gordon. En el caso de la ecuación de Dirac, surge la complicación de tener que trabajar con espinores, pero por otra parte, hay una simplificación con respecto al caso de Klein-Gordon debido a que la ecuación de Dirac es de primer orden.

Se tratará entonces la ecuación de Dirac con un potencial sujeto a la condición (1.1). En unidades naturales, la ecuación de Dirac con masa $m=1$ para un potencial central es³⁷

$$\left[-\underline{\alpha} \cdot \underline{p} - \beta + V(r) \right] \psi(r, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t), \quad (3.1)$$

$$\text{donde } \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

y $\psi(r, t)$ es el espinor dependiente del tiempo.

Ahora bien, se supondrá en este análisis, que se tiene inicialmente una onda plana y que en el instante $t=0$ se introduce el potencial dispersor, de modo que para $t=0$ se tiene, desarrollando la onda plana de energía $E = \sqrt{k^2+1}$ en ondas parciales, como se muestra en el apéndice 1,

$$\psi(r, 0) = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} i^{j-\frac{1}{2}} 2\sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{ik}{E+1} j_{j+\frac{1}{2}}(kr) y_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j-\frac{1}{2}}(kr) y_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \frac{-ik}{E+1} j_{j-\frac{1}{2}}(kr) y_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j+\frac{1}{2}}(kr) y_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\} \quad (3.3)$$

donde

$$y_{j, \ell, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \sum_{m_\ell} \sum_{m_s} \langle \ell \frac{1}{2} m_\ell m_s | j \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell m_\ell} X_{\frac{1}{2} m_s} \quad (3.3a)$$

son los armónicos esféricos espinoriales

Si se pone

$$j_{j+s}(k, r) = \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}+s} \frac{ik}{E+1} j_{j-s}(kr) y_{j, j-s, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j+s}(kr) y_{j, j+s, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

la ecuación (3.3) se puede poner simplemente como

$$\psi(r, 0) = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} i^{j-1-s} j_{j+s}(k, r) \quad (3.5)$$

Tomando ahora sólo un término particular del desarrollo, o sea tomando una j y una s fijas, y llamando l a la suma $j+s$, se puede poner por simplicidad la condición inicial, del mismo modo como se procedió con los dos casos anteriores, como

$$\psi_{j,s}(r, 0) = j_{j+s}(k, r) = j_l(k, r) \quad (3.6)$$

El estudio se hará tomando, para concretar, $s = -\frac{1}{2}$ de modo que la condición inicial dada por la ecuación (3.6) queda en la forma

$$\psi_{j,s}(r, 0) = j_l(k, r) = \begin{pmatrix} \frac{ik}{E+1} j_{l+1}(kr) y_{j, l+1, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_l(kr) y_{j, l, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Ahora bien, las eigenfunciones estacionarias correspondientes a la energía $\varepsilon = \sqrt{k^2+1}$, se pueden poner, para $r > a$, en la forma

$$u_{\varepsilon \pm}(k, r) = \frac{A}{2} \left[h_{\varepsilon \pm}^-(k, r) + S_{\varepsilon}(k) h_{\varepsilon \pm}^+(k, r) \right], \quad r > a \quad (3.8)$$

donde los espinores $h_{\varepsilon \pm}^-(k, r)$ y $h_{\varepsilon \pm}^+(k, r)$ están dados, para energías positivas y negativas, por

$$h_{\varepsilon \pm}^{\pm}(k, r) = \begin{pmatrix} \frac{ik}{E+1} h_{\varepsilon \pm}^{\pm}(kr) y_{j, l+1, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ h_{\varepsilon \pm}^{\pm}(kr) y_{j, l, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{para } \varepsilon > 0 \quad (3.9)$$

y

$$h_{\ell}^{\pm}(k, r) = \begin{pmatrix} h_{\ell+1}^{\pm}(kr) y_{j, \ell+1, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{i\kappa}{\varepsilon+1} h_{\ell}^{\pm}(kr) y_{j, \ell, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{para } \varepsilon < 0 \quad (3.10)$$

Ahora debe procederse del mismo modo que se procedió en el caso de Klein-Gordon. En primer lugar, hay que determinar el factor de normalización A , luego se deben determinar los coeficientes del desarrollo de la función de onda dependiente del tiempo en términos de las eigenfunciones estacionarias y finalmente, mediante el uso de la condición inicial, se obtienen las relaciones de dispersión.

Entonces, suponiendo que las eigenfunciones $U_{\ell\pm}(k, r)$ tienen un comportamiento adecuado en el origen, y tomando en cuenta la unitariedad de la función S y la ortonormalidad de los armónicos esféricos espinoriales, se obtiene que

$$\int d\Omega \int_0^{\infty} U_{\ell\pm}(k', r)^{\dagger} U_{\ell\pm}(k, r) r^2 dr = A^2 \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right] \frac{\pi}{2\kappa^2} \delta(k-k') \delta_{\pm, \pm} \quad (3.11)$$

donde $\delta_{\pm, \pm}$ significa $\delta_{+,+} = \delta_{-,-} = 1$; $\delta_{+,-} = \delta_{-,+} = 0$

En consecuencia el factor de normalización es

$$A = \kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

Ahora se puede construir la función de onda dependiente del tiempo para en la siguiente forma:

$$\psi_{\ell}(r, t) = \int_0^{\infty} U_{\ell+}(k, r) a_{\ell+}(k, \kappa) e^{-i\kappa t} + \int_0^{\infty} U_{\ell-}(k, r) a_{\ell-}(k, \kappa) e^{i\kappa t} dk \quad (3.13)$$

Tomando la ecuación anterior para $t=0$, multiplicando por $U_{\ell\pm}(k, r)^{\dagger} r^2$ a la izquierda, integrando respecto a r , intercambiando el orden de las integraciones y tomando en cuenta la ortonormalidad de las eigenfunciones $U_{\ell\pm}(k, r)$, se tiene

$$a_{\ell\pm}(k, \kappa) = \int d\Omega \int_0^{\infty} U_{\ell\pm}(k, r)^{\dagger} \psi_{\ell}(k, r) r^2 dr \quad (3.14)$$

Nótese la analogía entre la ecuación (3.14), que da los coeficientes del desarrollo de la función de onda de Dirac, y la ecuación (1.7), que da los coeficientes del desarrollo para el caso de Schrodinger.

3.2 Obtención de las relaciones de dispersión.- En este caso, igual que en los dos casos anteriores, la principal dificultad que se presenta en la evaluación de los coeficientes $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$ es que la integral que define los coeficientes se extiende de cero a infinito pero las eigenfunciones sólo se conocen explícitamente para $r > a$. Procediendo por analogía, es posible definir una función $v_{\ell\pm}(k, \xi)$ que tenga, para toda r , la forma que las eigenfunciones tienen para $r > a$, esto es,

$$v_{\ell\pm}(k, \xi) = \kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\kappa^2}{(\xi+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[h_{\ell\pm}^-(k, \xi) + S_b(\kappa) h_{\ell\pm}^+(k, \xi) \right], \quad 0 \leq \xi < \infty \quad (3.15)$$

Los coeficientes $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$ se pueden, poner, en términos de las funciones $v_{\ell\pm}(k, \xi)$, en la forma

$$a_{\ell\pm}(k, \kappa) = \int d\Omega \int_0^{\infty} v_{\ell\pm}(k, \xi)^{\dagger} j_{\ell}(k, \xi) r^2 dr + \int d\Omega \int_0^{\infty} [u_{\ell\pm}(k, \xi)^{\dagger} - v_{\ell\pm}(k, \xi)^{\dagger}] j_{\ell}(k, \xi) r^2 dr \quad (3.16)$$

En lo que sigue se denotará por $I_{1\pm}(k, \kappa)$ a la segunda integral en la ecuación (3.16). Como se demostrará más adelante, la integral $I_{1\pm}(k, \kappa)$ no da contribución a la función de onda si ciertas condiciones se satisfacen. La parte importante de los coeficientes $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$ es únicamente la primera integral de la ecuación anterior, cuya evaluación es bastante simple si se usa la fórmula (1.11). En realidad el cálculo de los coeficientes $a_{\ell\pm}(k, \kappa)$ es, matemáticamente, una duplicación del cálculo similar que se hizo en el caso de la ecuación de Schrödinger, como se ve fácilmente en la siguiente forma para el caso de energía positiva:

$$\begin{aligned}
 a_{\ell+}(k, k) &= k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{k^2}{(\ell+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \int d\Omega \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \times \\
 &\times \left(\begin{array}{c} \frac{i k}{\ell+1} [h_{\ell+1}^-(kr) + S_{\ell}(k) h_{\ell+1}^+(kr)] y_{j, \ell+1, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ [h_{\ell}^-(kr) + S_{\ell}(k) h_{\ell}^+(kr)] y_{j, \ell, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right)^{\dagger} \times \\
 &\times \left(\begin{array}{c} \frac{i k}{\ell+1} j_{\ell+1}(kr) y_{j, \ell+1, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{\ell}(kr) y_{j, \ell, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right) r^2 dr + I_{\ell+}(k, k) \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

y tomando en cuenta la ortonormalidad de los armónicos esféricos espinoriales y , se tiene

$$\begin{aligned}
 a_{\ell+}(k, k) &= k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{k^2}{(\ell+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{k k}{(\ell+1)(\ell+1)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [h_{\ell+1}^-(kr) + S_{\ell}(k) h_{\ell+1}^+(kr)]^* j_{\ell+1}(kr) r^2 dr \right. \\
 &\left. + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [h_{\ell}^-(kr) + S_{\ell}(k) h_{\ell}^+(kr)]^* j_{\ell}(kr) r^2 dr \right\} + I_{\ell+}(k, k) \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Si se compara la ecuación (3.18) con las ecuaciones (1.9) y (1.10), se ve que las integrales que hay que evaluar son exactamente del tipo de las integrales que se calcularon en el caso de la ecuación de Schrödinger. Aprovechando el resultado de ese cálculo, el cual está dado por la ecuación (1.14), se tiene

$$\begin{aligned}
 a_{\ell+}(k, \kappa) &= k \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\kappa \kappa}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+1)} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{4\kappa} (1+S_{\ell}^*(\kappa)) \delta(\kappa-\kappa) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i(1-S_{\ell}^*(\kappa))}{\kappa(\kappa^2-\kappa^2)} \left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\ell+1} \right] \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{2\pi}}{4\kappa} (1+S_{\ell}^*(\kappa)) \delta(\kappa-\kappa) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i(1-S_{\ell}^*(\kappa))}{\kappa(\kappa^2-\kappa^2)} \left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\ell} \right\} + I_{\ell+}(k, \kappa) \\
 &= k \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{4\kappa^2} [1+S_{\ell}^*(\kappa)] \delta(\kappa-\kappa) + \\
 &+ k \left[\frac{\kappa}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i[1-S_{\ell}^*(\kappa)]}{\kappa(\kappa^2-\kappa^2)} \left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\ell} \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+1)} + 1 \right] \\
 &+ I_{\ell+}(k, \kappa) \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

De una manera análoga se puede encontrar el coeficiente $a_{\ell-}(k, \kappa)$ de las eigenfunciones de energía negativa, usando la ecuación (3.10). El resultado es

$$\begin{aligned}
 a_{\ell-}(k, \kappa) &= k \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{i\kappa}{\varepsilon+1} \frac{i[1-S_{\ell}^*(\kappa)]}{\kappa(\kappa^2-\kappa^2)} \left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\ell+1} \right. \\
 &- \left. \frac{i\kappa}{\varepsilon+1} \frac{i[1-S_{\ell}^*(\kappa)]}{\kappa(\kappa^2-\kappa^2)} \left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\ell} \right\} + I_{\ell-}(k, \kappa) \\
 &= k \left[\frac{\kappa^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i[1-S_{\ell}^*(\kappa)]}{\kappa(\kappa^2-\kappa^2)} \left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)^{\ell} \left[\frac{i\kappa \kappa}{\varepsilon+1} - \frac{i\kappa}{\varepsilon+1} \right] + I_{\ell-}(k, \kappa) \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Es posible ahora construir la función de onda dependiente del tiempo mediante la ecuación (3.13), pero sólo se calculará en particular para $t=0$, de modo que por la condición inicial (3.6), se tiene, para $r > a$, que es la zona de validez de la ecuación (3.8),

$$\begin{aligned}
j_{\ell}(k, r) &= \frac{1}{2} k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{4k^2} [1 + S_{\ell}^*(k)] \left[h_{\ell+}^{-}(k, r) + S_{\ell}(k) h_{\ell+}^{+}(k, r) \right] \\
&+ P \int_0^{\infty} \frac{1}{2} k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i[1 - S_{\ell}^*(k)]}{k(k^2 - k^2)} \left(\frac{k}{k} \right)^{\ell} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon-1)(\varepsilon+1)} + 1 \right] \times \\
&\quad \times \left[h_{\ell+}^{-}(k, r) + S_{\ell}(k) h_{\ell+}^{+}(k, r) \right] dk \\
&+ P \int_0^{\infty} \frac{1}{2} k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i[1 - S_{\ell}^*(k)]}{k(k^2 - k^2)} \left(\frac{k}{k} \right)^{\ell} \left[\frac{ik}{\varepsilon+1} \frac{k}{k} - \frac{ik}{\varepsilon+1} \right] \times \\
&\quad \times \left[h_{\ell-}^{-}(k, r) + S_{\ell}(k) h_{\ell-}^{+}(k, r) \right] dk \\
&+ \int_0^{\infty} U_{\ell+}(k, r) I_{1+}(k, k) dk + \int_0^{\infty} U_{\ell-}(k, r) I_{1-}(k, k) dk, \quad r > a \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Como se demostrará más adelante, si $r \geq 2a$, las últimas dos integrales, que representarán simplemente como $I_2(k, r)$, se anulan de modo que limitándose a valores de $r \geq 2a$, se tiene, usando la condición de unitariedad de la función $S_{\ell}(k)$, que

$$\begin{aligned}
j_{\ell}(k, r) &= \frac{1}{4} \left[h_{\ell+}^{-}(k, r) + h_{\ell+}^{+}(k, r) \right] + \\
&+ \frac{i}{2\pi} P \int_0^{\infty} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-1} \left(\frac{k}{k} \right)^{\ell} \frac{[S_{\ell}(k) - 1] h_{\ell+}^{+}(k, r) - [S_{\ell}^*(k) - 1] h_{\ell+}^{-}(k, r)}{k^2 - k^2} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+1)} + 1 \right] k dk \\
&+ \frac{i}{2\pi} P \int_0^{\infty} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-1} \left(\frac{k}{k} \right)^{\ell} \frac{[S_{\ell}(k) - 1] h_{\ell-}^{+}(k, r) - [S_{\ell}^*(k) - 1] h_{\ell-}^{-}(k, r)}{k^2 - k^2} \left[\frac{ik}{\varepsilon+1} \frac{k}{k} - \frac{ik}{\varepsilon+1} \right] k dk \\
&\hspace{20em} (3.22)
\end{aligned}$$

Usando ahora el hecho de que $j_\rho = \frac{1}{2} [h_{\rho+}^- + h_{\rho+}^+]$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ [S_\rho(k)-1] h_{\rho+}^+(k, \underline{r}) + [S_\rho^*(k)-1] h_{\rho+}^-(k, \underline{r}) \right\} = \\ & = -\frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty \left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)^2 + 1} \right]^{-1} \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^\rho \frac{[S_\rho(k)-1] h_{\rho+}^+(k, \underline{r}) - [S_\rho^*(k)-1] h_{\rho+}^-(k, \underline{r})}{k^2 - k^2} \left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)(\epsilon+1)} + 1 \right] k dk \\ & -\frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty \left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)^2 + 1} \right] \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^\rho \frac{[S_\rho(k)-1] h_{\rho-}^+(k, \underline{r}) - [S_\rho^*(k)-1] h_{\rho-}^-(k, \underline{r})}{k^2 - k^2} \left[\frac{ik}{\epsilon+1} \frac{k}{\epsilon} - \frac{ik}{\epsilon+1} \right] k dk \end{aligned} \quad (3.23)$$

Escribiendo en forma explícita los espinores $h_{\rho\pm}^\pm(k, \underline{r})$ según las ecuaciones (3.9) y (3.10) se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \frac{ik}{\epsilon+1} \left[(S_\rho(k)-1) h_{\rho+}^+(k, \underline{r}) + (S_\rho^*(k)-1) h_{\rho+}^-(k, \underline{r}) \right] \\ (S_\rho(k)-1) h_{\rho}^+(k, \underline{r}) + (S_\rho^*(k)-1) h_{\rho}^-(k, \underline{r}) \end{array} \right) = -\frac{2i}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)^2 + 1} \right]^{-1} \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^\rho}{k^2 - k^2} \times \\ & \times \left(\begin{array}{c} \left[(S_\rho(k)-1) h_{\rho+}^+(k, \underline{r}) - (S_\rho^*(k)-1) h_{\rho+}^-(k, \underline{r}) \right] \left\{ \frac{ik}{\epsilon+1} \left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)(\epsilon+1)} + 1 \right] + \frac{ik}{\epsilon+1} \frac{k}{\epsilon} - \frac{ik}{\epsilon+1} \right\} \\ \left[(S_\rho(k)-1) h_{\rho}^+(k, \underline{r}) - (S_\rho^*(k)-1) h_{\rho}^-(k, \underline{r}) \right] \left\{ \frac{k^2}{(\epsilon+1)(\epsilon+1)} + 1 + \frac{ik}{\epsilon+1} \left[\frac{ik}{\epsilon+1} \frac{k}{\epsilon} - \frac{ik}{\epsilon+1} \right] \right\} \end{array} \right) k dk \quad (3.24) \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{ik}{\epsilon+1} \left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)(\epsilon+1)} + 1 \right] + \frac{ik}{\epsilon+1} \frac{k}{\epsilon} - \frac{ik}{\epsilon+1} = \frac{ik}{\epsilon+1} \frac{k}{\epsilon} \left[\frac{k^2}{(\epsilon+1)^2} + 1 \right]$$

(3.25)

$$y \frac{k^2}{(\epsilon+1)(\epsilon+1)} + 1 + \frac{ik}{\epsilon+1} \left[\frac{ik}{\epsilon+1} \frac{k}{\epsilon} - \frac{ik}{\epsilon+1} \right] = \frac{k^2}{(\epsilon+1)^2} + 1$$

de modo que la ecuación (3.24) se puede poner simplemente como

$$\begin{pmatrix} (S_e(k)-1)h_{e+1}^+ + (S_e^*(k)-1)h_{e+1}^-(kr) \\ (S_e(k)-1)h_e^+(kr) + (S_e^*(k)-1)h_e^-(kr) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{2i}{\pi} P \int_0^\infty \frac{1}{k^2 - k'^2} \begin{pmatrix} [(S_e(k)-1)h_{e+1}^+(kr) - (S_e^*(k)-1)h_{e+1}^-(kr)] \left(\frac{k}{k'}\right)^{e+1} \\ [(S_e(k)-1)h_e^+(kr) - (S_e^*(k)-1)h_e^-(kr)] \left(\frac{k}{k'}\right)^e \end{pmatrix} k dk \quad (3.26)$$

Si se compara esta ecuación con la ecuación (1.19) del caso no relativista, se ve que la ecuación (3.26) es una duplicación de la fórmula correspondiente para el caso de Schrödinger. Usando, entonces, los cálculos efectuados en ese caso, se obtienen las relaciones de dispersión

$$\text{Im}[S_e(k)-1]e^{zika} = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\text{Re}[S_e(k)-1]e^{zika}}{k^2 - k'^2} dk \quad (3.27)$$

$$\text{Re}[S_e(k)-1]e^{zika} = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\text{Im}[S_e(k)-1]e^{zika}}{k^2 - k'^2} k dk \quad (3.28)$$

En todo este cálculo se ha supuesto que la interacción es de tipo escalar, aunque también podría hacerse el análisis suponiendo, como se hizo en el caso de Klein-Gordon, que la interacción es del tipo de la cuarta componente de vector.

3.3 Determinación de la condición que anula a la integral $I_2(k, r)$

Se determinará ahora la condición que hace que la integral $I_2(k, r)$ que aparece en la ecuación (3.21), se anule, ya que la validez de las relaciones de dispersión (3.27) y (3.28) depende de que -

dicha integral sea nula. El método que se usará para determinar dicha condición es el mismo que se empleó en los casos de Schrodinger y de Klein-Gordon.

La integral $I_2(k, \underline{r})$ se puede separar en dos partes, una correspondiente a energías positivas y otra a energías negativas

$$I_2(k, \underline{r}) = I_{2+}(k, \underline{r}) + I_{2-}(k, \underline{r}), \quad (3.29)$$

$$\text{donde } I_{2\pm}(k, \underline{r}) = \int_0^{\infty} U_{\ell\pm}(k, \underline{r}) I_{1\pm}(k, \kappa) d\kappa \quad (3.30)$$

y las integrales $I_{1\pm}(k, \kappa)$ están dadas por

$$I_{1\pm}(k, \kappa) = \int d\Omega \int_0^{\infty} [U_{\ell\pm}(k, \underline{r})^\dagger - V_{\ell\pm}(k, \underline{r})^\dagger] j_\ell(k, \underline{r}) r^2 dr \quad (3.31)$$

Sustituyendo ahora la ecuación (3.31) en la ecuación (3.30) e intercambiando el orden de las integraciones, se tiene

$$I_{2\pm}(k, \underline{r}) = \int \left\{ \int d\Omega \int_0^{\infty} U_{\ell\pm}(k, \underline{r}) [U_{\ell\pm}(k, \underline{p})^\dagger - V_{\ell\pm}(k, \underline{p})^\dagger] d\kappa \right\} j_\ell(k, \underline{p}) p^2 dp \quad (3.32)$$

La dificultad en la evaluación de esta integral es que no se conoce la forma explícita de las eigenfunciones $U_{\ell\pm}(k, p)$ para $p < a$, pero si la suma para energías positivas y negativas de las expresiones entre llaves $\{ \}$ en la ecuación (3.32) se anula para todo p si \underline{r} cumple cierta condición, entonces la integral $I_2(k, \underline{r})$ se anula también. Por otra parte es obvio que dicha integral es cero si $p > a$.

En primer lugar, de la fórmula del desarrollo (3.13) para $t=0$ y de la expresión para los coeficientes de dicho desarrollo dados por la ecuación (3.14) se sigue que

$$\int d\Omega \int_0^{\infty} [U_{\ell+}(k, \underline{r}) U_{\ell+}(k, \underline{p})^\dagger + U_{\ell-}(k, \underline{r}) U_{\ell-}(k, \underline{p})^\dagger] d\kappa = \frac{\delta(\underline{r}-\underline{p})}{p^2} \quad (3.33)$$

de modo que la integral $I_2(k, \underline{r})$ se puede poner como

$$I_2(k, \underline{r}) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\delta(r-p)}{p^2} - \int d\Omega \int_0^\infty [U_{e+}(k, \underline{r}) U_{e+}(k, p)^\dagger + U_{e-}(k, \underline{r}) U_{e-}(k, p)^\dagger] dk \right\} \times \int_{e-} (k, \underline{p}) p^2 dp \quad (3.34)$$

Ahora el problema se reduce a calcular la integral entre llaves lo cual es posible porque se conoce la forma explícita tanto de las funciones $U_{e+}(k, \underline{r})$ para $r \geq a$, como de las funciones $U_{e+}(k, p)$ para $p > 0$. Llamando $I_3(p, \underline{r})$ a la expresión entre llaves se tiene

$$I_3(p, \underline{r}) = \int d\Omega \int_0^\infty \left\{ U_{e+}(k, \underline{r}) [U_{e+}(k, p)^\dagger - U_{e+}(k, p)^\dagger] + U_{e-}(k, \underline{r}) [U_{e-}(k, p)^\dagger - U_{e-}(k, p)^\dagger] \right\} dk \quad (3.35)$$

$$= \frac{\delta(r-p)}{p^2} - \int d\Omega \int_0^\infty [U_{e+}(k, \underline{r}) U_{e+}(k, p)^\dagger + U_{e-}(k, \underline{r}) U_{e-}(k, p)^\dagger] dk \quad (3.36)$$

y $I_3(p, \underline{r}) = 0$ si $p > a$ (3.37)

Ahora, de las formas explícitas (3.8) y (3.15) se tiene, aprovechando la ortonormalidad de los armónicos esféricos,

$$I_3(p, \underline{r}) = \frac{\delta(r-p)}{p^2} - \int_0^\infty \frac{2}{\pi} k^2 \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} + 1 \right]^{-1} \frac{1}{4} \times$$

$$\left(\begin{array}{cc} \left[\frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} [h_{e+1}^-(kr) + S_e(k) h_{e+1}^+(kr)]^* [h_{e+1}^-(kp) + S_e(k) h_{e+1}^+(kp)] \right] & 0 \\ 0 & [h_e^-(kr) + S_e(k) h_e^+(kr)]^* [h_e^-(kp) + S_e(k) h_e^+(kp)] \end{array} \right) +$$

$$\left(\begin{array}{cc} [h_{e+1}^-(kr) + S_e(k) h_{e+1}^+(kr)]^* [h_{e+1}^-(kp) + S_e(k) h_{e+1}^+(kp)] & 0 \\ 0 & \frac{k^2}{(\varepsilon+1)^2} [h_e^-(kr) + S_e(k) h_e^+(kr)]^* [h_e^-(kp) + S_e(k) h_e^+(kp)] \end{array} \right) dk$$

$$= \frac{\delta(r-p)}{p^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\begin{array}{cc} j_{e+1}(kr) j_{e+1}(kp) & 0 \\ 0 & j_e(kr) j_e(kp) \end{array} \right) k^2 dk$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\begin{array}{cc} [S_e(k)-1] h_{e+1}^+(kr) h_{e+1}^+(kp) + [S_e^*(k)-1] h_{e+1}^-(kr) h_{e+1}^-(kp) & 0 \\ 0 & [S_e(k)-1] h_{e+1}^+(kr) h_{e+1}^+(kp) + [S_e^*(k)-1] h_{e+1}^-(kr) h_{e+1}^-(kp) \end{array} \right)$$

y por la completez de las funciones de Bessel y aprovechando el hecho de que $S_\ell^*(k) = S_\ell(-k)$ y que $h_\ell^+(-kp) = h_\ell^+(kp)$, se tiene que

$$I_3(p, \Sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{cc} [S_\ell(k)-1] h_{\ell+1}^+(kr) h_{\ell+1}^+(kp) & 0 \\ 0 & [S_\ell(k)-1] h_\ell^+(kr) h_\ell^+(kp) \end{array} \right) k^2 dk \quad (3.38)$$

Esta ecuación es simplemente una duplicación de la ecuación (1.33) del caso de Schrödinger, de modo que por un razonamiento enteramente análogo al que se siguió en aquel caso se tiene que

$$I_3(p, \Sigma) = 0 \quad \text{para toda } p \quad \text{si } r \geq 2a \quad (3.39)$$

Entonces la condición que anula a la integral $I_2(k, \Sigma)$ es que $r \geq 2a$. Quedan por tanto establecidas las relaciones de dispersión (3.27) y (3.28).

El interés de este capítulo radica en que se demostró que es posible generalizar a partículas que obedecen la ecuación de Dirac, el método que se siguió en el primer capítulo para partículas de Schrodinger y en el segundo para partículas de Klein-Gordon. Es interesante hacer notar que aunque la ecuación de Dirac es relativista y por tanto tiene sentido la condición estricta de causalidad, no hace falta imponer esta condición, sino que simplemente usando la condición inicial y un desarrollo en eigenfunciones de energía positiva y negativa se pueden obtener relaciones de dispersión para la matriz S , del mismo tipo de las que se satisfacen en el caso no relativista.

Capítulo 4. Prueba directa de las relaciones de dispersión.

En este capítulo se estudiarán las propiedades de la función S en el plano complejo del momento para el caso de dispersión no relativista, esto es, usando la ecuación de Schrödinger, por el método de la aproximación de Born, de modo de exhibir, de una manera muy simple y directa que el comportamiento asintótico de la función S es tal que permite expresar inmediatamente las relaciones de dispersión, que previamente han sido encontradas construyendo la función de onda dependiente del tiempo en términos de las eigenfunciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger. Se mostrará además que es necesario que la interacción representada por el potencial $V(r)$ sea de un alcance finito \mathcal{Q} para que sea posible establecer las relaciones de dispersión que se han obtenido. Este último punto tiene interés porque indica que no pueden obtener relaciones de dispersión como las encontradas aquí para potenciales no cortados.

La conocida fórmula para la amplitud de dispersión es

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) [S_{\ell}(k) - 1] P_{\ell}(\cos \theta), \quad (4.1)$$

y en la aproximación de Born, la amplitud dispersión está dada por³⁸

$$f(\theta) = -2 \int_0^{\infty} V(r) \frac{\text{sen } Kr}{Kr} r^2 dr, \quad (4.2)$$

donde $V(r)$ es el potencial dispersor y $K = k|\underline{n}_0 - \underline{n}|$, donde \underline{n}_0 es un vector unitario en la dirección en la que incide la partícula y \underline{n} es la dirección de salida.

Ahora bien, de la teoría de las funciones de Bessel se sabe que³⁹

$$\frac{\text{sen } Kr}{Kr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) [j_{\ell}(Kr)]^2 P_{\ell}(\cos \theta), \quad (4.3)$$

de modo que sustituyendo la ecuación (4.3) en la ecuación (4.2) se tiene que en la aproximación de Born,

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \left\{ -2 \int_0^{\infty} V(r) [j_l(kr)]^2 r^2 dr \right\} \quad (4.4)$$

y comparando la ecuación (4.4) con la ecuación (4.1) se ve que en la aproximación de Born se tiene

$$[S_l(k) - 1] = -4ik \int_0^{\infty} V(r) [j_l(kr)]^2 r^2 dr \quad (4.5)$$

Ahora bien, es sabido³⁵ que la función $S_l(k)$ es analítica en el semiplano superior del plano complejo k si no hay estados ligados y es necesario por la razón que se verá posteriormente estudiar el comportamiento asintótico de $S(k)$.

La forma asintótica de la función $j_l(kr)$ está dada por la ecuación (1.12) que es

$$j_l(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}[kr - \frac{\pi}{2}l]}{kr} = \frac{e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}l} - e^{-ikr} e^{i\frac{\pi}{2}l}}{2ikr} \\ = \frac{i^l}{2ikr} \left[(-1)^l e^{ikr} - e^{-ikr} \right] \quad (4.6)$$

De la fórmula (4.6) se ve que si $k \rightarrow \infty$ en el semiplano superior I_+ , $j_l(kr)$ diverge debido al término e^{-ikr} y que si k es real, $j_l(kr)$ tiende a cero como $\frac{1}{k}$. Ahora bien, si se multiplica $j_l(kr)$ por el factor e^{ika} se tiene que

$$e^{ika} j_l(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{i^l}{2ikr} \left[(-1)^l e^{ik(a+r)} - e^{ik(a-r)} \right] \quad (4.7)$$

de modo que si $r \leq a$, entonces $e^{ika} j_l(kr)$ tiende a cero si $k \rightarrow \infty$ en I_+ . Entonces, si el potencial $V(r)$ se corta en la distancia a se tiene que

$$[S_l(k) - 1] e^{2ika} = -4ik \int_0^a V(r) [e^{ika} j_l(kr)]^2 r^2 dr \quad (4.8)$$

tiende a cero si $k \rightarrow \infty$ en I_+ si se supone que $\int_0^a V(r) dr < M < \infty$

En consecuencia se tiene que

$$\oint_{I_+} [S_l(k) - 1] e^{2ika} dk = 0 \quad (4.10)$$

y por la analiticidad de la función $S_l(k)$ en I_+ , se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S_2(k)-1] e^{zika} dk = 0, \quad (4.11)$$

que es la misma condición que se derivó en la ecuación (1.35)

Finalmente se pueden obtener las relaciones de dispersión como una consecuencia del teorema de la integral de Cauchy en la siguiente forma:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk = 0, \quad (4.12)$$

pero

$$\oint_{-\infty}^{\infty} = \int_{-k}^{-k} + \int_{+k}^{+k} + P \int_{-\infty}^{\infty} \quad (4.13)$$

Por tanto

$$\int_{-k}^{-k} \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk + \int_{+k}^{+k} \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk,$$

o sea

$$-i\pi \left[\frac{[S_2(-k)-1] e^{-zika}}{2k} + \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{2k} \right] = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk,$$

y usando el hecho de que $S_2(-k) = S_2^*(k)$ se tiene que

$$\text{Im} [S_2(k)-1] e^{zika} = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re} [S_2(k)-1] e^{zika}}{k^2 - k^2} dk \quad (4.14)$$

que es la relación de dispersión (1.22)

Como se ve, las relaciones de dispersión son únicamente una expresión de la analiticidad de la matriz S en I_+ y del hecho de que para un potencial cortado, la expresión $S_2(k) e^{zika}$ esté acotada al infinito en el mismo semiplano I_+ . En realidad esto completa la discusión sobre la obtención de relaciones de dispersión en el caso de potenciales cortados. En la sección II se generaliza esta discusión al caso de potenciales de corto alcance pero no necesariamente cortados y se exhibe la conexión entre las relaciones de dispersión y la noción de causalidad.

SECCION II. Relaciones de dispersión para potenciales no cortados.

Capítulo 1. Descripción temporal de la dispersión, causalidad y relaciones de dispersión.

En esta sección se estudiará la dispersión de partículas que obedezcan la ecuación de Schrödinger, por un centro dispersor con simetría esférica y de corto alcance, aunque no necesariamente cortado. Por simplicidad se tratará solamente el caso de momento angular cero.

En el caso de potenciales cortados, la función $S(k)$ no tiene polos en el semiplano superior del plano complejo del momento k , excepto posiblemente sobre el eje imaginario, en cuyo caso, los polos representan estados ligados. Además, es sabido³⁵ que si la función $S(k)$ tuviera un polo en el primer cuadrante, este introduciría un estado que crece infinitamente cuando el tiempo tiende a infinito, lo cual es claramente no causal. Por otra parte, la función $S_2(k)e^{2ika} \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$ en el semiplano superior. Como se mostró en el capítulo 4 de la primera sección estas propiedades permiten obtener relaciones de dispersión para la función $S(k)e^{2ika}$. Además, como ha sido mostrado en un trabajo anterior³², esas mismas propiedades son las que permiten dar una descripción causal de la dispersión en el sentido de que la parte transitoria de la función de onda tienda a cero cuando el tiempo tienda a infinito.

La situación en el caso de potenciales no cortados es completamente distinta. Por una parte, el tipo de razonamiento que se usó para encontrar el comportamiento asintótico de la función $S(k)e^{2ika}$ en el semiplano superior cuando el potencial es de alcance a , claramente no es aplicable al caso de potenciales no cortados. Por otra parte, es posible tener ciertos potenciales a los que corresponda una función $S(k)$ que tenga polos en el semiplano superior y fuera del eje imaginario. Estos hechos indican con claridad que en el caso de potenciales no cortados, no es posible obtener relaciones de dispersión para la matriz S sola o multiplicada por una exponencial.

Además, el hecho de que la función S pueda tener polos en el

semiplano superior, obliga a interpretar algunas de los polos de la en el caso de potenciales no cortados, de diferente manera que en el caso de potenciales cortados.

El problema es entonces, obtener la función de onda dependiente del tiempo en términos de una función que podría llamarse función de dispersión, y que tenga las propiedades analíticas que permitan establecer las relaciones de dispersión. Además es necesario ver - como se relaciona esa función con la función $S(k)$ para ver la conexión entre los polos de la función S y los polos de la función de dispersión, ya que así es posible entender el papel de los polos de la función S en la descripción temporal de la dispersión. Finalmente hay que exhibir en que sentido se usa la condición de causalidad en la derivación de las relaciones de dispersión.

En esta sección, el procedimiento que se seguirá para construir la función de onda dependiente del tiempo, es el de la transformada de Laplace. Nótese que también en el caso de potenciales cortados se puede emplear este método. En particular, si en las relaciones de dispersión que se obtendrán ahora se hace que potencial se corte, se verá que las relaciones de dispersión se reducen a las encontradas en la primera sección.

La parte radial de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, para momento angular cero es, haciendo la masa $m=1$, y poniendo el potencial como $\frac{1}{2}V(r)$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r} \right) - V(r) \psi(r,t) = -2i \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t}, \quad (1.1)$$

la cual se puede poner, haciendo $\phi(r,t) = r \psi(r,t)$

$$\frac{\partial^2 \phi(r,t)}{\partial r^2} - V(r) \phi(r,t) = -2i \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

con la condición de que $\phi(0,t) = 0$ (1.2a)

Ahora, se define la transformada de Laplace de la función de onda $\phi(r,t)$ como

$$\varphi(r,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(r,t) dt \quad (1.3)$$

Obviamente $\psi(0, s) = 0$ (1.3a)

Multiplicando la ecuación (1.2) por e^{-st} e integrando, se obtiene que la función $\varphi(r, s)$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2 \varphi(r, s)}{dr^2} + 2is \varphi(r, s) - V(r) \varphi(r, s) = 2i \phi(r, 0) \quad (1.4)$$

Si se hace el cambio de variable

$$k^2 = 2is, \quad (1.5)$$

la ecuación anterior queda, poniendo $\bar{\phi}(k, r) = \varphi(r, s)$,

$$\frac{d^2 \bar{\phi}(k, r)}{dr^2} + [k^2 - V(r)] \bar{\phi}(k, r) = 2i \phi(r, 0) \quad (1.6)$$

Ahora se considerará que la forma inicial del paquete de onda es una delta de Dirac, de modo que lo que se determinará puede llamarse la función de Green de interacción.

Entonces la ecuación queda finalmente

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - V(r) \right] \bar{\phi}(k, r) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) \quad (1.7)$$

donde se hizo

$$\phi(r, 0) = -\frac{i}{2r_0} \delta(r - r_0) \quad (1.8)$$

Es claro que $\bar{\phi}(k, 0) = 0$ (1.8a)

Para expresar ahora la función dependiente del tiempo $\phi(r, t)$ en términos de $\bar{\phi}(k, r)$ es necesario invertir la transformada de Laplace (1.3).

Por el teorema⁴⁰ de inversión de la transformada de Laplace, se tiene que

$$\phi(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \varphi(r, s) ds, \quad (1.9)$$

donde c es una constante ≥ 0 tal que

$$|\phi(r, t)| < K e^{ct} \quad \text{con } K > 0 \quad (1.10)$$

Ahora bien, la condición de causalidad indica que si inicialmente se tiene un paquete de onda, entonces para $t > 0$ la función de onda está acotada. Esta formulación de la condición de causalidad no dice nada sobre la velocidad de propagación de señales físicas y por tanto no coincide con la llamada condición estricta de causalidad, sino que está basada en la idea de que en una interacción - la función de onda no debe crecer indefinidamente cuando el tiempo tiende a infinito. Entonces, por la condición de causalidad, la ecuación (1.10) es válida para $c=0$. Como por otra parte la función $\varphi(r, s)$ es analítica en la región del plano complejo s definida por la condición $\text{Re } s > c$, se tiene que la condición de causalidad, al hacer que $c=0$, impone que la función $\varphi(r, s)$ sea analítica en el semiplano derecho.

Entonces la ecuación que da la inversa de la transformada, esto es, la función de onda dependiente del tiempo queda

$$\phi(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} \varphi(r, s) ds \quad (1.11)$$

Otra propiedad de la función transformada que se puede seguir de la condición de causalidad y que, como se verá después, tiene importancia para obtener relaciones de dispersión es que la función $\varphi(r, s)$ tiende a cero si $s \rightarrow \infty$ en el semiplano derecho. Para probarlo basta tomar la ecuación (1.3) que define la transformada y usar la condición de causalidad $|\phi(r, t)| < K$; en efecto, poniendo

$s = s_x + i s_y$ se tiene

$$|\varphi(r, s)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(r, t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st} \phi(r, t)| dt < \int_0^{\infty} K e^{-s_x t} dt = \left[-\frac{K}{s_x} e^{-s_x t} \right]_0^{\infty}$$

y si s_x es positivo, se tiene que

$$|\varphi(r, s)| < \frac{K}{s_x} \quad (1.12)$$

Ahora bien, al hacer el cambio de variable (1.5) que convierte la función $\varphi(r,s)$ en la función $\bar{\phi}(k,r)$, en la integral (1.11), el contorno de integración se convierte en un contorno que va desde el infinito hasta cero sobre el eje real y luego desde cero hasta el infinito sobre el eje imaginario positivo. Además el hecho de que la función $\varphi(r,s)$ sea analítica en el semiplano derecho se traduce en que la función $\bar{\phi}(k,r)$ sea analítica en el primer cuadrante. Por otra parte, de la ecuación (1.5) se sigue que $S_x = 2k_x k_y$, de modo que de la ecuación (1.12) se sigue que en el primer cuadrante del plano k ,

$$|\bar{\phi}(k,r)| < \frac{k}{k_x k_y} \quad (1.13)$$

Esto indica que si $k \rightarrow \infty$ por el primer cuadrante, $\bar{\phi}(k,r) \rightarrow 0$

Es interesante señalar que es la condición de causalidad la que permite establecer tanto el comportamiento analítico de la función $\bar{\phi}(k,r)$ en el primer cuadrante, como su comportamiento asintótico. Como por otra parte, según se verá más adelante, las propiedades anteriores de la función $\bar{\phi}(k,r)$ se pueden encontrar directamente de la ecuación diferencial que satisface, y como además esas propiedades permiten establecer unas relaciones de dispersión y hacer una descripción temporal de la dispersión, se puede concluir que tanto las propiedades analíticas y asintóticas de la función como las relaciones de dispersión y la posibilidad de hacer una descripción temporal de la dispersión, son diferentes expresiones de una misma idea básica y que es la condición de causalidad.

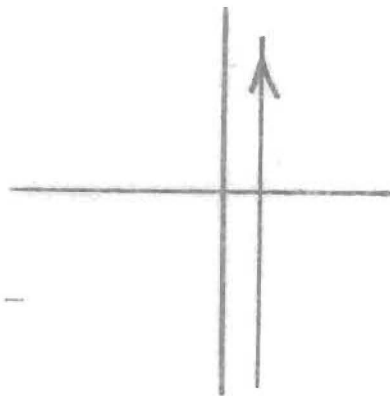


Figura 1a.
contorno en el plano s

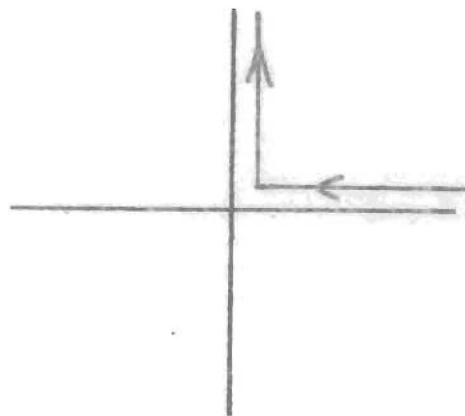


Figura 1b.
contorno en el plano k

En la figura 1a. está ilustrado el contorno de integración en el plano s y en la figura 1b el contorno en el plano k .

La integral (1.11) se convierte, por el cambio de variable (1.5) en

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \bar{\phi}(k, r) e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} k dk \quad (1.14)$$

El problema es ahora el de encontrar la función $\bar{\phi}(k, r)$. Esta función, que satisface la ecuación de Schrödinger para el momento k , se puede llamar función de dispersión, ya que si se conoce dicha función, es posible encontrar la función de onda dependiente del tiempo, esto es, permite hacer una descripción de la dispersión del paquete de onda inicial en el curso del tiempo. Ahora bien, es sabido²⁹ que la ecuación de Schrödinger

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - V(r) \right] F(k, r) = 0, \quad (1.15)$$

cuando el potencial satisface que

$$\int_0^\infty |V(r)| dr < \infty, \quad (1.16)$$

tiene como soluciones a las funciones de Jost $f(\pm k, r)$, que tienen el comportamiento asintótico siguiente:

$$f(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-ikr} \quad f(-k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikr} \quad (1.17)$$

$$y \quad f^*(k, r) = f(-k, r) \quad \text{para } k \text{ real} \quad (1.18)$$

Fisicamente la función $f(k, r)$ representa una onda entrante al infinito y la función $f(-k, r)$ representa una onda saliente al infinito.

Denotando por $f(\pm k)$ a

$$f(\pm k) \equiv f(\pm k, 0), \quad (1.19)$$

se tiene que la única solución de la ecuación (1.15) que se anula en el origen es la combinación

$$F(k,r) = \text{cte.} [f(-k)f(k,r) - f(k)f(-k,r)] \quad (1.20)$$

Pero la forma asintótica de la solución $F(k,r)$ debe ser, en términos de la función S ,

$$F(k,r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \text{cte.} [e^{-ikr} - S(k)e^{ikr}], \quad (1.21)$$

La forma asintótica de la función $F(k,r)$ es, por la ecuaciones (1.20) y (1.17),

$$F(k,r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \text{cte.} [f(-k)e^{-ikr} - f(k)e^{ikr}] = \text{cte.} f(-k) \left[e^{-ikr} - \frac{f(k)}{f(-k)} e^{ikr} \right] \quad (1.22)$$

Comparando las expresiones (1.21) y (1.22) se sigue que la relación entre la matriz S y las funciones de Jost es

$$S(k) = \frac{f(k)}{f(-k)} \quad (1.23)$$

Considerada como función del momento complejo k , la función $S(k)$ tiene polos tanto en los polos de la función $f(k)$ como en los ceros de la función $f(-k)$.

Ahora bien, el problema que se tiene es, desde el punto de vista físico, el de estudiar como se dispersa un paquete deltoide cuando está sometido a la acción de un potencial. Como dicho paquete está colocado a la distancia r_0 , entonces a distancias mayores sólo debe tenerse onda saliente, mientras que a distancias menores deben tenerse ondas entrantes y salientes, se puede poner que la solución de la ecuación (1.7) debe ser una combinación de funciones de Jost entrantes y salientes para $r < r_0$ y debe ser proporcional a la función saliente para $r > r_0$, o sea

$$\bar{\phi}(k, r) = A(k) [F(-k) f(k, r) - f(k) F(-k, r)] \quad r < r_0 \quad (1.24)$$

$$\bar{\phi}(k, r) = B(k) f(-k, r) \quad r > r_0 \quad (1.25)$$

Además la función $\bar{\phi}(k, r)$ esta sujeta a las condiciones

$$\left[\bar{\phi}(k, r) \right]_{r_0-0}^{r_0+0} = 0 \quad (1.26)$$

$$y \quad \left[\frac{d\bar{\phi}(k, r)}{dr} \right]_{r_0-0}^{r_0+0} = \frac{1}{r_0} \quad (1.27)$$

De la condición (1.26) se sigue que

$$\bar{\phi}(k, r) = C(k) f(-k, r_0) [F(-k) f(k, r) - f(k) F(-k, r)] \quad r < r_0 \quad (1.28)$$

$$y \quad \bar{\phi}(k, r) = C(k) [f(-k) f(k, r_0) - f(k) f(-k, r_0)] f(-k, r) \quad r > r_0 \quad (1.29)$$

De la condición (1.27) se sigue que

$$C(k) [f(-k) f(k, r_0) - f(k) f(-k, r_0)] f'(-k, r_0) - C(k) [f(-k) f'(k, r_0) - f(k) f'(-k, r_0)] f(-k, r_0) = \frac{1}{r_0}$$

Simplificando, se tiene que

$$C(k) f(-k) [f(k, r_0) f'(-k, r_0) - f(-k, r_0) f'(k, r_0)] = \frac{1}{r_0}$$

Pero el último factor es simplemente el wronskiano $W(k, -k)$ de las dos soluciones, entrante y saliente de la ecuación (1.15), calculado para $r=r_0$, pero como el wronskiano es constante, se puede calcular para cualquier valor de r , de modo que usando la forma asintótica de las funciones de Jost, se tiene, por (1.17),

$$W(k, -k) = e^{-ikr} (ik) e^{ikr} - e^{ikr} (-ik) e^{-ikr} = 2ik \quad (1.30)$$

Por tanto, la constante $C(k)$ es

$$C(k) = \frac{1}{2ikr_0 f(-k)} \quad (1.31)$$

Sólo se estudiara en lo que sigue, a la función de dispersión a distancias mayores que la posición inicial del paquete, entonces, limitándose al caso $r > r_0$ se tiene

$$\bar{\phi}(k, r) = \frac{1}{2i\pi r_0} \left[f(-k)f(k, r_0) - f(k)f(-k, r_0) \right] \frac{f(-k, r)}{f(-k)}, \quad (1.32)$$

y en consecuencia, la función de onda dependiente del tiempo queda

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{2i\pi r_0} \int_{C_F} \left[f(-k)f(k, r_0) - f(k)f(-k, r_0) \right] \frac{f(-k, r)}{f(-k)} e^{-ik^2 t} dk \quad (1.33)$$

Ahora bien, de la ecuación (1.15) y las condiciones asintóticas (1.17), se ve que la función $f(-k^*, r)$ satisface la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^{*2} - V(r) \right] f(-k^*, r) = 0 \quad (1.34)$$

con la condición asintótica

$$f(-k^*, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ik^* r} \quad (1.35)$$

Pero además, la función $[f(k, r)]^*$ satisface la misma ecuación y la misma condición asintótica, de modo que debe cumplirse

$$[f(k, r)]^* = f(-k^*, r) \quad (1.36)$$

Esta ecuación es una extensión al plano complejo de la propiedad (1.18) para k real y que aparece como un caso particular de la ecuación (1.36).

Entonces, la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$ dada en la ecuación (1.32) satisface la ecuación

$$[\bar{\phi}(k, r)]^* = \bar{\phi}(-k^*, r) \quad (1.37)$$

Por tanto, si la función $\bar{\phi}(k, r)$ tiene un polo en $k = k_0$, se tiene que $\bar{\phi}(k, r) \xrightarrow{k \rightarrow k_0} \infty$, entonces $[\bar{\phi}(k, r)]^* \xrightarrow{k \rightarrow k_0} \infty$ y $\bar{\phi}(-k^*, r) \xrightarrow{k \rightarrow k_0} \infty$, o sea $\bar{\phi}(k, r) \xrightarrow{k \rightarrow -k_0^*} \infty$

Esto es, si k_0 es un polo de la función $\bar{\phi}(k, r)$, entonces $-k_0^*$ también es un polo. Esto indica que los polos de la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$ están simétricamente colocados respecto al

eje imaginario. Este resultado excluye la posibilidad de polos en el segundo cuadrante. Los polos en el segundo cuadrante están excluidos no por la condición de causalidad directamente sino por la simetría de la función de dispersión. Naturalmente, los posibles polos sobre el eje imaginario no quedan excluidos.

También de la ecuación (1.37) se sigue que los ceros de la función $\bar{\phi}(k, r)$ están simétricamente colocados respecto al eje imaginario y en particular que si $\bar{\phi}(k, r) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ en el primer cuadrante, entonces también cuando $k \rightarrow \infty$ en el segundo cuadrante la función de dispersión tiende a cero.

Entonces la expresión

$$k \bar{\phi}(k, r) e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} \rightarrow 0$$

si $k \rightarrow \infty$ en el segundo cuadrante y $t \geq 0$.

En consecuencia, en la integral (1.14) que da la función de onda dependiente del tiempo en términos de la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$, se puede cambiar el contorno de integración a un contorno sobre el eje real recorrido negativamente, esto es,

$$\bar{\phi}(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \bar{\phi}(k, r) k e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(k, r) e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} k dk \quad (1.38)$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_0} [f(-k) f(k, r_0) - f(k) f(-k, r_0)] \frac{f(-k, r)}{f(-k)} e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} dk \quad (1.39)$$

Es claro que si hubiera polos sobre el eje imaginario positivo, entonces debería agregarse a las ecuaciones anteriores una suma de los residuos del integrando en esos polos. Nótese que es la función de dispersión la que no tiene polos en el semiplano superior, y no se dice que sea la matriz S la que no tenga polos en esa región.

Ahora conviene insistir sobre el papel de la causalidad en la obtención de la función de onda dependiente del tiempo. Si la función $\varphi(r, S)$ tuviera polos en el semiplano derecho del plano S , entonces el contorno de integración de la integral que invierte la transformada de Laplace debería estar a la derecha de los polos y só

lo podría pasarse a un contorno sobre el eje imaginario si además se agregara una suma de los residuos del integrando en esos polos. Esta situación se traduciría en el plano del momento k como una integral sobre el contorno C_k de la figura 1b más una suma de residuos de la función $k \bar{\phi}(k, r) e^{-i\frac{1}{2}k^2 t}$ en los polos que aparecerían en el primer cuadrante. Pero esos residuos contendrían un factor $e^{-i\frac{1}{2}k^2 t}$, el cual, para cualquier k en el primer cuadrante crece exponencialmente a medida que pasa el tiempo. Se tendrían entonces estados claramente no causales. El principio de causalidad excluye en consecuencia la existencia de polos en el primer cuadrante. Los polos sobre el eje imaginario, representen estados que únicamente oscilan en el curso del tiempo sin crecer ni decrecer y son, por tanto, estados ligados de energía $\frac{1}{2}k^2$,

Una observación de interés concerniente a la ecuación (1.39) es que si se pone en términos de la matriz S , usando (1.23), se tiene

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t_0} [f(k, r_0) - S(k)f(-k, r_0)] f(-k, r) e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} dk \quad (1.40)$$

Puesto en esta forma, se ve que el conocimiento de la matriz S sólo no es suficiente para describir el comportamiento en el curso del tiempo de la función de onda, sino que deben tomarse en cuenta otros términos, uno de los cuales está relacionado con la onda entrante, para poder dar una descripción adecuada de la función de onda dependiente del tiempo.

Ahora bien, la función $\bar{\phi}(k, r)$ es analítica en el semiplano superior excepto posiblemente sobre el eje imaginario, y tiene un comportamiento al infinito que indica que tiende a cero como $\frac{1}{k_x k_y}$. Entonces, estas propiedades se pueden poner en forma de relaciones de dispersión, observando primero que si k es real,

$$\oint_{\bar{C}} \frac{\bar{\phi}(k, r)}{k^2 - k'^2} dk = 0 \quad (1.41)$$

Si no hay polos sobre el eje imaginario, esto es, si se supone que no hay estados ligados. Esta suposición puede quitarse, agregando simplemente una suma sobre los estados ligados.

Pero por el comportamiento asintótico del integrando de la

ecuación (1.41), la integral sobre el semicírculo al infinito es nula y por tanto

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\phi}(k,r)}{k^2 - k^2} dk = -i\pi \left[\frac{\bar{\phi}(-k,r)}{-2k} + \frac{\bar{\phi}(k,r)}{2k} \right] + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\phi}(k,r)}{k^2 - k^2} dk = 0$$

y como para k real $\bar{\phi}^*(k,r) = \bar{\phi}(-k,r)$, entonces se tiene que

$$\text{Im } \bar{\phi}(k,r) = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re } \bar{\phi}(k,r)}{k^2 - k^2} dk \quad (1.42)$$

que es una relación de dispersión. Procediendo de un modo análogo, se puede poner que

$$\oint \frac{k \bar{\phi}(k,r)}{k^2 - k^2} dk = 0 \quad (1.43)$$

y de aquí se sigue que

$$\text{Re } \bar{\phi}(k,r) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{k \text{Im } \bar{\phi}(k,r)}{k^2 - k^2} dk \quad (1.44)$$

que es otra relación de dispersión. Nótese que la función que satisface las relaciones de dispersión es precisamente la función de dispersión que, a través de la integral (1.38), da la función de onda dependiente del tiempo. Esta observación trivial aclara, sin embargo el sentido de las relaciones de dispersión y su conexión con la condición de causalidad; en primer lugar, en la derivación de las relaciones de dispersión, se ve que éstas son únicamente resultados de las propiedades analíticas de la función de dispersión; en segundo lugar, dichas propiedades son un resultado de la condición de causalidad en el sentido de que el comportamiento en el curso del tiempo de la función de onda no presente estados que crezcan indefinidamente, sino por el contrario, que la función de onda tienda a cero cuando el tiempo tiende a infinito. En consecuencia, las relaciones de dispersión son simplemente expresiones de la condición de causalidad. Esta discusión se complementará en el capítulo siguiente.

Es evidente que el método empleado en este capítulo es aplicable al caso de un potencial cortado y que en consecuencia, los resultados del primer capítulo de la primera sección deben ser casos par-

ticulares de los resultados de este capítulo. En efecto, si se toma que el alcance del potencial es a , entonces, se puede poner --
 $f(k, r) = e^{-ikr}$ si $r \geq r_0 \geq a$ y se tiene que, haciendo $r = r_0 = a$

$$\bar{\phi}(k, a) = \frac{1}{2ika} [e^{-ika} - S(k)e^{ika}] e^{ika} = \frac{1}{2ika} [1 - S(k)e^{2ika}] \quad (1.45)$$

La relación de dispersión (1.42) queda

$$\frac{1}{2k} \operatorname{Re} [S(k)e^{2ika} - 1] = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} [1 - S(k)e^{2ika}]}{2k(k^2 - k'^2)} dk$$

o sea

$$\operatorname{Re} S(k)e^{2ika} = 1 + \frac{2k^2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} S(k)e^{2ika}}{k(k^2 - k'^2)} dk \quad (1.46)$$

La relación (1.44) queda

$$\frac{1}{2k} \operatorname{Im} [S(k)e^{2ika} - 1] = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{k \operatorname{Re} [S(k)e^{2ika} - 1]}{k(k^2 - k'^2)} dk$$

o sea

$$\operatorname{Im} S(k)e^{2ika} = -\frac{2k}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} S(k)e^{2ika}}{k^2 - k'^2} dk \quad (1.47)$$

Esta relación es la misma que se obtuvo en la ecuación (1.24) del primer capítulo de la primera sección desarrollando la función de onda dependiente del tiempo en las eigenfunciones estacionarias y usando la condición inicial. En cambio la relación (1.46) no es la misma que la ecuación (1.25) de la primera sección, aunque sí expresan lo mismo, como puede verse del hecho de que igualando los miembros derechos de la ecuación (1.46) y la ecuación (1.25) de la primera sección se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} S(k)e^{2ika}}{k^2 - k'^2} \left(k - \frac{k'}{k}\right) dk = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} S(k)e^{2ika}}{k} dk \\ &= \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} S(k) e^{2ika} dk = S(0) \end{aligned}$$

Pero la igualdad $S(0) = 1$ es simplemente una consecuencia del hecho de que se ha supuesto, que no hay estados ligados.

Capítulo 2. Propiedades de la función de dispersión.

En el capítulo anterior se ha usado la condición de causalidad como una condición que permite una descripción en el curso del tiempo de la función de onda para obtener relaciones de dispersión para la función de dispersión $\bar{\Phi}(k, r)$. Pero dichas relaciones son una mera expresión de ciertas propiedades analíticas de la función de dispersión. En resumen, lo que se ha hecho es lo siguiente: a) El principio de causalidad indica que la función de dispersión $\bar{\Phi}(k, r)$ no tiene polos en el primer cuadrante del plano complejo del momento k . b) De la ecuación de onda se sigue que los polos de la función $\bar{\Phi}(k, r)$ están simétricamente colocados respecto al eje imaginario; por tanto la función $\bar{\Phi}(k, r)$ no tiene polos en el semiplano superior del momento, excepto posiblemente sobre el eje imaginario. c) De la condición de causalidad y del teorema de inversión de la transformada de Laplace se sigue que la función $\bar{\Phi}(k, r)$ tiende a cero en el semiplano superior del momento, como $\frac{1}{k_x k_y}$. Todas estas propiedades se pueden resumir como relaciones de dispersión.

Para completar la discusión del capítulo anterior acerca de la conexión entre la causalidad y las relaciones de dispersión, se estudiarán directamente las propiedades de la función de dispersión en términos de las propiedades de las funciones de Jost.

La expresión

$$F(k, r) = f(-k) f(k, r) - f(k) f(-k, r) \tag{2.1}$$

es una solución de la ecuación (1.15 con la propiedad de que

$$F(k, 0) = 0 \tag{2.2}$$

Además $\left[\frac{dF(k, r)}{dr} \right]_{r=0} = f(-k) f'(k) - f(k) f'(-k)$,

que es wronskiano de las soluciones $f(k, r)$ y $f(-k, r)$ calculado en $r=0$. Pero como el wronskiano es constante y ya se calculó en el capítulo anterior, ecuación (1.30) tiene que

$$\left[\frac{dF(k, r)}{dr} \right]_{r=0} = -2ik \tag{2.3}$$

Por tanto, según un conocido teorema de la teoría de las ecuaciones diferenciales⁴¹, la función $F(k, r)$ es una función entera de k y no tiene polos en ningún lado.

Por otra parte se sabe⁴² que si el potencial está sujeto a la condición

$$\int_0^{\infty} |V(r)| dr < \infty \quad (2.4)$$

entonces la función $f(-k, r)$ es regular en el semiplano superior y la función $f(k, r)$ es regular en el semiplano inferior.

Entonces, si se prueba que la función $f(-k)$ no tiene ceros en el semiplano superior, se habrá probado que la función de dispersión $\phi(k, r)$ dada por la ecuación (1.30), es analítica en el semiplano superior.

Para encontrar en donde están los ceros de la función $f(-k)$ se puede proceder como sigue:

La función $f(-k, r)$ satisface la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - V(r) \right] f(-k, r) = 0 \quad (2.5)$$

y la condición asintótica

$$f(-k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikr} \quad (2.6)$$

La función $f(k^*, r)$ satisface la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^{*2} - V(r) \right] f(k^*, r) = 0 \quad (2.7)$$

y la condición asintótica

$$f(k^*, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-ik^*r} \quad (2.8)$$

Multiplicado la ecuación (2.4) por $f(k^*, r)$, la ecuación (2.6) por $f(-k, r)$, restando e integrando respecto a r , se obtiene

$$\left[F(k^*, r) f'(-k, r) - f(-k, r) f'(k^*, r) \right]_0^\infty + (k^2 - k^{*2}) \int_0^\infty f(-k, r) f(k^*, r) dr = 0$$

Pero por la ecuación (1.34), se tiene que

$$\left[[f(-k, r)]^* f'(-k, r) - f(-k, r) f'(k^*, r) \right]_0^\infty + (k^2 - k^{*2}) \int_0^\infty |f(-k, r)|^2 d\bar{r} = 0 \quad (2.9)$$

Ahora bien, de las formas asintóticas, se ve que en el semiplano superior, tanto la función $f(-k, r)$ como la función $f(k^*, r)$ tienden a cero si $r \rightarrow \infty$. Entonces, la ecuación (2.8) queda

$$-\left\{ [f(-k)]^* f'(-k) - f(-k) f'(k^*) \right\} + (k^2 - k^{*2}) \int_0^\infty |f(-k, r)|^2 dr = 0 \quad (2.10)$$

Pero si $f(-k) = 0$, entonces $[f(-k)]^* = 0$ y por tanto, si $f(-k)$ tiene un cero en el semiplano superior, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$(k_0^2 - k_0^{*2}) \int_0^\infty |f(-k_0, r)|^2 dr = 0, \quad (2.11)$$

donde k_0 es un cero de $f(-k)$ en el semiplano superior; y como el integrando es positivo definido, entonces k_0 tiene que ser imaginario puro. Entonces la función $f(-k)$ no puede tener ceros en el semiplano superior fuera del eje imaginario. Finalmente, de la expresión del wronskiano se tiene que, si k es real,

$$f(-k) f'(k) - f(k) f'(-k) = f(-k) f'(k) - f(-k)^* f(-k) = -2ik$$

y por tanto $f(-k)$ no se anula sobre el eje real.

En consecuencia, se ha probado que la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$ es analítica en el semiplano superior del momento k .

Para estudiar el comportamiento asintótico de la función $\bar{\phi}(k, r)$ cuando $k \rightarrow \infty$ en el semiplano superior, es conveniente convertir la -

ecuación diferencial que satisface la función $\bar{\phi}(k,r)$ en una ecuación integral; siguiendo un método conocido⁴³, se puede poner, por la ecuación (1.7),

$$\frac{d^2 \bar{\phi}(k,r)}{dr^2} + k^2 \bar{\phi}(k,r) = V(r) \bar{\phi}(k,r) + \frac{1}{r_0} \delta(r-r_0) = G(r) \quad (2.12)$$

La ecuación integral correspondiente a esta ecuación, es

$$\bar{\phi}(k,r) = -\text{sen } kr \int_r^\infty \frac{1}{k} e^{ikx} G(x) dx - \frac{1}{k} e^{ikr} \int_0^r \text{sen } kx G(x) dx \quad (2.13)$$

Si se quiere únicamente la solución para $r > r_0$, entonces, -- sustituyendo $G(x)$ por su valor en las integrales, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k,r) = & -\text{sen } kr \int_r^\infty \frac{1}{k} e^{ikx} V(x) \bar{\phi}(k,x) dx \\ & - \frac{1}{k} e^{ikr} \int_0^r \text{sen } kx V(x) \bar{\phi}(k,x) dx - \frac{1}{kr_0} e^{ikr} \text{sen } kr_0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ahora bien, como se quiere encontrar la forma de la función $\bar{\phi}(k,r)$, para k muy grandes, se puede usar la aproximación de Born sustituyendo en las integrales la función $\bar{\phi}(k,x)$ por su valor cuando el potencial se anula, o sea

$$\bar{\phi}(k,x) = -\frac{1}{kr_0} e^{ikx} \text{sen } kr_0 \quad \text{si } x > r_0$$

$$y \quad \bar{\phi}(k,x) = -\frac{1}{kr_0} \text{sen } kx e^{ikr_0} \quad \text{si } x < r_0$$

queda entonces

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k,r) = & \text{sen } kr \int_r^\infty \frac{e^{ikx}}{k} V(x) \frac{e^{ikx}}{kr_0} \text{sen } kr_0 dx \\ & + \frac{e^{ikr}}{k} \int_0^{r_0} \text{sen } kx V(x) \frac{1}{kr_0} \text{sen } kx e^{ikr_0} dx \\ & + \frac{e^{ikr}}{k} \int_{r_0}^r \text{sen } kx V(x) \frac{e^{ikx}}{kr_0} \text{sen } kr_0 dx - \frac{1}{kr_0} e^{ikr} \text{sen } kr_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Puesta la función $\bar{\phi}(k, r)$ en la forma anterior, es ya muy fácil ver a que tiende la función si $k \rightarrow \infty$ en el semiplano superior. En efecto, si se introducen los coeficientes de las integrales dentro de ellas y se ponen los senos en forma de exponenciales, se tiene una suma de integrales del tipo

$$\int e^{i k \xi} V(x) dx,$$

con $\xi > 0$, de modo que si $k \rightarrow \infty$ en el semiplano superior, esas integrales tienden a cero; además el último término de la ecuación (2.15) también tiende a cero, de modo que se tiene que

$$\bar{\phi}(k, r) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{si } r > r_0$$

En consecuencia, se ha probado a partir de las propiedades de las funciones de Jost y usando por otra parte la aproximación de Born que la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$ es analítica en el semiplano superior del momento, excepto posiblemente sobre el eje imaginario y que cuando $k \rightarrow \infty$ en esa región del plano complejo, $\bar{\phi}(k, r) \rightarrow 0$ si $r > r_0$. De aquí se siguen las relaciones de dispersión.

Ahora bien, siendo $\bar{\phi}(k, r)$ analítica en el semiplano superior, la función $\varphi(r, s)$ que es la transformada de Laplace de la función de onda dependiente del tiempo, es analítica en el semiplano derecho del plano complejo s y como por el teorema de inversión de la transformada de Laplace, la función $\varphi(r, s)$ es analítica en el semiplano $\text{Re } s > c$ donde $c > 0$ tal que $|\phi(r, t)| < K e^{ct}$, se sigue que, puesto que $c = 0$ por ser $\varphi(r, s)$ analítica en el semiplano $\text{Re } s > 0$, entonces $|\phi(r, t)| < K$.

Nótese que en este capítulo no se han derivado las propiedades analíticas de la función de dispersión a partir de la condición de causalidad, como se hizo antes, sino que una vez establecidas las propiedades analíticas y asintóticas de la función de dispersión a partir de la ecuación de onda con un potencial, o sea mediante una formulación hamiltoniana, se sigue la condición $|\phi(r, t)| < K$ que es la condición de causalidad y que físicamente significa que si se sigue en el curso del tiempo el modo como se dispersa un pa-

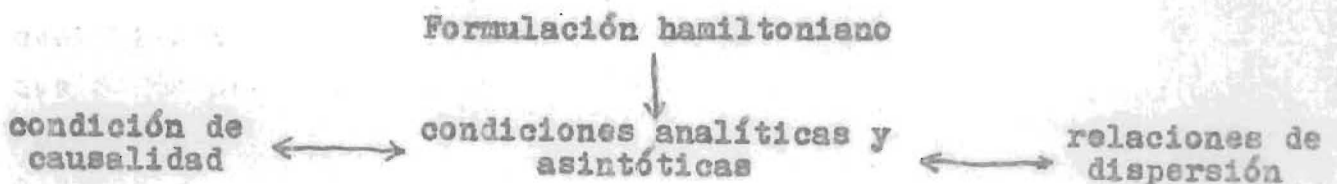
quete de onda en presencia de un potencial, sólo deben obtenerse - estados ligados o estados que decrecen cuando el tiempo crece, y no deben aparecer estados que crezcan indefinidamente cuando el tiempo tiende a infinito.

Ahora bien, las propiedades analíticas de la función de dispersión, que como se ha mostrado, son equivalentes a la condición de causalidad, pueden expresarse en una forma cómoda como relaciones de dispersión. Dichas relaciones son entonces una expresión matemática de la noción física de que el proceso de dispersión debe ser causal.

El hecho interesante es que aunque en la derivación de las relaciones de dispersión no se use o ni siquiera se formule la condición de causalidad, tal como se hizo en la primera sección, de cualquier modo, dichas relaciones están conectadas con la idea de que el proceso de dispersión es causal. Esto aclara finalmente la relación entre el principio de causalidad y las relaciones de dispersión.

Otra observación de cierto interés es que tanto el procedimiento mediante el cual se obtienen las relaciones de dispersión, como la idea de descripción causal, no depende del tipo particular de interacción, de modo que cabe pensar que la validez de las relaciones de dispersión es independiente del hamiltoniano. En este sentido, las relaciones de dispersión cumplen con el programa de la matriz S de Heisenberg.

Los resultados y conclusiones obtenidos se pueden resumir en el siguiente cuadro



Capítulo 3. Interpretación de los polos de la función de dispersión

Ejemplos.

En este capítulo se discutirán con detalle dos ejemplos en los que se construirá explícitamente la función de onda $\phi(r, t)$ dada por la ecuación (1.2) y donde se verá que la función de dispersión cumple las condiciones que permiten derivar las relaciones de dispersión. Además se mostrará que no todos los polos de la matriz S tienen significado físico en lo que se refiere a la descripción dinámica de la dispersión, haciendo ver que existen en la función

$S(\kappa)$ unos polos que pueden llamarse redundantes porque no intervienen como polos en la determinación de la función de onda. En particular, se puede tener una matriz S que tenga polos en el primer cuadrante del plano complejo del momento sin que ello implique que la función de onda crezca en el transcurso del tiempo, o puede tenerse una función $S(\kappa)$ con polos sobre el eje imaginario positivo y que no represente estados ligados. Estos casos, que se pueden presentar cuando se tiene un potencial no cortado, no ocurren cuando el potencial es de alcance finito, en cuyo caso se sabe que la matriz S tiene un número infinito de polos en el semiplano inferior del momento y en la parte superior del plano sólo puede tener polos sobre el eje imaginario; en este caso, todos los polos que están sobre el eje imaginario representan estados ligados y los polos que están en el semiplano inferior representan estados que decaen en el curso del tiempo.

Algunos autores⁵ han dicho que los polos de la matriz S que están en el cuarto cuadrante, representan estados quasi-estacionarios. Esta afirmación no es completamente correcta, como ha sido indicado en otros estudios²⁰ de la dispersión por un potencial de alcance finito. En este capítulo se construirá explícitamente la contribución de cada polo de la función de dispersión a la función de onda dependiente del tiempo y se podrá ver con toda claridad en que casos las funciones correspondientes a cada polo, y que podrían llamarse funciones de Green básicas de interacción, representan estados quasi-estacionarios y en que casos representan estados ligados, o bien, términos de difusión.

Debe recordarse que la función $S(\kappa)$ está relacionada con las funciones de Jost por la ecuación

$$S(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{f(-\kappa)} \quad (3.1)$$

de modo que los polos de función $S(\kappa)$ están en los polos de la función $f(\kappa)$ y en los ceros de la función $f(-\kappa)$. Como se ha indicado, sólo los ceros de la función $f(-\kappa)$ son polos de la función de dispersión $\bar{\Phi}(\kappa, r)$ y en consecuencia los polos de la función $S(\kappa)$ que provienen de los polos de la función $f(\kappa)$, y que necesariamente están en el semiplano superior, ya que la función $f(\kappa)$ es analítica en el semiplano inferior si el potencial cumple la condición (2.4), no son polos de la función de dispersión y no intervienen como polos en la determinación de la función de onda dependiente del tiempo, esto es, no tienen interpretación física. Estos son los polos redundantes de la matriz S . Dicho de otra manera, sólo los polos de la función $S(\kappa)$ que provengan de los ceros de la función $f(-\kappa)$ tienen sentido físico. Ahora bien, la función de dispersión es, como se ha mostrado, el producto de una función entera y de la expresión $\frac{f(-\kappa, r)}{f(-\kappa)}$, la cual tiene polos en los ceros de $f(-\kappa)$ y, aparentemente, en los polos de $f(-\kappa, r)$; -- sin embargo, poniendo

$$2i\kappa \psi_0(\kappa, r) = f(\kappa)f(-\kappa, r) - f(-\kappa)f(\kappa, r), \quad (3.2)$$

que es una función entera de κ , se ve que si $f(-\kappa, r)$ tiene un polo en $\kappa = \kappa_p$ y $f(\kappa_p) \neq 0$ entonces $f(-\kappa)$ también tiene polo en $\kappa = \kappa_p$, pero el límite

$$\lim_{\kappa \rightarrow \kappa_p} \frac{f(-\kappa, r)}{f(-\kappa)} = \frac{f(\kappa_p, r)}{f(\kappa_p)} \quad (3.3)$$

está acotado

Ahora bien, los ceros de la función $f(\kappa)$ sólo pueden estar en el semiplano superior o sobre el eje imaginario negativo y los polos de $f(-\kappa, r)$ sólo pueden estar en el semiplano inferior, de modo que un polo

de $f(-\kappa, r)$ y un cero de $f(\kappa)$ sólo pueden coincidir sobre el eje imaginario negativo. Sin embargo, del hecho trivial de que

$$f(\kappa, r) = f[-(-\kappa), r], \quad (3.4)$$

se sigue que los ceros y los polos de la función $f(\kappa, r)$ están en los puntos reflejados respecto al origen, de los puntos en los que la función $f(-\kappa, r)$ tiene ceros o polos. En consecuencia, si $f(\kappa)$ tiene un cero en el eje imaginario negativo, la función $f(-\kappa)$ tiene un cero en el eje imaginario positivo, que representa un estado ligado. Por tanto, suponiendo que no hay estados ligados, se tiene que la función $f(\kappa)$ no tiene ceros sobre el eje imaginario negativo. Entonces $f(-\kappa, r)$ no puede tener ningún polo que coincida con un cero de $f(\kappa)$ y por tanto, la expresión

$$\frac{f(-\kappa, r)}{f(-\kappa)}$$

está acotada en los polos de $f(-\kappa, r)$. Los únicos polos de la función de dispersión son entonces los ceros de la función $f(-\kappa)$.

A) El Potencial de Eckart.

Seguiente un trabajo de Bergmann⁴², se pueden construir explícitamente las funciones de Jost, y por tanto la matriz S, asociados a cierto tipo de potenciales. Algunos de sus resultados son los siguientes:

Si el potencial se puede poner como

$$V(r) = 2 \left[\left(\frac{w'(r)}{w(r)} \right)^2 - \frac{w''(r)}{w(r)} \right] = -2 \frac{d^2}{dr^2} \log w(r), \quad (3.4)$$

donde

$$w(r) = e^{\gamma r} + \gamma e^{-\lambda r} \quad \text{con } \gamma > -1 \text{ y } \lambda > 0 \quad (3.5)$$

entonces se tiene explícitamente

$$V(r) = -8\gamma\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{(\gamma e^{-2\lambda r} + 1)^2}, \quad (3.6)$$

que es el potencial de Eckart⁴⁴.

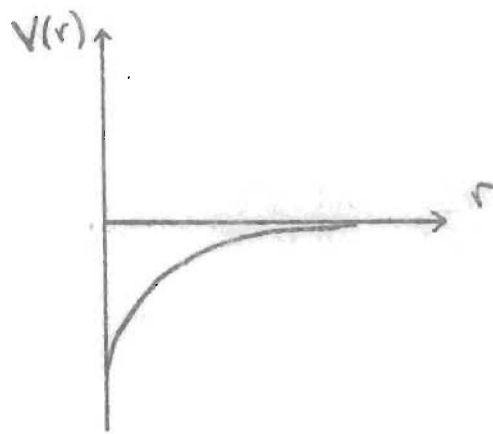


Fig. 2a
 $\gamma > 0$

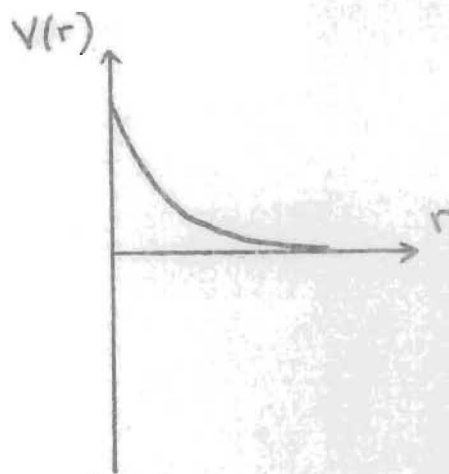


Fig. 2b
 $\gamma < 0$

La figura 2a ilustra la forma del potencial de Eckart con $\gamma > 0$ y la figura 2b el caso de $\gamma < 0$

La función de Jost correspondiente al potencial de Eckart es

$$f(k, r) = e^{-ikr} \left[1 + i \frac{\frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r}}{\gamma e^{-2\lambda r} + 1}}{k - i\lambda} \right] \quad (3.7)$$

Llamando

$$v = \lambda \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (3.8)$$

se tiene que

$$f(k) = \frac{k + iv}{k - i\lambda} \quad (3.9)$$

y por tanto de la ecuación (3.1), la función $S(k)$ es

$$S(k) = \frac{(k + iv)(k + i\lambda)}{(k - iv)(k - i\lambda)} \quad (3.10)$$

Como se ve, la función $S(\kappa)$ tiene dos polos, ambos sobre el eje imaginario y cuya posición es arbitraria excepto por el hecho de que por lo menos uno de ellos esté en la parte positiva del eje. En otras palabras, dados dos puntos sobre el eje imaginario con la condición de que al menos uno esté en la parte positiva del eje, se puede construir un potencial de Eckart que tiene asociada una función $S(\kappa)$ cuyos polos están en esos puntos. El polo en $\kappa = i\lambda$ está en la parte positiva del eje, pero como se mostrará después no representa un estado ligado; en cambio el polo en $\kappa = i\nu$ puede representar un estado ligado si ν es positivo.

En el apéndice 2 se obtiene la función de dispersión explícitamente y en consecuencia la función de onda dependiente del tiempo es

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_0} \left\{ 2i \operatorname{sen} \kappa r_0 + \frac{4\gamma\lambda}{(\kappa+i)(\delta e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\kappa+i\lambda)r_0}{\kappa+i\lambda} - \frac{\operatorname{sen}(\kappa-i\lambda)r_0}{\kappa-i\lambda} \right] \right\} \times \left\{ 1 + i \frac{\lambda + \nu - U(r)}{\kappa - i\nu} \right\} e^{i(\kappa r - \frac{1}{2} \kappa^2 t)} d\kappa, \quad (3.11)$$

donde
$$U(r) = \frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r}}{\delta e^{-2\lambda r} + 1} \quad (3.12)$$

Es claro de la ecuación (3.11) que el integrando sólo tiene un polo en $\kappa = i\nu$. Esta integral se puede calcular explícitamente; su evaluación y la discusión del resultado se hará después de tratar el segundo ejemplo.

B) El potencial de Bargmann.

En el apéndice 3 se indica un procedimiento de Bargmann^{45,46} mediante el cual se puede construir explícitamente un potencial $V(r)$ y la función de Jost asociada a él, de modo de obtener una matriz $S(\kappa)$ con cuatro polos. Los resultados son los siguientes:

Sean β_1 y β_2 dos constantes sujetas a la condición

- a) β_1 y β_2 son reales, positivas y distintas, o bien
 b) β_1 y β_2 son conjugadas complejas con parte real positiva.

Sean α_1 y α_2 dos constantes sujetas a la condición

- c) α_1 y α_2 son reales, positivas y distintas, o bien
 d) α_1 y α_2 son conjugadas complejas con parte real positiva.

Además debe tenerse

- e) $\alpha_i^2 \neq \beta_j^2$ para toda $i, j = 1, 2$

Entonces se tiene que si el potencial se pone

$$V(r) = 2 \left[\left(\frac{w'(r)}{w(r)} \right)^2 - \frac{w''(r)}{w(r)} \right] = -2 \frac{d^2}{dr^2} \log w(r), \quad (3.13)$$

donde la función $w(r)$ está definida por

$$w(r) = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2} e^{(n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) r} \quad (3.14)$$

donde n_1 y n_2 toman los valores $-1, +1$ y las cuatro constantes a_{n_1, n_2} estén dadas por

$$a_{n_1, n_2} = \frac{n_1 (\alpha_1 + n_1 \beta_1) (\alpha_2 + n_1 \beta_1) n_2 (\alpha_1 + n_2 \beta_1) (\alpha_2 + n_2 \beta_2)}{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2}, \quad (3.15)$$

entonces la función de Jost es

$$f(k, r) = e^{-ikr} \left[1 + \frac{A(r)}{k - i\beta_1} + \frac{B(r)}{k + i\beta_2} \right], \quad (3.16)$$

donde las funciones $A(r)$ y $B(r)$, que dependen de los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 están dadas en el apéndice. En particular, para $r = 0$, se tiene que

$$f(k) = \frac{(k - i\alpha_1)(k - i\alpha_2)}{(k - i\beta_1)(k - i\beta_2)} \quad (3.17)$$

Y la función $S(k)$ es, en consecuencia,

$$S(k) = \frac{(k - i\alpha_1)(k - i\alpha_2)(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)}{(k + i\alpha_1)(k + i\alpha_2)(k - i\beta_1)(k - i\beta_2)} \quad (3.18)$$

Nótese que si α_1 y α_2 son complejos conjugados y β_1 y β_2 también lo son, la función $S(k)$ tiene un polo en cada cuadrante.

La forma explícita del potencial es bastante complicada pero su valor en el origen y su forma asintótica para distancias muy grandes son como sigue

$$V(0) = 2 \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2) \right] \quad (3.19)$$

De esta ecuación se ve que ajustando los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ se puede hacer que el potencial sea atractivo o repulsivo en el origen.

Para grandes valores de r se tiene

$$V(r) \sim -8 \left(\frac{a_{1,-1}}{a_{1,1}} \beta_2^2 e^{-2\beta_2 r} + \frac{a_{-1,1}}{a_{1,1}} \beta_1^2 e^{-2\beta_1 r} \right) \quad (3.20)$$

Ahora se pueden distinguir dos casos según sea la elección de las β_1, β_2 . Si β_1 y β_2 son reales positivas, se denotarán por b_1 y b_2 respectivamente. Supóngase que $b_2 > b_1$, entonces la exponencial $e^{-2b_2 r}$ decrece más rápidamente que la exponencial $e^{-2b_1 r}$ y se puede poner

$$V(r) \sim -8b_1^2 \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} e^{-2b_2 r} = 8b_1^2 C e^{-2b_1 r}; \quad C > 0 \quad (3.21)$$

Este resultado indica que en este caso el potencial decrece exponencialmente pero por valores positivos.

El otro caso consiste en suponer que β_1 y β_2 son complejos conjugados. Poniendo $\beta_1 = b + ib'$ y por tanto $\beta_2 = b - ib'$ con b y b' positivas, se tiene que

$$V(r) \sim 16|b+ib'|^2 D \cos(2b'r + \delta) e^{-2br}, \quad (3.22)$$

donde $D = \left| \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} \right|$ y δ es el argumento de $-\frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} \beta_2^2$

Se ve entonces que el potencial decrece exponencialmente oscilando alrededor de cero.

Combinando el valor inicial del potencial con su forma asintótica al infinito, se tienen cuatro casos ilustrados en las figuras 3

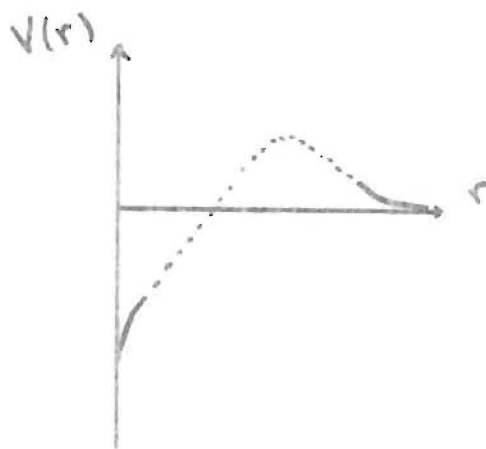


Fig. 3a
 $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) < (\beta_1^2 + \beta_2^2)$; β_1, β_2 reales

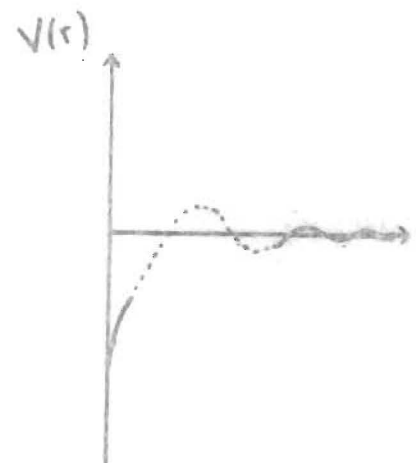


Fig. 3b
 $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) < (\beta_1^2 + \beta_2^2)$; β_1, β_2 complejos

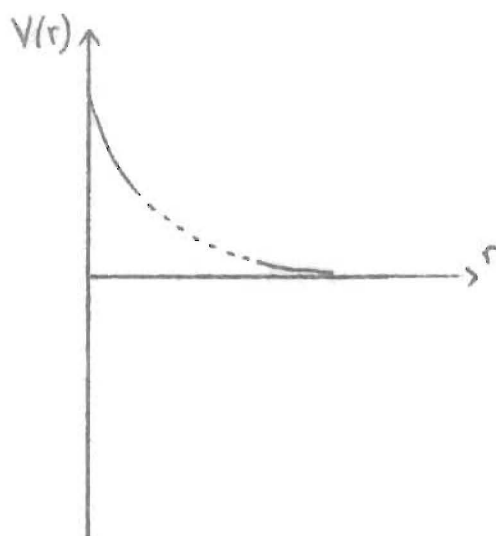


Fig. 3c.

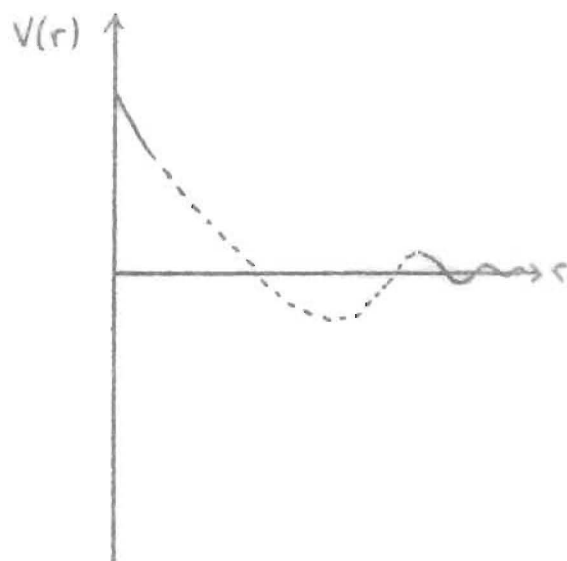


Fig. 3d.

$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) > (\beta_1^2 + \beta_2^2)$; β_1, β_2 reales. $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) > (\beta_1^2 + \beta_2^2)$; β_1, β_2 complejos

En el apéndice 4 se obtiene la función de dispersión explícitamente. La función de onda dependiente del tiempo queda entonces en la siguiente forma:

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{r_0} \left\{ -2i \operatorname{sen} k r_0 + C_1(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(k - i\beta_1)r_0}{k - i\beta_1} - \frac{\operatorname{sen}(k + i\beta_1)r_0}{k + i\beta_1} \right] + C_2(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(k - i\beta_2)r_0}{k - i\beta_2} - \frac{\operatorname{sen}(k + i\beta_2)r_0}{k + i\beta_2} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{D_1(r)}{k + i\alpha_1} + \frac{D_2(r)}{k + i\alpha_2} \right\} e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} dk, \quad (3.23)$$

donde las funciones $C_1(r)$, $C_2(r)$, $D_1(r)$ y $D_2(r)$ dependen de los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ de una manera bastante complicada, - aunque existen ciertas simetrías entre $C_1(r)$ y $C_2(r)$ y entre $D_1(r)$ y $D_2(r)$. Obviamente, los únicos polos del integrando están en $k = -i\alpha_1$, y en $k = -i\alpha_2$.

c) Discusión General.

En primer lugar es interesante observar que hay una analogía entre las ecuaciones que dan la función de onda en el caso de Eckart (3.11) y de Bargmann(3.23), de modo que las expresiones que dan la -

función de onda en cada uno de los dos ejemplos, son del mismo tipo y la discusión se puede hacer en común. En segundo lugar, se nota que la única diferencia importante entre los dos ejemplos es que para el potencial de Eckart, el polo del integrando de la expresión que da la función de onda puede estar en la parte positiva o en la negativa del eje imaginario, mientras que para el potencial de Bargmann, los polos del correspondiente integrando no pueden estar en la parte positiva del eje imaginario. Esta diferencia implica, como se verá adelante, que el potencial de Eckart puede tener un estado ligado, pero que el potencial de Bargmann no puede tenerlo.

La evaluación de la función de onda en ambos casos se reduce al cálculo de cuatro tipos de integral, que son los siguientes

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 2i \operatorname{sen} k r_0 e^{i(kr - \frac{1}{2} k^2 t)} dk$$

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i \operatorname{sen} k r_0}{k + i\alpha} e^{i(kr - \frac{1}{2} k^2 t)} dk$$

$$I_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k - i\beta) r_0}{k - i\beta} e^{i(kr - \frac{1}{2} k^2 t)} dk$$

$$I_{\beta\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k - i\beta) r_0}{(k - i\beta)(k + i\alpha)} e^{i(kr - \frac{1}{2} k^2 t)} dk$$

La función de onda (3.23) para el potencial de Bargmann queda entonces,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_B(r, t) = \frac{1}{4\pi i r_0} \left\{ -I_1 - D_1(r) I_{\alpha_1} - D_2(r) I_{\alpha_2} + C_1(r_0) [I_{\beta_1} - I_{-\beta_1}] + \right. \\ \left. + C_2(r_0) [I_{\beta_2} - I_{-\beta_2}] + C_1(r_0) D_1(r) [I_{\beta_1 \alpha_1} - I_{-\beta_1 \alpha_1}] + C_1(r_0) D_2(r) [I_{\beta_1 \alpha_2} - I_{-\beta_1 \alpha_2}] + \right. \\ \left. + C_2(r_0) D_1(r) [I_{\beta_2 \alpha_1} - I_{-\beta_2 \alpha_1}] + C_2(r_0) D_2(r) [I_{\beta_2 \alpha_2} - I_{-\beta_2 \alpha_2}] \right\} \quad (3.24) \end{aligned}$$

Para el caso del potencial de Eckart, se tiene, por la ecuación (3.11) que da la función de onda en este caso,

$$\bar{\phi}_E(r,t) = \frac{1}{4\pi i r_0} \left\{ -I_1 - i[\lambda + \nu - u(r)] I_{\alpha=\nu} - \frac{4\delta\lambda}{(\delta+1)(r_0 e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} \left[I_{\beta=\lambda} - I_{\beta=\lambda} + i(\lambda + \nu - u(r)) (I_{\beta=\lambda, \alpha=\nu} - I_{\beta=\lambda, \alpha=\nu}) \right] \right\} \quad (3.25)$$

Se procederá entonces a calcular los cuatro tipos de integral.

Primera integral

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ikr_0} - e^{-ikr_0}) e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{i[k(r+r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]} - e^{i[k(r-r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]} \right\} dk$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[e^{i\frac{(r+r_0)^2}{2t}} - e^{i\frac{(r-r_0)^2}{2t}} \right] \quad (3.26)$$

Esta integral representa términos de difusión pura del paquete.

Segunda integral

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr_0} - e^{-ikr_0}}{k + i\alpha} e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i[k(r+r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]}}{k + i\alpha} - \frac{e^{i[k(r-r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]}}{k + i\alpha} \right\} dk$$

$$= \pi i \left[\chi(r+r_0, -i\alpha, t) - \chi(r-r_0, -i\alpha, t) \right] \quad (3.27)$$

Tercera integral

$$I_\beta = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k-i\beta)r_0} - e^{-i(k-i\beta)r_0}}{k - i\beta} e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} dk = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{\beta r_0} \frac{e^{i[k(r+r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]}}{k - i\beta} - e^{-\beta r_0} \frac{e^{i[k(r-r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]}}{k - i\beta} \right\} dk$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[e^{\beta r_0} \chi(r+r_0, i\beta, t) - e^{-\beta r_0} \chi(r-r_0, i\beta, t) \right] \quad (3.28)$$

Cuarta integral

$$\begin{aligned}
 I_{p\alpha} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(k-i\beta)r_0}{i(\beta+\alpha)} \left(\frac{1}{k-i\beta} - \frac{1}{k+i\alpha} \right) e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)} \\
 &= \frac{I_{\beta}}{i(\beta+\alpha)} - \frac{1}{i(\beta+\alpha)} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k-i\beta)r_0} - e^{-i(k-i\beta)r_0}}{k+i\alpha} e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)} dk \\
 &= \frac{I_{\beta}}{i(\beta+\alpha)} + \frac{\pi i}{2(\beta+\alpha)} \left[e^{\beta r_0} \chi(r+r_0, -i\alpha, t) - e^{-\beta r_0} \chi(r-r_0, -i\alpha, t) \right] \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

La función $\chi(r, k, t)$ está definida por⁴⁷

$$\chi(r, k, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)}}{k-k} dk = e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)} \text{erfc} \left[(1-i) \frac{r-kt}{2\sqrt{t}} \right] \quad (3.30)$$

El comportamiento asintótico de la función $\chi(r, k, t)$ es⁴⁷, para $t \rightarrow \infty$,

$$\chi(r, k, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{r > 0} \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{\pi k^2 t}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{r^2}{2t}} & \frac{3}{4}\pi < \arg k < \frac{7}{4}\pi \\ 2 e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)} & -\frac{\pi}{4} < \arg k < \frac{3}{4}\pi \end{cases} \quad (3.31)$$

y para $t \rightarrow 0$, se tiene

$$\chi(r, k, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} e^{i\frac{r^2}{2t}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \sqrt{2t} \rightarrow 0 \quad (3.32)$$

Como comprobación indirecta de estos resultados, se puede calcular el valor de la función de onda para $t = 0$. Por la ecuación (3.32), se ve que el único término no nulo en la ecuación (3.24) o en la ecuación (3.25) es el primero, de modo que en ambos se tiene

$$\begin{aligned} \phi(r, 0) &= -\frac{1}{4\pi i r_0} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\kappa(r+r_0)} - e^{i\kappa(r-r_0)}] d\kappa \\ &= -\frac{2\pi}{4\pi i r_0} [\delta(r+r_0) - \delta(r-r_0)] = -\frac{i}{2r_0} \delta(r-r_0), \end{aligned} \quad (3.33)$$

que es la forma inicial que se impuso en la condición (1.8).

Ahora es necesario discutir el resultado obtenido para la función de onda, tomando en cuenta las posibles distribuciones de los polos de la matriz S .

En el caso del potencial de Dekart, la función $S(\kappa)$ tiene dos polos, según la ecuación (3.10), uno en $\kappa = i\lambda$ que está en la parte positiva del eje imaginario y otro en $\kappa = i\nu$, que está también sobre el eje imaginario pero que puede estar en la parte positiva o en la negativa del eje. Sin embargo, sólo el polo en $\kappa = i\nu$ es polo de la función de dispersión. En el caso del potencial de Bargmann, la matriz $S(\kappa)$ tiene cuatro polos, según la ecuación (3.18), de los cuales dos están en el semiplano superior, $\kappa = i\beta_1$ y $\kappa = i\beta_2$, y dos en el semiplano inferior, $\kappa = -i\alpha_1$ y $\kappa = -i\alpha_2$; sin embargo los únicos polos de la función de dispersión son los polos $\kappa = -i\alpha_1$ y $\kappa = -i\alpha_2$. En ambos casos los polos de la función de dispersión provienen de los ceros de la función $f(-\kappa)$, como se vio de la expresión general (1.39). Los otros polos son entonces redundantes.

Por otra parte, en la evaluación explícita de la función de onda, como se ve de las ecuaciones (3.24) y (3.25), aparecen no sólo los polos de la función de dispersión, sino también los polos redundantes de la matriz S y sus negativos, esto es, la función de dispersión se puede poner como

$$\begin{aligned} \kappa \bar{\phi}(\kappa, r) &= \frac{1}{r_0} \left\{ -2i \operatorname{sen} \kappa r_0 e^{i\kappa r} + \sum_p \frac{A_p(r, r_0)}{\kappa - \kappa_p} e^{i\kappa(r+r_0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_p \frac{B_p(r, r_0)}{\kappa - \kappa_p} e^{i\kappa(r-r_0)} \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

y la función de onda correspondiente se puede escribir

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi i r_0} \left\{ -\sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[e^{i\frac{(r+r_0)^2}{2t}} - e^{i\frac{(r-r_0)^2}{2t}} \right] \right. \\ \left. + \sum_p A_p(r, r_0) \chi(r+r_0, k_p, t) + \sum_p B_p(r, r_0) \chi(r-r_0, k_p, t) \right\} \quad (3.35)$$

donde las sumas se extienden no sólo los polos de la función de dispersión sino también a los polos redundantes de la matriz S y sus negativos.

El problema es ahora interpretar todos estos términos. En primer lugar, como los polos redundantes de la matriz S pueden estar sobre el eje imaginario positivo o fuera del eje en el semiplano superior, podría pensarse que debido a la forma asintótica de las funciones $\chi(r, k, t)$ dada en la ecuación (3.28), entonces si se tiene un polo sobre el eje imaginario positivo o en el primer cuadrante, se tendría un término que para tiempos muy grandes se comportaría como una exponencial oscilante si el polo está en el eje imaginario, o como una exponencial creciente si el polo está en el primer cuadrante y parecería que se tendría un estado ligado en el primer caso y un estado no causal en el segundo. Sin embargo, no es así, ya que por cada término que aparece en la primera suma en la expresión (3.32), aparece otro asociado en la segunda suma y de tal manera que su suma tiende a cero cuando el tiempo t tiende a infinito. En efecto, tanto los polos redundantes de la matriz S como sus negativos solo aparecen en las integrales del tipo I_β , ya que las integrales del tipo $I_{\beta\alpha}$ son una combinación de integrales I_β e I_α ; entonces se tiene, por la definición (3.30) de las funciones $\chi(r, k, t)$ y de la forma explícita de las integrales I_β que

$$I_\beta = \frac{\pi}{2} e^{i[\text{ipr} - \frac{1}{2}(\text{ip})^2 t]} \left\{ \text{erfc} \left[(1-i) \frac{r+r_0 - \text{ip}t}{2\sqrt{t}} \right] - \text{erfc} \left[(1-i) \frac{r-r_0 - \text{ip}t}{2\sqrt{t}} \right] \right\} \quad (3.36)$$

Es claro que cuando $t \rightarrow \infty$, los argumentos de las funciones erfc tienden a ser iguales y que por tanto su diferencia tiende a cero. En realidad, tomando la forma de las funciones erfc para valores muy grandes de su argumento, que es⁴⁸

$$\operatorname{erfc}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} & -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} & \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (3.37)$$

se tiene que tomando $z = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{r+r_0-kt}{\sqrt{2t}}$ y por tanto

$\arg k \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \arg z - \frac{3}{4}\pi$ la integral I_β queda

$$\begin{aligned} I_\beta &\sim \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\beta)r}}{2 e^{-i\frac{\pi}{4}}} \left\{ \frac{e^{i\left[\frac{(r+r_0)^2}{2t} - \beta(r+r_0)\right]}}{\frac{r+r_0-ipt}{\sqrt{2t}}} - \frac{e^{i\left[\frac{(r-r_0)^2}{2t} - \beta(r-r_0)\right]}}{\frac{r-r_0-ipt}{\sqrt{2t}}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{e^{i\frac{(r+r_0)^2}{2t}} e^{\beta r_0}}{\frac{r+r_0-ipt}{\sqrt{2t}}} - \frac{e^{i\frac{(r-r_0)^2}{2t}} e^{-\beta r_0}}{\frac{r-r_0-ipt}{\sqrt{2t}}} \right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

En consecuencia, los polos redundantes de la matriz no pueden representar estados ligados ni estados no casales, de modo que se sigue que el comportamiento de la función de onda es completamente causal y dichos polos solo afectan indirectamente a la función de onda. Para entender mejor el significado de esos polos se puede tomar como caso especial que $r_0 \rightarrow 0$, esto es, poner la fuente en el origen; en tal caso los términos que contienen los polos redundantes y sus negativos desaparecen, como se ve de las ecuaciones (3.11) y (3.23), de modo que la función de onda queda

$$\begin{aligned} \phi(r,t) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\kappa) \left[1 - \sum_p \frac{A_p(r)}{\kappa - \kappa_p} \right] e^{i(\kappa r - \frac{1}{2}\kappa^2 t)} d\kappa \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-2i\kappa + 2i \sum_p A_p(r) + 2i \sum_p \frac{\kappa_p A_p(r)}{\kappa - \kappa_p} \right] e^{i(\kappa r - \frac{1}{2}\kappa^2 t)} d\kappa \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde la suma se extiende sólo a los polos de la función de dispersión. La evaluación de la integral es inmediata y queda

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{r}{t} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{r^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{r^2}{2t}} \sum_P A_P(r) + \frac{i}{2} \sum_P k_P A_P(r) \chi(r, k_P, t) \quad (3.40)$$

El primer término representa la difusión pura del paquete inicial y es la misma que se tendría si no hubiera potencial; el segundo es el término que revela la interacción a través de las funciones $A_P(r)$ que son los residuos de la función de dispersión en los polos, pero que por otra parte no contienen a los polos; el tercer término, en cambio, revela la interacción a través de los polos de la función de dispersión, por medio de las funciones $\chi(r, k_P, t)$, de modo que la interpretación de dichas funciones adquiere mucha importancia desde el punto de vista físico.

En el caso en el que la fuente no se coloca en el origen, los términos que contienen los polos redundantes de la matriz S no se anulan, pero pueden entenderse como términos que indican únicamente el desplazamiento de la fuente, de un modo semejante a algunos tipos de desarrollos en multipolos que aparecen en otras ramas de la física cuando se desplaza la fuente del origen. Para entender esto, es conveniente ver como se puede obtener una expresión de las funciones χ cuando se hace un desplazamiento del origen. En efecto, se tiene por la definición (3.30) que

$$\chi(r+r_0, k, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[k(r+r_0) - \frac{1}{2}k^2 t]}}{k - k} dk ,$$

pero $e^{ikr_0} = e^{i(k-k)r_0} e^{ikr_0}$

y $\frac{e^{i(k-k)r_0}}{k-k} = \frac{1}{k-k} + ir_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ir_0)^n (k-k)^n}{(n+1)!}$

y $(k-k)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^{n+s} k^{n-s} k^s$,

entonces

$$\begin{aligned} \chi(r+r_0, k, t) &= e^{ikr_0} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k-k)r_0}}{k-k} e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)} dk \\ &= e^{ikr_0} \chi(r, k, t) + e^{ikr_0} ir_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ir_0)^n}{(n+1)!} \binom{n}{s} (-1)^{n+s} k^{n-s} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} k^s e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2t)} dk \\ &= e^{ikr_0} \chi(r, k, t) + \\ &+ e^{ikr_0} ir_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ir_0)^n}{(n+1)!} \binom{n}{s} (-1)^{n+s} k^{n-s} \frac{(-i)^s \sqrt{2\pi}}{\pi i} e^{-\frac{i\pi}{4}} \frac{d^s}{dr^s} e^{i\frac{r^2}{2t}} \quad (3.41) \end{aligned}$$

Por tanto, al desplazar la fuente, la función χ asociada al nuevo punto y al polo k , se convierte en la función χ en el origen afectada de una fase que depende del desplazamiento y una serie de términos de difusión.

Otra manera muy clara de ver que únicamente los polos de la función de dispersión intervienen en la determinación de la función de onda dependiente del tiempo y que por tanto son los únicos con significado físico, es la siguiente: la función de dispersión se puede poner como

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, r_0) \frac{f(-k, r)}{f(-k)} e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} dk,$$

donde $F(k, r_0)$ es una función entera;

pero

$$\frac{f(-k, r)}{f(-k)} = \frac{f(-k, r) e^{-ikr}}{f(-k)} e^{ikr} = \left[1 + \sum_p \frac{f(-k_p, r) e^{-ik_p r}}{(k - k_p) \left[\frac{df(-k)}{dk} \right]_{k_p}} \right] e^{ikr} \quad (3.42)$$

ya que tanto en el caso de Eckart como en el de Bargmann se tiene que

$$\frac{f(-k, r) e^{-ikr}}{f(-k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

y solo tiene polos en los ceros de $f(-k)$ de modo que se pueden poner como en (3.42) donde la suma se extiende a los ceros de la función

$f(-k)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, r_0) e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} dk \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \sum_p \int_0^{\infty} \frac{F(k, r_0) - F(k_p, r)}{k - k_p} \frac{f(-k_p, r) e^{-ik_p r}}{\left[\frac{df(-k)}{dk} \right]_{k_p}} e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} dk \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \sum_p \frac{F(k_p, r_0) f(-k_p, r) e^{-ik_p r}}{\left[\frac{df(-k)}{dk} \right]_{k_p}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)}}{k - k_p} dk \end{aligned} \quad (3.43)$$

Claramente, los dos primeros términos representan estados de difusión, ya que tanto la función $F(k, r_0)$ como $(k-k_p)^{-1} [F(k, r_0) - F(k_p, r_0)]$ son funciones enteras; sólo el último término contiene polos, que son los ceros de la función $f(-k)$, y se ve que cada polo da lugar a una función $\chi(r, k_p, t)$, que es la que tiene interés desde el punto de vista de la interacción.

Como se ve, todo el significado físico de la solución del problema está contenido únicamente en las funciones χ que dependen de los polos de la función de dispersión. A estas funciones se les puede llamar funciones de Green de interacción básicas y su interpretación es muy clara examinando su forma asintótica para tiempos grandes.

En primer lugar, la función de dispersión sólo puede tener polos en el semiplano inferior o sobre el eje imaginario positivo. Si se tiene un polo en el eje imaginario positivo como puede suceder en el caso del potencial de Eckart, la forma asintótica de la función de Green de interacción básica asociada a ese polo está dada, por la ecuación (3.31), por

$$\frac{1}{r_0} \left(e^{-k_p(r+r_0)} e^{ik_p^2 t} - e^{-k_p(r-r_0)} e^{ik_p^2 t} \right), \quad (3.44)$$

con $k_p = \nu$ positivo, de modo que en su dependencia del tiempo acusa un comportamiento oscilatorio, o sea que no crece ni decrece y es entonces un estado ligado de energía $-k_p^2$.

Ahora bien, debido a la simetría respecto al eje imaginario de la distribución de los polos de la función de dispersión, por cada polo que esté en el cuarto cuadrante hay otro polo en el tercero. Entonces, por la forma asintótica de la función de Green de interacción básica, se ve que los polos de la función de dispersión que estén en el tercer cuadrante o sobre el eje imaginario tienen una contribución a la función de onda para tiempos -

muy grandes, del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{k_p^2 t}} \frac{1}{r_0} \left[e^{i \frac{(r+r_0)^2}{2t}} - e^{i \frac{(r-r_0)^2}{2t}} \right], \quad (3.45)$$

con $k_p = -i\alpha$ en el tercer cuadrante o sobre el eje imaginario negativo. Estos son términos de difusión pero asociados con la interacción a través de la presencia del polo, de modo que puede decirse que la función de Green de interacción básica, representa en este caso un término de difusión de interacción.

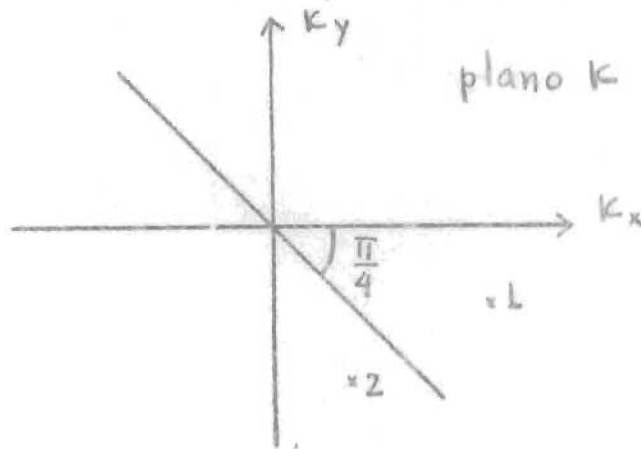


Fig. 4

Por último, si se toma un polo en el cuarto cuadrante, se ve, de la forma asintótica de la función de Green de interacción correspondiente, que si el polo está abajo de la bisectriz del cuarto cuadrante, indicada en la figura 4, su interpretación es la misma que la de un polo en el tercer cuadrante, o sea que representa un término de difusión de interacción, mientras que si se tiene el polo arriba de la bisectriz, el término correspondiente, para valores muy grandes del tiempo, se comporta como

$$\frac{1}{r_0} \left[e^{i k_p (r+r_0)} - e^{i k_p (r-r_0)} \right] e^{-\frac{i}{2} (k_{px}^2 - k_{py}^2) t} e^{k_{px} k_{py} t}, \quad (3.46)$$

con $k_p = -\alpha$ en el cuarto cuadrante, o sea que este término decrece exponencialmente en el curso del tiempo, de modo que se tiene un estado quasi-estacionario.

Lo interesante de esta situación está en que mediante el uso de las funciones de Green de interacción, aparece completamente claro que no todos los polos que estén en el cuarto cuadrante pueden interpretarse como estados quasi-estacionarios, sino que únicamente los polos situados arriba de la bisectriz del cuadrante, dan lugar a estados quasi-estacionarios y los que están abajo de la bisectriz son términos de difusión de interacción. Por otra parte, por la simetría respecto al eje imaginario de la posición de los polos de la función de dispersión, con cada estado quasi-estacionario, está asociado un término de difusión de interacción.

En resumen, el comportamiento en el curso del tiempo de la función de onda se puede interpretar físicamente en la siguiente forma: a) unos términos que representan la difusión pura del paquete como si no hubiera interacción; b) otros términos que aparecen sólo debido a que al paquete de onda se colocó inicialmente fuera del origen y que en consecuencia no tienen significado físico, sino más bien geométrico, y que están relacionados con los polos redundantes de la matriz S ; c) unos términos de difusión de interacción asociados con los polos de la función de dispersión; d) posiblemente estados ligados si la función de dispersión tiene polos en el eje imaginario positivo; e) posiblemente estados quasi-estacionarios, si la función de dispersión tiene polos en el cuarto cuadrante arriba de la bisectriz. Estos estados quasi-estacionarios tienen la característica de que están asociados siempre con términos de difusión de interacción.

NOTAS FINALES.

En la primera parte de este trabajo se han discutido las propiedades de la matriz S asociada con un potencial de alcance finito " a " en el problema de la dispersión de partículas de --- Schrödinger, de Klein-Gordon o de Dirac por un potencial central, habiéndose demostrado que en estos casos es posible obtener relaciones de dispersión para la función $S_{\lambda}(k)e^{2ika}$ si se considera que se tiene una onda plana y que en el instante $t=0$ se introduce el potencial dispersor. En esta parte no se impone ningún tipo de condición de causalidad, sino que se usa únicamente la condición inicial y un desarrollo de la función de onda dependiente del tiempo en términos de las eigenfunciones estacionarias, las cuales forman un sistema completo de funciones.

En el primer capítulo de la primera sección se usó este método para derivar relaciones de dispersión para la función $S_{\lambda}(k)e^{2ika}$ en el caso de partículas que obedezcan la ecuación de Schrödinger. Como en este caso no es posible, por no ser una ecuación relativista, imponer una condición estricta de causalidad, la condición inicial tomó su lugar y se obtuvieron relaciones de dispersión.

Ahora bien, como la condición inicial se puede usar siempre, independientemente de que la ecuación sea relativista o no, se pensó en investigar si en el caso de ecuaciones relativistas se podía usar dicha condición en lugar de la condición de causalidad estricta para obtener relaciones de dispersión. En el capítulo 2 se hizo ver que sí es posible obtener relaciones de dispersión

en el caso de la ecuación de Klein-Gordon a partir de la condición inicial. En el capítulo 3 se demostró lo mismo para partículas de Dirac.

En el capítulo 4 se probó únicamente que las relaciones de dispersión para la función $S(k)e^{zika}$ son una consecuencia inmediata de la propiedad de la matriz S de ser analítica en el semiplano superior del plano complejo del momento k y de su propiedad asintótica cuando $|k| \rightarrow \infty$, la que se investigó usando la aproximación de Born.

Por otra parte, en un trabajo anterior³², usando un método muy semejante al que se siguió en el primer capítulo, se construyó la función de onda para todo valor del tiempo y se hizo ver que su comportamiento es causal.

Había entonces dos puntos de interés para proseguir la investigación; el primero era tratar de precisar la conexión que existe entre las relaciones de dispersión y la condición de causalidad en la mecánica cuántica y el segundo era extender el análisis del problema al caso de potenciales no cortados, dando un tratamiento aplicable también a potenciales cortados.

La primera dificultad que surge es que en el caso de potenciales no cortados, las propiedades de la matriz S que permiten obtener relaciones de dispersión no siempre valen²¹. Por ejemplo, es posible construir potenciales cuya matriz S asociada tenga polos en I_+ fuera del eje imaginario y también polos sobre dicho eje que no correspondan a estados ligados.

Es posible entonces preguntarse cual es la función que, para potenciales arbitrarios sea la generalización de la matriz S , satisfaga relaciones de dispersión y esté conectada con la noción de causalidad. Todo esto se investigó en la segunda sección de este trabajo.

En el primer capítulo de la segunda sección, se formula la condición de causalidad indicando que la función de Green dependiente del tiempo para la dispersión de partículas de Schrödinger por un potencial arbitrario, está acotada en todo el tiempo. Como consecuencia de este principio se demostró que la función de dispersión, que es esencialmente la transformada de Laplace de la función de onda dependiente del tiempo, y cuyo conocimiento permite encontrar en todo tiempo la función de onda, satisface unas relaciones de dispersión. Se probó además que estas relaciones se reducen a las que valen para potenciales cortados, si se supone que el potencial es de alcance " a ".

En el segundo capítulo se probó directamente que la función de dispersión es analítica en \bar{I}_+ , excepto posiblemente por polos en el eje imaginario asociados con estados ligados. Además, usando, la aproximación de Born, se demostró que la función de dispersión tiende a cero si $|k| \rightarrow \infty$ en \bar{I}_+ . De aquí se siguen inmediatamente las relaciones de dispersión.

En el capítulo 3 se discuten dos ejemplos en los que la matriz S tiene una forma particularmente simple y se obtienen explícitamente la función de dispersión y la función de Green dependiente del -

tiempo, y se expresa esta última en términos de unas funciones básicas de interacción de Green (BIG) asociadas con los polos y los ceros de la matriz S . Se demostró que las funciones BIG que tienen significado físico son aquellas asociadas con los polos de la S que son también polos de la función de dispersión. De la forma asintótica de las funciones BIG cuando $t \rightarrow \infty$, se sigue la interpretación física que debe darse a los polos de la función de dispersión según la posición que éstos tengan en el plano complejo.

Es conveniente indicar, como conclusión, algunas posibilidades futuras de investigación a lo largo de estas líneas. En primer lugar, todo el tratamiento de la segunda sección se hizo únicamente para momento angular cero. Una generalización a momento angular arbitrario parece bastante simple. Por otra parte, ya -- han sido construídas³⁰ unas funciones BIG relativistas, de modo -- que parece posible extender los métodos de la segunda sección a -- este tipo de problemas. Finalmente podría pensarse en aplicar -- esos métodos a algunos problemas de la teoría de las reacciones -- nucleares.

Apéndice 1. La sección de dispersión para una partícula de Dirac.

En este apéndice se obtendrá la sección de dispersión para una partícula de Dirac en un campo central, desarrollando una onda plana de energía $E = \sqrt{k^2 + 1}$ en ondas parciales espinoriales, siguiendo un artículo de Blatt y Biedenharn⁴⁵.

La ecuación de Dirac de una partícula de masa $m=1$ en un campo central es, en unidades naturales,

$$(E - V(r) + \underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta) \psi = 0 \quad (A1.1)$$

La corriente de partículas es

$$\underline{j} = \psi^\dagger \underline{\alpha} \psi \quad (A1.2)$$

Suponiendo que inicialmente las partículas viajan en la dirección del eje Z, se tiene, llamando \underline{j}_{in} a la corriente incidente,

$$j_{inz} = \psi_{in}^\dagger \alpha_z \psi_{in}, \quad (A1.3)$$

donde se ha puesto el espinor ψ como

$$\psi = \psi_{in} + \psi_s \quad (A1.4)$$

donde ψ_{in} es la parte incidente y ψ_s la parte saliente.

La corriente saliente en un ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección del vector unitario $\underline{n} = \frac{\underline{r}}{r}$ es

$$\underline{n} \cdot \underline{j}_s r^2 d\Omega = \psi_s^\dagger \underline{\alpha} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \psi_s r^2 d\Omega \quad (A1.5)$$

y la sección es, por tanto,

$$d\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi_s^\dagger \frac{\alpha \cdot \underline{r}}{r} \psi_s r^2 d\Omega}{\psi_{in}^\dagger \alpha_z \psi_{in}} \quad (A1.6)$$

Ahora hay que calcular el numerador y el denominador de la ecuación anterior.

Si inicialmente se tiene una onda plana, se tiene

$$\psi_{in} = \begin{pmatrix} -\frac{p_z}{E+1} \\ -\frac{p_x + i p_y}{E+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i \underline{p} \cdot \underline{r}}$$

y si incide en la dirección del eje z, $p_x = p_y = 0$. En unidades naturales al momento coincide con el número de onda y entonces se puede poner $p_z = k$

Entonces la función de onda inicial queda

$$\psi_{in} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz} \quad (A1.7)$$

Por tanto

$$\psi_{in}^\dagger \alpha_z \psi_{in} = -\frac{2k}{E+1} \quad (A1.8)$$

que es el denominador de la ecuación (A1.6)

da Póngase ahora $\psi = \begin{pmatrix} \psi_z \\ \psi_{\perp} \end{pmatrix}$, de modo que, la ecuación (A1.1) que

$$(E - V + 1) \psi_I = - \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \psi_{II} \quad (A1.9)$$

$$(E - V - 1) \psi_{II} = - \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \psi_I$$

la solución de este sistema de ecuaciones se puede poner como

$$\begin{aligned} \psi_I &= g(r) y_{j, l \frac{1}{2}}^m, \quad \text{paridad } (-1)^l \\ \psi_{II} &= f(r) y_{j, l' \frac{1}{2}}^m, \quad \text{paridad } (-1)^{l'} \end{aligned} \quad (A1.10)$$

donde

$$y_{j, l \frac{1}{2}}^m = \sum_{m_l = -l}^l \sum_{m_s = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle l \frac{1}{2} m_l m_s | j m \rangle Y_{l m_l} \chi_{\frac{1}{2} m_s} \quad (A1.11)$$

son los armónicos esféricos espinoriales, $Y_{l m_l}$ son los armónicos esféricos ordinarios,

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A1.12)$$

y $\langle l \frac{1}{2} m_l m_s | j m \rangle$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan⁵⁰.

Ahora bien, de las ecuaciones (A1.9) se ve que ψ_I y ψ_{II} deben diferir en paridad debido a la presencia del operador \underline{p} . Entonces $y_{j, l \frac{1}{2}}^m$ y $y_{j, l' \frac{1}{2}}^m$ difieren en paridad. Pero como $l = j \pm \frac{1}{2}$ y $l' = j \pm \frac{1}{2}$ se sigue que

$$l' = l \pm 1 \quad (A1.13)$$

Ahora hay que estudiar el efecto del operador $\frac{\underline{\sigma} \cdot \underline{r}}{r}$ sobre ψ_s , para lo cual hay que ver el efecto de $\frac{\underline{\sigma} \cdot \underline{r}}{r} = 2 \frac{s \cdot r}{r}$ sobre $f(r) y_{j, l \frac{1}{2}}^m$.

$$\left(\frac{s \cdot r}{r} \right) y_{j, l \frac{1}{2}}^m = a_{ll'}^j y_{j, l' \frac{1}{2}}^m, \quad (A1.14)$$

donde

$$a_{\ell\ell'}^j = \langle \ell' \frac{1}{2} j m | \underline{\sigma} \cdot \frac{\underline{r}}{r} | \ell \frac{1}{2} j m \rangle =$$

$$= -(-1)^{\ell'+\frac{1}{2}-j} \langle \ell' || \frac{\underline{r}}{r} || \ell \rangle \langle \frac{1}{2} || s || \frac{1}{2} \rangle \mathcal{W}(\ell' \frac{1}{2} \ell \frac{1}{2}, j 1) \quad (\text{A1.15})$$

donde $\mathcal{W}(\ell' \frac{1}{2} \ell \frac{1}{2}, j 1)$ es un coeficiente de Racah⁵¹ y $\langle \ell' || \frac{\underline{r}}{r} || \ell \rangle$ y $\langle \frac{1}{2} || s || \frac{1}{2} \rangle$ son elementos de matriz reducidos cuyos valores son⁵²

$$\langle \frac{1}{2} || s || \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\text{A1.16})$$

y

$$\langle \ell' || \frac{\underline{r}}{r} || \ell \rangle = \sqrt{2\ell+1} \langle \ell 1 0 0 | \ell' 0 \rangle \quad (\text{A1.17})$$

En consecuencia

$$a_{\ell\ell'}^j = (-1)^{\ell'+\frac{1}{2}-j} \sqrt{2\ell+1} \langle \ell 1 0 0 | \ell' 0 \rangle \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{W}(\ell' \frac{1}{2} \ell \frac{1}{2}, j 1) \quad (\text{A1.18})$$

Ahora bien, si $\ell = j + \frac{1}{2}$, entonces $\ell' = j - \frac{1}{2}$ y viceversa. Enton-
ces^{50,51}

$$a_{j+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^j = -\frac{1}{2} \quad \gamma \quad a_{j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^j = -\frac{1}{2} \quad (\text{A1.19})$$

Por tanto

$$\left(\underline{\sigma} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \right) f(r) \mathcal{Y}_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m = -f(r) \mathcal{Y}_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m \quad (\text{A1.20})$$

Por otra parte, por un cálculo semejante⁵²

$$\left(\underline{\sigma} \cdot \underline{p} \right) f(r) \mathcal{Y}_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m = i \left[\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right] f(r) \mathcal{Y}_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$$

$$\left(\underline{\sigma} \cdot \underline{p} \right) f(r) \mathcal{Y}_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m = i \left[\frac{d}{dr} + \frac{j+\frac{3}{2}}{r} \right] f(r) \mathcal{Y}_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m \quad (\text{A1.21})$$

Ahora bien, de las ecuaciones (A1.9), si no hay interacción

$$\psi_I = - \frac{\sigma \cdot P}{E+1}$$

por tanto si

$$\psi_{II} = h_{j-\frac{1}{2}}^{\pm}(kr) y_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m,$$

entonces, por (A1.21),

(A1.22)

$$\psi_I = \frac{ik}{E+1} h_{j+\frac{1}{2}}^{\pm}(kr) y_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m.$$

Y si

$$\psi_{II} = h_{j+\frac{1}{2}}^{\pm}(kr) y_{j, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m,$$

entonces, por (A1.21)

(A1.23)

$$\psi_I = -\frac{ik}{E+1} h_{j-\frac{1}{2}}^{\pm}(kr) y_{j, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$$

Regresando a la ecuación (A1.7), se puede poner, desarrollando la exponencial en ondas esféricas,

$$\psi_{in} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

Pero

$$P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta, \varphi)$$

(A1.24)

y de la ecuación (A1.11) se sigue que

$$Y_{20} X_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \sum_{j=|l-\frac{1}{2}|}^{l+\frac{1}{2}} \langle l \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} | j \frac{1}{2} \rangle y_{j l \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \quad (A1.25)$$

Por tanto

$$\psi_{in} = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{l=j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} i^l \sqrt{(2l+1)4\pi} \langle l \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} | j \frac{1}{2} \rangle \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} j_l(kr) y_{j l \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_l(kr) y_{j l \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (A1.26)$$

Pero si $l = j - \frac{1}{2}$ el coeficiente de C-G es $\frac{1}{\sqrt{2j+2}}$ y si $l = j + \frac{1}{2}$, el coeficiente de C-G es $\frac{1}{\sqrt{2j+2}}$, por tanto

$$\psi_{in} = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \left\{ i^{j-\frac{1}{2}} 2\sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} j_{j-\frac{1}{2}}(kr) y_{j j-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j-\frac{1}{2}}(kr) y_{j j-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} - i^{j+\frac{1}{2}} 2\sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} j_{j+\frac{1}{2}}(kr) y_{j j+\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j+\frac{1}{2}}(kr) y_{j j+\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} i^{j-\frac{1}{2}} 2\sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{ik}{E+1} j_{j+\frac{1}{2}}(kr) y_{j j+\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j-\frac{1}{2}}(kr) y_{j j-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -\frac{k}{E+1} j_{j-\frac{1}{2}}(kr) y_{j j-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j+\frac{1}{2}}(kr) y_{j j+\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\} \quad (A1.27)$$

$$= \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} i^{j-1-s} f_{j+s}(k, \varepsilon) \quad (A1.28)$$

donde

$$f_{j+s}(k, \varepsilon) = \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}+s} \frac{ik}{E+1} j_{j-s}(kr) y_{j, j-s, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ j_{j+s}(kr) y_{j, j+s, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (A1.29)$$

Llamando

$$h_{j+s}^{\pm}(k, r) = \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}+s} \frac{ik}{E+1} h_{j-s}^{\pm}(kr) y_{j, j-s, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ h_{j+s}^{\pm}(kr) y_{j, j+s, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (A1.30)$$

se tiene

$$\psi_{in} = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} i^{j-1-s} (h_{j+s}^{-}(k, r) + h_{j+s}^{+}(k, r)) \quad (A1.31)$$

Cuando hay interacción, la parte saliente se modifica, de modo que se tiene

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} i^{j-1-s} (h_{j+s}^{-}(k, r) + S_{j+s}(k) h_{j+s}^{+}(k, r)) \\ &= \psi_{in} + \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi(j+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (A1.32)$$

Por tanto

(A1.33)

Tomando ahora en cuenta que $h_{\ell}^{\pm}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{i^{\ell+1}} \frac{e^{ikr}}{kr}$, recordando que $\frac{\alpha, r}{r} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma, r}{r} \\ \frac{\sigma, r}{r} & 0 \end{pmatrix}$ y usando la ecuación (A1.20) es fácil

calcular el numerador de la ecuación (A1.6). Ahora bien, integrando ecuación (A1.6) para tener la sección total y usando el hecho de que los armónicos esféricos son ortonormales, se tiene finalmente

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (j+\frac{1}{2}) |S_{j+s}(k) - 1|^2 \quad (A1.34)$$

Apéndice 2. La función de dispersión para el potencial de Eckart.

En el capítulo 1 de la sección II se obtuvo la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$, en términos de las funciones de Jost, en la ecuación (1.32) que es

$$\bar{\phi}(k, r) = \frac{1}{2ikr_0} \left[f(-k) f(k, r_0) - f(k) f(-k, r_0) \right] \frac{f(-k, r)}{f(-k)} \quad (A2.1)$$

En el trabajo de Bargmann⁴² citado en el capítulo 3, se obtiene la función de Jost para el potencial de Eckart; dicha función es

$$f(k, r) = e^{ikr} \left[1 + i \frac{u(r)}{k - i\lambda} \right] \quad (A2.2)$$

donde

$$u(r) = \frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r}}{\gamma e^{-2\lambda r} + 1} \quad (A2.3)$$

Se construirá ahora la función de dispersión $\bar{\phi}(k, r)$ para este caso.

$$\text{Sea } F(k, r_0) = f(-k) f(k, r_0) - f(k) f(-k, r_0) \quad (A2.4)$$

Entonces, por la ecuación (A2.2),

$$\begin{aligned} F(k, r_0) &= e^{-ikr_0} \left[1 - i \frac{u(0)}{k + i\lambda} \right] \left[1 + i \frac{u(r_0)}{k - i\lambda} \right] - e^{ikr_0} \left[1 + i \frac{u(0)}{k - i\lambda} \right] \left[1 - i \frac{u(r_0)}{k + i\lambda} \right] \\ &= e^{-ikr_0} e^{ikr_0} e^{-ikr_0} \left[\frac{u(0)u(r_0)}{k^2 + \lambda^2} - \frac{i u(0)}{k + i\lambda} + \frac{i u(r_0)}{k - i\lambda} \right] - e^{ikr_0} \left[\frac{u(0)u(r_0)}{k^2 + \lambda^2} + \frac{i u(0)}{k - i\lambda} - \frac{i u(r_0)}{k + i\lambda} \right] \end{aligned}$$

Usando ahora la ecuación (A2.3), se tiene

$$F(k, r_0) = -2i \operatorname{sen} k r_0 + \frac{e^{i k r_0}}{k^2 + \lambda^2} \left\{ \frac{2\gamma\lambda}{\gamma+1} \frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r_0}}{\gamma e^{-2\lambda r_0} + 1} + i \left[(k+i\lambda) \frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r_0}}{\gamma e^{-2\lambda r_0} + 1} - (k-i\lambda) \frac{2\gamma\lambda}{\gamma+1} \right] \right\} - \frac{e^{-i k r_0}}{k^2 + \lambda^2} \left\{ \frac{2\gamma\lambda}{\gamma+1} \frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r_0}}{\gamma e^{-2\lambda r_0} + 1} + i \left[(k+i\lambda) \frac{2\gamma\lambda}{\gamma+1} - (k-i\lambda) \frac{2\gamma\lambda e^{-2\lambda r_0}}{\gamma e^{-2\lambda r_0} + 1} \right] \right\}$$

$$= -2i \operatorname{sen} k r_0 + \frac{e^{-i k r_0}}{k^2 + \lambda^2} \frac{e^{-\lambda r_0} [4\gamma^2 \lambda^2 + 2\gamma\lambda i (\gamma+1)(k+i\lambda) - 2i\gamma^2 \lambda (k-i\lambda)] - e^{\lambda r_0} 2i\gamma\lambda (k-i\lambda)}{(\gamma+1)(\gamma e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} - \frac{e^{i k r_0}}{k^2 + \lambda^2} \frac{e^{-\lambda r_0} [4\gamma^2 \lambda^2 - 2\gamma\lambda i (\gamma+1)(k-i\lambda) + 2i\gamma^2 \lambda (k+i\lambda)] - e^{\lambda r_0} 2i\gamma\lambda (k+i\lambda)}{(\gamma+1)(\gamma e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})}$$

$$= -2i \operatorname{sen} k r_0 + \frac{2i\gamma\lambda}{(\gamma+1)(\gamma e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} \left[\frac{e^{-\lambda r_0}}{k-i\lambda} - \frac{e^{\lambda r_0}}{k+i\lambda} \right] + e^{i k r_0} \frac{2i\gamma\lambda}{(\gamma+1)(\gamma e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} \left[\frac{e^{-\lambda r_0}}{k+i\lambda} - \frac{e^{\lambda r_0}}{k-i\lambda} \right]$$

$$= -2i \operatorname{sen} k r_0$$

$$- \frac{4\gamma\lambda}{(\gamma+1)(\gamma e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} \left[\frac{\operatorname{sen}(k+i\lambda)r_0}{k+i\lambda} - \frac{\operatorname{sen}(k-i\lambda)r_0}{k-i\lambda} \right] \quad (A2.5)$$

La expresión anterior es obviamente una función en r_0 de k , como debía ser

Por otra parte se tiene que

$$f(k) = \frac{k+i\nu}{k-i\lambda}, \quad (A2.6)$$

donde

$$\nu = \lambda \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (A2.7)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{f(-k, r)}{f(-k)} &= e^{ikr} \left[1 - i \frac{u(r)}{k+i\lambda} \right] \frac{k+i\lambda}{k-i\lambda} \\ &= e^{ikr} \left[k+i\lambda - iu(r) \right] \frac{1}{k-i\lambda} \\ &= e^{ikr} \left[1 + i \frac{\lambda + \nu - u(r)}{k - i\nu} \right] \end{aligned}$$

(A2.8)

La función de dispersión queda entonces

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k, r) &= \frac{1}{2ikr_0} \left\{ -2i \operatorname{sen} k r_0 - \frac{4\lambda}{(\delta + i\lambda e^{-\lambda r_0} + e^{\lambda r_0})} \left[\frac{\operatorname{sen}(k+i\lambda)r_0}{k+i\lambda} - \frac{\operatorname{sen}(k-i\lambda)r_0}{k-i\lambda} \right] \right\} \times \\ &\times \left[1 + i \frac{\lambda + \nu - u(r)}{k - i\nu} \right] e^{ikr} \end{aligned}$$

(A2.9)

Apéndice 3. El potencial de Bargmann y las funciones de Jost⁺

Supóngase que la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - V(r) \right] F(k, r) = 0, \quad (A3.1)$$

admite una solución del tipo $e^{-ikr} \xi(k, r)$. Entonces llamando

$$\xi(k, \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \xi(k, r) \quad (A3.2)$$

las funciones de Jost son

$$f(k, r) = e^{-ikr} \frac{\xi(k, r)}{\xi(k, \infty)} \quad (A3.3)$$

La ecuación que satisface la función $\xi(k, r)$ es

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - 2ik \frac{d}{dr} - V(r) \right] \xi(k, r) = 0 \quad (A3.4)$$

Considérese ahora que existe una función real $w(r)$ tal que

$$V(r) = 2 \left[\left(\frac{w'(r)}{w(r)} \right)^2 - \frac{w''(r)}{w(r)} \right] = -2 \frac{d^2}{dr^2} \log w(r) \quad (A3.5)$$

y que

$$\xi(k, r) = \frac{z(k, r)}{w(r)}. \quad (A3.6)$$

La ecuación (A3.4) queda entonces

$$wz'' - 2w'z' + w''z + 2ik(w'z - wz') = 0 \quad (A3.7)$$

⁺ Se presenta aquí los resultados de una discusión privada con V. Bargmann.

donde las "primas" significan derivada respecto r

Suponiendo ahora que

$$\overline{w(r)} = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2} e^{(n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) r} \quad (A3.8)$$

y que

$$z(k, r) = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2} (k - i n_1 \beta_1)(k - i n_2 \beta_2) e^{(n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) r}, \quad (A3.9)$$

donde n_1 y n_2 toman los valores ± 1 , de modo que tanto $w(r)$ como $z(k, r)$ tienen cuatro términos. Además β_1 y β_2 son dos constantes tales que

- a) ambas son reales, positivas y distintas, o bien
- b) son complejas conjugadas con parte real positiva.

Ahora bien, sustituyendo (A3.8) y (A3.9), en (A3.7), se ve que la ecuación diferencial se satisface si

$$a_{n_1, n_2} = \frac{\theta_{n_1}^1 \theta_{n_2}^2}{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2}, \quad (A3.10)$$

donde $\theta_{n_1}^1$ y $\theta_{n_2}^2$ son constantes.

Por otra parte, puesto que las constantes β tienen parte real positiva, el término dominante para r grande en las funciones $w(r)$ y $z(k, r)$ es aquel en el que $n_1 = n_2 = 1$, por tanto

$$\xi(r, \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{z(k, r)}{w(r)} = (k - i \beta_1)(k - i \beta_2). \quad (A3.11)$$

Las constantes $\theta_{n_i}^i$ se eligen en la forma

$$\theta_{n_1}^1 = n_1 (\alpha_1 + n_1 \beta_1)(\alpha_2 + n_1 \beta_1)$$

$$\theta_{n_2}^2 = n_2 (\alpha_1 + n_2 \beta_2)(\alpha_2 + n_2 \beta_2)$$

$$(A3.12)$$

donde α_1 y α_2 son dos constantes tales que

- a) ambas son reales, positivas y distintas, o
- b) son complejas conjugadas con parte real positiva.

Se supone además que $\alpha_i^2 \neq \beta_j^2$ para toda i, j

La función de Jost se puede calcular ahora muy fácilmente de la forma de las constantes a_{n, n_2} y de la ecuación (A3.11). En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{(k-i\beta_1)(k-i\beta_2)}{\xi(k, \infty)} &= 1 \\ \frac{(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)}{\xi(k, \infty)} &= 1 + \frac{2i\beta_2}{k-i\beta_2} \\ \frac{(k+i\beta_1)(k-i\beta_2)}{\xi(k, \infty)} &= 1 + \frac{2i\beta_1}{k-i\beta_1} \\ \frac{(k+i\beta_1)(k+i\beta_2)}{\xi(k, \infty)} &= 1 + \frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2} \left(\frac{2i\beta_1}{k-i\beta_1} - \frac{2i\beta_2}{k-i\beta_2} \right) \end{aligned} \tag{A3.13}$$

Por tanto

$$\frac{Z(k, r)}{\xi(k, \infty)} = w(r) + \frac{2i\beta_1}{k-i\beta_1} \left(a_{-1,1} e^{-(\beta_1+\beta_2)r} + a_{-1,2} \frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2} e^{-(\beta_1+\beta_2)r} \right) + \frac{2i\beta_2}{k-i\beta_2} \left(a_{1,1} e^{(\beta_1-\beta_2)r} + a_{1,2} \frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_2-\beta_1} e^{-(\beta_1+\beta_2)r} \right) \tag{A3.14}$$

y en consecuencia, la función $f(k, r)$ queda

$$f(k, r) = \frac{Z(k, r)}{w(r)\xi(k, \infty)} e^{-ikr} = \left[1 + \frac{A(r)}{k-i\beta_1} + \frac{B(r)}{k-i\beta_2} \right] e^{-ikr} \tag{A3.15}$$

donde

$$A(r) = \frac{2i\beta_1}{w(r)} \left(a_{-1,1} e^{(\beta_1+\beta_2)r} + \frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2} a_{-1,2} e^{-(\beta_1+\beta_2)r} \right) \tag{A3.16}$$

$$B(r) = \frac{2i\beta_2}{\omega(r)} \left(a_{1,-1} e^{(\beta_1 - \beta_2)r} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} a_{-1,-1} e^{-(\beta_1 + \beta_2)r} \right) \quad (A3.16)$$

En particular, para $r=0$, se tiene que

$$f(k) = \frac{(k - i\alpha_1)(k - i\alpha_2)}{(k - i\beta_1)(k - i\beta_2)}, \quad (A3.17)$$

debido a que

$$\omega(0) = 4\beta_1\beta_2(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (A3.18)$$

El modo de calcular $\omega(0)$ es muy simple tomando en cuenta que

$$n_1^2 = n_2^2 = 1; \quad \sum_{n_1, n_2} \frac{n_1 n_2}{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2} = \sum_{n_1, n_2} \frac{n_1^2 n_2^2}{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2} = 0;$$

$$\sum_{n_1, n_2} \frac{n_1 n_2^2}{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2} = \frac{4\beta_1}{\beta_1^2 - \beta_2^2}; \quad \sum_{n_1, n_2} \frac{n_1^2 n_2}{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2} = \frac{4\beta_2}{\beta_2^2 - \beta_1^2}.$$

Ahora se determinará el valor del potencial $V(r)$ para $r=0$ y su forma asintótica para r muy grande. De la ecuación (A3.5), se ve que para obtener $V(0)$ hay que calcular $\omega(0)$, $\omega'(0)$ y $\omega''(0)$. En la ecuación (A3.18) está dado el valor de $\omega(0)$.

Usando ahora las igualdades siguientes

$$\sum_{n_1, n_2} n_1 n_2 = \sum_{n_1, n_2} n_1 n_2^2 = \sum_{n_1, n_2} n_1^2 n_2 = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n_1, n_2} n_1^2 n_2^2 = 4,$$

es inmediato ver que

$$\omega'(0) = 4\beta_1\beta_2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \quad (A3.19)$$

Finalmente, usando que

$$\sum_{n_1, n_2} n_1 n_2 (n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) = \sum_{n_1, n_2} n_1^2 n_2^2 (n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) = 0 \quad ;$$

$$\sum_{n_1, n_2} n_1 n_2^2 (n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) = 4\beta_1 \quad \text{y} \quad \sum_{n_1, n_2} n_1^2 n_2 (n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2) = 4\beta_2 \quad ,$$

se tiene que

$$\omega''(0) = 4\beta_1 \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2) (2\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \quad (\text{A3.20})$$

Por tanto, sustituyendo (A3.18), (A3.19) y (A3.20) en (A3.5) se tiene

$$V(0) = 2 \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2) \right] \quad (\text{A3.21})$$

Para obtener la forma asintótica para r muy grande, es necesario observar que el término que crece más rápidamente en la función $\omega(r)$ es el que tiene $n_1 = n_2 = 1$. Entonces se puede poner

$$\omega(r) = a_{11} e^{(\beta_1 + \beta_2)r} \omega_0(r) \quad (\text{A3.22})$$

donde

$$\omega_0(r) = 1 + \frac{a_{1,-1}}{a_{11}} e^{-2\beta_2 r} + \frac{a_{-1,1}}{a_{11}} e^{-2\beta_1 r} + \frac{a_{-1,-1}}{a_{11}} e^{-2(\beta_1 + \beta_2)r} \quad (\text{A3.23})$$

y los tres últimos términos son decrecientes y el último es el que decrece más rápidamente.

De la definición (A3.5), se ve que

$$V(r) = -2 \frac{d^2}{dr^2} \log \omega_0(r) = 2 \left[\left(\frac{\omega_0'(r)}{\omega_0(r)} \right)^2 - \frac{\omega_0''(r)}{\omega_0(r)} \right] \quad (\text{A3.24})$$

Ahora bien, $\omega_0(r)$ tiende a la unidad cuando $r \rightarrow \infty$, y las funciones $\omega_0'(r)$ y $\omega_0''(r)$ decrecen exponencialmente en la misma forma. Como

la función $\omega_0(r)$ está elevada al cuadrado en la ecuación (A3.24), el término dominante para valores grandes de r en la expresión que da el potencial es el último, o sea

$$V(r) \sim -2\omega_0''(r) = -8 \left(\frac{a_{1,1}}{a_{11}} \beta_2^2 e^{-2\beta_2 r} + \frac{a_{-1,1}}{a_{11}} \beta_1^2 e^{-2\beta_1 r} \right) \quad (\text{A3.25})$$

cuando $r \rightarrow \infty$.

Apéndice 4. La función de dispersión para el potencial de Bargmann.

En el apéndice 3 se determinó la función de Jost para el potencial de Bargmann, ahora se determinará la función de dispersión.

Sea $F(k, r_0) = f(-k) f(k, r_0) - f(k) f(-k, r_0)$, (A4.1)

entonces, por la ecuación (A3.15), se tiene

$$\begin{aligned}
 F(k, r_0) &= e^{-ikr_0} \left[1 - \frac{A(0)}{k+i\beta_1} - \frac{B(0)}{k+i\beta_2} \right] \left[1 + \frac{A(r_0)}{k-i\beta_1} + \frac{B(r_0)}{k-i\beta_2} \right] \\
 &- e^{ikr_0} \left[1 + \frac{A(0)}{k-i\beta_1} + \frac{B(0)}{k-i\beta_2} \right] \left[1 - \frac{A(r_0)}{k+i\beta_1} - \frac{B(r_0)}{k+i\beta_2} \right] = \\
 &= -2i \operatorname{sen} kr_0 + \\
 &+ e^{-ikr_0} \left[-\frac{A(r_0)A(0)}{2i\beta_1} \left(\frac{1}{k-i\beta_1} - \frac{1}{k+i\beta_1} \right) - \frac{B(r_0)B(0)}{2i\beta_2} \left(\frac{1}{k-i\beta_2} - \frac{1}{k+i\beta_2} \right) + \frac{A(r_0)}{k-i\beta_1} \right. \\
 &- \frac{A(0)}{k+i\beta_1} + \frac{B(r_0)}{k-i\beta_2} - \frac{B(0)}{k+i\beta_2} - \frac{A(r_0)B(0)}{i(\beta_2+\beta_1)} \left(\frac{1}{k-i\beta_1} - \frac{1}{k+i\beta_2} \right) - \frac{A(0)B(r_0)}{-i(\beta_2+\beta_1)} \left(\frac{1}{k+i\beta_1} - \frac{1}{k-i\beta_2} \right) \\
 &- e^{ikr_0} \left[-\frac{A(r_0)A(0)}{2i\beta_1} \left(\frac{1}{k-i\beta_1} - \frac{1}{k+i\beta_1} \right) - \frac{B(r_0)B(0)}{2i\beta_2} \left(\frac{1}{k-i\beta_2} - \frac{1}{k+i\beta_2} \right) \right. \\
 &+ \frac{A(0)}{k-i\beta_1} - \frac{A(r_0)}{k+i\beta_1} + \frac{B(0)}{k-i\beta_2} - \frac{B(r_0)}{k+i\beta_2} - \frac{A(0)B(r_0)}{i(\beta_2+\beta_1)} \left(\frac{1}{k-i\beta_1} - \frac{1}{k+i\beta_2} \right) \\
 &\left. \left. - \frac{A(r_0)B(0)}{-i(\beta_2+\beta_1)} \left(\frac{1}{k+i\beta_1} - \frac{1}{k-i\beta_2} \right) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2i\beta_1 \sin \kappa r_0 + e^{-i\kappa r_0} \left\{ \frac{A(r_0)}{\kappa - i\beta_1} \left[1 - \frac{A(0)}{2i\beta_1} - \frac{B(0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] + \frac{A(0)}{\kappa + i\beta_1} \left[-1 + \frac{A(r_0)}{2i\beta_1} + \frac{B(r_0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] \right. \\
 &+ \frac{B(r_0)}{\kappa - i\beta_2} \left[1 - \frac{B(0)}{2i\beta_2} - \frac{A(0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] + \frac{B(0)}{\kappa + i\beta_2} \left[-1 + \frac{B(r_0)}{2i\beta_2} + \frac{A(r_0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] \left. \right\} \\
 &- e^{i\kappa r_0} \left\{ \frac{A(0)}{\kappa - i\beta_1} \left[1 - \frac{A(r_0)}{2i\beta_1} - \frac{B(r_0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] + \frac{A(r_0)}{\kappa + i\beta_1} \left[-1 + \frac{A(0)}{2i\beta_1} + \frac{B(0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] \right. \\
 &+ \frac{B(0)}{\kappa - i\beta_2} \left[1 - \frac{B(r_0)}{2i\beta_2} - \frac{A(r_0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] + \frac{B(r_0)}{\kappa + i\beta_2} \left[-1 + \frac{B(0)}{2i\beta_2} + \frac{A(0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] \left. \right\} \quad (A4.2)
 \end{aligned}$$

Ahora bien, de las ecuaciones (A3.16) se ve que las funciones $A(r)$ y $B(r)$ se obtienen una de la otra mediante el intercambio de β_1 y β_2 , entonces basta evaluar el coeficiente de $\frac{e^{-i\kappa r_0}}{\kappa - i\beta_1}$ y el de $(\kappa - i\beta_1)^{-1} e^{i\kappa r_0}$ para encontrar una forma reducida de la ecuación (A4.2).

En primer lugar, de las ecuaciones (A3.16) se tiene que

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{A(r)}{2i\beta_1} - \frac{B(r)}{i(\beta_2 + \beta_1)} &= \frac{1}{\omega(r)} \left[\omega(r) - a_{-1,1} e^{-(\beta_1 + \beta_2)r} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} a_{-1,1} e^{-(\beta_1 + \beta_2)r} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} (a_{1,1} e^{(\beta_1 - \beta_2)r} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} a_{-1,1} e^{-(\beta_1 + \beta_2)r}) \right] = \\
 &= \frac{1}{\omega(r)} \left[a_{1,1} e^{(\beta_1 + \beta_2)r} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} a_{-1,1} e^{(\beta_1 - \beta_2)r} \right]. \quad (A4.3)
 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 A(r_0) \left[1 - \frac{A(0)}{2i\beta_1} - \frac{B(0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] &= \frac{2i\beta_1}{\omega(r_0)\omega(0)} \left[a_{-1,1} e^{\beta_2 r_0} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 r_0} \right] \left[a_{1,1} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} a_{-1,1} \right] e^{-\beta_1 r_0} \\
 &= \frac{i}{2} C_1(r_0) e^{-\beta_1 r_0} \quad (A4.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(0) \left[1 - \frac{A(r_0)}{2i\beta_1} - \frac{B(r_0)}{i(\beta_2 + \beta_1)} \right] &= \frac{2i\beta_1}{\omega(r_0)\omega(0)} \left[a_{-1,1} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} a_{-1,1} \right] \left[a_{1,1} e^{\beta_2 r_0} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} a_{-1,1} e^{-\beta_2 r_0} \right] e^{\beta_1 r_0} \\
 &= \frac{i}{2} C_1(r_0) e^{\beta_1 r_0}, \quad (A4.5)
 \end{aligned}$$

donde se ha llamado $\frac{i}{2} C_1(r_0)$ al coeficiente de $e^{-\beta_1 r_0}$ en la ecuación (A2.4)

y al coeficiente de $e^{\beta_1 r_0}$ en la ecuación (A2.5), que son iguales como puede verse efectuando el producto indicado. Llamando ahora $C_2(r_0)$ a la función que se obtiene de $C_1(r_0)$ por el intercambio de β_1 y β_2 se tiene que

$$\begin{aligned}
 F(k, r_0) &= -2i \operatorname{sen} k r_0 + e^{-ikr_0} \left[\frac{i}{2} \frac{C_1(r_0)}{k-i\beta_1} e^{-\beta_1 r_0} - \frac{i}{2} \frac{C_1(r_0)}{k+i\beta_1} e^{\beta_1 r_0} + \frac{i}{2} \frac{C_2(r_0)}{k-i\beta_2} e^{-\beta_2 r_0} - \frac{i}{2} \frac{C_2(r_0)}{k+i\beta_2} e^{\beta_2 r_0} \right] \\
 &- e^{ikr_0} \left[\frac{i}{2} \frac{C_1(r_0)}{k-i\beta_1} e^{\beta_1 r_0} - \frac{i}{2} \frac{C_1(r_0)}{k+i\beta_1} e^{-\beta_1 r_0} + \frac{i}{2} \frac{C_2(r_0)}{k-i\beta_2} e^{\beta_2 r_0} - \frac{i}{2} \frac{C_2(r_0)}{k+i\beta_2} e^{-\beta_2 r_0} \right] \\
 &= -2i \operatorname{sen} k r_0 + \\
 &+ C_1(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(k-i\beta_1)r_0}{k-i\beta_1} - \frac{\operatorname{sen}(k+i\beta_1)r_0}{k+i\beta_1} \right] + C_2(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(k-i\beta_2)r_0}{k-i\beta_2} - \frac{\operatorname{sen}(k+i\beta_2)r_0}{k+i\beta_2} \right] \quad (A4.6)
 \end{aligned}$$

que es evidentemente una función entera de k

Ahora, por las ecuaciones (A3.15) y (A3.17),

$$\begin{aligned}
 \frac{f(-k, r)}{f(k)} &= e^{ikr} \left[1 - \frac{A(r)}{k+i\beta_1} - \frac{B(r)}{k+i\beta_2} \right] \frac{(k+i\beta_1)(k+i\beta_2)}{(k+i\alpha_1)(k+i\alpha_2)} \\
 &= e^{ikr} \left[\frac{(k+i\beta_1)(k+i\beta_2)}{(k+i\alpha_1)(k+i\alpha_2)} - \frac{A(r)(k+i\beta_2)}{(k+i\alpha_1)(k+i\alpha_2)} - \frac{B(r)(k+i\beta_1)}{(k+i\alpha_1)(k+i\alpha_2)} \right] \\
 &= e^{ikr} \left[\left(1 + i \frac{\beta_1 - \alpha_1}{k+i\alpha_1} \right) \left(1 + i \frac{\beta_2 - \alpha_2}{k+i\alpha_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{A(r)}{k+i\alpha_1} \left(1 + i \frac{\beta_2 - \alpha_2}{k+i\alpha_2} \right) - \frac{B(r)}{k+i\alpha_2} \left(1 + i \frac{\beta_1 - \alpha_1}{k+i\alpha_1} \right) \right] \\
 &= e^{ikr} \left\{ 1 + \frac{1}{k+i\alpha_1} \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[(\beta_2 - \alpha_1)(i(\beta_1 - \alpha_1) - A(r)) - (\beta_1 - \alpha_1)B(r) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{k+i\alpha_2} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[(\beta_1 - \alpha_2)(i(\beta_2 - \alpha_2) - B(r)) - (\beta_2 - \alpha_2)A(r) \right] \right\} \\
 &= e^{ikr} \left[1 + \frac{D_1(r)}{k+i\alpha_1} + \frac{D_2(r)}{k+i\alpha_2} \right], \quad (A4.7)
 \end{aligned}$$

donde se ha llamado $D_1(r)$ al coeficiente de $(k+i\alpha_1)^{-1}$ y $D_2(r)$ al de $(k+i\alpha_2)^{-1}$ en la expresión anterior. Nótese que $D_1(r)$ y $D_2(r)$ se pueden obtener uno del otro mediante el intercambio de β_1 y β_2 y de α_1 y α_2 .

La función de dispersión

$$\bar{\phi}(k,r) = \frac{1}{2ikr_0} F(k,r_0) \frac{f(-k,r)}{f(-k)}$$

queda entonces, por las ecuaciones (A4.5) y (A4.7),

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k,r) = & \frac{1}{2ikr_0} \left\{ -2i \operatorname{sen} kr_0 + C_1(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(k-i\beta_1)r_0}{k-i\beta_1} - \frac{\operatorname{sen}(k+i\beta_1)r_0}{k+i\beta_1} \right] \right. \\ & \left. + C_2(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(k-i\beta_2)r_0}{k-i\beta_2} - \frac{\operatorname{sen}(k+i\beta_2)r_0}{k+i\beta_2} \right] \right\} \times \\ & \times \left[1 + \frac{D_1(r)}{k+i\alpha_1} + \frac{D_2(r)}{k+i\alpha_2} \right] e^{ikr} \end{aligned} \quad (A4.8)$$

BIBLIOGRAFIA

- 1.- H.A. Kramers, Atti. Congr. Inter. Fis. Como 2, 545 (1927)
- 2.- R. Kronig, J. Opt. Soc. Am. 12, 547 (1926)
- 3.- R. Kronig, Physica 12, 543 (1946)
- 4.- T.S. Toll, Phys. Rev. 104, 1760 (1956)
- 5.- E. Corinaldesi, Nuclear Physics 2, 420 (1956)
- 6.- N.G. van Kampen, Phys. Rev. 89, 1072 (1953)
- 7.- D.Y. Wong y J.S. Toll, Annals of Physics 1, 91 (1957)
- 8.- N.G. van Kampen, Phys. Rev. 91, 1267 (1953)
- 9.- D.Y. Wong, Phys. Rev. 107, 302 (1957)
- 10.- J.M. Knight y J.S. Toll, Annals of Physics 3, 49 (1958)
- 11.- M. Moshinsky, Rev. Mex. Fis. 1, 151 (1952);
M. Moshinsky, Tesis doctoral, Princeton University (1949)
- 12.- M. Gell-Mann, M.L. Goldberger y W.E. Thirring, Phys. Rev. 95,
1612 (1954)
- 13.- H. Lehmann, K. Symanzik y W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1, 205
(1955)
- 14.- Para ver una lista extensa de referencias puede recurrirse por
ejemplo a: H. Bremmerman, R. Oehme y J.G. Taylor. Phys. Rev.
109, 2178 (1958)
- 15.- M. Lévy, Dispersion Relations and applications to elementary -
particle reactions. Publicación de la Escuela Latinoamericana
de Física. México (1959)
- 16.- W. Heisenberg, Zeits, F. Physik 120, 513 y 673 (1943)
C. Möller, Kgl. Danske Vidensk. Selskab Math. Phys. Medd. 23
(1) (1945) y 24 (19) (1946)
- 17.- N. Hu, Phys. Rev. 74, 131 (1948)
- 18.- T. Regge, Nuovo Cimento 8, 671 (1958)
- 19.- T. Regge, Nuovo Cimento 9, 295 (1958)
- 20.- H.M. Nussenzveig, Nuclear Physics 11, 499 (1959)
- 21.- A. Martin, Nuovo Cimento 14, 403 (1959)
- 22.- G. Beck y H.M. Nussenzveig, Nuovo Cimento 16, 416 (1960)

- 23.- W. Schützer y J. Tiomno, Phys. Rev. 83, 249 (1951)
- 24.- N.N. Khuri, Phys. Rev. 107, 1148 (1957)
- 25.- N.N. Khuri y S.B. Trieman, Phys. Rev. 109, 198 (1958)
- 26.- R. Jost y A. Pais, Phys. Rev. 82, 840 (1951)
- 27.- A. Klein y C. Zemach, Anals of Physics 7, 440 (1959)
- 28.- L.D. Faddeev, Soviet Phys. JETP 8, 299 (1959)
- 29.- R. Jost, Helv. Phys. Acta 20, 256 (1947)
- 30.- M. Moshinsky, Simposium on new techniques in Physics, Rio de Janeiro (1954) p. 285
- 31.- M. Moshinsky, Rev. Mex. Fís. 1, 114 (1951)
- 32.- J. M. Lozano, Rev. Mex. Fís. 2, 155 (1953)
- 33.- P.M. Morse y H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw Hill (1953) p. 1574
- 34.- Ibid p. 1573
- 35.- M. Moshinsky, Anais de Academia Brasileira de Ciencias 4, 343 (1952)
- 36.- M. Lax, Phys. Rev. 78, 306 (1950)
- 37.- ver p.e. L. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw Hill (1955) p. 311
- 38.- N.F. Mott y H.S.W. Massey, Theory of Atomic Collisions, Oxford (1949) p. 117
- 39.- G.N. Watson, Bessel Functions, Cambridge (1952) p. 363
- 40.- H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, Operational Methods in Applied - - Mathematics, Oxford (1941) p. 72
- 41.- E. L. Ince, Ordinary, Differential Equations, Dover p. 72
- 42.- V. Bargmann, Rev. Mod. Phys. 21, 488 (1949)
- 43.- ver referencia (38) p.108
- 44.- C. Eckart, Phys. Rev. 35, 13030 (1930)
- 45.- I.M. Gelfand y Levitan, Amer. Math. Soc. Trans. Sec. 21, 250 (1955)
- 46.- R. Jost y W. Kohn, Kgl. Danske Vidensk. Selskab Math. Phys. Medd. 27 (9) (1953)
- 47.- M. Moshinsky, Phys. Rev. 84, 525 (1951)

- 48.- E.T. Whittaker y G.N. Watson, Modern Analysis, Cambridge (1943)
p. 341
- 49.- J.M. Blatt y L.C. Biedernharn, Rev. Mod. Phys, 24, 258 (1952)
- 50.- ver p.e. E.U. Condon y G.H. Shortley, Theory of Atomic Spectra,
Cambridge (1953) p.75
- 51.- ver p.e. L.C. Biedenharn, J.M. Blatt y M.E. Rose, Rev. Mod. Phys.
24, 249 (1952).
- 52.- M.E. Rose, Angular Momentum, Wiley (1957) p. 154