(1-3)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

Título en el forro

Resolución de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas.

T E S I S

que presenta la Pasante

MARIA DEL CARMEN ALBURQUERQUE GARCIA

para obtener el título de

PROFESORA DE MATEMATICAS

EN ESCUELAS

SECUNDARIAS Y PREPARATORIAS.

MEXICO, D.F.

1943

CON SINCERO CARIÑO A MIS
QUERIDISIMOS PADRES.

I. DIVERSOS SISTEMAS DE UNIDADES ANGULARES. CONVERSIONES

Un ángulo puede medirse en varios sistemas, a saber:

1. El que tiene por unidad el radián.
2. El que tiene por unidad el grado.
3. El que tiene por unidad el grado centesimal.

1.- El sistema que tiene como base el radián o sea el ángulo comprendido entre dos radios y subtendido por un arco igual a un radio, es el que se usa para demostraciones y asuntos puramente teóricos; este sistema es muy útil especialmente en Trigonometría.

2.- En la práctica se conviene en dividir la circunferencia en cuatro partes, cada una de las cuales recibe el nombre de cuadrante; asímismo, se considera que la circunferencia sea dividida en 360 partes, una de las cuales recibe el nombre de grado, a su vez el grado se subdivide en 60 minutos y éste en 60 segundos pudiendo apreciarse también décimos, centésimos, etc., de segundo.

3.- Otro sistema menos generalizado es el que tiene por unidad el grado centesimal, éste corresponde a la 400ª parte de la circunferencia, se acepta que cada grado centesimal se subdivida en 100 minutos centesimales y éste en 100 segundos centesimales. La anotación que se usa es: sea por ejemplo expresar el ángulo de 30° 25' 16.38" en grados centesimales, entonces se tiene: 30 [illegible] 251638 o bien, tomando como unidad global el grado centesimal: 30.251638, número decimal.

Conversión del sistema que tiene por unidad el radián al sistema que tiene por unidad el grado. -- Sea r la medida de un ángulo en radianes y d la medida del mismo ángulo en grados, entonces se tiene:

$$\frac{r}{2\pi} = \frac{d}{360} \quad \therefore \quad r = \frac{2\pi}{360} d = \frac{\pi}{180} d \quad y \quad d = \frac{360}{2\pi} r = \frac{180}{\pi} r$$

Ejemplo 1.- Expresar el ángulo de 2º 12' 3.8" en radianes.

Expresando primeramente todo en grados se tiene:

$$(2 + \frac{12}{60} + \frac{3.8}{60^2})^{\circ}$$

de donde, con la fórmula correspondiente

$$r = \frac{\pi}{180} \left(2 + \frac{1}{5} + \frac{3.8}{60^2}\right)^{\circ}$$

considerando $\pi = 3.1416$

Antes de continuar es conveniente especificar la aproximación con que se desea el ángulo en radianes para que así se determine el valor de π en las aproximaciones numéricas, hecho esto se efectúan las operaciones indicadas y se llega finalmente a 0.03841 radianes.

Ejemplo 2.- Expresar un radián en grados.

En este caso r = 1; con la fórmula correspondiente

$$d = \frac{180}{\pi} \cdot 1 = 57^{\circ}\ 17'\ 44.8''$$

e inversamente:

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

Conversión del sistema que tiene por unidad el radián al sistema que tiene por unidad el grado centesimal.

Si r es la medida del ángulo en radianes y g es la medida en grados centesimales queda:

$$\frac{r}{2\pi} = \frac{g}{400}$$

se tienen las fórmulas:

$$r = \frac{2\pi}{400} g = \frac{\pi}{200} g \quad y \quad g = \frac{400}{2\pi} r = \frac{200}{\pi} r$$

En la práctica esta conversión se usa poco, ya que el sistema que tiene por unidad el grado centesimal no se usa mucho.

Conversión del sistema que tiene por unidad el grado centesimal al de unidad grado.

Si g y d son las medidas respectivas de un ángulo en cada uno de los sistemas, se tiene:

$$\frac{g}{400} = \frac{d}{360} \quad \therefore \quad g = \frac{400}{360}\, d = \frac{10}{9}\, d$$

$$d = \frac{360}{400}\, g = \frac{9}{10}\, g$$

Ejemplo 1.- Convertir en grados centesimales el ángulo 15° 18' 46.5"; expresando primero el ángulo en grados exclusivamente se tiene:

$$15 + \frac{18}{60} + \frac{46.5}{60^2}$$

entonces:

$$g = \left(15 + \frac{18}{60} + \frac{46.5}{60^2}\right)\frac{10}{9}$$

efectuando operaciones se llega a:

$$15^\circ\, 18'\, 46.5'' = 17.0143 = 17^{\gamma}\,0143$$

Ejemplo 2.- Convertir $45^{\gamma}1507$ en grados.

Expresando todo en grados centesimales:

45.1507

$$d = \frac{9}{10}\,(45.1507) = 40.63563^\circ = 40^\circ 38' 8.268''$$

$$0.63563^\circ(60') = 38.13780 = 38' + 0.1378'$$

$$0.1378'\,(60'') = 8.2680 = 8.268''$$

En la práctica es conveniente recordar el equivalente de ciertos ángulos en cada uno de los sistemas dichos:

Sistema que tiene por unidad de radian.	Sistema que tiene por unidad el grado.	Sistema que tiene por unidad el grado centesimal
2π	360°	400 γ
π	180°	200 γ
$\frac{\pi}{2}$	90°	100 γ
$\frac{\pi}{4}$	45°	50 γ
$\frac{\pi}{3}$	60°	66 γ 66...
$\frac{\pi}{6}$	30°	33 γ 33...

- o O o -

II.- DEFINICION DE IGUALDAD TRIGONOMETRICA. IDENTIDADES. ECUACIONES. NUMERO DE SOLUCIONES. POSIBILIDAD DE ELLAS.

Una expresión trigonométrica se forma por una o más funciones trigonométricas cualesquiera susceptibles de afectarse por todas las operaciones algebraicas posibles. Así por ejemplo, son expresiones trigonométricas las siguientes:

$\operatorname{sen} x$, $4 \tan^3 y$, $2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$, $5 \cos a$, $4 \cos^4 x + 2 \cos^2 x$ etc. etc.

Cuando entre dos expresiones trigonométricas se interpone un signo igual, se obtiene una igualdad trigonométrica. Entre las igualdades trigonométricas se distinguen dos clases; unas las identidades y otras las ecuaciones. Una identidad trigonométrica es una igualdad de dos expresiones trigonométricas equivalentes; se dice que dos expresiones trigonométricas son equivalentes, cuando sus valores numéricos son siempre iguales, cualesquiera que sean los valores atribuídos a los ángulos que las forman, así pues, son identidades las fórmulas fundamentales y las que se derivan de ellas mediante cálculos algebraicos.

Ejemplo:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad 2 \operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos 2a$$

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

Es conveniente recordar constantemente que las identidades trigonométricas son la base para resolver las ecuaciones trigonométricas y que mientras mayor sea el número de identidades conocidas, más fácil será la resolución de dichas ecuaciones, como se verá en los párrafos siguientes.

Una ecuación trigonométrica es una igualdad de dos expresiones trigonométricas formadas por una o varias funciones trigonométricas de ángulos desconocidos y que sólo se verifica para determinados valores dados a esos ángulos. Las ecuaciones trigonométricas que a continuación se estudian son las que contienen:

a) Términos con una sola función trigonométrica;

Ejemplo:

$\tan x = 1.732$; $\operatorname{sen} x = -0.5$; $\cos x = 1$; etc.

b) Términos con varias funciones trigonométricas del mismo ángulo.

Ejemplo:

$3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = 1$; $2 \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$, etc., etc.

c) Términos con funciones trigonométricas de ángulos múltiplos y sub-múltiplos del ángulo desconocido.

Ejemplo:

$\cos ax + \cos bx = 0$; $2 \tan \frac{x}{3} + \cot \frac{x}{12} = 0$

$\operatorname{sen}^2 ax = c$, etc.

Resolver una ecuación trigonométrica, es encontrar el valor del ángulo desconocido que substituído en la ecuación haga iguales los dos miembros de ella, este valor es una solución de la ecuación propuesta, pero no es el único sino que de él se derivan un número infinito de soluciones según el número de circunferencias completas que se tomen en cuenta. La solución de una ecuación trigonométrica es, por consiguiente, en número infinito, ya que a una función determinada corresponde un número infinito de ángulos.

Para encontrar las soluciones de una ecuación trigonométrica, lo que generalmente se hace, es reducirla a una de las formas conocidas de las ecuaciones algebraicas, tomando como incógnita auxiliar a una de las funciones trigonométricas correspondientes al ángulo desconocido o a otro del que pueda obtenerse fácilmente el ángulo pedido; dicho esto, lo primero que deberá hacerse es reemplazar, en función de la incógnita auxiliar todas las funciones trigonométricas que intervengan y resolver la ecuación algebraicamente. Cada una de las soluciones dará por resultado una ecuación trigonométrica simple cuya forma puede ser alguna de estas:

$$\text{sen } x = a, \ \cos x = b, \ \tan x = c, \ \cot x = d;$$

$$\sec x = e, \ \csc x = f$$

Discutiendo la posibilidad de cada una de las ecuaciones finales, se obtiene con la ayuda de las tablas correspondientes, el valor del ángulo pedido y los que de él se derivan.

III.- RESOLUCION DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

Estas ecuaciones pueden reducirse finalmente a una de las formas siguientes:

$$\text{sen } x = a, \ \cos x = b, \ \tan x = c, \ \cot x = d, \ \sec x=e,$$

$$\csc x = f$$

cuyas soluciones se obtienen.

Sea la ecuación sen $x = a$, entonces $x = \text{sen}^{-1}(a)$

Si (a) es positivo: $x = 2k\pi + \alpha$ y $(2k + 1)\pi - \alpha$;

Si (a) es negativo: $x = 2k\pi - \alpha$ y $(2k + 1)\pi + \alpha$;

α existe cuando

$$-1 \leqq a \leqq 1 \text{ ó } a^2 \leqq 1$$

ya que (+ 1) y (- 1) son los límites entre los cuales la función seno varía. Si se tiene $\cos x = a$, entonces $x = \cos^{-1}(a)$. $x = 2k\pi \pm \alpha$ si <u>a</u> es positivo. Si <u>a</u> es negativo: $x = 2k\pi \pm (\pi - \alpha)$; α existe cuando $-1 \leq a \leq 1$ ó $a^2 \leq 1$; pues (+1) y (-1) son los límites entre los cuales la función coseno puede variar.

Si se tiene $\tan x = a$, entonces $x = \tan^{-1}(a)$

Si <u>a</u> es positivo $x = k\pi + \alpha$, y si <u>a</u> es negativo: $x = k\pi - \alpha$. En este caso <u>a</u> puedė variar -- desde $+\infty$ a $-\infty$. Si se tiene $\cot x = a$, entonces: $x = \cot^{-1}(a)$. Si <u>a</u> es positivo, $x = k\pi + \alpha$; si <u>a</u> es negativo $x = k\pi - \alpha$. <u>a</u> puede tener cual--- quier valor puesto que la cotangente varía de $-\infty$ a $+\infty$

Si se tiene sex $x = a$, entonces $x = \sec^{-1}(a)$ Si <u>a</u> es positivo $x = ak\pi \pm \alpha$, y si <u>a</u> es negativo: $x = 2k\pi \pm (\pi - \alpha)$. α existe cuando $-1 \geq a \geq 1$, ya que la función secante puede pasar por todos los valores, excepto los comprendidos entre (+1) y (-1). Y - finalmente, si se tiene $\csc x = a$, entonces $x = \csc^{-1}(a)$

. Si <u>a</u> es positivo $x = 2k\pi + \alpha$ y $(2k + 1)\pi - \alpha$ si <u>a</u> es negativo $x = 2k\pi - \alpha$ y $(2k + 1)\pi + \alpha$. α existe si $-1 \geq a \geq 1$, puesto que la cosecante pasa por todos los valores, menos los comprendidos entre -- (+1) y (-1).

a) Conteniendo una sola función trigonométrica de un ángulo.

Estas ecuaciones pueden reducirse a una de - las formas siguientes:

sen x = a, cos x = b, tan x = c, cot x = d, sec x = e

csc x = f

1.- $a \operatorname{sen} x = b$; cuando $-1 \leq b/a \leq 1$ ó $b^2 \leq a^2$ porque (+1) y (-1) son los límites entre los cuales la función seno puede variar.

Ejemplo: resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} x = 1$$

$$4 \operatorname{sen} x = 1$$

$$\operatorname{sen} x = 0.25 \quad \therefore \quad x = \operatorname{sen}^{-1} (0.25)$$

$$x = 2k\pi + 14° \, 29' \quad y \quad (2k + 1)\pi - 14° \, 29'$$

siendo k un número entero positivo o negativo.

Comprobando;

si $x = 14° \, 29' \ldots$ sen 14° 29' + 3 sen 14° 29' = 1.0004 ≐ 1

$x = 165°31'$ ..sen 165° 31' + 3 sen 165°31' = 1.0004 ≐ 1

etc.

2.- $a \cos x = b$; cuando $-1 \leq b/a \leq 1$ ó $b^2 \leq a^2$ porque (+1) y (-1) son los límites entre los cuales varía la función coseno.

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$-2 \cos x = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \; x = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2k\pi \pm 150°$$

Comprobando;

Si $x = 150° \ldots -2 \cos 150° = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

.... etc.

3.- $a \tan x = b$; a y b cualesquiera, ya que la función tangente puede variar desde $-\infty$ a $+\infty$

4.- $a \cot x = b$; a y b cualesquiera, pues la función cotangente varía de $-\infty$ a $+\infty$

5.- a sec x = b ; cuando $-1 \geq b/a \geq 1$ ó $b^2 \geq a^2$

6.- a csc x = b ; cuando $-1 \geq b/a \geq 1$ ó $b^2 \geq a^2$

b) Conteniendo varias funciones trigonométricas del mismo ángulo.

Debe advertirse que no existe un método para resolver las ecuaciones trigonométricas de manera invariable, sino que éstas se resuelven más fácilmente cuando mayor sea el número de identidades que se conocen, pues así será más fácil reconocer cual o cuales identidades son las más apropiadas en cada caso.

Resolución de ecuaciones del tipo

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + a°) + \operatorname{sen}(x + 2a°) + \ldots + \operatorname{sen}\left[x + (n-1)\,a°\right] = 0$$

Según fórmula conocida, el primer miembro se transforma en:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{n-1}{2}\,a°\right)\operatorname{sen}\frac{na°}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a°}{2}} = 0$$

$$\therefore \operatorname{sen}\left(x + \frac{n-1}{2}\,a°\right)\ \operatorname{sen}\frac{na°}{2} = 0,$$

anulando factores:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{n-1}{2}\,a°\right) = 0$$

$$\therefore x + \frac{n-1}{2}\,a° = \operatorname{sen}^{-1}(0) = k\pi$$

$$\therefore x = k\pi - \frac{n-1}{2}\,a°$$

$$y \quad \operatorname{sen}\frac{na°}{2} = 0$$

este factor no siempre se anula.

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$$

en este caso $a° = x$

entonces

$$\text{sen } 2x \text{ sen } \frac{3}{2} x = 0$$

$$\text{sen } 2x = 0 \quad \therefore \quad 2x = k\pi, \text{ y } \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{sen } \frac{3}{2} x = 0 \quad \therefore \quad \frac{3}{2} x = k\pi, \text{ y } \quad x = (2/3)k\pi$$

Comprobando:

Si $x = 0° \ldots \text{sen } 0° + \text{sen } 0° + \text{sen } 0° = 0$

$x = 90° \ldots \text{sen } 90° + \text{sen } 180° + \text{sen } 270° = 0$

.... etc.

De manera semejante se resuelve la ecuación

$\cos x + \cos (x + a°) + \cos (x + 2\,a°) + \ldots\ldots +$

$+ \cos \left[x + (n - 1)\, a°\right] = 0$

ya que el coseno de un ángulo puede escribirse en función del seno, en virtud de la identidad:

$$\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

así la ecuación propuesta se convierte en una del tipor anterior y que puede resolverse como antes. Sin embargo, también puede resolverse directamente como sigue:

$$\frac{\cos(x + \frac{n - 1}{2} a°) \text{ sen } \frac{na°}{2}}{\text{sen } \frac{a°}{2}} = 0$$

$$\therefore \quad \cos (x + \frac{n - 1}{2} a°) \text{ sen } \frac{na°}{2} = 0 \quad \therefore$$

$$\cos (x + \frac{n - 1}{2} a°) = 0$$

$$x = 2k\pi \pm 90° - \frac{n - 1}{2} a°$$

$$\text{sen } \frac{na°}{2} = 0$$

Este factor no siempre debe anularse.

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$\cos x + \cos (x + 10°) + \cos (x + 20°) = 0$$

Empleando el segundo método se tiene:

$$a° = 10° \therefore \cos(x + 10°) \operatorname{sen} 15° = 0$$

$$\cos(x + 10°) = 0$$

$$\therefore x = 2k\pi \pm 90° - 10°$$

Comprobando:

Si $x = 80° \therefore \cos 80° + \cos 90° + \cos 100° = 0$

$x = -100° \therefore \cos(-100°) + \cos(-90°) + \cos(-80°) = 0$

.... etc.

Resolución de la ecuación del tipo:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

Dividiendo toda la ecuación; entre el coeficiente de sen x, queda:

$$\operatorname{sen} x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

Suponiendo $b/a = \tan\varphi$, φ es un ángulo auxiliar que vale

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = k\pi + \alpha$$

con lo que la ecuación se convierte en

$$\operatorname{sen} x + \tan\varphi \cos x = c/a$$

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \cos x = c/a \therefore \operatorname{sen}(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos\varphi$$

$$x + \varphi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{c}{a} \cos\varphi\right) = 2k\pi + \beta \therefore x = 2k\pi + \beta - \varphi$$

$$x = (2k + 1)\pi - \beta - \varphi$$

El ángulo β existe cuando: $-1 \leq (c/a) \cos\varphi \leq 1$ ó

$c^2 \leq a^2 + b^2$, porque $\frac{c^2}{a^2} \cos^2\varphi = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$ en virtud de que:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{\sec^2\varphi} = \frac{1}{1 + \tan^2\varphi}$$

y substituyendo el valor de $\tan\varphi$ se obtiene:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

por lo que:

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi = \frac{c^2}{a^2}\,\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

como se escribió antes.

Así pues $c^2 = a^2 + b^2$ es la condición que deben cumplir los coeficientes de la ecuación propuesta para que ésta tenga solución.

2º Método.- $a \text{ sen } x + b \cos x = c$

Expresando sen x y cos x en función de tan (x/2) según fórmulas conocida, queda:

$$a\,\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} + b\,\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = c$$

que se convierte sucesivamente en

$$2a\tan(x/2) + b - b\tan^2(x/2) = c + c\tan^2(x/2)$$

o bien

$$(b+c)\tan^2(x/2) - 2a\tan(x/2) - (b-c) = 0$$

ecuación de segundo grado que tiene por incógnita el ángulo (x/2), cuyos valores se obtienen:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} \quad \therefore \tan\frac{x}{2} = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} = A$$

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha \quad \therefore x = 2k\pi + 2\alpha \;;\; y$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b} = B$$

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1}(B) = k\pi + \beta \quad \therefore x = 2k\pi + 2\beta$$

Estas raíces son reales cuando el discriminante cumple la condición

$$c^2 \cdot \; a^2 + b^2$$

3er. Método. $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Reemplazando sen x y cos x en función de tan x y dividiendo toda la ecuación por cos x, queda:

$$a \tan x + b = \frac{c}{\cos x}, \quad a \tan x + b = \pm c \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

$$(a^2 - c^2) \tan^2 x + 2\, ab \tan x + b^2 - c^2 = 0$$

ecuación de segundo grado que tiene por incógnita el ángulo x, cuyos valores se obtienen:

$$\tan x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - c^2}$$

en esta forma resultan dos ecuaciones simples de donde se puede encontrar x. Estos valores son reales cuando $c^2 \leq a^2 + b^2$. Esta forma de resolver la ecuación es poco recomendable ya que en su solución se resuelve también la ecuación:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = -c$$

4º Método. $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Si se reemplaza cos x en función de sen x, se obtiene:

$$a \operatorname{sen} x \pm b \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = c$$

$$\pm b \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = c - a \operatorname{sen} x,$$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$$b^2 (1 - \operatorname{sen}^2 x) = c^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 x - 2\, ac \operatorname{sen} x$$

y ordenando los términos

$$(a^2 + b^2) \operatorname{sen}^2 x - 2ac \operatorname{sen} x + c^2 - b^2 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\operatorname{sen} x = \frac{ac \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$

y finalmente se obtienen dos ecuaciones simples de la forma: sen x = A y sen x = B, que tienen solución --- cuando $A^2 \leq 1$ en el primer caso y $B^2 \leq 1$ en el segundo.

Este mismo método puede efectuarse suponiendo: sen x = u y cos x = v, así como también la identidad.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

formando un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas y que se resolverá en el párrafo correspondiente.

5º Método. $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Suponiendo que α es una solución de la ecuación, queda: $a \operatorname{sen} x + b \cos x = a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha$ o bien: $a (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha) + b (\cos x - \cos \alpha) = 0$, sustituyendo los paréntesis del primer miembro por -- fórmulas conocidas:

$$a \left(2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2}\right) + b \left(-2 \operatorname{sen}\frac{x+\alpha}{2} \operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0$$

ó

$$\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2} \left(a \cos \frac{x+\alpha}{2} - b \operatorname{sen} \frac{x+\alpha}{2} \right) = 0,$$

anulando factores:

$$\operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{x-\alpha}{2} = \operatorname{sen}^{-1}(0) = k\pi \quad \therefore \quad x = 2k\pi + \alpha$$

Con el segundo factor:

$$a \cos \frac{x+\alpha}{2} = b \operatorname{sen} \frac{x+\alpha}{2}$$

$$a = b \tan \frac{x-\alpha}{2}$$

$$\therefore \frac{x+\alpha}{2} = \tan^{-1} (a/b) = k\pi + \beta \quad \therefore \quad x = 2k\pi + 2\beta - \alpha$$

Si de la ecuación $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

$a = 0$, entonces: $b \cos x = c$, ó $\cos x = c/b$

$\therefore x = \cos^{-1} (c/b) = 2k\pi \pm \alpha$, α existe cuando $c^2 \leq b^2$

$b = 0$, entonces: $a \operatorname{sen} x = c$, ó $\operatorname{sen} x = c/a$

$\therefore\ x = \text{sen}^{-1}\ (c/a) = 2k\pi + \alpha$ y $(2k + 1)\pi - \alpha$ cuando $c^2 \leq b^2$

$c = 0$, entonces: a sen $x = -\ b \cos x$, o bien

$$a \tan x = -\ b$$

$$\tan x = -\ \frac{b}{a} \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}\left(-\ \frac{b}{a}\right) = k\pi - \beta$$

Ejemplo de solución de la ecuación a sen $x + b \cos x = c$ de acuerdo con el primer método.

Resolver la ecuación: $\sqrt{3}$ sen $x + \cos x = 2$

En este caso: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ y $c = 2$. Sustituyendo valores en la condición $c^2 \leq a^2 + b^2$, tenemos:

$$4 \leq 3 + 1$$

entonces la ecuación tiene la siguiente solución:

$$\text{sen}\ x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Si $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = k\pi + 30°$

Suponiendo $\alpha = 30°$, la ecuación queda:

$$\text{sen}\ (x + \alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 30° = 1$$

$$\therefore\ x + \alpha = \text{sen}^{-1}\ (1) = 2k\pi + 90°\ ;$$

$$x = 2k\pi + 90° - \alpha = 2k\pi + 60°$$

Si $\alpha = 210°$; $\text{sen}\ (x + \alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 210° = -1 \therefore$

$x + \alpha = \text{sen}^{-1}(-1) = 2k\pi - 90° \therefore x = 2k\pi - 300°$

Comprobando con la ecuación:

Si $x = 60°$... $\sqrt{3}$ sen $60° + \cos 60° = 2$

$x = -300°$ $\sqrt{3}$ sen $(-300°) + \cos(-300°) = 2$

.... etc.

Tipos de ecuaciones trigonométricas que pueden resolverse de manera análoga a la del tipo

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

Estos tipos de ecuaciones pueden resolverse por cualquiera de los métodos indicados según las conveniencias que presente cada caso; no por esto dejan de poderse resolver en otra forma.

1) $\operatorname{sen}(a \pm x) = m \operatorname{sen} x$
2) $\cos(a \pm x) = m \cos x$
3) $\operatorname{sen}(a \pm x) = m \cos x$
4) $\cos(a \pm x) = m \operatorname{sen} x$
5) $\operatorname{sen}(a \pm x) = m \operatorname{sen}(b \pm x)$ En este caso se hace: $b \pm x = x'$ y $a' = a - b$
6) $\operatorname{sen}(x \pm a) = \operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} a$
7) $\cos(x \pm a) = \cos x \pm \cos a$
8) $\operatorname{sen}(x \pm a) = \cos a \pm \cos x$
9) $\cos(x \pm a) = \operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} x$
10) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(a - x) = m$

Ejemplo del caso (8): $\operatorname{sen}(x \pm a) = \cos a \pm \cos x$

Resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}(x - 30°) = \cos 30° - \cos x$$

$$\operatorname{sen} x \cos 30° - \operatorname{sen} 30° \cos x + \cos x = \cos 30°$$

$$\cos 30° \operatorname{sen} x + (1 - \operatorname{sen} 30°) \cos x = \cos 30°$$

$$0.8660 \operatorname{sen} x + 0.5 \cos x = 0.8660$$

$$\operatorname{sen} x + \frac{0.5}{0.8660} \cos x = 1$$

Si $\tan \varphi = 0.5/0.8660 = 0.5775$:

$$\therefore \varphi = \tan^{-1}(0.5775) = k\pi + 30°$$

Si $\varphi = 30°$.

$\operatorname{sen}(x + \varphi) = 0.8660 \therefore x + \varphi = \operatorname{sen}^{-1}(0.8660) = 2k\pi + 60°$

y: $(2k + 1)\pi - 60° \therefore x = 2k\pi + 30°$ y

$$x = (2k + 1)\pi - 90°$$

Si $\varphi = 210°$:

$\operatorname{sen}(x + \varphi) = -0.8660 \therefore x + \varphi = \operatorname{sen}^{-1}(-0.8660)$

$x + \varphi = 2k\pi - 60°$, y $(2k + 1)\pi + 60° \therefore$

$x = 2k\pi - 270°$ y $x = (2k + 1)\pi - 150°$

Comprobando:

Si $x = 30°$ $\quad$ sen $0° = \cos 30° - \cos 30°$
$\quad$ $x = 90°$ $\quad$ sen $60° = \cos 30° - \cos 90°$
.... etc.

11) Otro tipo de ecuación que mediante una ligera transformación puede resolverse de acuerdo con la resolución de a sen $x + b \cos x = c$ es:

$$a \tan x + b \cot x = c$$

que se resuelve como sigue: sustituyendo $\tan x$ y $\cot x$ en función de sen x y $\cos x$, queda:

$$a \frac{\text{sen } x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\text{sen } x} = c$$

ó:

$$a \text{ sen}^2 x + b \cos^2 x = c \text{ sen } x \cos x$$

multiplicando ambos miembros por 2 y sustituyendo convenientemente, se obtiene:

$$a (1 - \cos 2x) + b (1 + \cos 2x) - c \text{ sen } 2x = 0$$

$$c \text{ sen } 2x + (a - b) \cos 2x = a + b$$

Ecuación del tipo dicho con solución cuando:

$$(a + b)^2 \leq c^2 + (a - b)^2, \text{ ó } 4ab \leq c^2$$

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$\tan x + 3 \cot x = -4$$

$$2 \text{ sen}^2 x + 6 \cos^2 x + 8 \text{ sen } x \cos x = 0$$

$$(1 - \cos 2x) + 3 (1 + \cos 2x) + 4 \text{ sen } 2x = 0$$

$$4 \text{ sen } 2x + 2 \cos 2x = -4$$

$$\text{sen } 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = -1$$

Si $\tan \varphi = 1/2$ $\therefore$ $\varphi = \tan^{-1}(1/2) = k\pi + 26° 46'$

Si $\varphi = 26° 46'$, sen $(2x + \varphi) = -0.8994$

sen $(2x + \varphi) = 2k\pi - 63° 26'$, y $(2k + 1)\pi + 63° 26'$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2} (2k\pi - 63° 26' - \varphi) = k\pi - 45°$, y

$x = \frac{1}{2} (2k + 1)\pi + 36° 40'$

Si $\varphi = 206° 46'$, sen $(2x + \varphi) = 0.8994$

$\therefore 2x + \varphi = \text{sen}^{-1}(0.8994) = 2k\pi + 63° 26'$, y:

$(2k + 1)\pi - 63° 26'$

$x = k\pi - 123° 20'$, y $x = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi - 250° 12'$

Comprobando:

Si $x = -45°$ $\quad \tan(-45°) + 3\cot(-45°) = -4$

$x = 108° 20'$ $\tan(108° 20') + 3\cot(108° 20') =$

$= -4.0122 \doteq -4$

......etc.

Este tipo de ecuación puede resolverse también reemplazando la cot x en función de la tan x así:

$$a \tan x + \frac{b}{\tan x} = c \qquad ó$$

$$a \tan^2 x + b = c \tan x$$

y ordenando los términos:

$$a \tan^2 x - c \tan x + b = 0$$

$$\therefore \qquad \tan x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

Así se obtienen dos ecuaciones de la forma tan x = A

de donde $x = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha$ $\qquad$ y

$\tan x = B \therefore x = \tan^{-1}(B) = k\pi + \beta$

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\text{sen}(x + a) \pm \cos(x + b) = c$$

Teniendo en cuenta la identidad: $\cos\alpha = \text{sen}(90° - \alpha)$ se obtiene:

$$\text{sen}(x + a) \pm \text{sen}\left[90° - (x + b)\right] = c ,$$

ecuación que se resuelve, suponiendo que fuese suma, como sigue:

$$2 \,\text{sen}\, \frac{90° + a - b}{2} \cos \frac{2x + a + b - 90°}{2} = c$$

$$\therefore \cos \frac{2x + a + b - 90^\circ}{2} = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \frac{90^\circ + a - b}{2}} = A$$

$$\therefore \frac{2x + b + a - 90^\circ}{2} = \cos^{-1}(A) = 2k\pi \pm \gamma$$

$$\therefore x = 2k\pi \pm \gamma + \frac{90^\circ - (a + b)}{2}$$

siempre que: $c^2 \leq 2\,(1 - \cos \gamma)$ ó $c^2 \leq 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}$, si $\gamma = 90^\circ + a - b$

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}(2x + 10^\circ) + \cos(2x - 60^\circ) = -0.8$$

$$\operatorname{sen}(2x + 10^\circ) + \operatorname{sen}\left[90^\circ - (2x - 60^\circ)\right] = -0.8$$

$$2 \operatorname{sen} 80^\circ \cos(2x - 70^\circ) = -0.8$$

$$\therefore \cos(2x - 70^\circ) = -\frac{0.8}{2 \operatorname{sen} 80^\circ} = -\,0.4070$$

$$\therefore 2x - 70^\circ = \cos^{-1}(-0.4070) = 2k\pi \pm 113^\circ\ 59'$$

$$\therefore x = \frac{2k\pi \pm 113^\circ\ 59' + 70^\circ}{2}$$

Comprobando:

Si $x = 91^\circ\ 59'$ ... $\operatorname{sen} 193^\circ\ 58' + \cos 123^\circ\ 58' =$

$= -0.8011 \doteq -0.8$

$x = -21^\circ\ 59'$... $\operatorname{sen}(-33^\circ\ 59') + \cos(-103^\circ\ 59') =$

$= -0.9340$

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\operatorname{sen}(x \pm a) \cos(x \pm b) = c$$

Multiplicando por 2 ambos miembros y sustituyendo el primer miembro por la suma de los senos de dos ángulos:

$$2 \operatorname{sen}(x \pm a) \cos(x \pm b) = 2c$$

Tomando en cuenta sólo la ecuación:

$$2 \operatorname{sen}(x + a) \cos(x + b) = 2c:$$

tenemos que:

$$\begin{array}{c} p + q = 2(x + a) \\ \underline{p - q = 2(x + b)} \\ p = 2x + a + b \\ q = a - b \end{array}$$

así la ecuación queda:

$$\operatorname{sen}(2x + a + b) + \operatorname{sen}(a - b) = 2c$$

$$2x + a + b = \operatorname{sen}^{-1}\left[2c - \operatorname{sen}(a - b)\right] = 2k\pi + \alpha, \text{ y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

α existe cuando: $-1 \leq 2c - \operatorname{sen}(a - b) \leq 1$

$$x = \frac{2k\pi + \alpha - (a + b)}{2}, \text{ y}$$

$$x = \frac{(2k + 1)\pi - \alpha - (a + b)}{2}$$

Este tipo puede resolverse de acuerdo con la ecuación:

$$2 \cos(x \pm b) \operatorname{sen}(x \pm a) = 2c$$

siguiéndose proceso análogo, sólo que en lugar de sustituir el primer miembro por una suma de los senos de dos ángulos, se sustituye por la diferencia, así la ecuación queda:

$$\begin{array}{c} p + q = 2(x + b) \\ \underline{p - q = 2(x + a)} \\ p = 2x + a + b \\ q = b - a \end{array}$$

$$\operatorname{sen}(2x + a + b) - \operatorname{sen}(b - a) = 2c$$

$$\therefore 2x + a + b = \operatorname{sen}^{-1}\left[2c + \operatorname{sen}(b - a)\right] = 2k\pi + \alpha, \text{y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

α existe cuando: $-1 \leq 2c + \operatorname{sen}(b - a) \leq 1$

$$x = \frac{2\,k\,\pi + \ldots - (a + b)}{2} \quad , \; y$$

$$x = \frac{(2\,k + 1)\,\pi - (a + b)}{2}$$

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$\text{sen}\,(x + 30°)\cos\,(x - 10°) = 0.7071\;;$$

$$\begin{array}{r} p + q = 2\,(x + 30°) \\ p - q = 2\,(x - 10°) \\ \hline p = 2x + 20° \\ q = 40° \end{array}$$

$$\text{sen}\,(2x + 20°) + \text{sen}\,40° = 1.4142$$

$$\therefore\; 2x + 20° = \text{sen}^{-1}\,(0.7714) = 2k\,\pi + 50°\,29', \; y$$

$$(2k + 1)\,\pi - 50°\,29'$$

$$\therefore \quad x = \frac{2k\,\pi + 50°\,29' - 20°}{2}$$

$$x = \frac{(2k + 1)\,\pi - 50°\,29' - 20°}{2}$$

Comprobando:

Si $x = 15°\,14'$ ... sem $45°\,14'$ cos $5°\,14' = 0.7030$
$\doteq 0.7071$

$x = 54°\,45'$ ... sen $84°\,45'$ cos $44°\,45' = 0.7092$
$\doteq 0.7071$

.... etc.

Aplicando el segundo método:

$$\cos\,(x - 10°)\,\text{sen}\,(x + 30°) = 0.7071$$

$$\begin{array}{r} p + q = 2\,(x - 10) \\ p - q = 2\,(x + 30) \\ \hline p = 2x + 20° \\ q = -40° \end{array}$$

$$\text{sen}\,(2x + 20°) - \text{sen}\,(-40°) = 1.4142$$

$\therefore\ 2x + 20° = \text{sen}^{-1}\ (0.7714) = 2k\,\pi + 50°\ 29'$, y

$(2k + 1)\,\pi - 50°\ 29'$

$$\therefore \quad x = \frac{2k\,\pi + 50°\ 29' - 20°}{2}$$

$$x = \frac{(2k + 1)\,\pi - 50°\ 29' - 20°}{2}$$

valores idénticos a los anteriores.

Comprobando:

Si $x = 15°\ 14'$ ... $\cos 5°\ 14'\ \text{sen}\ 45°\ 14' = 0.7030$
$\doteq 0.7071$

$x = 54°\ 45'$ ... $\cos 44°\ 45'\ \text{sen}\ 84°\ 45' = 0.7092$

$x = 54°\ 45'$ ... $\cos 44°\ 45'\ \text{sen}\ 84°\ 45' = 0.7071$

...... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\text{sen}\ (x \pm a)\ \text{sen}\ (x \pm b) = c$$

Con las fórmulas:

1) $\cos p - \cos q = - 2\ \text{sen}\ \frac{p + q}{2}\ \text{sen}\ \frac{p - q}{2}$

2) $\cos q - \cos p = 2\ \text{sen}\ \frac{q + p}{2}\ \text{sen}\ \frac{q - p}{2}$

Multiplicando por 2 ambos miembros y teniendo en cuenta sólo la ecuación $\text{sen}\ (x + a)\ \text{sen}\ (x + b) = c$, sustituyendo el primer miembro por una diferencia de los cosenos de los dos ángulos p y q cuyos valores se obtienen por las igualdades:

$$\begin{array}{l} q + p = 2\ (x + a) \\ q - p = 2\ (x + b) \\ \hline q = 2x + a + b \\ p = a - b \end{array}$$

tenemos:

$$\cos\ (2x + a + b) - \cos\ (a - b) = 2c$$

$$\therefore\ 2x + a + b = \cos^{-1}\left[\ 2c + \cos\ (a - b)\right] = 2k\,\pi \pm \alpha$$

α existe cuando $-1 \leq 2c + \cos\ (a - b) \leq 1$

o restando a cada miembro de esta desigualdad cos (a-b) queda:

$$-\cos^2 \frac{a-b}{2} \leq c \leq \operatorname{sen}^2 \frac{a-b}{2}$$

Despejando a x:

$$x = \frac{2k\pi \pm \alpha - (a+b)}{2}$$

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}(x + 10°)\operatorname{sen}(x - 30°) = 0.7071$$

$$\begin{array}{r} p + q = 2\,(x + 10°) \\ p - q = 2\,(x - 30°) \\ \hline p = 2x - 20° \\ q = 40° \end{array}$$

$$\cos(2x - 20°) - \cos 40° = -1.4142$$

$$\therefore\ 2x - 20° = \cos^{-1}(-0.6482) = 2k\pi \pm 130°\ 16'$$

$$\therefore\ x = \frac{2k\pi \pm 130°\ 16' + 20°}{2}$$

Comprobando:

Si $x = 75°\ 8'$ ... $\operatorname{sen} 85°\ 8' \operatorname{sen} 45°\ 8' = 0.7062 \doteq 0.7071$

$x = 124°\ 37'$.. $\operatorname{sen} 134°37' \operatorname{sen} 94°37' = 0.7098 \doteq 0.7071$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\cos(x \pm a)\cos(x \pm b) = c$$

Multiplicando por 2 ambos miembros de la -- ecuación y teniendo en cuenta sólo la ecuación $\cos(x+a)\cos(x+b) = c$ y sustituyendo el primer miembro por - la suma de los cosenos de dos ángulos:

$$\begin{array}{r} p + q = 2\,(x + a) \\ p - q = 2\,(x + b) \\ \hline p = 2x + a + b \\ q = a - b \end{array}$$

$$\cos(2x + a + b) + \cos(a - b) = 2c$$

$$\therefore\ 2x + a + b = \cos^{-1}\left[2c - \cos(a - b)\right] = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe cuando $-1 \leq 2c - \cos(a - b) \leq 1$, ó sumando a cada miembro de la desigualdad $\cos(a - b)$:

$$-\operatorname{sen}^2 \frac{a - b}{2} < c \leq \cos^2 \frac{a - b}{2}$$

Despejando a x, se obtiene:

$$x = \frac{2k\pi \pm \alpha - (a + b)}{2}$$

Ejemplo: resolver la ecuación:

$$\cos(x + 120^\circ)\cos(x + 240^\circ) = 0.$$

$$\begin{array}{l} p + q = 2(x + 120^\circ) \\ \underline{p - q = 2(x + 240^\circ)} \\ p = 2x + 360^\circ \\ q = -120^\circ \end{array}$$

$$\cos(2x + 360^\circ) + \cos(-120^\circ) = 0.$$

$$\therefore\ 2x + 360^\circ = \cos^{-1}(-0.8660) = 2k\pi \pm 60^\circ$$

$$\therefore\quad x = \frac{2k\pi \pm 60^\circ - 360^\circ}{2}$$

Comprobando:

Si $x = -150^\circ$ ... $\cos(-30^\circ)\cos 90^\circ = 0$

$x = -210^\circ$ ... $\cos(-90^\circ)\cos 30^\circ = 0$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a(\operatorname{sen} x + \cos x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c$$

Teniendo presente la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Suponiendo.

$$\begin{array}{l} S = \operatorname{sen} x + \cos x \\ P = \operatorname{sen} x \cos x \end{array}$$

la ecuación se convierte en: $aS + bP = c$, que con la identidad propuesta forma el sistema:

$$aS + bP = c \quad \ldots(1$$
$$S^2 + 2P = 1 \quad \ldots(2$$

de (1:

$$P = \frac{c - aS}{b}$$

en (2:

$$S^2 - 2\left(\frac{c - aS}{b}\right) = 1$$

efectuando operaciones:

$$bS^2 + 2aS - (2c + b) = 0$$

$$S = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2bc + b^2}}{b}$$

existen dos valores para S: S_1 y S_2. P vale:

$$P = \frac{c - a\left[\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2bc + b^2}}{b}\right]}{b}$$

$$P = \frac{c}{b} + \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 2bc + b^2}}{b^2}$$

teniéndose por lo tanto, dos valores para P: P_1 y P_2

Con los valores de S (S_1 y S_2) y P (P_1 y P_2) se tienen las igualdades:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = S_1$$
$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = P_1$$

Si senx y cos x son raíces de una ecuación de segundo grado, ésta es:

$$\operatorname{sen}^2 x - S_1 \operatorname{sen} x + P_1 = 0$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1}}{2}$$

$$\therefore x = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1}}{2}\right] = 2k\pi + \alpha \text{ y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

α existe cuando:

$$-1 \leq \frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1}}{2} \leq 1 \text{ , ó}$$

$$(S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1})^2 \leq 4$$

Con los valores S_2 y P_2 se tiene:

$$\text{sen } x + \cos x = S_2$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = P_2$$

$$\therefore \quad \text{sen}^2 x + S_2 \text{ sen } x + P_2 = 0$$

$$\therefore \quad \text{sen } x = \frac{S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2}}{2}$$

$$x = \text{sen}^{-1}\left[\frac{S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2}}{2}\right] = 2k\pi + \beta \text{ , y } (2k+1)\pi - \beta$$

β existe cuando:

$$-1 \leq \frac{S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2}}{2} \leq 1 \text{ , ó}$$

$$(S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2})^2 \leq 4.$$

Ejemplo: resolver la ecuación

$$\text{sen } x + \cos x + 2 \text{ sen } x \cos x = 1$$

Formando el sistema:

$$S + 2P = 1 \quad \ldots(1$$

$$S^2 - 2P = 1 \quad \ldots(2$$

De (2: $\quad P = \dfrac{S^2 - 1}{2}$

En (1: $\quad S^2 + S - 2 = 0$

$$\therefore \quad S = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = -(1/2) \pm (3/2)$$

$$S_1 = 1 \quad , \quad S_2 = -2$$

$$\therefore \quad P_1 = 0 \quad y \quad P_2 = 3/2$$

entonces:

$$\text{sen } x + \cos x = 1$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = 0$$

$$\therefore \text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0; \quad \text{sen } x (\text{sen } x - 1) = 0$$

$$x = \text{sen}^{-1} (0) = k\pi \quad , \quad y \ 2k\pi + 90°$$

También:

$$\text{sen } x + \cos x = -2$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = 3/2$$

$$\therefore \text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x + 3/2 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{-2 \pm \sqrt{21}}{2}$$

valores que se desprecian y por consiguiente, los valores de x son $k\pi$, y $2k\pi + 90°$

Comprobando:

Si $x = 0° \ \therefore \ \text{sen } 0° + \cos 0° + 2\text{sen } 0° \cos 0° = 1$

$x = 90° \ \therefore \ \text{sen } 90° + \cos 90° + 2\text{sen } 90° \cos 90° = 1$

.... etc.

En los sistemas:

$$\text{sen } x + \cos x = S_1$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = P_1$$

y

$$\text{sen } x + \cos x = S_2$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = P_2$$

es indiferente escoger como incógnita a sen x ó a cos x pues los valores que verifican las ecuaciones son - los mismos, como se ve en el desarrollo siguiente. Sea el sistema:

$$\text{sen } x + \cos x = 1$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = 0$$

$\therefore \cos^2 x - \cos x = 0$; $\cos x (\cos x - 1) = 0$;

si $\cos x = 0$, $x = \cos^{-1} (0) = 2k\pi \pm 90°$

si $\cos x = 1$, $x = \cos^{-1} (1) = 2k\pi$

Con el sistema:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = -2$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 3/2$$

tenemos: $\cos^2 x + 2 \cos x + 3/2 = 0$

$$\therefore \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 6}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

por consiguiente no hay ángulo x.

Comprobando:

Si $x = 90°$ ... $\operatorname{sen} 90° + \cos 90° + 2 \operatorname{sen} 90° \cos 90° = 1$

$x = -90°$ ... $\operatorname{sen} (-90°) + \cos (-90°) + 2 \operatorname{sen} (-90°) \cos (-90°) = 1$

$x = 0°$ ... $\operatorname{sen} 0° + \cos 0° + 2 \operatorname{sen} 0° \cos 0° \cos 0° = 1$

.... etc.

lo que prueba que los únicos valores pueden ser los comprendidos en las fórmulas: $x = 2k\pi$ y $2k\pi + 90°$

Otra forma de resolver la ecuación:

$$a (\operatorname{sen} x + \cos x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c$$

es la siguiente: teniendo presente las identidades:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} (90° - \alpha) \text{ y } \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

multiplicando por dos toda la ecuación propuesta y sustituyendo por lo convenido:

$$2a \left[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (90° - x) \right] + b \operatorname{sen} 2x = 2c$$

$$2a \cdot 2 \operatorname{sen} 45° \cos \frac{2x - 90°}{2} + b \operatorname{sen} 2x = 2c$$

ó

$$2a\sqrt{2}\ \cos\frac{2x-90^\circ}{2} + b\ \mathrm{sen}\ 2x = 2c$$

sustituyendo las identidades:

$\mathrm{sen}\ \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ y $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$,
queda:

$$2a\sqrt{2}\ \cos\frac{2x-90^\circ}{2} + 2b\cos^2\frac{2x-90^\circ}{2} - (b+2c) = 0$$

Si se hace:

$$\frac{2x-90^\circ}{2} = y,$$

queda:

$$2b\cos^2 y + 2a\sqrt{2}\cos y - (b+2c) = 0$$

$$\therefore\ \cos y = \frac{-2a\sqrt{2} \pm \sqrt{8a^2 - (4)(2b)(-b-2c)}}{4\ b}$$

$$\cos y = \frac{-a\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+2bc}}{2\ b}$$

Si $a^2 + b^2 + 2bc \geq 0$, cos y es real, y:

$\cos y = A \quad \therefore \quad y = \cos^{-1}(A) = 2k\pi \pm \alpha$, si $A^2 \leq 1$

$\cos y = B \quad \therefore \quad y = \cos^{-1}(B) = 2k\pi \pm \beta$, si $B^2 \leq 1$

Entonces: $x = y + 45^\circ$, ó

$$x_1 = 2k\pi \pm \alpha + 45^\circ\ ;\quad x_2 = 2k\pi \pm \beta + 45^\circ$$

De manera semejante se resuelven las ecua-- ciones del tipo:

$$a\ (\mathrm{sen}\ x - \cos x) + b\ \mathrm{sen}\ x \cos x = c$$

Transformando el producto b sen x cos x en: $-b\ \mathrm{sen}\ x\ (-\cos x)$, queda:

$$a\ (\mathrm{sen}\ x - \cos x) - b\ \mathrm{sen}\ x\ (-\cos x) = c$$

Asímismo de la fórmula fundamental:

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 = (\mathrm{sen}\ x - \cos x)^2 - 2\ \mathrm{sen}\ x(-\cos x)$$

Suponiendo:

$$S = \text{sen } x - \cos x = \text{sen } x + (-\cos x)$$

$$P = \text{sen } x\ (-\cos x),$$

lo propuesto queda:

$$aS - bP = c$$

$$\underline{S^2 - 2P = 1}$$

sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, S y P, cuyos valores se obtienen:

$$-2P = 1 - S^2 \quad \therefore \quad P = \frac{S^2 - 1}{2}$$

sustituyendo en la primera ecuación:

$$aS - b\ \frac{S^2 - 1}{2} = c$$

$$2aS - bS^2 - b = 2c$$

$$bS^2 - 2aS - b + 2c = 0$$

$$\therefore \qquad S = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b\ (-b + 2c)}}{2b}$$

$$S = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{4\ (a^2 + b^2 - 2bc)}{4b^2}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2bc}}{b}$$

$$\therefore\ P = \frac{a^2 + a^2 + b^2 - 2bc \pm 2a\sqrt{a^2 + b^2 - 2bc}}{2\ b^2}$$

$$P = -\frac{c}{b} + \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - 2bc}}{b^2}$$

Ya con estos valores de S, (S_1 y S_2) y P, (P_1 y P_2), se vuelve a lo que se supuso:

$$\text{sen } x + (-\cos x) = S_1$$

$$\text{sen } x\ (-\cos x) = P_1$$

o sea la suma y el producto de dos raíces de una ecuación de segundo grado. Por consiguiente, ésta es:

$$\text{sen}^2 x - S_1 \text{ sen } x + P_1 = 0$$

$$\therefore \quad \text{sen } x = \frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1}}{2}$$

$$x = \text{sen}^{-1}\left[\frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1}}{2}\right] = 2k\pi + \alpha \text{ , y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

siempre que: $-1 \leq \dfrac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1}}{2} \leq 1$, ó

$$(S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4P_1})^2 \leq 4$$

De igual manera se opera con los otros valores de S y de P.

$$\text{sen } x + (-\cos x) = S_2$$

$$\text{sen } x \cdot (-\cos x) = P_2$$

$$\text{sen}^2 x - S_2 \text{ sen } x + P_2 = 0$$

$$\therefore \quad \text{sen } x = \frac{S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2}}{2}$$

$$x = \text{sen}^{-1}\left[\frac{S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2}}{2}\right] = 2k\pi + \alpha \text{, y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

cuando

$$-1 \leq \frac{S_2 \pm \sqrt{S_2^2 - 4P_2}}{2} \leq 1$$

Puede hacerse también:

$$S = \text{sen } x - \cos x$$

$$P = \text{sen } x \cos x$$

Por otra parte:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 = (\text{sen } x - \cos x)^2 + 2 \text{ sen} x \cos x.$$

Entonces, haciendo la sustitución de S y P en las ecuaciones dichas:

$$aS + bP = c$$
$$\underline{S^2 + 2P = 1}$$

De esta última:

$$2P = 1 - S^2; \quad P = \frac{1 - S^2}{2} \quad , \quad y;$$

$$aS + b\,\frac{1 - S^2}{2} = c \quad \therefore \quad bS^2 - 2aS - b + 2c = 0$$

ecuación idéntica a la encontrada antes.

Ejemplo: si $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$

$$2\,(\text{sen } x - \cos x) + \text{sen } x \cos x = 2$$

$$2S - P = 2$$
$$\underline{S^2 + 2P = 1}$$

$$P = \frac{1 - S^2}{2} \quad \therefore \quad 2S + \frac{1 - S^2}{2} = 2, \text{ ó } \quad S^2 - 4S + 3 = 0$$

$$\therefore \quad S = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1$$

$$S_1 = 3\,; \quad S_2 = 1$$

entonces:

$$P = \frac{1 - (2 \pm 1)^2}{2} = \frac{-4 + 4}{2}\text{ , y: } P_1 = -4, \quad P_2 = 0$$

Sustituyendo estos valores en lo que se propuso:

$$\text{sen } x + (-\cos x) = 3$$

$$\text{sen } x \cdot (-\cos x) = -4$$

$$\therefore \quad \text{sen}^2 x - 3 \text{ sen } x + 4 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}\,i$$

no hay valor para sen x:

$$\text{sen } x + (-\cos x) = 1$$
$$\text{sen } x \ (-\cos x) = 0$$

$$\therefore \ \text{sen}^2 x - \text{sen } x = \text{sen } x \ (\text{sen } x - 1) = 0$$

$$\text{sen } x = 0 \quad \therefore \ x = \text{sen}^{-1} (0) = k\pi$$

$$\text{sen } x = 1 \quad \therefore \ x = \text{sen}^{-1} (1) = 2k\pi + 90°$$

Comprobando:

Si $x = 180° \ \ldots \ 2 \ (\text{sen } 180° - \cos 180°) + \text{sen } 180° \cos 180° = 2$

$x = 90° \ \ldots \ 2 \ (\text{sen } 90° - \cos 90°) + \text{sen } 90° \cos 90° = 2$

.... etc.

Otra forma de resolver la ecuación:

$$a \ (\text{sen } x - \cos x) + b \ \text{sen } x \cos x = c$$

es siguiendo un proceso análogo al del tipo anterior:

$$2a \ (\text{sen } x - \cos x) + 2b \ \text{sen } x \cos x = 2c$$

$$2a \left[\text{sen } x - \text{sen } (90° - x) \right] + b \ \text{sen } 2x = 2c$$

$$2a \cdot 2 \cos 45° \ \text{sen } \frac{2x - 90°}{2} + b \ \text{sen } 2x = 2c$$

$$2a \sqrt{2} \ \text{sen } \frac{2x - 90°}{2} + b \cos (2x - 90°) = 2c$$

$$2a \sqrt{2} \ \text{sen } \frac{2x - 90°}{2} + b \ \left(\cos^2 \frac{2x - 90°}{2} - \text{sen}^2 \frac{2x-90°}{2} \right) = 2c$$

Si $\frac{2x - 90°}{2} = y$, queda:

$$-2b \ \text{sen}^2 y + 2a \sqrt{2} \ \text{sen } y + b - 2c = 0$$

$$\therefore \ \text{sen } y = \frac{-2a \sqrt{2} \pm \sqrt{8a^2 - (4)(-2b)(b - 2c)}}{-4b}$$

$$\text{sen } y = \frac{a \sqrt{2} \pm \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 2bc}}{2b}$$

Si $a^2 + b^2 - 2bc \geq 0$, sen y es real

$\therefore \quad y = \text{sen}^{-1}(A) = 2k\pi + \alpha$, y $(2k+1)\pi - \alpha$

α existe cuando: $A^2 \leq 1$

sen $y = B \quad \therefore \quad y = \text{sen}^{-1}(B) = 2k\pi + \beta$, y $(2k+1)\pi - \beta$

β existe si: $B^2 \leq 1$.

De la igualdad: $\frac{2x - 90°}{2} = y$, se tiene: $x = y + 45°$

$\therefore \quad x_1 = 2k\pi + \alpha + 45°$; $x_3 = 2k\pi + \beta + 45°$

$x_2 = (2k+1)\pi - \alpha + 45°$; $x_4 = (2k+1)\pi - \beta + 45°$

Resolución de la ecuación:

$$\tan(a \pm x) = m \tan x$$

Con fórmula conocida, suponiendo que fuese:

$$\tan(a + x) = m \tan x,$$

queda:

$$\frac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a \tan x} = m \tan x$$

$$m \tan a \tan^2 x + (1 - m)\tan x + \tan a = 0$$

$$\therefore \quad \tan x = \frac{(m-1) \pm \sqrt{(1-m)^2 - 4m\tan^2 a}}{2m \tan a}$$

tan x es real si $(1-m)^2 - 4m\tan^2 a \geq 0$, así

$\tan x = A \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha$, y

$\tan x = B \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(B) = k\pi + \beta$.

Sin embargo, puede resolverse también como sigue:

$$\frac{\tan(a+x)}{\tan x} = \frac{m}{1} \quad ; \quad \frac{\tan(a+x) + \tan x}{\tan(a+x) - \tan x} = \frac{m+1}{m-1}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(a+2x)}{\operatorname{sen} a} = \frac{m+1}{m-1} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}(a+2x) = \frac{m+1}{m-1} \operatorname{sen} a$$

Suponiendo $m = \tan \phi$, queda:

$$\operatorname{sen}(a+2x) = \frac{\tan\phi + 1}{\tan\phi - 1} \operatorname{sen} a = \cot(\phi - 45°)\operatorname{sen} a = A$$

$$\therefore \; a + 2x = \operatorname{sen}^{-1}(A) = 2k\pi + \alpha, \; y \quad (2k+1)\pi - \alpha$$

α existe si $A^2 \leq 1$. Finalmente:

$$x = \frac{2k\pi + \alpha - a}{2}$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi - \alpha - a}{2}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\tan(45° + x) = -2 \tan x$$

Usando el primer método se tiene:

$$-2 \tan^2 x + 3 \tan x + 1 = 0$$

$$\therefore \quad \tan x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-4} = \frac{-3 \pm 4.123}{-4} =$$

$$\tan x = -0.2807 \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(-0.2807) = k\pi - 15 \quad 41'$$

$$\tan x = 1.7807 \quad \therefore \; x = \tan^{-1}(1.7807) = k\pi + 60° \; 41'$$

Comprobando:

Si $x = -15° \; 41'$ ... $\tan 29° \; 19' = -2 \tan(-15° \; 41')$

$$0.5616 \doteq 0.5406$$

.... atc.

Resolución de la ecuación del tipo:

$$\tan(a \pm x) \tan x = m$$

$$\frac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a \tan x} \tan x = m$$

$$\tan^2 x + (\tan a + m \tan a) \tan x - m = 0.$$

$$\therefore \quad \tan x = \frac{-(m \tan a + \tan a) \pm \sqrt{(\tan a + m \tan a)^2 - 4m}}{2}$$

cuando $(\tan a + m \tan a)^2 - 4m \geq 0$, $\tan x$ es real, y:

$$\tan x = A \quad \therefore \ x = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha$$

$$\tan x = B \quad \therefore \ x = \tan^{-1}(B) = k\pi + \beta$$

Puede resolverse también como sigue:

$$\frac{1 - \tan(a \pm x) \tan x}{1 + \tan(a \pm x) \tan x} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

Por fórmula conocida, suponiendo que fuese $\tan(a + x)$, queda:

$$\frac{\cos(a + 2x)}{\cos a} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

Si $m = \tan \phi$:

$$\frac{\cos(a + 2x)}{\cos a} = \frac{1 - \tan \phi}{1 + \tan \phi} = \tan(45^\circ - \phi)$$

$$\cos(a + 2x) = \tan(45^\circ - \phi) \cos a = A$$

$$\therefore \quad a + 2x = \cos^{-1}(A) = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe si $A^2 \leq 1$. Entonces:

$$x = \frac{2k\pi \pm \alpha - a}{2}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\tan(180^\circ - x) \tan x = -4.$$

Con el primer método tenemos:

$$-\tan^2 x = -4, \qquad \tan x = \pm 2$$

$$\therefore \quad x = \tan^{-1}(\pm 2) = k\pi \pm 63^\circ\, 26'$$

Comprobando:

Si $x = 63^\circ\, 26'$ ... $\tan 116^\circ\, 34' \tan 63^\circ\, 26' = 4$

$x = -63^\circ\, 26'$... $\tan 243^\circ\, 26' \tan(-63^\circ 26') = 4$.

..........etc.

c) Conteniendo funciones de ángulos múltiplos y submúltiplos de un ángulo.

Resolución de la ecuación del tipo:

$$a \text{ sen } mx = c$$

Despejando a sen mx queda:

$$\text{sen } mx = \frac{c}{a} \quad \therefore \quad mx = \text{sen}^{-1} \left(\frac{c}{a}\right) = 2k\pi + \alpha \text{ , y}$$

$(2k + 1)\pi - \alpha$.

$$\therefore \quad x = \frac{2k\pi + \alpha}{m}$$

$$x = \frac{(2k + 1)\pi - \alpha}{m}$$

El ángulo α existe cuando: $-1 \leq \frac{c}{a} \leq 1$, o bien cuando $c^2 \leq a^2$

De manera análoga se resuelven las ecuaciones de los tipos:

2.- $a \cos mx = c$;	cuando $c^2 \leq a^2$
3.- $a \tan mx = c$;	a y c cualesquiera
4.- $a \cot mx = c$;	a y c cualesquiera
5.- $a \sec mx = c$;	cuando $-1 \geq c/a \geq 1$, ó $c^2 \geq a^2$
6.- $a \csc mx = c$;	cuando $-1 \geq c/a \geq 1$, ó $c^2 \geq a^2$

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\text{sen } ax \pm \text{sen } bx = 0$$

siendo a y b cualesquiera.

Sustituyendo el primer miembro por una suma o diferencia de los senos de dos ángulos y tomando en cuenta sólo la ecuación: sen ax + sen bx = 0, queda:

$$2 \text{ sen } \frac{a + b}{2} x \cos \frac{a - b}{2} x = 0$$

anulando factores:

$$2 \text{ sen } \frac{a + b}{2} x = 0 \quad \therefore \quad \frac{a + b}{2} x = \text{sen}^{-1} (0) = k\pi$$

$$x = \frac{2k\pi}{a + b}$$

$$\cos \frac{a - b}{2} x = 0 \quad \therefore \quad \frac{a - b}{2} x = \cos^{-1}(0) = 2k\pi \pm 90°$$

$$x = \frac{4k\pi \pm \pi}{a - b}$$

Puede resolverse más fácilmente, teniendo en cuenta que dos ángulos tienen el mismo seno cuando su diferencia es $2k\pi$ o cuando su suma es $(2k + 1)\pi$. Así queda:

$$ax - bx = 2k\pi \quad \therefore \quad x = \frac{2k\pi}{a - b}$$

$$ax + bx = (2k + 1)\pi \quad \therefore \quad x = \frac{(2k + 1)\pi}{a + b}$$

valores que concuerdan con los dados, suponiendo que fuese la ecuación $\text{sen } ax - \text{sen } bx = 0$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\text{sen } \frac{3}{2} x = - \text{sen } \frac{x}{2}$$

Tenemos:

$$\text{sen } \frac{3}{2} x + \text{sen } \frac{x}{2} = 2 \text{ sen } x \cos \frac{x}{2} = 0$$

Anulando factores:

$$2 \text{ sen } x = 0 \quad \therefore \quad x = \text{sen}^{-1} (0) = k\pi$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{x}{2} = \cos^{-1} (0) = 2k\pi \pm 90°$$

$$\therefore \quad x = 4 k\pi + \pi$$

Comprobando:

Si $x = 0°$ ... $\text{sen } 0° = \text{sen } 0°$

$x = 180°$ .. $\text{sen } 270° = - \text{sen } 90°$

.... etc.

Mediante una ligera transformación, la ecuación:

$$\text{sen } (x + a) = \cos (bx + c)$$

puede resolverse de acuerdo con este tipo. Considerando la identidad $\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$, la ecuación propuesta queda:

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen}\left[90^\circ - (bx + c)\right] = 0$$

ecuación de tipo conocido que puede resolverse fácilmente. Esto no es obstáculo para que no pueda resolverse como sigue:

$$\operatorname{sen}(x + a) = \cos(bx + c)$$

a, b y c cualesquiera. Elevando al cuadrado ambos miembros y duplicándolos después, queda:

$$2\operatorname{sen}^2(x + a) = 2\cos^2(bx + c)$$

Sustituyendo ambos miembros en función del ángulo doble, queda:

$$1 - \cos 2(x + a) = 1 + \cos 2(bx + c)$$

ó

$$\cos 2(bx + c) + \cos 2(x + a) = 0$$

El primer miembro, según la fórmula conocida:

$$2\cos\left[(b + 1)x + a + c\right]\cos\left[(b - 1)x - (a-c)\right] = 0$$

Anulando factores:

$$2\cos\left[(b + 1)x + a + c\right] = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2k\pi \pm 90^\circ - (a + c)}{b + 1}$$

y:

$$\cos\left[(b - 1)x - (a - c)\right] = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2k\pi \pm 90^\circ + (a - c)}{b - 1}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}(x + 10^\circ) = \cos(3x + 20^\circ)$$

Empleando el primer método, tenemos:

$$\operatorname{sen}(x + 10^\circ) - \operatorname{sen}\left[90^\circ - (3x + 20^\circ)\right] = 0$$

$$\operatorname{sen}(x + 10^\circ) - \operatorname{sen}(90^\circ - 3x - 20^\circ) = 0$$

$$2\cos(-x + 40^\circ)\operatorname{sen}(2x - 30^\circ) = 0$$

$$2\cos(-x + 40^\circ) = 0$$

$$\therefore -x + 40° = \cos^{-1}(0) = 2k\pi \pm 90°$$

$$x = \frac{2k\pi \pm 90° - 40°}{-1} = 2k\pi \mp 90° + 40°$$

$$\text{sen}\,(2x - 30°) = 0$$

$$\therefore \quad 2x - 30° = \text{sen}^{-1}(0) = k\pi; \quad x = \frac{k\pi + 30°}{2}$$

Con el segundo método:

$$2\,\text{sen}^2(x + 10°) = 2\cos^2(3x + 20°)$$

$$\cos(4x + 40°) + \cos(2x + 20°) = 0$$

ó $2\cos(4x + 30°)\cos(2x + 10°) = 0$

$$2\cos(4x + 30°) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2k\pi \pm 90° - 30°}{4}$$

$$\cos(2x + 10°) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2k\pi \pm 90° - 10°}{2}$$

valores que concuerdan con los datos anteriormente.

Comprobando:

Si $x = 15°$ ... sen 25° = cos 65°
$x = -50°$ ... sen (-40°) = cos (-130°)
.... etc.

De manera semejante puede resolverse la ecuación:

$$\cos ax \pm \cos bx = 0$$

Así:

$$\text{sen}\,(90° - ax) \pm \text{sen}\,(90° - bx) = 0$$

Puede hacerse también teniendo en cuenta que dos ángulos tienen el mismo coseno cuando su suma o diferencia es $2k\pi$.

Así:

$$ax \pm bx = 2k\pi \quad \therefore \quad x = \frac{2k\pi}{a \pm b}$$

También puede resolverse directamente como sigue: como el primer miembro es una suma o diferencia de los cosenos de dos ángulos, con las respectivas fórmulas se transforma; teniendo en cuenta sólo la ecuación: $\cos ax + \cos bx = 0$; en:

$$2 \cos \frac{a+b}{2} x \cos \frac{a-b}{2} x = 0$$

Anulando factores se obtiene:

$$2 \cos \frac{a+b}{2} x = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{4k\pi \pm \pi}{a+b}$$

$$2 \cos \frac{a-b}{2} x = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{4k\pi \pm \pi}{a-b}$$

siendo a y b cualesquiera.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\cos 4x + \cos 2x = 0$$

Tenemos: $2 \cos 3x \cos x = 0$

$$\therefore \ 2 \cos 3x = 0 \,, \qquad x = \frac{2k\pi \pm 90^\circ}{3}$$

$$\cos x = 0 \,, \ x = \cos^{-1}(0) = 2k\pi \pm 90^\circ$$

Comprobando:

Si $x = 30^\circ$ ... $\cos 120^\circ + \cos 60^\circ = 0$

$x = 150^\circ$... $\cos 600^\circ + \cos 300^\circ = 0$

$x = 90^\circ$ ... $\cos 360^\circ + \cos 180^\circ = 0$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\tan ax \pm \tan bx = 0$$

siendo a y b cualesquiera.

Reemplazando el primer miembro, según fórmula conocida

$$\frac{\operatorname{sen}(a \pm b)\, x}{\cos ax \cos bx} = 0$$

$$\therefore \ \operatorname{sen}(a \pm b)\, x = 0;\ (a \pm b)\, x = \operatorname{sen}^{-1}(0) = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{a \pm b}$$

Puede hacerse también considerando que dos ángulos tienen igual tangente cuando su diferencia es $k\pi$. Así:

$$ax - bx = k\pi \quad \therefore \quad x = \frac{k\pi}{a - b}$$

valor que está incluído en la fórmula obtenida por el método anterior.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\tan 3x + \tan x = 0$$

Tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 3x \cos x} = 0 \ , \ \operatorname{sen} 4x = 0 \ \therefore \ x = \frac{k\pi}{4}$$

Comprobando:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x = 0° \ldots & \tan 0° + \tan 0° = 0 \\ x = 45° \ldots & \tan 135° + \tan 45° = 0 \\ x = 90° \ldots & \tan 270° + \tan 90° = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots \text{ etc.} \end{array}$$

Mediante una ligera transformación, la ecuación:

$$\tan (x + a) \pm \cot (bx + c) = 0$$

puede resolverse de acuerdo con la del tipo anterior. Considerando la identidad $\cot \alpha = \tan (90° - \alpha)$, la ecuación queda:

$$\tan (x + a) \pm \tan \left[90° - (bx + c)\right] = 0$$

la cual puede resolverse fácilmente.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\tan (3x - 60°) + \cot (4x + 15°) = 0$$

Tenemos: $\tan (3x - 60°) + \tan \left[90° -(4x + 15°)\right] = 0$

$$\operatorname{sen} (-x + 15°) = 0 \ \therefore \ -x + 15° = \operatorname{sen}^{-1} (0) = k\pi$$

$$x = -k\pi + 15°$$

Comprobando:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x = 15° \ldots & \tan (-15°) + \cot (75°) = 0 \\ x = -165° \ldots & \tan (-435°) + \cot (-645°) = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \end{array}$$

De manera semejante puede resolverse la ecuación:

$$\cot ax \pm \cot bx = 0$$

En virtud de la identidad $\cot \alpha = \tan (90° - \alpha)$;

$$\tan (90° - ax) \pm \tan (90° - bx) = 0$$

Sin embargo puede resolverse considerando que dos ángulos tienen la misma cotangente si su diferencia es $k\pi$. Así:

$$ax - bx = k\pi \quad \therefore \quad x = \frac{k\pi}{a - b}$$

o bien puede resolverse directamente, en la siguiente forma: con fórmula conocida el primer miembro se transforma

$$\frac{\operatorname{sen} (a \pm b) x}{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx} = 0 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} (a \pm b) x = 0$$

$$x = \frac{k\pi}{a \pm b}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\cot 5x - \cot (-x) = 0$$

Tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen}(-x)} = 0 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} 6x = 0$$

$$x = \frac{k\pi}{6}$$

Comprobando:

Si $x = 0° \ldots \cot 0° - \cot 0° = 0$

$x = 30° \ldots \cot 150° - \cot (-30°) = 0$

$x = 90° \ldots \cot 450° - \cot (-90°) = 0$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$A \operatorname{sen} \frac{a}{b} x + B \cos \frac{c}{d} x + c = 0$$

Transformando el primer miembro en:

$$A \operatorname{sen} \frac{ad}{bd} x + B \cos \frac{bc}{bd} x + c = 0$$

y si se supone que $\frac{x}{bd} = y$, la ecuación queda:

$$A \text{ sen } ady + b \cos bcy = c$$

que tiene por incógnita al ángulo y y que se puede resolver fácilmente reemplazando sen ady y cos bcy de la manera más conveniente en cada caso; ya obtenidos los valores de y, se procede a encontrar los de x con la igualdad

$$\frac{x}{bd} = y \quad \therefore \quad x = bdy$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\text{sen } \frac{x}{10} + 0.3 \cos \frac{x}{5} - 0.5 = 0$$

$$\text{sen } \frac{x}{10} + 0.3 \cos \frac{2x}{10} - 0.5 = 0$$

Si $\frac{x}{10} = y$, la ecuación queda:

$$\text{sen } y + 0.3 \cos 2y = 0.5$$

$$\text{sen } y + 0.3 (\cos^2 y - \text{sen}^2 y) = 0.5$$

$$0.6 \text{ sen}^2 y + \text{sen } y - 0.2 = 0$$

$$\therefore \quad \text{sen } y = \frac{-1 \pm 0.7211}{-1.2}$$

$$\text{sen } y_1 = 0.2324 \text{ , } \quad y_1 = \text{sen}^{-1} (0.2324) = 2k\pi + 13°26'$$
$$= (2k + 1)\pi - 13° 26'$$

$\text{sen } y_2 = \frac{-1 -0.7211}{-1.2} > + 1$, por lo tanto no existe ángulo y_2. Entonces:

$$x_1 = 10 (2k\pi + 13° 26')$$

$$x_2 = 10 \left[(2k + 1)\pi - 13° 26'\right]$$

Comprobando:

Si $x = 134° 20'$ ... sen 13° 26' + 0.3 cos 26° 52' = 0.5
$x = 225° 40'$ ... sen 22° 34' + 0.3 cos 45° 8' =0.59
.... etc.

De manera análoga pueden resolverse las ecuaciones del tipo siguiente:

1. $A \text{ sen } \frac{a}{b} x \, . \, B \text{ sen } \frac{c}{d} x = e$

2.- $A \cos \frac{a}{b} x \, . \, B \cos \frac{c}{d} x = e$

3.- $A \text{ sen } \frac{a}{b} x \, . \, B \cos \frac{c}{d} x = e$

IV.- RESOLUCION DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA.

a) Conteniendo sólo una función trigonométrica de un ángulo.

En esta clase quedan incluídas las ecuaciones de los siguientes tipos:

$$a \text{ sen}^2 x = b$$

Despejando: $\text{sen}^2 x = b/a \quad \therefore \quad \text{sen } x = \pm \sqrt{b/a}$ que se reduce finalmente a la forma $\text{sen } x = \pm a$, cuya solución se trató en el capítulo III.

sen x es real cuando b/a es positivo. Si el subradical es negativo, sen x es imaginario. De la igualdad:

$$\text{sen } x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (b/a \text{ positivo})$$

$x = \text{sen}^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right) = 2k\pi + \alpha$ y $(2k + 1)\pi - \alpha$. α existe cuando $b \leq a$.

$x = \text{sen}^{-1} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \right) = 2k\pi - \alpha$ y $(2k + 1)\pi + \alpha$. α existe cuando $b \leq a$.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$9 \text{ sen}^2 x = 1$$

Tenemos: $\text{sen } x = \pm 0.3333$

$x_1 = \text{sen}^{-1} (0.3333) = 2k\pi + 19° 28'$, y $(2k + 1)\pi - 19°28'$

$x_2 = \text{sen}^{-1} (-0.3333) = 2k\pi - 19° 28'$, y $(2k + 1)\pi + 19°28'$

Comprobando:

Si $x = 19^\circ\ 28' \ldots 9\ \text{sen}^2\ 19^\circ\ 28' = 0.9995 \doteq 1$

$x = 160^\circ\ 32' \ldots 9\ \text{sen}^2 160^\circ\ 32' = 0.9995 \doteq 1$

.... etc.

De manera semejante puede resolverse la ecuación:

$$a\ \text{sen}^2\ x \pm b\ \cos^2\ x = c$$

Haciendo una pequeña transformación se tiene:

$$a\ \text{sen}^2\ x + b\ (1 - \text{sen}^2\ x) = c$$

o bien: $(a - b)\ \text{sen}^2\ x + b - c = 0$, ecuación que ya puede resolverse de acuerdo con el tipo dado.

De acuerdo con este tipo también puede resolverse la ecuación:

$$a\ \cos^2\ x = b$$

Esta se convierte en: $a\ (1 - \text{sen}^2\ x) = b$

$$\therefore \quad \text{sen}^2\ x = \frac{a - b}{a}$$

ecuación del tipo anterior con solución si $\frac{a - b}{a}$ es positivo y $- b \leq c$. Esta ecuación puede resolverse también directamente:

$$\cos\ x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

si b/a es positivo, $\cos x$ es real, y:

$x = 2k\pi \pm \alpha$. α existe cuando $b \leq a$.

Asímismo, la ecuación:

$$a\ \text{sen}^2\ x \pm b\ \cos^2\ x = c$$

puede resolverse por esta última forma.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a\ \tan^2\ x = b$$

Obtenemos directamente:

$$\tan\ x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

de la forma tan x = a cuya solución se trató en el capítulo III. tan x es real cuando b/a es positivo.

De la igualdad $\tan x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$:

$x_1 = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = k\pi + \alpha$, y $x_2 = \tan^{-1}\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = k\pi - \alpha$

De manera análoga pueden resolverse las ecuaciones:

$a \cot^2 x = b$; con solución cuando b/a es positivo
$a \sec^2 x = b$; con solución cuando b/a es positivo
$a \csc^2 x = b$; con solución cuando b/a es positivo y

$b \geq a$ (lo mismo en el caso de la $\sec^2$)

b) Conteniendo varias funciones trigonométricas del mismo ángulo.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c = 0$$

Con la fórmula general de segundo grado:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac \geq 0$, $\operatorname{sen} x = A \therefore x = \operatorname{sen}^{-1}(A)$

$x = 2k\pi + \alpha$, y $(2k+1)\pi - \alpha$

α existe si $A^2 \leq 1$.

$\operatorname{sen} x = B \therefore x = \operatorname{sen}^{-1}(B) = 2k\pi + \beta$, y $(2k+1)\pi - \beta$

β existe si $B^2 \leq 1$.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$5 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

Tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10} = \begin{matrix} 0.8385 \\ -0.2385 \end{matrix}$$

$\therefore\ x = \text{sen}^{-1}\ (0.8385) = 2k\pi + 56°\ 59',\ y\ (2k + 1)\ \pi -$
$-56°\ 59'$

$\text{sen}\ x = -0.2385\ \therefore\ x = \text{sen}^{-1}(-0.2385) = 2k\pi - 13°\ 48',$

$y\ (2k + 1)\ \pi + 13°\ 48'$

Comprobando:

Si $x = -13°\ 48'\ \ldots\ 5\ \text{sen}^2(-13°\ 48') - 3\ \text{sen}\ (-13°48') -$
$- 1 = 0$

$x = 56°\ 59'\ \ldots\ 5\ \text{sen}^2\ 56°\ 59' - 3\ \text{sen}\ 56°\ 59' - 1 =$
$= 0$

.... etc.

De manera semejante puede resolverse la ecuación:

$$a\ \cos^2\ x + b\ \text{sen}\ x + c = 0$$

$$a\ (1 - \text{sen}^2\ x) + b\ \text{sen}\ x + c = 0$$

o bien: $a\ \text{sen}^2\ x - b\ \text{sen}\ x - (a + c) = 0$

ecuación de tipo conocido.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\cos^2\ x + 3\ \text{sen}\ x - 2 = 0$$

Sustituyendo:

$$\text{sen}^2\ x - 3\ \text{sen}\ x + 1 = 0$$

$$\therefore\ \text{sen}\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm 2.236}{2}$$

$$\text{sen}\ x = \frac{5.236}{2} > 1$$

$\text{sen}\ x = \frac{0.764}{2} = 0.382\ \therefore\ x = \text{sen}^{-1}\ (0.382)$

$x = 2k\ \pi + 22°\ 27',\ y\ (2k + 1)\ \pi - 22°\ 27'$

Comprobando:

Si $x = 22° 27'$ ... $\cos^2 22° 27' + 3 \text{ sen } 22° 27' - 2 =$

$$= 0.0030 \doteq 0$$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

Con la fórmula general de segundo grado:

$$\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = A$$

cos x es real cuando $b^2 - 4ac \geq 0$, entonces:

$$x = \cos^{-1}(A) = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\cos x = B \therefore x = \cos^{-1}(B) = 2k\pi \pm \beta$$

De igual manera se resuelve la ecuación:

$$a \text{ sen}^2 x + b \cos x + c = 0$$

Sustituyendo convenientemente, se tiene:

$$a \cos^2 x - b \cos x - (a + c) = 0$$

ecuación de tipo conocido.

También con la fórmula general de segundo - grado se resuelven las ecuaciones de los tipos:

1.- $a \tan^2 x + \tan x + c = 0$, con solución cuando:

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

2.- $a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$, con solución cuando:

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

3.- $a \sec^2 x + b \sec x + c = 0$, si $b^2 - 4ac \geq 0$, y

$$\text{si } -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \geq 4a^2$$

4.- $a \csc^2 x + b \csc x + c = 0$, si $b^2 - 4ac \geq 0$, y

$$\text{si } -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \geq 4a^2$$

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a \tan^2 x \pm \frac{b}{\cos^2 x} = c$$

Suponiendo que fuese una suma queda:

$$a \tan^2 x + b \sec^2 x = c$$

$$a \tan^2 x + b\ (1 + \tan^2 x) = c$$

$$(a + b) \tan^2 x = c - b$$

$$\therefore\ \tan x = \pm \sqrt{\frac{c - b}{a + b}}$$

tan x es real si el subradical es positivo; así:

$$\tan x = + A \quad \therefore\ x = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha$$

$$\tan x = - A \quad \therefore\ x = \tan^{-1}(-A) = k\pi - \alpha$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$0.4 \tan^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 2.4$$

Tenemos:

$$0.4 \tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 2.4$$

$$1.4 \tan^2 x = 2.4 - 1 = 1.4$$

$$\therefore\ \tan x = \pm 1, \quad x = \tan^{-1} (1) = k\pi + 45°$$

$$x = \tan^{-1} (-1) = k\pi - 45°$$

Comprobando:

Si $x = 45° \ldots\ 0.4 \tan^2 45° + \dfrac{1}{\cos^2 45°} = 2.4$

$x = -45° \ldots\ 0.4 \tan^2 (-45°) + \dfrac{1}{\cos^2 (-45°)} = 2.4$

........etc.

De manera análoga pueden resolverse las ecuaciones:

1.- $a \tan^2 x \pm \dfrac{b}{\text{sen}^2 x} = c$

2.- $a \cot^2 x \pm \dfrac{b}{\text{sen}^2 x} = c$

que se transforma en:

$$\frac{a}{\tan^2 x} \pm b \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) = c$$

ecuación de tipo conocido. Puede resolverse también directamente como sigue: sustituyendo convenientemente y suponiendo que fuese suma:

$$a \cot^2 x + b\,(1 + \cot^2 x) = c$$

$$(a + b) \cot^2 x = c - b$$

$$\cot x = \pm \sqrt{\frac{c - b}{a + b}}$$

cot x es real cuando el subradical es positivo. Así:

$$\cot x = A \quad \therefore\ x = \cot^{-1} (A) = k\,\pi + \alpha$$

$$\cot x = -A \ \therefore\ x = \cot^{-1} (-A) = k\,\pi - \alpha$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\cot^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1$$

Con el segundo método se tiene:

$$2 \cot^2 x = 0 \quad \therefore \quad \cot x = 0, \qquad x = \cot^{-1} (0) = k\pi + 90°$$

Comprobando:

$$\text{Si } x = 90° \ \ldots \ \cot^2 90° + \frac{1}{1} = 1$$

$$x = -90° \ldots \ \cot^2 (-90°) + \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

........etc.

3.- $$a \cot^2 x \pm \frac{b}{\cos^2 x} = c$$

Puede resolverse de acuerdo con el tipo:

$$a \tan^2 x \pm \frac{b}{\cos^2 x} = c$$

Así:

$$\frac{a}{\tan^2 x} \pm b\,(1 + \tan^2 x) = c$$

ecuación de fácil solución. Pero también puede resolverse con las transformaciones hechas en la segunda -- forma de resolver la ecuación última. Así, por ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$8\cot^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

Tenemos:

$$\frac{8}{\tan^2} - (1 + \tan^2 x) = 1$$

$$\tan^4 x + 2\tan^2 x - 8 = 0$$

$$\therefore \tan^2 x = \frac{-2 \pm 6}{2}, \quad \tan^2 x_1 = 2$$

$\tan x_1 = \pm\sqrt{2}$

$$x'_1 = \tan^{-1}(1.414) = k\pi + 54° \, 45'$$

$$x''_2 = \tan^{-1}(-1.414) = k\pi - 54° \, 45'$$

$\tan^2 x_2 = -4 \quad \therefore \quad \tan x_2 = \pm\sqrt{-4}$

número imaginario, por lo cual sus valores se desprecian.

Comprobando:

Si $x = 54° \, 45' \ldots 8\cot^2(+54° \, 45') - \dfrac{1}{\cos^2 54° \, 45'} =$

$$= 1.067 \doteq 1$$

$$x = -54° \, 45' \ldots 8\cot^2(-54° \, 45') - \frac{1}{\cos^2(-54° \, 45')}$$

$$= 1.067 \doteq 1.$$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a\tan^2 x + b\cot^2 x = c$$

$$a\tan^2 x + b = c\tan^2 x$$

$$a\tan^4 x - c\tan^2 x + b = 0$$

$$\therefore \quad \tan^2 x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

Si el discriminante es mayor o igual a cero, los valores de tan x son reales.

Si $\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} = A$ y $\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} = B$

entonces:

$$\tan x_1 = \pm\sqrt{A} \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(\sqrt{A}) = k\pi + \alpha$$

$$x = \tan^{-1}(-\sqrt{A}) = k\pi - \alpha$$

$$\tan x_2 = \pm\sqrt{B} \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(\sqrt{B}) = k\pi + \beta$$

$$x = \tan^{-1}(-\sqrt{B}) = k\pi - \beta$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\tan^2 x - \cot^2 x = 1$$

Tenemos:

$$\tan^4 x - \tan^2 x - 1 = 0$$

$$\tan^2 x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm 2.236}{2}$$

$$\tan x = \pm\sqrt{1.618} = \pm 1.272 \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(1.272)$$

$$= k\pi + 51° \; 50'$$

$$x = \tan^{-1}(-1.272)$$

$$= k\pi - 51° \; 50'$$

$\tan x = \sqrt{-0.618}$, x no existe.

Comprobando:

Si $x = 51° \; 50'$ ... $\tan 51° \; 50' - \cot^2 51° \; 50' = 1$

$x = -51°50'$ ... $\tan(-51° \; 50') - \cot^2(-51°50') = 1$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c$$

Multiplicando por dos ambos miembros de la ecuación y sustituyendo:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

queda:

$$2a + b \operatorname{sen} 2x = 2c$$

$$\therefore \quad \text{sen } 2x = \frac{2\ (c - a)}{b}$$

$$2x = \text{sen}^{-1}\left[\frac{2\ (c - a)}{b}\right] = 2k\pi + \alpha \text{ , y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

existe cuando:

$$-1 \leq \frac{2\ (c - a)}{b} \leq 1, \text{ ó } (c - a)^2 \leq \frac{b^2}{4}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$(\text{sen}^2\ 3x + \cos^2\ 3x) - \text{sen } 3x \cos 3x = 1$$

Tenemos:

$$\text{sen } 6x = 0 \therefore 6x = \text{sen}^{-1}\ (0) = k\pi \ ; \ x = \frac{k\pi}{6}$$

Comprobando:

$$\text{Si } x = 0° \therefore \text{sen}^2\ 0° + \cos^2\ 0° - \text{sen } 0° \cos 0° = 1$$

$$x = 60° \ \ldots \ \text{sen}^2 180° + \cos^2\ 180° - \text{sen } 180° \cos 180° = 1$$

.... etc.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$a\ \text{sen}^2\ x + b\ \text{sen } x \cos x + c \cos^2\ x = d$$

multiplicando por dos los miembros de la ecuación y sustituyendo convenientemente, se tiene:

$$a\ (1 - \cos 2x) + b\ \text{sen}^2\ x + c\ (1 + \cos 2x) = 2d$$

o bien:

$$b\ \text{sen } 2x + (c - a) \cos 2x = 2d - (a + c)$$

ecuación del tipo: a sen $x + b \cos x = c$, que tiene solución cuando:

$$(2d - a - c)^2 \leq b^2 + (c - a)^2$$

$$\text{ó} \qquad d^2 + ac - d\ (a + c) \leq \frac{b^2}{4}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$- \text{sen}^2\ x + 6\ \text{sen } x \cos x - 3 \cos^2\ x = 1$$

Tenemos:

$$-1\ (1 - \cos 2x) + 6\ \text{sen } 2x - 3\ (1 + \cos 2x) = 2$$

$$6\ \text{sen } 2x - 2 \cos 2x = 6$$

$$\therefore \quad \text{sen } 2x - 1/3 \cos 2x = 1$$

Si $\tan \phi = 1/3$, entonces: $\phi = \tan^{-1} (0.3333) =$

$= k\pi + 18° \ 26'$

Si $\phi = 18° \ 26'$, $\operatorname{sen}(2x - \phi) = 0.9498 \therefore$

$2x - \phi = \operatorname{sen}^{-1} (0.9498) = 2k\pi + 71° \ 34'$ y

$(2k + 1)\pi - 71° \ 34'$

$\therefore \quad x = 2k\pi + 45° \ ; \quad x = \dfrac{(2k + 1)\pi - 53° \ 8'}{2}$

Si $\phi = 198° \ 26'$, $\operatorname{sen}(2x - \phi) = -0.9498 \therefore$

$2x - \phi = \operatorname{sen}^{-1} (-0.9498) = 2k\pi - 71° \ 34'$ y

$(2k + 1)\pi + 71° \ 34'$

$\therefore \quad x = \dfrac{(2k + 1)\pi + 270°}{2}$

Comprobando:
Si $x = 45°$ $\therefore$ $-\operatorname{sen}^2 45° + 6 \operatorname{sen} 45° \cos 45° - 3 \cos^2 45°$

$= 1$

$x = 63° \ 26'$ $-\operatorname{sen}^2 63° \ 26' + 6 \operatorname{sen} 63° \ 26' \cos 63° 26'$
$- 3 \cos^2 63° \ 26' = 1.0089 \doteq 1$

.... etc.

Otra forma de resolver este tipo de ecuación es la siguiente: como el primer miembro es homogéneo y el segundo no, para hacerlo también homogéneo se multiplica por la identidad : $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, que no altera su valor; así se tiene:

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = d(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$$

$$(a - d)\operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + (c - d)\cos^2 x = 0$$

Dividiendo toda la ecuación entre $\cos^2 x$ y sustituyendo convenientemente, queda:

$$(a - d) \tan^2 x + b \tan x + (c - d) = 0$$

ecuación que puede resolverse fácilmente como se ve enseguida:

$$\tan x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a - d)(c - d)}}{2(a - d)}$$

tan x es real cuando el discriminante es mayor o igual a cero, así se llega a las ecuaciones finales:

$$\tan x = A \quad \therefore\ x = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha$$

$$\tan x = B \quad \therefore\ x = \tan^{-1}(B) = k\pi + \beta$$

Este segundo método es aplicable a toda ecuación que se forme por un polinomio entero en:

sen x cos x,

(pero si no lo es, podrá homogeneizarse multiplicando todos los términos, excepto el del grado más alto, por la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, o bien por alguna de sus potencias que no alterará de manera alguna la igualdad, ya que al multiplicar por 1 o por 1^n cualquier número, éste no se altera, así se obtiene un polinomio entero en sen x cos x; dividiendo toda la ecuación entre cos x elevado a un exponente tal que especifique el grado de la ecuación en cada caso, se obtiene una ecuación en tan x que ya puede resolverse fácilmente como se vió en el caso anterior.

- o O o -

V.- RESOLUCION DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS CONTENIENDO FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS.- UTILIDAD DE DICHAS ECUACIONES EN LA INTEGRACION POR SUBSTITUCION.

a) Conteniendo sólo una función trigonométrica inversa.

Estas ecuaciones se resumen en las formas:

1.- $\operatorname{sen}^{-1}(x) = a°$ $\therefore$ x = sen a. Ecuación en la que se obtiene x con la ayuda de las tablas.

2.- $\cos^{-1}(x) = a°$ $\therefore$ $x = \cos a$

3.- $\tan^{-1}(x) = a°$ $\therefore$ $x = \tan a$

4.- $\cot^{-1}(x) = a°$ $\therefore$ $x = \cot a$

Ejemplo del caso 1: $\operatorname{sen}^{-1}(x) = 120°$ $\therefore$ $x = \operatorname{sen} 120°$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2k\pi + 60°;$$

$$(2k + 1)\pi - 60°$$

De manera semejante se resuelven las ecuaciones:

$a \operatorname{sen}^{-1}(x) = b° \therefore x = \operatorname{sen} b°/a$

$a \cos^{-1}(x) = b° \therefore x = \cos b°/a$

$a \tan^{-1}(x) = b° \therefore x = \tan b°/a$

$a \cot^{-1}(x) = b° \therefore x = \cot b°/a$

b) Conteniendo varias funciones trigonométricas inversas.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\operatorname{sen}^{-1}(x) + \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{1 - x^2}) = a°$$

Haciendo: $\operatorname{sen}^{-1}(x) = u \therefore x = \operatorname{sen} u$

$\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{1 - x^2}) = v \therefore \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{sen} v$

$1 - x^2 = \operatorname{sen}^2 v \therefore x = \cos v$

Por la ecuación se tiene:

$$u + v = a° \therefore u = a° - v$$

Formando el sistema:

1) $u + v = a°$

2) $x = \operatorname{sen} u$

3) $x = \cos v$

Igualando estas dos últimas ecuaciones queda:

$$\operatorname{sen} u = \cos v,$$

de acuerdo con la 1):

$$\operatorname{sen}(a° - v) = \cos v$$

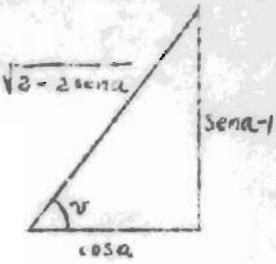
$$\operatorname{sen} a \cos v - \operatorname{sen} v \cos a = \cos v$$

Dividiendo todos los miembros de la ecuación entre cos v, queda:

$$\operatorname{sen} a - \tan v \cos a = 1$$

$$\therefore \tan v = \frac{\operatorname{sen} a - 1}{\cos a}$$

Formando el triángulo respectivo hallamos que la hipotenusa, por el teorema de Pitágoras vale:



$$\sqrt{(\text{sen } a - 1)^2 + \cos^2 a} =$$

$= \sqrt{2 - 2 \text{ sen } a}$. Por la 3) se tiene:

$$x = \cos v = \frac{\cos a}{\sqrt{2 - 2 \text{ sen } a}}$$

ecuación que da directamente el valor de x. Si x = b, la ecuación propuesta queda:

$$\text{sen}^{-1} (b) + \text{sen}^{-1} (\sqrt{1 - b^2}) = a°$$

De manera semejante se resuelven las ecuaciones:

1.- $\cos^{-1} (x) \pm \cos^{-1} (ax) = b°$

2.- $\tan^{-1} (x) \pm \tan^{-1} (x/a) = b°$

3.- $\cot^{-1} (x) \pm \cot^{-1} (x^a) = b°$

4.- $\tan^{-1} (x) \pm \cot^{-1} (ax) = b°$

5.- $\text{sen}^{-1} (x) \pm \cos^{-1} (x) = b°$

Que se resuelve como se ve en seguida: Suponiendo que fuese sólo:

$$\text{sen}^{-1} (x) + \cos^{-1} (x) = a°$$

Haciendo: $\text{sen}^{-1} (x) = u \therefore x = \text{sen } u$

$\cos^{-1} (x) = v \therefore x = \cos v$

se forma el sistema:

1) $u + v = a°$

2) $x = \text{sen } u$

3) $x = \cos v$

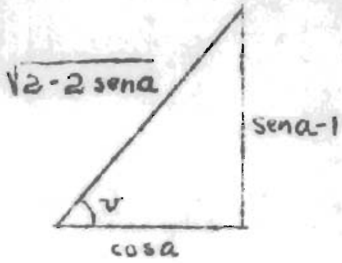
$\therefore \text{sen } u = \cos v$; $\text{sen}(a° - v) = \cos v$

$$\text{sen } a \cos v - \text{sen } v \cos a = \cos v$$

$$\text{sen } a - \tan v \cos a = 1$$

$$\therefore \tan v = \frac{\text{sen } a - 1}{\cos a}$$

De esta relación se tiene el triángulo rectángulo de la figura en el cual la hipotenusa es igual a:



$$\sqrt{2 - 2 \text{ sen } a}$$

Así con la 3):

$$x = \cos v = \frac{\cos a}{\sqrt{2 - 2 \text{ sen } a}}$$

de la que puede encontrarse fácilmente x.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\tan(\cot x) = \cot(\tan x)$$

Suponiendo: $\cot x = a \therefore x = \cot^{-1}(a)$

$$\tan x = 1/a \therefore x = \tan^{-1}(1/a)$$

la ecuación propuesta queda: $\tan a = \cot(1/a)$

en este caso $\underline{a}$ y $\underline{1/a}$ están expresados en radianes. Teniendo presente que dos ángulos tienen igual tangente cuando su diferencia es igual a $k\pi$ circunferencias, se tiene:

$$\tan a = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}) \quad \therefore \quad a - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}) = k\pi$$

que se transforma sucesivamente en:

$$\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{2k\pi + \pi}{2} \text{ ; } 2a^2 + 2 = a(2k\pi + \pi), \text{ o bien:}$$

$$2a^2 - (2k + 1)\pi\, a + 2 = 0$$

$$\therefore \quad a = \frac{(2k + 1)\pi \pm \sqrt{(2k + 1)^2\pi^2 - 16}}{4}$$

Si $k = 1$: $a = \dfrac{3\pi \pm \sqrt{9\pi^2 - 16}}{4}$

Si $\pi = 3.1416$:

$$a = \frac{9.4248 \pm 8.535}{4}$$

$$a_1 = \frac{17.9598}{4} = 4.48995 \doteq 4.9$$

$$a_2 = \frac{0.8898}{4} = 0.22245 \doteq 0.2225$$

Si $a = 4.49$ se tiene: $\tan 4.49 = \cot \frac{1}{4.49} = \cot 0.222$,

Transformando los radianes a grados:

$$\tan(57° 17')(4.49) = \cot(57° 17')(0.2227)$$

o bien: $\tan 256° 7' = \cot 12° 12'$

$$\tan 76° 7 \quad = \cot 12° 12'$$

$$4.061 \doteq 4.638$$

Si $a = 0.2225$: $\tan 0.2225 = \cot \frac{1}{0.2225} = \cot 4.49$

Convirtiendo los radianes a grados:

$$\tan(0.2225)\ (57° 17') = \cot(4.49)(57° 17')$$

o bien: $\tan 12° 44' = \cot 256° 7'$

$$\tan 12° 44' = \cot 76° 7'$$

$$0.2259 \doteq 0.2471$$

Entonces, de acuerdo con lo supuesto se tiene:

$\cot x = 4.49 \therefore x = \cot^{-1}(4.49) = k\pi + 12° 12'$

$\tan x = 0.2227 \therefore x = \tan^{-1}(0.2227) = k\pi + 12° 33'$

$\cot x = 0.2225 \therefore x = \cot^{-1}(0.2225) = k\pi + 77° 27'$

$\tan x = 4.49 \therefore x = \tan^{-1}(4.49) = k\pi + 77° 20'$

o sean las soluciones de la ecuación.

Comprobando:

Si $x = 12° 12'$ ... $\tan(\cot 12° 12') = \cot(\tan 12° 12')$
$x = 77° 20'$ ... $\tan(\cot 77° 20') = \cot(\tan 77° 20')$
.... etc.

De manera semejante se resuelven las ecuaciones.

1.- $\tan(\tan x) = \cot(\cot x)$ llegándose a la conclusión de que esta ecuación es igual a la anterior.

2.- $\text{sen}(\cos x) = \cos(\text{sen } x)$ Del mismo modo, si: $\cos x = a$

$x = \cos^{-1}(a)$, y $\text{sen } x = \sqrt{1 - a^2}$

$\therefore x = \text{sen}^{-1}(\sqrt{1 - a^2})$. Así la ecuación queda:

$$\text{sen } a = \cos \sqrt{1 - a^2} \quad , \text{ ó}$$

$$\text{sen } a = \text{sen } (\frac{\pi}{2} - \sqrt{1 - a^2})$$

$$a - \frac{\pi}{2} + \sqrt{1 - a^2} = 2k\pi \text{ . Efectuando operaciones:}$$

$$2a^2 - (4k + 1)\pi \, a + \frac{(4k + 1)^2\pi}{4} - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{(4k + 1)\pi \pm \sqrt{(4k + 1)^2 \pi^2 - 2(4k + 1)^2\pi^2 - 8}}{4}$$

de donde a es imaginario cualquiera que sea el valor de k.

3.- $\text{sen}(\cot x) = \cos(\tan x)$ Si $\cot x = a \therefore$

$x = \cot^{-1} (a)$; $\tan x = 1/a \therefore x = \tan^{-1} (1/a)$

La ecuación se convierte en: sen a = cos 1/a, ó bien:

$$\text{sen } a = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a})$$

Así: $a - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}) = 2k\pi$, que efectuando operaciones:

$$2a^2 - (4k + 1)\pi \, a + 2 = 0 \quad \therefore$$

$$a = \frac{(4k + 1)\pi \pm \sqrt{(4k + 1)^2\pi^2 - 16}}{4}$$

y también: $a + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a} = (2k + 1)\pi$, o bien:

$$2a^2 - (4k + 1)\pi a - 2 = 0 \quad \therefore$$

$$a = \frac{(4k + 1)\pi \pm \sqrt{(4k + 1)^2\pi^2 + 16}}{4}$$

Si k = 1, en ambos casos se llega a:

$a_1 = 7.727$, $a_2 = 0.127$, $a_3 = 7.9795$ y $a_4 = -0.1295$

Por lo tanto, los valores de x son:

$\cot x = 7.727 \therefore x = \cot^{-1}(7.727) = k\pi + 7° \, 29'$

$\cot x = 0.127 \therefore x = \cot^{-1}(0.127) = k\pi + 82° \, 46'$

$\cot x = 7.98 \therefore x = \cot^{-1}(7.98) = k\pi + 7° \, 10'$

$\cot x = -0.1295 \therefore x = \cot^{-1}(-0.1295) = k\pi + 82° \, 37'$

$\tan x = 0.1294 \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(0.1294) = k\pi + 7° \; 22'$

$\tan x = 7.874 \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(7.874) = k\pi + 82°46'$

$\tan x = 0.1253 \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(0.1253) = k\pi + 7° \; 9'$

$\tan x = -7.721 \quad \therefore \quad x = \tan^{-1}(-7.721) = k\pi + 82° \; 38'$

Comprobando:

Si $x = 7° \; 29'$ ... $\text{sen}(\cot 7° \; 29') = \cos(\tan 7° \; 29')$

$\text{sen } 82° \; 41' = \cos 7° \; 24'$ ó

$0.9918 \doteq 0.9920$

.... etc.

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\text{sen}^{-1}(x) + \text{sen}^{-1}(y) = 0$$
$$\text{sen}^{-1}(1) + \text{sen}^{-1}(z) = \frac{\pi}{3} = 60°$$
$$\text{sen}^{-1}(z) + \text{sen}^{-1}(x) = \frac{\pi}{6} = 30°$$

Si se supone: $\text{sen}^{-1}(x) = u \;\therefore\; x = \text{sen } u$

$\text{sen}^{-1}(y) = v \;\therefore\; y = \text{sen } v$

$\text{sen}^{-1}(z) = w \;\therefore\; z = \text{sen } w$

El sistema se transforma en:

$$u + v = 0 \quad \therefore \quad u = -v$$
$$v + w = \frac{\pi}{3} = 60°$$
$$w + u = \frac{\pi}{6} = 30° \quad \therefore \quad w = 30° - u$$

$v + (30° - u) = v + 30° - (-v) = 60°$

$\therefore\; 2v = 30° \;;\; v = 15° \;;\; u = -15° ;\; w = 45°$

Entonces: $x = \text{sen}(-15°) = -0.2588$

$y = \text{sen } 15° = 0.2588$

$z = \text{sen } 45° = 0.7071$

Comprobando:

Si $\quad \text{sen}^{-1}(-0.2588) + \text{sen}^{-1}(0.2588) = 0$

$\text{sen}^{-1}(0.2588) + \text{sen}^{-1}(0.7071) = \frac{\pi}{3} = 60°$

$\text{sen}^{-1}(0.7071) + \text{sen}^{-1}(-0.2588) = \frac{\pi}{6} = 30°$

Las ecuaciones trigonométricas inversas, prestan gran utilidad en la integración por sustitución, ya que en función de ellas, las integraciones que aparentemente no pueden integrarse por los métodos generales, por medio de ellas pueden efectuarse fácilmente. Es conveniente recordar que no existe método general para hacer tales sustituciones. Sea por ejemplo: cuando en el integrando figura la forma:

1.- $\sqrt{a^2 - x^2}$ es conveniente sustituir $x = a \operatorname{sen} \phi$ o bien, $x = a \cos \phi$. Si se supone la sustitución: $x = a \operatorname{sen} \phi$. Por las reglas de derivación se tiene: $dx = a \cos \phi \, d\phi$. De lo propuesto:

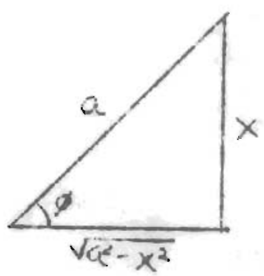
$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \phi)} = a \cos \phi$$

Sustituyendo los valores obtenidos en:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos \phi (a \cos \phi \, d\phi) = a^2 \int \cos^2 \phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int (1 + \cos 2\phi)\, d\phi = \frac{1}{2} a^2 (\phi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\phi) + C.$$

Ya que $x = a \operatorname{sen} \phi \therefore \phi = \operatorname{sen}^{-1} (\frac{x}{a})$, se tiene el triángulo de la figura. Además:



$$\operatorname{sen} 2\phi = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 2 \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Sustituyendo estos valores en el resultado de la integración con el objeto de darlo en la misma forma en que se propuso, queda:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \left[\operatorname{sen}^{-1} (\frac{x}{a}) + x\sqrt{a^2 - x^2} \frac{1}{a^2} \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left[\operatorname{sen}^{-1} (\frac{x}{a}) + x \sqrt{a^2 - x^2} \right] + C$$

Si en la integral se sustituye $x = a \cos \phi$,

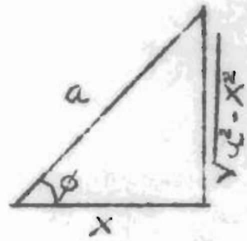
$$dx = - a \operatorname{sen} \phi \, d\phi; \sqrt{a^2 - x^2} = a \operatorname{sen} \phi$$

de donde, sustituyendo:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \operatorname{sen} \phi (-a \operatorname{sen} \phi \, d\phi) = a^2 \int -\operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int -(1 - \cos 2\phi)\, d\phi = \tfrac{1}{2}a^2\left[-\phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\phi\right] + C$$

Pero si $x = a\cos\phi$: $\phi = \cos^{-1}(x/a)$, se tiene el triángulo rectángulo de la figura:



$$\operatorname{sen} 2\phi = 2\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\,\frac{x}{a}$$

$$\therefore \int\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}a^2\left[\frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} - \cos^{-1}(x/a)\right] + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\cos^{-1}(x/a)\right] + C$$

2.- Si en el integrando figura la forma $\sqrt{x^2 + a^2}$ es conveniente sustituir $x = a\tan\phi$. Sea por ejemplo:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

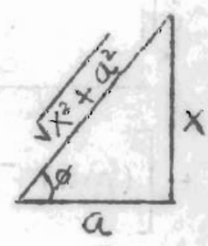
si $x = a\tan\phi$: $dx = a\sec^2\phi\, d\phi$; $\sqrt{x^2 + a^2} =$

$$= \sqrt{a^2(\tan^2\phi + 1)} = a\sec\phi$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int\frac{a\sec^2\phi\, d\phi}{a\sec\phi} = \int\sec\phi\, d\phi =$$

$$= L(\sec\phi + \tan\phi) + C$$

Si $x = a\tan\phi \therefore \phi = \tan^{-1}(x/a)$, se tiene el triángulo rectángulo de la figura. Sustituyendo estos valores queda:



$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = L\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= L\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{a}\right) + C = L\left(\sqrt{x^2 + a^2} + x\right) - La + C$$

ya que La es una constante, puede anexarse a C y así, el resultado final es:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = L\left(\sqrt{x^2 + a^2} + x\right) + C$$

3.- Si en el integrando figura la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, se sustituye $x = a\sec\phi$. Sea la integral:

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2} \quad dx$$

Si $x = a \sec \phi$: $dx = a \sec \phi \tan \phi \, d\phi$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \phi - 1)} = a \tan \phi$$

Sustituyendo en la integral propuesta:

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \int (a^3 \sec^3 \phi)\,(a \tan \phi)\,(a \sec \phi \tan \phi\, d\phi)$$

$$= a^5 \int \sec^2 \phi \sec^2 \phi \tan^2 \phi \, d\phi =$$

$$= a^5 \int (1 + \tan^2 \phi) \tan^2 \phi \sec^2 \phi \, d\phi =$$

$$= a^5 \int (\tan^2 \phi + \tan^4 \phi) \sec^2 \phi \, d\phi = a^5 (\tfrac{1}{3} \tan^3 \phi + \tfrac{1}{5} \tan^5 \phi) + C$$

Si $x = a \sec \phi$: $\phi = \sec^{-1}(x/a)$ se tiene el triángulo de la figura. Así el resultado de la integración es:

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = a^5 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)^5 \right. + C$$

y efectuando operaciones:

$$\frac{a^3}{3} (\sqrt{x^2 - a^2})^3 + \frac{1}{5} (\sqrt{x^2 - a^2})^5 + C = \cdots$$

$$= \frac{1}{15} (\sqrt{x^2 - a^2})^3 \left[2a^2 + 3x^2 \right] + C$$

4.- Si en el integrando figura la forma $\sqrt{\dfrac{a - x}{a + x}}$ es conveniente sustituir $x = a \cos \phi$. Así:

$$dx = - a \operatorname{sen} \phi \, d\phi \;.\; \sqrt{a - x} = \sqrt{a(1 - \cos \phi)}$$

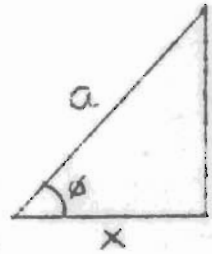
$$\sqrt{a + x} = \sqrt{a(1 + \cos \phi)} \;\therefore\; \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}} = \tan \frac{\phi}{2}$$

Sea: $$\int \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \, dx$$

Sustituyendo por lo convenido queda:

$$= \int -a \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\;}{2}}\cdot d\phi = \int -a(1-\cos\phi)\; d =$$

$$-a\,(\phi - \operatorname{sen}\phi) + c\,.$$



$$\text{Si } x = a\cos\phi \quad \therefore \quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = -a\left[\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right] + c$$

$$= -a\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2-x^2} + c$$

De manera más general, los integrandos en - los cuales figuran las formas:

1.- $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ es conveniente sustituir $bx = a \operatorname{sen}\phi$

2.- $\sqrt{b^2x^2 + a^2}$ " " " $bx = a\tan\phi$

3.- $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ " " " $bx = a\sec\phi$

4.- $\sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}}$ " " " $bx = a\cos\phi$

Siguiéndose en todas ellas procesos análogos a los dados anteriormente.

VI.- DEFINICION DE SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS SIMULTANEAS.- NUMERO DE SOLUCIONES, POSIBILIDAD DE ELLAS.

Un sistema de ecuaciones trigonométricas simultáneas, es un conjunto de ecuaciones que se resuelven al mismo tiempo y que sólo se satisface por determinados sistemas de valores dados a los ángulos que -- contienen. Así por ejemplo: resolver un sistema de -- dos ecuaciones trigonométricas simultáneas de primer - grado con dos incógnitas, es encontrar los diversos -- sistemas de valores de los dos ángulos que verifiquen- simultáneamente las dos ecuaciones. Un sistema de --- ecuaciones trigonométricas simultáneas, generalmente - está formado por tantas ecuaciones como incógnitas hay; puede darse el caso que haya mayor número de ecuacio-- nes que de incógnitas, pero nunca el caso de tener menor número de ecuaciones que de incógnitas.

El número de sistemas de valores que verifican un sistema de ecuaciones trigonométricas simultáneas, es infinito, ya que a cada solución corresponde infinidad de valores; la posibilidad de cada uno de dichos valores depende de las ecuaciones finales que se obtengan; éstas son de alguna de las formas siguientes: sen x = a, cos x = b, tan x = c, etc., cuyas soluciones se trataron en el Capítulo III.

Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, no es posible dar un método a seguir, sino que se resuelven más fácilmente cuanto mayor sea el número de identidades que se conozca, sin embargo, pueden darse tipos de sistemas de ecuaciones trigonométricas simultáneas de primer grado con dos incógnitas cuando se conocen la suma o diferencia de los ángulos desconocidos, así como la suma o diferencia de los senos, cosenos y tangentes; el producto de los senos, cosenos, tangentes, y el cociente de los senos, cosenos y tangentes de los propios ángulos.

VII.- RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS.

a) Resolución del sistema de ecuaciones trigonométricas simultáneas del tipo:

1) $x + y = a$

2) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = b$

Aplicando en 2) la fórmula correspondiente a la suma de los senos de dos ángulos:

$$2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} = b$$

como $x + y = a$, según 1), puede encontrarse $\cos \frac{x - y}{2}$

Así: $$\cos \frac{x - y}{2} = \frac{b}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{x - y}{2} = \cos^{-1} \left[\frac{b}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}} \right]$$

$$\frac{x - y}{2} = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe cuando:

$$-1 \leq \frac{b}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}} \leq 1$$

o, elevando al cuadrado:

$$b^2 \leq 4 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

Finalmente: $x - y = 4k\pi \pm 2\alpha$

Conociendo la suma y la diferencia de los ángulos desconocidos, se puede conocer cada uno y para ellos se resuelve el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, como se ve en seguida:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= 4k\pi \pm 2\alpha \end{aligned}$$

$$2x = a + 4k\pi \pm 2\alpha \quad \therefore \quad x = \frac{a}{2} + 2k\pi \pm \alpha$$

$$2y = a - (4k\pi \pm 2\alpha) \therefore \quad y = \frac{a}{2} - (2k\pi \pm \alpha)$$

Ejemplo: Resolver la ecuación:

1) $x + y = 60°$

2) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1$

Sustituyendo convenientemente en 2) queda:

$$2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} = 1$$

ó $\quad 2 \operatorname{sen} 30° \cos \frac{x - y}{2} = 1$

$$\therefore \cos \frac{x - y}{2} = \frac{1}{2(0.5)} = 1$$

$$\frac{x - y}{2} = \cos^{-1}(1) = 2k\pi \; ; \; x - y = 4k\pi$$

Como ya se conoce la suma y la diferencia de los ángulos desconocidos, se forma un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que son, precisamente, los ángulos desconocidos y que por consiguiente, sus valores se encuentran:

$$\begin{aligned} x + y &= 60° \\ x - y &= 4k\pi \end{aligned}$$

$$2x = 60° + 4k\pi \quad \therefore \quad x = 2k\pi + 30°$$

$$2y = 60° - 4k\pi \quad \therefore \quad y = -2k\pi + 30°$$

Comprobando:

Si $x = 30°$

$y = 30°$ ... $x + y = 60°$

sen $30°$ + sen $30° = 1$

.... etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$\begin{array}{lll} x + y = a & x - y = a & x - y = a \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = b; & \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = b; & \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = b \end{array}$$

Resolución del sistema de ecuaciones trigonométricas del tipo:

$$\begin{array}{ll} 1) & x + y = a \\ 2) & \cos x + \cos y = b \end{array}$$

Reemplazando el primer miembro de la ecuación 2) por un producto de dos cosenos, según fórmula:

$$2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} = b$$

pero, $x + y = a$, entonces queda:

$$\cos \frac{x - y}{2} = \frac{b}{2 \cos \frac{a}{2}}$$

$$\therefore \frac{x - y}{2} = \cos^{-1} \left[\frac{b}{2 \cos \frac{a}{2}} \right] = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\therefore \quad x - y = 4k\pi \pm 2\alpha$$

α existe cuando: $-1 \leq \dfrac{b}{2 \cos \frac{a}{2}} \leq 1$, o bien:

$$b^2 \leq c4 \cos^2 \frac{a}{2}$$

Así se tiene el sistema:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ \underline{x - y = k4\pi \pm 2\alpha} \end{array}$$

$$2x = a + 4k\pi \pm 2\alpha \quad \therefore \quad x = \frac{a}{2} \pm 2k\pi \pm \alpha$$

$$2y = a - (4k\pi\ 2\ \alpha) \quad \therefore \quad y = \frac{a}{2} - (2k\pi \pm \alpha)$$

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 240°$$
$$\cos(-x) + \cos(-y) = 1$$

$$2\cos -\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos -\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$$

$$\cos -\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2\cos(-120°)} = -1$$

$$\therefore \cos\frac{x-y}{2} = -1; \quad \frac{x-y}{2} = \cos^{-1}(-1) = 2k\pi \pm \pi$$

$$x - y = 4k\pi \pm 2\pi = (4k \pm 2)\pi$$

Ahora:

$$x + y = 240°$$
$$x - y = 4k\pi \pm 2\pi$$

$$2x = 240° + (4k \pm 2)\pi \quad \therefore x = 120° + (2k \pm 1)\pi$$

$$2y = 240° - (4k \pm 2)\pi \quad \therefore y = 120° - (2k \pm 1)\pi$$

Comprobando:

Si $x = 300°$
$y = -60°$ ... $x + y = 240°$
$\cos(-300°) + \cos 60° = 1$
.... etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$\begin{matrix} x + y = a; & x - y = a; & x - y = a \\ \cos x - \cos y = b & \cos x + \cos y = b & \cos x - \cos y = b \end{matrix}$$

Resoluciones de sistemas de ecuaciones tri-- gonométricas simultáneas del tipo:

1) $x + y = a$
2) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = b$

Multiplicando por 2 los dos miembros de la 2): $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 2b$, y sustituyendo el primer miembro por una diferencia de los cosenos de dos ángulos; teniendo en cuenta las fórmulas:

3) $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$

4) $\cos q - \cos p = 2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{q-p}{2}$

Calculando primero p y q:

$$\frac{1}{2}(p + q) = x \quad \therefore \quad p + q = 2x$$

$$\frac{1}{2}(p - q) = y \quad \therefore \quad \underline{p - q = 2y}$$

$$2p = 2(x + y) \therefore p = x + y$$

$$2q = 2(x - y) \therefore q = x - y$$

Sustituyendo estos valores de acuerdo con la fórmula 4)

$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2b$. Como $x + y = a$, dato, se tiene:

$$\cos(x - y) = 2b + \cos a$$

$$\therefore x - y = \cos^{-1}(2b + \cos a) = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe cuando: $-1 \leq 2b + \cos a \leq 1$, o, transformando la desigualdad:

$$-2\cos^2\frac{a}{2} \leq 2b \leq 2\,\mathrm{sen}^2\frac{a}{2}$$

de donde finalmente, se obtiene la condición:

$$-\cos^2\frac{a}{2} \leq b \leq \mathrm{sen}^2\frac{a}{2}$$

De este modo se obtienen la suma y la diferencia de dos ángulos, por lo que ellos se encuentran:

$$x + y = a$$

$$\underline{x - y = 2k\pi \pm \alpha}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2} + k\pi \pm \frac{\alpha}{2}$$

$$y = \frac{a}{2} - \left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$x + y = 46^\circ$$

$$\mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,y = 0.136$$

$$p + q = 2x$$

$$\underline{p - q = 2y}$$

$$p = x + y$$

$$q = x - y$$

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 0.272$$

$$\cos(x - y) = 0.9667 \therefore x - y = \cos^{-1}(0.9667)$$

$$= 2k\pi \pm 14^\circ\ 50'$$

$$\begin{array}{r} x + y = 46° \\ \underline{x - y = 2k\pi \pm 14°\ 50'} \end{array}$$

$$2x = 46° + 2k\pi + 14°\ 50' \therefore x = 23° + k\pi + 7°\ 25'$$
$$2y = 46° - (2k\pi \pm 14°50') \therefore y = 23° - (k\pi \pm 7°25')$$

Comprobando:
Si $x = 30°\ 25'$
$y = 15°\ 35'$ ... $x + y = 46°$
sen $30°\ 25'$ sen $15°\ 36' = 0.136$
.... etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$x + y = a \qquad x - y = a \qquad x \pm y = a$$
$$-\text{sen } x \text{ sen } y = b; \quad \text{sen } x \text{ sen } y = b \ ; \quad \text{sen}(-x)\ \text{sen}(-y) = b$$

Resolución de ecuaciones simultáneas del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & x + y = a \\ 2) & \cos x \cos y = b \end{array}\right.$$

Multiplicando por 2 los dos miembros de la ecuación 2): $2 \cos x \cos y = 2b$; sustituyendo el primer miembro de esta ecuación por una suma de los cosenos de dos ángulos, calculando previamente p y q:

$$\begin{array}{l} p + q = 2x \\ \underline{p - q = 2y} \\ 2p = 2(x + y) \therefore p = x + y \\ 2q = 2(x - y) \therefore q = x - y \end{array}$$

sustituyendo estos valores según fórmula, se obtiene:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2b$$
$$\cos(x - y) = 2b - \cos a$$

$$\therefore x - y = \cos^{-1}(2b - \cos a) = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe siempre que: $-1 \leq 2b - \cos a \leq 1$, o bien:

$$-\text{sen}^2 \frac{a}{2} \leq b \leq \cos^2 \frac{a}{2}$$

Calculando $\underline{x}$ e $\underline{y}$, queda:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ \underline{x - y = 2k\pi \pm \alpha} \end{array}$$

$$2x = a + 2k\pi \pm \alpha \therefore x = \frac{a}{2} + k\pi \pm \frac{\alpha}{2}$$

$$2y = a - (2k\pi \pm \alpha) \therefore y = \frac{a}{2} \mp \frac{\alpha}{2} - k\pi$$

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\begin{array}{l} x + y = 750° \\ \underline{\cos x \cos y = 0.5} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p + q = 2x \\ \underline{p - q = 2y} \\ 2p = 2(x + y) \quad \therefore p = x + y \\ 2q = 2(x - y) \quad \therefore q = x - y \end{array}$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 1$$

$$\cos(x - y) = 1 - \cos 750° = 0.1340$$

$$\therefore \quad x - y = \cos^{-1}(0.1340) = 2k\pi \pm 82° \, 22'$$

Ahora:
$$\begin{array}{l} x + y = 750° \\ \underline{x - y = 2k\pi \pm 82° \, 22'} \end{array}$$

$$2x = 750° + 2k\pi \pm 82° \, 22' \;\therefore\; x = 375° + k\pi \pm 41° \, 11'$$
$$2y = 750° - (2k\pi \pm 82° \, 22') \therefore\; y = 375° - (k\pi \pm 41° 11')$$

Comprobando:

Si $x = 416° \, 6'$
$y = 333° \, 49'$ $\quad \therefore\; x + y = 749° \, 55' \doteq 750°$
$\cos 416° \, 6' \,.\cos 333° \, 49' = 0.5032 \doteq 0.5$
.... etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$\begin{array}{c} x + y = a \\ \underline{\cos x \cos(-y) = b} \end{array} ; \begin{array}{c} x + y = a \\ \underline{\cos(-x) \cos y = b} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x - y = a \\ \underline{\cos x \cos y \;\; = b} \end{array} ; \begin{array}{c} x - y = a \\ \underline{\cos(x) \cos(-y) = b} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x - y = a \\ \cos(-x) \cos y = b \end{array} \quad \begin{array}{c} x - y = a \\ \cos(-x) \cos(-y) = b \end{array} \quad \begin{array}{c} x + y = a \\ \cos(-x) \cos(-y) = b \end{array}$$

Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas simultáneas del tipo:

1) $x + y = a$

2) $\dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \dfrac{b}{c}$

Esta ecuación puede escribirse, en virtud de las proporciones, como sigue:

$$\frac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{sen } x + \text{sen } y} = \frac{b - c}{b + c}$$

$$\therefore \qquad \frac{\tan \frac{x-y}{2}}{\tan \frac{x+y}{2}} = \frac{b - c}{b + c}$$

$$\tan \frac{x - y}{2} = \frac{b - c}{b + c} \tan \frac{a}{2}$$

$$\therefore \frac{x-y}{2} = \tan^{-1}\left[\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{a}{2}\right] = k\pi + \alpha$$

$$x - y = 2k\pi + 2\alpha$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= 2k\pi + 2\alpha \\ \hline x &= \frac{a}{2} + k\pi + \alpha \\ y &= \frac{a}{2} - (k\pi + \alpha) \end{aligned}$$

aquí: a°, b y c cualesquiera.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$x + y = 50°$$

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{sen } x + \text{sen } y} = -\frac{1}{3} \quad \therefore \quad \frac{\tan\frac{x-y}{2}}{\tan\frac{x+y}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{3}\tan 25° = -0.1554$$

$$\therefore \frac{x-y}{2} = \tan^{-1}(-0.1554) = k\pi - 8°\ 50'$$

$$x - y = 2k\pi - 17°\ 40'$$

Así se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 50° \\ x - y &= 2k\pi - 17°\ 40' \end{aligned}$$

$$2x = 50° + 2k\pi - 17°\ 40' \quad \therefore \; x = 25° + k\pi - 8°\ 50'$$

$$2y = 50° - (2k\pi - 17°\ 40') \quad \therefore \; y = 25° - (k\pi - 8°\ 50')$$

Comprobando:

Si $x = 16°\ 10'$
$y = 33°\ 50'$ ... $x + y = 50°$

$$\frac{\text{sen } 16°\ 10'}{\text{sen } 33°\ 50'} = \frac{1}{2}$$

...........etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$x + y = a \qquad\qquad x - y = a$$

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{b}{c} \qquad\qquad \frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{b}{c}$$

$$x - y = a \qquad\qquad x \pm y = a$$
$$-\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b}{c} \qquad\qquad -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b}{c}$$

Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas simultáneas del tipo:

$$1) \quad x + y = a$$
$$2) \quad \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{b}{c}$$

Transformando la 2) con ayuda de las proporciones en:

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{b - c}{b + c}$$

el primer miembro por fórmula conocida se transforma:

$$-\tan \frac{x + y}{2} \tan \frac{x - y}{2} = \frac{b - c}{b + c}$$

$$\tan \frac{x - y}{2} = - \frac{b - c}{b + c} \; \frac{1}{\tan \frac{a}{2}}$$

$$\tan \frac{x - y}{2} = \frac{c - b}{c + b} \cot \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x - y}{2} = \tan^{-1}\left[\frac{c - b}{c + b} \cot \frac{a}{2}\right] = k\pi + \alpha$$

$$x - y = 2k\pi + 2\alpha$$

Así se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = 2k\pi + 2\alpha \\ \hline x = a/2 + k\pi + \alpha \\ x = a/2 - (k\pi + \alpha) \end{array}$$

Aquí: a°, b y c cualesquiera.

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$x + y = 40^\circ$$
$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{2}$$

Tenemos:

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = -\frac{1}{3}$$

$$\tan \frac{x + y}{2} \tan \frac{x - y}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \frac{x - y}{2} = \frac{-(1/3)}{-\tan 20^\circ} = \frac{1}{3} \cot 20^\circ = 0.916$$

$$x - y = 2 \tan^{-1}(0.916) = 2k\pi + 84^\circ\, 58'$$

Así se tiene el sistema:

$$\begin{array}{l} x + y = 40^\circ \\ x - y = 2k\pi + 84^\circ\ 58' \\ \hline x = 20^\circ + k\pi + 42^\circ\ 29' \\ y = 20^\circ - (k\pi + 42^\circ\ 29') \end{array}$$

Comprobando:
Si $x = 62^\circ\ 29'$
$y = -22^\circ 29'$ ... $x + y = 40^\circ$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos 62^\circ 29'}{\cos(-22^\circ 29')} = 0.5040 \doteq \frac{1}{2}$$

--------- etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$\begin{array}{lll} x + y = a & x + y = a & x - y = a \\ \frac{\cos(-x)}{\cos y} = \frac{b}{c}; & \frac{\cos x}{\cos(-y)} = \frac{b}{c}; & \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{b}{c} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x - y = a & x - y = a & x \pm y = a \\ \frac{\cos(-x)}{\cos y} = \frac{b}{c}; & \frac{\cos x}{\cos(-y)} = \frac{b}{c}; & \frac{\cos(-x)}{\cos(-y)} = \frac{b}{c} \end{array}$$

Resolución del sistema de ecuaciones trigonométricas simultáneas del tipo:

1) $x + y = a$
2) $\tan x + \tan y = b$

Mediante fórmula conocida, la ecuación 2) se transforma en:

$$\frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y} = b \quad \therefore \cos x \cos y = \frac{\operatorname{sen} a}{b}$$

que puede conocerse en función de los datos convirtiéndose entonces el sistema 1) y 2) en el 3) y 4), como se ve en seguida:

$$x + y = a$$
$$\cos x \cos y = \frac{\operatorname{sen} a}{b}$$

que se resuelve según tipo conocido:

$$2 \cos x \cos y = \frac{2 \operatorname{sen} a}{b}$$

$$\begin{array}{l} p + q = 2x \\ p - q = 2y \\ \hline p = x + y; \quad q = x - y \end{array}$$

sustituyendo convenientemente:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{2 \text{ sen } a}{b}$$

$$\cos(x - y) = \frac{2 \text{ sen } a}{b} - \cos a$$

$$\therefore x - y = \cos^{-1}\left[\frac{2 \text{ sen } a}{b} - \cos a\right] = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe cuando:

$$-1 \leq \frac{2 \text{ sen } a}{b} - \cos a \leq 1,$$

$$ó \quad -\text{sen}^2 \frac{a}{2} \leq \frac{\text{sen } a}{b} \leq \cos^2 \frac{a}{2}$$

Así:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = 2k\pi \pm \alpha \\ \hline x = a/2 + k\pi \pm \alpha/2 \\ y = a/2 - (k\pi \pm \alpha/2) \end{array}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$x + y = 45°$$

$$\tan x + \tan y = 7.5$$

Tenemos:

$$\frac{\text{sen}(x + y)}{\cos x \cos y} = 7.5 \; ; \; \cos x \cos y = \frac{\text{sen } 45°}{7.5} =$$

$$= 0.0943$$

$$x + y = 45°$$

$$\cos x \cos y = 0.0943;$$

$$\begin{array}{l} p + q = 2x \\ p - q = 2y \\ \hline p = x + y \; ; \; q = x - y \end{array}$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 0.1886$$

$$\cos(x - y) = 0.1886 - \cos 45° = -0.51866$$

$$x - y = \cos^{-1}(-0.51866) = 2k\pi \pm 121° \; 5'$$

$$\begin{array}{l} x + y = 45° \\ x - y = 2k\pi \pm 121° \; 5' \\ \hline x = 22° \; 30' + k\pi \pm 60° \; 33' \\ y = 22° \; 30' - (k\pi \pm 60° 33') \end{array}$$

Comprobando:

Si $x = 82° \; 63'$

$y = -38°2'$ ... $x + y = 45° \; 1' \doteq 45°$

$\tan 83°3' + \tan(-38°2') = 7.4128 \doteq 7.5$

.... etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ \tan(-x) + \tan y &= b \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} x + y &= a \\ \tan x + \tan(-y) &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ \tan x + \tan y &= b \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} x - y &= a \\ \tan x - \tan y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \pm y &= a \\ \tan(-x) \pm \tan(-y) &= b \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} \tan(x + y) &= a \\ \tan x + \tan y &= b \end{aligned} ; \text{ que}$$

Puede resolverse más fácilmente como sigue:

De la 1):

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = a$$

De acuerdo con la ecuación 2) se tiene:

$$\frac{b}{1 - \tan x \tan y} = a$$

o bien:

$$\tan x \tan y = \frac{b - a}{-a}$$

Así se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} \tan x + \tan y &= b \\ \tan x \tan y &= -\frac{b - a}{a} \end{aligned}$$

Si tan x y tan y son raíces de una ecuación de segundo grado, ésta es:

$$\tan^2 x - b \tan x - \frac{b - a}{a} = 0$$

$$\tan x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b - a}{a}}$$

Si el discriminante es igual o mayor que cero, tan x es real, y:

$$\tan x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b - a}{2}} = A \therefore x = \tan^{-1}(A) = k^{\pi} + \alpha$$

$$\tan y = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b - a}{a}} = B \therefore y = \tan^{-1}(B) = k^{\pi} + \beta$$

Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas simultáneas del tipo:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ x + y = a \\ &2)\ \tan x \tan y = b \end{aligned}\right.$$

Sustituyendo la tangente en función de los senos y cosenos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{b}{1}$$

Con la ayuda de las proporciones se transforma en:

$$\frac{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y} = \frac{1 - b}{1}$$

pero: $x + y = a$, dato:

$$\cos x \cos y = \frac{\cos a}{1 - b}$$

Así se obtiene el sistema:

$$4)\ x + y = a$$

$$5)\ \cos x \cos y = \frac{\cos a}{1 - b}$$

que se resuelve según tipo conocido:

$$2 \cos x \cos y = 2 \frac{\cos a}{1 - b}; \quad \begin{array}{l} p + q = 2x \\ \underline{p - q = 2y} \\ p = x + y;\ q = x - y \end{array}$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \frac{\cos a}{1 - b}$$

$$\cos(x - y) = 2 \frac{\cos a}{1 - b} - \cos a$$

$$\therefore\ x - y = \cos^{-1}\left[2 \frac{\cos a}{1 - b} - \cos a\right] = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe cuando: $-1 \leq 2 \frac{\cos a}{1 - b} - \cos a \leq 1$, o bien:

$- \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \leq \frac{\cos a}{1 - b} \leq \cos^2 \frac{a}{2}$. Así se tiene:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ \underline{x - y = 2k\pi \pm \alpha} \\ x = a/2 + k\pi \pm \alpha/2 \\ y = a/2 - (k\pi \pm \alpha/2) \end{array}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$\begin{array}{l} x + y = 40° \\ \tan x \tan y = -3 \end{array}$$

Tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = -3; \quad \frac{4}{1} = \frac{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}$$

$$\frac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y} = \frac{4}{1} \quad \therefore \quad \cos x \cos y = \frac{\cos 40°}{4} = 0.1915$$

Por lo tanto se tiene:

$$x + y = 40°$$
$$\cos x \cos y = 0.1915$$

$$2 \cos x \cos y = 0.3830; \qquad \begin{array}{l} p + q = 2x \\ \underline{p - q = 2y} \\ p = x + y \\ q = x - y \end{array}$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 0.3880$$
$$\cos(x - y) = 0.3830 - \cos 40° = 0.3830$$
$$x - y = \cos^{-1}(-0.3830) = 2k\pi \pm 112° \, 29'$$

Así

$$\begin{array}{l} x + y = 40° \\ \underline{x - y = 2k\pi \pm 112° \, 29'} \\ x = 20° + k\pi \pm 56° \, 14' \\ y = 20° - (k\pi \pm 56° \, 14') \end{array}$$

Comprobando:

Si $x = 76° \, 14'$

$y = -36° \, 15' \; \ldots \; x + y = 39° \, 59' \doteq 40°$

$\tan 76° \, 14' + \tan(-36° \, 15') = -2.992 \doteq -3$

.............etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ -\tan x \tan y = b \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x + y = a \\ \tan(-x) \tan(-y) = b \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x - y = a \\ \tan x \tan y = b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - y = a \\ -\tan x \tan y = b \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x - y = a \\ \tan(-x) \tan(-y) = b \end{array}$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas simultáneas del tipo:

1) $x + y = a$

2) $\dfrac{\tan x}{\tan y} = \dfrac{b}{c}$

esta ecuación se transforma mediante las proporciones en:

1) $x + y = a$

2) $\dfrac{\tan x}{\tan y} = \dfrac{b}{c}$

esta ecuación se transforma mediante las proporciones en:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{b - c}{b + c}$$

$$\frac{\frac{\text{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}}{\frac{\text{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}} = \frac{\text{sen}(x - y)}{\text{sen}(x + y)} = \frac{b - c}{b + c}$$

como $x + y = a$, dato:

$$\text{sen}(x - y) = \frac{b - c}{b + c} \text{ sen } a$$

$$\therefore\ x - y = \text{sen}^{-1}\left[\frac{b - c}{b + c} \text{ sen } a\right] = 2k\pi + \alpha,\ (2k + 1)\pi - \alpha$$

α existe cuando: $-1 \leq \frac{b - c}{b + c}$ sen $a \leq 1$, o bien:
$(b - c)^2 \text{ sen}^2 a \leq (b + c)^2$. Así:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = 2k\pi + \alpha \\ \hline x = a/2 + k\pi + \alpha/2 \\ y = a/2 - (k\pi + \alpha/2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = (2k + 1)\pi - \alpha \\ \hline x = a/2 + \frac{(2k + 1)}{2}\pi - \alpha/2 \end{array}$$

$$y = a/2 - \left[(\frac{2k + 1}{2})\pi - \alpha/2\right]$$

Ejemplo. Resolver la ecuación:

$$x + y = 30°$$

$$\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{1}{2}$$

Se tiene:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{\text{sen}(x - y)}{\text{sen}(x + y)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{sen}(x - y) = -\frac{1}{3} \text{ sen } 30° = -0.1666$$

$$\therefore\ x - y = \text{sen}^{-1}(-0.1666) = 2k\pi - 90°\ 36', \text{ y}$$

$$(2k + 1)\pi + 90°36'$$

$$\begin{array}{l} x + y = 30° \\ x - y = 2k\pi - 9°36' \\ \hline x = 15° + k\pi - 4°48' \end{array} \ ; \ \begin{array}{l} x + y = 30° \\ x - y = (2k + 1)\pi + 9°\ 36' \\ \hline x = 15° + (\frac{2k + 1}{2})\pi + 4°\ 48' \end{array}$$

$$y = 15° - (k\pi - 4°\ 48')y = 15° - \left[(\frac{2k+1}{2})\pi + 4°\ 48'\right]$$

Comprobando:

Si $x = 10°\ 12'$
$\quad y = 19°\ 48'$

$$\frac{\tan 10°\ 12'}{\tan 19°\ 48'} = 0.4997 \doteq 0.5$$

Si $x = 109° \; 48'$
$y = - 0° \; 12'$

$$\frac{\tan 109° \; 48'}{\tan(-70° \; 12')} = 0.5$$

.... etc.

De manera análoga se resuelven los sistemas:

$$x + y = a \qquad\qquad x - y = a$$
$$-\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{b}{c} \qquad\qquad \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{b}{c}$$

$$x - y = a \qquad\qquad x \pm y = a$$
$$-\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{b}{c} \qquad\qquad -\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{b}{c}$$

b) Resolución de algunos sistemas de ecuaciones trigonométricas simultáneas de primer grado con dos incógnitas.

Resolución de sistemas de ecuaciones del tipo:

$$\begin{cases} 1) & \text{sen } x + \text{sen } y = a \\ 2) & \text{sen } x - \text{sen } y = b \end{cases}$$

Se tiene: $2 \text{ sen } x = a + b$; $\text{sen } x = \frac{a + b}{2}$

$\therefore \; x = \text{sen}^{-1} \left(\frac{a + b}{2}\right) = 2k\pi + \alpha$, y $(2k + 1)\pi - \alpha$

α existe cuando: $-1 \leq \frac{a + b}{2} \leq 1$, ó $(a + b)^2 \leq 4$

$2 \text{ sen } y = a - b$; $\text{sen } y = \frac{a - b}{2}$

$\therefore \; y = \text{sen}^{-1} \left(\frac{a - b}{2}\right) = 2k\pi + \beta$, y $(2k + 1)\pi - \beta$

β existe cuando: $(a - b)^2 \leq 4$.

De manera semejante se resuelven los sistemas:

$\cos x + \cos y = a$ $\qquad$ $\text{sen}(90° - x) + \text{sen}(90° - y) = a$
$\cos x - \cos y = b$ o sea $\text{sen}(90° - x) - \text{sen}(90° - y) = b$

$$\tan x + \tan y = a$$
$$\tan x - \tan y = b$$

y:
$\cot x + \cot y = a$ $\qquad$ $\tan(90° - x) + \tan(90° - y) = a$
$\cot x - \cot y = b$ o sea $\tan(90° - x) - \tan(90° - y) = b$

Resolución del sistema de ecuaciones simultáneas del tipo:

$$1)\quad a \text{ sen } x + b \text{ sen } y = c$$
$$2)\quad a' \cos x + b' \cos y = c'$$

Si: $\text{sen } x = u$, $\cos x = v$, $\text{sen } y = u_1$, $\cos y = v_1$, el sistema se transforma en el:

$$1)\quad au + bu_1 = c$$
$$2)\quad a'v + b'v_1 = c'$$
$$3)\quad u^2 + v^2 = 1$$
$$4)\quad u_1^2 + v_1^2 = 1$$

sistema simultáneo de segundo grado que se resuelve de la la siguiente manera:

De la 1): $u_1 = \frac{c - au}{b}$

De la 2): $v_1 = \frac{c' - a'v}{b'}$

De la 3): $v^2 = 1 - u^2$

Sustituyendo estos valores en 4), queda:

$$\left(\frac{c - au}{b}\right)^2 + \left[\frac{c' - a'(\sqrt{1 - u^2})}{b'}\right]^2 = 1$$

de donde se obtiene $\underline{u}$, y con ello: v, u_1 y v_1.

Si: $u = A$, $v = B$, $u_1 = C$, $v_1 = D$, se llega a las formas:

$\text{sen } x = A \quad \therefore \quad x = \text{sen}^{-1}(A) = 2k\pi + \alpha$, y $(2k + 1)\pi - \alpha$
$\cos x = B \quad \therefore \quad x = \cos^{-1}(B) = 2k\pi \pm \alpha$
$\text{sen } y = C \quad \therefore \quad y = \text{sen}^{-1}(C) = 2k\pi + \beta$, y $(2k + 1)\pi - \beta$
$\cos y = D \quad \therefore \quad y = \cos^{-1}(D) = 2k\pi \pm \beta$

Resolución de sistemas del tipo:

$$\left.\begin{aligned} 1)&\quad \tan x + \tan y = a \\ 2)&\quad \cot x + \cot y = b \end{aligned}\right\}$$

Este sistema se transforma con fórmulas conocidas; dividiendo la 1) entre la 2):

$$\frac{\text{sen }(x + y)}{\cos x \cos y} \cdot \frac{\text{sen } x \text{ sen } y}{\text{sen}(y + x)} = \tan x \tan y = \frac{a}{b}$$

$$\tan x + \tan y = a$$
$$\tan x \tan y = \frac{a}{b}$$

Si las raíces de una ecuación de segundo grado son $\tan x$, y $\tan y$, dicha ecuación es:

$$\tan^2 x - a \tan x + \frac{a}{b} = 0$$

$$\therefore \quad \tan x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(a/b)}}{2}$$

Si: $a^2 - 4(a/b) \geq 0$, $\tan x$ es real y:

$$\tan x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4(a/b)}}{2} = A \;\therefore\; x = \tan^{-1}(A) = k\pi + \alpha$$

$$\tan y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4(a/b)}}{2} = B \;\therefore\; y = \tan^{-1}(B) = k\pi + \beta$$

De manera semejante se resuelven los sistemas:

$$\begin{aligned} \tan x - \tan y &= a \\ \cot x - \cot y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan x + \cot y &= a \\ \cot x + \tan y &= b \end{aligned} \quad \text{o sea} \quad \begin{aligned} \tan x + \tan(90° - y) &= a \\ \cot x + \cot(90° - y) &= b \end{aligned}$$

Este último sistema puede resolverse como sigue: de la segunda ecuación:

$$\tan y = b - \cot x = b - \frac{1}{\tan x} = \frac{b \tan x - 1}{\tan x}$$

por lo tanto, la primera ecuación queda:

$$\tan x + \frac{\tan x}{b \tan x - 1} = a$$

efectuando operaciones:

$$b \tan^2 x - ab \tan x + a = 0$$

ecuación de fácil resolución. Sustituyendo los valores de x en cualquiera de las ecuaciones propuestas, se obtienen los de y.

Resolución de ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} &1) \quad \tan x \pm \tan y = a \\ &2) \quad b \cos x \cos y = c \end{aligned}$$

La 1) se transforma por fórmula conocida, en:

$$\frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y} = a$$

De acuerdo con la 2), queda: $\text{sen}(x \pm y) = a\,\frac{c}{b}$, ya que: $\cos x \cos y = c/b$

$$x \pm y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{ac}{b}\right) = 2k\pi + \alpha \text{ , y } (2k+1)\pi - \alpha$$

Así, α existe cuando $-1 \leq (ac)/b \leq 1$, ó $a^2c^2 \leq b^2$; $ac \leq b$. Así se tienen los sistemas:

$$\begin{aligned} x \pm y &= 2k\pi + \alpha \\ \cos x \cos y &= c/b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x \pm y &= (2k+1)\pi - \alpha \\ \cos x \cos y &= c/b \end{aligned}$$

cuyas resoluciones ya se dieron.

De manera semejante se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} \cot x \pm \cot y &= a \\ a \text{ sen } x \text{ sen } y &= b \end{aligned}$$

Resolución del sistema del tipo:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{sen } x \text{ sen } y = a \\ &2)\ \cos x \cos y = b \end{aligned}$$

Teniendo presentes las identidades:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \text{ sen } \frac{p-q}{2}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} p + q &= 2x \\ p - q &= 2y \\ \hline p &= x + y \\ q &= x - y \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2a \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2b \end{aligned}$$

Sumando y restando miembro a miembro:

$$\cos(x+y) = b - a$$

$$\therefore \quad x + y = \cos^{-1}(b-a) = 2k\pi \pm \alpha$$

α existe si: $(b-a)^2 \leq 1$; y

$$\cos(x-y) = a + b$$

$\therefore\ x - y = \cos^{-1}(a+b) = 2k\pi \pm \beta$

β existe si: $(a+b)^2 \leq 1$. Así se tienen los siste-

mas: $x + y = 2k\pi \pm \alpha$
$x - y = 2k\pi \pm \beta$

que ya son fáciles de resolver.

Resolución del sistema del tipo:

$$\begin{aligned} &1)\ x \operatorname{sen} y = a \\ &2)\ x \cos y = b \end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$\tan y = a/b \quad \therefore \quad y = \tan^{-1}(a/b) = k\pi + \alpha$$

sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones, se obtiene el valor de x:

$$x \operatorname{sen}(k\pi + \alpha) = a; \ \pm x \operatorname{sen} \alpha = a \ \therefore \ x = \pm \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

De manera semejante se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} &1)\ x \operatorname{sen}(\alpha + y) = a \\ &2)\ x \operatorname{sen}(\beta + y) = b \end{aligned}$$

en este caso es conveniente formar la proporción:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + y) - \operatorname{sen}(\beta + y)}{\operatorname{sen}(\alpha + y) + \operatorname{sen}(\beta + y)} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{\tan(y + \frac{\alpha + \beta}{2})}$$

ecuación de la que ya puede encontrarse y, y por lo -- tanto, x .

VIII.- RESOLUCION DE ALGUNOS SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS SIMULTANEAS DE SEGUNDO GRADO CON DOS - INCOGNITAS.

Resolución del sistema del tipo:

$$\begin{aligned} &1)\ x + y = a \\ &2)\ \operatorname{sen}^2 x \pm \operatorname{sen}^2 y = b \end{aligned}$$

Suponiendo que fuese sólo el sistema:

$$\begin{aligned} &1)\ x + y = a \\ &2)\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = b \end{aligned}$$

Multiplicando la 2) por 2 y sustituyendo convenientemente:

$$(1 - \cos 2x) + (1 - \cos 2y) = 2b$$

ó: $2(1 - b) = \cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x + y) \cos(x - y).$

De acuerdo con la 1): $\cos(x - y) = \frac{1 - b}{\cos a}$

$\therefore x - y = \cos^{-1} (\frac{1 - b}{\cos a}) = 2k\pi \pm \alpha$;

α existe cuando:

$$(1 - b)^2 \leq \cos^2 a$$

Así se tienen los sistemas:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= 2k\pi + \alpha \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= 2k\pi - \alpha \end{aligned}$$

de fácil solución.

De manera semejante se resuelven los sistemas:

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ \operatorname{sen}^2 x \pm \operatorname{sen}^2 y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ \cos^2 x \pm \cos^2 y &= b \end{aligned} \quad ; \qquad \begin{aligned} x - y &= a \\ \cos^2 x \pm \cos^2 y &= b \end{aligned}$$

estas dos últimas con ayuda de la identidad: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, así como los sistemas:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ \operatorname{sen}^2 x \pm \cos^2 y &= b \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} x - y &= a \\ \operatorname{sen}^2 x \pm \cos^2 y &= b \end{aligned}$$

Resolución del sistema:

$$1)\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2)\ a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

De la 2) se tiene: $\cos x = \frac{c - a \operatorname{sen} x}{b}$. La 1) queda:

$$\operatorname{sen}^2 x + (\frac{c - a \operatorname{sen} x}{b})^2 = 1$$

Si se supone: $\operatorname{sen} x = u$, y $\cos x = v$, queda:

$$u^2 + (\frac{c - au}{b})^2 = 1$$

ó, efectuando operaciones:

$$(a^2 + b^2)\, u^2 - 2acu + c^2 - b^2 = 0$$

$$\therefore u = \frac{2ac \pm \sqrt{4a^2c^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2)}}{2(a^2 + b^2)}$$

$$u = \frac{ac \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}\,.\,b}{a^2 + b^2}$$

sen x es real cuando: $a^2 + b^2 \geq c^2$, entonces:

$$u = \frac{ac + b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} = A = \text{sen } x \therefore x = \text{sen}^{-1}(A)$$

$$x = 2k\pi + \alpha, \; y \; (2k + 1)\pi - \alpha$$

α existe si $A^2 \leq 1$.

$$u = \frac{ac - b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} = B = \text{sen } x \therefore x = \text{sen}^{-1}(B)$$

$$x = 2k\pi + \beta, \; y \; (2k + 1)\pi - \beta$$

Sustituyendo el valor de sen x en cualquiera de las -- ecuaciones, se obtiene el de cos x. Si sen x = A :

$$aA + b \cos x = c; \; \cos x = \frac{c - aA}{b} = c \therefore x = \cos^{-1}(c)$$

$$x = 2k\pi \pm \gamma$$

Proceso que se aplica también a la resolución de la -- ecuación de primer grado del tipo:

$$a \text{ sen } x + b \cos x = c$$

como se ve en seguida: sen x = u, cos x = v . Se tiene el sistema:

$$au + bv = c \quad \ldots 1)$$
$$u^2 + v^2 = 1 \quad \ldots 2)$$

De la 1): $v = \frac{c - au}{b}$, por lo que la 2) queda:

$$u^2 + \left(\frac{c - au}{b}\right)^2 = 1$$

$$(a^2 + b^2)u^2 - 2acu + c^2 - b^2 = 1$$

$$\therefore \; u = \frac{2ac \pm \sqrt{4a^2c^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2)}}{2(a^2 + b^2)}$$

$$u = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$

u y v son reales cuando: $c^2 \leq a^2 + b^2$, por lo que los valores son idénticos a los obtenidos para sen x en el 4º método de la resolución de la ecuación:

$$a \text{ sen } x + b \cos x = c$$

del capítulo III, inciso b).

Resolución del sistema del tipo:

$$1)\ \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = a^2$$
$$2)\ \tan^2 x + \tan^2 y = b^2$$

esta última ecuación se transforma en:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}^2 y}{\cos^2 y} = b^2$$

Si: $\text{sen } x = u \qquad \text{sen } y = u_1$
$\quad\ \cos x = v \qquad \cos y = v_1$

el sistema se transforma en:

$$1)\ u^2 + u_1^2 = a^2 \quad \therefore\ u^2 = a^2 - u^2$$

$$2)\ \frac{u^2}{v^2} + \frac{u_1^2}{v_1^2} = b^2$$

$$3)\ u^2 + v^2 = 1 \quad \therefore\ v^2 = 1 - u^2$$

$$4)\ u_1^2 + v_1^2 = 1$$

De la 4): $$v_1^2 = 1 - u_1^2 = 1 - a^2 + u^2$$

Así la 2) queda:

$$\frac{u^2}{(1 - u^2)} + \frac{a^2 - u^2}{1 - a^2 - u^2} = b^2$$

efectuando operaciones:

$$(2 + b^2)u^4 - (2a^2 + b^2a^2)u^2 + a^2(1 + b - b^2) = 0$$

de donde puede despejarse $\underline{u}$; reemplazando su valor en las ecuaciones correspondientes, se encuentran v, v_1, y u_1; así finalmente se llega a las formas:

Si $u = A$, $v = B$, $u_1 = C$, $v_1 = D$:

$$\text{sen } x = A \ \therefore\ x = \text{sen}^{-1}(A) = 2k\pi + \alpha, \text{ y } (2k + 1)\pi - \alpha$$

$$\cos x = B \ \therefore\ x = \cos^{-1}(B) = 2k\pi \pm \alpha$$

$\text{sen } y = C \therefore y = \text{sen}^{-1}(C) = 2k\pi + \beta \text{, y } (2k + 1)\pi - \beta$

$\cos y = D \therefore y = \cos^{-1}(D) = 2k\pi \pm \beta$

De manera semejante se resuelve el sistema:

$$1)\ \tan x \tan y = a$$
$$2)\ \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = b^2$$

Transformando la 1) queda:

$$\frac{\text{sen } x \text{ sen } y}{\cos x \cos y} = a$$

Si: $\text{sen } x = u$ $\quad$ $\text{sen } y = u_1$

$\cos x = v$ $\quad$ $\cos y = v_1$

el sistema se convierte en:

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{u_1}{v_1} = a$$
$$u^2 + u_1^2 = b^2$$
$$u^2 + v^2 = 1$$
$$u_1^2 + v_1^2 = 1$$

como son cuatro las ecuaciones y cuatro las incógnitas que se tienen, el sistema tiene solución. Obtenidos los valores de u, v, u_1, v_1, y reemplazando en lo supuesto, se llega, como antes, a las formas:

$\text{sen } x = A \therefore x = \text{sen}^{-1}(A) = 2k\pi + \alpha \text{, y } (2k + 1)\pi - \alpha$

$\cos x = B \therefore x = \cos^{-1}(B) = 2k\pi \pm \alpha$

$\text{sen } y = C \therefore y = \text{sen}^{-1}(C) = 2k\pi + \beta \text{, y } (2k + 1)\pi - \beta$

$\cos y = D \therefore y = \cos^{-1}(D) = 2k\pi \pm \beta$

---oOo---

IX.- RESOLUCION GRAFICA DE LA ECUACION:

$a \text{ sen } x + b \cos x = c$

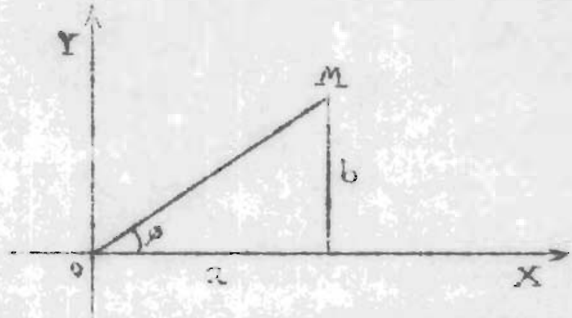
Considerando los coeficientes a y b como coordenadas de un punto en un sistema de ejes perpendiculares:

$\overline{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = \overline{OM} \cos \phi$

$b = \overline{OM} \operatorname{sen} \phi$

$\phi = \tan^{-1}(b/a)$



Sustituyendo estos valores en la ecuación propuesta:

$$\overline{OM} \cos \phi \operatorname{sen} x + \overline{OM} \operatorname{sen} \phi \cos x = c$$

pero: $\overline{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$, por lo tanto:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\ (\operatorname{sen} x \cos \phi + \operatorname{sen} \phi \cos x) = c$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}(x + \phi) = c$$

$$\therefore\ \phi + x = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\right] = 2k\pi + \alpha ,\ y$$

$$\phi + x = (2k + 1)\pi - \alpha.$$

$$\therefore\ x = 2k\pi + \alpha - \phi \quad , y \quad x = (2k + 1)\pi - \alpha - \phi$$

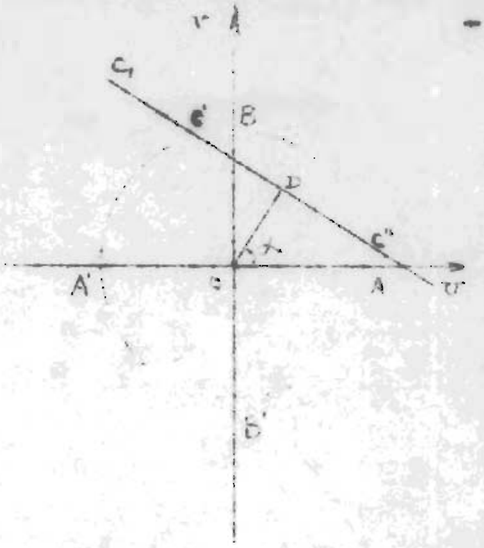
2º método. Suponiendo sen x = u, cos x = v, se tiene: au + bv = c, que con la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ forma el sistema:

$$au + bv = c$$
$$u^2 + v^2 = 1$$

del que se obtienen los valores de u y v como se vió en el capítulo VIII. Estos mismos valores pueden encontrarse resolviendo el sistema gráficamente como sigue:

En un sistema de coordenadas perpendiculares se consideran los valores de u en el eje de las abscisas y los de v en el eje de las ordenadas; así, la ecuación au + bv = c representa una recta de pendiente -(a/b) y de ordenada al origen c/b. En la figura, dicha recta es c_1.

La ecuación $u^2 + v^2 = 1$, representa un círculo de radio 1 con centro en el origen, en la figura es el ABA'B'A. Los puntos comunes de ambas líneas, c' y c" son las soluciones del sistema, ya que éste es simultáneo. Por lo tanto, c' y c" son los extremos de -



los ángulos solución del sistema. Para que la recta c_1 y el círculo se corten, es necesario que la distancia del origen a la recta sea menor o igual que 1, así $\overline{OD} \leq 1$. Analíticamente la distancia de un punto a una recta se encuentra mediante la Forma Normal de Hesse o sea:

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - d = 0.$$

Si $au + bv - c = 0$ es la forma general de la recta c_1, su Forma Normal de Hesse se encuentra dividiendo todos los miembros de la ecuación entre:

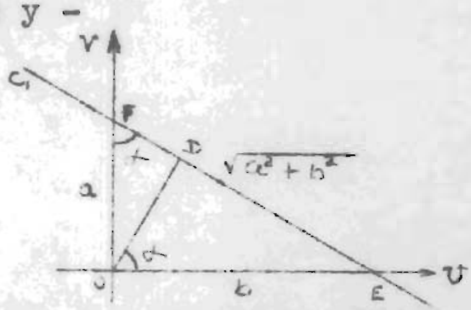
$$\sqrt{a^2 + b^2}\text{, así:}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,v = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

en ella, la distancia del origen a la recta es:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|,\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad y \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

según la ecuación y el triángulo: por lo tanto, para que existan puntos comunes entre la recta y el círculo, se necesita que:



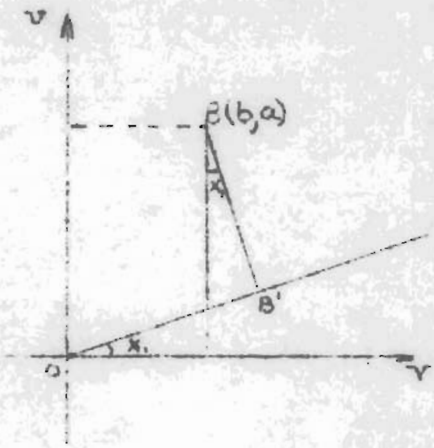
$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq \overline{OB} = 1$$

o bien: $c^2 \leq a^2 + b^2$

que es precisamente la condición que deben llenar los coeficientes de la ecuación $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$ para que éste tenga solución como se vió en el capítulo III, inciso b).

Otra forma de resolver gráficamente dicha ecuación es: sean v y u los ejes de un sistema de ejes perpendiculares y x_1 una solución. Construyendo el punto $B(b, a)$ se obtiene un contorno OAB. Si se proyecta B sobre OC se obtiene el punto B', así se tiene que los contornos OAB y OB'B tienen la misma resultante OB y por lo tanto:

proy. $\overline{OA}$ + proy. $\overline{AB}$ = proy. $\overline{OB'}$ + proy. $\overline{BB'}$



Proyectando sobre OC se tiene:

$a \text{ sen } x_1 + b \cos x_1 = \overline{OB'}$

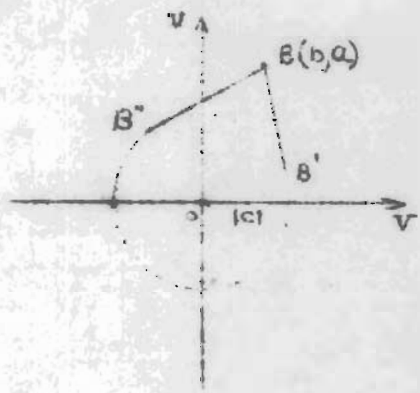
$\text{sen } x_1 + \cos x_1 = \overline{OB'}$

pero como se supone que x_1 es una solución de la ecuación entonces x_1 debe verificarla, así:

$a \text{ sen } x_1 + b \cos x_1 = c$

$\therefore \quad \overline{OB} = c$

Si se traza un círculo de radio $|c|$, las tangentes que parten del punto B(b, a) al círculo, lo tocan en los puntos B' y B" que son las extremidades de los ángulos solución. Para que esta construcción tenga solución se necesita que:



$\overline{OB} \geq \sqrt{a^2 + b^2}$

ó: $\overline{OB} \geq c$, o bien:

$c^2 \leq a^2 + b^2$

MCAG/lma.

TEMA: RESOLUCION DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS.

I N D I C E