



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

Rediseño de un sistema de suspensión para un auto de  
competencia mediante Adams/Car y Matlab.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
I N G E N I E R O M E C A T R Ó N I C O  
P R E S E N T A:

ALDO GUILLERMO ESPEJEL ARROYO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice

Índice .....	i
Agradecimiento .....	v
Introducción .....	vii
Formula SAE y el sistema de suspensión en la UNAM.....	ix
Motivación .....	xi
Objetivos .....	xiii
Glosario de símbolos.....	xv
1.0 Dinámica del neumático .....	1
1.1 Coeficiente de fricción .....	3
1.2 Ángulo de deslizamiento (Slip Angle) $\alpha$ .....	3
1.3 Fuerza lateral $F_y$ .....	4
1.4 Par de alineamiento (Aligning moment) $M_z$ .....	6
1.5 Fuerza longitudinal ( $F_x$ ).....	7
1.5.1 Radio efectivo.....	7
1.5.2 Resistencia al giro .....	8
1.5.3 Slip Ratio ( $s$ ).....	8
1.6 Fuerza debido camber .....	10
1.7 Modelos sobre dinámica de neumático. ....	12
1.8 Elipse de tracción .....	13
1.9 Modelo dinámico del neumático de Pacejka .....	14
1.10 Acerca de TTC, estudio de neumáticos para vehículos Formula SAE.....	16
1.10.1 Programa para filtrar datos .....	17
2. Cinemática y parámetros geométricos.....	21
2.1 Centro instantáneo de rotación (Instant Center $IC$ ).....	22
2.2 Ganancia de Camber (Ride Camber) y Roll Camber .....	23
2.3 Centro de Giro (Roll Center $RC$ ) y Eje de giro (Roll Axis) .....	24
2.3.1 Roll Axis.....	24
2.4 Ángulo de Caster y Mechanical trail.....	25
2.5 Ángulo de Kingpin y scrub radius.....	26

2.6 Efecto de Bump Steer.....	26
2.7 Análisis en WinGeo.....	27
2.7.1 Suspensión Delantera .....	27
2.7.2 Suspensión Trasera.....	30
2.8 Resumen de resultados .....	32
3. Gradiente de Giro .....	33
3.1 Concepto de diseño en la dinámica del prototipo 2014.....	33
3.2 Carga normal y transferencia de carga .....	37
3.3 Diseño de Roll Rate.....	42
3.3.1. Definición de conceptos .....	43
3.3.2. Desarrollo y cálculos .....	45
3.3.3. Resultados .....	47
3.4 Análisis de barra de torsión tipo U .....	48
3.4.1 Principio de funcionamiento.....	48
3.4.2 Fundamentos teóricos.....	49
3.4.3 Esfuerzo en la barra.....	49
3.4.4. Diseño y selección de material .....	50
3.4.5 Dibujo en CAD.....	51
3.5 Diseño en Adams/Car de Installation Ratio y Motion Ratio de la barra de torsión .....	53
3.5.1 Modelo de suspensión en Adams/Car. ....	53
4. Análisis en el dominio de la frecuencia.....	57
4.1 Amortiguadores .....	57
4.1.1 Tipos de amortiguadores .....	57
4.1.2 Características del amortiguador Öhlins TTX25.....	58
4.1.3. Caracterización del amortiguador.....	60
4.2 Modelos matemáticos de 2do y 4to orden.....	60
4.2.1 Modelo masa-resorte-amortiguador de 2do Orden con desplazamiento vertical como entrada .....	60
4.2.2 Modelo de segundo orden con fuerza como excitación .....	62
4.2.3 Modelo de 4to orden con desplazamiento vertical como entrada.....	63
4.2.4 Modelo de 4to orden con fuerza como excitación.....	66
4.3 Simulaciones .....	67

4.3.1 Respuesta de los modelos de 2do orden .....	68
4.3.2 Modelos de 4to orden .....	70
4.4 Optimización .....	75
4.4.1. Transmisibilidad.....	76
4.4.2 Ajuste de amortiguadores.....	79
4.5 Resumen .....	81
5. Análisis Dinámico en Adams/Car .....	83
5.1 Caracterización del vehículo .....	84
5.1.1 Hardpoints .....	84
5.1.2 Resortes y amortiguadores. ....	84
5.1.3 Neumáticos.....	86
5.1.4 Barras de torsión.....	90
5.1.5 Ensamble del sistema de suspensión .....	90
5.1.6 Propiedades de masa .....	91
5.1.7 Motor y transmisión .....	92
5.1.8 Sistema de frenos.....	93
5.2 Simulaciones del vehículo completo .....	94
5.2.1 Vuelta a radio constante .....	94
5.2.2 Aceleración constante.....	96
5.2.3 Frenado en línea recta.....	97
5.2.4 Resumen de simulación de auto completo .....	98
5.3 Análisis en el sistema de suspensión .....	98
6. Pruebas.....	101
6.1 Cálculo de masa suspendida y no suspendida .....	101
6.1.1 Distribución de peso del auto completo .....	101
6.1.2 Altura del CG del vehículo.....	102
6.1.3 Masa no suspendida.....	104
6.1.4 Masa suspendida y su localización.....	105
6.2 Cuantificando del gradiente de roll y su distribución.....	107
6.2.1 Teoría previa.....	107
6.2.2 Resultados .....	111
6.3 Reproducción del camino y su uso para simulación .....	112

6.3.1 Estrategia para simulación.....	113
6.4 Fuerzas en los neumáticos.....	115
Conclusiones.....	119
Bibliografía.....	123
Anexo.....	I
A.1.1 Programas para el análisis de neumáticos en la prueba de “cornering”.....	I
A.1.2 Programa para filtrar datos en la prueba de “Brakes”.....	III
A.2.1 WinGeo Suspensión delantera puntos.....	VI
A.2.2 WinGeo: Análisis de bump-steer.....	VII
A.2.3 WinGeo: Suspensión trasera.....	VIII
A.2.4. Propiedades de masa no suspendida del eje trasero.....	X
A.3.1 Mapa de Skid-Pad.....	XI
A.3.2 Programa para cálculo de centros de masa, gráficas de transferencia de carga y análisis de Roll rates.....	XII
A.3.3. Ensamble barra de torsión delantera.....	XIII
A.3.4. Puntos suspensión en Adams/Car.....	XIV
A.3.5. Gráficas de relaciones de movimiento.....	XVII
A.3.5.1. Installation Ratio delantero y trasero, respectivamente.....	XVII
A.3.5.2. Gráficas de Motion Ratio de la barra delantera y trasera:.....	XVIII
A.4.1 Transmisibilidad y diagramas de fase para modelos de segundo orden.....	XIX
A.4.2 Diagrama de bode para modelo de 2do orden con entrada fuerza.....	XIX
A.4.3 Transmisibilidad y diagrama de fase del modelo de 4to orden.....	XX
A.4.4 Diagrama de bode e del modelo de 4to orden con fuerza como excitación.....	XXI
A.4.5 Desempeño del sistema de 2do orden al cambiar la constante del resorte.....	XXII
A.4.6 Desempeño des sistema de 4do orden al cambiar la constante del resorte por su Wheel Rate.....	XXIII
A.4.7 Programa para desarrollo de modelos dinámicos.....	XXIV
A.5.2 OptimumT Resumen de Coeficientes en el Modelo de Pacejka 2002.....	XXVI
A.5.3 Resultados de fuerzas en brazos traseros en la prueba de Skid-Pad.....	XXIX
A.5.4 Prueba de frenado.....	XXIX
A.6.1. Hoja de pruebas.....	XXXI
A.6.2 Programa para simulación del perfil de camino.....	XXXII

## Agradecimiento

*A mi padre, Jaime Espejel Peralta quien me enseñó el significado del trabajo duro y la disciplina. Enseñándome el camino al éxito mediante la siguiente frase:*

*“Vayas a donde vayas se siempre el mejor”.*

*Gracias padre este es un triunfo de los dos.*



## Introducción

En el siguiente trabajo se mostrará el rediseño del sistema de suspensión para un auto de competencia, la teoría descrita es producto de dos años de investigación en el desarrollo del prototipo formula SAE de la UNAM; sin embargo, el camino que se describirá es aplicable para todo tipo de auto de carreras.

En el capítulo 1, hablaremos de la importancia que tiene el neumático en la dinámica del vehículo, para ello se describirá la teoría sobre su desempeño y detallar que es lo que buscamos en un auto de carreras. Posteriormente, hablaremos del programa desarrollado para el análisis de datos de neumáticos y los requerimientos de diseño para el sistema de suspensión.

En el segundo capítulo, hablaremos sobre los parámetros cinemáticos en el diseño de suspensión, basándonos en información capturada del capítulo anterior. Definiremos algunos conceptos y relaciones geométricas de un sistema de suspensión independiente y analizaremos su desempeño de movimiento mediante la herramienta WinGeo. Al final del capítulo se mostrarán los resultados de los análisis resumiéndolos en una tabla.

En el diseño de suspensión de un auto de competencia, las tareas principales que el sistema debe cumplir son las siguientes dos: controlar la transferencia de carga cuando el auto atraviesa una curva y optimizar el contacto del neumático con el piso. La primera tarea se logra mediante la rigidez de la suspensión y la distribución de ésta en el auto. Por otro lado, para optimizar el contacto con el piso usamos como principal herramienta el ajuste en la constante de los amortiguadores.

Es por ello que en el capítulo 3 se mostrará el método de análisis en la gradiente de giro, parámetro que nos dice la cantidad de rigidez que la suspensión presenta. Para lograrlo, analizaremos los resultados de la competencia en la temporada 2013 y con ello se obtendrá un dato útil para empezar con el análisis. Partiendo de éste, daremos la mejor elección de resortes y dimensiones en las barras de torsión, apoyándonos de un programa que desarrollé en Matlab y el software de análisis dinámico Adams/Car.

Por otro lado, para lograr que el neumático no pierda adherencia, en el capítulo 4 analizaremos los modelos de masa-resorte-amortiguador de segundo y cuarto orden. Además, usaremos las características del ajuste en el amortiguador usado en la temporada 2013, para introducir su desempeño en los modelos y entender cómo éste afecta al comportamiento del sistema. Cumpliendo con el desarrollo de dichos modelos, por últimos introduciremos el concepto de transmisibilidad, mediante el cual desarrollaremos un camino para obtener un ajuste apropiado en los amortiguadores del auto.

A manera de integración, es necesario saber cómo será el desempeño de los sistemas de suspensión delantero y trasero en el auto completo, para ello, en el capítulo 5 desarrollaremos el modelo dinámico del prototipo 2014 en Adams/Car. Se hablará de los elementos que

componen el ensamble principal y cómo deben ser caracterizados para que los resultados sean lo más reales posibles. Posteriormente, se desarrolla una serie de simulaciones con el fin de reproducir los posibles casos en competencia. Con ellos será posible obtener fuerzas en los neumáticos y en cada uno de los nodos hacia el chasis, que son de gran ayuda para la etapa de optimización de piezas en el equipo de formula SAE.

Por último, como un gran paso hacia la validación y entendimiento de la dinámica en el vehículo, se desarrollarán una serie de pruebas. La primera será obtener la distribución de masa en el auto, ya que con ella sabremos cómo será la distribución de carga en cada neumático durante la competencia o bien en futuras pruebas. En seguida analizaremos los resultados obtenidos en algunos canales del sistema de adquisición de datos, con el fin encontrar la cantidad de gradiente de roll en el auto, así como su distribución entre el eje delantero y el eje trasero. Con el fin de saber la cantidad de fuerza normal en cada neumático, desarrollaremos el método para calcularla mediante la medición de la posición de los amortiguadores. Por último, como método de análisis se desarrollará un programa que sea capaz de reproducir el perfil del camino medido y posteriormente simular el desempeño de sistema de suspensión incluyendo los modelos del capítulo 4.

## Formula SAE y el sistema de suspensión en la UNAM

Formula SAE es una competencia estudiantil que tiene como objetivo el diseñar, construir y llevar a competencia un auto tipo formula. Los alumnos deben simular que son una pequeña empresa de diseño por lo que también se evalúan aspectos financieros en la creación del prototipo. En Formula SAE el auto más rápido no siempre es el auto que gana la competencia, ya que se evalúan los siguientes aspectos.

- Eventos estáticos:
  - Presentación de Diseño. 150 puntos
  - Costos y análisis de manufactura. 100 puntos
  - Presentación general del auto. 75 puntos
- Eventos Dinámicos:
  - Prueba de aceleración. 75 puntos
  - Skidpad 50 puntos
  - Autocross 100 puntos
  - Prueba de resistencia. 300 puntos
  - Prueba de rendimiento de combustible. 100 puntos

De esta forma el auto con mayor puntaje gana. La descripción en cada uno de estas pruebas se puede ver en [1]. El sistema de suspensión impacta directamente en cada una de las categorías y tiene un gran peso en las pruebas dinámicas, así como la presentación de diseño, ya que el desempeño del auto obedece a como haya sido diseñado.

Dentro del año de diseño del prototipo se debe cumplir con un reglamento que SAE (Sociedad de Ingenieros Automotrices, pos su siglas en inglés) provee. En el reglamento del año 2014 [1] las reglas que definen al sistema de suspensión fueron:

### T6.1 Suspensión

T6.1.1 El carro debe estar equipado con un sistema de suspensión completamente funcional con amortiguadores, adelante y atrás, que pueda usarse en un viaje vertical de al menos 50.8 [mm], de los cuales 24.5 [mm] son de viaje ascendente y 24.5 [mm] de viaje descendente, con el piloto sentado en el auto. Los jueces se reservan el derecho de descalificar cualquier auto que no represente un intento serio de un sistema de suspensión operacional o que no demuestre una maniobrabilidad adecuada en a prueba de autocross.

T6.1.2 Todas las sujeciones del sistema de suspensión deben ser visibles durante la revisión técnica, siendo una inspección directamente visible o removiendo cualquier cubierta.

Las reglas no son muy estrictas en cuando el tipo de amortiguador, resorte o el tipo de suspensión que puede usarse. Sin embargo, debe de leerse con detenimiento las reglas que definen las características que el chasis debe cumplir, ya que en él en donde el sistema de

suspensión tendrá sus sujeciones. Para saber más sobre las reglas del chasis vea [1] (o el respectivo reglamento al año de la competencia que usted vaya a participar).

### **UNAM Motorsports**

La primera vez que la UNAM participó en la competencia fue en el año 2010, en el cual él equipo logró el premio al novato del año y el lugar 24 en toda la competencia. Desde entonces la universidad ha participado año con año, desarrollando un prototipo completamente nuevo.

El crecimiento que el sistema de suspensión a lo largo de los años ha sido positivo, ya que año con año se ha mejorado en los aspectos técnicos y teóricos con los cuales el sistema ha diseñado. A lo largo de la historia se han desarrollado trabajos de tesis por algunos miembros en los cuales plasman aportes a los criterios de diseño en el sistema de suspensión. A continuación tenemos una cronología sobre los prototipos y la documentación que se ha dejado en referencia al sistema de suspensión:

- 2010 prototipo UM331
  - No hay trabajo de tesis o reporte de diseño al respecto.
- 2011 prototipo UM 362
  - Tesis: Método de diseño del sistema de suspensión de un vehículo de competencia “Formula SAE” de Jaime Cordoba Breña, año de publicación Enero 2012.
  - Tesis: diseño del sistema de suspensión del vehículo fórmula sae unam 2011, de Vázquez Trevilla Norman Idnas, presentada en septiembre del 2014.
- 2012 prototipo UM 513
  - Reporte de diseño interno para el equipo de la UNAM por Pliego Vinajeras Alejandro y Gonzalo Guerrero
- 2013 prototipo UM524
  - Reporte de diseño interno para el equipo Formula SAE de la UNAM por Becerril Gonzales Paulo y Espejel Arroyo Aldo.
- 2014 prototipo UM-515.
  - Reporte de diseño interno para el equipo formula SAE por Espejel Arroyo Aldo y el presente trabajo de tesis.

Si bien se ha logrado tener documentación del trabajo, estos se han enfocado a la cinemática del sistema de suspensión y a la caracterización de las piezas mediante técnicas de elemento finito. Es por ello, que el presente trabajo mostrará la importancia del análisis en el desempeño del neumático como primer paso para definir las características cinemáticas y dinámicas de la suspensión. Además del análisis en frecuencia para un ajuste apropiado en los amortiguadores, sin dejar a un lado su integración en el análisis dinámico mediante el software Adams/Car.

## Motivación

Al terminar de leer el presente trabajo el lector será capaz de saber los parámetros de diseño dentro del sistema de suspensión de un auto de competencia, logrando comprender la importancia del análisis del neumático como primer paso de diseño. Además será capaz calcular la rigidez de la suspensión del auto mediante la elección de los valores en los resortes y la rigidez de las barras de torsión.

Se muestra una aproximación al ajuste que puede hacerse en la constante de amortiguamiento en el análisis del sistema masa-resorte-amortiguador, con el fin de que la huella del neumático mantenga su máxima adherencia posible.

Además se mostrará la caracterización del modelo dinámico en Adams/Car, detallando sobre aspectos como tipo de neumáticos, resortes, amortiguadores, configuración de suspensión y barras de torsión. Siendo Adams/Car una herramienta ampliamente usada en la industria automotriz hoy en día.

Por último, se mostrará un plan de pruebas para comprender la dinámica del auto y algunas curvas que validarán el diseño de cálculos previos del gradiente de roll en el auto.



## Objetivos

El presente trabajo de tesis tiene los siguientes objetivos:

1. Mostrar la teoría necesaria para entender la dinámica del neumático de un auto de carreras, mostrando algunos modelos sobre cómo se generan las fuerzas y momentos en la huella del neumático.
2. Integrar la información del neumático en las metas de diseño de la cinemática del sistema de suspensión, logrando dichas metas usando el paquete de WinGeo y Adams/Car.
3. Definir el gradiente de roll que el auto presentará, detallando en los cálculos necesarios para lograrlo y poder con ello dar un valor en la constante del resorte, así como la cantidad de rigidez que cada una de las barras debe tener.
4. Desarrollar un análisis en frecuencia de los modelos de segundo y cuarto orden, con el fin de poder dar un ajuste apropiado para el amortiguador TTX25.
5. Mostrar la caracterización del modelo dinámico en Adams/Car, con el fin de hacer posteriormente pruebas y obtener las reacciones en cada una de las uniones del sistema de suspensión.
6. Mostrar los cálculos para la localización del centro de gravedad de la masa suspendida y la masa no suspendida. Así como mostrar la prueba necesaria para validar el gradiente de giro en el auto.
7. Desarrollar la simulación del perfil de camino adquirido mediante el sistema de telemetría, dando solución a la modelo de cuarto orden mediante el método numérico de Euler.
8. Mostrar los cálculos para inferir la carga normal en cada uno de los neumáticos.

Para cumplir con el primer punto a continuación se mostrara la dinámica del neumático.



## Glosario de símbolos

Símbolo	Significado	Descripción
$\alpha$	Angulo de deslizamiento ( <i>Slip angle</i> ).	Ángulo entre la dirección del neumático y su plano de rotación [grados]
$a_s, b_s$		$a_s$ =distancia entre el eje delantero a la línea central del centro de masa suspendida, $b_s = WB - a_s$ [m]
$a_{x,\gamma}$	<i>Camber trail</i>	Distancia entra la línea donde se aplica la fuerza lateral al eje z medida en [m]
$a_{y,\gamma}$	<i>Camber arm</i>	Distancia entra la línea donde se aplica la fuerza normal al eje y medida en [m]
$a_y$	Aceleración lateral	Aceleración lateral del centro de gravedad del auto [m/s <sup>2</sup> ].
$A_y$	Aceleración lateral expresada en cantidades de aceleración de gravedad	Aceleración resultante de dividir un valor de aceleración entre la aceleración de la gravedad (9.81m/s <sup>2</sup> ). Es adimensional pero se expresa como [g's].
$a_{x_a}$	<i>Pneumatical trail</i>	Distancia del eje de giro del neumático al eje y, visto de manera lateral, este efecto incluye la deformación debida a $\alpha$ , [m]
$a_x$	Aceleración lineal	Aceleración lineal del centro de gravedad del auto [m/s <sup>2</sup> ].
$A_x$	Aceleración longitudinal expresada en cantidades de aceleración de gravedad	Aceleración resultante de dividir el valor de aceleración longitudinal entre aceleración de la gravedad (9.81m/s <sup>2</sup> ). Es adimensional pero se expresa como [g's].
$C$	Constante del amortiguador.	Es la contante de amortiguamiento medida en [Ns/m] o bien [Ns/mm].
$C_\alpha$	Coficiente de rigidez de vuelta ( <i>cornering stiffness</i> )	Pendiente de la curva $F_y$ vs $\alpha$ en el rango elástico [N/grado]
$C_\gamma$	Coficiente de camber	Pendiente de la curva de camber vs fuerza lateral [N/grado]
$d$	Diámetro de la barra de torsión.	
$E$	Módulo de elasticidad	Módulo de elasticidad del material con el cual se diseña la barra de torsión. Se expresa en [MPa], o bien, [Pa]
$F_{ARB}$	Fuerza dela barra de torsión.	Fuerza aplicada al neumático debido a la barra de torsión.
$F_{BS}$	Fuerza del bump-Stop	Fuerza aplicada al neumático debido a la compresión del caucho del bump-stop.
$F_c$	Fuerza en el amortiguador	Fuerza que el amortiguador desarrolla en [N].
$F_{k_s}$		Fuerza en el resorte para el modelo masa-resorte-amortiguador.
$F_r$	Fuerza de resistencia al giro	Fuerza debida a la resistencia al giro, la cual es dependiente de la velocidad de giro del neumático [N].
$F_R$	Fuerza resultante	Fuerza resultante de la presencia de una fuerza lateral y una fuerza longitudinal en el neumático [N].
$F_s$	Fuerza del resorte	Se expresa en [N].
$F_y$	Fuerza Lateral	Fuerza en el sentido del eje y en el neumático [N].
$F_{y,\gamma}$	Fuerza lateral debida a	Fuerza lateral que se agrega debido a la presencia de camber [N]

	camber	
$F_x$	Fuerza longitudinal	Fuerza en el sentido del eje x en el neumático [N].
$F_z$	Fuerza Normal.	Fuerza en el sentido del eje z en el neumático [N].
$F_{Z1}$	Fuerza normal en 1	Fuerza normal en la llanta delantera izquierda [N].
$F_{Z2}$	Fuerza normal en 2	Fuerza normal en la llanta delantera derecha [N].
$F_{Z3}$	Fuerza normal en 3	Fuerza normal en la llanta trasera izquierda [N].
$F_{Z4}$	Fuerza normal en 4	Fuerza normal en la llanta trasera derecha [N].
$G$	Módulo de rigidez	Módulo de rigidez del material con el cual se diseña la barra de torsión. Se expresa en [MPa], o bien, [Pa]
$G_F(s)_{2do}$	Función de transferencia modelo de 2do orden	Función de transferencia del modelo de segundo orden que tiene como entrada una fuerza.
$G(s)_{2do}$	Función de transferencia modelo 2do orden	Función de transferencia del modelo de segundo orden que tiene como entrada un desplazamiento vertical.
$G_{x1}(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada un desplazamiento vertical y nos relaciona la posición del CG de USM con respecto a la entrada.
$G_{x3}(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada un desplazamiento vertical y nos relaciona la posición del CG de masa suspendida con respecto a la entrada.
$G_3(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada un desplazamiento vertical y nos relaciona la compresión del resorte.
$G_4(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada un desplazamiento vertical y nos relaciona la velocidad de compresión del resorte.
$G_{Fx1}(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada una fuerza y nos relaciona la deflexión del neumático.
$G_{Fx3}(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada una fuerza y nos relaciona la compresión del amortiguador.
$G_{F3}(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada una fuerza y nos relaciona a la posición de la masa suspendida.
$G_{F4}(s)$	Función de transferencia	Función de transferencia del modelo de 4to orden que tiene como entrada una fuerza y nos relaciona la velocidad de compresión en el amortiguador.
$h_{COG}$	Altura del centro de gravedad el auto completo.	Altura del centro de gravedad el auto completo medido con respecto al piso y representado en [m].
$h_F/h_R$	Altura del CG de USM	Altura del centro de gravedad de USM delantero/trasero con respecto al piso medido metros [m]
$h_{RCf}/h_{RCr}$	Altura del centro de rotación.	Altura del centro de rotación delantero/trasero con respecto al piso en [m]. Puede tener valores negativos.
$h_{Roll}$	Altura al eje de roll	Distancia del centro de masa suspendida con respecto al eje de roll.
$I$	Momento de inercia.	Momento de inercia de la sección transversal de la barra de torsión.
$IR$	<i>Installation Ratio</i>	Cambio de longitud del resorte entre cambio de viaje vertical del neumático. Es adimensional [-] y es el inverso multiplicativo del <i>motion ratio</i> (MR=1/IR)

$IR_f, IR_r$		Installation ratio delantero, Installation ratio trasero.
$K_{ARB}$	Rigidez de diseño en la barra de torsión	El rigidez con la cual la barra de torsión debe ser diseñada, esta incluye el efecto incluido por el $MR_{ARB}$ . Si $MR_{ARB} = 1$ entonces $K_{ARB} = K_{\phi A}$ . Sus unidades son [Nm/grado].
$K_W$	<i>Wheel Center Rate</i>	Razón de movimiento al centro del neumático, Es cantidad de fuerza necesaria que de sebe aplicar en el centro del neumático para comprimir un metro (o un milímetro) el resorte. Se expresa en [N/m] o [N/mm]
$K_R$	<i>Ride Rate</i>	Es cantidad de fuerza necesaria que de sebe aplicar en la huella del neumático para comprimir un metro (o un milímetro) el resorte. Se mide en [N/m], o bien, [N/mm]
$K_S$	Constante del resorte	Unidad de fuerza del resorte por unidad de compresión/extensión en él. Se expresa en [N/m] o [N/mm].
$K_{WfR}$		<i>Wheel Center Rate</i> del neumático delantero derecho.
$K_{WfL}$		<i>Wheel Center Rate</i> del neumático delantero izquierdo.
$K_{WRR}$		<i>Wheel Center Rate</i> del neumático trasero derecho.
$K_{WfL}$		<i>Wheel Center Rate</i> del neumático trasero izquierdo.
$K_{WfL}$	Constante elástica del neumático ( <i>Tire rate</i> )	Fuerza necesario para flexionar un milímetro/metro o metro el neumático. Se expresa en [N/mm], o bien, [N/m].
$K_{\phi}$	Gradiente de roll	Gradiente de roll del auto completo en [grados de Roll/ g's]
$K_{\phi F} / K_{\phi R}$	Gradiente de roll	Roll stiffness del eje delantero/trasero (a los neumáticos) medido en [grados de Roll/ g's].
$K_{\phi DES}$	Gradiente de roll deseado	Valor del gradiente de roll deseado (en el auto completo), puede ser la meta de diseño. Se expresa en [grados de roll/g's].
$K_{\phi DES,f}$		Gradiente de roll deseado en el eje delantero [grados de roll/g's].
$K_{\phi DES,r}$		Gradiente de roll deseado en el eje trasero [grados de roll/g's].
$K_{\phi A}$	Rigidez de las barras de torsión	En la cantidad de rigidez que debe aportar las barras de torsión al auto completo. Se mide en [Nm/grado].
$K_{\phi A,f}$		Rigidez que las barra de torsión delantera debe tener. [Nm/grado].
$K_{\phi A,r}$		Rigidez que las barra de torsión trasera debe tener. [Nm/grado].
$L$	Longitud de la barra de torsión	Expresada en metros [m] o [mm]
$M_x$	Momento de vuelco ( <i>Overtuning Torque</i> ).	Momento que experimenta el neumático alrededor del eje x [Nm]
$M_{x,\gamma}$	<i>Camber Torque</i>	Momento con respecto al eje z debido a la presencia del ángulo de camber [Nm].
$M_y$	Momento de alineamiento ( <i>Aligning Torque</i> ).	Momento que experimenta el neumático alrededor del eje y [Nm]
$M_z$	Momento en z.	Momento que experimenta el neumático alrededor del eje z [Nm]
$M_{z,\gamma}$	Momento de camber	Momento con respecto al eje x debido a la presencia del ángulo de camber [Nm]
$MR_{ARB}$	<i>Motion Ratio</i> de la barra de torsión	Relación que existen entre el ángulo de torsión de la barra de torsión y el ángulo de roll en el auto. Es adimensional [-]
$P$	Potencia	Potencia necesario para desarrollar la prueba de aceleración en un tiempo determinado [Watts] o [Hp]

$q$	Distribución del gradiente de roll	Relación que hay entre la cantidad de roll del eje delantero con respecto al eje trasero. Es adimensional [-].
$R_w$	Radio efectivo.	Radio del neumático útil para calcular su velocidad angular [m]
$R_g$	Radio geométrico.	Radio del neumático sin carga [m].
$R_h$	Radio bajo carga	Radio del neumático bajo carga normal [m].
$RG_{\phi_{DES}}$	Gradiente de roll deseado	Valor del gradiente de roll deseado (en el auto completo), puede ser la meta de diseño. Se expresa en [Nm/grado].
$RG_{\phi_{DES},f}$		Gradiente de roll deseado en el eje delantero [Nm/grado]
$RG_{\phi_{DES},r}$		Gradiente de roll deseado en el eje trasero [Nm/grado]
$\frac{RG_F}{RG_R}$	Gradiente de roll	Gradiente de roll delantero/trasero medido en [Nm/grado].
$s$	Razón de deslizamiento ( <i>Slip Ratio</i> )	Creciente de la velocidad del neumático antes y después de ser frenado o acelerado [-]
$S.F.$	Factor de seguridad	Factor de seguridad de la barra de torsión. Parámetro adimensional [-]
$T$		Par o torque aplicado en la barra de torsión en la barra de torsión medido en [Nmm] o [Nm]
$TR$	Transmisibilidad.	Relación entre la amplitud de la entrada y la salida en los modelos m-r-a. Concepto usado para el ajuste de amortiguadores. Es un parámetro adimensional [-].
$t_F/t_R$	Track delantero/Track trasero.	Track es la medida desde el punto de contacto del neumático derecho a izquierdo delantero/trasero en metros [m]
$V$	Velocidad promedio en Skid-Pad	Velocidad promedio durante la prueba de Skid-Pad [m/s].
$v_p$	Velocidad de compresión	Velocidad medida en [m/s] o bien [mm/s]
$v_{xw}$	Velocidad lineal del neumático	Medida en [m/s]
$W_1$	Peso en 1	Peso medido directamente en el neumático delantero izquierdo [Kg].
$W_2$	Peso en 2	Peso medido directamente en el neumático delantero derecho [Kg].
$W_3$	Peso en 3	Peso medido directamente en el neumático trasero izquierdo [Kg].
$W_4$	Peso en 4	Peso medido directamente en el neumático trasero derecho [Kg].
$WB$	Wheelbase	Medida desde el centro del neumático delantero al trasero y se mide en [m].
$W_S$	Masa suspendida	Masa suspendida en el auto completo.
$W_T$	Peso total del auto	Peso completo del auto en [Kg].
$W_U$	Masa no suspendida	Masa no suspendida del auto completo [Kg].
$W_{u1}$	Peso de masas no suspendida 1	Peso de la no masa suspendida delantera izquierda [Kg].
$W_{u2}$	Peso de masas no suspendida 2	Peso de la no masa suspendida delantera derecha [Kg].
$W_{u3}$	Peso de masas no suspendida 3	Peso de la no masa suspendida trasera izquierda [Kg].
$W_{u4}$	Peso de masas no suspendida 4	Peso de la no masa suspendida trasera derecha [Kg].
$W_{uF}$		Peso de la masa no suspendida delantera en [Kg].
$W_{uR}$		Peso de la masa no suspendida trasera en [Kg].

$\Delta W_{uF},$ $\Delta W_{uR}$	Transferencia de carga lateral de USM	Transferencia de carga lateral de USM (masa no suspendida) debido a la localización de su CG. El sufijo $F$ se refiere al eje delantero y $R$ al eje trasero. [N]
$\Delta W_{gF},$ $\Delta W_{gR}$	Transferencia de carga lateral geométrica	Transferencia de carga debido a la localización del CG de la masa suspendida. . El sufijo $F$ se refiere al eje delantero y $R$ al eje trasero [N]
$\Delta W_{sF},$ $\Delta W_{sR}$	Transferencia de carga lateral de la masa suspendida.	Transferencia de carga lateral debida a la distribución de la rigidez de la suspensión [N]
$\Delta W_{long}$	Transferencia de carga longitudinal	Transferencia de carga debida a la presencia de aceleraciones longitudinales en el centro de gravedad del vehículo.
$W_{uF},$ $W_{uR}$	Peso de USM.	Peso de la masa no suspendida delantero/trasero en kilogramos [Kg]. El sufijo $F$ se refiere al eje delantero y $R$ al eje trasero. [N].
$W_{sF}$ $/W_{sR}$	Masa suspendida.	Masa suspendida delantera/trasera [Kg]
$\omega_{nU}$	Frecuencia natural de la masa no suspendida.	Frecuencia a la cual la masa no suspendida resuena. Se expresa en [rad/s], [ciclo/s] o [Hz].
$\omega_{nS}$	Frecuencia natural de la masa suspendida.	Frecuencia a la cual la masa suspendida resuena. Se expresa en [rad/s], [ciclo/s] o [Hz].
$x_d$	Perímetro de una vuelta en Skid-Pad	Perímetro que resulta de dar una vuelta a una de la circunferencia de la prueba de Skid-Pad. Tiene un valor de 57.33 [m]
$x_m$		Referencia de posición de la masa suspendida en el modelo masa-resorte-amortiguador (m-r-a) de 2do orden.
$x_r$	Perturbación en el camino.	Perturbación o entrada de desplazamiento en el modelo m-r-a de 2do y 4to orden.
$x_s$	- Compresión/extensión en el resorte o amortiguador - Posición de la masa suspendida.	-Diferencia entre la longitud libre del resorte y su valor cuando está sometido a carga. Se expresa en [m] o [mm]. -En el modelo m-r-a de 4to orden, representa la posición del centro de masas suspendida.
$x_u$	Posición del CG de USM	Posición del centro de gravedad de la masa no suspendida en el modelo m-r-a de 4to orden
$\mu_r$	Coefficiente de resistencia	Parámetro adimensional y dependiente de la velocidad de giro del neumático, [-].
$\Omega$	Velocidad angular del neumático.	Velocidad angular instantánea del neumático en [rad/s]
$\Omega_0$	Velocidad de libre giro	Es la velocidad de giro libre (sin frenar o acelerar) [rad/s]
$\mu_x$	Coefficiente de fricción longitudinal	Cociente entre $F_x/F_z$ , además es dependiente de $s$ [-]
$\mu_y$	Coefficiente de fricción lateral.	Cociente entre $F_y/F_z$ , además es dependiente de $\alpha$ [-]
$\gamma$	Ángulo de camber	Ángulo entre la inclinación del neumático con respecto a su eje $z$ , medido relativo al chasis.
$\phi$	Ángulo de Roll	Angulo de giro del auto alrededor de su eje $x$
$\phi_F$		Ángulo de roll en el eje delantero medido en [Grados]
$\phi_R$		Ángulo de roll en el eje delantero medido en [Grados]
$\theta$	Ángulo de torsión en la barra de torsión.	Se expresa en grados o radianes.
$\nu$	Módulo de Poisson	Parámetro adimensional que relaciona el módulo de elasticidad y el módulo de rigidez en un material.

---

$\sigma_y$	Esfuerzo de cedencia	Esfuerzo al cual el material deja de comenzar a deformar plásticamente.
$\tau_{max}$		Esfuerzo cortante máximo que soporta el material. Se expresa en [Pa] o [MPa]
$\tau$	Esfuerzo cortante en la barra de torsión.	Esfuerzo cortante en la barra de torsión. Se expresa en [Pa] o [MPa].
$\xi$	Factor de amortiguamiento.	Factor de amortiguamiento del modelo masa-resorte-amortiguador.

## 1.0 Dinámica del neumático

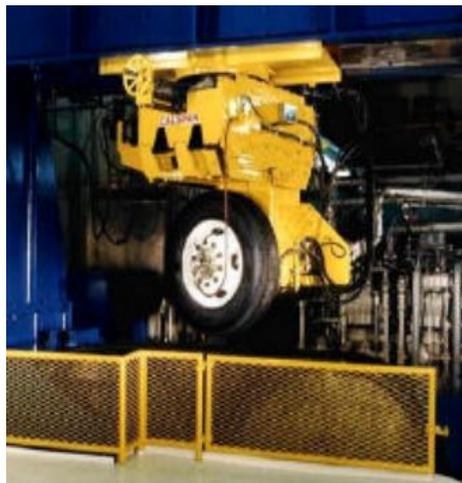
Mientras que el auto fue inventado a finales del siglo XIX, el estudio de la dinámica del vehículo no lo fue sino hasta el año de 1920 y en los años 30 [2].

El neumático es el elemento más importante dentro de la dinámica del vehículo, dado que es la interacción del auto con el piso y en cada una de ellas se desarrollan las fuerzas necesarias para mantenerlo dentro o fuera de balance. Hoy en día no se tiene un modelo que pueda predecir en un cien por ciento el desempeño de neumático, ya que dicho fenómeno depende de un gran número de variables, como lo son la presión, temperatura, tipo de compuesto, sus propiedades elásticas, etc. Sin embargo, se han logrado desarrollar teoría que explica casos particulares de su comportamiento con un grado de exactitud aceptable.

Para equipos de autos deportivos tipo Formula SAE, vehículos que compiten en la justa organizada por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE), se han desarrollado pruebas para diversos tipos y marcas de neumáticos, éstas han sido llevadas a cabo por *Formula SAE Tire Test Consortium (FSAE TTC)* y cuyos resultados se pueden comprar en la página de la empresa [3]. Por medidas seguridad y de propiedad intelectual, ningún resultado de estos estudios debe publicarse ni compartirse, es por ello que en este trabajo solo se describe cómo se han desarrollado las pruebas, así como el método de filtrado de datos que se realizó.

Formula SAE es una competencia donde el desempeño del vehículo es la meta principal en cada uno de los equipos participantes y para lograrlo se debe entender el comportamiento del neumático en los diversos escenarios en los que se encontrará el auto. Casos como aceleración lineal, aceleración lateral o combinación de ambos serán estudiados dentro de este trabajo.

La máquina que es utilizada en las pruebas en los neumáticos es llamada Calspan Tire Research Facility (TIRF) [2] y se muestra en *figura 1.1*.

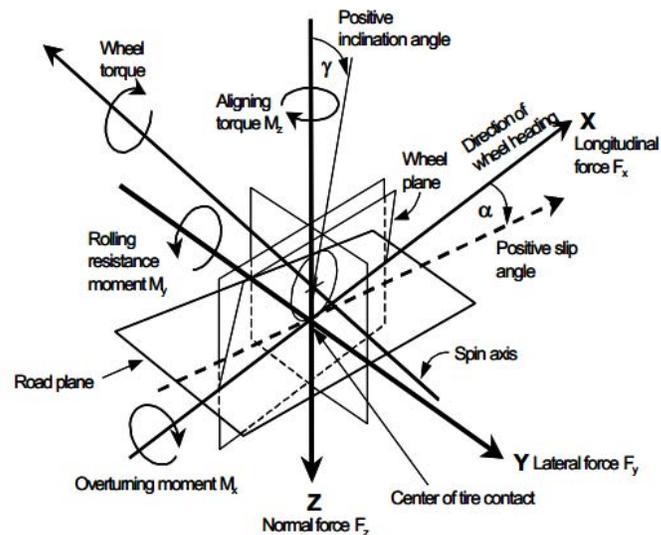


*Figura 1. 1 Calspan Tire Research Facility (TIRF) imagen tomada de [2]*

Cada una de las pruebas provee información de las siguientes variables:

- Tiempo transcurrido.
- Velocidad del camino
- Ángulo de deslizamiento (Slip Angle).
- Ángulo de inclinación (Inclination Angle).
- Razón de deslizamiento (Slip Ratio).
- Fuerza normal ( $F_z$ ).
- Fuerza lateral ( $F_y$ ).
- Fuerza longitudinal ( $F_x$ ).
- Momento alineamiento (Aligning Torque,  $M_z$ ).
- Momento de vuelco (Overturning Moment,  $M_x$ ).
- Radio bajo carga ( $R_h$ ).
- Radio efectivo ( $R_w$ ).
- Velocidad del neumático en revoluciones por minuto.
- Presión del neumático.
- Temperatura de la superficie del neumático (3 locaciones a lo ancho).
- Temperatura ambiente.
- Temperatura de la superficie del camino.

Estos resultados se expresan en el sistema de referencia del neumático definido por SAE internacional (ver *figura 1.2*).



*Figura 1. 2 Sistema Coordinado SAE para Neumáticos (fuente [4])*

Durante la temporada 2013 tuve la oportunidad de diseñar la suspensión del prototipo UM-451; sin embargo, nuestros criterios de diseño fueron tomados solo de la literatura, dando como resultado una idea general del desempeño del neumático. Para el UM-552 (año 2014) se logró

adquirir la base de datos que Calpan proporciona. Esa temporada el sistema de suspensión y en general el auto, fueron diseñados con el fin de obtener el máximo desempeño en sus neumáticos.

No obstante antes de hablar de los resultados, hablaré de conceptos y parámetros que definen el comportamiento de la mayoría de las llantas en autos de competencia.

## 1.1 Coeficiente de fricción

Formalmente la definimos como la relación que hay entre la carga normal ( $F_z$ ) y la fuerza desarrollada en el área de contacto, la cual puede ser lateral o longitudinal. Las unidades que emplearemos en este trabajo serán los newtons [N]. La mayoría de los neumáticos tienen un comportamiento no lineal siendo en la mayoría de los casos un comportamiento Visco-elástico [5], lo que hace que sea difícil de predecir su comportamiento.

En general, los neumáticos no siguen la ley de fricción de Newton, en la que el coeficiente de fricción es siempre menor a uno. Por ejemplo, si a una llanta se le aplica una fuerza normal de 1000N ésta puede llegar a generar 1600N de fuerza de tracción o fuerza lateral, dándonos como resultado un coeficiente de fricción de 1.6, esto quiere decir que el auto puede ser capaz de desarrollar una fuerza de 1.6 veces su peso [6]. Cabe destacar que el coeficiente de fricción de un neumático se comporta diferente a tracción longitudinal que a tracción lateral, pero aún así en ambos casos el coeficiente de fricción puede llegar a ser mayor a uno.

## 1.2 Ángulo de deslizamiento (Slip Angle) $\alpha$

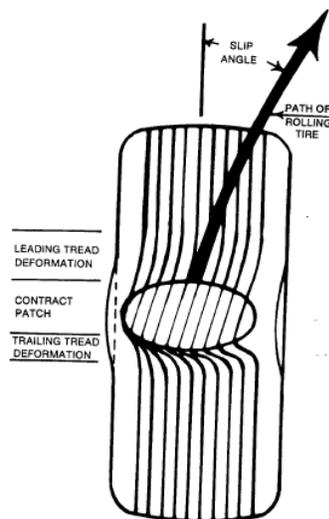
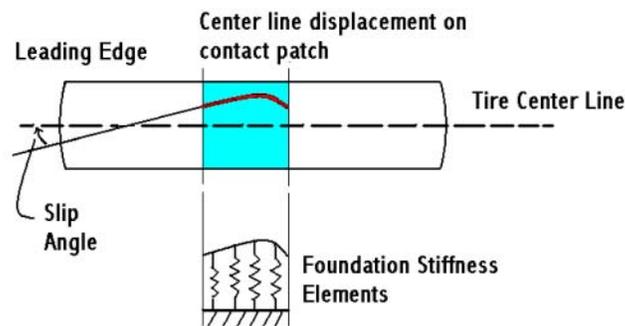


Figura 1. 3 Ejemplo de cómo se forma Slip Angle en la huella de un neumático (fuente: [6])

Se define como el desplazamiento angular entre el plano de rotación del neumático y la dirección que el giro del neumático seguirá sobre la superficie del camino [6]. Esto quiere decir, que el neumático se mueve en una dirección diferente a la que su plano de rotación apunta, siendo la diferencia angular entre estos dos movimientos lo que conocemos como ángulo de deslizamiento o slip angle (ver *figura 1.4*). El ángulo de deslizamiento no debe confundirse con el ángulo producido por el sistema de dirección, el cual se mide con respecto al chasis del auto.

El ángulo de deslizamiento se produce debido a la deformación del caucho en la huella del neumático, ésta elongación se puede atribuir a un comportamiento elástico en el material, el cual ocurre solo en un rango determinado. Para encontrar una relación entre el ángulo de deslizamiento y las fuerza lateral desarrollada, se debe considerar a la llanta como un grupo resortes mecánicos, en donde cada uno de estos pequeños resortes se sitúan en la huella con el fin de generar la fuerza lateral y conforme se van deformando producen el ángulo de deslizamiento [5], tal y como se muestra en la *figura 1.4*.



*Figura 1.4 Modelo de resorte para el desarrollo de fuerza lateral (fuente [5])*

En la *figura 1.4* se observa cómo el área de contacto es deformada a un cierto ángulo de deslizamiento, generando una distorsión no simétrica con respecto a la línea central del neumático.

La fuerza generada en el neumático en presencia de ángulo de deslizamiento se denomina *fuerza lateral*, la cual se presenta comúnmente cuando el auto está atravesando una curva.

### 1.3 Fuerza lateral $F_y$

Recordando el sistema de referencia SAE, la fuerza lateral es aquella fuerza que se genera en el punto de contacto del neumático y su dirección es a lo largo del eje “y”, por ello generalmente se le conoce con el símbolo  $F_y$ . Como ya mencionamos existe una relación estrecha entre el ángulo de deslizamiento ( $\alpha$ ) y la fuerza lateral, en *figura 1.5* podemos ver el comportamiento típico entre estas dos variables.

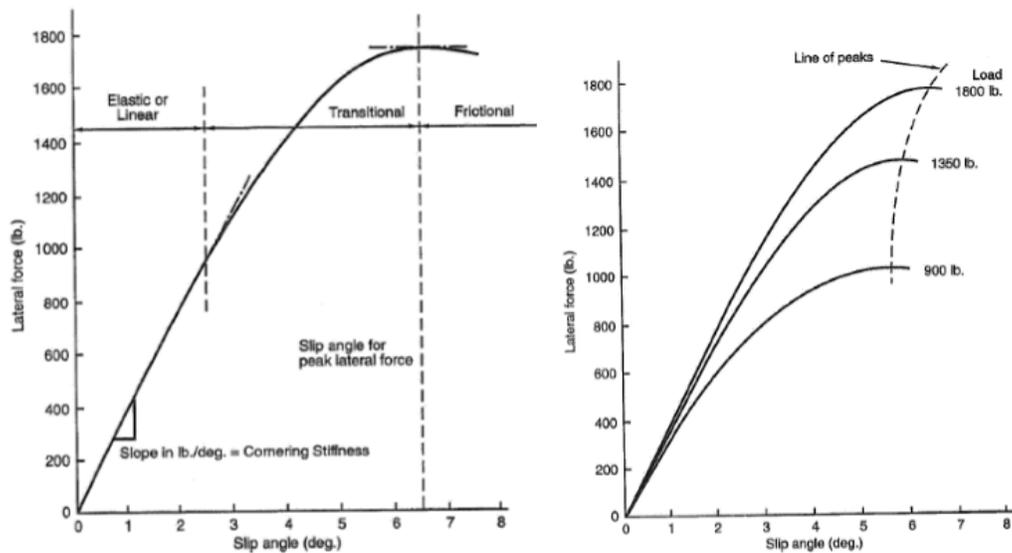


Figura 1. 5 A la izquierda a) Curva característica de Slip Angle vs Fuerza lateral ( $F_y$ ). b) Sensibilidad a la carga normal (fuente [4]).

En la *figura 1.5a* apreciamos las principales zonas que componen la curva. Comenzando con la zona lineal, en la cual la fuerza lateral es directamente proporcional al ángulo de deslizamiento; en seguida tenemos la zona transitoria, en la cual la tendencia lineal desaparece y la curva llega a su valor máximo o valor pico; posteriormente tenemos la zona friccional en donde la magnitud de fuerza lateral cae conforme aumenta el ángulo de deslizamiento.

En la *figura 1.5b* podemos ver la sensibilidad a la carga, es decir, la influencia que tiene la fuerza normal sobre la magnitud de la fuerza lateral. Podemos deducir que la relación que hay entre fuerza lateral y la carga normal es directamente proporcional.

En la zona lineal, también conocida como rango elástico, la pendiente de la curva se conoce como *cornering stiffness*  $c_\alpha$  [4], y está relacionada con la fuerza lateral como lo muestra la siguiente ecuación:

$$F_y = C_\alpha \alpha \quad (1.1)$$

Donde  $F_y$  es la fuerza lateral en newtons,  $C_\alpha$  es rigidez de vuelta (*cornering stiffness*) en N/grado y  $\alpha$  es el ángulo de deslizamiento en grados.

Para el diseño del sistema de suspensión se debe buscar que el neumático funcione cerca del pico de fuerza lateral, para lograrlo el sistema debe diseñarse unos cuantos grados antes de valor pico, el cual se alcanzará cuando el sistema se encuentra en movimiento. La ecuación 1.1 muestra el modelo más simple entre fuerza lateral y ángulo de deslizamiento, en la referencia [5] se desarrolla un modelo más amplio.

## 1.4 Par de alineamiento (Aligning moment) $M_z$

El par de alineamiento o también llamado  $M_z$ , es un par que se desarrolla alrededor del eje Z del sistema de referencia de SAE. De acuerdo con [4],  $M_z$  es la tendencia que presenta el neumático a girar sobre su eje vertical (eje z), este momento genera una sensación de auto-alineamiento en el neumático, el cual es percibido por el piloto.

Como mencionamos en la sección 1.2, el fenómeno de distorsión en la huella del neumático no se produce de manera simétrica, por lo que hay zonas en las cuales el caucho se deforma en mayor magnitud que en otras; esto genera que la fuerza lateral resultante no actúe sobre el eje “y”, y se desarrolle paralela al eje a una distancia  $a_{x_a}$  de él. Para ilustrar un poco mejor esto, analicemos la *figura 1.6*.

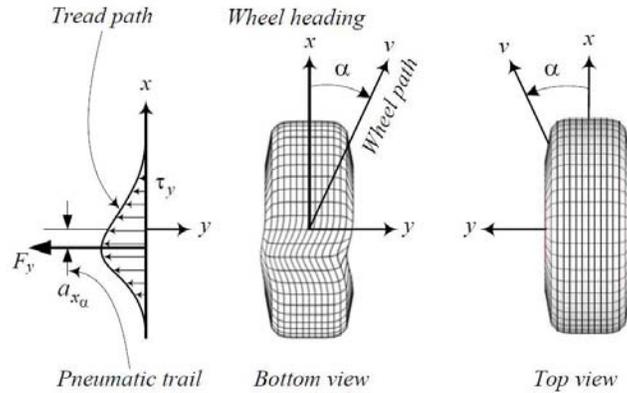


Figura 1. 6 Distribución de esfuerzos  $T_y$ , fuerza lateral resultante y pneumatical trail para un respectivo valor de slip angle (fuente [7])

En la figura de arriba podemos ver la localización de la fuerza lateral resultante y la distancia  $a_{x_a}$  que también es conocida como *pneumatic trial*.

Como la fuerza lateral actúa a la distancia  $a_{x_a}$  del eje “y” se genera un momento a lo largo del eje z, produciendo el par de alineamiento. De esta forma  $M_z$  puede ser expresado mediante la ecuación 1.2.

$$M_z = F_y a_{x_a} \quad (1. 2)$$

Donde  $M_z$  es el par de alineamiento en Newton-metro,  $F_y$  es la fuerza lateral en Newton y  $a_{x_a}$  es el pneumatic trail en metros.

El par de alineamiento tiende a reducirse cuando el ángulo de deslizamiento aumenta [7], debido a que  $M_z$  depende directamente de la fuerza lateral ( $F_y$ ) y ésta a su vez de  $\alpha$ . El desempeño del par de alineamiento con respecto al ángulo de deslizamiento se muestra en la *figura 1.7*.

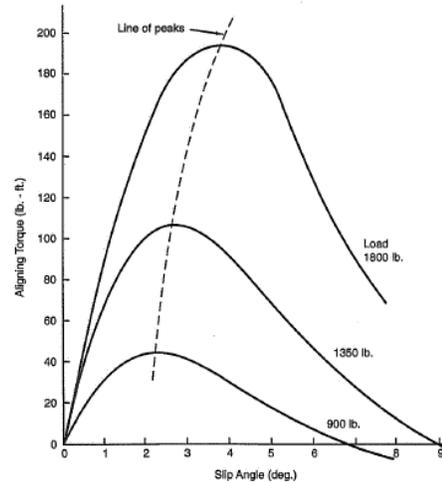


Figura 1. 7 Par de alineamiento vs slip angle a diferentes cargas (fuente [4])

En la figura anterior se ilustra la dependencia de  $M_z$  a la carga normal ( $F_z$ ), por lo que a mayor cantidad de carga normal mayor será el momento desarrollado. La naturaleza de  $M_z$  es incrementar de manera no lineal hasta su pico y después caer de manera abrupta mientras el ángulo de deslizamiento continúa aumentando.

## 1.5 Fuerza longitudinal ( $F_x$ )

Con el fin de poder acelerar o frenar el vehículo, los neumáticos deben desarrollar fuerzas a lo largo de su eje  $x$ . A esta fuerza comúnmente se le conoce como fuerza longitudinal y se denota con el símbolo  $F_x$ .

Para comprender el mecanismo de cómo estas fuerzas se desarrollan en la huella del neumático debemos definir los conceptos de Slip Ratio, Resistencia al giro y radio efectivo.

### 1.5.1 Radio efectivo

Tomando en cuenta la *figura 1.8* y sabiendo que el neumático está bajo carga normal ( $F_z$ ), a la variable  $R_w$  se le conoce como radio efectivo o bien effective radius, La forma de calcularlo se presentan en las ecuaciones 1.3 y 1.4.

$$R_w = \frac{v_x}{\omega_\omega} \quad (1.3)$$

$$R_w \approx R_g - \frac{R_g - R_h}{3} \quad (1.4)$$

Donde  $v_x$  es la velocidad longitudinal y  $\omega_\omega$  es la velocidad angular, ambos del neumático. El radio geométrico se denota como  $R_g$  y  $R_h$  es el radio bajo carga normal.

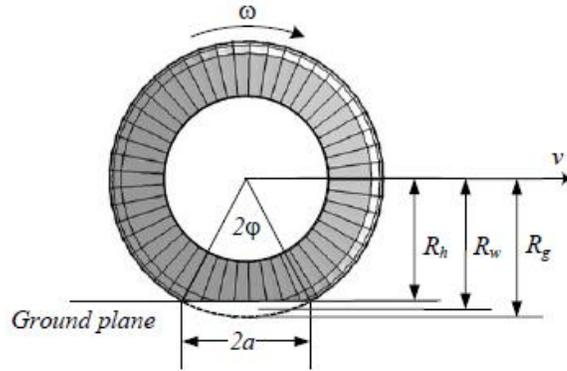


Figura 1. 8 Radio Efectivo  $R_w$  y comparación con el radio original  $R_g$  y el radio carga  $R_h$  (fuente [7])

### 1.5.2 Resistencia al giro

Cuando una llanta gira genera una fuerza en oposición a la fuerza longitudinal, ésta es llamada fuerza de resistencia al giro. Dicha fuerza es proporcional a la carga normal ( $F_z$ ) tal y como a continuación se muestra:

$$F_r = -\mu_r F_z \quad (1.5)$$

El término  $\mu_r$  es llamado coeficiente de resistencia al giro, él cual no es constante y depende de la velocidad lineal del neumático, así como la presión, ángulo de deslizamiento y ángulo de camber. Otros factores que afectan su desempeño son las propiedades mecánicas de compuesto, la temperatura, carga normal, el tamaño del neumático, la condición del camino y en caso de existir, fuerzas de frenado y aceleración [7].

Un modelo aproximado para determinar  $\mu_r$  me muestra en la ecuación 1.6.

$$\mu_r = \mu_0 + \mu_1 v_x^2 \quad (1.6)$$

Donde los coeficientes  $\mu_0$  y  $\mu_1$  son determinados mediante experimentos en donde varía la velocidad lineal ( $v_x$ ) del neumático. En el caso de equipos Formula SAE, las pruebas son desarrolladas solo a 40.2 km/h (25mph), por lo cual no es posible determinar la resistencia al giro del neumático.

Sin embargo, la fuerza longitudinal ( $F_x$ ) la podemos calcularla mediante el concepto de razón de deslizamiento o slip ratio.

### 1.5.3 Slip Ratio (s)

Se define como cociente entre la velocidad angular del neumático en frenado o aceleración y la velocidad angular en libre giro. La ecuación 1.7 nos muestra cómo se calcula.

$$s = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\Omega}{\Omega_0} - 1 \quad (1.7)$$

En donde  $\Omega$  es la velocidad angular en el neumático y se calcula mediante:

$$\Omega = \frac{v_{xW}}{R_w}$$

Sabiendo que  $v_{xW}$  es la velocidad lineal y  $R_w$  el radio efectivo del neumático.

En el numerador de la ecuación 1.7 tenemos la siguiente resta:  $\Omega - \Omega_0$ , que es la diferencia que hay entre el giro del neumático y su respectiva velocidad angular en “libre giro”, entiéndase por “libre giro” aquella situación en la cual no se acelera o frena el neumático. El denominador es la velocidad de libre giro y es denotada por el símbolo  $\Omega_0$ .

Cuando el neumático está frenando la razón de deslizamiento ( $s$ ) toma valores menores a cero y para el caso de aceleración toma valores positivos. Cuando se presenta el caso  $s=0$ , se entiende que el neumático no acelera o frena, encontrándose en libre giro.

Al igual que la fuerza lateral, la fuerza de tracción es el producto de la deformación del material en la huella del neumático.

Para describir la fuerza de tracción o frenado, ésta se puede escribir en términos de la fuerza normal aplicada en el neumático y el valor del coeficiente de tracción longitudinal, es decir:

$$F_x = \mu_x(s)F_z \quad (1.8)$$

Donde  $\mu_x(s)$  es el coeficiente de fricción longitudinal que es una función de la razón de deslizamiento y en la *figura 1.9* muestra su comportamiento típico. Se puede apreciar en dicha figura que en un inicio el desempeño tiende a ser lineal, pasando después por un máximo y finalmente cayendo hasta estabilizarse, en donde el neumático se desliza o como comúnmente se dice, el neumático patina.

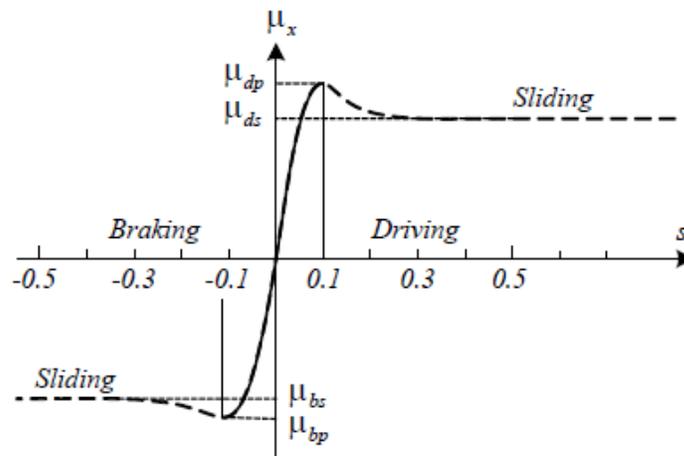
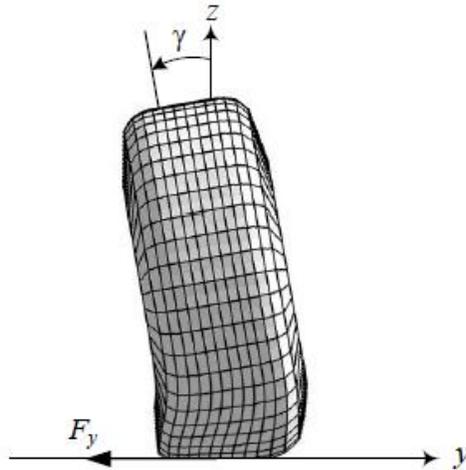


Figura 1.9 Gráfica de Slip Ratio vs Coeficiente de fricción en  $x$ . Este comportamiento es muy parecido para la fuerza longitudinal  $F_x$  (fuente [7]).

## 1.6 Fuerza debido camber

El ángulo de camber  $\gamma$  se define como el ángulo formado por el plano de inclinación y el eje perpendicular del camino. En la *figura 1.10* asumiendo que la inclinación del neumático apunta hacia el chasis del auto, el ángulo de camber formado es negativo, en caso contrario será positivo.



*Figura 1. 10 Ángulo de camber, en esta vista frontal se define el sentido negativo. (Fuente [7])*

Como podemos apreciar en la *figura 1.10*, el ángulo de camber produce una fuerza lateral en el sentido de la inclinación del neumático. La magnitud de esta fuerza depende de cada neumático y de sus condiciones (presión, temperatura, etc.).

La fuerza lateral debida a camber tiene una relación lineal con el ángulo de camber para un cierto rango de valores, este rango depende de cada compuesto y fabricante. Esta relación lineal se describe en la siguiente ecuación:

$$F_{y,\gamma} = -C_{\gamma} * \gamma$$

Donde  $F_{y,\gamma}$  es la fuerza lateral debida a camber expresada en newtons. El parámetro  $C_{\gamma}$  es la pendiente de la curva de fuerza lateral contra ángulo camber en el rango lineal y se expresa en N/grado.

Bajo condiciones de camber y ángulo de deslizamiento, la fuerza lateral total que se presenta en el neumático se calcula como:

$$F_y = -C_{\gamma} * \gamma - C_{\alpha} * \alpha \quad (1.9)$$

La fuerza generada por camber se debe a una mayor deflexión en la huella del neumático en el lado hacia donde se inclina la llanta, esto lo podemos ver la *figura 1.11*.

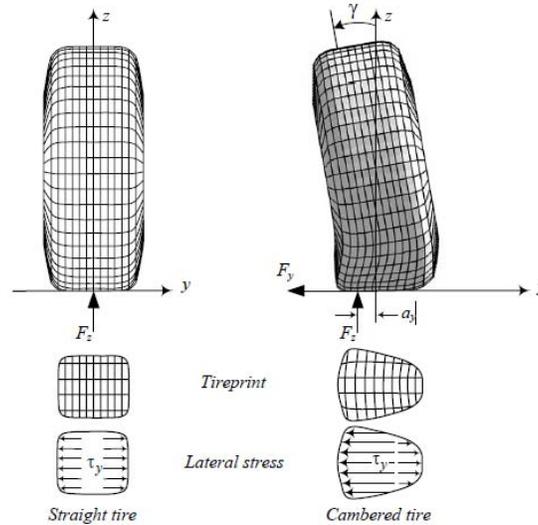


Figura 1.11 Distribución de esfuerzos en una llanta con camber y en una sin camber, así como fuerza lateral resultante. (Fuente [7])

Cuando la llanta presenta ángulo de camber, se genera una distribución no simétrica de esfuerzos en la huella del neumático, esto resulta en una fuerza lateral resultante en dirección de la inclinación del neumático. Tal y como se ve en la *figura 1.11* el esfuerzo  $\tau_y$  tiene una magnitud mayor en el sentido de inclinación. La fuerza lateral resultante se puede calcular como la integral de área de los esfuerzos  $\tau_y$  en el área de la huella del neumático, dando como resultado la ecuación 1.10.

$$F_{y,\gamma} = \int_A \tau_y dA \quad (1.10)$$

Esta fórmula es otra forma de calcular la fuerza lateral debido a camber; sin embargo, como el área en donde se desarrolla el contacto no es parámetro fácil de medir, no se suele usar esta expresión. Por otro lado, la ecuación 1.10 es la representación matemática que describe como exactamente se genera dicha fuerza.

La fuerza normal sobre el neumático se desplaza a una distancia  $a_{x,\gamma}$  (camber trail) del eje z del neumático, generando un momento llamado *camber torque*, el cual puede calcularse como:

$$M_{z,\gamma} = -F_z a_{x,\gamma} \quad (1.11)$$

Este suele ser muy pequeño y normalmente es ignorado en el análisis lineal de la dinámica del vehículo.

De igual forma la fuerza normal tiende a tener un punto de apoyo fuera del eje central del neumático, la fuerza lateral se desplaza una distancia  $a_{y,\gamma}$  (camber arm) del eje y, debido a esto

se genera un momento a lo largo de  $x$ , denominado *camber moment* (momento de *camber*); el cual se calcula mediante la expresión:

$$M_{x,\gamma} = -F_y \alpha_{\gamma} \quad (1.12)$$

Para mayor información sobre distribución de presiones y esfuerzos en la huella de contacto vea [7].

## 1.7 Modelos sobre dinámica de neumático.

Hasta ahora hemos visto los factores que generan las fuerzas y momentos en cada uno de los ejes en el neumático. En un modelo general se pueden considerar como salidas principales a la fuerza longitudinal ( $F_x$ ) y la fuerza lateral ( $F_y$ ). Y como salidas secundarias al momento de alineamiento ( $M_z$ ), el momento de roll ( $M_x$ ) y el momento de pitch ( $M_y$ ). Tal modelo tendría como entradas la carga normal ( $F_z$ ), el ángulo de deslizamiento ( $\alpha$ ), la razón de deslizamiento ( $s$ ) y el ángulo de *camber* ( $\gamma$ ). Quedando como:

$$F_x = F_x(F_z, \alpha, s, \gamma) \quad (1.13)$$

$$F_y = F_y(F_z, \alpha, s, \gamma) \quad (1.14)$$

$$M_x = M_x(F_z, \alpha, s, \gamma) \quad (1.15)$$

$$M_y = M_y(F_z, \alpha, s, \gamma) \quad (1.16)$$

$$M_z = M_z(F_z, \alpha, s, \gamma) \quad (1.17)$$

Ignorando los efectos por carga aerodinámica, resistencia al giro y asumiendo que la llanta está bajo carga normal, tenemos una buena aproximación para las fuerzas de salida mediante las siguientes ecuaciones:

$$F_x = \mu_x(s)F_z$$

$$F_y = -(C_\alpha\alpha + C_\gamma\gamma)$$

$$M_z = F_y a_{x_a}$$

Debido a que en el mundo real un auto no solo se encuentra acelerando, frenando o dando una vuelta; sino más bien en combinación de estos casos, el neumático desarrolla *fuerzas combinadas*, es decir, presenta fuerzas longitudinales y laterales al mismo tiempo. En este caso nos concentramos en la fuerza resultante que es la suma vectorial de  $F_x$  y  $F_y$ .

La *figura 1.12* nos permite ver que la fuerza dentro de los neumáticos tiene un límite, es por ello que al desarrollarse el ángulo de deslizamiento  $\alpha$ , las fuerzas longitudinales decrecen y se desarrollan fuerzas laterales. Estas fuerzas combinadas se deben a los deslizamientos ( $\alpha$ ,  $s$ ) y pueden ser modeladas mediante la *elipse de tracción* del neumático.

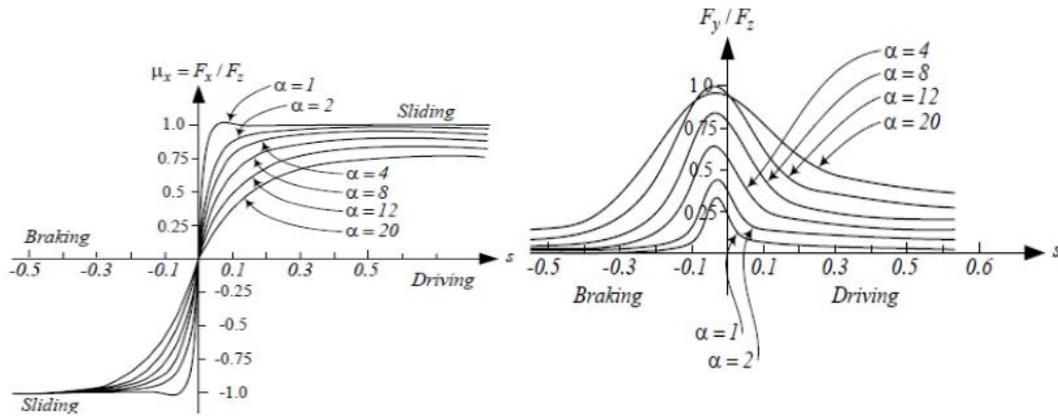


Figura 1. 12 Curvas de  $F_x/F_z$  y  $F_y/F_z$  en función de slip Ratio y como slip angle afecta su desempeño. (Fuente [7])

## 1.8 Elipse de tracción

En fuerzas combinadas en un neumático pueden describirse mediante la ecuación canónica de una elipse, es decir:

$$\left(\frac{F_y}{F_{y,M}}\right)^2 + \left(\frac{F_x}{F_{x,M}}\right)^2 = 1 \quad (1.18)$$

Donde  $F_{y,M}$  es la mayor fuerza lateral presentada a un determinado valor de carga normal  $F_z$  y  $F_{x,M}$  es la mayor fuerza longitudinal bajo el mismo valor de  $F_z$ .

Como podemos ver en 1.13b, la fuerza lateral del neumático se desarrolla a lo largo del eje vertical de la gráfica y la fuerza longitudinal del eje horizontal. El par ordenado de  $F_y$  y  $F_x$  describen una elipse, la cual representa el limite de tracción del neumático para el caso de fuerzas combinadas. La fuerza total será la resultante de  $F_x$  y  $F_y$ , la cual podemos obtener de acuerdo a la ecuacion 1.19.

$$|F_R| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (1.19)$$

La dirección de  $F_R$ , está dada por la suma vectorial de  $F_x$  y  $F_y$ , es decir:

$$F_R = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad (1.20)$$

Donde  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son los vectores unitarios del eje  $x$  y del eje  $y$  respectivamente.

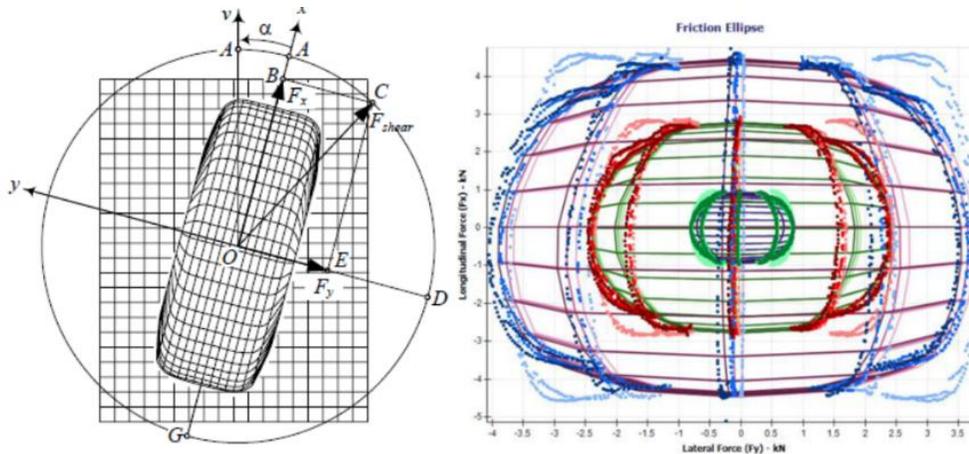


Figura 1. 13 Definición de círculo de fricción y curva  $F_y$  vs  $F_x$ . (Fuente [7] y [8]).

Para saber el valor máximo que puede tener  $F_R$ , es necesario contar con los datos del neumático a diferentes valores  $F_z$ ; con ello podremos saber si el neumático está llegando a su límite de tracción e identificar en cierto modo el balance del vehículo.

## 1.9 Modelo dinámico del neumático de Pacejka

*Magic Formula* (nombre en inglés) es un modelo semi-empírico para calcular las fuerzas y momentos en estado permanente de un neumático y es ampliamente usado en análisis dinámico de vehículos. El desarrollo de este modelo se llevó a cabo mediante la cooperación de la universidad holandesa TU-Delft y la empresa automotriz Volvo en el año 1987 [9]. Desde entonces, se han desarrollado modelos para describir las condiciones de ángulo y razón de deslizamiento del neumático.

En la ecuación 1.21 tenemos la fórmula general del modelo, la cual se adapta a diferentes valores de carga vertical ( $F_z$ ) y ángulos de camber.

$$y = D \sin(C \operatorname{atan}(B x - E(B x - \operatorname{atan}(B x)))) \quad (1.21)$$

Con  $Y(X) = y(x) + S_v$

$$x = X + S_H$$

Donde  $Y$ : Variable de salida  $F_y$ ,  $F_x$  o posiblemente  $M_z$

$X$ : Variable de entrada  $\tan \alpha$ , o, slip ratio (s)

$B$ : Factor de rigidez

$C$ : Factor de pendiente

$D$ : Valor de Pico

$E$ : Factor de curvatura

$S_H$ : Variación horizontal

$S_V$ : Variación Vertical

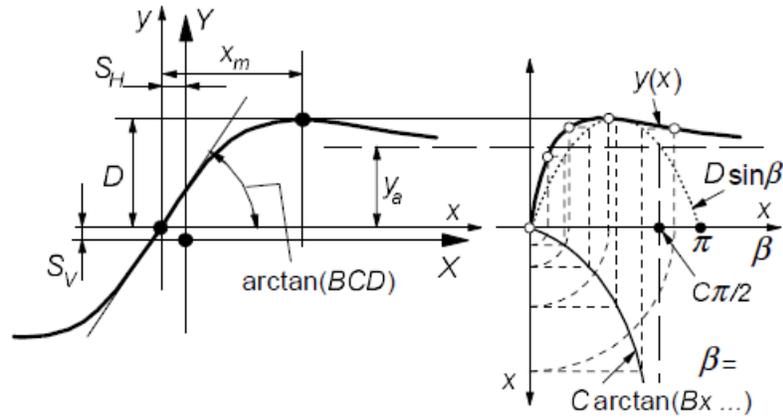


Figura 1. 14 Modelo de Pacejka (Fuente [9]).

A continuación mostramos los pasos para desarrollar el modelo basándonos en la *figura 1.14*.

- 1) Identificar el valor máximo ( $D$ ) y el valor para el cual la función tiene al infinito ( $y_a$ )
- 2) Obtener el valor de la ordenada ( $x_m$ ) a la cual se encuentra el valor máximo o pico.
- 3) Calcular  $C$  de acuerdo a la fórmula:

$$C = 1 + \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{asin} \left( \frac{y_a}{D} \right) \right) \quad (1.22)$$

- 4) Calcular el coeficiente  $B$ :

$$B = \frac{\text{Pendiente}}{CD} \quad (1.23)$$

- 5) Calcular el coeficiente  $E$

$$E = \frac{B x_m - \tan \left( \frac{\pi}{2C} \right)}{B x_m - \operatorname{atan}(B x_m)}, \quad \text{si } C > 1 \quad (1.24)$$

- 6) En caso de existir los desfases  $S_V$  y  $S_H$  agregarlos a la *fórmula 1.21*
- 7) Ir a la *fórmula 1.21* y sustituir  $Y(X)$  y  $x$ .

Estos pasos fueron usados para el filtrado de datos durante la temporada 2014 y cuyo código de ejecución se muestra en el anexo A.1.1 de esta tesis.

## 1.10 Acerca de TTC, estudio de neumáticos para vehículos Formula SAE

Como se ha mencionado, los neumáticos son los encargados de desarrollar las fuerzas que mantendrán en balance al auto, es por ello que por *Tire Test Consortium (TTC)* desarrolló una serie de pruebas para equipos de la competencia Formula SAE. En marzo de 2005 se abrió por primera vez el registro para equipos, donde el precio de registro fue y sigue siendo \$500.00 dólares. A continuación hablaremos de algunas de las características de dichas pruebas. .

En promedio un auto Formula SAE tiene un peso de entre 180 y 320 kilogramos (1780 y 3110 N), algunos autos emplean paquetes aerodinámicos, los cuales pueden agregar hasta 80 kilogramos fuerza normal cuando el auto está en movimiento. Considerando el peso estático en cada neumático, la distribución de carga por efectos de vueltas y/o frenado y la carga normal debido a un paquete aerodinámico, la carga normal promedio en un neumático se estima en 400 libras fuerza (1780N). Es por ello que el análisis que ha desarrollado TTC llega a un valor máximo de 450 libras fuerza, tomando valores intermedios de 50, 100, 150, 250 y 350 lb [2].

De acuerdo con la investigación hecha por TTC, los equipos de Formula SAE usualmente usan una presión de entre 10 a 15 psi en sus neumáticos. Sin embargo, el fabricante recomienda una presión de 12 psi, es por ello que TTC desarrolló pruebas entre 8 y 16 psi, teniendo valores intermedios de 10, 12 y 14 psi. La presión es regulada durante la prueba, de esta forma no hay cambios de presión debidos al aumento de temperatura en el neumático.

Los cambios en los parámetros del neumático durante las pruebas se listan a continuación.

- Variación en el ángulo de camber hasta 4° con incrementos de 1 grado.
- Diferentes valores de ángulo de deslizamiento (slip angle) de -12 a 12 grados.
- Valores de razón de deslizamiento (Slip Ratio SR) -0.2 a 0.2.
- Velocidad de la superficie 40.2 km/h.
- Constante elástica (Spring Rate) lb/in, estático, dinámico y a diferentes presiones

TTC elaboró tres tipos de pruebas.

Prueba 1: Libre giro a una presión 12 psi y una velocidad de 40.2 km/h.

En objetivo es obtener información a diferentes valores del ángulo de deslizamiento, ángulo de camber y constante elástica del neumático; antes y durante la prueba. Para hacerlo más significativo se usan diferentes valores de carga normal (1557N, 1112N, 667N, 222N y 2002N). El ángulo de camber toma valores de 0,1, 2, 3 y 4 grados.

Prueba 2: Giro libre diferentes presiones.

Es parecida a la prueba 1; sin embargo, la presión del neumático cambia de 8, 10, 12, 14 y 16 psi. El objetivo es medir el desempeño del neumático a diferentes presiones.

Prueba 3: Aceleración y Freno.

El objetivo en esta prueba es obtener fuerzas longitudinales en los neumáticos a una velocidad de 40.2 km/h y presión de 12 psi. Durante la prueba se realizan cambios en el ángulo de deslizamiento a diferentes valores de carga normal. Además el neumático es sometido a ángulo y razón de deslizamiento con el fin de obtener el comportamiento de las fuerzas combinadas y entonces saber la elipse de tracción del neumático [2].

### 1.10.1 Programa para filtrar datos

Dado que adquirir los datos es un gran paso, el siguiente será filtrarlos para que sean útiles. En esta sección hablaré sobre el programa desarrollado para filtrar los datos, apoyándome de imágenes de [2] y posteriormente daré algunos ejemplos de los resultados, después de ejecutar el programa.

En la *figura 1.15* tenemos un ejemplo de los datos tal y como salen después de realizar la prueba, el objetivo es obtener información útil para el diseño de la suspensión, para ello el arreglo de datos entra al algoritmo mostrado en el diagrama de flujo de la *figura 1.16*. En donde se separan los datos a diferentes valores de carga normal.

Los nuevos arreglos de datos se grafican por separado y posteriormente, para el caso de fuerza lateral, fuerza longitudinal y momento de alineamiento ( $M_z$ ), se hace una regresión por medio de un polinomio de grado 14 (ver *figura 1.17*), con respecto al ángulo de deslizamiento  $\alpha$ . Para valores pequeños de  $\alpha$  se obtiene la pendiente en el rango lineal, esto con el fin de desarrollar el modelo de Pacejka de la sección 1.9.

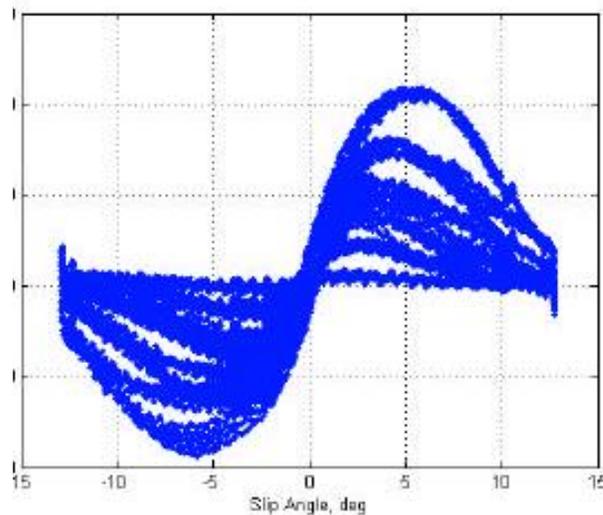


Figura 1. 15 Típica curva de par de alineamiento vs slip angle (Fuente [2])

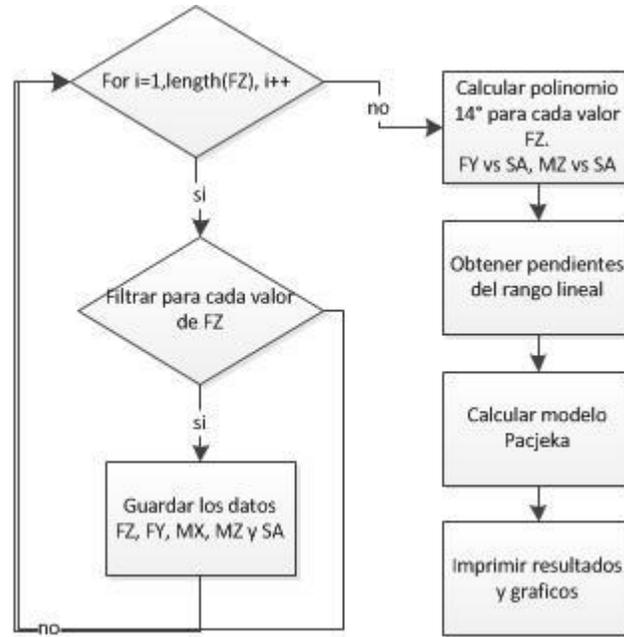


Figura 1. 16 Lógica para filtrar los datos

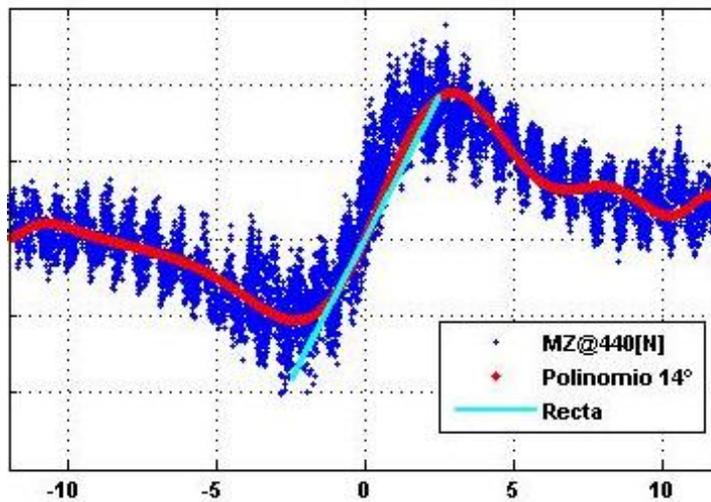


Figura 1. 17 Resultado al filtrar para  $FZ=440N$ , se muestran los datos, la aproximación mediante el polinomio y la recta en el rango lineal

El resultado tras filtrar los datos mediante el programa se muestran en la *figura 1.18*, en ella tenemos un color diferente para cada valor de carga normal. Los puntos dispersos representan los valores que TTC provee y la línea sólida los datos ordenados mediante el modelo de Pacejka.

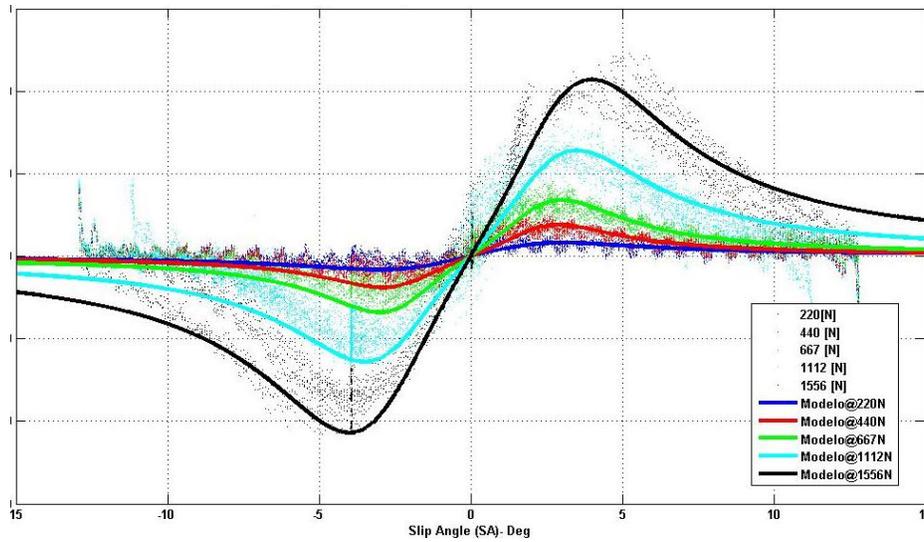


Figura 1. 18 Modelo de Pacejka para MZ vs SA

El modelo de Magic Formula se empleó para las variables  $F_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$  y el coeficiente de fricción lateral con respecto al ángulo de deslizamiento. La misma lógica fue utilizada para  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$  y el coeficiente de tracción longitudinal con respecto a la razón de deslizamiento. Por último, para  $F_x$  y  $F_y$  se filtró con respecto al ángulo de deslizamiento y razón de deslizamiento, esto con el fin de desarrollar las elipses de tracción de cada neumático analizado.



## 2. Cinemática y parámetros geométricos

Ya hablamos de la importancia del neumático en la dinámica de vehículo, los parámetros que afectan su desempeño, así como su análisis mediante pruebas físicas. Entonces de acuerdo a los resultados en TTC podemos fijar las siguientes metas de diseño para el desempeño de la cinemática del sistema de suspensión.

- Camber gain [delantero] < 25 [deg/m]
- Camber gain [trasero]: < 25 [deg/m]
- Roll axis (+) esto implica roll center trasero más alto al delantero
- Travel bump and rebump =  $\pm 30$  [mm]
- Camber estático [delantero]: -2.5 grados
- Caster positivo
- Roll Center Travel < a un diámetro de 25mm
- Eliminar efecto Bump-Steer.

Los puntos anteriores son el resultado de analizar un neumático en particular; sin embargo, TTC no permite publicar ningún dato de la prueba, es por ello que solo se mencionaran los puntos anteriores como meta de diseño. Entonces para conseguir dichas metas es necesario definir algunos conceptos con el fin de entender mejor la cinemática del sistema.

### *Camber*

En la *figura 2.1* se muestra la definición de camber, cabe mencionar que este ángulo es relativo al chasis, es decir, camber se mide con respecto al plano vertical del auto. Si medimos este ángulo con respecto al piso, entonces se llama ángulo de inclinación (*inclination angle IA*) [10]. Solo cuando el auto no está en movimiento, el ángulo de camber y el ángulo de inclinación son el mismo. El estudio en esta sección se hará para el caso de roll y ride.

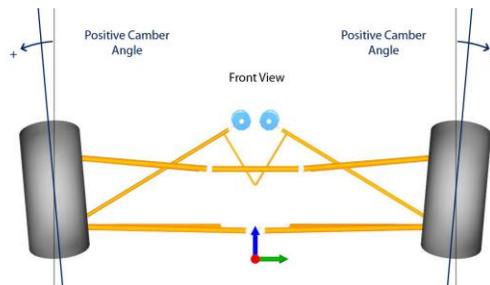


Figura 2.1 Definición de ángulo de camber (Fuente [8])

### *Ángulo de Toe*

Es el ángulo que hay entre el plano medio de la llanta y la línea central del vehículo, visto desde la parte superior (ver en la *figura 2.2*). Toe no debe ser confundido con el ángulo de giro debido a la dirección, ya que toe se mide cuando el volante no presenta giro alguno.

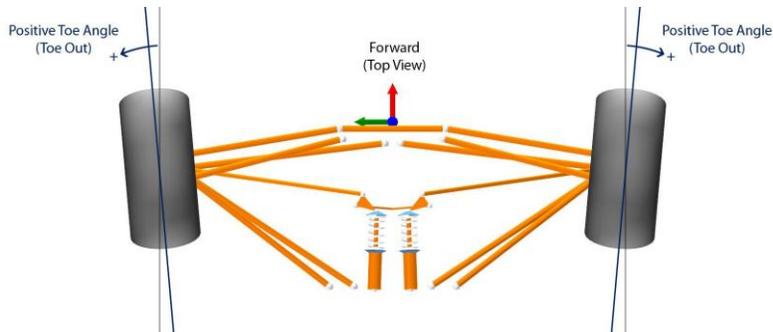


Figura 2. 2 Definición ángulo de toe (Fuente [8])

### Track y Wheelbase

*Track* es la distancia desde el centro del punto de contacto del neumático derecho al izquierdo, como se muestra en la *figura 2.3*. *Wheelbase* se refiere a la distancia entre el punto de contacto del neumático delantero con el trasero.

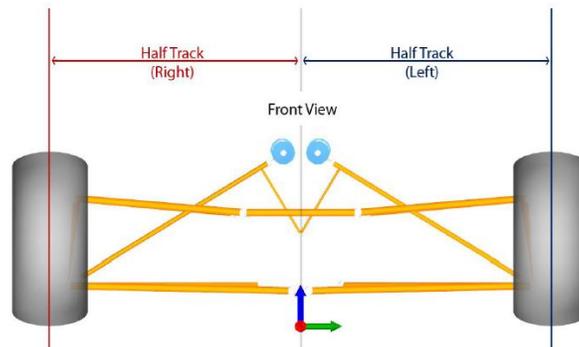


Figura 2. 3 Construcción de track (Fuente [8])

## 2.1 Centro instantáneo de rotación (Instant Center IC)

Si analizamos el sistema de suspensión de un neumático de acuerdo al movimiento plano general de cuerpo rígido, las velocidades de varios puntos en un neumático, pueden ser expresados como el resultado de la rotación a lo largo de un punto o un eje. Este punto de intersección es llamado centro instantáneo de rotación [7], o bien Instant Center (IC) por su definición en inglés.

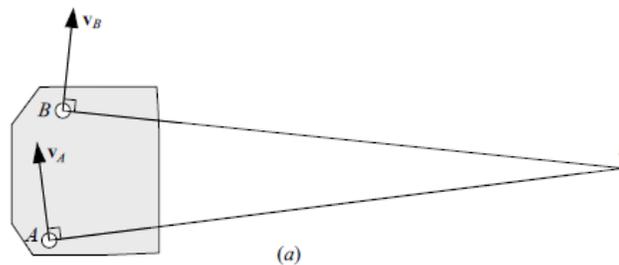


Figura 2. 4 Centro instantáneo de rotación para un cuerpo sólido, definido por los puntos A y B (Fuente [7]).

Para entender este concepto mejor analicemos lo siguiente: si la localización de los puntos A y B (ver *figura 2.4*) en un cuerpo son conocidas, el centro instantáneo de rotación *IC*, es la intersección de las líneas perpendiculares de los vectores de velocidad  $V_A$  y  $V_B$ .

Para una suspensión independiente de doble brazo en A, la cual se ha ocupado en el prototipo Formula SAE, el *IC* puede ser interpretado como el punto en el cual el neumático gira con respecto al chasis. Y su construcción se ilustra en la *figura 2.5*.

El centro instantáneo de rotación se obtiene mediante la prolongación de líneas que forman cada uno de los brazos de suspensión en la vista frontal del auto, y el punto de intersección de cada una de estas líneas es el *IC*.

La teoría nos sugiere que es posible cambiar las horquillas de suspensión, por un solo eslabón, el cual parte del centro de rotación y se une al neumático, ya que tanto las horquillas como el eslabón describirían la misma circunferencia.

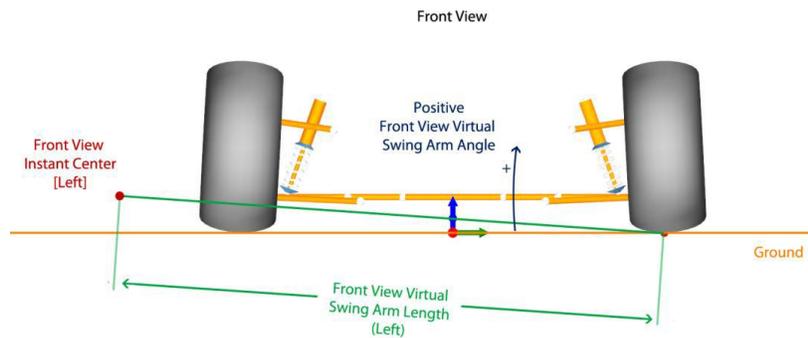


Figura 2. 5 Construcción de *IC*, y su influencia en el cambio de *camber* (Fuente [8])

## 2.2 Ganancia de *Camber* (Ride *Camber*) y Roll *Camber*

Cuando un automóvil se encuentra en movimiento el sistema de suspensión también lo está, es por ello que diversos parámetros geométricos cambian y uno de ellos es el ángulo de *camber*. Una forma de saber qué tanto cambia *camber* es con la distancia desde el punto de contacto del neumático hasta su respectivo centro instantáneo de rotación, esta distancia se denomina *f<sub>vsa</sub>*, y puede calcularse de acuerdo con la *ecuación 2.1*

$$Camber_G = \text{atan}\left(\frac{1}{f_{vsa}}\right) \quad (2.1)$$

Si deseamos que nuestro sistema de suspensión tenga poca ganancia de *camber* debemos de localizar el *IC* lo más lejano posible, en caso contrario si deseamos un cambio grande en *camber* por unidad de desplazamiento vertical del neumático, su centro instantáneo de rotación debe situarse cerca del neumático [4].

Roll Camber es la razón de cambio de ángulo de camber con respecto al ángulo de roll en el vehículo [10]. Un auto de competencia la mayoría de su tiempo está en curvas y por ende los neumáticos desarrollan fuerzas laterales, siendo el ángulo de camber un parámetro importante en su desempeño, es por ello que minimizar el cambio de camber es una de las tareas más importantes en el diseño de la geometría de suspensión. Para calcular el valor de roll camber usamos la ecuación 2.2.

$$\text{Roll Camber} = \frac{\Delta \text{Camber}}{\Delta \text{Roll}} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta \phi} \left[ \frac{\text{Deg}}{\text{Deg}} \right] \quad (2.2)$$

### 2.3 Centro de Giro (Roll Center RC) y Eje de giro (Roll Axis)

El centro de giro (Roll Center) *RC*, es el punto geométrico sobre el cual la masa suspendida gira con respecto al piso. También puede verse como aquel punto en el cual se puede aplicar una fuerza lateral y el auto no experimenta giro angular o roll. La localización del *RC*, puede hacerse mediante la prolongación de una línea imaginaria que va desde el punto de contacto de cada neumático hasta sus respectivos *IC*. La intersección de estas dos líneas nos da la ubicación del roll center. Tanto la suspensión delantera y la trasera cuentan con un centro de giro diferente.

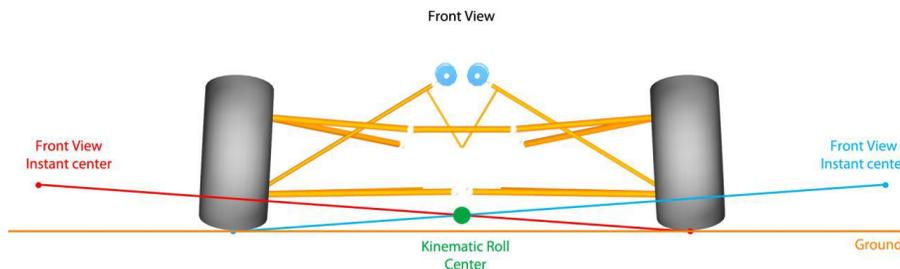


Figura 2. 6 Construcción del centro de giro (*RC*), localización de *Instant Center (IC)* y altura de rol center (*RCH*) (Fuente [8])

Debido a que la construcción del *RC* es dependiente de *IC*, dicho punto cambia con la evolución del mecanismo de suspensión, en consecuencia una meta del desarrollo de geometría de la suspensión es minimizar la migración del centro de giro. La migración del *RC*, puede entenderse como los cambios en la altura del roll center con respecto al piso (cambios en *RCH*), y los cambios en la localización horizontal del centro de giro.

#### 2.3.1 Roll Axis

Es el eje imaginario con respecto al cual gira el vehículo, su trazo se da mediante la unión del roll center delantero y trasero. En la mayoría de los diseños de autos de competencia la inclinación del eje de roll se positiva, es decir, el roll center trasero tiene una mayor altura que el delantero, esto se hace para evitar la transferencia de carga debido al giro del coche y la

rigidez de la suspensión. La vista lateral del eje de roll puede verse en la *figura 2.7* y su vista completa en el auto en la *figura 2.8*.

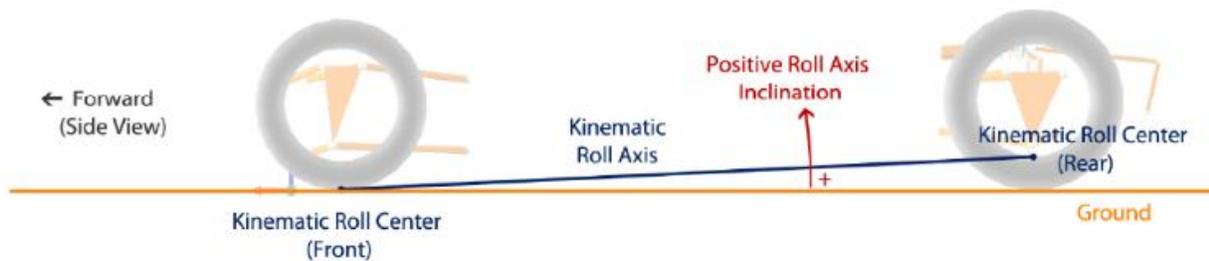


Figura 2. 7 Vista lateral del eje roll. Se muestra en ángulo de inclinación (Fuente [8]).

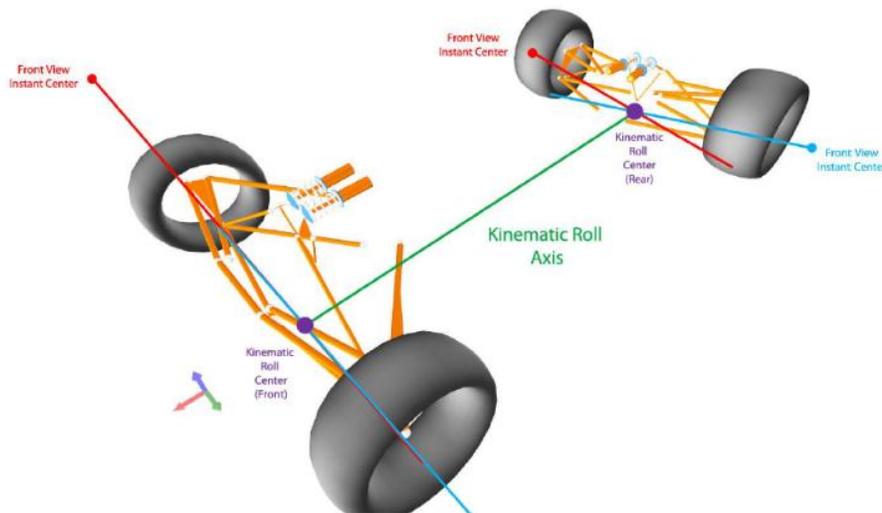


Figura 2. 8 Vista isométrica del eje de roll (Fuente [8]).

## 2.4 Ángulo de Caster y Mechanical trail

El ángulo de caster es uno de los ángulos formados por el eje de dirección con respecto al cual gira el neumático. El eje de dirección está formado por los puntos de los brazos de suspensión y la unión con los upright. Si vemos el neumático desde su vista lateral *figura 2.9a*, al prolongar el eje de dirección éste forma un ángulo con la línea central del neumático, el cual denominamos ángulo de caster. Caster adquiere un valor positivo tal y como se puede observar en la *figura 2.9a*. Ahora bien, si prolongamos el eje de dirección hasta intersectar con el piso, la distancia de este punto al eje vertical del neumático es denominated *mechanical trail*.

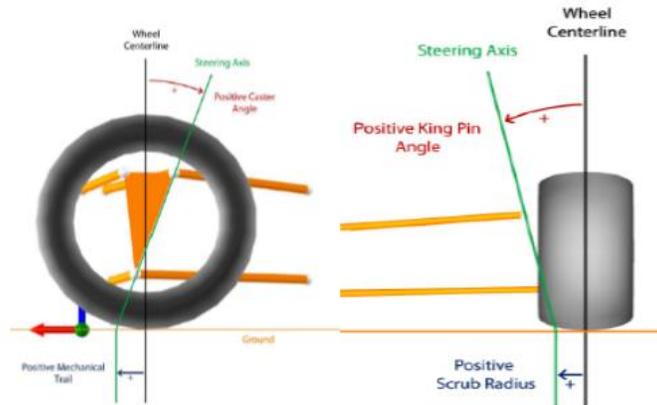


Figura 2. 9 Eje de dirección. a) ángulo de caster y mechanical trail. b) ángulo de kingpin y Scrub radius (Fuente [8]).

Caster provee estabilidad en línea recta al neumático, esto es debido a que mechanical trail genera un par de auto-alineamiento con respecto al eje z de la llanta. Un ejemplo de este fenómeno se encuentra en las llantas de los carritos de súper mercado, en donde el ángulo de caster le permite girar en línea recta de manera estable. En autos de todo tipo es recomendado tener ángulo de caster positivo y en el caso específico de autos de competencia se debe tener cuidado en la magnitud, ya que su valor afecta al desempeño del ángulo de camber.

## 2.5 Ángulo de Kingpin y scrub radius

El ángulo de Kingpin se define como el ángulo entre el eje de dirección y en eje vertical (eje z) del neumático, viendo al auto desde su plano frontal (*figura 2.9 b*). Kingpin puede generar en el neumático un par alrededor del eje x, dicho par sirve como retroalimentación hacia el piloto, dándole información sobre las características del camino. El momento  $M_x$  generado es directamente proporcional a la magnitud de scrub radius [8].

Scrub Radius se define como la distancia que hay entre la intersección del eje de dirección con el piso y el eje vertical del neumático, tal y como se puede ver en *figura 2.9b*, esta distancia multiplicada por la fuerza normal sobre el neumático genera un par alrededor del eje x. Es posible tener Scrub Radius sin ángulo de Kingpin, esto se hace moviendo los puntos que forman el eje de dirección del eje central del neumático, al presentarse este caso a scrub radius se le denomina *kingpin offset*.

Dentro del diseño de la cinemática debemos tener especial cuidado en cómo varía scrub radius, ya que esto genera un cambio en el ancho de vías o track del vehículo lo que produce que la distribución de peso sea diferente.

## 2.6 Efecto de Bump Steer

Dentro del desarrollo del mecanismo de suspensión, el sistema de dirección juega un papel muy importante ya que éste se encarga de girar los neumáticos para poder tomar una curva. El

sistema de dirección contempla un eslabón que va unido al upright, dicho eslabón debe apuntar al mismo centro instantáneo de rotación, formado por ambos brazos de suspensión. De no ser así, cuando el neumático esté en movimiento vertical, se generará una ganancia en el ángulo de toe, y por ende inestabilidad en el auto. En la *figura 2.10* se muestra la construcción del eslabón de dirección, teniendo especial atención al centro instantáneo de rotación.

El mismo procedimiento se debe realizar con el sistema de suspensión trasero, que si bien no cuenta con un sistema de dirección, debe tener un eslabón que evite el giro. Este elemento es llamado “trackrod” y se conecta del upright a algún punto en el chasis.

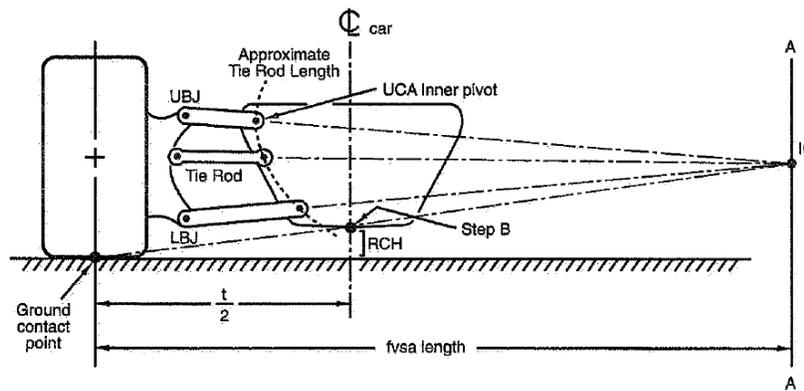


Figura 2. 10 Geometría para evitar bump-steer (Fuente [4])

## 2.7 Análisis en WinGeo

WinGeo es un paquete de análisis geométrico, en el cual se puede obtener información sobre la cinemática de diferentes tipos de suspensión. WinGeo brinda información sobre el desempeño cinemático del sistema de suspensión, ya que da solución a las ecuaciones cinemáticas espaciales que forman dicho mecanismo y de no ser utilizado se requeriría de mucho tiempo para lograr los mismos resultados. En nuestro caso, se utilizó el software para obtener gráficas del comportamiento del ángulo de camber con respecto a movimientos de roll en el chasis y del viaje vertical de los neumáticos. Así como obtener curvas de desempeño en la posición del centro de giro (RC), magnitud del ángulo de dirección y posición de los centros instantáneos de rotación.

### 2.7.1 Suspensión Delantera

De acuerdo a los requerimientos encontrados en el análisis del neumático, decidimos tener un valor de camber  $-2.5$  grados, esto con el fin de maximizar su capacidad de tracción lateral. La *figura 2.11* nos muestra la interfaz del software, en ella podemos ver en un pequeño cuadro rojo la ubicación de roll center, así como la ubicación del centro instantáneo de rotación de cada llanta, ángulo de camber, dirección, entre otros. En este caso mostramos la suspensión del año 2014 en donde la altura del roll center es  $RCH = -37.83mm$ , el signo negativo nos dice que está por debajo del nivel del piso.

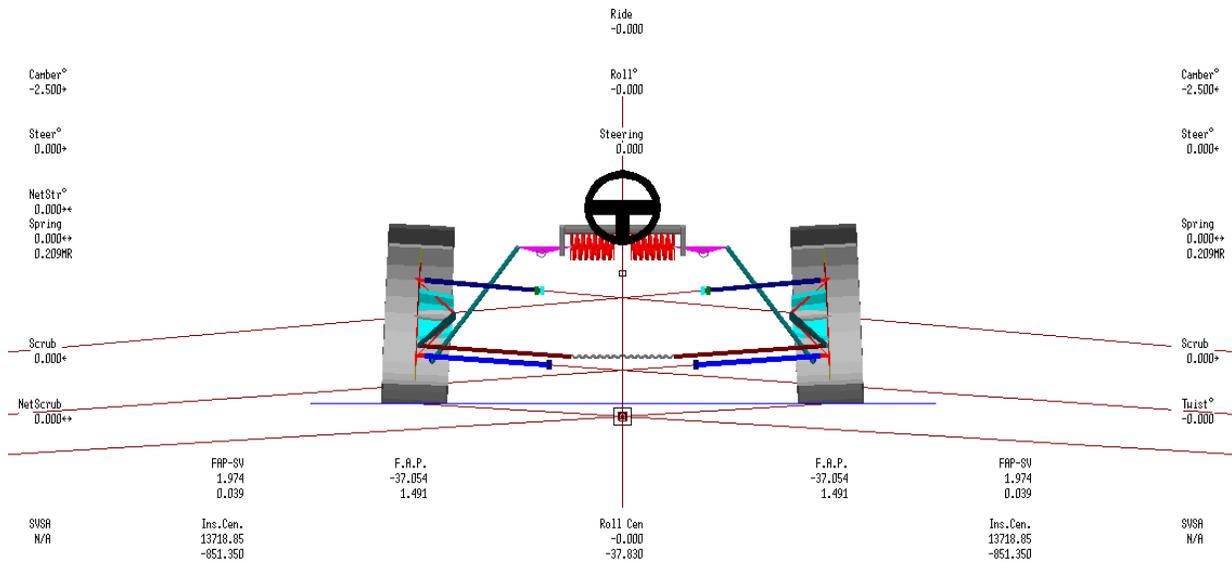


Figura 2. 11 Interfaz de WinGeo. Sistema se suspensión delantera

En WinGeo podemos realizar simulaciones de ride (desplazamiento vertical del neumático), ángulo de roll en el chasis y giro del volante; así como combinación de estos tres casos. En la figura 2.12 el auto experimentó 1 grado de roll, con ello podemos ver que el Roll Center cambió de ubicación, situándose a una altura de  $RCH_1 = -36.63 \text{ mm}$  y un desplazamiento lateral de 106.9mm. Un cálculo posterior a 1.5 grados nos muestra que la altura del roll center se encontró en -35.14 mm y su desplazamiento lateral en 160.53mm, destacando que el viaje horizontal de RC fue de menos de medio centímetro con respecto al valor inicial (cuando el ángulo de roll=0).

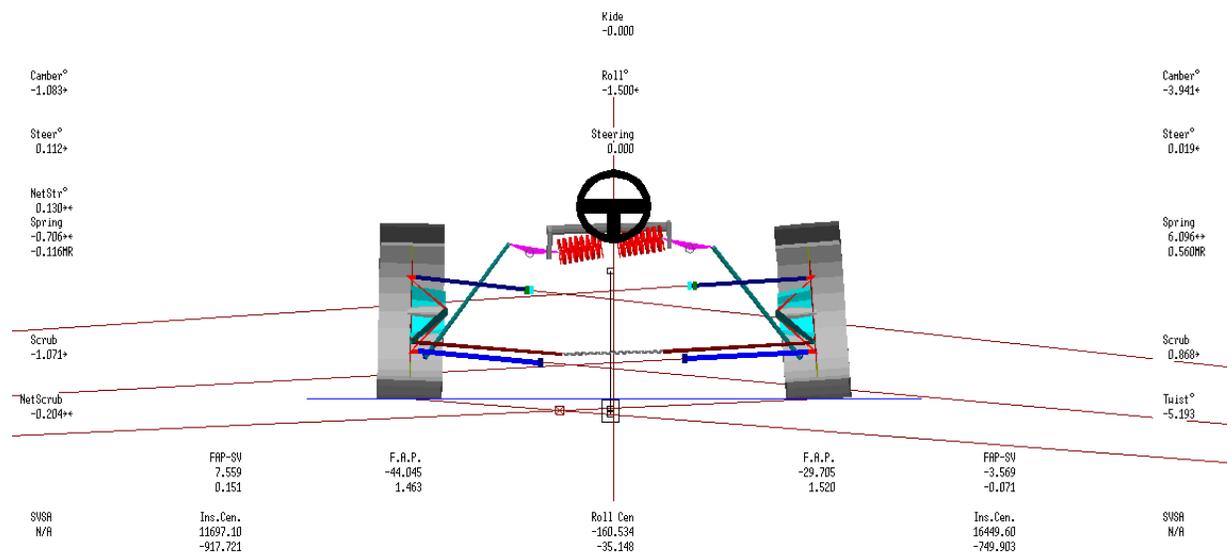


Figura 2. 12 Suspensión a un grado de roll, viaje de roll center.

En el *anexo 2.1* se muestra el sistema de suspensión delantera, con las coordenadas de los puntos de la geometría de los brazos, así como el sistema de dirección. En el año (2014) se optó por tener un ángulo de caster de  $+5.682$  grados, lo que nos generó un mechanical trail (o como el software lo llama: caster trail) de  $24.87\text{mm}$ . Por otro lado, se decidió no usar ángulo de kingpin pero sí contar con un scrub radius de  $30.6\text{mm}$ , es decir, se usó kingpin offset; esto fue debido a que al usar kingpin las curvas de camber se ven afectadas. El valor de track delantero se dejó en los  $1219.2\text{mm}$ , mismo que se utilizó en el año 2013. Con el fin de reducir peso, el wheelbase se redujo al mínimo permitido por el reglamento de Formula SAE [1], es decir,  $60\text{in}$  ( $1524\text{mm}$ ). Para el diseño de los puntos de dirección se tuvo especial cuidado en que éste apuntara al centro de rotación del neumático, esto con el fin de evitar el fenómeno de bump-steer.

En la *figura 2.13* se muestra el comportamiento del ángulo de camber, la ubicación del roll center y el ángulo de dirección para los casos de roll en el auto y desplazamiento horizontal del neumático.

Podemos observar que cuando el neumático presenta un viaje en el rango de  $-30\text{mm}$  a  $30\text{mm}$ , camber tiene un cambio de  $-2.67$  a  $-2.412$  grados respectivamente, notamos que es un cambio pequeño, el cual se debe a la lejanía de los centros instantáneos de rotación (IC). Por otro lado, el roll center (RC) se movió verticalmente de entre  $-89.8\text{mm}$  a  $12.5\text{mm}$  siendo un cambio cerca de  $10\text{cm}$ . Asimismo el ángulo de la dirección del auto permaneció entre  $0.32$  y  $-0.008$  grados, por lo que el fenómeno de bump-steer fue minimizado.

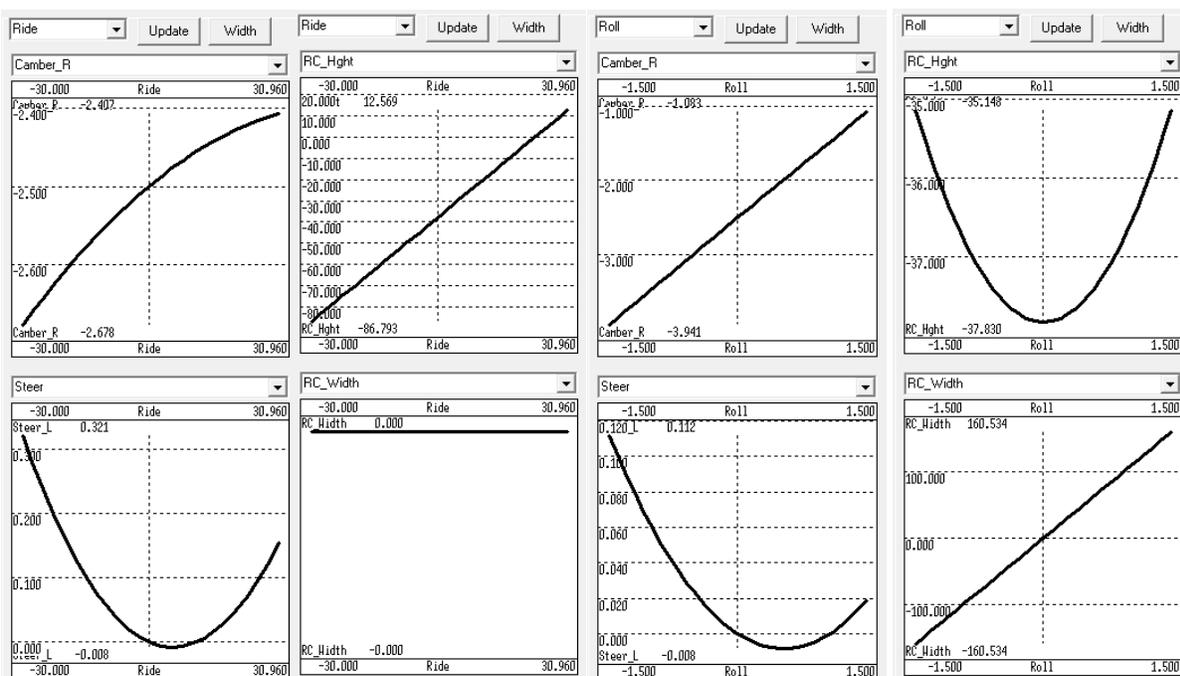


Figura 2. 13 a) Gráfica de camber y steering vs Ride. b) Viaje de Roll center vs Ride. c) Camber y dirección vs Roll. d) Viaje de Roll center vs Roll

Para el caso de roll (*figura 2.13c y 2.13d*) el sistema fue simulado en un rango de  $-1.5^\circ$  a  $1.5^\circ$ , en estas condiciones camber cambia entre  $-3.945^\circ$  y  $-1.003^\circ$ , destacando que nunca se llega a los valores positivos, siendo un buen indicio ya que de presentarse un valor positivo de las fuerzas laterales del neumático decreceran.

En las mismas condiciones de roll ( $-1.5^\circ$  a  $1.5^\circ$ ), el centro de giro (RC) tiene un viaje vertical que va de  $-37.8\text{mm}$  a  $-35.14\text{mm}$  mostrando estabilidad con una migración pequeña. Por otro lado, el viaje lateral del centro de giro delantero ( $RC_f$ ) es de  $\pm 16\text{cm}$  aproximadamente. Por último en la *figura 2.13c* podemos notar que el ángulo de dirección cambia entre  $-0.008^\circ$  a  $0.11$ , con lo que descartamos el fenómeno de bump-steer en roll.

En el *anexo A2.2* se muestra la interfaz para poder realizar un análisis de bump-steer, además de la definición del centro instantáneo de rotación. En esta interfaz Wingeo nos ayuda visualmente a orientar el punto de pivote del eslabón de dirección, mostrándonos la localización del IC y posteriormente ajustando el punto.

Por último veremos el análisis para el cambio de scrub radius. En la *figura 2.14* se observa el cambio de scrub radius en roll y en ride; para el primer caso tenemos un máximo cambio de  $-0.203\text{mm}$  a  $\pm 1.5^\circ$  de roll. Por otro lado, para el caso de ride tenemos  $-5.94\text{mm}$  en  $-30\text{mm}$  de viaje y de  $1.572\text{mm}$  cuando el neumático ha subido  $30\text{mm}$ . En ride el mayor cambio se da cuando la llanta ha bajado  $30\text{mm}$ .

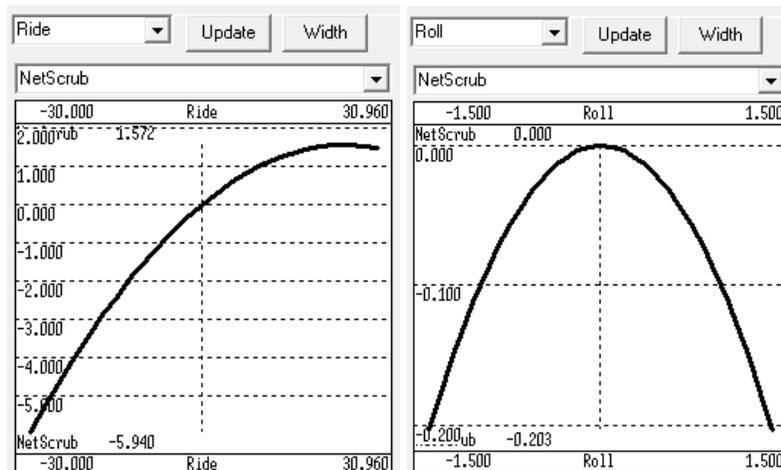


Figura 2.14 a) Variación de scrub radius en Ride. b) Scrub Radius vs Roll

## 2.7.2 Suspensión Trasera

Dentro de los parámetros que hay que cuidar en la parte trasera se encuentran: la altura del Roll center trasero ( $RC_r$ ) debe ser mayor al roll center delantero ( $RC_f$ ), cuidar la migración del  $RC_r$ , el cambio en camber tomando en cuenta que el valor estático es de  $0^\circ$ ; así como tener cuidado en la variación de scrub radius.

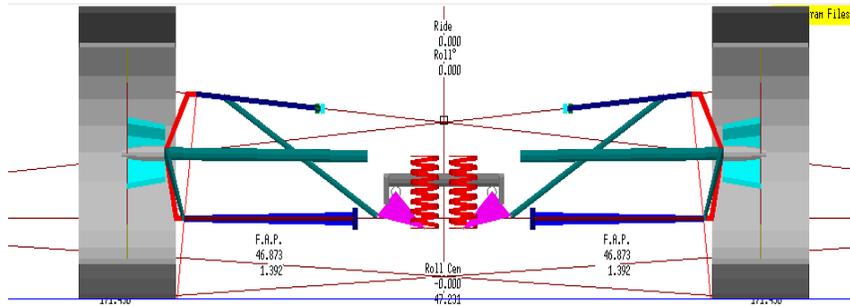


Figura 2. 15 Sistema de suspensión trasera, tipo pullrod

En la parte trasera usamos un sistema de suspensión pullrod (Ver figura 2.15), la localización de roll center trasero fue de  $RC_r = 21.52mm$ . Durante el análisis al presentarse un ángulo de roll de 1.5 g's, el valor de la altura del centro de giro fue de  $RC_r@1.5^\circ = 17.92mm$  sufriendo un cambio de solo 4mm, lo que indica buena estabilidad. En cuanto al ángulo de camber, éste varía entre  $-1.2^\circ$  y  $-1.18^\circ$ , para valores de  $-1.5$  y  $1.5$  grados de roll.

Para el caso de Ride podemos ver que el ángulo de dirección permanece en cero, eliminando el efecto de bump-steer (ver figura 2.16).

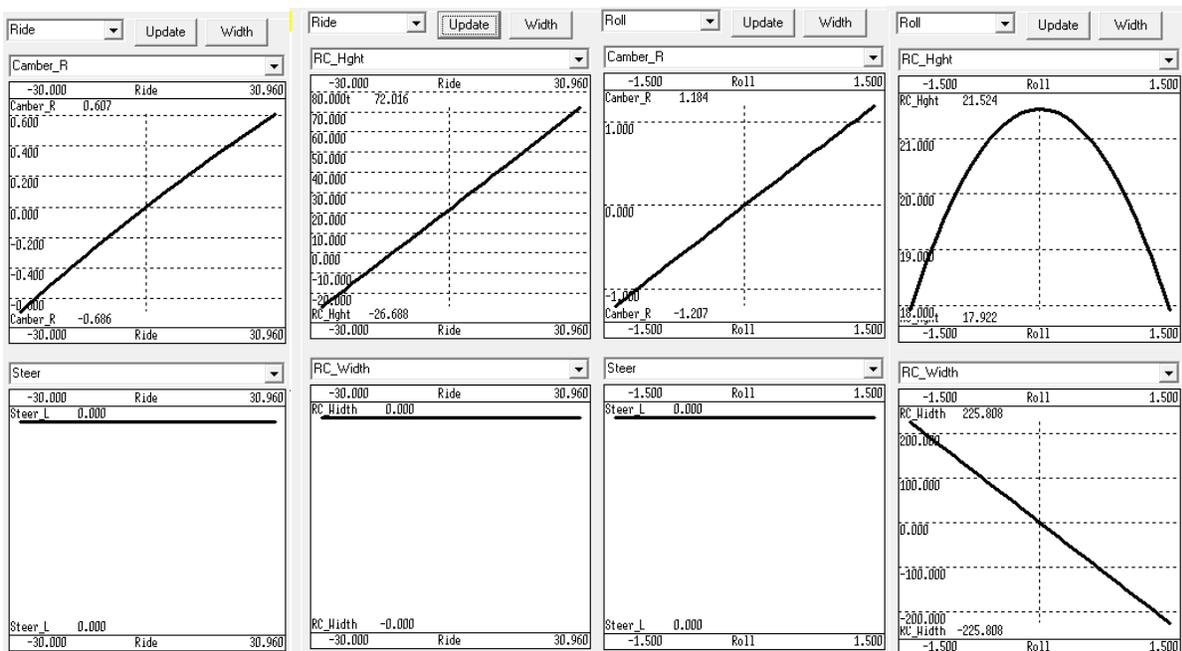


Figura 2. 16 a) Gráfica de camber y steering vs Ride. b) Viaje de Roll center vs Ride. c) Camber y dirección vs Roll. d) Viaje de Roll center vs Roll

Para el cambio de dimensión en scrub radius del sistema de suspensión trasero, en la figura 2.16 a) se muestra el caso de roll en donde el mayor cambio es de  $-0.232mm$  y para Ride tenemos  $-5.238mm$ , siendo en ambos casos variaciones muy pequeñas.

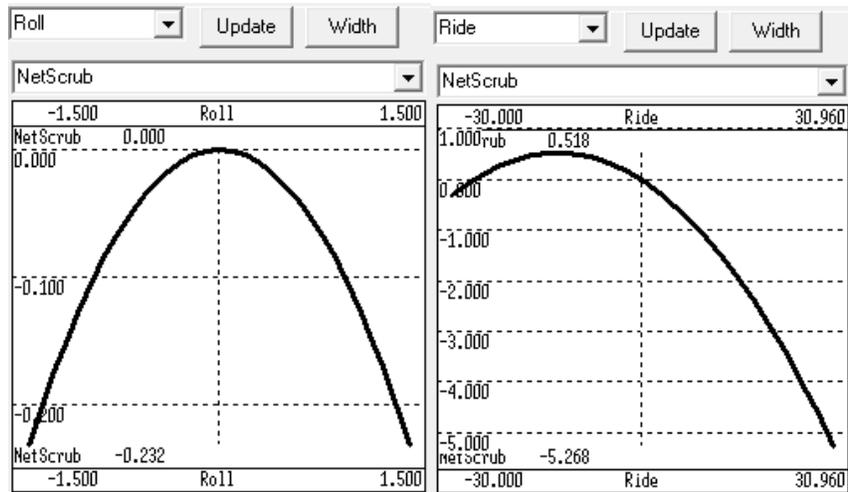


Figura 2. 17 a) Variación de scrub radius en Ride. b) Scrub Radius vs Rol

En el *anexo A2.3* podemos ver la geometría de suspensión con las coordenadas de los puntos que la constituyen, así como el caso de análisis de bump-steer, el cual ayudo para definir la posición de la trackrod.

### 2.8 Resumen de resultados

En términos generales los resultados los podemos resumir en la *tabla 2.1*, en la cual podemos identificar una gran área de oportunidad, al disminuir la cantidad de camber gain en la suspensión trasera, siempre y cuando no afectemos el desempeño de su Roll Camber.

Parámetro	Frontal	Trasera
Camber [Deg]	-2.5	0
Roll Center [mm]	-37.8	21.5
Bump /Rebump Travel [mm]	30/30	30/30
Camber Gain [Deg/m]	-4.47	-21.11
Roll Camber [Deg/Deg]	-0.95	-0.80
Toe Estático [Deg]	0	0
Track [mm]	1219.2	1100.2
Caster [Deg]	5.68	-
Mechanical trail [mm]	24.87	-
Inclinación de Kingpin [Deg]	0	-
Scrub Radius [mm]	30.6	-
Wheelbase [mm]	1524	
Inclinación del eje de roll [Deg]	2.23	

Tabla 2.1 Resumen de analisis geometrico.

### 3. Gradiente de Giro

Uno de los propósitos del sistema de suspensión es limitar la transferencia de carga de un neumático a otro, es decir, mantener una carga normal constante en cada uno de ellos, esto con el fin de mantener el auto en balance.

Hasta este momento sabemos la importancia del neumático, al desarrollar las fuerzas que hacen que el auto tome una curva y acelere o desacelere en línea recta, además de darnos información de los parámetros para desarrollar una geometría de suspensión, que nos ayude a trabajar dentro del rango óptimo de desempeño del neumático. El siguiente paso será definir la rigidez que el sistema de suspensión tendrá y cómo esto afecta al balance del auto. Sin embargo, antes de hacerlo necesitamos saber cuáles serán nuestras metas de diseño, es decir, qué es lo que esperamos que el modelo 2014 desarrolle en competencia y con base en ello, poder definir la rigidez de sistema de suspensión.

El camino que llevaremos a cabo será analizar el desempeño de los 10 mejores autos en la prueba de Skid-pad y aceleración, dándonos información de las aceleraciones laterales y lineales que estos autos experimentan. Con base en ello y la distribución de peso esperada, daremos una serie de valores del gradiente de roll para el UM-515 (prototipo 2014).

#### 3.1 Concepto de diseño en la dinámica del prototipo 2014

La primera aproximación será identificar las cualidades que debe tener un auto top 10 en la competencia, para ello analizaremos 2 pruebas que nos darán información sobre las cantidad de aceleraciones laterales y longitudinales que estos autos desarrollan. En la página de competencia de Formula SAE [11], obtenemos los resultados para la prueba de Skid-pad del año 2013, los cuales se muestran en la *tabla 3.1*.

Lugar	Número de auto	Equipo	Mejor tiempo	Puntaje
1	73	McGill Univ	4.827	50
2	71	Missouri University of Science and Tech	4.869	47.73
3	4	Univ of Washington	4.888	46.73
4	79	Univ of Illinois - Urbana Champaign	4.947	43.68
5	2	Univ of Texas - Arlington	4.984	41.82
6	7	California State Poly Univ - Pomona	5.004	40.83
7	6	Michigan State Univ	5.015	40.29
8	5	Texas A & M Univ - College Station	5.027	39.71
9	70	Auburn Univ	5.057	38.27
10	78	South Dakota Sch of Mines & Tech	5.059	38.18
43	52	Universidad Nacional Autónoma De México	5.957	4.7

*Tabla 3.1 Resultados de Skid-Pad en Formula SAE Lincoln 2013 (fuente [11]).*

La prueba de Skid-pad se efectúa en un circuito en forma de “8”, en la cual el auto da dos vueltas a la derecha y posteriormente dos a la izquierda. En el anexo A.3.1 se muestra el esquema de la pista de esta prueba, mediante el cual podemos calcular la longitud que el auto recorre como:

$$x_d = 2\pi\rho \cong 57.33[m] \quad (3.1)$$

Donde

$$\rho = \frac{15.25 + 6/2}{2} = 9.125[m] \quad (3.2)$$

Siendo  $\rho$  el diámetro del círculo que describe el auto en la prueba, éste se obtiene al considerar al vehículo como un punto de masa viajando justo en medio del camino.

Ahora bien, si asumimos que nuestro auto viajará a velocidad constante durante la vuelta, la aceleración lateral que desarrollará el auto está dada por la siguiente ecuación.

$$a_y = \frac{V^2}{\rho}, \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (3.3)$$

Donde la velocidad  $V$  la calcularemos como:

$$V = \frac{x_d}{t_d} \quad (3.4)$$

Siendo  $x_d$  la distancia recorrida y  $t_d$  el tiempo desarrollado durante la maniobra.

En la tabla 3.2 tenemos el cálculo de  $a_y$  para los 10 mejores autos del 2013, así como nuestro propio resultado.

Lugar	Número de auto	Equipo	Mejor tiempo	Puntaje	Velocidad [m/s]	Aceleración Lateral $a_y/9.81$
1	73	McGill Univ	4.827	50	11.878	1.576
2	71	Missouri University of Science and Tech	4.869	47.73	11.775	1.549
3	4	Univ of Washington	4.888	46.73	11.730	1.537
4	79	Univ of Illinois - Urbana Champaign	4.947	43.68	11.590	1.501
5	2	Univ of Texas - Arlington	4.984	41.82	11.504	1.478
6	7	California State Poly Univ - Pomona	5.004	40.83	11.458	1.467
7	6	Michigan State Univ	5.015	40.29	11.433	1.460
8	5	Texas A & M Univ - College Station	5.027	39.71	11.405	1.453
9	70	Auburn Univ	5.057	38.27	11.338	1.436
10	78	South Dakota Sch of Mines & Tech	5.059	38.18	11.333	1.435
43	52	Universidad Nacional Autónoma de México	5.957	4.7	10.932	1.035

Tabla 3.2 Cálculo de aceleración lateral en los 10 primeros autos y la UNAM (fuente [11])

Notamos que en el equipo aún debemos mejorar bastante para poder llegar a los valores que tienen los primeros 10 equipos. Sin embargo, podemos observar que el rango de  $a_y$  en esos autos va desde 1.43g's hasta 1.57 g's.

Por otro lado, analizando el desempeño en la prueba de aceleración, en ésta el auto acelera desde el reposo hasta recorrer una distancia de 75 metros en el menor tiempo posible. Con estos datos podemos calcular la aceleración que cada universidad hizo, con el fin de entender en qué posición estamos y determinar un camino para poder desarrollar un auto que sea competitivo. La siguiente ecuación da el comportamiento de la aceleración lineal del auto.

$$a_x = \frac{dv}{dt} \quad (3.5)$$

Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables, tenemos:

$$\int a_x dt = \int dv_x, \quad \therefore a_x t = v_x$$

Sin embargo, la velocidad puede expresarse como la razón de cambio de la posición, con ello reescribiendo y resolviendo tenemos:

$$a_x t = \frac{dx}{dt}, \quad \therefore \int a_x t dt = \int dx$$

$$\frac{a_x t^2}{2} = x$$

$$a_x = \frac{2x}{t^2} \quad (3.6)$$

Que es la expresión matemática para una aceleración lineal teniendo el tiempo y la distancia recorrida. En la *tabla 3.3* tenemos los resultados de la competencia en 2013, mostrando a los 10 mejores autos.

Lugar	Número de auto	Equipo	Mejor tiempo	Puntaje	Aceleración Lineal [m/s <sup>2</sup> ]	Aceleración lineal $a_x/9.81$
1	84	San Jose State University	3.950	75	9.614	0.980
2	6	Michigan State Univ	4.116	66.35	8.854	0.903
3	70	Auburn Univ	4.143	65.01	8.739	0.891
4	79	Univ of Illinois - Urbana Champaign	4.186	62.91	8.560	0.873
5	71	Missouri University of Science and Tech	4.211	61.71	8.459	0.862
6	1	Univ of Kansas - Lawrence	4.244	60.14	8.328	0.849
7	89	Oakland University	4.260	59.39	8.266	0.843
8	7	California State Poly Univ - Pomona	4.273	58.79	8.215	0.837
9	75	Southern Polytechnic State Univ	4.366	54.56	7.869	0.802
10	26	Univ of Nebraska - Lincoln	4.367	54.52	7.865	0.802
47	52	Universidad Nacional Autónoma de México	5.855	5.21	4.376	0.446

Tabla 3.3 Top 10 en la prueba de aceleración y cálculo de su aceleración lineal.

De la tabla 3.3 notamos que nuestro desempeño en 2013 debe mejorar mucho, siendo la potencia del motor pieza fundamental para tener un auto top10. Para darnos una idea de la potencia que debe desarrollar el auto, analicemos a éste como si fuese un punto de masa que se mueve a la aceleración descrita por la ecuación 3.6 y una distancia de 75 metros. Como primera aproximación despreciaremos los efectos de resistencia al giro y resistencia del viento en el auto, con ello podemos saber que la fuerza con la que se mueve el auto es:

$$F_x = m a_x [N] \quad (3.7)$$

Calculando el trabajo realizado como la fuerza aplicada multiplicada por la distancia recorrida. La potencia desarrollada será este trabajo dividido por el tiempo en el que se desarrolló la maniobra. La ecuación siguiente describe lo anterior

$$P = \frac{\text{Trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{W}{t_d} = \frac{F_x x_d}{t_d}$$

Si sustituimos el valor de la fuerza y aceleración tenemos en las ecuaciones 3.6 y 3.7 obtenemos:

$$P = \frac{m a_x x_d}{t_d} = \frac{m x_d}{t_d} \left( \frac{2x_d}{(t_d)^2} \right)$$

$$P = 2 \frac{m x_d^2}{t_d^3} [Watts] \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 nos muestra que la potencia es directamente proporcional a la masa del vehículo e inversamente proporcional al cubo del tiempo que hagamos en la prueba. El factor  $x_d^2$  es constante, ya que es la distancia recorrida.

Sí los 10 primeros autos hubieran pesado los 243 kilogramos que pesó el UM-524 además del peso de un piloto de 77 Kg (valor recomendado por el reglamento de SAE [1]), entonces la potencia que deberían desarrollar estos autos se muestran en la *tabla 3.4*

Lugar	Número de auto	Equipo	Mejor tiempo	Peso [Kg]	Potencia con peso UNAM	Potencia [Hp] con su peso
1	84	San Jose State University	3.950	195	78.33	66.58
2	6	Michigan State Univ	4.116	220	69.23	64.26
3	70	Auburn Univ	4.143	206	67.88	60.04
4	79	Univ of Illinois - Urbana Champaign	4.186	218	65.81	60.68
5	71	Missouri University of Science and Tech	4.211	201	64.65	56.17
6	1	Univ of Kansas - Lawrence	4.244	203	63.15	55.26
7	89	Oakland University	4.260	200	62.44	54.06
8	7	California State Poly Univ - Pomona	4.273	190	61.87	51.63
9	75	Southern Polytechnic State Univ	4.366	212	58.00	52.39
10	26	Univ of Nebraska - Lincoln	4.367	229	57.96	55.43
47	52	Universidad Nacion Autonoma De Mexico	5.855	243	24.05	

Tabla 3.4 Cálculo potencia necesaria en los primeros 10 lugares y la UNAM

Los cálculos se comparan con el peso del modelo de 2014 (UM-524), con el fin de tener un parámetro sobre la potencia necesaria en el UM-524 que lograría obtener el mismo tiempo que los mejores 10 autos del 2013. Teniendo esto en cuenta, los primeros 10 valores de la tabla 3.4 dan un valor promedio de potencia de 57.64 [Hp] y el promedio de peso de  $W=207.4$  [Kg]. La potencia real que genera cada auto es mayor, debido a la resistencia al giro y fricción del aire, los cuales no se tomaron en cuenta en este análisis.

Con los resultados de la *tabla 3.3 y 3.4*, podemos fijar una meta para el desarrollo del nuevo prototipo y con ello fijar parámetros dentro de la suspensión. Sabiendo el rango de aceleraciones laterales, podemos estimar la cantidad de carga normal en cada uno de los neumáticos y con ello saber la cantidad de fuerza en la huella, así como las reacciones al chasis y la transferencia de carga.

### 3.2 Carga normal y transferencia de carga

Carga normal se refiere a la cantidad de fuerza en dirección z en el neumático, es decir, la cantidad de peso que hay en cada neumático. La transferencia de carga se da cuando el auto está en aceleración lateral o longitudinal y ese se manifiesta como un aumento de carga normal en un neumático o bien, pérdida de carga.

Para poder estimar las trasferencias de carga de manera correcta, el primer paso es saber la localización del centro de gravedad de la masa suspendida y de la masa no suspendida del vehículo. Para ello recurrimos a los resultados del *capítulo 6: pruebas*, en el cual los resultados están resumidos en las tablas 6.1 y 6.2.

Cuando el auto está en vuelta-estable (velocidad contante), la carga es transferida desde el par de llantas internas hacia las llantas externas, esto debido a la fuerza centrífuga que actúa sobre el centro de gravedad del auto [4].

La transferencia de carga se puede dividir en tres tipos (de acuerdo a [12]):

- Transferencia de carga lateral debido a masa no suspendida ( $\Delta W_{uF}$ ,  $\Delta W_{uR}$  )
- Transferencia de carga lateral geométrica de la masa suspendida. ( $\Delta W_{gF}$ ,  $\Delta W_{gR}$  ).
- Transferencia de carga de la masa suspendida. ( $\Delta W_{sF}$ ,  $\Delta W_{sR}$  ).

Para poder estimar la cantidad exacta de carga que es transferida de un neumático a otro, es necesario saber la altura del centro de gravedad de la masa no suspendida delantera y trasera ( $h_F$  y  $h_R$ ), la cual es comúnmente estimada como el radio del neumático. Una mejor aproximación de este valor se hace a través de modernos paquetes de dibujo por computadora o CAD. La porción de transferencia de carga debida a la masa no suspendida o USM (Unsprung Mass) puede ser calculada como:

$$\Delta W_{uF} = \frac{W_{uF} \cdot a_y \cdot h_F}{t_F} \quad (3.9)$$

$$\Delta W_{uR} = \frac{W_{uR} \cdot a_y \cdot h_R}{t_R} \quad (3.10)$$

Donde:  $W_{uF}/W_{uR}$ =Peso de la masa no suspendida delantero/trasero en kilogramos [Kg]

$a_y$ =aceleración lateral [ $m/s^2$ ]

$h_F/h_R$ =Altura del centro de gravedad de USM delantero/trasero en metros [m]

$t_F/t_R$ =track delantero/trasero en metros [m]

Por otro lado, la transferencia de carga geométrica de la masa suspendida resulta de la aplicación de las fuerzas de los neumáticos al chasis a través de los centros instantáneos de rotación delanteros y traseros. Como se observa en la *figura 3.1*, la fuerza desarrollada por la rueda derecha se transmite a su respectivo centro instantáneo de rotación y esta fuerza se transmite a su Roll Center (este análisis puede hacerse con ayuda de WinGeo). Para poder calcular la cantidad de carga que se transfiere al neumático opuesto, podemos usar las ecuaciones 3.11 y 3.12.

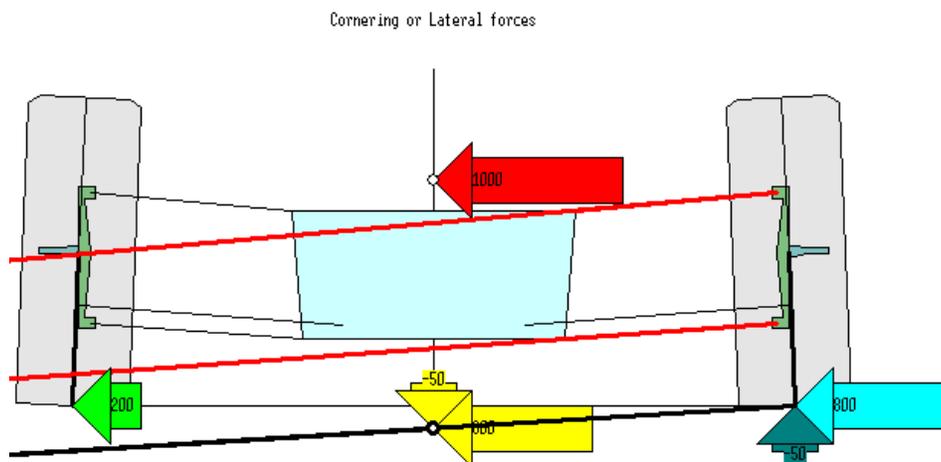


Figura 3. 1 Transferencia de carga geométrica.

$$\Delta W_{gF} = \frac{W_{sF} \cdot a_y \cdot \left(\frac{b_s}{WB}\right) h_{RCf}}{t_F} \quad (3.11)$$

$$\Delta W_{gR} = \frac{W_{sR} \cdot a_y \cdot \left(\frac{a_s}{WB}\right) h_{RCr}}{t_R} \quad (3.12)$$

Donde:  $W_{sF}/W_{sR}$ =Masa suspendida delantera/trasera [Kg]

$h_{RCf}/h_{RCr}$ =Altura sobre el piso del centro de rotación delantero/trasero [m]

$WB$ =Wheelbase [m]

$a_s$ =distancia entre el eje delantero a la línea central del centro de masa suspendida,  $b_s = WB - a_s$  [m]

Por otro lado, la distribución de carga debido a la masa suspendida, se efectúa del eje trasero al delantero y su valor depende de la distribución del roll stiffness (rigidez de la suspensión) que hay entre el sistema de suspensión delantero y trasero. Para cuantificarlo usamos:

$$\Delta W_{SF} = \frac{W_S \cdot a_y \cdot h_{Roll}}{t_F} q \quad (3.13)$$

$$\Delta W_{SR} = \frac{W_S \cdot a_y \cdot h_{Roll}}{t_F} (1 - q) \quad (3.14)$$

Donde

$$q = \frac{K_{\phi,F}}{K_{\phi,R} + K_{\phi,F}} = \frac{RG_R}{RG_F + RG_R}$$

$q \equiv$  distribución del gradiente de roll

Con  $K_{\phi F}/K_{\phi R}$  = Roll stiffness del eje delantero/trasero (a los neumáticos) [Nm/Deg]

$RG_F/RG_{\phi R}$  = Gradiente de roll delantero/trasero [grados de Roll/ g's]

$h_{Roll}$  = Distancia del centro de gravedad de masa no suspendida eje de roll [m]

$W_S$  = Masa suspendida [Kg].

La transferencia de carga total que hay en un auto que no realiza aceleración longitudinal, es decir, se encuentra realizando una vuelta a velocidad constante, se describe en las ecuaciones 3.15 y 3.16.

$$\Delta W_{ayF} = \Delta W_{uF} + \Delta W_{gF} + \Delta W_{SF} \quad (3.15)$$

$$\Delta W_{ayR} = \Delta W_{uR} + \Delta W_{gR} + \Delta W_{SR} \quad (3.16)$$

Cada una de estas porciones de transferencia de carga puede ser calculada de manera independiente y después ser sumada. Si adoptamos el sistema de referencia de un vehículo de acuerdo a SAE y con ayuda de la *figura 3.2*, imaginémos que un auto da una vuelta a la izquierda (del piloto), entonces la fuerza centrífuga jalará al auto en el sentido del eje y (ver *Fig. 3.2*), haciendo que la transferencia de carga se vaya hacia el neumático derecho. Es por ello que podemos calcular la transferencia de carga en cada neumático como:

$$F_{Z1} = W_1 g - \Delta W_{ayF} \quad (3.17)$$

$$F_{Z2} = W_2 g + \Delta W_{ayF} \quad (3.18)$$

$$F_{Z3} = W_3 g - \Delta W_{ayR} \quad (3.19)$$

$$F_{Z4} = W_4 g + \Delta W_{ayR} \quad (3.20)$$

Donde  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $W_4$  son el peso en cada uno de los neumáticos antes de salir a pista. En esta primera aproximación la fuerza en cada neumático se aproxima solo con los efectos de

transferencia de carga, a esta ecuación le hace falta agregar la aportación de fuerza normal que hacen el resorte, el amortiguador y la barra de torisión.

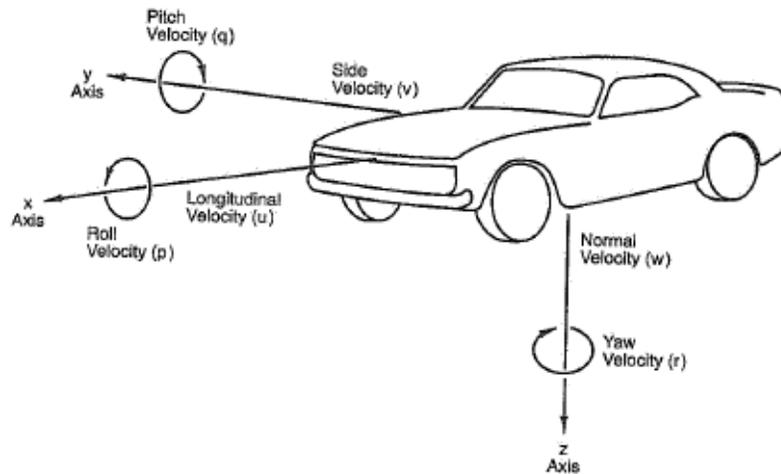


Figura 3. 2 Sistema de referencia SAE (fuente [4])

Con el fin de no hacer tantos cálculos, se desarrolló un programa en Matlab (*Ver Anexo A.3.2*), en donde podemos calcular la carga normal en cada neumático y la distribución de masa del vehículo. El programa realiza un análisis de transferencia de carga con las ecuaciones descritas en esta sección.

Los datos de entrada necesarios son:

Datos	Valor	Unidades	Descripción
<b>tf</b>	1.219	[m]	Track delantero
<b>tr</b>	1.100	[m]	Track trasero
<b>W1,W2,W3, W4</b>	72.5, 73.5, 74.5, 75.5	[Kg]	Peso sobre cada neumático
<b>Wu1</b>	13.514	[Kg]	Peso de USM delantera
<b>Wu1</b>	13.514	[Kg]	Peso de USM trasera
<b>h_CoG</b>	0.29	[m]	Altura del centro del masa del auto
<b>h_F</b>	0.262	[m]	Altura del CG de USM delantera
<b>h_R</b>	0.259	[m]	Altura del CG de USM delantera
<b>h_RCf</b>	-0.037	[m]	Altura Roll center delantero
<b>h_RCr</b>	0.025	[m]	Altura Roll center trasero

El programa calcula la distribución de peso de la masa suspendida y no suspendida, dando como resultado la localización del centro de gravedad del auto completo como:

Datos Distribución Peso	
<b>WT</b>	296
<b>%Front</b>	49.324324
<b>%Rear</b>	50.337838
<b>a</b>	0.7722973
<b>b</b>	0.7517027
<b>yp</b>	0.5779983
<b>ypp</b>	0.0039983

Además de las propiedades de la masa suspendida:

Datos Distribución SM	
<b>WS</b>	239.99
<b>WU</b>	56.01
<b>a s</b>	0.768496321
<b>b s</b>	0.755503679
<b>Yp s</b>	0.71356974
<b>Ypp s</b>	0.13956974
<b>h s</b>	0.296897062
<b>h_roll</b>	0.302478143

Para la distribución de carga debido a la rigidez de la suspensión, creamos 6 gráficas variando la distribución de la rigidez de la suspensión “q” desde un valor de 0.2 hasta 0.8. Usando valores de aceleración lateral desde 1 hasta 2 [g’s], siendo este el rango crítico en competencia. A continuación mostramos los resultados de distribución de carga con un piloto de 78 Kg que el programa nos arroja.

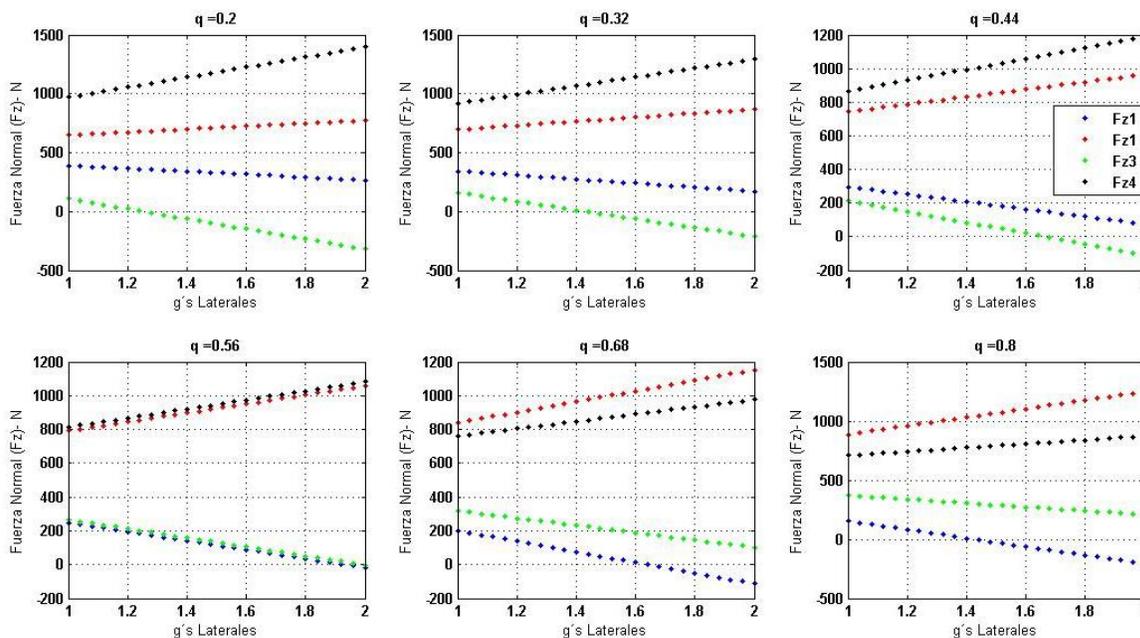
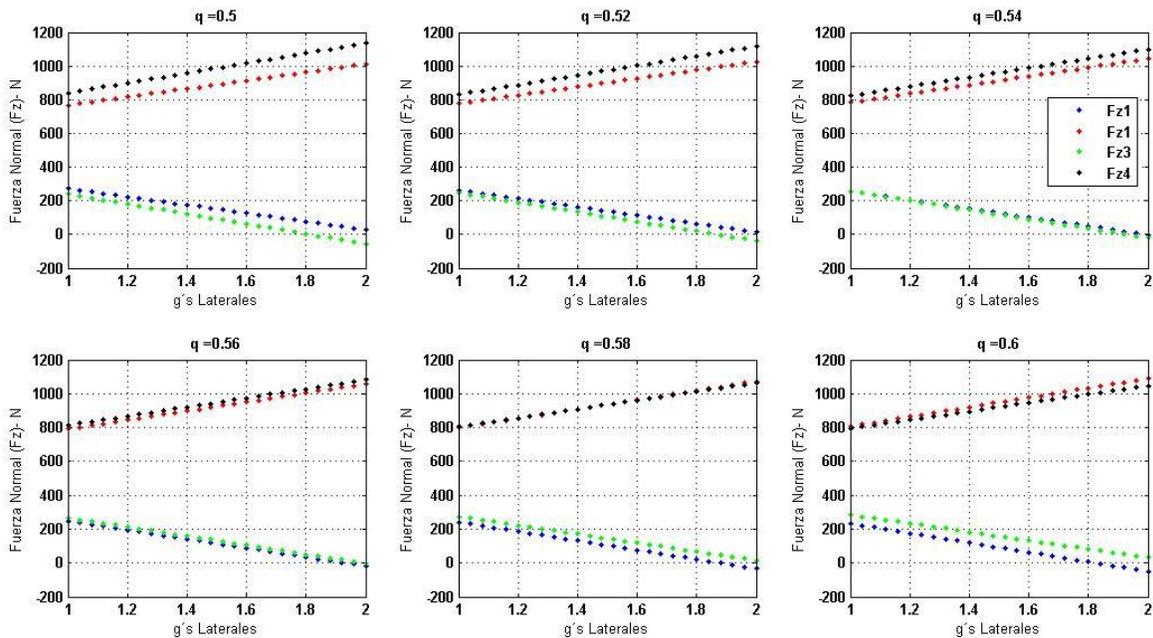


Figura 3. 3 Distribución de carga normal para valores de distribución del gradiente de roll entre 0.2 y 0.8

En la *figura 3.3*, podemos notar cómo el cambio en “q”, afecta a la transferencia de carga, vemos que para los valores de 0.2 y 0.8 la distribución es muy irregular, cargándose más un neumático que otro. Por otro lado, para valores alrededor de 0.5 y 0.6 tiende desarrollarse una distribución de carga más uniforme, es por ello que realizamos un nuevo análisis para este rango, dando como resultado la *figura 3.4*. En ella podemos notar que una distribución equilibrada de carga normal se da en los valores alrededor de 0.56 y 0.58, por lo que es recomendable que la suspensión pueda ser ajustable y poder llegar a estos valores de distribución el gradiente de roll (q).



*Figura 3.4* Carga normal para valores de q entre 0.5 y 0.6

### 3.3 Diseño de Roll Rate

De acuerdo a nuestro análisis de los resultados obtenidos en la competencia del año 2013, llegamos a la conclusión que necesitamos tener un auto que pueda girar a una velocidad de 40km/h (aproximadamente 1.35 g's) y conforme a los análisis hechos en WingGeo, definiremos cuántos grados de roll deseamos que gire el auto, esto con el fin de poder dar un valor al gradiente de roll (Roll Rate) deseado para la temporada 2014. Recordando que el análisis en los parámetros geométricos del neumático fue desarrollado en un rango de  $\pm 1.5$  grados de roll, definiremos el valor de 1.5 grados como el máximo valor de roll permisible, ya que después de éste el desempeño del neumático se ve afectado.

La ecuación para cuantificar el gradiente de roll del auto completo, está dado por:

$$K_{\phi} = \frac{\text{Roll}}{g's \text{ laterales}} = \frac{\phi}{A_Y} = -\frac{W_T g h_{\text{Roll}}}{K_{\phi F} + K_{\phi R}} \quad (3.21)$$

Donde  $W_T$  es el peso total del auto en kilogramos,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $h_{Roll}$  la distancia del centro de gravedad de la masa suspendida al eje de roll,  $\phi$  es el ángulo de roll del auto en grados y  $A_Y$  es la aceleración lateral en el centro de gravedad del auto medida en  $g's$ . Por último  $K_{\phi F}$  y  $K_{\phi R}$  son la rigidez de la suspensión delantera y trasera respectivamente.

Sustituyendo nuestros valores meta tenemos el gradiente de roll deseado como:

$$K_{\phi DES} = \frac{\phi}{A_Y} = -\frac{1.3[\text{grados de roll}]}{1.35[g's]} = -0.963 \left[ \frac{\text{grados Roll}}{g's} \right] \quad (3.22)$$

### 3.3.1. Definición de conceptos

Para poder desarrollar un sistema de suspensión que cumpla con los requerimientos, primero debemos saber cómo llegar a la *ecuación 3.21*. Para ello son necesarias las siguientes definiciones y ecuaciones tomadas de [4].

*Spring Rate* (Constante elástica del resorte)  $K_s$ : Es la fuerza  $F_s$  por unidad de desplazamiento  $x_s$  en un resorte. Esta constante puede tener un comportamiento lineal (donde la fuerza incrementa de manera proporcional al desplazamiento), o bien un comportamiento no lineal. Sus unidades son N/m o Lb/in y puede ser calculado como:

$$K_s = \frac{F_s}{x_s} \quad (3.23)$$

*Installation Ratio* (*Razón de instalación*)  $IR$ : Es un concepto geométrico que relaciona el cambio de longitud en el resorte con el viaje vertical del centro del neumático.  $IR$  se describe de la siguiente manera:

$$IR = \frac{\Delta \text{Spring Travel}}{\Delta \text{Wheel Travel}} \quad (3.24)$$

Como vemos  $IR$  es un parámetro adimensional. En la mayoría de los sistemas de suspensión este es un parámetro progresivo, es decir, el valor de  $IR$  cambia con respecto al viaje vertical del neumático, por ello, el diseño debe enfocarse en minimizar el efecto progresivo, mediante el desarrollo de un comportamiento lineal entre la compresión del resorte y el viaje del neumático. En la literatura encontramos comúnmente el término de *Motion Ratio* ( $MR$  Razón de movimiento), que no es lo mismo que  $IR$ , ya que  $MR$  es el inverso multiplicativo de  $IR$ , tal como la ecuación 3.25 nos muestra.

$$MR = \frac{1}{IR} \quad (3.25)$$

*Wheel Center Rate* (*Razón de movimiento al centro del neumático*)  $K_W$ : Es la fuerza vertical por unidad de desplazamiento del centro del neumático. El valor de  $K_W$  generalmente es menor

al Spring Rate debido al valor de IR, por lo que comúnmente el viaje del neumático es mayor a la compresión del amortiguador. Sus unidades son [N/m] o [Lb/in] y se calcula mediante:

$$K_W = K_s(IR)^2 \quad (3.26)$$

*Tire Rate (Constante elástica del neumático)  $K_T$* : Es el cociente de la fuerza por unidad de deformación en el neumático, éste depende de la presión en el neumático, el ángulo de camber, la temperatura, entre otros. Sus unidades son [N/m] o [Lb/in].

*Ride Rate (Razón de viaje vertical)  $K_R$* : Es la fuerza por unidad de desplazamiento del punto de contacto del neumático con el piso. Su valor depende del Wheel rate y Tire rate. Si asumimos una rigidez infinita en el neumático  $K_T = \infty$ , el valor de  $K_R$  será igual a  $K_W$ . Sus unidades son [N/m] o [Lb/in] y se calcula como:

$$K_R = \frac{K_W K_T}{K_W + K_T} \quad (3.27)$$

*Roll Rate (Gradiente de Giro)  $K_R$* : Par o momento de resistencia al giro por unidad de giro en el chasis (ángulo roll). El término puede ser aplicado a cada eje (delantero o trasero), o bien al auto completo. El gradiente de giro se debe a los ride rates, las dimensiones de track y barras estabilizadoras. Sus unidades comúnmente son [Nm/Grado], [Lb-in/Grado], o bien [Nm/Radian], [Lb-in/Radian]. Para calcular el roll rate del eje delantero y trasero usamos las ecuaciones 3.25 y 3.29, en donde tenemos valores de Wheel rate derecho  $K_{WfR}$  e izquierdo  $K_{WfL}$  son diferentes.

$$K_{\phi F} = \frac{\pi}{180} \frac{K_{WfR} K_{WfL} t_F^2}{(K_{WfR} + K_{WfL})}, \quad \left[ \frac{Nm}{Grado} \right] \quad (3.28)$$

$$K_{\phi R} = \frac{\pi}{180} \frac{K_{WRR} K_{WRL} t_R^2}{(K_{WRR} + K_{WRL})} \quad (3.29)$$

Donde  $t_F$  y  $t_R$  son el track delantero y trasero respectivamente.  $K_{WfR}$  es el valor de wheel rate delantero derecho,  $K_{WfL}$  el valor para el neumático delantero izquierdo,  $K_{WRR}$  para el trasero derecho y  $K_{WRL}$  para el trasero izquierdo.

Si el valor de Kw del neumático derecho e izquierdo es igual, entonces se usan las ecuaciones 3.30 y 3.31 para calcular el gradiente de giro del eje delantero y trasero.

$$K_{\phi F} = \frac{\pi}{180} \frac{K_{WF} t_F^2}{2}, \quad \left[ \frac{Nm}{Grado} \right] \quad (3.30)$$

$$K_{\phi R} = \frac{\pi}{180} \frac{K_{WR} t_R^2}{2} \quad (3.31)$$

Donde  $K_{WF}$  y  $K_{WR}$  son el valor de Wheel rate de un neumático delantero y trasero respectivamente.

Estos valores pueden ser convertidos a [Nm/Rad], omitiendo el término  $\pi/180$ . Ahora calcularemos el gradiente de roll del auto completo, mediante la fórmula:

$$K_{\phi} = -\frac{W_T g h_{Roll}}{K_{\phi F} + K_{\phi R}}, \quad \left[ \frac{\text{Grados}}{g's} \right] \quad (3.32)$$

El signo negativo se usa para cumplir con el sistema de referencia del vehículo de acuerdo a SAE [4].

### 3.3.2. Desarrollo y cálculos

Como ya habíamos visto, la cantidad de roll rate deseado está dado en gran parte por los resortes que se vayan a utilizar, si analizamos con detenimiento la ecuación 3.32 podemos despejar el denominador quedándonos la siguiente expresión:

$$K_{\phi F} + K_{\phi R} = -\frac{W_T g h_{Roll}}{K_{\phi}} \quad (3.33)$$

Es decir, la suma de los roll rates delantero y trasero debe ser igual al cociente  $W_s g h_{Roll}/K_{\phi}$ , donde se debe cumplir  $K_{\phi} = K_{\phi DES}$ . Con apoyo del programa desarrollado en Matlab que se encuentra en el *Anexo A.3.2*, haremos una aproximación para el roll rate deseado usando diferentes valores de resortes. Los resultados se muestran en la *tabla 3.4*

$K_s$ [Lb/in]	$\omega_{nF}$ [Hz]	$\omega_{nR}$ [Hz]	$K_{WF}$ [N/m]	$K_{WR}$ [N/m]	$K_{R,F}$ [N/m]	$K_{R,R}$ [N/m]	$K_{\phi F}$ [Nm/°]	$K_{\phi R}$ [Nm/°]	$K_{\phi}$ [°/g's]
150	2.017	1.807	22720.101	17922.742	19111.107	15598.984	294.622	206.127	-1.754
250	2.476	2.238	37866.836	29871.237	28801.811	23929.900	491.037	343.546	-1.052
350	2.799	2.549	53013.570	41819.732	36798.798	31032.903	687.451	480.964	-0.752
450	3.044	2.789	68160.304	53768.227	43510.418	37160.838	883.866	618.382	-0.585
600	3.320	3.066	90880.405	71690.969	51772.757	44922.694	1178.488	824.509	-0.439

Tabla 3.4. Valor de Roll rate a diferentes valores de resortes, para un valor de  $IR_f = 0.93$   $IR_r = 0.823$

En este caso se usaron los valores de installation ratio delantero y trasero como  $IR_f = 0.93$  y  $IR_r = 0.825$ , dichos valores se discutirán más adelante. De la *tabla 3.4* observamos que al menos los dos primeros valores de resortes están dentro del rango del gradiente de roll requerido, es por ello que podemos elegir entre un resorte con constante de 150 [Lb/in] o 250 [Lb/in].

En las primeras dos columnas tenemos la frecuencia natural de la masa suspendida, a las cuales trabajaría la suspensión 2014, de acuerdo con Lean & Compete [10] los valores de frecuencia natural comunes en autos FSAE son:

- Frecuencia natural de la masa suspendida 2.5-3.5 Hz
- Frecuencia natural de la masa suspendida 15-19 Hz

La frecuencia natural tanto para la masa amortiguada como la no amortiguada se obtiene mediante:

$$\begin{aligned}\omega_{n_U} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_W + K_T}{W_U}}, & [Hz] \\ \omega_{n_S} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K_R}{W_S}}, & [Hz]\end{aligned}\tag{3.34}$$

Donde  $\omega_{n_U}$  y  $\omega_{n_S}$  es la frecuencia natural de la masa no suspendida y masa suspendida respectivamente.  $W_U$  es la masa no suspendida en kilogramos y  $W_S$  la masa suspendida.

Es muy importante recordar que en cada esquina del auto la frecuencia natural es diferente, a menos que el peso en el neumático derecho sea el mismo que el izquierdo.

Por otro lado, para llegar al valor de gradiente de roll deseado usaremos barras de torsión (también conocidas como barras estabilizadoras). El cálculo de la porción de rigidez que cada barra de torsión debe agregar al auto obedece a la siguiente fórmula:

$$K_{\phi_A} = \frac{\pi}{180} \left( \frac{K_{\phi_{DES}} K_T \left(\frac{t^2}{2}\right)}{\left[ K_T \left(\frac{t^2}{2}\right) * \frac{\pi}{180} - |K_{DES}| \right]} \right) - \frac{\pi K_W \left(\frac{t^2}{2}\right)}{180} \quad \left[ \frac{N * m}{Grado} \right]\tag{3.35}$$

Donde:  $K_{\phi_A}$  = Roll Rate total deseado en la ARB (Nm/Grado)  
 $t$  = Track  
 $K_{\phi_{DES}}$  = Roll rate total deseado (Nm/Grado)  
 $K_W$  = Wheel rate (N/m)  
 $K_T$  = Tire rate (N/m)

Como vemos es necesario transformar las unidades del gradiente del giro de grados de roll/g's a Nm/Grado. Para ello usamos las ecuaciones 3.37 y 3.36.

$$K_{\phi_{DES}} = -0.963 \left[ \frac{\text{Grados de roll}}{g's} \right]\tag{3.36}$$

$$RG_{\phi_{DES}} \left[ \frac{Nm}{degree} \right] = - \frac{W_T g h_{roll}}{K_{\phi_{DES}}} = - \frac{(296)(9.81)(0.302)}{-0.963} = 910.628 \left[ \frac{Nm}{Grado} \right]\tag{3.37}$$

Este valor de rigidez debe de ser distribuido entre la suspensión delantera y trasera, de acuerdo al valor de  $q = 0.556$ , que encontramos en las gráficas de la sección 3.2, la cantidad de roll rate requerido para la suspensión delantera y trasera es:

$$RG_{\phi_{DES,F}} = K_{\phi_{DES}} \cdot q, \quad \left[ \frac{Nm}{Grado} \right]\tag{3.38}$$

$$RG_{\phi_{DES,R}} = K_{\phi_{DES}} \cdot (1 - q), \quad \left[ \frac{Nm}{Grado} \right] \quad (3.39)$$

La distribución del gradiente de roll  $q$  es conocida por OptimumG [12] como Magic Number, y por Milliken [4] como TLLTD (Total Lateral Load Transfer Distribution). Este último sugiere tener un 5% más de distribución de rigidez en la parte delantera con el fin de asegurar subviraje en el auto.

Con esto podemos adaptar la ecuación de rigidez necesaria para cada eje en el auto, quedando:

$$K_{\phi_{A,f}} = \frac{\pi}{180} \left( \frac{K_{\phi_{DES,f}} \cdot K_T \left( \frac{t_f^2}{2} \right)}{\left[ K_T \left( \frac{t_f^2}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{180} - K_{\phi_{DES,f}} \right]} \right) - \frac{\pi K_{W_F} \left( \frac{t_F^2}{2} \right)}{180} \quad \left[ \frac{N * m}{grado} \right] \quad (3.40)$$

$$K_{\phi_{A,r}} = \frac{\pi}{180} \left( \frac{K_{DES,r} \cdot K_T \left( \frac{t_r^2}{2} \right)}{\left[ K_T \left( \frac{t_r^2}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{180} - K_{DES,r} \right]} \right) - \frac{\pi K_{W_R} \left( \frac{t_r^2}{2} \right)}{180} \quad \left[ \frac{N * m}{Grado} \right] \quad (3.41)$$

Usando las ecuaciones 3.40 y 3.41 para los diferentes valores en la constante del resorte, la contribución que la barra de torsión debería de aportar se muestra en la tabla 3.5.

$K_s$ [Lb/in]	$K_\phi$ [°/g's]	$K_{\phi_{A,F}}$ [Nm/°]	$K_{\phi_{A,R}}$ [Nm/°]	$K_{\phi_{A,F}}$ [Nm/Rad]	$K_{\phi_{A,R}}$ [Nm/Rad]
150	-1.754	358.138	274.531	20519.805	15729.472
250	-1.052	259.931	197.060	14892.941	11290.723
350	-0.752	161.724	119.589	9266.077	6851.973
450	-0.585	63.516	42.119	3639.213	2413.224
600	-0.439	-83.795	-74.087	-4801.083	-4244.900

Tabla 3.5. Valores de rigidez para las barras de torsión

Donde podemos ver que para valores de 450 lb/in y 600 lb/in en la constante del resorte, ya no es necesario el uso de una barra de torsión, ya que la rigidez de los resortes cumple o exceden por si solos la meta. Teniendo en cuenta esto, elegimos usar un resorte de 250 lb/in, que además cumple con estar dentro del rango de 2 a 3 Hz de frecuencia natural recomendada.

### 3.3.3. Resultados

A continuación, a manera de lista, mostramos los resultados obtenidos para los parámetros del sistema de suspensión de la temporada 2014.

- $K_s = 250$  [lb/in] constante de los resortes tanto delantero como trasero.
- $K_{\phi_{A,f}} = 259.93$  [Nm/Grado] Rigidez de la barra de torsión delantera.
- $K_{\phi_{A,r}} = 197.06$  [Nm/Grado] Rigidez de la barra de torsión trasera.
- $K_\phi = -0.963$  [° Roll/g's] Roll rate total del auto.

- $K_W = 37866.836[N/m]$  Wheel Rate.
- $K_R = 29871.237[N/m]$  Ride Rate
- $\omega n_f = 2.476[Hz]$  Frecuencia natural delantera
- $\omega n_r = 2.238[Hz]$  Frecuencia natural delantera
- $IR_f = 0.93[-]$ ;  $IR_r = 0.823[-]$  Installation Ratio, recordar que  $MR=1/IR$  (Motion Ratio)
- $K_T = 12.0312 \left[ \frac{kN}{m} \right]$  para neumáticos a una presión de 12 psi.
- Viaje de suspensión delantera y trasera  $= \pm 30mm$

### 3.4 Análisis de barra de torsión tipo U

En la sección anterior logramos definir las metas del sistema de suspensión en cuanto a su rigidez y para llegar a él, incorporamos el uso de una barrar de torsión, también conocida como barras estabilizadoras o Anti-Roll bar (ARB es su abreviación común). El estudio anterior nos brindó un par de valores en rigidez torsional y para cumplir con éste objetivo, a continuación hablaremos de su principio de funcionamiento, sus parámetros de diseño y cómo dimensionarlas.

#### 3.4.1 Principio de funcionamiento

Como se ha mencionado con anterioridad, dentro del sistema de suspensión hay dos tipos de movimientos: el giro del vehículo a lo largo de su eje longitudinal (Roll) y el viaje vertical de ambos neumáticos (Bump).

Dicho lo anterior, una barra de torsión en caso de Bump, no experimenta torsión angular, esto se debe a que tanto el viaje del neumático izquierdo como el derecho es el mismo y es por ello que en caso de Bump la barra de torsión no trabaja, ver *figura 3.5*.

Por otro lado, cuando un auto va en curvas, éste experimenta roll y como resultado de ello un neumático tiene un desplazamiento vertical mayor que el otro, esta diferencia de movimientos hace que la barra de torsión experimente un desplazamiento angular (ver *figura 3.5*), lo que genera un par de resistencia por parte de la barra, resultando en la disminución del roll en el auto y una mejor estabilidad en la curva, debido a que se mantienen los neumáticos en su rango óptimo.

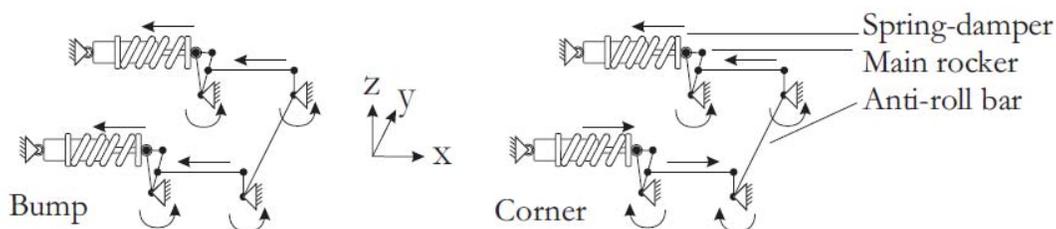


Figura 3. 5 Funcionamiento de una barra de torsión en Bump y roll. (Fuente [13]).

### 3.4.2 Fundamentos teóricos

Para cumplir la rigidez requerida en cada barra de torsión, debemos saber cómo el movimiento de los neumáticos se transforman en un desplazamiento angular en las barras de torsión, para ello definimos la relación que hay entre el giro del auto (roll) y el ángulo de torsión que tendrá la barra. Dando como resultado la ecuación 3.42.

$$MR_{ARB} = \frac{ARB \text{ twist } \theta}{Body \text{ roll angle } \phi} [-] \quad (3.42)$$

Donde  $MR_{F,ARB}$  se define como relación de movimiento de la barra de torsión (o bien ARB Motion Ratio),  $\theta$  es el ángulo de deformación en la barra y  $\phi$  el ángulo de roll. A continuación calculamos la rigidez torsional que debe tener la barra:

$$K_{ARB} = \frac{K_{\phi A}}{(MR_{ARB})^2} \text{ [Nm/Grado]} \quad (3.43)$$

Donde  $K_{\phi A}$  es la rigidez necesaria calculada y  $K_{ARB}$  es la rigidez que deberá tener la barra de torsión. Esta expresión nos describe la sensibilidad de  $K_{ARB}$  con respecto a  $MR_{ARB}$ , es decir, a valores grandes de  $MR_{ARB}$  harán que la barra de torsión requiera menor rigidez y por ende sus dimensiones sean más pequeñas.

Para poder trasladar el valor de  $K_{ARB}$  a una barra de sección circular constante, debemos hacer uso de las ecuaciones dadas por la mecánica de materiales [14], en donde para una barra en torsión pura, podemos calcular su diámetro mediante:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ARB} = \frac{G \cdot I}{L} \\ I = \frac{\pi}{32} d^4 \\ G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{array} \right\} K_{ARB} = \frac{E\pi d^4}{64(1 + \nu)L} \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64k_{ARB}(1 + \nu)L}{E\pi}} \quad (3.44)$$

Donde  $G$  es módulo de rigidez del material,  $I$  el momento de inercia de la sección transversal de la barra (también conocido como momento polar).  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $L$  la longitud de la barra.

De la ecuación 3.44, notamos que la rigidez es directamente proporcional al módulo de elasticidad e inversamente proporcional a la longitud  $L$ ; por ende entre menor sea su longitud más grande será su rigidez para un mismo diámetro. Es por ello que el empaquetamiento del sistema de suspensión juega un papel importante en las dimensiones de la barra estabilizadora.

### 3.4.3 Esfuerzo en la barra

De acuerdo al criterio de von mises, en un cuerpo sometido a torsión pura el fuerza máximo permisible está dado por:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (3.45)$$

Donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de cedencia del material en pascales [Pa] y  $\tau_{max}$  el esfuerzo máximo cortante en [Pa]. Para saber la cantidad de esfuerzo en la barra usaremos las ecuaciones descritas en [14], por lo que tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{T \cdot d}{2 \cdot I} \\ I = \frac{\pi}{32} d^4 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} [Pa] \quad (3.46)$$

Donde  $T$  es el par que se aplicará en la barra de torsión,  $d$  es el diámetro y  $\tau$  es el esfuerzo cortante.

Conociendo el esfuerzo aplicado, definimos el factor de seguridad mediante la ecuación 3.47.

$$S.F. = \frac{\tau_{max}}{\tau} [-] \quad (3.47)$$

#### 3.4.4. Diseño y selección de material

De la sección anterior, obtuvimos las ecuaciones que dimensionan nuestra barra de torsión; sin embargo, el primer paso es determinar qué material es el más apropiado. Cabe mencionar que nuestras metas específicas serán:

- Peso < 500 gramos.
- F.S. >= 1.3

En la *tabla 3.6* tenemos los materiales posibles para la barra de torsión, contamos con dos aluminios de alto desempeño y un acero al cromo normalizado.

Propiedades físicas.	Aluminio 6061-T6	Aluminio 7075-T6	Acero 4340, Normalizado
Módulo Elasticidad (E) [MPa]	6 900	72 000	210 000
Módulo de rigidez (G) [MPa]	26 000	26 900	80 000
Módulo de Poisson (ν)	0.33	0.33	0.32
Esfuerzo de Cedencia ( $\sigma_y$ ) [MPa]	275	505	460
Máximo esfuerzo cortante $\tau_{max}$ (criterio de Von mises) [MPa]	158.77	291.56	265.58

Tabla 3.6 Propiedades de materiales candidatos.

Del análisis iterativo en Adams/Car y de las dimensiones en el CAD, llegamos a los resultados de la tabla 3.7, en donde están las relaciones de movimiento y el par que se desarrollaría en la ARB.

Datos	Delantero	Trasero
Rigidez deseada, $K_A$ [Nm/Rad]	14892.941	11290.723
Motion Ratio, $MR_{ARB}$ [-]	7	6.6
Rigidez de la ARB, $K_{ARB}$ [Nm/Rad]	223.19	147.21
Longitud, $L$ [m]	0.34	0.52
Par, $T$ [Nm]	90	90

Tabla 3.7. Dimensiones de las barras de torsión

De las propiedades de los materiales, las dimensiones de las barras y usando las ecuaciones 3.44 a 3.47, tenemos la tabla 3.8 en donde mostramos el diámetro de las barras de torsión para los materiales propuestos, así como su respectivo esfuerzo y factor de seguridad.

Material	$\tau_{max}$ [MPa]	$d_f$ [mm]	$d_r$ [mm]	$\tau_f$ [MPa]	$\tau_r$ [MPa]	$S.F._f$ [-]	$S.F._r$ [-]
Aluminio 6061-T6	158.7713	25.239	26.972	28.510	23.359	5.57	6.80
Aluminio 7075-T6	291.5619	14.043	15.007	165.521	135.620	1.76	2.15
Acero 4030 Normalizado	265.5811	10.725	11.461	371.515	304.401	0.71	0.87

Tabla 3.8. Resultado de diámetro y factor de seguridad.

Para automatizar el proceso iterativo con el que se llenó la tabla 3.8, los cálculos están incorporados en el programa de Matlab (*Ver Anexo A.3.2*), en el cual debe especificarse las propiedades para 3 materiales, las dimensiones de la barra y las relaciones de movimiento  $MR_{ARB}$ .

En los resultados de la *tabla 3.8*, notamos que el material que proporciona menor diámetro es el Acero 4030; sin embargo, el factor de seguridad señala que no resistirá, además de ser un material más denso. Por otro lado, el aluminio 6061-T6 muestra el mejor factor de seguridad debido a que el diámetro es de 23mm. Sin embargo, el tener una barra de torsión de esas dimensiones también aumentaría el peso. Por último, para el Aluminio 7075-T6 el diámetro sería de 13mm en ambos casos (delantero y trasero), dando además un factor de seguridad de 1.4, siendo éste el material elegido.

### 3.4.5 Dibujo en CAD

En esta sección veremos cómo dimensionar la barra de torsión en el CAD y compararemos los pesos de acuerdo a lo materiales propuestos.

En *figura 3.6* se muestra el ensamble de las barra de torsión trasera, el cual ésta formado por una barra sólida estriada en cada extremo, que va unida a un buje fijado axialmente con anillos de retención. El ensamble cuenta con rodamiento de agujas para permitir el giro radial, los

cuales están fijados al chasis mediante chumaceras y tornillos. La unión de los brazos de palanca (rocker plate) al balancín de la barra (rocker ARB) se hace mediante un pequeño eslabón, que está formado de un par de rótulas esféricas (rodends), unidas a un pequeño tubo de acero. En la *figura 3.6* se muestra un acercamiento en donde se notar el escalón dejado en el estriado de la barra, en el cual se introduce el anillo de retención.

Los rocker ARB fueron pegados con el buje estriado con ayuda de un pegamento epóxico. El escalón para el rodamiento debe estar lo más cercano al estriado, esto con el fin de evitar flexión en la barra. En el *anexo A.3.3* encontramos el dibujo mediante la técnica de explosivo en la barra de torsión delantera.

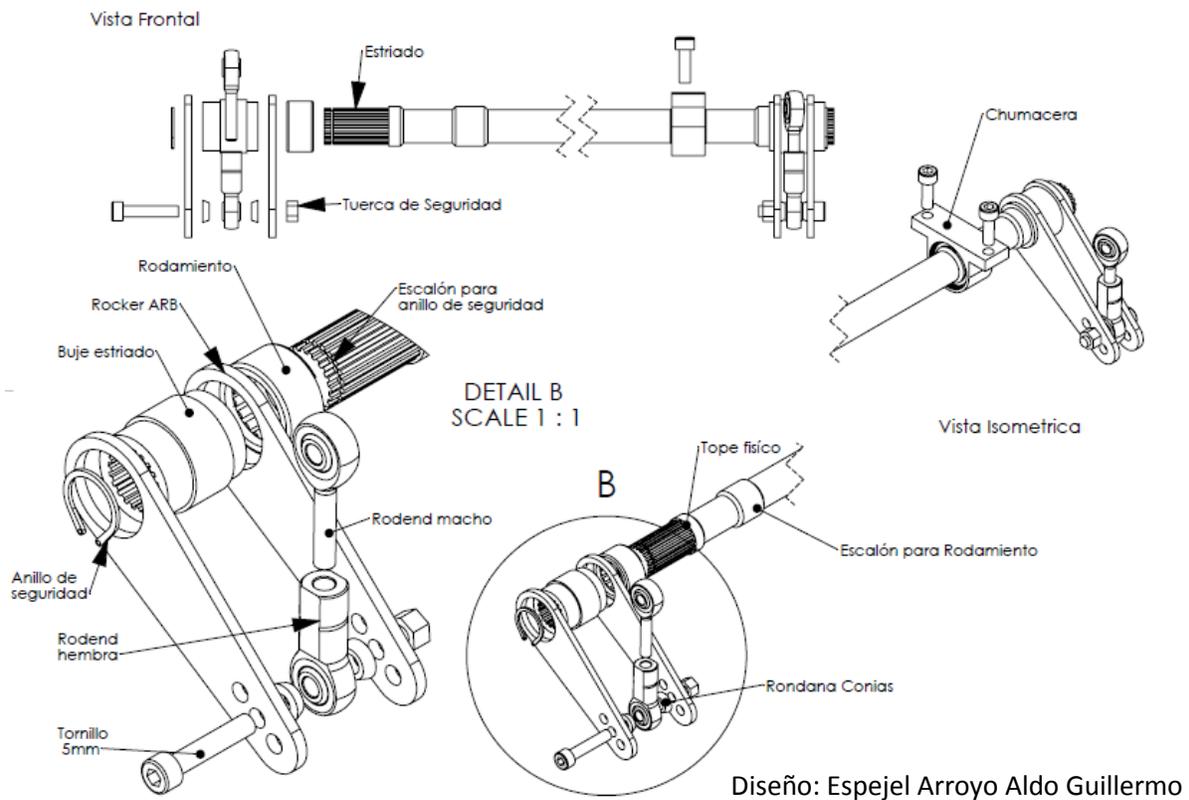


Figura 3. 6 dibujo explosivo de la barra de torsión trasera.

### 3.5 Diseño en Adams/Car de Installation Ratio y Motion Ratio de la barra de torsión

De acuerdo con los resultados de las secciones 3.3 y 3.4, debemos de cumplir con los siguientes valores de relación de movimiento.

Parámetro	Suspensión Delantera	Suspensión Trasera
Installation Ratio $IR$ [-]	0.93	0.823
Motion Ratio para Anti-Roll Bar $MR_{ARB}$ [-]	7.0	6.6

Tabla 3.9 Relaciones de movimiento

Para cumplir con este objetivo usamos el paquete de análisis dinámico Adams/Car.

#### 3.5.1 Modelo de suspensión en Adams/Car.

El modelo utilizado se muestra en la *figura 3.7*, el cual cuenta con los puntos analizados en WinGeo adaptados al sistema de referencia de Adams/Car, todos los puntos que integran el sistema los podemos ver en el *anexo A.3.4*. Adams/Car tiene la facilidad de hacer un análisis para un sistema por separado, es decir, suspensión delantera o trasera, o bien simular el ensamble completo del auto, teniendo que agregar las propiedades de inercia y las características del tren motriz.

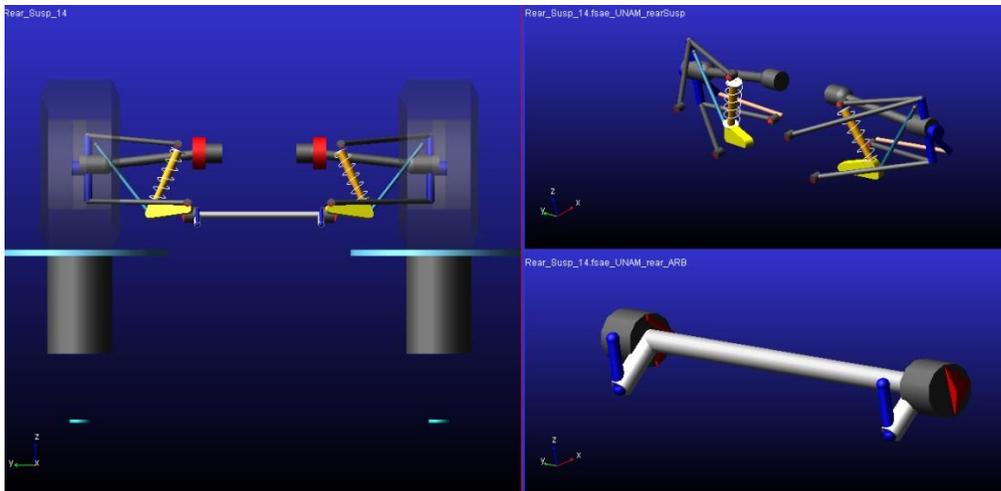


Figura 3. 7 Sistema de suspensión trasera en Adams/Car, subensambles a la izquierda.

En esta primera aproximación se usó Adams/Car como herramienta de análisis geométrico, concentrándonos en las simulaciones de movimiento y buscando que no surgieran problemas en el mecanismo y se cumplieran las relaciones de movimiento deseadas.

##### 3.5.1.1 Diseño del Installation ratio $IR$

El análisis empleado para obtener el  $IR$  así como  $MR_{ARB}$ , es la simulación llamada “Single Travel Wheel”, cuyos parámetros de entrada se muestran en la *figura 3.8*.

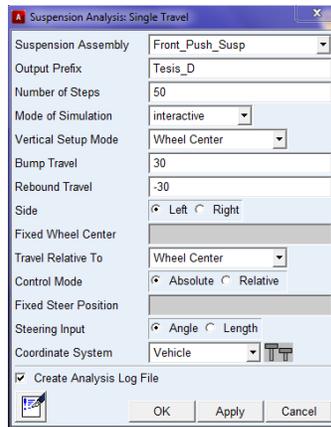


Figura 3. 8 Ventana de diálogo para realizar la prueba "single wheel travel".

*Bump travel* (figura 3.8) se refiere a la distancia de viaje vertical hacia arriba en milímetros, *Rebump travel* es el viaje hacia abajo. El número recomendado de pasos que debe realizar el análisis es de un análisis por milímetro de viaje. En la figura 3.8 se muestran 60 pasos de cálculo, debido a que se simularon 30mm de bump travel y otros 30mm de rebound travel.

Mediante la herramienta *Post-Processing* que cuenta el software, podemos manipular los resultados en cada una de los puntos que definen el ensamble. En ellos podemos obtener los desplazamientos, las fuerzas y los momentos que se presentaron durante la simulación. En la guía del programa [15] tenemos más información de cómo desarrollar un gráfico del viaje del neumático contra la compresión del amortiguador, en nuestro caso este resultado para la suspensión delantera se muestra en la figura 3.9 que además cuenta con una regresión lineal.

El valor del IR delantero se obtiene mediante la pendiente de la línea de regresión, calculada mediante la ecuación 3.48.

$$IR_f = \frac{206.89 - 150.96}{30 + 30} = 0.93[-] \quad (3.48)$$

El sistema de suspensión trasera es tipo pullrod con barra torsión, además el ensamble incluye las flechas del sistema motriz, tal y como se muestra en el anexo 3.3.

Al ejecutar el mismo análisis en Adams/Car (ver anexo A.3.5), el resultado de IR para el sistema de suspensión trasero es:

$$IR_r = \frac{198.2 - 156.9}{60} = 0.826 [-] \quad (3.49)$$

En este caso la línea de tendencia lineal se ajusta de mejor forma.

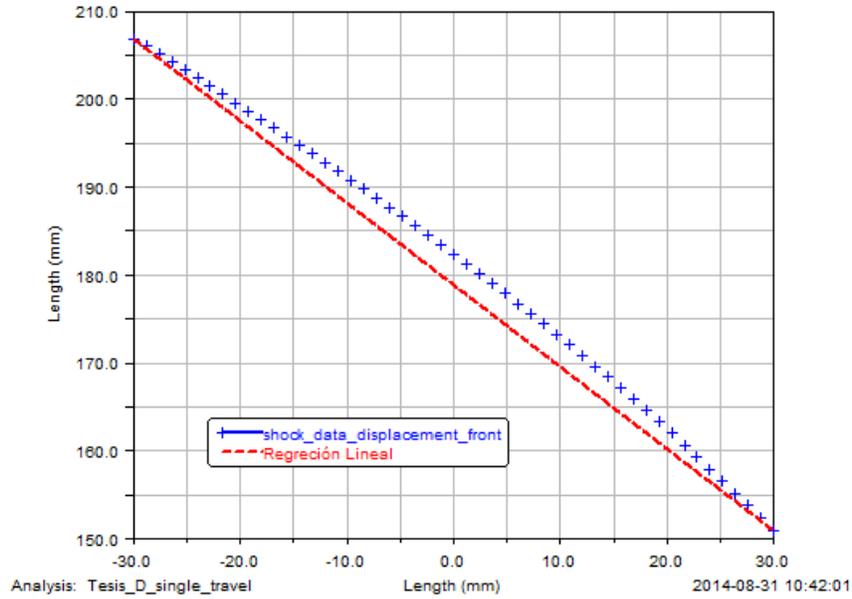


Figura 3. 9 Gráfica de viaje de neumático vs longitud de amortiguador y aproximación Lineal

### 3.5.1.2 Cálculo de Motion Ratio de las barras de torsión

En este caso cambiamos los valores de las abscisas con el fin de mostrar el ángulo roll de la suspensión contra el ángulo de torsión de la barra. Para la suspensión delantera tenemos como resultado:

$$MR_{ARB,r} = \frac{ARB \text{ twist } \theta}{body \text{ roll angle } \phi} = \frac{-10.51 - 10.2}{-1.56 - 1.56} = 6.63[-] \quad (3.50)$$

Los datos son tomados de la *figura 3.10* y del *anexo A.3.5.2*. Por otro lado, para la suspensión trasera tenemos:

$$MR_{ARB,f} = \frac{ARB \text{ twist } \theta}{body \text{ roll angle } \phi} = \frac{-11.47 - 10.58}{-1.56 - 1.56} = 7.06[-] \quad (3.51)$$

Los valores anteriores son el resultado de un proceso iterativo, en donde la recomendación es cambiar el punto del rocker en el cual llaga la barra de torsión.

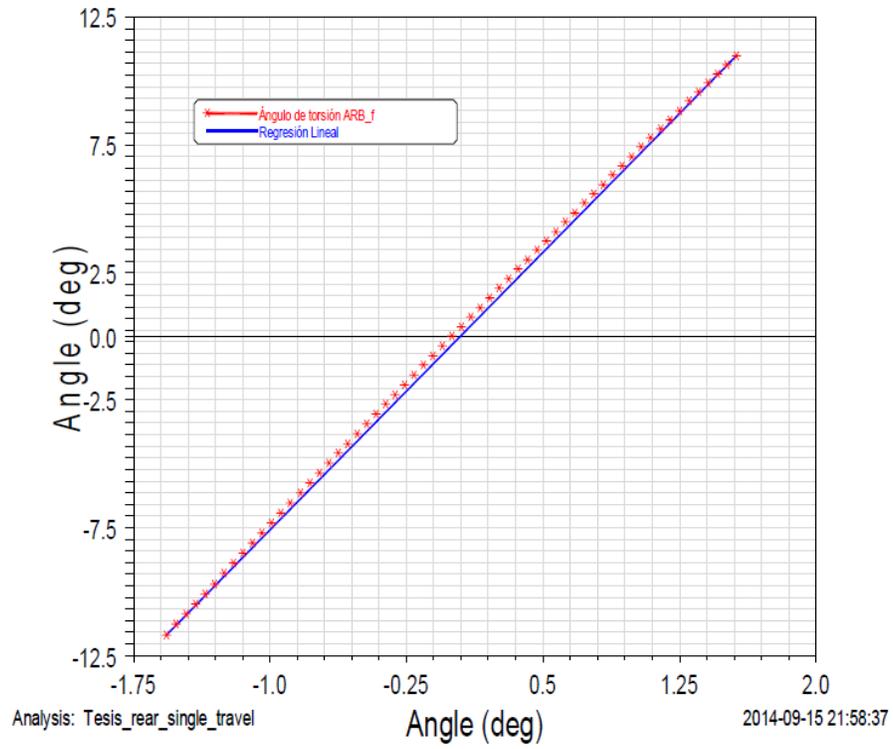


Figura 3. 10 Resultado de motion ratio de la barra de torsión delantera

## 4. Análisis en el dominio de la frecuencia

Dado que una de las tareas más importantes del sistema de suspensión es absorber las irregularidades del camino sin perder tracción en los neumáticos, la gran mayoría de los autos están equipados con amortiguadores y resortes que cumplen con ello. Pero, ¿Qué tan amortiguado debe ser el comportamiento? ¿Debe ser el mismo valor para compresión y extensión? Y ¿Qué hay de los ajustes a altas y bajas velocidades?

En este capítulo se introducirá el análisis en frecuencia para un auto de carreras, optimizando la interacción entre el camino y el vehículo, mediante el ajuste en la constante del amortiguador a diferentes velocidades.

### 4.1 Amortiguadores

Como se mencionó, los autos son equipados con amortiguadores para minimizar la variación entre el punto de contacto del neumático y la superficie del piso, además de controlar los movimientos del chasis debido a las aceleraciones laterales, longitudinales y verticales [16].

La fuerza desarrollada por un amortiguador es proporcional a la velocidad de compresión o extensión multiplicada por una constante, es decir:

$$F_c = C v_p \quad (4.1)$$

Donde  $v_p$  es la velocidad en el pistón del amortiguador [m/s], que es positiva cuando se comprime y negativa en caso contrario.  $C$  es la constante de amortiguamiento medida en [Ns/m].

#### 4.1.1 Tipos de amortiguadores

El extenso mercado de amortiguadores puede agruparse en tres grupos básicos: Bi-tubo, Monotubo y Monotubo con pistón de compresión (ver *figura 4.1*).

Los elementos que forman estos amortiguadores son:

- Pistón principal (Main piston): En todos los tipos de amortiguadores el pistón principal contiene la válvula primaria y produce la mayoría de la fuerza de amortiguamiento.
- Pistón de compresión (compression piston): Es el encargado de producir la fuerza de compresión basada en el desplazamiento del vástago a través del pistón de compresión. Además provee balance de presión durante la compresión, lo que en la mayoría de los casos produce problemas de cavitación.
- Pistón separador de gas: Mantiene el gas separado del aceite

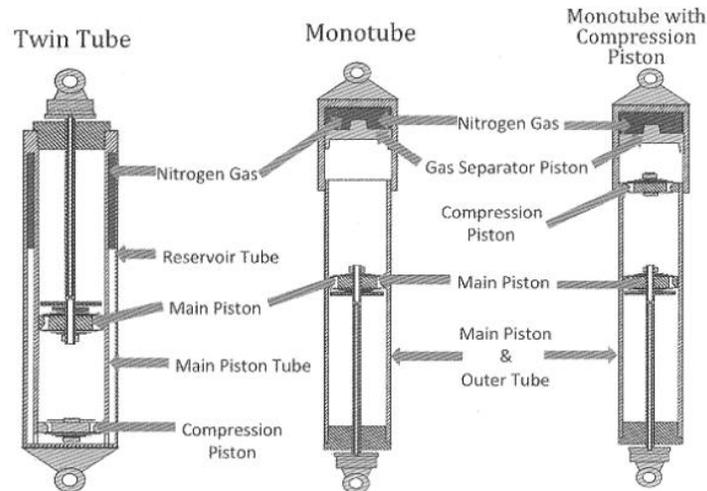


Figura 4. 1 Tipos más comunes de amortiguadores (Fuente [10]).

A continuación mostramos una comparación entre estos tres tipos de amortiguadores:

Tipo	Costo	Previene Cavitación	Aceite Separado	Presión de operación	Ajuste en amortiguamiento
Bitubo	Bajo	Si	No	Baja	No
Monotubo	Medio	No	Si	Alta	No
Monotubo con pistón de compresión	Alto	Si	Si	Baja	Si

Tabla 4.1 comparación de las características en amortiguadores

Como podemos ver, el amortiguador más robusto es el Monotubo con pistón de compresión, el cual tiene la ventaja de ser ajustado para diferentes constantes de amortiguamiento a diferentes velocidades de compresión y extensión. En el equipo Formula SAE de la UNAM, usamos este tipo de amortiguador desde la temporada 2011. Para obtener información de cómo se desarrolla la fuerza en el amortiguador vea [10].

#### 4.1.2 Características del amortiguador Öhlins TTX25

El amortiguador usado fue especialmente diseñado para autos Formula SAE y puede ser ajustado para diferentes velocidades de compresión y extensión. Entre sus principales características tenemos:

- 200 mm de longitud total (medida de centro a centro de las rótulas). Ver figura 4.2
- Compresión máxima de 57mm.
- Peso sin resortes: 448 gramos aproximadamente.
- Rótulas esféricas de 8mm de diámetro interno (ID) y 15mm de diámetro externo (OD).

En la página web del proveedor [17] se encuentra un documento con las especificaciones entre la fuerza desarrollada y la velocidad de compresión en el amortiguador para diferentes ajustes. Un ejemplo de estas gráficas es mostrado en la *figura 4.3*.

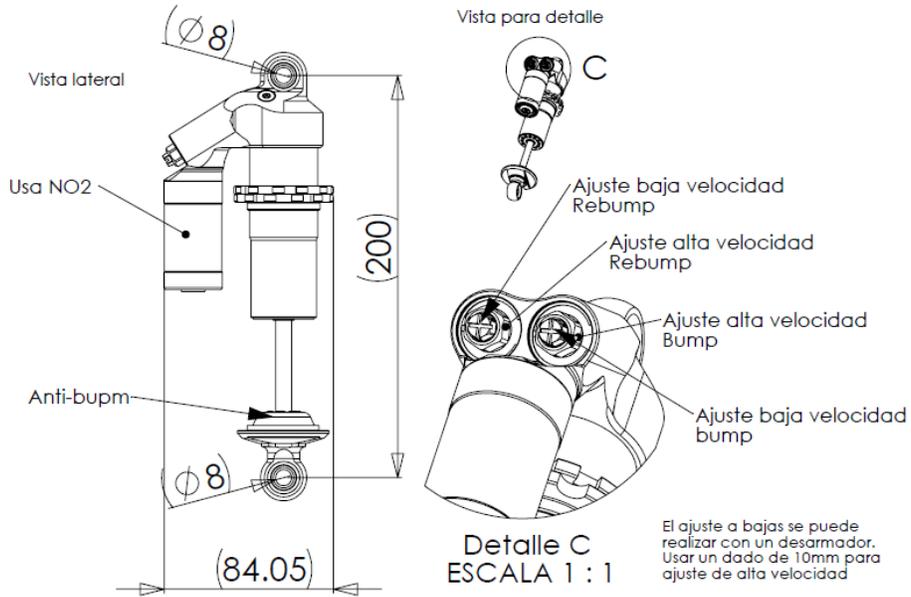


Figura 4. 2 Amortiguador TTX25

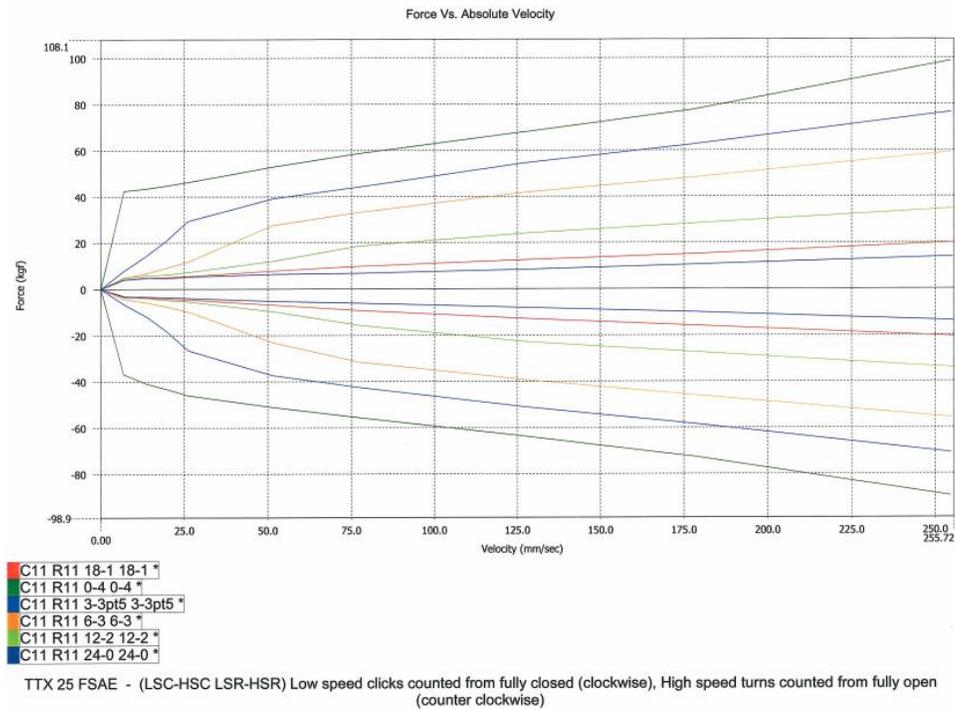


Figura 4. 3 Gráfica de fuerza desarrollada por el amortiguador TTX25, para diferentes ajustes (fuente [17]).

### 4.1.3. Caracterización del amortiguador

De la *figura 4.3*, podemos observar que cada configuración se compone principalmente por dos líneas rectas, cada una con diferente pendiente. Las dos rectas representan el comportamiento a bajas y altas velocidades que el amortiguador puede experimentar. El punto donde cambia de pendiente lo podemos asociar como el límite entre el comportamiento a baja y alta velocidad del amortiguador.

Si conocemos las coordenadas del punto en donde cambia de pendiente el desempeño del amortiguador, entonces solo basta con conocer un punto en la recta a bajas velocidades y otro para el comportamiento a altas velocidades, para poder calcular el valor de la pendiente.

En la tabla 4.2 mostramos los resultados de las pendientes para los diferentes ajustes en el amortiguador. Debemos recordar que el valor de esta pendiente representa del coeficiente C de la ecuación 4.1.

Bajas Velocidades		Altas Velocidades	
Código	Pendiente [kN*s/m]	Velocidad Limite [mm/s]	Pendiente [N*s/m]
C11 R11 0-4	52.788	8	2223
C11 R11 3-3pt5	11.77	27	1962
C11 R11 6-3	5.282	52	1831
C11 R11 12-2	2.354	78	882.9
C11 R11 18-1	3.678	8	689.1
C11 R11 24-0	3.678	8	567.5

Tabla 4.2 Discretización de las propiedades del amortiguador TTX25

## 4.2 Modelos matemáticos de 2do y 4to orden

En el análisis de frecuencia del sistema de suspensión, uno de los primeros pasos es entender el sistema físico, para ello, en esta sección estudiaremos el análisis en el modelo de suspensión de ¼ de vehículo, desarrollando los modelos de segundo y cuarto orden.

De acuerdo a [16], los autos de calle y de carrera son sistemas bastante complejos, ya que es difícil tener un modelo que caracterice el sistema con un grado aceptable de detalle.

### 4.2.1 Modelo masa-resorte-amortiguador de 2do Orden con desplazamiento vertical como entrada

La mayoría de los análisis comienzan con un modelo simple de masa suspendida (*figura 4.4*), el que se compone de un elemento elástico y otro amortiguado.

Este modelo tiene como entrada un desplazamiento vertical del camino. La fuerza del resorte y del amortiguador están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$F_{k_s} = K_s(x_r - x_m) \quad (4.2)$$

$$F_C = C(\dot{x}_r - \dot{x}_m) \quad (4.3)$$

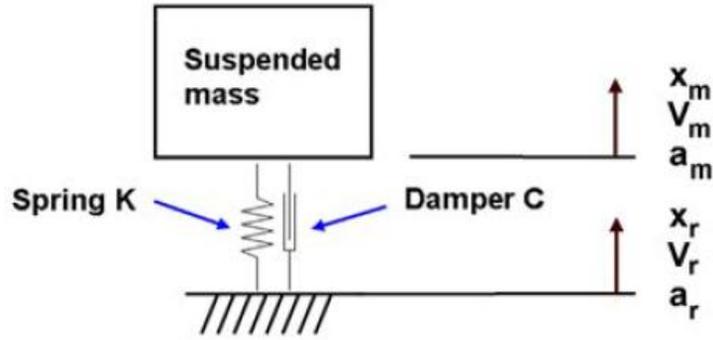


Figura 4. 4 Modelo de segundo orden (fuente [16]).

Donde  $K_s$  es la constante del resorte en N/m,  $x_r$  es el desplazamiento de entrada en metros,  $x_m$  el desplazamiento que sufre la masa suspendida en metros y  $C$  es la constante de amortiguamiento en Ns/m.

De la suma de fuerzas en la masa suspendida tenemos:

$$F_{W_s} = F_{k_s} + F_C \quad (4.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.2, 4.3 en 4.4 tenemos:

$$W_s \ddot{x}_m = K_s(x_r - x_m) + C(\dot{x}_r - \dot{x}_m) \quad (4.5)$$

Donde  $W_s$  es el peso de la masa suspendida de un cuarto del vehículo.

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y asumiendo condiciones iniciales nulas tenemos:

$$X_r(s)(C s + K_s) = X_m(s)(W_s s^2 + C s + K_s)$$

$$\frac{X_m(s)}{X_r(s)} = \frac{C s + K_s}{W_s s^2 + C s + K_s}$$

Normalizando la ecuación tenemos:

$$\frac{X_m(s)}{X_r(s)} = (1/W_s) \cdot \frac{C s + K_s}{s^2 + C/W_s s + K_s/W_s} \quad (4.6)$$

Siendo ésta la función de transferencia para el modelo de segundo orden que tiene como entrada un desplazamiento vertical del camino.

Todo análisis en un modelo de segundo orden, comprende el estudio de la frecuencia natural  $\omega_n$  y el factor de amortiguamiento  $\xi$  del sistema. Dichos parámetros se calculan de acuerdo a las ecuaciones:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s/W_s}{C}} \text{ [rad/s]} \quad (4.7)$$

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{K_s/W_s}} \quad (4.8)$$

La frecuencia natural es aquella en la cual el sistema entra en resonancia y el factor de amortiguamiento nos da información sobre el tipo de respuesta que tendrá el sistema. Cabe destacar que este modelo no incluye la relación de movimiento entre el centro del neumático y la compresión del resorte, es decir, no contempla el efecto que proporciona el IR (Installation Ratio). Si se desea incluirlo, se debe sustituir la constante del resorte por el Wheel Rate, es decir, sustituir  $K_s$  por  $K_w$ .

Los diferentes tipos de respuestas que el sistema puede desarrollar, los podemos agrupar de acuerdo al valor de factor de amortiguamiento, esto es:

- $\xi = 0$  Sistema no amortiguado
- $0 < \xi < 1$  Sistema subamortiguado
- $\xi = 1$  Críticamente amortiguado
- $\xi > 1$  Sobreamortiguado

Más adelante veremos la influencia del factor de amortiguamiento y por ende el desempeño del sistema.

#### 4.2.2 Modelo de segundo orden con fuerza como excitación

Este modelo es el que comúnmente se usa en el análisis del sistema de suspensión de un auto, a diferencia del modelo anterior, en éste el piso se mantiene estático, además que la entrada es una fuerza aplicada directamente en la masa suspendida.

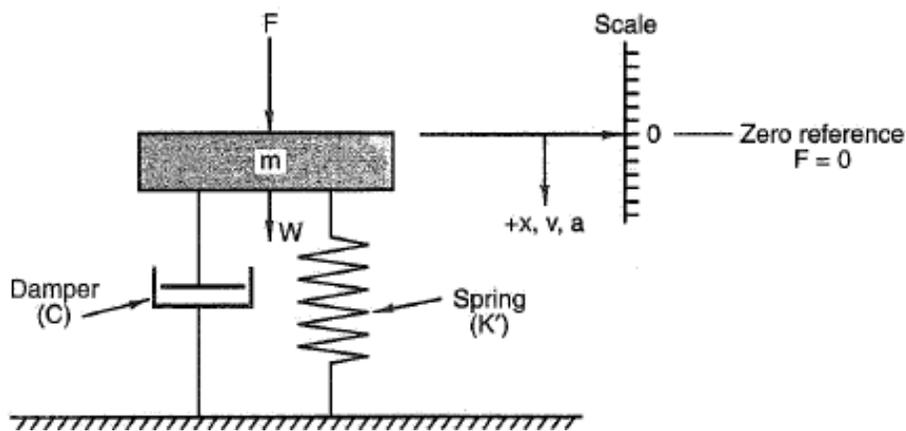


Figura 4.5 Modelo de 2do orden con una fuerza como entrada (fuente [4]).

La ecuación que describe la dinámica del sistema mostrado en la figura 4.5 es:

$$F_u = K x_m + C \dot{x}_m + W_s \ddot{x}_m \quad (4.9)$$

Donde  $F_u$  es la fuerza externa aplicada al sistema medida en newtons y  $x_m$  es el desplazamiento que sufre la masa suspendida.

Al aplicar la transformada de Laplace en la ecuación 4.9 tenemos:

$$F_u(s) = (K + Cs + W_S s^2) X_m(s) \quad (4.10)$$

Al normalizar y despejar, la función de transferencia queda como:

$$\frac{X_m(s)}{F_u(s)} = \frac{1/W_S}{s^2 + C/W_S s + K/W_S} \quad (4.11)$$

Donde podemos ver que el denominador de este modelo y el anterior es el mismo, es por ello que ambos sistemas tendrán los mismos polos. Sin embargo, los ceros y la ganancia son distintos. Este modelo es útil para saber el comportamiento de la suspensión cuando se genera transferencia de carga a un neumático, debido a una curva o a la aceleración del auto en línea recta.

#### 4.2.3 Modelo de 4to orden con desplazamiento vertical como entrada

El modelo de cuarto orden incluye la constante elástica del neumático, así como la masa no suspendida y la masa suspendida (ver figura 4.6).

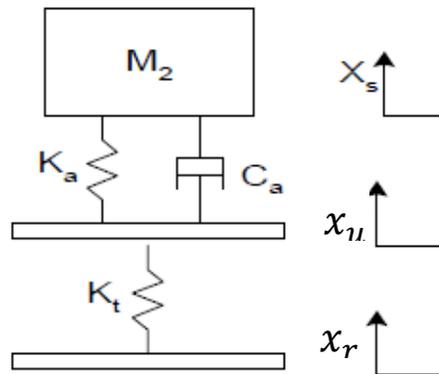


Figura 4.6 Modelo de 4to orden con desplazamiento como entrada..

Donde  $k_T$  es la constante elástica del neumático,  $x_u$  y  $x_s$  el desplazamiento de la masa no suspendida y la masa suspendida respectivamente. Por último,  $x_r$  representa el desplazamiento de entrada al sistema debido a una irregularidad en el camino.

En este caso la fuerza generada por la elasticidad del neumático está dada por:

$$F_{KT} = K_T(x_u - x_r) \quad (4.12)$$

Por otro lado tenemos que las fuerzas desarrolladas por el resorte y el amortiguador son:

$$F_k = K_S(x_s - x_u) \quad (4.13)$$

$$F_C = C(\dot{x}_s - \dot{x}_u) \quad (4.14)$$

Aplicando suma de fuerzas en la masa no suspendida de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la *figura 4.7*, tenemos:

$$-F_{KT} + F_{k_s} + F_C = F_{mu} \quad (4.15)$$

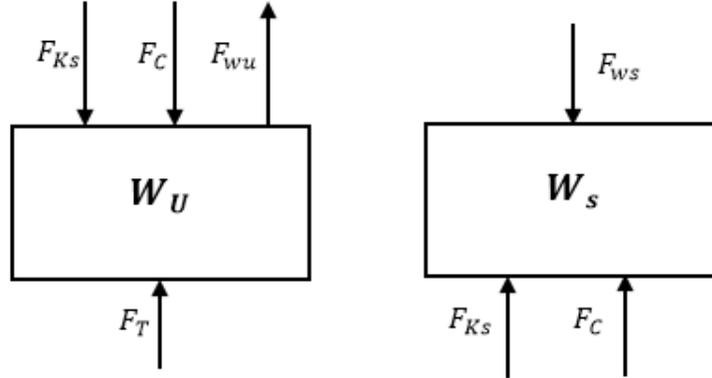


Figura 4. 7 Diagrama de cuerpo libre

Sustituyendo las ecuaciones 4.12, 4.13 y 4.14 en 4.15 resulta:

$$-K_T(x_u - x_r) + K_s(x_s - x_u) + C(\dot{x}_s - \dot{x}_u) = W_U\ddot{x}_u \quad (4.16)$$

Aplicando suma de fuerzas para la masa suspendida:

$$F_k + F_C + F_{ms} = 0 \quad (4.17)$$

Por lo que tenemos:

$$-K_s(x_s - x_u) - C(\dot{x}_s - \dot{x}_u) = W_S\ddot{x}_s \quad (4.18)$$

Si realizamos la sustitución:

$x_1 = x_u$ , Posición de la masa no suspendida.

$x_2 = \dot{x}_u$ , Velocidad del CG del neumático.

$x_3 = x_s$ , Posición de la masa suspendida.

$x_4 = \dot{x}_s$ , Velocidad de la masa suspendida.

$u = x_r$ , Velocidad de la masa suspendida.

De la representación de un sistema en sus variables de estado que describe [18], un sistema dinámico se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Donde:

- $n$  es el número de variables de estado en el sistema.
- $\mathbf{x}$  Vector de  $1 \times n$  que representa las variables de estado
- $\dot{\mathbf{x}}$  Derivada del vector de estado con respecto al tiempo de  $1 \times n$
- $\mathbf{y}$  Vector de  $1 \times p$  salidas.
- $\mathbf{u}$  Vector de entrada(s) o señales de control  $1 \times m$
- $\mathbf{A}$  Matriz de sistema de  $n \times n$
- $\mathbf{B}$  Matriz de entradas.  $n \times m$
- $\mathbf{C}$  Matriz de salidas de  $p \times n$
- $\mathbf{D}$  Matriz de pre-alimentación de  $p \times m$

Por lo que en nuestro caso particular tenemos:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_u = x_2 \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K_T + K_S}{W_U} x_1 - \frac{C}{W_U} x_2 + \frac{K_S}{W_U} x_3 + \frac{C}{W_U} x_4 + \frac{u}{W_U} \quad (4.21)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_s = x_4 \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_S}{W_S} x_1 + \frac{C}{W_S} x_2 - \frac{K_S}{W_S} x_3 - \frac{C}{W_S} x_4 \quad (4.23)$$

Y las salidas que deseamos tener serán:

$$y_1 = x_1 = x_u \text{ posición USM}$$

$$y_2 = x_3 = x_s \text{ posición chasis}$$

$$y_3 = -x_1 + x_3, \text{ compresión resorte}$$

$$y_4 = -x_2 + x_4, \text{ velocidad de compresión}$$

En forma matricial el sistema analizado queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_T + K_S)}{W_U} & -\frac{C}{W_U} & \frac{K_S}{W_U} & \frac{C}{W_U} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_S}{W_S} & \frac{C}{W_S} & -\frac{K_S}{W_S} & -\frac{C}{W_S} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_T/W_U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.24)$$

La matriz de funciones de transferencia está dada por la ecuación matricial 4.25.

$$G_{4to}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.25)$$

Donde:

$\mathbf{I}$  es la matriz identidad, donde cuya dimensión es igual al número de variables de estado  $n$ .

De acuerdo a [10], en el modelo de cuarto orden contamos con dos frecuencias de resonancia, llamadas frecuencia natural de la masa suspendida y frecuencia natural de la masa no suspendida. Las cuales describimos en la sección 3.3.2.

#### 4.2.4 Modelo de 4to orden con fuerza como excitación

En este modelo, asumimos que el suelo se mantiene estático y aplicamos una fuerza en la masa suspendida. Por lo que los diagramas de cuerpo libre quedan como se muestra en la *figura 4.8*.

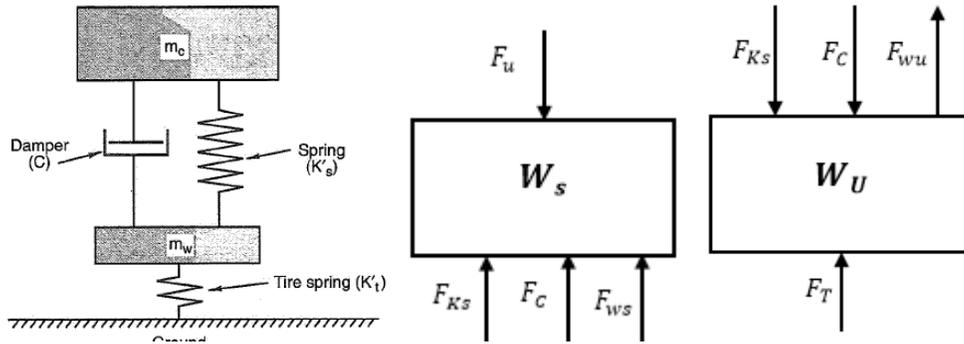


Figura 4. 8 Modelo de 4to orden con fuerza con entrada y diagramas de cuerpo libre (fuente [4])

La suma de fuerzas en la masa no suspendida es:

$$-K_T(x_u) + K_S(x_s - x_u) + C(\dot{x}_s - \dot{x}_u) = W_U\ddot{x}_u \quad (4.26)$$

Por otro lado, la suma de fuerzas en la masa suspendida es:

$$F_u = K_S(x_s - x_u) + C(\dot{x}_s - \dot{x}_u) + W_S\ddot{x}_s \quad (4.27)$$

Aplicando la siguiente sustitución por variables de estado:

$$x_1 = x_u, \quad x_2 = \dot{x}_u, \quad x_3 = x_s - x_u, \quad x_4 = \dot{x}_s, \quad u = F_u$$

El sistema en el espacio de estados queda como:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_u = x_2$$

$$-K_T x_1 + K_S x_3 + C(x_4 - x_2) = W_U \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_s - \dot{x}_u = x_4 - x_2$$

$$u = K_s x_3 + C(x_4 - x_2) + W_s \dot{x}_4$$

Al representarse de manera matricial resulta la ecuación 4.28.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_T/W_U & -C/W_U & K_S/W_U & C/W_U \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & C/W_S & -K_S/W_S & -C/W_S \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/W_S \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
(4.28)

En donde las salidas representan:

$y_1 = x_1$ , Deflexión del neumático

$y_2 = x_3$ , Compresión del amortiguador

$y_3 = x_1 + x_3 = x_s$ , Posición de la masa suspendida.

$y_4 = -x_2 + x_4 = \dot{x}_m - \dot{x}_s$ , Velocidad de compresión del resorte

### 4.3 Simulaciones

Para el desarrollo de esta sección nos apoyaremos de la herramienta Matlab. En donde se utilizan los modelos de segundo y cuarto orden, detallando en el desarrollo de los mismos. Así como los programas que nos ayudarán a entender el comportamiento de la suspensión.

A manera de ejemplo, analizaremos la respuesta de los diferentes modelos, usando los valores para el neumático delantero derecho (W1) de la *tabla 4.3* y usando la configuración C11 R11 3-3.5 del amortiguador TTX25.

Parámetro	Valor
Masa suspendida (Ws1) [Kg]	58.9860
Masa no suspendida (Wu1) [Kg]	13.5140
Constante de resorte (Ks) [kN/m]	43.782
Constante de amortiguador (C) [kNs/m]	1.962
Tire Rate KT [kN/m]	120.31

Tabla 4.3 parámetros para simulación de ¼ del vehículo, neumático delantero izquierdo

### 4.3.1 Respuesta de los modelos de 2do orden

Usando la ecuación 4.6 y los datos de la *tabla 4.3*. La función de transferencia del sistema es:

$$G(s)_{2do} = \frac{X_m(s)}{X_r(s)} = \frac{33.26 s + 742.2}{s^2 + 33.26 s + 742.2} \quad (4.29)$$

Por otro lado, para el modelo que tiene como entrada la fuerza normal, su función de transferencia está dado por:

$$G_F(s)_{2do} = \frac{X_m(s)}{F_u(s)} = \frac{0.01695}{s^2 + 33.26 s + 742.2} \quad (4.30)$$

Analizamos estas dos funciones de transferencia en el diagrama de Bode, mediante el gráfico de bode, las cuales se muestran en la *figura 4.9*. En ésta podemos observar que el modelo  $G(s)_{2do}$  muestra un pico de ganancia mayor a uno entre los 1 y 10 Hz, es decir, si el sistema presenta una entrada a esas frecuencias de oscilación, el movimiento resultante en la masa suspendida tendrá una magnitud mayor a la entrada. Por otro lado, el modelo de  $G_F(s)_{2do}$  nos indica que la relación entre la fuerza de entrada y el movimiento es del orden  $2.284 \times 10^{-5}$  [m/N], si obtenemos el inverso multiplicativo de este valor, tendremos como resultado 43.802 [N/mm], que es muy cercano al valor de la constante del resorte. Esto era de esperarse, ya que en estado permanente, estaríamos hablando de la relación entre la compresión del resorte y la fuerza aplicada.

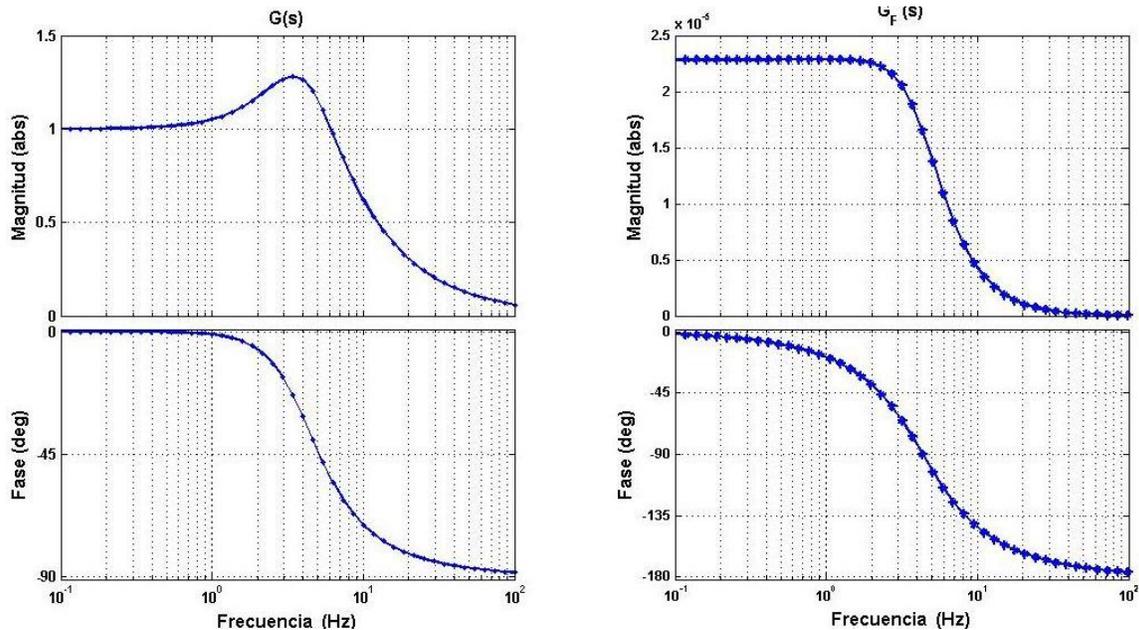


Figura 4. 9 Respuesta en frecuencia para ambos modelos de 2do orden, en esta versión del diagrama de Bode se presenta la magnitud en unidades decimales. El eje “y” representa la magnitud absoluta de la salida.

Para el modelo que tiene como entrada desplazamiento, la ganancia es de uno, debido a que la distancia que se mueva el piso deberá ser la distancia que se mueva la masa suspendida. Si deseamos que estos modelos sean más reales, debemos integrar la relación de movimiento que hay entre el piso y el centro del neumático, es decir, integrar el valor del IR (Installation Ratio). Este análisis se describe en el anexo A.4.5.

Por otro lado, de la *figura 4.9* podemos ver que el valor de la magnitud empieza a caer entre 2Hz y 10Hz, esto significa que, por ejemplo, en el caso de una entrada de desplazamiento a 10Hz, la masa suspendida se moverá aproximadamente la mitad. El mismo fenómeno se observa en el modelo que tiene a una fuerza como excitación.

En la *figura 4.10* observamos cómo se comportan los modelos a una entrada tipo escalón, que en el caso de  $G(s)_{2do}$  es una excitación de 0.01 metros y para  $G_F(s)_{2do}$  una fuerza de 1200N. El valor de un centímetro de es solo un ejemplo de la posible irregularidad que podría presentarse en el camino; sin embargo, la compresión máxima que puede soportar uno de nuestros amortiguadores es de 3 a 3.5 centímetros. El valor de 1200 N representa un valor de carga normal, que podría ser resultado de la transferencia de carga al girar por una curva.

Con ayuda de los comandos “*stepinfo (Gs)*” y “*damp (Gs)*” de Matlab, obtenemos las características del comportamiento de un sistema al aplicarle un escalón unitario, brindándonos parámetros importantes en la respuesta de un sistema de segundo orden. Dichos resultados los resumimos en la *tabla 4.4*.

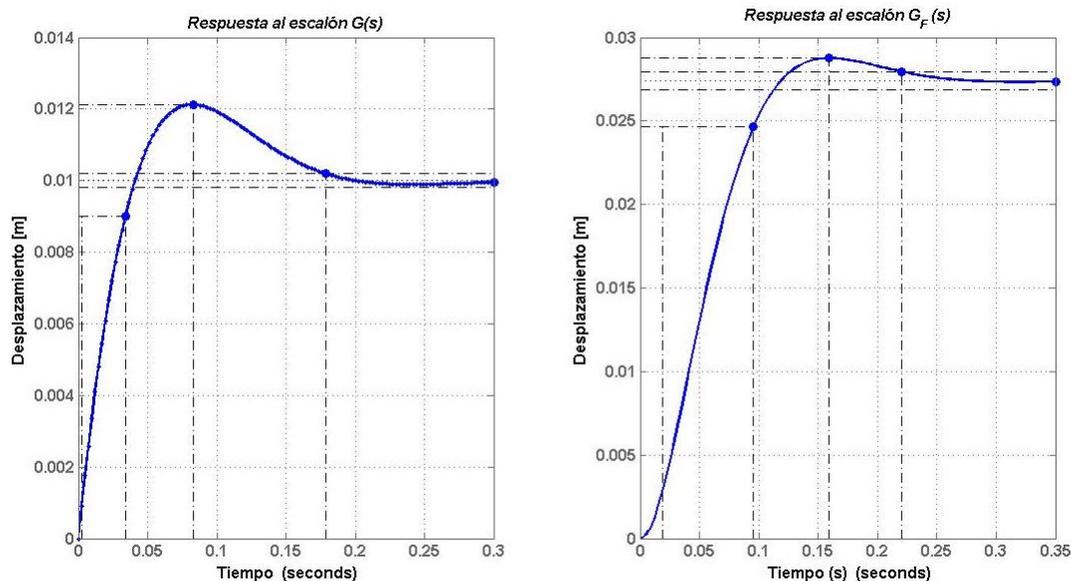


Figura 4. 10 Respuesta al escalón de ambos modelos de 2do orden.

De la tabla 4.4 podemos concluir que el sistema responde más rápido a una excitación de desplazamiento que a una fuerza, es por ello que el sobrepaso en modelo  $G(s)_{2do}$  es mayor. La diferencia de comportamiento entre los modelos se puede explicar de acuerdo a N. Nise [18],

quien nos dice que esto se debe en la mayoría de los casos al factor de amortiguamiento  $\xi$ ; sin embargo, en este caso ambos sistemas tienen el mismo valor. Es por ello que este cambio en el desempeño entre un modelo y otro se debe a la presencia de un cero en el modelo  $G(s)_{2do}$ .

Característica	$G(s)_{2do}$	$G_F(s)_{2do}$
Tiempo de Respuesta [seg]	0.0326	0.069
Tiempo de asentamiento [seg]	0.1787	0.2188
Sobrepaso [%]	24.42	8.876
Tiempo pico [seg]	0.0858	0.146
Factor de amortiguamiento [ $\xi$ ]	0.6104	0.6104
Frecuencia Natural [Hz]	4.336	4.336
Polos	$-16.63 \pm 21.57 i$	$-16.63 \pm 21.57 i$
Ceros	-22.31	No tiene

Tabla 4.4 Resultados de la función con entrada de desplazamiento  $G(s)_{2do}$  y fuerza  $G_F(s)_{2do}$

De la tabla 4.4 podemos concluir que el sistema responde más rápido a una excitación de desplazamiento que a una fuerza, es por ello que el sobrepaso en modelo  $G(s)_{2do}$  es mayor. La diferencia de comportamiento entre los modelos se puede explicar de acuerdo a N. Nise [18], quien nos dice que esto se debe en la mayoría de los casos al factor de amortiguamiento  $\xi$ ; sin embargo, en este caso ambos sistemas tienen el mismo valor. Es por ello que este cambio en el desempeño entre un modelo y otro se debe a la presencia de un cero en el modelo  $G(s)_{2do}$ .

Recordemos que un cero es aquel valor que al ser sustituido en la ecuación del numerador de la función de transferencia, hace que éste sea cero.

#### 4.3.2 Modelos de 4to orden

A hora bien, analizando el sistema de cuarto orden con los datos de la *tabla 4.3*. Las matrices que definen la dinámica del sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12143 & -145.18 & 3239.7 & 145.18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 33.262 & -742.24 & -33.262 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8902.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0; 0; 0; 0]^T$$

Para el modelo que tiene como entrada una fuerza, tenemos:

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8902.8 & -145.18 & 3239.7 & 145.18 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 33.262 & -742.24 & -33.262 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.017 \end{bmatrix}, \quad C_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_F = [0; 0; 0]^T$$

Con el fin de obtener la respuesta en frecuencia, obtuvimos las funciones de transferencia usando del comando “*ss2tf(A, B, C, D)*”, con el cual se calcula una matriz de funciones de

transferencia, en el primer caso tenemos cuatro salidas, por lo que tendremos cuatro funciones de transferencia, las cuales surgen de la ecuación 4.31 teniendo como resultado:

$$G_{x1}(s) = \frac{X_u(s)}{X_r(s)} = \frac{8903 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.33)$$

$$G_{x3}(s) = \frac{X_s(s)}{X_r(s)} = \frac{2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.34)$$

$$G_3(s) = \frac{X_s(s) - X_u(s)}{X_r(s)} = \frac{-8903 s^2 + 4.473 \times 10^{-11} s - 6.721 \times 10^{-13}}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.35)$$

$$G_4(s) = \frac{V_m(s) - V_s(s)}{X_r(s)} = \frac{-8903 s^2 - 3.096 \times 10^{-13} s^2 - 7.582 \times 10^{-10} s + 3.661 \times 10^{-16}}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.36)$$

Al igual que con el modelo de segundo orden, obtenemos el gráfico de bode para  $G_{x1}(s)$  y  $G_{x3}(s)$ , siendo éstas las salidas de la posición del neumático y la masas suspendida respectivamente. En la *figura 4.11* podemos ver su desempeño.

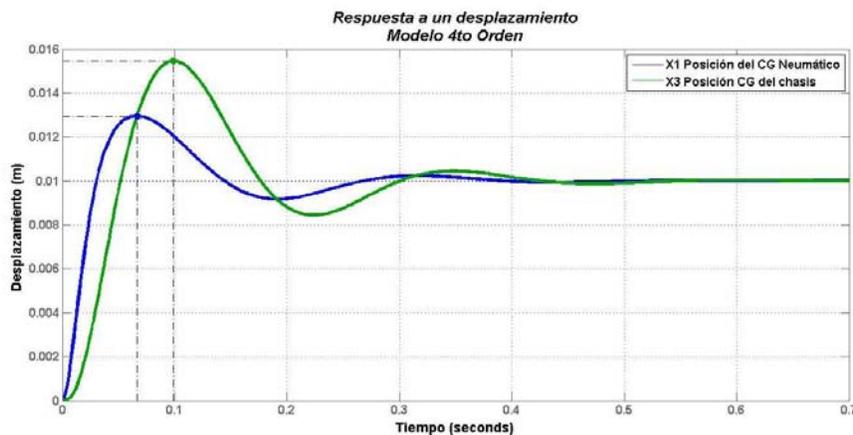


Figura 4. 11 Respuesta de modelo de 4to orden a una entrada de 10mm

En la figura anterior, podemos notar la respuesta para la altura del chasis y de la masa no suspendida, dado que la entrada es un escalón de 0.01m, ambos sistemas llegarán a este valor debido a que ambos sistemas de referencia se desplazan esta distancia; sin embargo, podemos ver que la respuesta del chasis (masa suspendida) tiene un sobrepaso mayor que la posición del neumático y si comparamos este resultado con el modelo de segundo orden (ver *figura 4.10*), este último tiene un pico menor al modelo de cuarto orden, cuyo tiempo de asentamiento es mucho menor. Esto se debe principalmente a las fluctuaciones debidas a la masa no suspendida, ya que como vemos en este modelo la frecuencia natural suele ser mayor. En la *tabla 4.5*, observamos las características de las respuestas del modelo de cuarto orden usando los comandos “*stepinfo (Gs)*” y “*damp (Gs)*”, para las funciones de transferencia  $G(s)_{x1}$  y  $G(s)_{x3}$ .

Característica	$G(s)_{x1}$	$G_F(s)_{x3}$
Tiempo de Respuesta [seg]	0.0212	0.0324
Tiempo de asentamiento [seg]	0.339	0.396
Sobrepaso [%]	29.447	54.57
Tiempo pico [seg]	1.294	0.098
Factor de amortiguamiento $[\xi]$	0.836	0.365
Frecuencia Natural [Hz]	15.0832	4.31
Polos	$-79.22 \pm 52 i$	$-9.99 \pm 25.21 i$
Ceros	0.836	0.365

Tabla 4.5 Resultados de desempeño en el modelo de 4to orden

El diagrama de bode para las funciones de transferencia, las podemos ver en la *figura 4.12*. En ellas vemos que a comparación con el modelo de segundo orden, el modelo de cuarto orden tiene un pico de ganancia mayor, llegando a ser un poco mayor a dos.

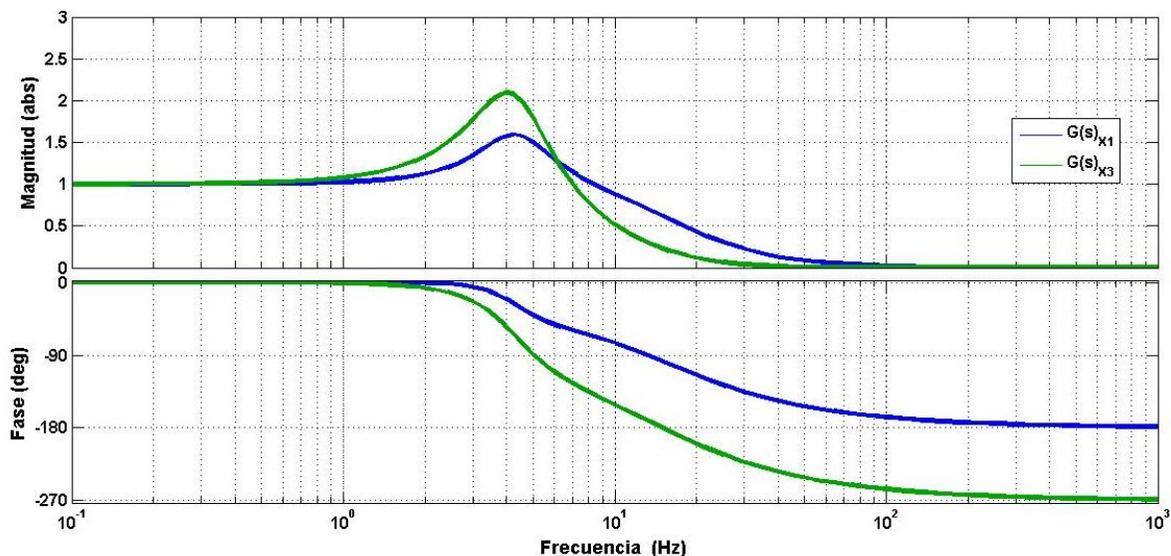


Figura 4.12 Diagrama de Bode para modelo 4to orden con desplazamiento como entrada

Para la salida  $y_4$ , que nos da información acerca de la velocidad a la cual el amortiguador está trabajando, estos datos nos permitirán desarrollar posteriormente una estrategia para la optimización del mismo.

La *figura 4.13* nos muestra cómo el amortiguador va desde ciertos valores de compresión hasta que se estabiliza en cero, eso es debido a que se simula que el piso sube un escalón de 0.01 metros y en el momento en el que el sistema se estabiliza la diferencia entre el piso y la masa suspendida es nula.

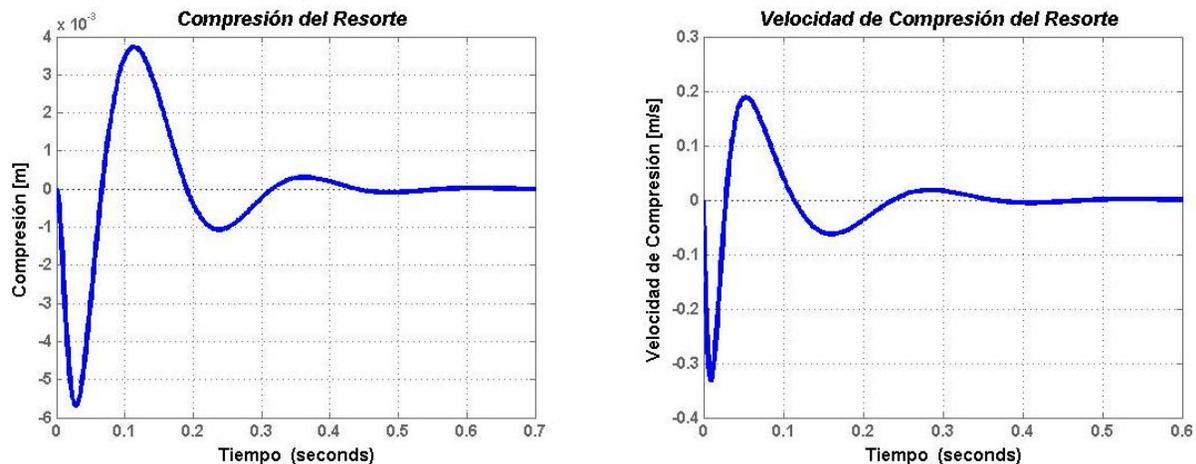


Figura 4. 13 Compresión y velocidad de compresión en el resorte

Para el modelo de excitación por fuerza  $G_F(s)$ , usando la ecuación 4.32, las funciones de transferencia son:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{X_u(s)}{F(s)} = \frac{2.461 s + 54.92}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.37)$$

$$G_{F_{x3}}(s) = \frac{X_m(s)}{F(s)} = \frac{0.01695 s^2 - 7.83 \times 10^{-16} s + 150.9}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.38)$$

$$G_{F_3}(s) = \frac{X_m(s) - X_s(s)}{F(s)} = \frac{0.01695 s^2 + 2.461 s + 205.9}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.39)$$

$$G_{F_4}(s) = \frac{V_m(s) - V_s(s)}{F(s)} = \frac{0.01695 s^3 + 150.9 s}{s^4 + 178.4 s^3 + 1.288 \times 10^4 s^2 + 2.961 \times 10^5 s + 6.608 \times 10^6} \quad (4.40)$$

Si estas funciones las comparamos con las funciones de transferencia del modelo de desplazamiento, notamos que el denominador es el mismo, por lo que las frecuencias naturales ( $\omega_n$ ), los polos y el factor de amortiguamiento serán los mismos. En conclusión, la diferencia entre el desempeño de cada sistema se debe a la ubicación de los ceros.

Ahora bien, si simulamos una entrada tipo escalón igual a 1200N en las ecuaciones 4.37 y 4.38, obtendremos la respuesta mostrada en la *figura 4.14*. En ésta podemos ver que el neumático se comprime aproximadamente 10mm y el resorte 28mm, por lo que el chasis se mueve 38mm de su posición original.

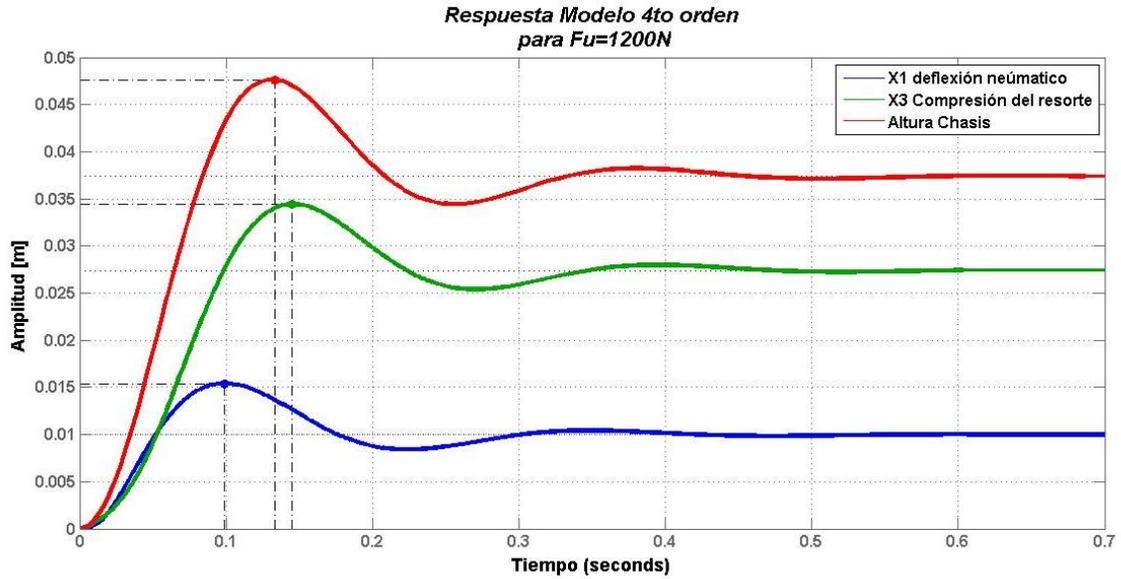


Figura 4.14

En la respuesta al escalón, el porcentaje de sobre paso para la deflexión del neumático, compresión del resorte y altura del chasis, son 54.54%, 25.61% y 27.44% respectivamente. Teniendo las tres respuestas un tiempo de asentamiento de casi 0.7 segundos, siendo casi el doble que en el modelo de segundo orden.

Si consideramos las condiciones antes citadas, podemos graficar la velocidad de compresión del amortiguador (ver figura 4.15), en donde notamos que llega a ser un poco mayor a 0.4m/s y asentándose en 0.

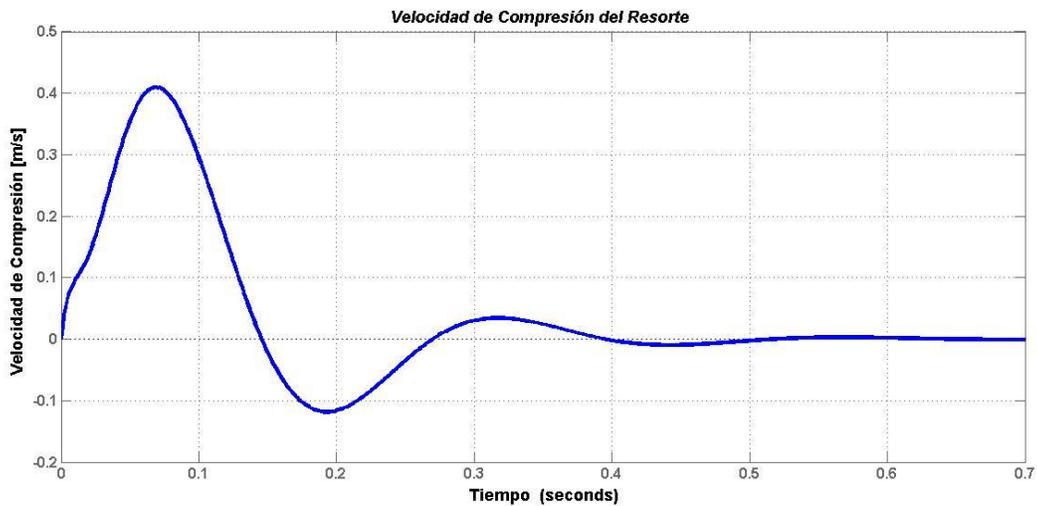


Figura 4.15 Velocidad de compresión

Para el comportamiento en frecuencia de la señal donde usamos el gráfico de bode de la *figura 4.16*, notamos que cada una de las señales tiene una ganancia diferente, debida a que el neumático, la compresión del resorte y del chasis recorren una distancia diferente. En el gráfico notamos que entre 2 y 4 Hz tenemos un pico de ganancia, esto se debe a que el sistema se encuentra cerca de una de sus frecuencias naturales, en este caso y al igual que el modelo de desplazamiento, la frecuencia natural de la masa no suspendida es 15.08 Hz y de la masa suspendida es de 4.31 Hz.

El modelo muestra que después de 3Hz, se tiene un pico y después la ganancia cae rápidamente hasta ser cero en aproximadamente 13Hz. Por lo que si una fuerza de entrada se presentase a una frecuencia mayor de 13hz la masa suspendida no se movería o lo haría de una forma muy pequeña.

Los resultados anteriores se consideran un buen ejemplo de la información que se puede obtener de los sistemas, para un caso particular en la constante del amortiguador. En la siguiente sección veremos cuál sería una configuración apropiada y qué herramientas usar para lograrlo.

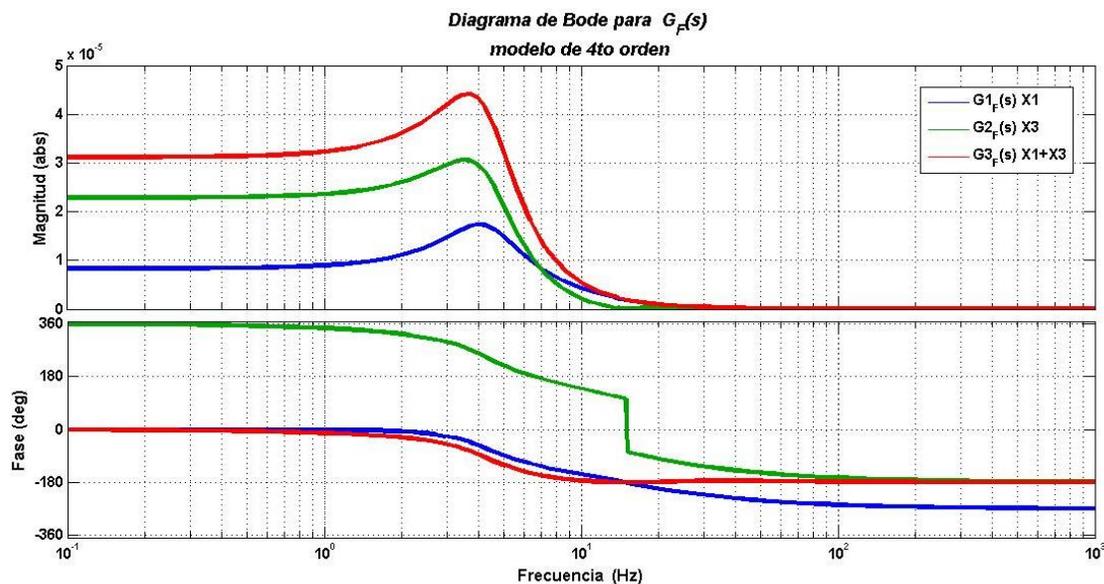


Figura 4. 16 Respuesta en frecuencia del modelo de 4to orden

## 4.4 Optimización

Para entender mejor esta sección, definiremos el concepto de transmisibilidad, ya que esta es una herramienta que nos permite tomar decisiones en el ajuste del sistema de suspensión. Es importante destacar que no existe un ajuste estandarizado, debido a que en cada carrera las condiciones de piso y aceleración son totalmente diferentes; sin embargo, los métodos que definiremos son los que usualmente se usan en Motorsports.

#### 4.4.1. Transmisibilidad

Mientras el auto está en movimiento, es bien sabido que si un obstáculo (bump) entra al sistema de suspensión a una velocidad muy pequeña, el auto (masa suspendida) se moverá verticalmente casi tanto como el neumático. Si el mismo obstáculo entra a una velocidad mucho más rápida, la carrocería no se moverá mucho. El tamaño del obstáculo fue el mismo en ambos casos; sin embargo, los movimientos diferentes. La causa de esto se debe a que la respuesta del sistema es gobernado por la frecuencia y amplitud de la entrada. Una entrada más rápida incrementa la frecuencia de la perturbación al sistema y por ende, la respuesta del sistema. Para cuantificarlo usaremos el concepto de transmisibilidad [19].

La transmisibilidad (TR) es la razón entre la amplitud de la salida y la entrada.

$$TR = \frac{\textit{Amplitud de salida}}{\textit{Amplitud de entrada}} \quad (4.41)$$

Con la expresión anterior es posible calcular la TR mediante la masa, la constante del resorte y la constante de amortiguador.

En este caso la entrada es un desplazamiento en el neumático causado por la velocidad a la cual se atraviesa por dicho obstáculo. Cuando el neumático completa un ciclo al subir y bajar debido a dicha perturbación, la mitad del tiempo que toma hacer dicho ciclo, corresponde a la frecuencia de la perturbación. Un ejemplo de cómo se comporta el sistema a diferentes frecuencias se muestra en el gráfico de bode cuando la función de transferencia nos relaciona el movimiento de la masa suspendida (salida) con la magnitud del desplazamiento de entrada.

En el análisis desarrollado en la sección anterior, las funciones que nos proveen esta información son  $G(s)_{2do}$  y  $G_{x3}(s)$ , para los modelos de segundo y cuarto orden respectivamente. En la *figura 4.17* tenemos el gráfico de transmisibilidad, para una constante de amortiguamiento  $C=1.962$ [kNs/m]. Observamos que el modelo de cuarto orden presenta un pico que abarca desde 2Hz hasta 7Hz, teniendo su valor máximo cerca de los 4Hz, donde el valor de transmisibilidad llega a ser un poco mayor de 2, por lo que la salida (desplazamiento en la masa suspendida) será el doble de la entrada.

Cómo se mencionó anteriormente, el valor de frecuencia natural del sistema de cuarto orden es de 4.31Hz, que es el valor de resonancia y en ese instante se presenta el pico.

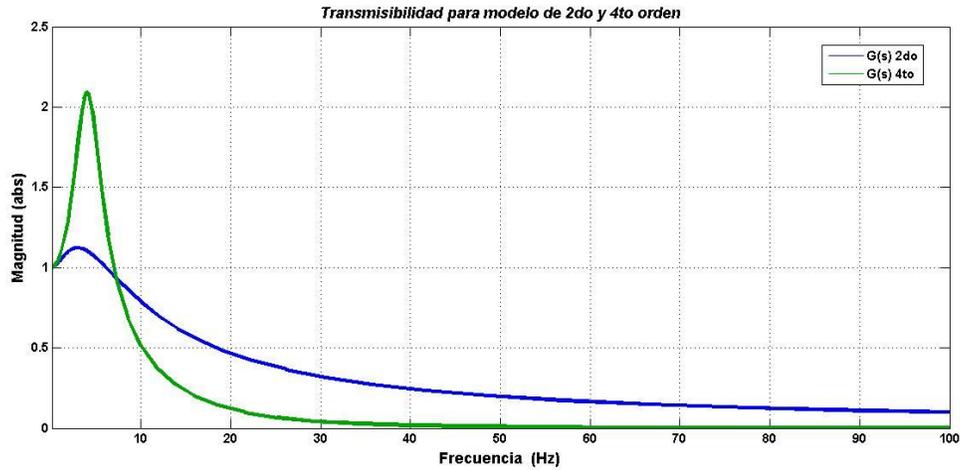


Figura 4. 17 Transmisibilidad en esta técnica usualmente se usa el eje "x" en unidades lineales y logarítmicas.

Por otro lado, para valores mayores a 7Hz la transmisibilidad es menor a 1 en ambos modelos, esto significa que a valores mayores a 7Hz el movimiento en el auto es reducido y las fluctuaciones en el camino son absorbidas por el sistema de suspensión, lo que produce que el conductor sienta un manejo suave.

Con base en lo anterior, ahora queda claro lo que es transmisibilidad y cómo emplearlo para buscar un valor en la constante del amortiguador. El primer paso es examinar la transmisibilidad para diferentes valores de factor de amortiguamiento ( $\xi$ ); sin embargo, en nuestro caso usaremos los valores de la constante ( $C$ ) que el amortiguador TTX25 provee. En la figura 4.18, podemos observar la respuesta del sistema de segundo orden con los diferentes valores de  $C$ . Para la configuración de alta velocidad con la que cuenta el amortiguador TTX25 (vea la tabla 4.2).

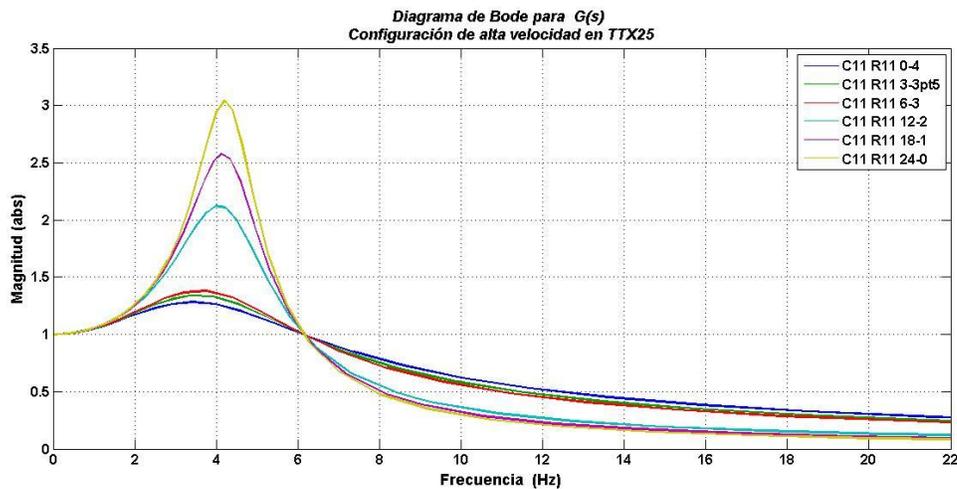


Figura 4. 18

Los valores del factor de amortiguamiento para estas configuraciones del amortiguador se resumen en la *tabla 4.5*.

Altas Velocidades	
Código	$\xi$
C11 R11 0-4	0.692
C11 R11 3-3pt5	0.61
C11 R11 6-3	0.57
C11 R11 12-2	0.275
C11 R11 18-1	0.214
C11 R11 24-0	0.177

Tabla 4.5 Factores de amortiguamiento para las diferentes configuraciones del amortiguador

Con el fin de maximizar el área de tracción, se requiere la menor transmisibilidad posible, de no ser así, la masa suspendida estará rebotando debido a las fuerzas que se acumulan en los resortes, lo que propiciará una reducción en el área de contacto. En la *figura 4.18*, notamos un punto de intersección, el cual se da a  $\sqrt{2} \omega_n$  [Hz], en donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema.

Si a bajas frecuencias de entrada aumentamos el valor de  $\xi$ , entonces reducimos al máximo la transmisibilidad, lo que es bueno, ya que el neumático no perderá tracción. Esto hace que sea deseable un valor alto del factor de amortiguamiento para bajas frecuencias. Por otro lado, después del punto de intersección, los factores de amortiguamiento bajos resultan con una menor transmisibilidad, atenuando el movimiento en el chasis. Por esta razón, es deseable un factor de amortiguamiento bajo para altas frecuencias en la entrada. Ya que bajas/altas frecuencias generalmente corresponden a bajas/altas velocidades en el amortiguador, podemos concluir entonces que deseamos un valor alto en la constante de amortiguamiento ( $C$ ) a bajas velocidades y un valor bajo en  $C$  para altas velocidades en el amortiguador.

Para ver cómo el factor de amortiguamiento afecta al modelo de 4to orden, en la *figura 4.19* notamos que a comparación con el modelo de segundo orden, éste presenta dos puntos de intersección, los cuales corresponden a la frecuencia natural de la masa suspendida y de la masa no suspendida. En este modelo también podemos ver que a bajas frecuencias es deseable un valor grande del factor de amortiguamiento y a altas frecuencias valores pequeños de  $\xi$ .

La *tabla 4.6* muestra el factor de amortiguamiento del sistema de cuarto orden para diferentes configuraciones del amortiguador, usando el comando “*damp (Gs)*” de Matlab.

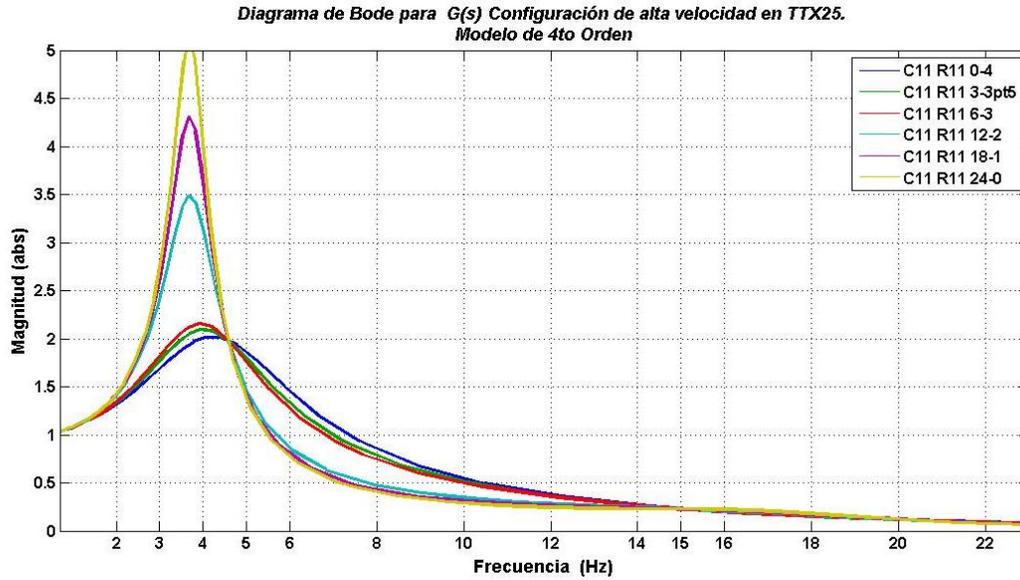


Figura 4. 19 Transmisibilidad del modelo de 4to orden

Altas Velocidades Modelo de 4to orden	
Código	$\xi$
C11 R11 0-4	0.406
C11 R11 3-3pt5	0.368
C11 R11 6-3	0.346
C11 R11 12-2	0.166
C11 R11 18-1	0.129
C11 R11 24-0	0.106

Tabla 4.6 Factores de amortiguamiento para la figura 4.19

#### 4.4.2 Ajuste de amortiguadores

Ahora ya sabemos cómo queremos que sea el comportamiento del amortiguador a altas y bajas velocidades, pero si recordamos, el sistema se mueve tanto a compresión como extensión, para ello veremos cómo realizar el ajuste de acuerdo a [19].

Para lograrlo, el primer paso es crear un comportamiento lineal entre la velocidad del amortiguador y la fuerza que éste desarrolla. Para calcular ésta pendiente inicial, necesitamos dar el valor del factor de amortiguamiento deseado, la frecuencia natural y la masa suspendida, tal y como podemos ver en la figura 4.20. En dicha figura observamos que la pendiente para compresión y extensión tienen la misma magnitud y signos opuestos.

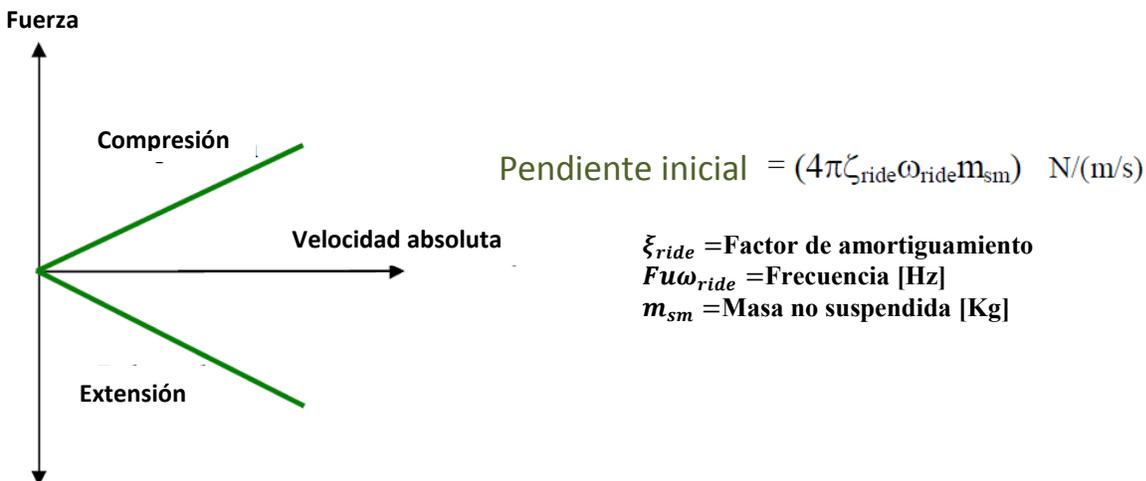


Figura 4. 20 Selección de pendiente inicial en el amortiguador para un valor de  $\xi$  deseado (fuente [19]).

De acuerdo a [19] es mejor tener un factor de amortiguamiento menor a compresión y mayor a extensión en relación al valor deseado. Se hace esto, para que cuando la suspensión sea comprimida, la energía se acumule en los resortes y durante la extensión sea liberada, de esta forma se logre evitar resonancia en el sistema. Ya que el fin del amortiguador es absorber o disipar energía, al disminuir la constante de amortiguamiento durante la compresión, la energía se almacenará en el resorte en lugar del amortiguador. Por otro lado, al tener mayor constante de amortiguamiento durante la extensión, la energía acumulada en el resorte es liberada, evitando resonancia.

En la *figura 4.21*, vemos un ejemplo al cambiar la pendiente de la curva inicial (*figura 4.20*), modificándola a  $2/3$  para compresión y  $3/2$  a extensión, de su valor inicial.

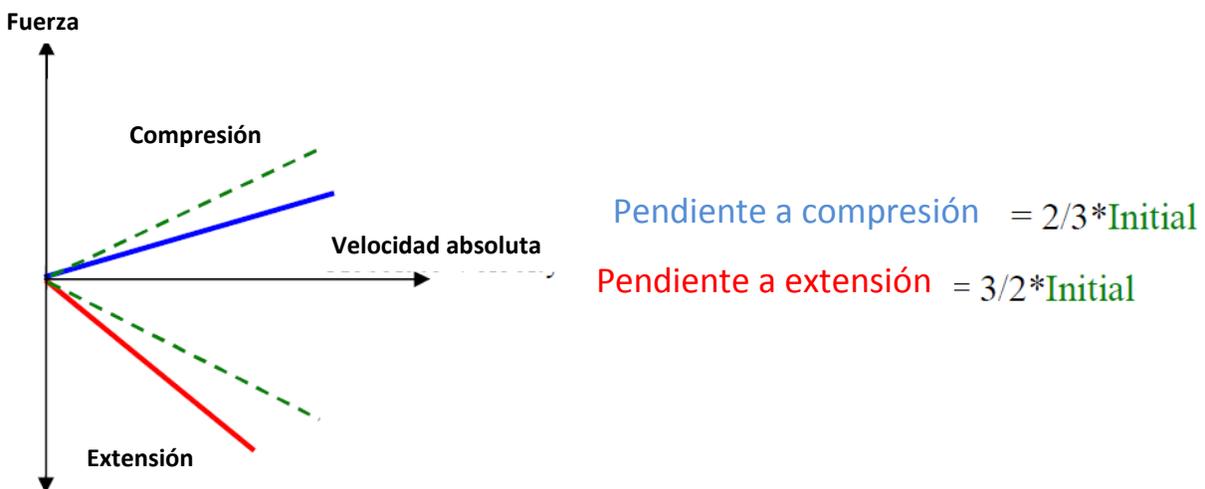


Figura 4. 21 Ajuste de pendiente (fuente [19]).

Esta nueva curva nos ayuda con el comportamiento a compresión y extensión del sistema; sin embargo, no cumple con los requerimientos de desempeño a altas y bajas velocidades

encontrados en el análisis de transmisibilidad. De acuerdo a lo concluido en la sección anterior, requerimos de un menor amortiguamiento a altas velocidades, por ello debemos seleccionar la velocidad a la cual se hará el cambio de pendiente y saber el factor de amortiguamiento que se desea a altas velocidades. En la *figura 4.22* se muestra un ejemplo de cómo quedaría la curva final.

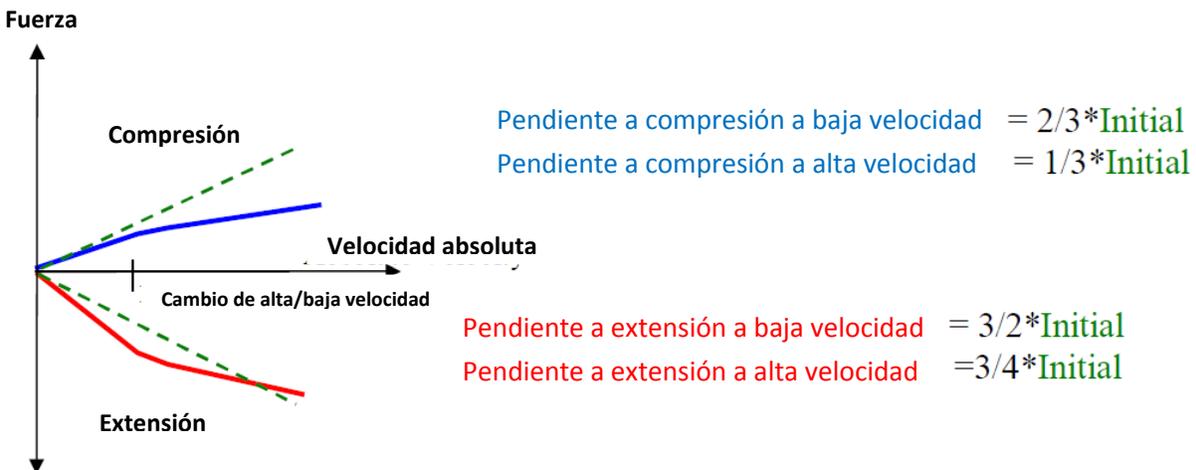


Figura 4. 22 Ajuste de pendiente para altas velocidades (fuente [19]).

Este es el camino teórico para el ajuste de los amortiguadores, basado en el estudio de frecuencia y transmisibilidad. En el artículo [19] se advierte que un valor ideal en el factor de amortiguamiento inicial es de 0.7 para bajas velocidades y de 0.2 para altas velocidades.

De acuerdo con los análisis en el amortiguador TTX25, un valor muy cercano es  $\xi = 0.692$ , el cual se logra con el ajuste C11 R11 0-4 para baja velocidad. Para altas velocidades el ajuste C11 R11 18.1 provee  $\xi = 0.214$  (véase tabla 4.2).

En los *anexos A4.1 al A.4.5*, encontraremos los diagramas de bode para todos los modelos. En el *anexo A.4.6* tenemos los resultados en transmisibilidad del modelo de segundo orden, cambiando el resorte por su valor de ride rate correspondiente, esto con el fin de obtener el efecto que tiene la constante elástica del neumático y el installation ratio en el sistema. En el *anexo A.4.7* se hace un análisis de transmisibilidad para el modelo de cuarto orden, cambiando la constante del resorte con su respectivo valor de Wheel Rate, lo que incluye el efecto de installation ratio.

## 4.5 Resumen

Como logramos comprobar para los modelos de 2do y 4to orden, el modelo que tiene un desplazamiento como entrada y el de fuerza, comparten el mismo denominador en sus funciones de transferencia, por lo que sus polos, frecuencia natural y factor de amortiguamiento son los mismos. Por otro lado, gracias al análisis de transmisibilidad se definió las características que el amortiguador debe tener para garantizar máxima área de contacto, lo que produce una mayor tracción.



## 5. Análisis Dinámico en Adams/Car

Hasta ahora ya sabemos la cantidad de rigidez necesaria en el sistema de suspensión que evita grandes trasferencias de carga, además de los valores a los cuales es necesario ajustar los amortiguadores, todo con el fin de optimizar la dinámica del neumático. El siguiente paso es simular el sistema de suspensión con el objetivo de hallar la respuesta que tendrá en diferentes situaciones. Al usar Adams/Car como herramienta geométrica en el capítulo 2, obtuvimos las relaciones de movimiento entre el neumático y el amortiguador. En este capítulo ocuparemos dichas reacciones cómo herramienta de análisis dinámico, calculando las fuerzas en cada uno de los nodos y cuantificar el desempeño del auto.

Para conocer un poco más sobre el software, debemos mencionar que Adams/Car trabaja mediante tres niveles de archivos:

- **Template:** En él se definen y editan la tipología de los subsistemas (tipos de juntas, elementos de fuerza, elementos rígidos y/o flexibles, etc.), quienes transmiten información de un cuerpo a otro. Como ejemplo podemos citar los brazos de la suspensión delantera/trasera, los neumáticos, los frenos, el tren motriz y las barras de torsión.
- **Subsystem:** Es un modelo mecánico que obtiene su información de un template, en él se pueden editar la mayoría de sus características; sin embargo, no se pueden definir nuevos elementos y tipos de uniones. Un ejemplo puede ser el subsistema de suspensión delantera, en el cual puedes editar los nodos de una horquilla, pero no cambiar la horquilla o eliminarla.
- **Assembly:** Es un conjunto de subsistemas en un solo modelo combinado que puede ser el auto completo o un sistema de suspensión.

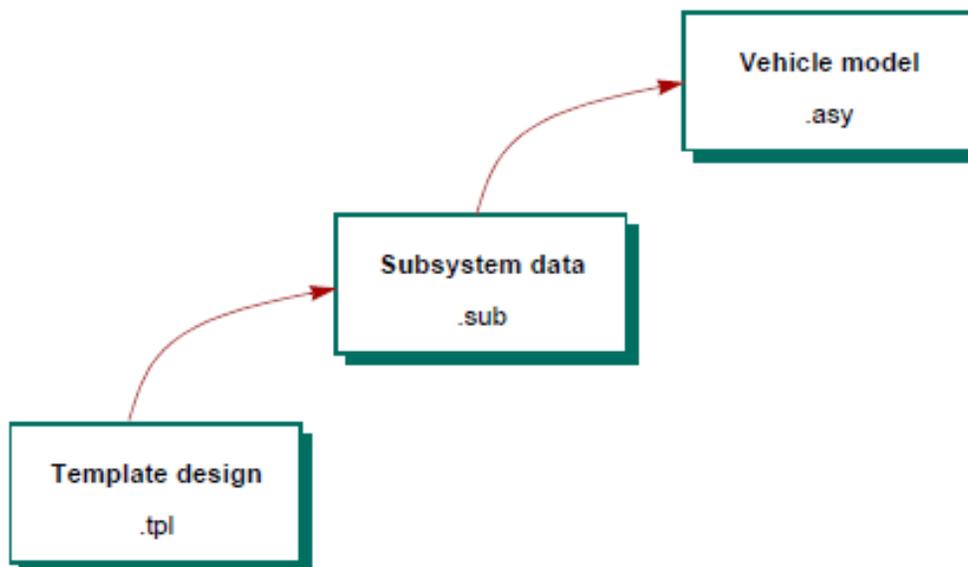


Figura 5. 1 Composición de niveles de ensamblaje en Adams/Car (fuente [15]).

## 5.1 Caracterización del vehículo

Para usar el software de manera correcta, lo primero que se requiere es caracterizar los parámetros que definen al sistema de suspensión y el tren motriz. En los capítulos anteriores hemos definido las características dinámicas de la suspensión, en esta sección los introduciremos en el software.

En Adams/Car usamos el database 2012 desarrollado especialmente para equipos de Formula SAE. En la referencia [20] se encuentra un archivo de texto que muestra cómo instalar el database además de información muy útil. Cabe destacar que MSC software patrocina a equipos FSAE y en nuestro caso lo ha hecho desde la temporada 2013.

### 5.1.1 Hardpoints

Los Hardpoints son los puntos dentro de la interfaz de Adams que sirven para definir cuerpos y los elementos de fuerza, por ejemplo, para definir un brazo de suspensión es necesario tener tres puntos, dos que van al chasis y el otro que va al neumático.

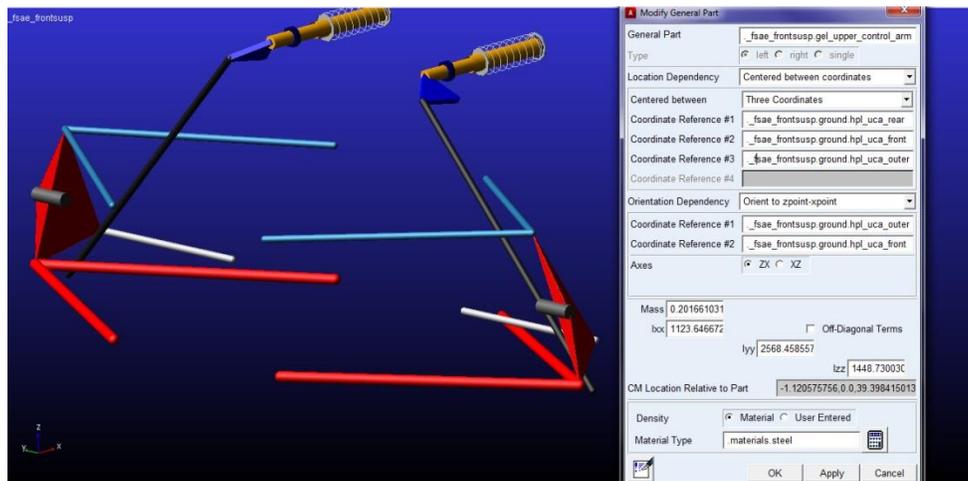


Figura 5. 2 Sistema de suspensión en Adams/Car

En la figura 5.2, podemos ver cómo se define un brazo de suspensión, para ello se requieren las tres coordenadas de referencia antes mencionadas, las propiedades de masa y el material o densidad que lo componen. Los puntos que definen al sistema de suspensión del año 2014 los podemos ver en el anexo A.3.4, siendo éstos los valores que el diseñador edita para poder llevar las propiedades geométricas establecidas de los análisis anteriores.

### 5.1.2 Resortes y amortiguadores.

Dentro de la gran variedad de parámetros editables en Adams/Car tenemos a los resortes y amortiguadores. Estos elementos cambian su constante al dar clic derecho sobre ellos y seleccionar la opción *editar*, haciendo esto se despliega un menú como el de la figura 5.3. Para editar el comportamiento, damos clic en el ícono con forma de gráfico. Este nos mostrará la curva que define el desempeño del resorte o el amortiguador.

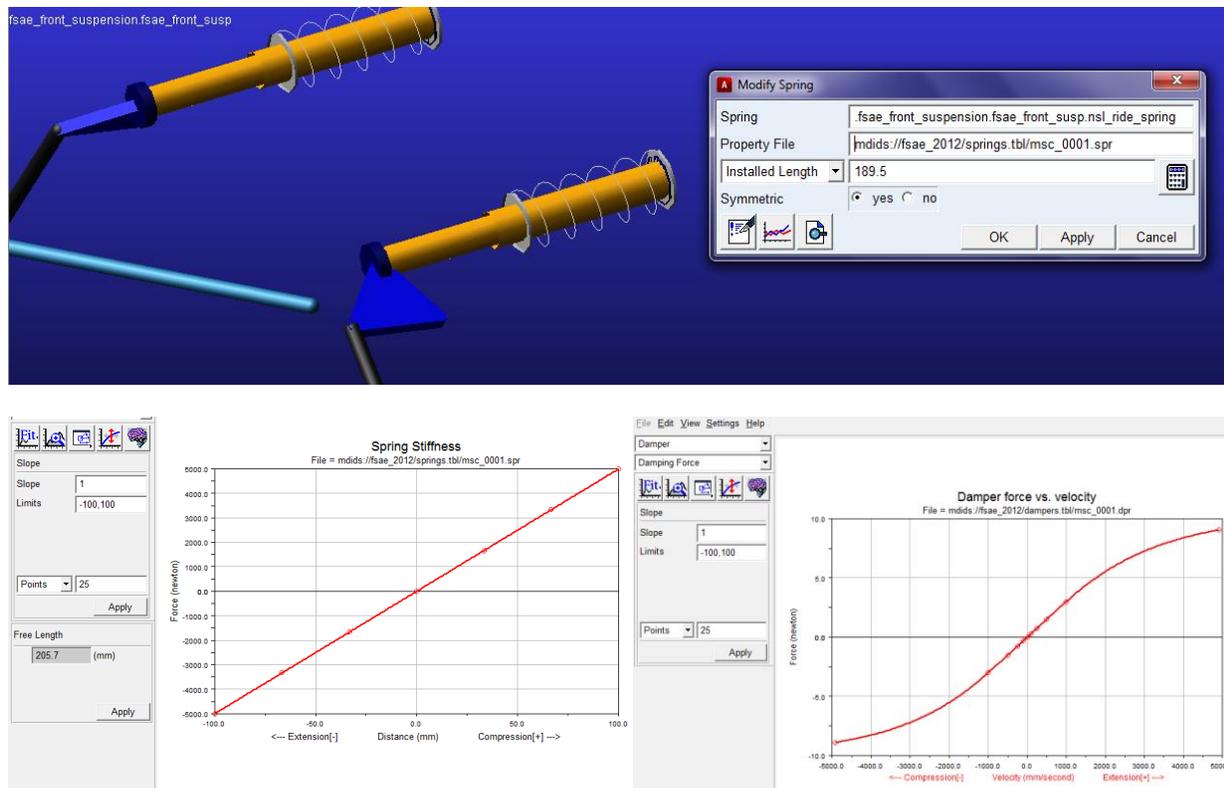


Figura 5. 3 Curvas de fuerza en el resorte y amortiguador.

En *figura 5.3*, tenemos la ventana donde podemos definir la pendiente del resorte en [N/mm], para el caso del amortiguador, vemos un comportamiento no lineal, para poder editarlo, accedemos a la tabla que lo define en la opción *edit*, en esta tabla insertamos la mayor cantidad de puntos con el fin de reproducir de mejor forma las curvas del TTX25 (ver *figura 4.3*).

En el caso del prototipo 2013, se desarrollaron 5 archivos para los diferentes resortes que contábamos, dichos resortes son:

Ks [Lb/in]	150	250	350	450	600
Ks [N/mm]	26.269	43.378	61.294	78.807	105.076
Nombre	UNAM_150.spr	UNAM_250.spr	UNAM_350.spr	UNAM_450.spr	UNAM_600.spr

Tabla 5.1 información de amortiguadores en el modelo de Adams/Car

Por otro lado, para definir la dinámica del amortiguador, se usó la *figura 4.3*, siendo suficientes solo 11 puntos. Para el caso del ajuste C11 R11 0-4 0-4, los puntos y el gráfico se muestran en la *figura 5.4*. En la parte superior de la gráfica, se encuentra el nombre del archivo, el cual es TTX25\_C11\_R11\_0-4\_0-4.dpr

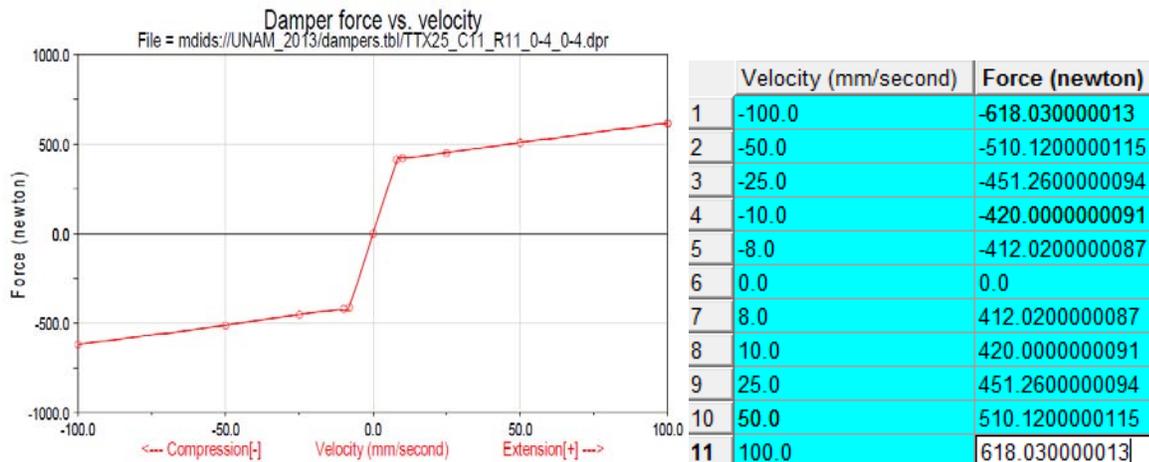


Figura 5. 4 Gráfica de fuerza del amortiguador, con tabla de datos

### 5.1.3 Neumáticos

Una de las ventajas que tiene el software es poder caracterizar las curvas de desempeño del neumático, de acuerdo a los conceptos tratados en capítulo 1, el modelo que ocupa el software es Pacejka (PAC2002). Nosotros desarrollamos los pasos para obtener la más sencilla de las representaciones del modelo, es por ello que en [9] tenemos una explicación más detallada de cómo los parámetros deben ser ingresados.

Para el análisis del desempeño del neumático, Adams/Car cuenta con tres diferentes modos análisis:

- El primero es “Adams Tire toolkit”, el cual está enfocado en desarrollar los parámetros del modelo PAC2002, al final se obtiene un archivo .tir con la información del neumático.
- El segundo análisis “testing tire”, ocupa la información del archivo .tir descrito en el punto anterior, en esta prueba se pueden describir las condiciones en las cuales se desea simular el neumático. Algunos de los parámetros que puede variar son: carga normal, slip angle, slip ratio, propiedades de masa del neumático, velocidad a la que gira, el tipo de piso, constante de elasticidad y amortiguamiento, entre otros.
- El tercer análisis es mediante la herramienta Cosine.

En la temporada 2014 solo se trabajó con las primeras dos pruebas, los archivos de los modelos de Pacejka fueron descargados de TTC [3] y posteriormente llevados a simulación para corroborar el desempeño esperado. Es muy importante que el neumático esté bien caracterizado, ya que en él se desarrollan todas las fuerzas con las que los modelos de suspensión y el auto completo trabajarán.

A continuación mostraremos el camino para desarrollar un análisis con ayuda de un archivo de muestra que tiene Adams/Car, debido a que no se tiene permiso a publicar ningún resultado relacionado con el estudio de TTC.

Al abrirse la interfaz de “tire data and fitting tool” (ver figura 5.5) se selecciona la opción *Simulate*, en esta nueva ventana emergente cargamos el archivo .tir que Adams proporciona.

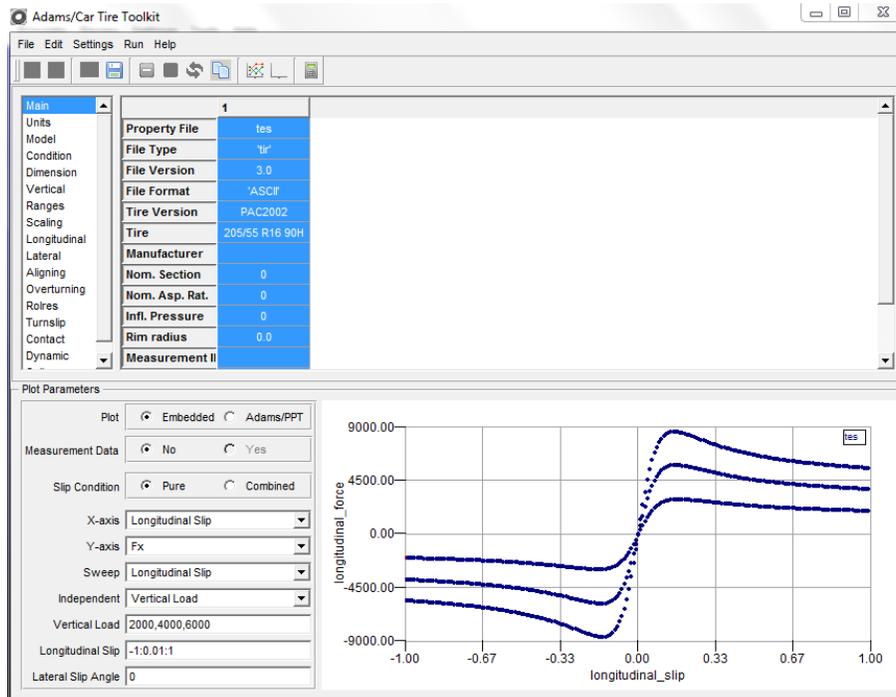


Figura 5. 5 Interfaz para para caracterización de neumáticos. La curva mostrada es FX vs SR

En la figura 5.5, vemos las gráfica pasa FX vs Slip Ratio, en el menú de la parte inferior izquierda se puede seleccionar el tipo de gráfico que se desee ver. Los parámetros para editar el modelo se encuentran en el menú superior izquierdo. Por ejemplo, para los parámetros que definen las fuerzas laterales, seleccionamos la opción *lateral*, con lo que se despliega una serie de parámetros a la derecha (ver figura 5.6).

Main	1	REY1	-0.122827084895
Units	Property File R_front_pac89_PAC200	REY2	0.370213479674
Model	PCY1 1.64993880681	REY1	-0.122827084895
Condition	PDY1 1.04599588047	REY2	0.370213479674
Dimension	PDY2 -0.204003339092	RVY1	1.77403187338e-06
Vertical	PDY3 -4.25781366563e-05	RVY2	-6.58193167811e-06
Ranges	PEY1 0.647669339463	RVY3	-3.72320549337e-06
Scaling	PEY2 -0.12620713108	RVY4	4.02562467682
Longitudinal	PEY3 2.54872969011e-05	RVY5	0.768319924834
Lateral	PEY4 -3.33114721477e-05	RVY6	-218.893550858
Aligning	PKY1 -28.9893014089	PTY1	4.1114
Overturning	PKY2 2.13320631169	PTY2	6.1149
Rolres	PKY3 0.287026182355		
Turnslip			
Contact			
Dynamic			

Figura 5. 6

En la *figura 5.6* se muestran los parámetros que definen el desempeño de las fuerzas laterales desarrolladas por el neumático, incluyendo ajustes como el efecto de escalamiento, el efecto debido al ángulo de camber, slip ratio, slip angle, entre otros. En el *anexo 5.2*, encontramos tablas de los coeficientes de Pacejka 2002 [21].

En el segundo modo de análisis se usa la información del modelo de PAC2002, en esta modalidad se puede simular una prueba con solo fuerzas laterales o solo fuerzas longitudinales, así como un caso de fuerzas combinadas, o bien, se puede desarrollar un nuevo plan de pruebas totalmente personalizado. A manera de ejemplo, en la *figura 5.7* mostramos la interfaz del análisis de solo fuerzas laterales que Adams/car provee y en seguida una gráfica de los resultados obtenidos.

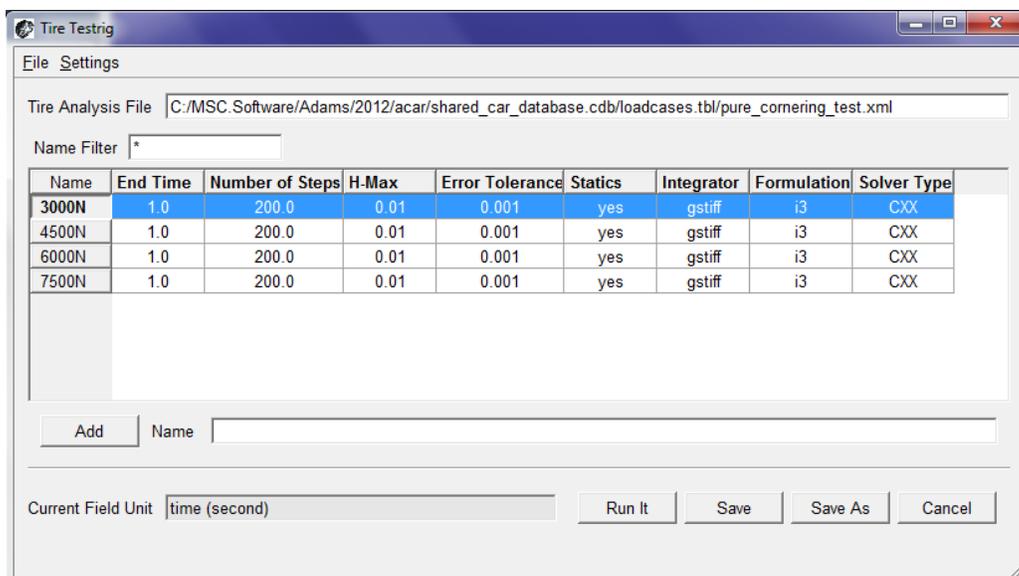


Figura 5. 7 Ejemplo de simulación de prueba de neumático en Adams/Car

En la *figura 5.8*, podemos ver el resultado del par de alineamiento MZ, para los diferentes valores de carga normal (3000N, 4500N, 6000N y 7500N). En este caso usamos la información del modelo TR\_front\_pac89.tir.

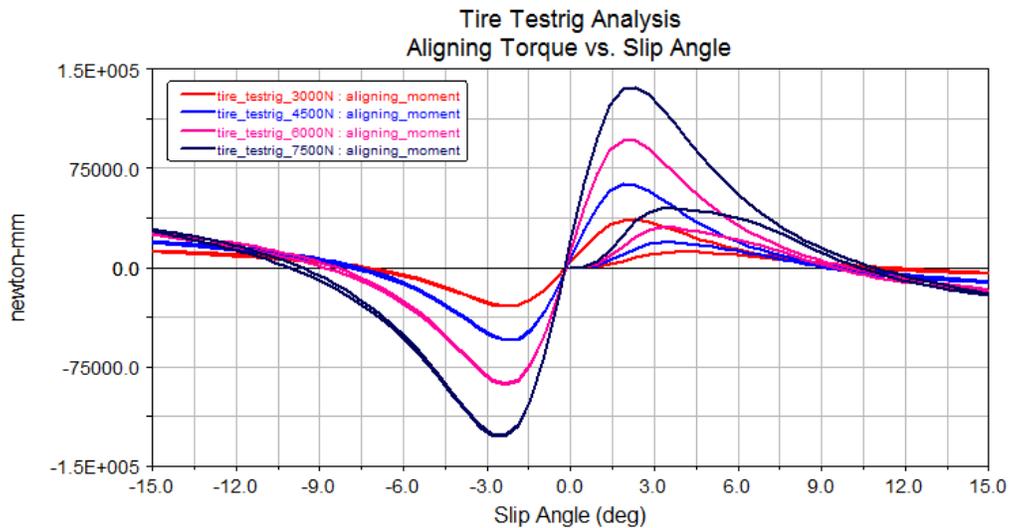


Figura 5. 8 Resultado de MZ vs SA

La *figura 5.9* muestra el desempeño de las fuerzas que resultaron al desarrollarse el análisis.

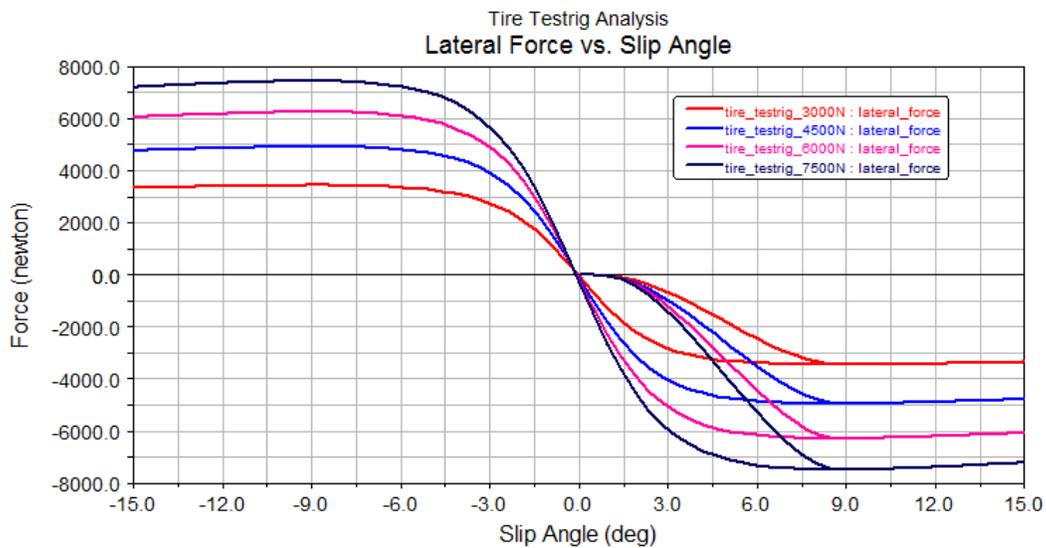


Figura 5. 9 Resultado de FY vs SA del análisis realizado en Adams/Car

Adams/Car provee 30 gráficas distintas, en las cuales se incluyen el ángulo de deslizamiento (Slip Angle), razón de deslizamiento (Slip Ratio), fuerzas longitudinales (FX), fuerzas laterales (FY), par de alineamiento (MZ), par de vuelco (MX), Slip angle vs tiempo de simulación y el coeficiente de fricción.

### 5.1.4 Barras de torsión

Un elemento más dentro del database de Adams es el subsistema de la barra de torsión, que está formada por dos eslabones unidos por juntas esféricas y la barra de torsión. La rigidez torsional de la barra es definida por un resorte torsional localizado al centro de la barra de torsión, las unidades que lo definen son Nmm/ deg.

En nuestro caso, de acuerdo con los datos de la *tabla 3.7* los valores que deben ser ingresados a Adam/Car son:

Datos	Delantero	Trasero
Rigidez de la ARB, $K_{ARB}$ [Nm/Rad]	223.19	147.21
Rigidez de la ARB, $K_{ARB}$ [Nmm/Deg]	3895.4	256.56

Tabla 5.2 Ajuste de rigidez en la barra de torsión

Estos datos deben ser actualizados en la tabla de parámetros del programa. En la *figura 5.10* se muestra el diseño de la barra de torsión en Adams/Car.

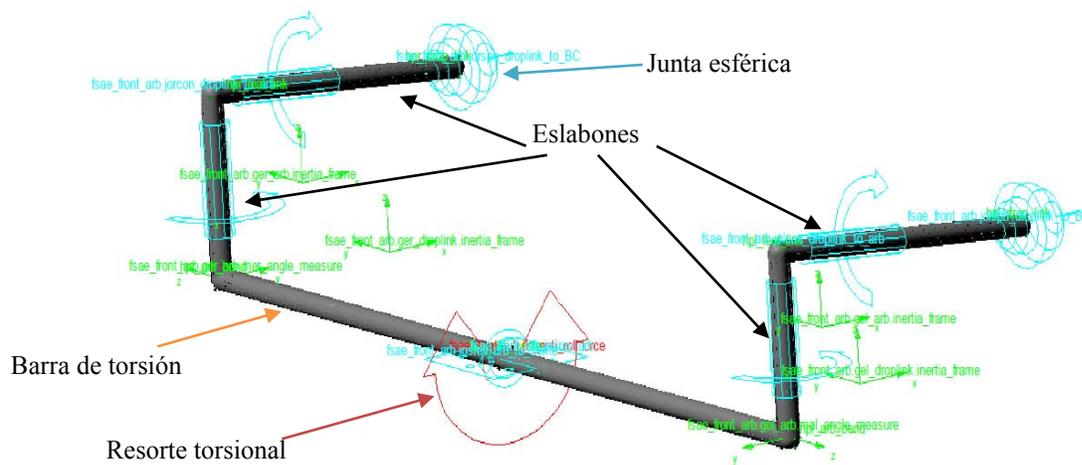


Figura 5. 10 Configuración de la barra de torsión en Adams/Car

### 5.1.5 Ensamble del sistema de suspensión

Como ya se mencionó, el ensamble del sistema de suspensión está compuesto por tres subsistemas:

- Suspensión (que agrupa los brazos de suspensión, eslabón de dirección y el sistema de energía).
- Barra de torsión.
- Sistema de dirección.

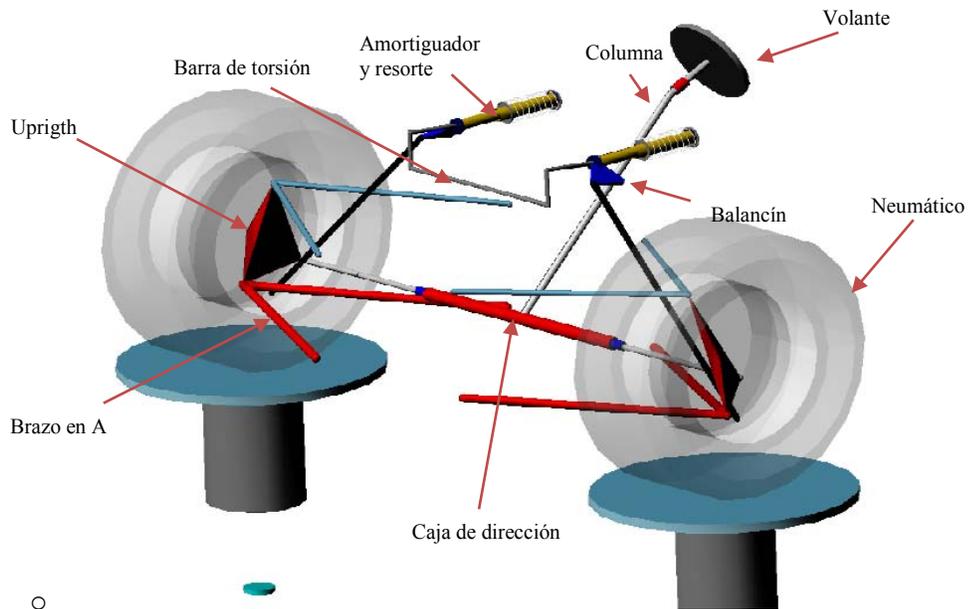


Figura 5. 11 Detalle de partes que conforman el sistema de suspensión en Adams/Car

En este sistema la información de los neumáticos no es requerida para construirlo; sin embargo, sí puede editarse, al acceder a las opciones en cada una de ellas. Por otro lado, el sistema de dirección necesita la relación entre el giro del volante y desplazamiento lineal en la caja de dirección. En el *anexo 5.3* encontramos los elementos que definen el sistema de suspensión trasera.

### 5.1.6 Propiedades de masa

Como ya se mencionó, en todo estudio dinámico las propiedades de masa del cuerpo son de gran importancia. En el software podemos definir las características de inercia del sistema, introduciendo el tensor de inercia del auto o bien de cada una de las partes en él.

En el caso del ensamblaje completo del auto, nos ayudamos de herramientas de CAD para aproximar el valor del peso del auto, así como su tensor de inercia. En la *figura 5.12* tenemos el modelo 2014 con sus valores de inercia con respecto al centro de masa.

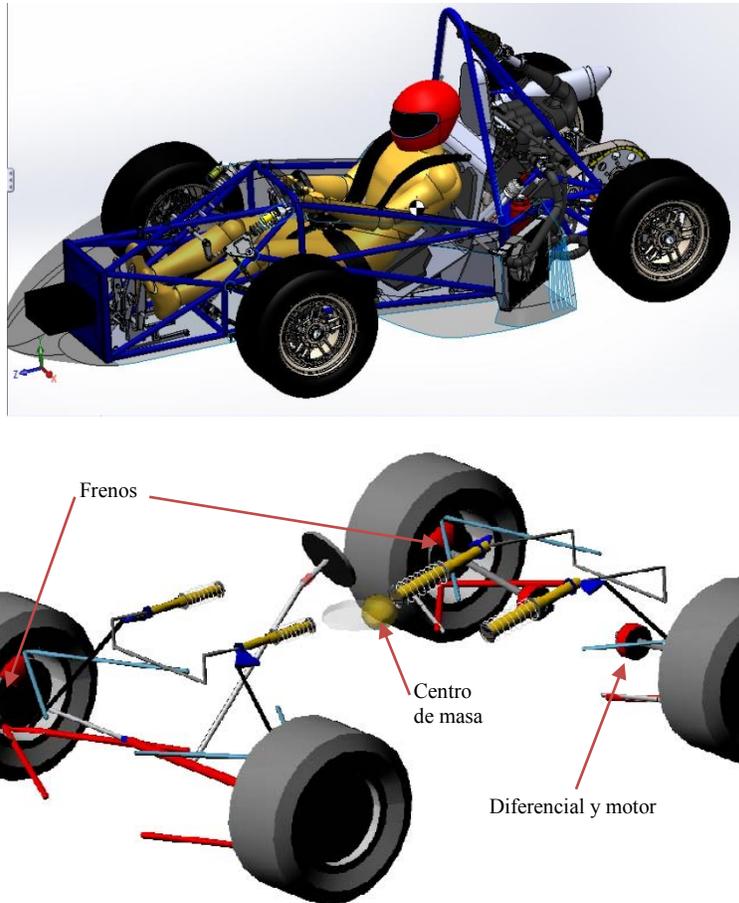


Figura 5. 12 Modelo en CAD del UM515 y su representación en Adams/Car

Estos valores los introducimos en Adam/Car, en la parte de *Simulation*. En la figura 5.12 también podemos ver la representación del centro de masa como un punto de color amarillo.

### 5.1.7 Motor y transmisión

En el desarrollo del ensamblaje completo del vehículo, Adams/Car simula el sistema del tren motriz, para ello es necesario tener las características entre Rpm y toque en Nmm del motor. Esta información debe ser guardada en un archivo .pwr. A manera de ejemplo, usaremos los datos que trae como ejemplo el database.

Es muy importante que estos valores sean introducidos como resultado de una prueba de dinamómetro en el auto y para que dichos resultados sean válidos, se debe contemplar la resistencia al giro del auto, durante la prueba en el dinamómetro.

Otro gran uso que se le puede dar a la herramienta, es editar la curva del motor en el entorno de Adams/Car y simular los cambios, si dichos cambios resultan en una reducción en el tiempo de vuelta, pueden convertirse en una nueva meta para el mapa del motor.

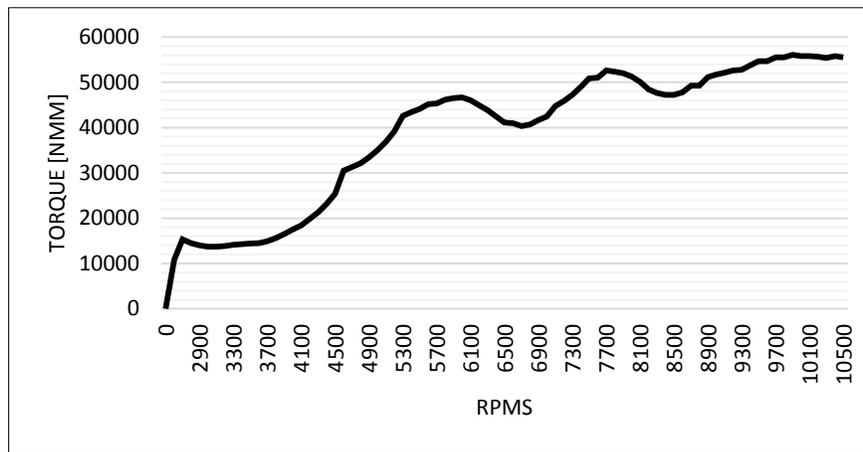


Figura 5. 13 Cuerva de torque vs rpm que el database de suspensión 2012 trae como base.

Además, como parte del tren motriz se tiene el diferencial, el cual puede ser caracterizado en el software, introduciendo la relación entre la velocidad de deslizamiento y el torque que se transmite, en nuestro caso tenemos los datos que se muestran en la *tabla 5.2*:

Slip speed [-]	Torque [Nmm]
0	0
10	8
20	11.5
30	14.5
40	16
50	18
60	20.5
80	22.5
120	24.5

Tabla 5.3 Información del velocidad de deslizamiento en el diferencial

Los resultados son introducidos en un archivo con extensión .dif

### 5.1.8 Sistema de frenos

Dentro del modelo completo del automóvil, es necesario definir un sistema de frenos, en cual se realiza definiendo la magnitud del par que se aplicará en el centro de giro del neumático. El sistema puede verse en la *figura 5.12*, como un disco al centro del neumático. Para caracterizar este sistema es necesario saber el torque máximo aplicable y su distribución, es decir, qué porcentaje se aplicará en el eje delantero y al eje trasero. En la figura se muestra los parámetros para el modelo 2014.

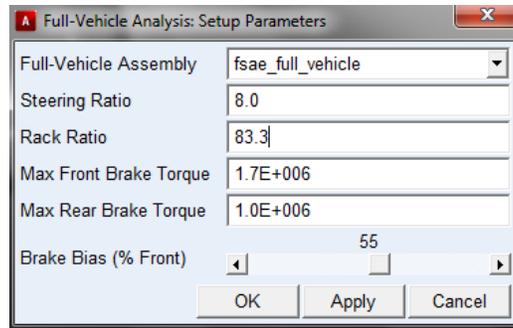


Figura 5. 14 Ajuste frenos y dirección

## 5.2 Simulaciones del vehículo completo

Ya que hemos definido las características del auto completo, podemos simularlo y con ello ajustar parámetros con el fin de optimizar tracción y transferencia de masa.

El paquete cuenta con una gran variedad de análisis, tanto para un ensamble de auto completo, como para el sistema de suspensión. En esta sección veremos algunas de estas pruebas y la información que puede brindarnos.

### 5.2.1 Vuelta a radio constante

Este tipo de prueba simula una vuelta a radio constante donde se acelera progresivamente, con ella podemos reproducir la transferencia de carga durante una vuelta, de esta forma estimar el gradiente de roll y las fuerzas en cada uno de los elementos. Con el fin de reproducir la prueba de skd-pad de la competencia, se simuló una vuelta a un radio de 9.125m con una aceleración lateral de 0.2 a 1.2 g's.

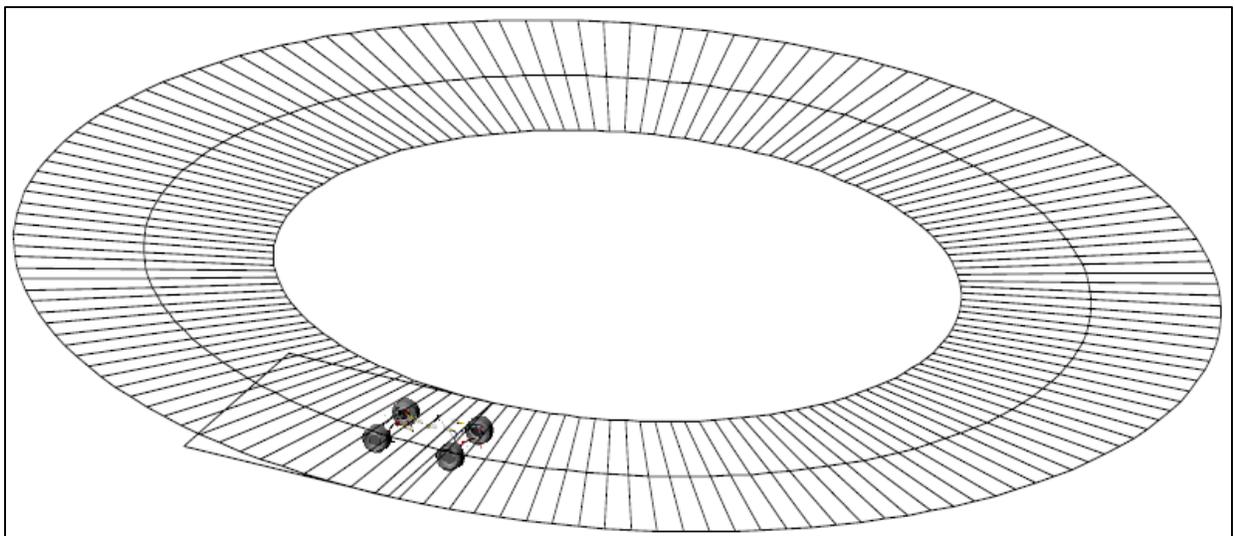


Figura 5. 15 Prueba de vuelta con radio 9.125m

Los resultados se analizan con la herramienta “Post-Processing”, en la cual podemos ver un video de la simulación, así como desarrollar gráficas de interés. Como primer paso veremos las cargas normales en cada uno de los neumáticos.

En la *figura 5.16* podemos ver las fuerzas normales y laterales en los neumáticos a diferentes valores de aceleraciones laterales, en este momento podemos contrastar estos resultados con los elaborados en la sección 3.2, en ella obtuvimos una curva muy parecida a los resultados de esta prueba; sin embargo, en la *figura 5.16* se muestran las fuerzas laterales que puede desarrollar el neumático, con el fin de mantener en balance el auto durante la vuelta. También podemos observar que el caso crítico se presenta en el neumático trasero derecho, ya que él las fuerzas normales y laterales son mayores en él. Este es un resultado lógico, ya que el peso del auto es un poco mayor en el eje trasero y al dar la vuelta hacia la izquierda, la transferencia de carga se transfiere a ese neumático.

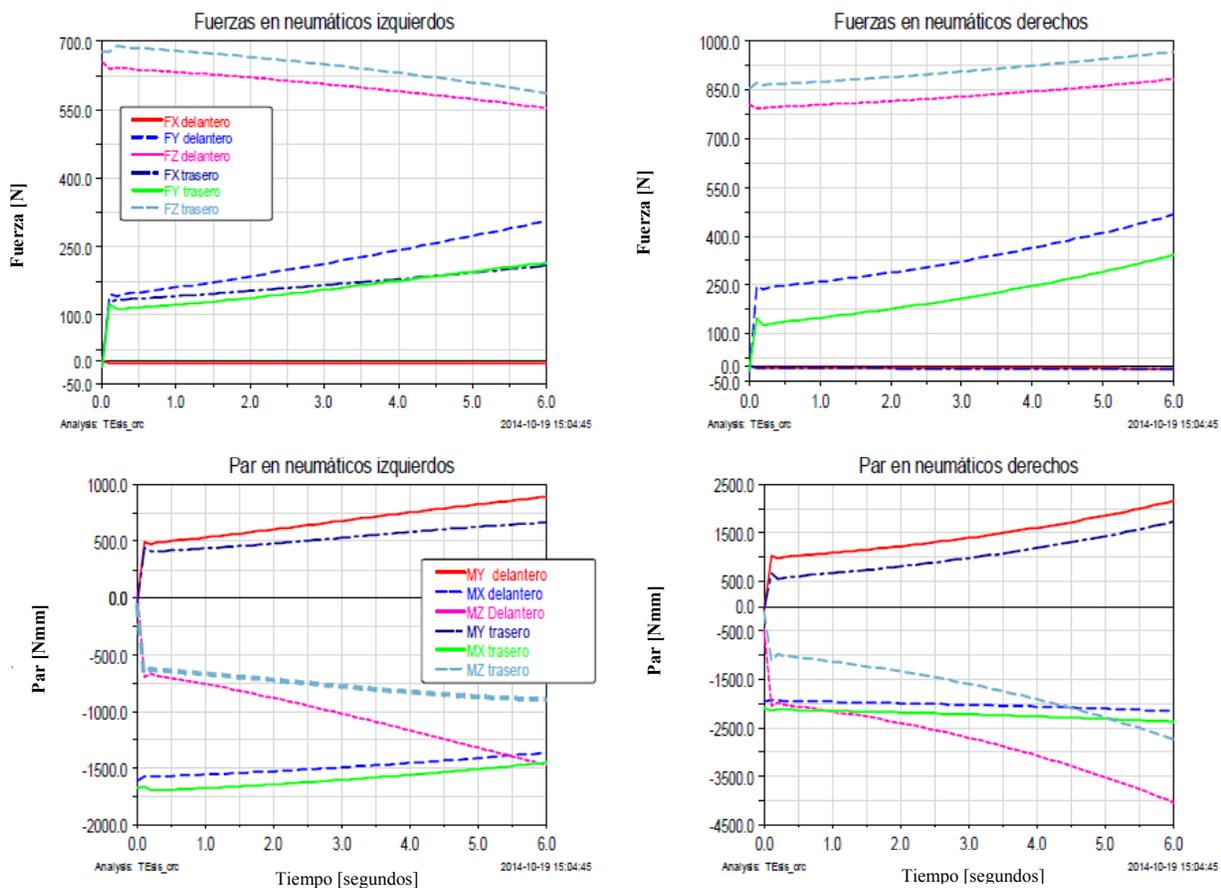


Figura 5. 16 Fuerza y Torques en los neumáticos

Otra gran ventaja del usar Adams, es calcular las fuerzas en cada unión mecánica, en el *anexo A.5.3*, podemos observar las fuerzas en cada una de las uniones de los brazos de la suspensión trasera.

### 5.2.2 Aceleración constante.

Con el fin de saber las condiciones que se presentarán en el auto cuando se realiza la prueba de aceleración, se desarrolla una simulación desde una velocidad de 5km/h hasta llegar a 0.8 fuerzas de gravedad longitudinales, en estas condiciones y con las características del tren motriz antes descritas, se logra terminar la prueba en cerca de 8 segundos. Este resultado no es competitivo dentro de la competencia, ya que si recordamos los primeros equipos comúnmente realizan la prueba en 4.9 a 5.1 segundos. En la *figura 5.17* se muestra la prueba de aceleración dentro del ambiente de Adams/Car.

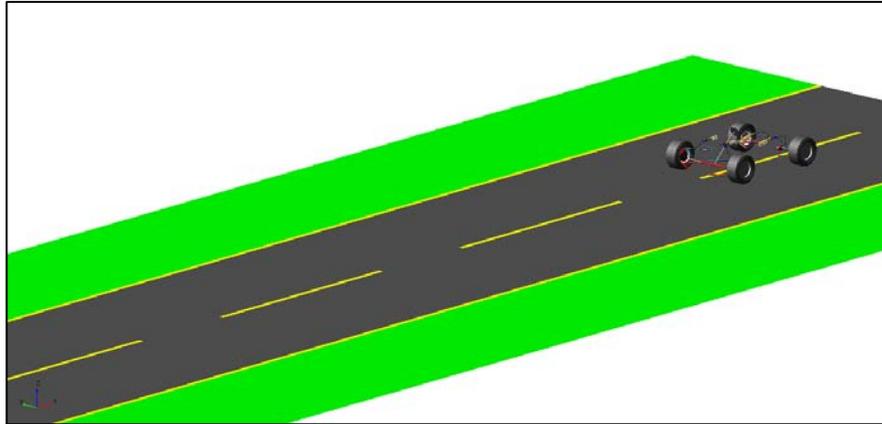


Figura 5.17 Interfaz de aceleración

En condición de aceleración el auto debe presentar transferencia de carga hacia los neumáticos traseros, tal y como se muestra en la *figura 5.18*. Podemos ver que la fuerza normal y longitudinal en cada neumático delantero llega a ser 500N y 0N respectivamente. Por otro lado, en el eje trasero tenemos cerca de 1100N y 1300N de Fz y Fx respectivamente. Dichos resultados demuestran la pérdida de carga normal en el eje delantero al acelerar el auto. Además, al ser cero la fuerza de tracción en el eje delantero, comprobamos que los neumáticos traseros son los que proveen la tracción al auto.

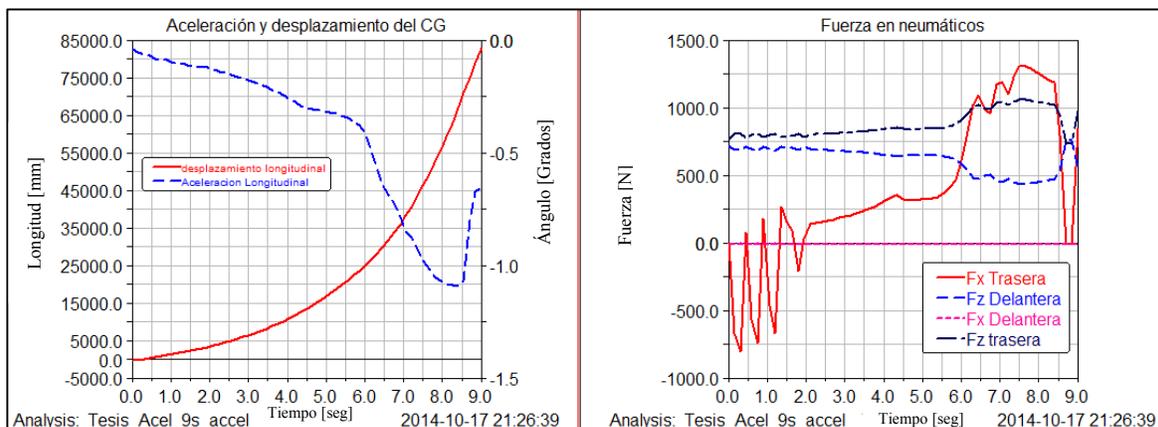


Figura 5.18 Resultados de la prueba de aceleración (la fuerza mostrada en para cada neumático)

De manera adicional, analizamos el centro de masa del auto, el cual experimenta hasta velocidad de 90km/h y -1 grados de pich (ver figura 5.19).

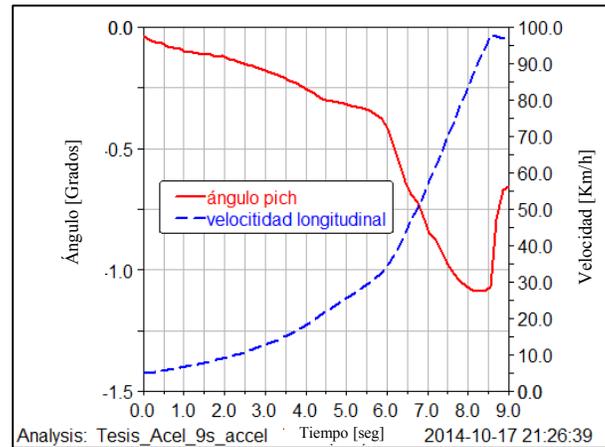


Figura 5.19 Ángulo de pich y velocidad longitudinal del auto

### 5.2.3 Frenado en línea recta

El siguiente caso común durante una prueba, se presenta cuando el auto está por entrar a una curva, en ese instante el auto que va en línea recta frena, para después dar la vuelta a velocidad constante. En esta prueba simulamos la situación en la que el auto va aproximadamente a 50km/h y frena a  $-0.25g$ 's longitudinales (ver anexo A.5.4).

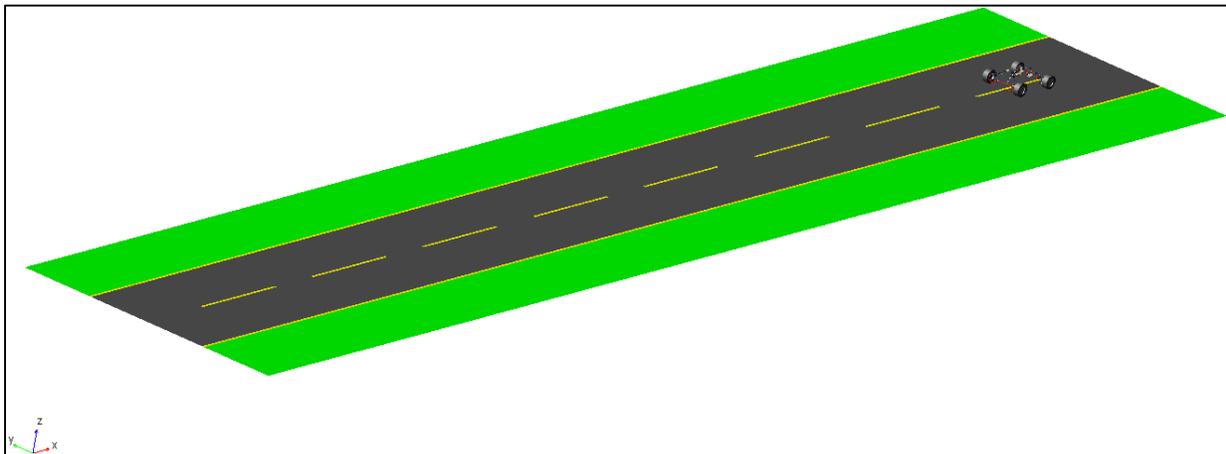


Figura 5.20 Prueba de frenado

Esta simulación reproduce las condiciones en las cuales el auto se puede enfrentar durante la prueba de frenado en la competencia. En la figura 5.21 podemos ver la velocidad a la cual el auto se desplazaba y en el segundo 3 comienza a frenar, para desacelerar hasta una velocidad de 35km/h. En esta primera simulación el auto no llega a detenerse por completo; sin embargo, nos brinda información de cómo sería la distribución de carga en los neumáticos así como las reacciones en algunos de los puntos de interés.

En el *anexo 5.4* podemos ver las fuerzas en los neumáticos y algunos puntos de interés en el sistema de suspensión.

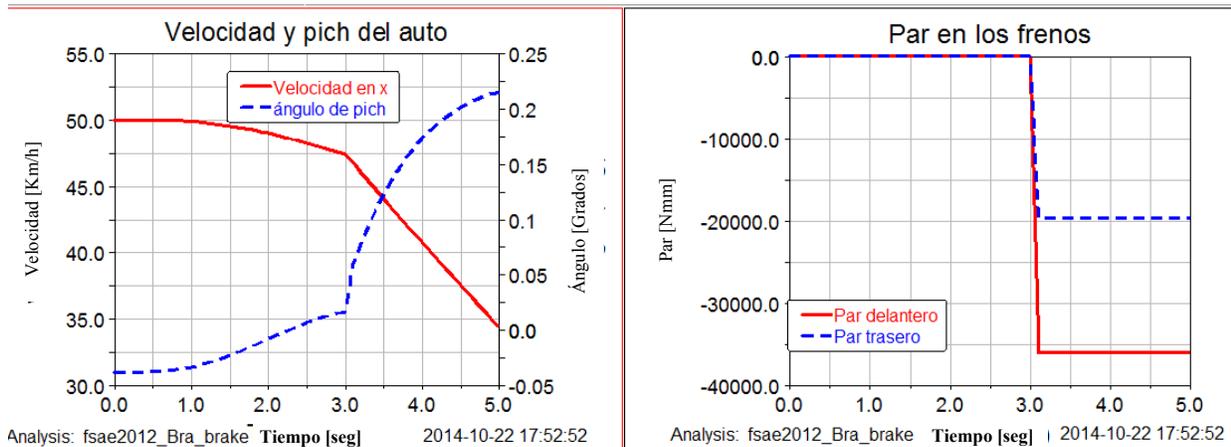


Figura 5. 21 Resultados de la prueba de frenado

#### 5.2.4 Resumen de simulación de auto completo

Los análisis desarrollados en esta sección, solo son unos cuantos de la gran variedad con los que cuenta Adams/Car. En estos ejemplos logramos simular tres de las pruebas y podemos detectar que el caso en donde se presentan mayores fuerzas normales y/o longitudinales/laterales, es la prueba de skid-pad. Esto da como resultado mayores fuerzas en cada uno de los puntos de suspensión y por ende mayores fuerzas de reacción al chasis.

Dentro del proceso de diseño de la suspensión, es obligación de los diseñadores compartir esta información con otros sistemas en el auto, tales como el sistema de masa no suspendida, el chasis y el tren motriz. Todo esto para que el auto completo tenga la misma filosofía de diseño. Las fuerzas que Adams proporciona sirven para después hacer análisis de elemento finito en diversas piezas.

### 5.3 Análisis en el sistema de suspensión

De la sección anterior obtuvimos la magnitud de las fuerzas que actúan sobre los neumáticos, llegando al caso crítico en el que se presentan los siguientes valores:

- Llanta externa: Fuerza normal  $F_z$ : 1500 [N], Fuerza Lateral  $F_y$ : 2500,  $M_z$ : 100 [N.m]
- Llanta interna:  $F_z$ : 200 [N],  $F_y$ : 500,  $M_z$ : 8 [N.m]

Con base en estas fuerzas, se realiza un análisis dinámico en cada sistema de suspensión en Adams/Car. En la *figura 5.22* mostramos el resultado del análisis hecho con los valores antes citados, podemos notar las fuerzas resultantes mediante las flechas que surgen del centro de cada neumático.

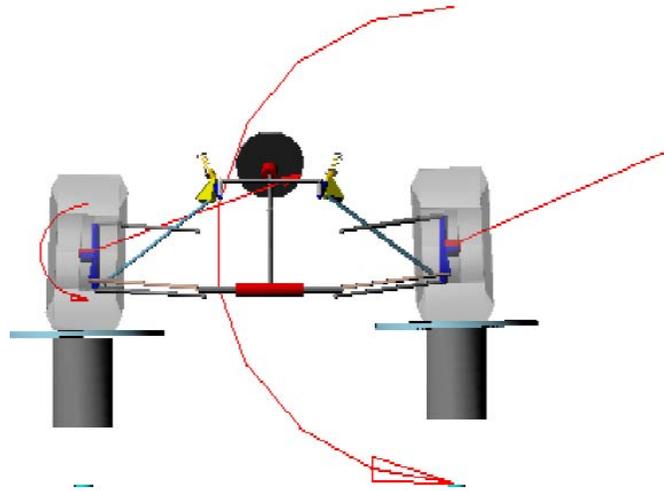


Figura 5.22 Resultado visual de la prueba dinámica en la suspensión delantera.

De esta prueba podemos mostrar la tabla 5.4 en donde tenemos las reacciones en algunos puntos importantes. En ella encontramos la magnitud de la fuerza en ese punto, así como sus componentes en sistema de referencia de Adams/Car. Notamos que en caso de dar vuelta, la mayor reacción se da en el brazo inferior del neumático, en donde se desarrolla la mayor fuerza lateral. Los resultados de la tabla 5.4 son solo para el caso en el cual la fuerza normal es de 1500N y la fuerza lateral de 2500N, los resultados de ambos neumáticos se muestran en la figura 5.23.

Ubicación en el neumático izquierdo	Magnitud [N]	Componente X [N]	Componente Y [N]	Componente Z [N]
Brazo inferior (nodo delantero)	3926	577.9	3876.8	-239.7
Brazo inferior (nodo trasero)	2421	-351.7	2384.1	239.67
Brazo superior (nodo delantero)	728	-130.2	-716.2	2.3
Brazo superior (nodo trasero)	821.6	142.6	-812.73	-2.3
PushRod (Rocker-pushrod)	1244.21	-258.97	952.19	757.84
Upright-Brazo superior	1546.8	3.8	-1528.9	234.3
Upright-Brazo inferior	6189.9	-457.8	6067.7	-960.9
Upright-Eslabón de dirección	1227.4	196.1	-1201.2	155.7
Pivote del Rocker con chasis	1514.12	989.98	-1064.6	-423.2
Rocker-amortiguador (reacción al chasis)	812.03	-732.2	112.53	-332.7
Torque en la dirección	21.52 Nm			

Tabla 5.4 Fuerzas en cada uno de los nodos del lado izquierdo de la suspensión delantera.

Este análisis puede realizarse teniendo cualquier número de fuerzas y momentos aplicables al neumático. En la figura 5.23 mostramos los resultados de las reacciones en los brazos del caso anterior.

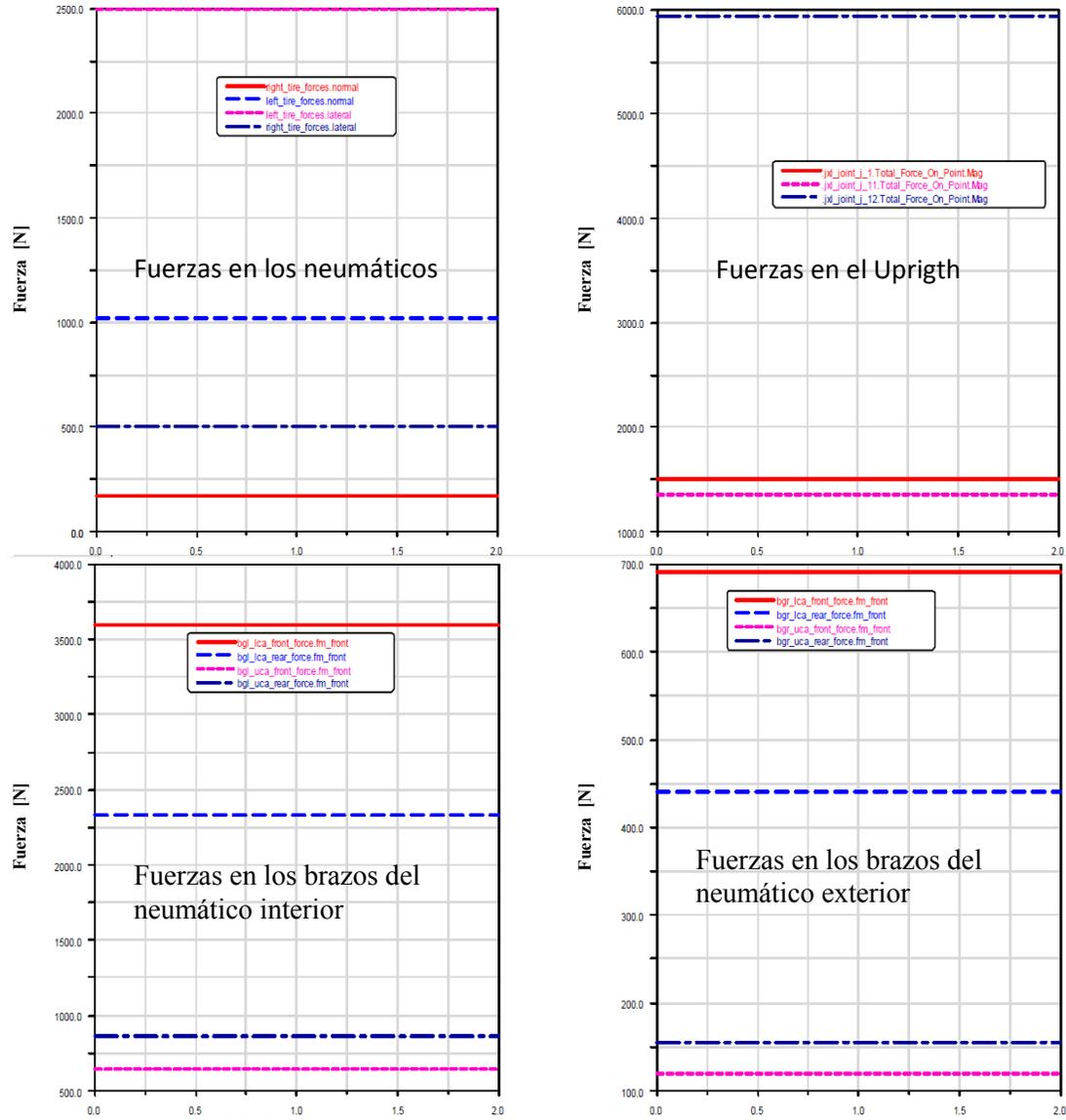


Figura 5. 23 Resultados de la prueba dinámica en diversos puntos de interés

Es recomendable hacer este análisis para cada caso de estudio, es decir, aceleración, frenado, Skid-Pad, entre otros. Esto con el fin de tener todos los resultados posibles ya que en cada evento las condiciones son diferentes. Para este trabajo solo incluimos un caso con el fin de ejemplificar el método de diseño que se siguió.

## 6. Pruebas

Con el fin de poder tener una mejor comprensión de los resultados que las pruebas en el auto pueden brindarnos, debemos caracterizarlo lo mejor posible, ya que de ello dependerán los resultados que tengamos. El primer paso es medir el peso de la masa suspendida y la no suspendida, ya que con ella podremos estimar la cantidad de transferencia de carga que hay en una curva, así como poder determinar la distribución de roll en el auto.

### 6.1 Cálculo de masa suspendida y no suspendida

Con el fin de poder determinar el centro de gravedad del auto, tanto de la masa no suspendida  $W_u$ , así como la masa suspendida  $W_s$ , es necesario hacer un par de pruebas.

#### 6.1.1 Distribución de peso del auto completo

Para poder determinar la posición del centro de gravedad del auto completo, lo que usualmente se hace es recurrir al uso de balanzas para obtener la distribución de peso en cada neumático. Con esto se puede determinar la posición del CG en el plano de vista superior, tal y como se puede ver en la *figura 6.1*.

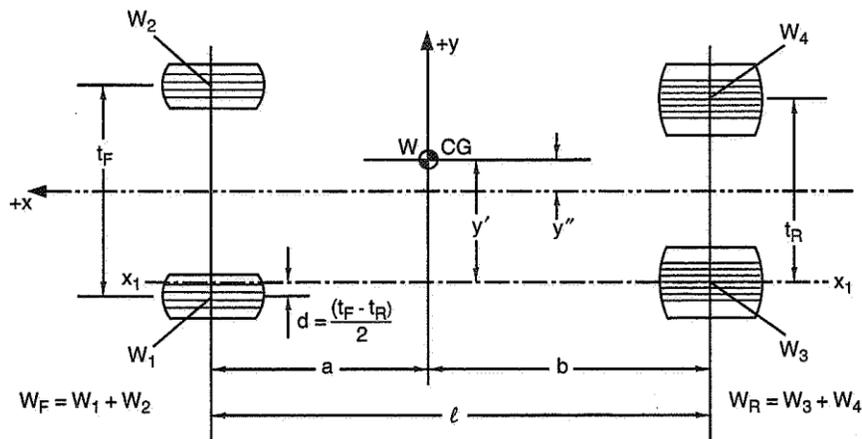


Figura 6. 1 Diagrama de ubicación del CG del auto completo (fuente [4]).

EL primer cálculo que tenemos que hacer, es obtener la distancia del centro de gravedad al eje trasero.

$$b = \frac{W_F \cdot WB}{W_T} \quad (6.1)$$

Donde  $WB = l$  es el wheelbase en metros,  $W$  es el peso del auto completo en kilogramos y  $W_F$  es el peso en el eje delantero en kg. La distancia  $a$  es la distancia del CG al eje trasero.

$$a = WB - b \quad (6.2)$$

Por otro lado, la distancia del eje medio al centro de gravedad es:

$$y' = \frac{W_2}{W_T}(t_F - d) - \frac{W_1}{W_T}d + \frac{W_4}{W_T}t_R \quad (6.3)$$

$$y'' = y' - \frac{t_R}{2} \quad (6.4)$$

Donde:  $t_f/t_r$  es el rack delantero / track trasero.

$$d = \frac{t_F - t_R}{2}$$

Llevando el auto a las balanzas, se lograron obtener los resultados de la *tabla 6.1*.

Datos	Valor	Unidades
<b>WT</b>	296	[kg]
<b>%front</b>	49.32	%
<b>%Left</b>	50.33	%
<b>WB</b>	1.524	[m]
<b>b</b>	0.7723	[m]
<b>a</b>	0.7517	[m]
<b>tF</b>	1.219	[m]
<b>tR</b>	1.100	[m]
<b>d</b>	0.060	[m]
<b>y'</b>	0.578	[m]
<b>y''</b>	0.0039	[m]

Tabla 6.1 Distribución de peso estático.

### 6.1.2 Altura del CG del vehículo

La altura del centro de gravedad del auto completo con respecto al piso, puede ser determinado midiendo la distribución de peso del auto a nivel de piso y midiendo la transferencia de carga al eje delantero que resulta de elevar el eje trasero.

Al realizar la prueba se deben cuidar los siguientes puntos:

- Cada amortiguador debe ser sustituido por un eje rígido, esto con el fin de eliminar cualquier movimiento en la suspensión. La longitud de éste debe ser determinado cuidadosamente, para que la altura del auto sea la misma que cuando se encuentra estático [16].
- Los neumáticos deben ser sobre inflados para eliminar cualquier tipo de flexión.
- Todos los líquidos deben tener el nivel correcto.
- El piloto debe estar en el auto (o al menos un objeto con el mismo peso).

Los pasos para desarrollar la prueba son:

1. El peso en el eje delantero debe ser medido a nivel de piso.
2. El eje trasero deberá ser elevado tanto como sea posible. El cálculo se hace con base en el cambio de peso en el eje delantero con respecto al ángulo de inclinación.
3. La altura del CG con respecto al eje de los centros de los neumáticos, puede calcularse mediante la ecuación 6.5 (ver la *figura 6.2*).

$$h = \frac{WB \Delta W}{W_T \tan \phi} \quad (6.5)$$

Donde  $\Delta W = W_{f2} - W_{f1}$ ,

$W_{f1}$  = Peso del eje delantero a nivel del piso.

$W_{f2}$  = Peso del eje delantero cuando el eje trasero ha sido elevado

$\tan \phi = B/A$ , con  $A = \sqrt{WB^2 - B^2}$

4. Para obtener la altura con respecto al piso, al valor  $h$  debe ser agregado al diámetro del neumático  $R_t$ .

$$h_{CoG} = R_t + h \quad (6.6)$$

5. Se debe realizar la prueba a diferentes valores de elevación en el eje trasero, los cuales serán promediados.

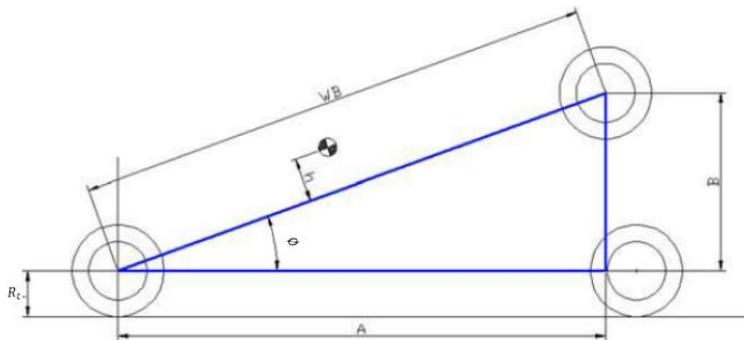


Figura 6. 2 Inclinación del vehículo para localización de la altura del CG (fuente [16]).

## Resultados

En esa ocasión solo se logró desarrollar una prueba para adquirir el centro de masa del auto 2014. La prueba fue desarrollada al elevar el eje trasero del auto una distancia  $B=0.139$  metros. Sabiendo que el wheelbase de ese año son 1.524 metros, el ángulo theta nos queda como:

$$\tan(\theta) = \frac{B}{A} = \frac{0.139}{1.524} = 0.0912 \text{ [rad]}$$

La carga sobre los neumáticos delanteros antes y después de la prueba se pueden ver en la siguiente tabla:

Medición	W1 [Kg]	W2 [Kg]
Antes	72.4	73.6
Después	72.8	74.0

Tabla 6.1.1 Peso en los neumáticos delanteros.

De esta forma la transferencia de carga hacia el eje delantero es de 0.8 Kg, por lo que la altura  $h$  es:

$$h = \frac{1.524 (0.8)}{296 (0.0912)} = 0.04[m]$$

Y dado que el radio del neumático es de 0.2685 [m], la altura del centro de gravedad es de:

$$h_{CoG} = 0.2685 + 0.04 = 0.312 [m]$$

El peso en cada neumático y del auto completo fue tomado de los datos de la sección 3.2.

### 6.1.3 Masa no suspendida

Para poder determinar la masa no suspendida, la mejor forma de hacerlo es mediante la aproximación de algún software de CAD, en este caso dado que el vehículo se dibujó en SolidWorks, usaremos la herramienta de propiedades de masa, tal y como se muestra en la *figura 6.3* en ella podemos observar que:

$$W_{u1} = 6757.75 [gr] = 6.757[kg] \quad (6.7)$$

Y por lo tanto:

$$W_{uF} = 2W_{u1} = 13.514[kg] \quad (6.8)$$

El la altura del centro de gravedad con respecto a un sistema coordenado S2 que está en a nivel del piso es:

$$h_f = 262.61 [mm] = 0.262[m] \quad (6.9)$$

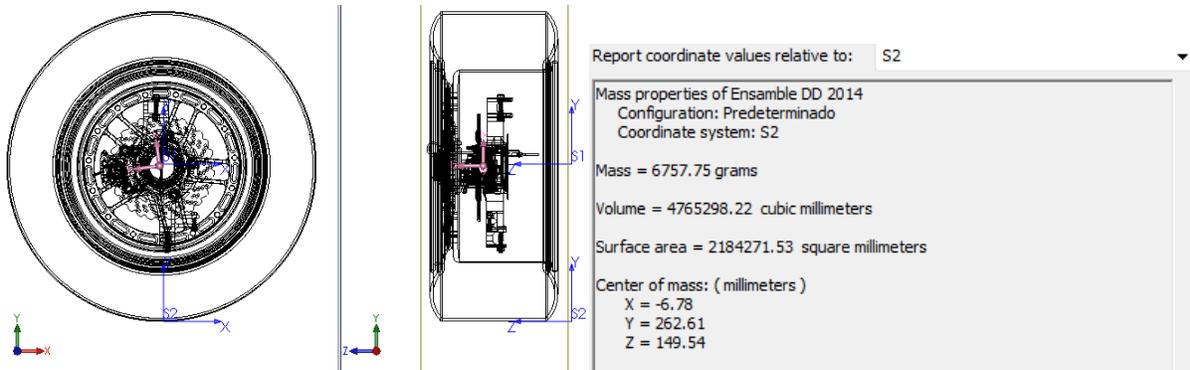


Figura 6. 3 Aproximación del CG de la masa no suspendida (neumático delantero)

Por otro lado, para el caso de la masa suspendida trasera se hace el mismo procedimiento, por lo que tenemos:

$$W_{uR} = 14.491[kg] \quad (6.10)$$

Y

$$h_R = 0.259[m] \quad (6.11)$$

Con estos resultados, el total de masa no suspendida en el auto puede ser calculada mediante:

$$W_U = 2(W_{uR} + W_{uF}) = 2(13.514 + 14.491) = 56.01[kg] \quad (6.12)$$

#### 6.1.4 Masa suspendida y su localización

La porción de masa en el vehículo que comprende la masa suspendida se calcula con forme a:

$$W_S = W - W_U \quad (6.13)$$

Por lo nuestro caso es:

$$W_S = 296 - 56.01 = 239.99 \quad (6.14)$$

Para poder saber la localización del centro de gravedad de la masa no suspendida, nos apoyamos en la *figura 6.4*, en ella podemos ver su localización así como los trazos que nos ayudarán a calcularlo.

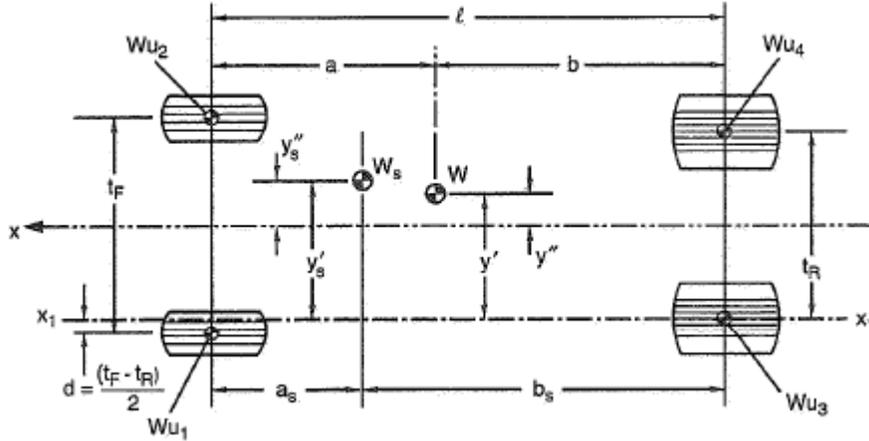


Figura 6. 4 Diagrama para la ubicación de masa suspendida y no suspendida (fuente [4]).

Para calcular la distancia al eje trasero usamos:

$$b_s = \frac{(W)b - W_{uF}WB}{W_s} \quad (6.15)$$

Por lo tanto,

$$a_s = WB - b_s \quad (6.16)$$

Tomando suma de momentos a lo largo del eje x1:

$$y_s' = \frac{W}{W_s} y' + \frac{W_{u4}}{W_s} t_R - \frac{W_{u2}}{W_s} (t_F - d) - \frac{W_{u1}}{W_s} d \quad (6.17)$$

Entonces de la figura 6.4 tenemos que:

$$y_s'' = y_s' - \frac{t_R}{2} \quad (6.18)$$

Con esto ya sabemos la localización lateral del centro de masa suspendida  $W_s$ ; sin embargo, necesitamos también saber la altura con respecto al piso, para ello empleamos la ecuación 6.19:

$$h_s = \frac{W}{W_s} h_{CoG} - \frac{W_{uF}}{W_s} h_F - \frac{W_{uR}}{W_s} h_R \quad (6.19)$$

Donde  $h_F$  y  $h_R$  son las alturas de los centros de gravedad de masa no suspendida.

El centro de gravedad de la masa suspendida es medido con respecto al piso, de acuerdo a 6.19; sin embargo, un parámetro importante es saber la distancia que éste tiene con respecto al eje de giro (eje de roll), ya que en situación de curvas, la masa suspendida gira con respecto a este eje. Para poder calcularlo empleamos lo siguiente ecuación.

$$h_{roll} = h_s - h_{RCf} - \frac{a}{WB} (h_{RCr} - h_{RCf}) \quad (6.20)$$

Donde  $h_{RCf}$  y  $h_{RCr}$  son la altura del roll center delantero y trasero respectivamente.

En nuestro caso resumimos los resultados en la *tabla 6.2*, apoyándonos de los valores de la *tabla 6.1* y los resultados de la sección 6.1.2.

Datos	Valor	Unidades
WS	239.99	[kg]
WU	56.01	%
h_CoG	0.312	%
hF	0.262	[m]
hR	0.262	[m]
bs	0.755	[m]
as	0.7685	[m]
ys'	0.7135	[m]
ys''	0.139	[m]
hs	0.296	[m]
hRCf	-0.037	[m]
hRCt	0.0254	[m]
hroll	0.3024	[m]

Tabla 6.2 Localización del centro de masa suspendida.

## 6.2 Cuantificando del gradiente de roll y su distribución

La cantidad de sobreviraje o subviraje del auto durante una vuelta, es determinado por la distribución de carga entre el eje delantero y trasero. En ajuste fino de suspensión, el balance es ajustado mediante la distribución del gradiente de roll, para ello se ajusta la constante de los resortes, la rigidez de las barras de torsión, la constante de amortiguamiento de los amortiguadores y la presión del neumático.

En el prototipo UM-515 se logró instalar un sistema de telemetría (llevado a cabo por Samuel López [22]), el cual nos fue de utilidad para cuantificar la cantidad y distribución del gradiente de roll que se tiene en el auto. Para determinarlo, el primer paso es cuantificar el ángulo de roll en el auto, tanto para la parte delantera como la trasera. Para lograr dicho cálculo, el sistema de telemetría emplea potenciómetros lineales en cada uno de los amortiguadores.

### 6.2.1 Teoría previa

El primer paso para dimensionar el roll rate es medir el ángulo de roll del auto, para ello usamos las señales de los potenciómetros y empleamos las siguientes fórmulas:

$$\phi_F = \operatorname{atan}\left(\frac{x_{SLF} - x_{SRF}}{t_F * IR_F}\right) * 57.3, \quad [\text{Grados}] \quad (6.21)$$

$$\phi_R = \operatorname{atan}\left(\frac{x_{SLR} - x_{SRR}}{t_F * IR_R}\right) * 57.3, \quad [\text{Grados}] \quad (6.22)$$

Donde:

- $x_{SLF}$  = Movimiento suspensión delantera izquierda.
- $x_{SRF}$  = Movimiento suspensión delantera derecha.
- $x_{SLR}$  = Movimiento suspensión trasera izquierda.
- $x_{SRR}$  = Movimiento suspensión trasera derecha.
- $IR_F/IR_R$  = Installation Ratio delantero/trasero.
- $t_F/t_R$  = Track delantero/trasero.

Estos valores deben ser tomados a la par del valor de aceleración lateral del auto, el cual puede ser obtenido mediante la señal de un acelerómetro, el cual debe estar localizado en el centro de gravedad del auto y cuyos detalles de construcción se pueden consultar en [22]. Los resultados nos servirán para construir el gradiente de roll del eje delantero y del eje trasero ( $K_{\phi_F}, K_{\phi_R}$ ), así como la distribución del gradiente de roll en el auto. Un ejemplo del procedimiento anterior lo observamos en las *figuras 6.5 y 6.6*. En ellas tenemos una serie de puntos dispersos que representan el comportamiento del gradiente de roll, la recta es una regresión lineal que nos relaciona el ángulo de roll con las aceleraciones laterales en el auto. Es importante saber que esta tendencia lineal no siempre se cumple, ya que muchos sistemas de suspensión tienen un comportamiento no lineal (progresivo). Un buen criterio de diseño es evitar comportamientos progresivos, para ello el análisis cinemático mostrado en los capítulos 3 y 4 debe enfocarse en evitarlo.

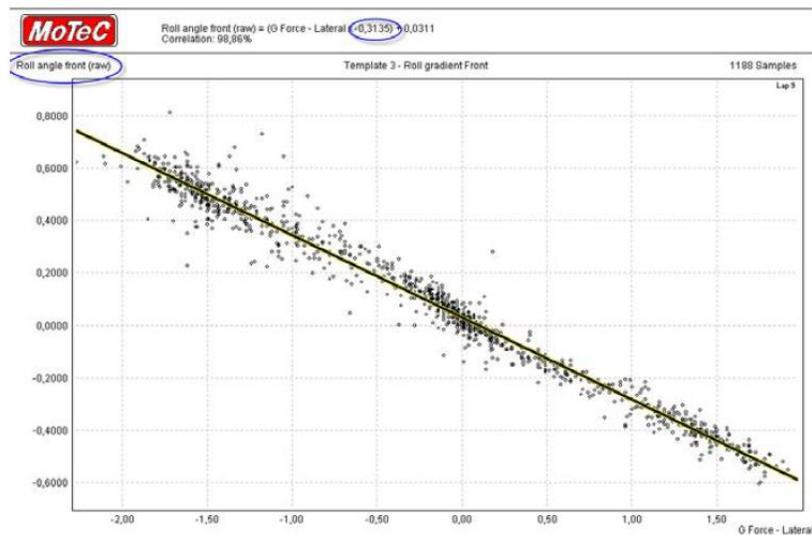


Figura 6. 5 Ejemplo de gradiente de roll delantero (fuente [16]).

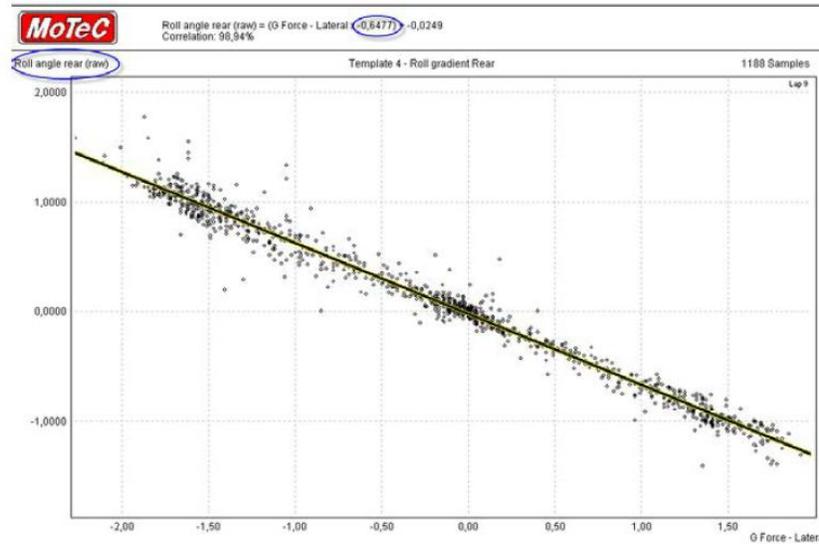


Figura 6. 6 Ejemplo de gradiente de roll trasero (fuente [16]).

Estas rectas de las figuras 6.5 y 6.6 nos dan información sobre que tanto gira el auto en su parte delantera, así como en la trasera.

Otro dato importante a cuantificar en la cantidad total de giro que el auto experimenta, para ello calculamos el ángulo de roll del auto utilizando la ecuación:

$$\phi = \text{atan} \left( \frac{(x_{SLF} - x_{SRF})/IR_F + (x_{SLR} - x_{SRR})/IR_R}{t_F + t_R} \right) * 57.3, \quad [\text{Grados}] \quad (6.23)$$

Las ecuaciones 6.21, 6.22 y 6.23 respetan el sistema de referencia de SAE [4]. Del resultado de la ecuación 6.23 nos es posible calcular la cantidad del gradiente de roll que hay en el auto y comprobar si nuestro diseño cumple con las metas propuestas.

Con el fin de entender mejor el comportamiento de un auto tipo Formula SAE, se propone que se realicen las siguientes pruebas. De esta forma se entenderá cómo la variación de algunos de los parámetros del coche afectan su desempeño.

Set-up primario.

#### Prueba 1

Resortes delanteros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: normal

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: normal

- Sensibilidad a la rigidez de a suspensión trasera

## Prueba 2

Resortes delanteros  $K_{SF} = 350 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *normal*

## Prueba 3

Resortes delanteros  $K_{SF} = 350 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *suave*

## Prueba 4

Resortes delanteros  $K_{SF} = 350 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *rígido*

## Prueba 5

Resortes delanteros  $K_{SF} = 350 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 350 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

## Prueba 6

Resortes delanteros  $K_{SF} = 350 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 450 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

- Sensibilidad a la suspensión delantera

## Prueba 7

Resortes delanteros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *normal*

## Prueba 8

Resortes delanteros  $K_{SF} = 450 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *normal*

## Suspensión suave

## Prueba 9

Resortes delanteros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Resortes traseros  $K_{SF} = 250 \text{ Lb/in}$   
 Barra de torsión delantera ajuste: *NO*

Cada prueba debe realizarse cuidadosamente y deberá de llenarse la hoja de pruebas que se muestra en el anexo 6.1, dicha hoja cuenta con una sección para detallar los ajustes en los resortes y barras de torsión.

Los resultados proveerán información de la cantidad de giro en el auto, la influencia que tiene el cambiar la constante de los resortes y barras de torsión en el desempeño del auto. Para que los datos no sean tan dispersos, debe tenerse especial cuidado en que cada vez que el auto salga a pista, la distribución de peso debe ser lo más parecida.

### 6.2.2 Resultados

De las pruebas realizadas con el sistema de telemetría del modelo 2014 (ver [22]), se logró obtener los desplazamientos en cada uno de los resortes, así como las aceleraciones del centro de gravedad, los resultados se muestran en las *figuras 6.7 y 6.8*.

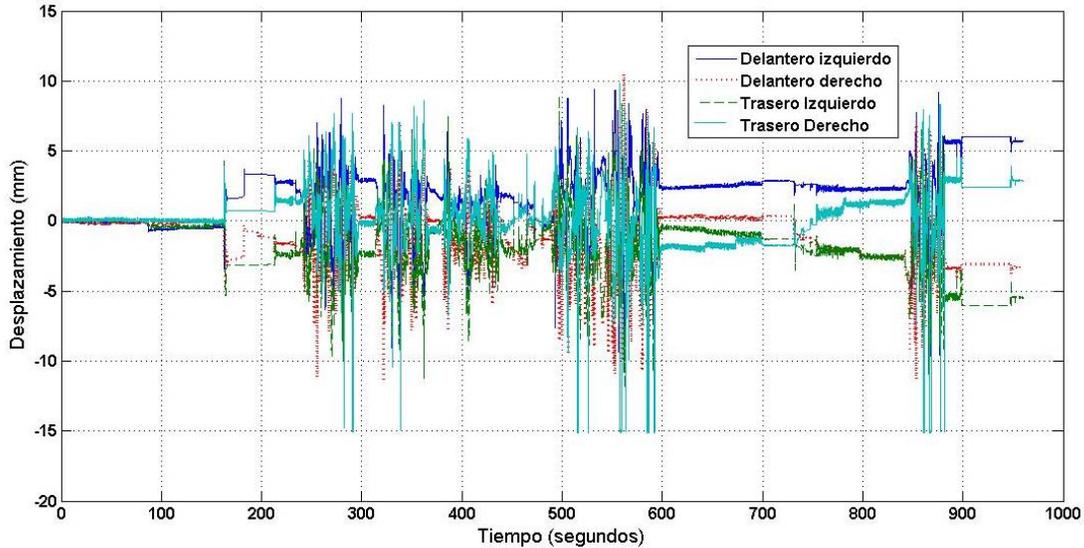


Figura 6. 7 Lectura de desplazamiento en amortiguadores del sistema de telemetría descrito en [22].

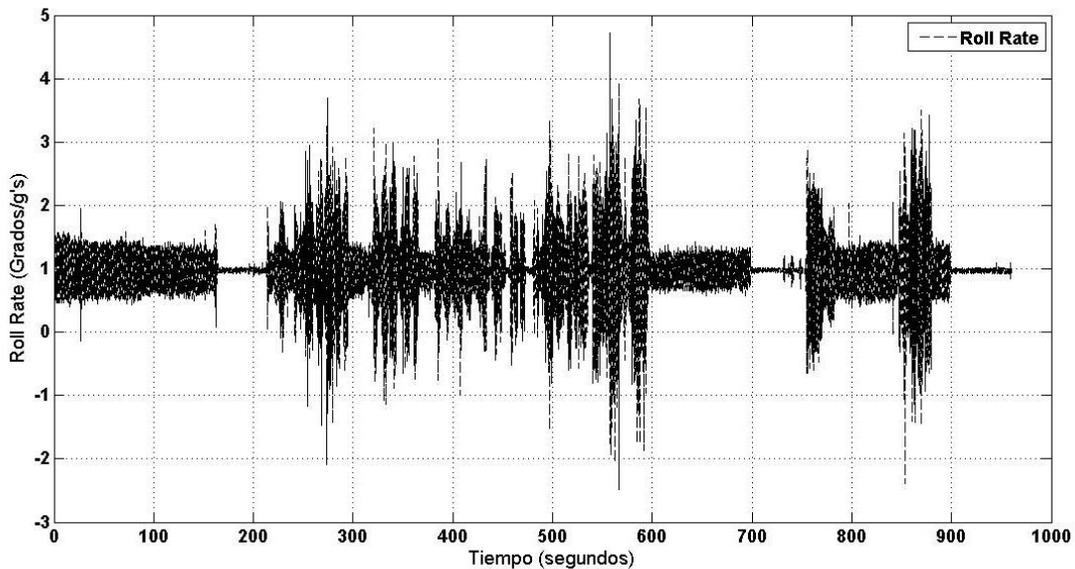


Figura 6. 8 Resultados de gradiente de giro (ver [22]).

Al usar el comando de *mean* de Matlab® en la serie de datos del gráfico 6.8, obtenemos el valor medio de roll rate, el cual en este caso es de 0.937 [Grados/g's], siendo una buena aproximación a nuestra meta de 0.963. Sin embargo, podemos ver que hay muchas oscilaciones dentro de la *figura 6.8*, esto se debe a que probablemente el auto este sufriendo deformaciones

que hacen que el auto se incline más de lo previsto o bien el sistema de suspensión no sea lo suficiente rígido. Otra causa podría ser el comportamiento progresivo que el sistema de suspensión haya adquirido al ser instalada en el auto.

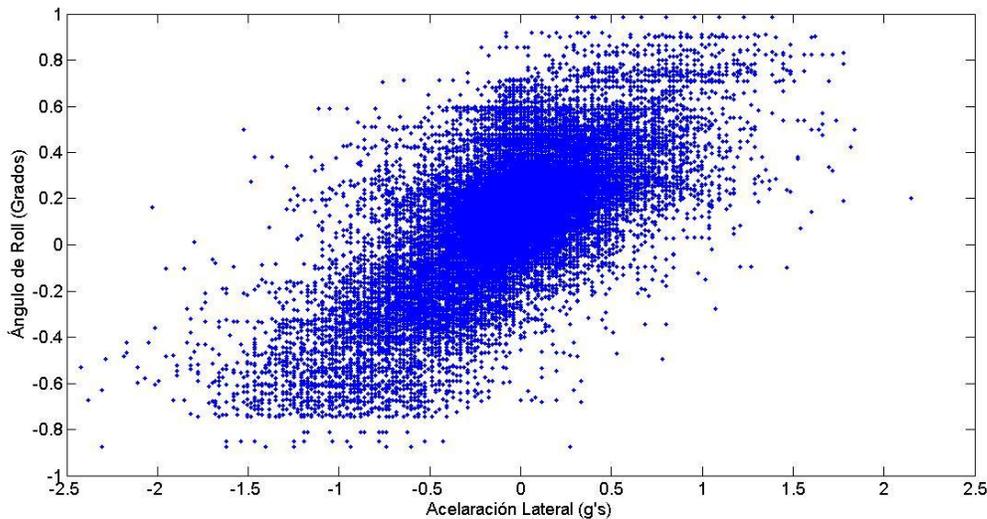


Figura 6. 9 Gráfica de Aceleración Lateral vs ángulo de roll del sistema de suspensión delantero

### 6.3 Reproducción del camino y su uso para simulación

Gracias a los datos obtenidos en cada uno de los resortes, las relaciones de movimiento entre el piso y la compresión del amortiguador, es posible reproducir el camino que cada uno de los neumáticos experimentó. Esto con el fin de poder tener información útil sobre el camino y poder simular la suspensión del auto bajo esas mismas condiciones. Logrando lo anterior, seremos capaces de intuir qué tipo de ajuste en el amortiguador sería el que nos garantice un mejor desempeño.

A manera de ejemplo, nos concentraremos con las mediciones del neumático delantero izquierdo durante una de las pruebas del auto, enfocándonos solo en el tiempo de simulación de 490 a 520 segundos. En estas condiciones el perfil del camino quedó como se puede apreciar en la *figura 6.10*.

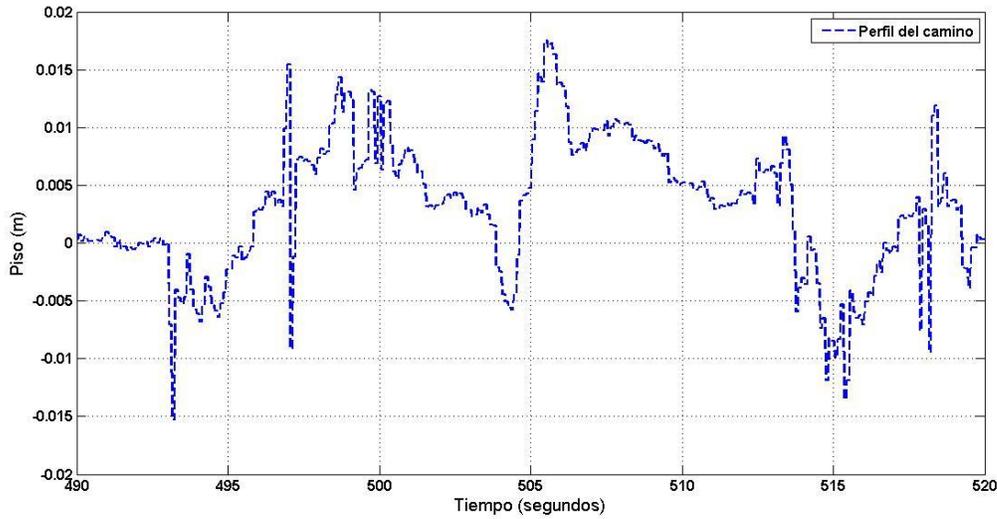


Figura 6. 10 Perfil de camino para el neumático delantero izquierdo, resultado del pos-análisis de los datos del sistema de telemetría.

### 6.3.1 Estrategia para simulación

Para poder simular la respuesta del sistema de suspensión a un perfil de desplazamiento, usaremos el modelo de 4to orden desarrollado en el capítulo 4, el cual resolveremos mediante el método numérico de Euler.

Iniciaremos representando el modelo de 4to orden en su equivalente en el método de Euler, en este caso tendremos que usar las ecuaciones diferenciales de primer orden que representan la dinámica del sistema. De acuerdo con las ecuaciones 4.20 a 4.23 del capítulo 4:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_T + K_S}{W_U} x_1 - \frac{C}{W_U} x_2 + \frac{K_S}{W_U} x_3 + \frac{C}{W_U} x_4 + \frac{u}{W_U} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_S}{W_S} x_1 + \frac{C}{W_S} x_2 - \frac{K_S}{W_S} x_3 - \frac{C}{W_S} x_4\end{aligned}$$

De acuerdo con [23], el método de Euler se basa en aproximaciones de la solución de la ecuación diferencial (E.D.) mediante la pendiente de la función solución  $f(x_i, y_i)$ , así como la evaluación de la E.D en ese punto ( $y_i$ ). Es decir:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (6.24)$$

Donde:

$y_{i+1}$  = el valor siguiente en la solución de la ecuación diferencial

$y_i$  = es el valor actual

$f(x_i, y_i)$  = la ecuación diferencial valuada en el punto actual.

$h$  = Es el paso que hay entre cada punto.

Adaptando esta estructura a cada una de las ecuaciones diferenciales, podemos decir que el  $k$ -ésimo valor estimado en las ecuaciones diferenciales es:

$$dx_1(k) = x_2(k) \quad (6. 25)$$

$$dx_2(k) = -\frac{K_T + K_S}{W_U} x_1(k) - \frac{C}{W_U} x_2(k) + \frac{K_S}{W_U} x_3(k) + \frac{C}{W_U} x_4(k) + \frac{u(k)}{W_u} \quad (6. 26)$$

$$dx_3 = x_4(k) \quad (6. 27)$$

$$dx_4(k) = \frac{K_S}{W_S} x_1(k) + \frac{C}{W_S} x_2(k) - \frac{K_S}{W_S} x_3(k) - \frac{C}{W_S} x_4(k) \quad (6. 28)$$

Donde  $u(k)$  es el valor  $k$ -ésimo del perfil de camino que se desee simular. Teniendo esto en cuenta, la solución del valor  $k+1$  del sistema de ecuaciones diferenciales está dado por:

$$x_1(k + 1) = dx_1(k) h \quad (6. 29)$$

$$x_2(k + 1) = dx_2(k) h \quad (6. 30)$$

$$x_3(k + 1) = dx_3(k) h \quad (6. 31)$$

$$x_4(k + 1) = dx_4(k) h \quad (6. 32)$$

Este modelo es muy sencillo y representa una herramienta con error bastante aceptable cuando el tamaño de paso ( $h$ ) es muy pequeño en relación a la magnitud de los resultados [23].

Simulando el sistema de suspensión para el perfil mostrado en la *figura 6.10* con un tamaño de paso  $h=0.001$  y condiciones iniciales nulas en  $t=0$ . El resultado para los segundos de 495 a 501 se muestran en la *figura 6.11*, en la cual vemos el perfil de camino,  $x_1$  (posición de masa no suspendida) y  $x_3$  (posición de masa suspendida). Cerca del segundo 497 de simulación tenemos un cambio grande en el perfil del piso, esto produce una respuesta grande en el sistema lo que genera un sobrepaso en la posición de chasis y del neumático.

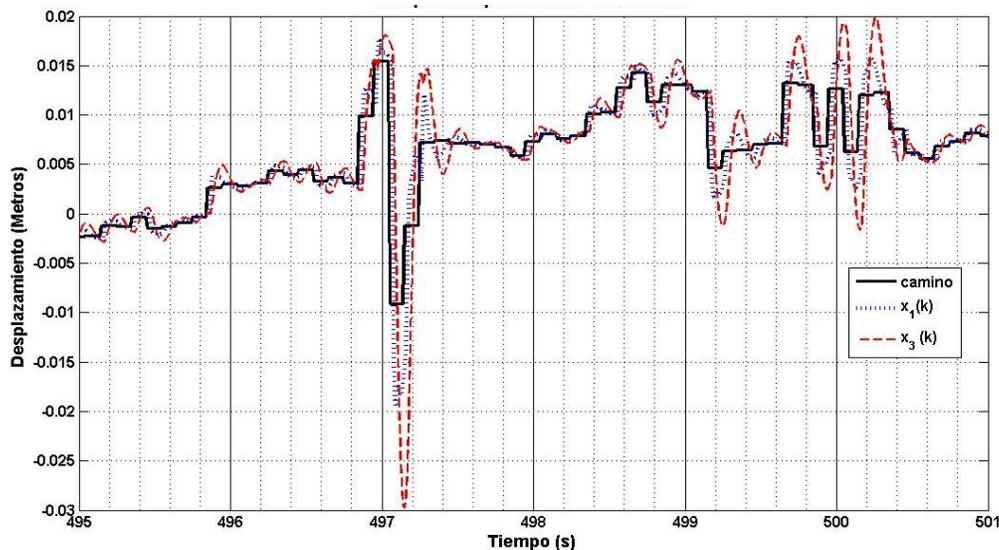


Figura 6. 11 Resultados de simulación de método numérico de Euler

En resumen, el método numérico de Euler representa una herramienta útil para la simulación de cualquier perfil de camino grabado en el sistema de telemetría, con este perfil se puede hacer simulación sobre el tipo de resorte o ajuste de amortiguador antes de llevarlo a pista.

#### 6.4 Fuerzas en los neumáticos

En la presente sección se mostrará las ecuaciones con las que se pueden calcular las fuerzas normales en cada uno de los neumáticos, partiendo de las medidas en los potenciómetros de los amortiguadores y los cálculos de transferencia de carga de la sección 3.2.

Con el fin de poder saber la fuerza normal que puede haber en cada uno de los neumáticos durante una prueba, requerimos hacer procesamiento de los datos arrojados por el sistema de telemetría. Para calcular la carga en los neumáticos debemos seguir la lógica de la *figura 6.12*, en ella observamos que es necesario saber la posición del amortiguador y las relaciones geométricas entre el piso y los amortiguadores/barras de torsión.

Las fuerzas que actúan sobre el neumático que podemos medir directamente son:

- Fuerza del resorte ( $F_S$ ): Que es la compresión medida multiplicada por la constante del resorte, más un valor de precarga en caso de tenerlo.
- Fuerza del amortiguador ( $F_C$ ): Fuerza debida a la velocidad de compresión y la constante del amortiguador que depende del ajuste que éste tenga.
- Fuerza debida a la barra de torsión ( $F_{ARB}$ ): Ésta es aproximada mediante el motion ratio de la barra de torsión y el ángulo de torsión en la barra.
- Fuerza del bump-stop ( $F_{BS}$ ): Éste es un caucho localizado en los amortiguadores que evita una sobre-compresión que pueda dañarlo.



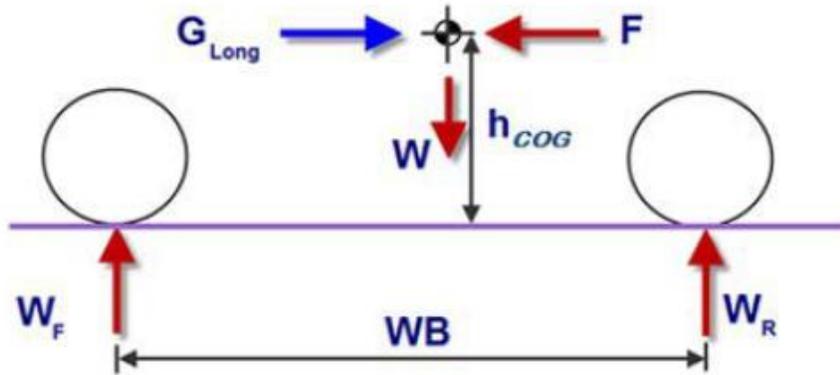


Figura 6. 13 Transferencia de carga longitudinal

Con esta expresión tenemos la última fórmula para poder calcular las fuerzas en cada uno de los neumáticos, para la fuerza debida a trasferencia de carga es necesario medir las aceleraciones del centro de gravedad.

Es por ello que regresando a las ecuaciones 3.9 a 3.14 (dela sección 3.2) se tiene la transferencia de carga debido a la masa no suspendida ( $\Delta W_{uF}$  y  $\Delta W_{uR}$ ), la transferencia de carga lateral geométrica ( $\Delta W_{gF}$  y  $\Delta W_{gR}$ ) y la transferencia debido a la masa suspendida ( $\Delta W_{sF}$  y  $\Delta W_{sR}$ ). Ahora bien, debemos agregar la contribución debida a la transferencia de carga longitudinal, la fuerza debida al resorte, la de la barra de torsión, la fuerza del amortiguador y en caso de tenerlo, la fuerza debida a los bump-stops.

Por lo que para cada neumático podemos calcular la transferencia de carga como:

$$F_{Z1} = F_{S1} + F_{C1} + F_{ARB_F} + F_{BS1} - (\Delta W_{uF} + \Delta W_{gF} + \Delta W_{sF}) \quad (6. 33)$$

$$F_{Z2} = F_{S2} + F_{C2} + F_{ARB_F} + F_{BS2} + (\Delta W_{uF} + \Delta W_{gF} + \Delta W_{sF}) \quad (6. 34)$$

$$F_{Z3} = F_{S3} + F_{C3} + F_{ARB_R} + F_{BS3} - (\Delta W_{uR} + \Delta W_{gR} + \Delta W_{sR}) \quad (6. 35)$$

$$F_{Z4} = F_{S4} + F_{C4} + F_{ARB_R} + F_{BS4} + (\Delta W_{uR} + \Delta W_{gR} + \Delta W_{sR}) \quad (6. 36)$$

Con las anteriores ecuaciones es posible obtener los valores de carga normal en el neumático.



## Conclusiones

En el desarrollo del sistema de los años 2013 y 2014 se logró contribuir a la metodología del diseño de la suspensión del auto Formula SAE de la UNAM. En el presente trabajo se pudo mostrar el camino que la experiencia y la teoría me han podido enseñar.

A grandes rasgos podemos concluir que el sistema de suspensión se puede definir y desarrollar mediante tres metas principales (tomadas de la literatura):

1. Optimización del neumático: Mediante parámetros geométricos del neumático y brazos de suspensión.
2. Minimizar transferencia de carga: Mediante el diseño de gradiente de roll así como su distribución.
3. Maximización de la huella del neumático: Mediante el sistema de energía y la optimización en los amortiguadores.

Por otro lado, queda clara la importancia del neumático en la dinámica de todo el auto en competencia, ya que en él se desarrollan las fuerzas para poder mover el coche y aún más valioso poder predecir su comportamiento en diferentes escenarios. Y es por ello que en este trabajo se hace hincapié en su estudio, siendo el primer eslabón en el diseño de la suspensión, dándonos como resultado los rangos óptimos de desempeño en los cuales la geometría busca trabajar la mayoría del tiempo.

Se desarrolló el camino para el diseño de parámetros geométricos basados en los datos de las llantas y las recomendaciones que [4] y [6] hacen, así como ayudándonos del software WinGeo y Adams/Car para lograrlo. Como segundo paso se enlistaron los puntos que deben tomarse en cuenta para el diseño geométrico de la suspensión:

- Camber estático y cambio de camber: El valor estático debe ser elegido un poco antes de su pico en la curva Camber vs Slip Angle. Esto con el fin de maximizar la tracción cuando el auto esté en curvas. Por otro lado, el cambio de camber (camber gain) es inversamente proporcional a la distancia de los centros de rotación (IC) de cada neumático, es por ello que a mayor IC será menor el cambio de camber.
- Eje de Roll: La altura del roll center delantero debe ser menor al roll center trasero, con el fin de crear un eje de roll con inclinación positiva. Ya que sobre este eje imaginario el auto girará y al hacer que apunte hacia abajo en su parte frontal, hará que el auto sea más estable al dar una curva.
- Camber trasero: Debe ser cero (o lo más cercano a él), esto con el fin de maximizar la capacidad de tracción de las llantas motrices (llantas traseras).
- Ángulo de Toe y Bump-Steer: En este caso el ángulo se considera cero. Y para evitar que éste se presente en competencia los sistemas de suspensión delantero y trasero no deben presentar el fenómeno de Bump-Steer o ganancia de toe cuando se presenta un bump.

- Ángulo de Kingpin y Caster: Ambos deben ser diseñado en base a los datos de los neumáticos, ya que estos ángulos generan scrub radius y caster trail, lo que a su vez genera momentos en el neumático ( $M_x$  o  $M_z$ ).

Dado que con esto cumplimos con el primer punto, el cual es entender los neumáticos y el desarrollo de parámetros geométricos. El siguiente punto es minimizar transferencia de carga mediante el estudio de gradiente de roll en el auto. Podemos concluir que este parámetro nos muestra cómo será la distribución de peso en cada neumático durante una vuelta, con el fin de saber si al auto estará en balance o no. Con este trabajo podemos resumir que el diseño del gradiente de roll se da conforme a los siguientes puntos.

- Estudio de tiempos en la competencia: aceleraciones laterales probables en competencia y elección de un roll rate deseado.
- Distribución de peso en estático: conocer la distribución y localización de la masa suspendida y no suspendida del auto (Capítulo 6).
- Elección de la distribución del gradiente de roll: En este caso llegamos a un valor entre 56% y 58% de gradiente de roll en la parte delantera. Esto con el fin de que la transferencia de carga delantera y trasera sean muy parecidas para mantener el auto en balance.
- Elección de resortes y barras de torsión para cumplir con el roll rate requerido.
  - Installation Ratio/Motion Ratio: *Debe ser lo más cercano a uno.*
  - Barras de torsión: deben ser lo más ligeras posibles, en mi experiencia entre más cortas serán más rígidas, es por ello que el empaquetamiento juega un papel muy importante.
- Uso de Simulaciones en Adams/Car.

Por otro lado, para poder maximizar el área de contacto entre el neumático y el camino, se lograron utilizar y desarrollar los modelos dinámicos masa-resorte-amortiguador, de los cuales concluimos que tanto el modelo que tiene como entrada una fuerza y el que tiene una entrada como desplazamiento, tienen los mismos polos. Sin embargo, la ganancia y ceros son diferentes, lo que hace que la respuesta de estos sistemas sea diferente. Por último, para poder utilizar el concepto de transmisibilidad es necesario usar el modelo que tiene como entrada un desplazamiento.

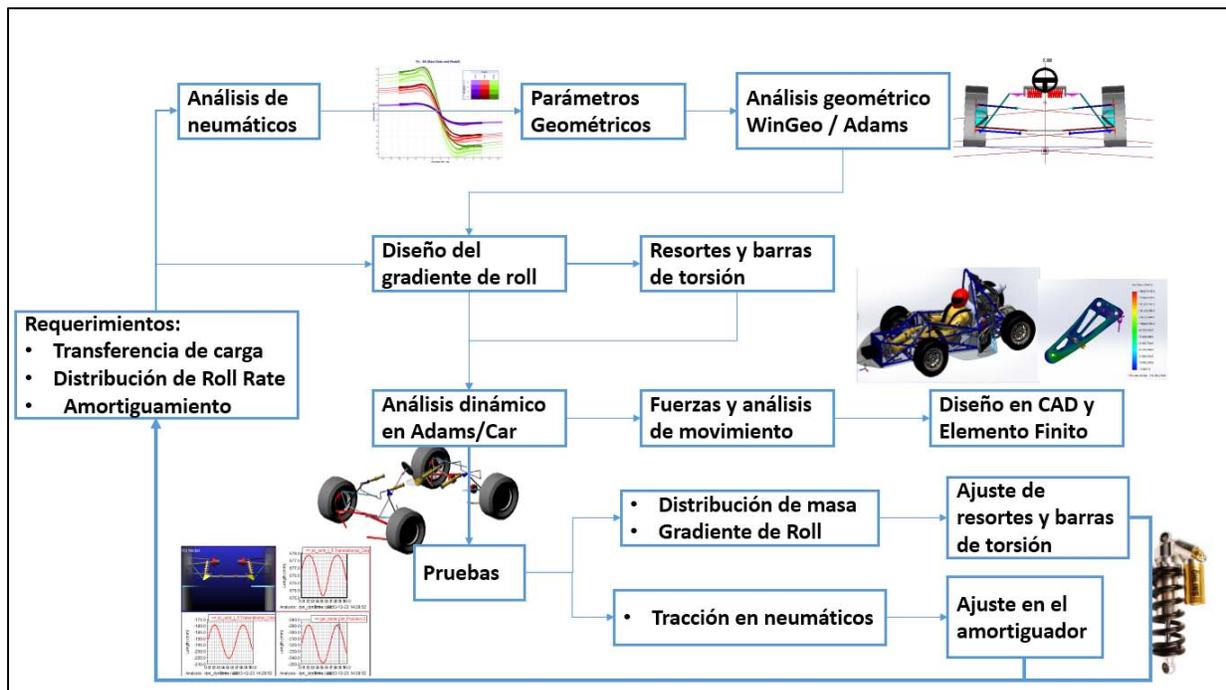
Mediante la transmisibilidad del sistema de 2do y 4to orden logramos proporcionar un ajuste apropiado en los amortiguadores que [19] sugiere:

- La constante de amortiguamiento debe ser mayor a extensión que a compresión.
- A altas velocidades esta constante debe ser menor, con respecto a su valor en bajas velocidades. Esto aplica para compresión y extensión por igual.
- Un factor de amortiguamiento ideal a compresión es 0.7 y a extensión 0.2.

Los puntos anteriores nos sirven para poder diseñar de manera apropiada el sistema de suspensión, así como para poder ajustar algunos de sus parámetros. Sin embargo, estamos en presencia de un sistema mecánico y gracias a las simulaciones en Adams/Car (así como su correcta caracterización) nos es posible estimar la cantidad de fuerzas que se pueden presentar en cada una de las uniones del sistema de suspensión, así como su interacción con los sistemas de masa no suspendida y el chasis. Es por ello que los resultados deben ser compartidos con las personas encargadas de los sistemas que estén involucrados, esto con el fin de tener una mejor comunicación y además usar esa información como entrada en los análisis de elemento finito de sus piezas. Algunos ejemplos de cómo los análisis hechos en Adams ayudan a otros sistemas los enlistamos a continuación.

- Sistema de suspensión: Elección de materiales en brazos, housings de rodamientos, rockers, barras de torsión. Así como elección de rodamientos y tornillos.
- Sistema de masa suspendida: Elección de materiales y geometría del upright, lo mismo aplica para la masa. Selección de tornillos y tuercas.
- Sistema de chasis. La rigidez de éste debe ser mayor que el sistema de suspensión y las fuerzas que hay en los brazos hacia el chasis, sirven para validar como estas fuerzas se distribuye en la estructura del chasis.
- Sistema de dirección: Las fuerzas que pueden presentarse en el volante, la columna de dirección y los tierods. Elección de materiales apropiados.

A manera de resumen la siguiente figura nos muestra el camino de diseño desarrollado a lo largo de este trabajo.



## Recomendaciones y trabajo a futuro.

Aunque el trabajo presentado es largo, aún quedan muchas áreas de oportunidad en la cuales se pueden trabajar, los cuales se pueden agrupar mediante:

- Análisis de más neumáticos.  
Ver la posibilidad de usar llantas con rines de diez pulgadas, con el fin de disminuir masa no suspendida y estudiar el desempeño de estos neumáticos.
- Cambios dinámicos en simulación.  
Usar software como Adams/Car, TESISDynaware o Vi-Grade Motorsports; con el fin de cambiar parámetros como: neumáticos, rigidez de la suspensión, camber, ajustes de los amortiguadores, masa y barras de torsión; esto con el fin de optimizar el tiempo por vuelta y nos brinde una mejor idea del ajuste para el modelo en desarrollo.
- Análisis de deformación.  
Dado que los análisis hechos es este trabajo involucra el uso sistemas rígidos, no tomamos en cuenta la deformación que hay en cada uno de los brazos de suspensión y las piezas en el sistema de suspensión. Por ello, es recomendable tener como metas deformaciones límites en las piezas en lugar del factor de seguridad. Estas deformaciones entran en el análisis de compliance, el cual es útil para comprobar por qué el auto no cumple con el gradiente de roll esperado.
- Motion Ratio y barras de torsión.  
El valor de installation ratio (IR) o motion ratio (MR) debe ser lo más cercano a uno. Por otro lado, las barras de torsión es recomendable que sean lo más pequeñas posibles, cerca de 15cm de largo, para ello se debe trabajar mejor en el empaquetamiento del sistema de energía.
- Simulación del perfil de piso.  
Con el fin de optimizar y entender el comportamiento de los amortiguadores es recomendable usar el programa desarrollado en la sección 6.3.
- Histograma del amortiguador.  
Otro método para el ajuste de amortiguadores es el uso de histogramas, el cual se puede entender mejor en la referencia [16].
- Pruebas.  
Comprobar la influencia de la presión de neumáticos y su temperatura en pruebas. Además del uso del galgas extensiométricas en algunos brazos de suspensión y de esta forma comprobar la magnitud de las fuerzas que se presentan.

---

## Bibliografía

- [1] S. International, 2014 Formula SAE Rules, SAE International, 2013.
- [2] E. M. Kasprzak, The Formula SAE Tire Test Consortium-Tire Testing and Data, SAE international, 2006.
- [3] D. Milliken, «Milliken Research Associates Incorporated,» 2014. [En línea].
- [4] W. F. Milliken, Reza Car Vehicle Dynamics, 1995.
- [5] N. D. Smith, Understanding Parameters Influencing Tire Modeling, Colorado State University, 2004.
- [6] C. Smith, Tune To Win, Aero, 1978.
- [7] R. N. Jazar, Vehicle Dynamics: Theory and Application, Riverdale, NY: Springer, 2007.
- [8] K. Optimum, «Optimum G,» 2014. [En línea]. Available: <http://www.optimumg.com/software/optimumkinematics/documentation/>. [Último acceso: 2014 Agosto 13].
- [9] H. B. Pacejka, Tyre and Vehicle Dynamics.
- [10] M. Royce, Learn and Compete, race tech, 2013.
- [11] S. International, «Result-Formula SAE Series,» [En línea]. Available: <http://students.sae.org/cds/formulaseries/results/>. [Último acceso: 26 Agosto 2014].
- [12] M. Giaraffa, «Tech Tip: Springs & Dampers, Part Two. Attack of the units,» 2014. [En línea]. Available: <http://www.optimumg.com/technical/technical-papers/>. [Último acceso: 12 Agosto 2014].
- [13] P. Van de Bos, Design of a Formula Student Race Car Spring - Damper System., Eindhoven, 2010.
- [14] F. Beer y E. R. Johnston, Static and mechanics of materials, New York: Mc Graw Hill, 2011.
- [15] M. Software, «Adams/Car Learning Guide,» MSC , [En línea]. Available: [http://www.me.ua.edu/me364/adams\\_car\\_learning\\_guide.htm](http://www.me.ua.edu/me364/adams_car_learning_guide.htm). [Último acceso: 31 08 2014].
- [16] J. Sergers, Analysis Techniques for Racecar Data Acquisition, SAE International, 2014.
- [17] Ö. USA, «TTX25 MkII,» Öhlins USA, [En línea]. Available: <http://www.ohlinsusa.com/ohlins-ttx->

- 25-fsae. [Último acceso: 2014 September 2014].
- [18] N. Nise, Control systems engineering, California State: John Wiley & Son, Inc, 2011.
- [19] M. Giariffa y S. Beisson, «Tech Tip: Spring & Dampers, Episode Four. A New Understanding,» [En línea]. Available: <http://www.optimumg.com/technical/technical-papers/>. [Último acceso: 3 Octubre 2014].
- [20] M. Software, «Using the special FSAE database with Adams/Car 2012,» 20 Agosto 2012. [En línea]. Available: <https://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=KB8020723>. [Último acceso: 6 Octubre 2014].
- [21] OptimumG, OptimumT: Tire Analysis Software, Denver, 2013.
- [22] S. Lopez, Sistema de telemetria, Ciudad de México: UNAM FI, 2014.
- [23] S. Chapra y R. Canale, Métodos numéricos para ingenieros, Ciudad de México: McGraw-Hill, 2007.
- [24] B. A. Jawad y B. D. Polega, «Design of Formula SAE Suspension Components,» SAE International, 2002.
- [25] M. Giaraffa, «Tech Tip: Springs & Dampers, Part One. The Phantom Knowledge,» 2014. [En línea]. Available: <http://www.optimumg.com/technical/technical-papers/>. [Último acceso: 12 Agosto 2014].

# Anexo

## A.1.1 Programas para el análisis de neumáticos en la prueba de “cornering”

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 1 of 10

```
%% Programa para filtrar datos de llantas en Cornering y Obtener Modulos
%Escribir Arroyo Aldo Guillermo
%Lider de Simulacion
%Formula SA8 SHAM
%% Elegimos entre uno u otro testing
clear; %limpiamos toda la memoria

***** CONTINENTAL *****
load H1464run1.mat %cargamos Continental Lira 10 W4
load H1464run5.mat %cargamos Continental Lira 10 W4 Zorridas, %
load H1464run8.mat %cargamos Continental Lira 10 W4 cuatro corridas

***** HOOSIER *****
load H1464run1.mat %cargamos Hoosier Tiro 11 W1 Cold in hot
load H1464run7.mat %cargamos Hoosier Tiro 11 W2_2 corridas
%% Filtro de datos para diferentes cargas normales
cont=0; %inicializamos contador
clearvars ind; %variable de posiciones
for i=1:length(FZ)
    %% Fz=50lb=220N
    if FZ(i) >= 210 && FZ(i) <= 215
        FZ_50lb(i)=FZ(i);
        SA_50lb(i)=SA(i);
        SR_50lb(i)=SR(i);
        FY_50lb(i)=FY(i);
        FX_50lb(i)=FX(i);
        ME_50lb(i)=ME(i);
        MX_50lb(i)=MX(i);
        NYF_50lb(i)=NYF(i);
        NFX_50lb(i)=NFX(i);
        %%Funcion Modeling
        if SA(i)>= -1.5 && SA(i)<=1.5
            SA_PAC_50lb(i)=SA(i);
            FY_PAC_50lb(i)=FY(i);
            ME_PAC_50lb(i)=ME(i);
            NYF_PAC_50lb(i)=NYF(i);
        end
        %%Adimensionalización
        Py_NonA_50lb(i)=(FY_50lb(i)/(NYF_50lb(i)*FZ_50lb(i)));
        end
        %% Fz=100lb=440N
        if FZ(i) >= 460 && FZ(i) <= 470
            FZ_100lb(i)=FZ(i);
            SR_100lb(i)=SR(i);
            SA_100lb(i)=SA(i);
            FY_100lb(i)=FY(i);
            FX_100lb(i)=FX(i);
            ME_100lb(i)=ME(i);
            MX_100lb(i)=MX(i);
            NYF_100lb(i)=NYF(i);
            NFX_100lb(i)=NFX(i);
            if SA(i)>= -2.5 && SA(i)<=2.5
                SA_PAC_100lb(i)=SA(i);
                FY_PAC_100lb(i)=FY(i);
            end
        end
    end
end

%%Adimensionalización
Py_NonA_100lb(i)=(FY_100lb(i)/(NYF_100lb(i)*FZ_100lb(i)));
end
%% Fz=150lb=660N
if FZ(i) >= 1130 && FZ(i) <= 1150
    FZ_150lb(i)=FZ(i);
    SA_150lb(i)=SA(i);
    SR_150lb(i)=SR(i);
    FY_150lb(i)=FY(i);
    FX_150lb(i)=FX(i);
    ME_150lb(i)=ME(i);
    MX_150lb(i)=MX(i);
    NYF_150lb(i)=NYF(i);
    NFX_150lb(i)=NFX(i);
    if SA(i)>= -2.9 && SA(i)<=2.9
        SA_PAC_150lb(i)=SA(i);
        FY_PAC_150lb(i)=FY(i);
        ME_PAC_150lb(i)=ME(i);
        NYF_PAC_150lb(i)=NYF(i);
    end
    %%Adimensionalización
    Py_NonA_150lb(i)=(FY_150lb(i)/(NYF_150lb(i)*FZ_150lb(i)));
    end
end
%% Fz=250lb=1120N
if FZ(i) >= 1130 && FZ(i) <= 1150
    FZ_250lb(i)=FZ(i);
    SA_250lb(i)=SA(i);
    SR_250lb(i)=SR(i);
    FY_250lb(i)=FY(i);
    FX_250lb(i)=FX(i);
    ME_250lb(i)=ME(i);
    MX_250lb(i)=MX(i);
    NYF_250lb(i)=NYF(i);
    NFX_250lb(i)=NFX(i);
    if SA(i)>= -3.2 && SA(i)<=3.2
        SA_PAC_250lb(i)=SA(i);
        FY_PAC_250lb(i)=FY(i);
        ME_PAC_250lb(i)=ME(i);
        NYF_PAC_250lb(i)=NYF(i);
    end
    %%Adimensionalización
    Py_NonA_250lb(i)=(FY_250lb(i)/(NYF_250lb(i)*FZ_250lb(i)));
    end
end
%% Fz=350lb=1560N
if FZ(i) >= 1570 && FZ(i) <= 1630
    FZ_350lb(i)=FZ(i);
    SA_350lb(i)=SA(i);
    SR_350lb(i)=SR(i);
    FY_350lb(i)=FY(i);
    FX_350lb(i)=FX(i);
    ME_350lb(i)=ME(i);
    MX_350lb(i)=MX(i);
end
end
end
```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 3 of 10

```
NYF_350lb(i)=NYF(i);
NFX_350lb(i)=NFX(i);
if SA(i)>= -3.2 && SA(i)<=3.2
    SA_PAC_350lb(i)=SA(i);
    FY_PAC_350lb(i)=FY(i);
    ME_PAC_350lb(i)=ME(i);
    NYF_PAC_350lb(i)=NYF(i);
end
%%Adimensionalización
Py_NonA_350lb(i)=(FY_350lb(i)/(NYF_350lb(i)*FZ_350lb(i)));
end
%% Cálculo de corner vs FY
if FZ(i)>=300 && FZ(i)<=400
    FY_C(i)=FY(i);
    IA_C(i)=IA(i);
    FZ_C(i)=FZ(i);
    FY_C(i)=FY(i);
end
end
%% ***** Slip Angle vs Lateral Force *****
%%Gráficas de todos los datos
h2=figure;
plot(SA,FY,'b');
xlabel('Lateral Force (Newtons)');
ylabel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
grid on
title('SA vs FY all data - - ', h2aid);
hold off
%%Polinomios 1avo orden para aproximación
y2=polyfit(SA_50lb,FY_50lb,14);
y2=polyfit(SA_100lb,FY_100lb,14);
y3=polyfit(SA_150lb,FY_150lb,14);
y4=polyfit(SA_250lb,FY_250lb,14);
y5=polyfit(SA_350lb,FY_350lb,14);
y2Plot = polyval(y2,SA_50lb);
y3Plot = polyval(y3,SA_150lb);
y4Plot = polyval(y4,SA_250lb);
y5Plot = polyval(y5,SA_350lb);
%%-----Gráficas de polinomios SA vs FY
h3=figure;
figure(h3);
plot(SA_50lb,y2Plot,'b');
hold on
plot(SA_100lb,y3Plot,'r');
plot(SA_150lb,y4Plot,'g');
plot(SA_250lb,y5Plot,'k');
xlabel('Lateral Force (N)');
ylabel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 [N]', '440 [N]', '667 [N]', '1133 [N]', '1566 [N]');
grid on
title('SA vs FY - - ', h3aid);
hold off
%%-----Ejemplo de Datos, Poly 14 y aprox lineal.
h7=figure;
figure(h7);
plot(SA_350lb,FY_350lb,'b');
hold on;
plot(SA_350lb,y5Plot,'k');
plot(SA_PAC_350lb,FY_PAC_350lb,'r');
```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 2 of 10

```
ME_PAC_100lb(i)=ME(i);
NYF_PAC_100lb(i)=NYF(i);
end
%%Adimensionalización
Py_NonA_100lb(i)=(FY_100lb(i)/(NYF_100lb(i)*FZ_100lb(i)));
end
%% Fz=160lb=720N
if FZ(i) >= 650 && FZ(i) <= 640
    FZ_160lb(i)=FZ(i);
    SA_160lb(i)=SA(i);
    SR_160lb(i)=SR(i);
    FY_160lb(i)=FY(i);
    FX_160lb(i)=FX(i);
    ME_160lb(i)=ME(i);
    MX_160lb(i)=MX(i);
    NYF_160lb(i)=NYF(i);
    NFX_160lb(i)=NFX(i);
    if SA(i)>= -2.9 && SA(i)<=2.9
        SA_PAC_160lb(i)=SA(i);
        FY_PAC_160lb(i)=FY(i);
        ME_PAC_160lb(i)=ME(i);
        NYF_PAC_160lb(i)=NYF(i);
    end
    %%Adimensionalización
    Py_NonA_160lb(i)=(FY_160lb(i)/(NYF_160lb(i)*FZ_160lb(i)));
    end
end
%% Fz=260lb=1170N
if FZ(i) >= 1130 && FZ(i) <= 1150
    FZ_260lb(i)=FZ(i);
    SA_260lb(i)=SA(i);
    SR_260lb(i)=SR(i);
    FY_260lb(i)=FY(i);
    FX_260lb(i)=FX(i);
    ME_260lb(i)=ME(i);
    MX_260lb(i)=MX(i);
    NYF_260lb(i)=NYF(i);
    NFX_260lb(i)=NFX(i);
    if SA(i)>= -3.2 && SA(i)<=3.2
        SA_PAC_260lb(i)=SA(i);
        FY_PAC_260lb(i)=FY(i);
        ME_PAC_260lb(i)=ME(i);
        NYF_PAC_260lb(i)=NYF(i);
    end
    %%Adimensionalización
    Py_NonA_260lb(i)=(FY_260lb(i)/(NYF_260lb(i)*FZ_260lb(i)));
    end
end
%% Fz=360lb=1620N
if FZ(i) >= 1570 && FZ(i) <= 1630
    FZ_360lb(i)=FZ(i);
    SA_360lb(i)=SA(i);
    SR_360lb(i)=SR(i);
    FY_360lb(i)=FY(i);
    FX_360lb(i)=FX(i);
    ME_360lb(i)=ME(i);
    MX_360lb(i)=MX(i);
end
end
end
```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 4 of 10

```
y1_FY=polyfit(SA_PAC_50lb,FY_PAC_50lb,1);
y2_FY=polyfit(SA_PAC_100lb,FY_PAC_100lb,1);
y3_FY=polyfit(SA_PAC_150lb,FY_PAC_150lb,1);
y4_FY=polyfit(SA_PAC_250lb,FY_PAC_250lb,1);
y5_FY=polyfit(SA_PAC_350lb,FY_PAC_350lb,1);
%Evaluación de Poly de 1er grado
y1Plot_P = polyval(y1,FY_PAC_50lb);
y2Plot_P = polyval(y2,FY_PAC_100lb);
y3Plot_P = polyval(y3,FY_PAC_150lb);
y4Plot_P = polyval(y4,FY_PAC_250lb);
y5Plot_P = polyval(y5,FY_PAC_350lb);
%%-----Gráficas Aprox Poly 1º grado y Series lineales SA vs FY
h7=figure;
figure(h7);
plot(SA_50lb,y1Plot,'b');
hold on
plot(SA_100lb,y2Plot,'r');
plot(SA_150lb,y3Plot,'g');
plot(SA_250lb,y4Plot,'k');
plot(SA_350lb,y5Plot,'k');
plot(SA_PAC_50lb,y1Plot_P,'b');
hold on
plot(SA_PAC_100lb,y2Plot_P,'r');
plot(SA_PAC_150lb,y3Plot_P,'g');
plot(SA_PAC_250lb,y4Plot_P,'k');
plot(SA_PAC_350lb,y5Plot_P,'k');
xlabel('Lateral Force (N)');
ylabel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 [N]', '440 [N]', '667 [N]', '1133 [N]', '1566 [N]');
grid on
title('SA vs FY - - ', h7aid);
hold off
%%-----Ejemplo de Datos, Poly 14 y aprox lineal.
h7=figure;
figure(h7);
plot(SA_350lb,FY_350lb,'b');
hold on;
plot(SA_350lb,y5Plot,'k');
plot(SA_PAC_350lb,FY_PAC_350lb,'r');
```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 5 of 10

```

y1abel('Lateral Force (Fy) - N');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
grid on
title(strcat('SA vs MX - ', tircid));
hold off

%% ***** SA vs MX *****
%Polinomios 14vo orden para aproximación SA vs MX
y1_P_MX=polyfit(SA_501b,MX_501b,14);
y2_P_MX=polyfit(SA_1001b,MX_1001b,14);
y3_P_MX=polyfit(SA_1501b,MX_1501b,14);
y4_P_MX=polyfit(SA_2501b,MX_2501b,14);
y5_P_MX=polyfit(SA_3501b,MX_3501b,14);
y1Plot_P_MX = polyval(y1_P_MX,SA_501b);
y2Plot_P_MX = polyval(y2_P_MX,SA_1001b);
y3Plot_P_MX = polyval(y3_P_MX,SA_1501b);
y4Plot_P_MX = polyval(y4_P_MX,SA_2501b);
y5Plot_P_MX = polyval(y5_P_MX,SA_3501b);
%-----Gráficas de polinomios SA vs MX
h3=figure;
plot(SA_501b,y1Plot_P_MX,'b');
hold on
plot(SA_1001b,y2Plot_P_MX,'r');
plot(SA_1501b,y3Plot_P_MX,'g');
plot(SA_2501b,y4Plot_P_MX,'c');
plot(SA_3501b,y5Plot_P_MX,'k');
y1abel('Aligning Torque (Newton-Metro)');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
grid on
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
title(strcat('SA vs MX (Aprox) - ', tircid));
hold off

%Gráficas de Datos SA vs MX a diferentes cargas (Fz)
h4=figure;
figure(h4);
plot(SA_501b,MX_501b,'b');
hold on
plot(SA_1001b,MX_1001b,'r');
plot(SA_1501b,MX_1501b,'g');
plot(SA_2501b,MX_2501b,'c');
plot(SA_3501b,MX_3501b,'k');
legend('Fz=220 (N) (501b)', '440 (N) (1001b)', '667 (N) (1501b)', '1112 (N) (2501b)', '1556 (N) (3501b)');
y1abel('Mz (Newton-Metro)');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
grid on
title(strcat('SA vs MX Datos ordenados por Carga Normal - ', tircid));
hold off

%% ----- Aproximaciones lineales para SA vs MX
y1_MX=polyfit(SA_PAC_501b,MX_PAC_501b,1);
y2_MX=polyfit(SA_PAC_1001b,MX_PAC_1001b,1);
y3_MX=polyfit(SA_PAC_1501b,MX_PAC_1501b,1);
y4_MX=polyfit(SA_PAC_2501b,MX_PAC_2501b,1);
y5_MX=polyfit(SA_PAC_3501b,MX_PAC_3501b,1);

```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 7 of 10

```

%% ***** Coeficiente de fricción en Y *****
h5=figure;
figure(h5);
plot(SA_501b,NFY_501b,'b');
hold on
plot(SA_1001b,NFY_1001b,'r');
plot(SA_1501b,NFY_1501b,'g');
plot(SA_2501b,NFY_2501b,'c');
plot(SA_3501b,NFY_3501b,'k');
y1abel('Lateral Friction Coefficient (\mu_{m,y} ---)');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
grid on
title(strcat('SA vs M_{y} ', tircid));
hold off

%%Aproximacion Rango lineal
y1_NFY=polyfit(SA_PAC_501b,NFY_PAC_501b,1);
y2_NFY=polyfit(SA_PAC_1001b,NFY_PAC_1001b,1);
y3_NFY=polyfit(SA_PAC_1501b,NFY_PAC_1501b,1);
y4_NFY=polyfit(SA_PAC_2501b,NFY_PAC_2501b,1);
y5_NFY=polyfit(SA_PAC_3501b,NFY_PAC_3501b,1);

y1Plot_NFY = polyval(y1_NFY,SA_PAC_501b);
y2Plot_NFY = polyval(y2_NFY,SA_PAC_1001b);
y3Plot_NFY = polyval(y3_NFY,SA_PAC_1501b);
y4Plot_NFY = polyval(y4_NFY,SA_PAC_2501b);
y5Plot_NFY = polyval(y5_NFY,SA_PAC_3501b);
h7=figure;
figure(h7);
plot(SA_PAC_501b,y1Plot_NFY,'b');
hold on
plot(SA_PAC_1001b,y2Plot_NFY,'r');
plot(SA_PAC_1501b,y3Plot_NFY,'g');
plot(SA_PAC_2501b,y4Plot_NFY,'c');
plot(SA_PAC_3501b,y5Plot_NFY,'k');
y1abel('Lateral Force (Fy) - N');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
grid on
title(strcat('SA vs Fy - ', tircid));
hold off

%% ***** Coeficiente de fricción en X *****
h6=figure;
figure(h6);
plot(SA_501b,NFX_501b,'b');
hold on
plot(SA_1001b,NFX_1001b,'r');
plot(SA_1501b,NFX_1501b,'g');
plot(SA_2501b,NFX_2501b,'c');
plot(SA_3501b,NFX_3501b,'k');
y1abel('Longitudinal Friction Coefficient (\mu_{m,x} ---)');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
grid on
title(strcat('SA vs M_{x} ', tircid));

```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 6 of 10

```

y1Plot_MX = polyval(y1_MX,SA_PAC_501b);
y2Plot_MX = polyval(y2_MX,SA_PAC_1001b);
y3Plot_MX = polyval(y3_MX,SA_PAC_1501b);
y4Plot_MX = polyval(y4_MX,SA_PAC_2501b);
y5Plot_MX = polyval(y5_MX,SA_PAC_3501b);

%% ***** SA vs MX *****
%Polinomios 14vo orden para aproximación
y1_P_MX=polyfit(SA_501b,MX_501b,14);
y2_P_MX=polyfit(SA_1001b,MX_1001b,14);
y3_P_MX=polyfit(SA_1501b,MX_1501b,14);
y4_P_MX=polyfit(SA_2501b,MX_2501b,14);
y5_P_MX=polyfit(SA_3501b,MX_3501b,14);
y1Plot_P_MX = polyval(y1_P_MX,SA_501b);
y2Plot_P_MX = polyval(y2_P_MX,SA_1001b);
y3Plot_P_MX = polyval(y3_P_MX,SA_1501b);
y4Plot_P_MX = polyval(y4_P_MX,SA_2501b);
y5Plot_P_MX = polyval(y5_P_MX,SA_3501b);
%Gráficas con polinomios
h5=figure;
plot(SA_501b,y1Plot_P_MX,'b');
hold on
plot(SA_1001b,y2Plot_P_MX,'r');
plot(SA_1501b,y3Plot_P_MX,'g');
plot(SA_2501b,y4Plot_P_MX,'c');
plot(SA_3501b,y5Plot_P_MX,'k');
y1abel('Overturning Moment (Mx) - Nm');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
grid on
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
title(strcat('SA vs MX (Polinomios) - ', tircid));
hold off

%Gráficas sin aproximación
h6=figure;
figure(h6);
plot(SA_501b,MX_501b,'b');
hold on
plot(SA_1001b,MX_1001b,'r');
plot(SA_1501b,MX_1501b,'g');
plot(SA_2501b,MX_2501b,'c');
plot(SA_3501b,MX_3501b,'k');
y1abel('Overturning Moment (Mx) - Nm');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
grid on
title(strcat('SA vs MX data ', tircid));
hold off

%% ***** Camber vs FY *****
h8=figure;
plot(IA_C_FY_C,'b');
y1abel('Lateral Force (Fy) - N');
x1abel('Inclination Angle (IA) - IA');
grid on
title(strcat('Camber vs FY Filtrado ', tircid));

```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi PSA...\Cornering data.m 8 of 10

```

hold off

%% ***** Asimencionalización de datos *****
h9=figure;
figure(h9);
plot(SA_501b,Fy_NonA_501b,'b');
hold on
plot(SA_1001b,Fy_NonA_1001b,'r');
plot(SA_1501b,Fy_NonA_1501b,'g');
plot(SA_2501b,Fy_NonA_2501b,'c');
plot(SA_3501b,Fy_NonA_3501b,'k');
y1abel('Fy');
x1abel('Slip Angle (\alpha) - Deg');
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
grid on
title(strcat('SA vs M_{x} ', tircid));
hold off

%% ***** Gráficas Fz vs Mz *****
h6=figure;
figure(h6);
plot(FY_3501b,MZ_3501b,'k');
hold on
plot(FY_2501b,MZ_2501b,'c');
plot(FY_1501b,MZ_1501b,'g');
plot(FY_1001b,MZ_1001b,'r');
plot(FY_501b,MZ_501b,'b');
y1abel('Aligning Torque (Mz) - Nm');
x1abel('Lateral Force (Fy) - N');
legend('Fz=220 (N)', '440 (N)', '667 (N)', '1112 (N)', '1556 (N)');
grid on
title(strcat('FY vs MZ ', tircid));
hold off

%% ***** Sukonja Modeling for SA vs FY *****
Cornering_Stiffness = [y1_FY(1);y2_FY(1);y3_FY(1);y4_FY(1);y5_FY(1)];
Pendiente_Mz_vs_SA = [y1_MZ(1);y2_MZ(1);y3_MZ(1);y4_MZ(1);y5_MZ(1)];

dato=15:0:801;15;
ya_Pac=[500;1200;1750;2500;3500]; %Límite infinito
D_Pac=[525;1000;1500;2700;3100]; %Máximo punto de inflexión
xm=1:-3;-3;-2;-1.5;-1; %Eje de la curva
for i=1:length(ya_Pac)
C_Pac(i)=1-1/2/pi*asin(ya_Pac(i)/D_Pac(i)); %Shape Factor
B_Pac(i)=(Cornering_Stiffness(i))/(C_Pac(i)*D_Pac(i)); %Stiffness Factor
E_Pac(i)=(B_Pac(i)*xm(i)-tan(pi/12*C_Pac(i)))/(B_Pac(i)*xm(i)-atan(B_Pac(i)*xm(i)));
end
figure
Fy_PAC_501b=D_Pac(1)*sin(C_Pac(1)*atan(B_Pac(1)*dato-E_Pac(1))*(B_Pac(1)*dato+atan(B_Pac(1)*dato));
Fy_PAC_1001b=D_Pac(2)*sin(C_Pac(2)*atan(B_Pac(2)*dato-E_Pac(2))*(B_Pac(2)*dato+atan(B_Pac(2)*dato));
Fy_PAC_1501b=D_Pac(3)*sin(C_Pac(3)*atan(B_Pac(3)*dato-E_Pac(3))*(B_Pac(3)*dato+atan(B_Pac(3)*dato));
Fy_PAC_2501b=D_Pac(4)*sin(C_Pac(4)*atan(B_Pac(4)*dato-E_Pac(4))*(B_Pac(4)*dato+atan(B_Pac(4)*dato));
Fy_PAC_3501b=D_Pac(5)*sin(C_Pac(5)*atan(B_Pac(5)*dato-E_Pac(5))*(B_Pac(5)*dato+atan(B_Pac(5)*dato));

```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi FSA...\Cornering data.m 9 of 10

```
(B_Pac(5)*dato));
plot(SA_501b, PY_501b, 'b. '); hold on; grid on;
plot(SA_1001b, PY_1001b, 'r. ');
plot(SA_1501b, PY_1501b, 'g. ');
plot(SA_2501b, PY_2501b, 'c. ');
plot(SA_3501b, PY_3501b, 'k. ');

plot(dato, Py_PAC_501b, 'b. ');
plot(dato, Py_PAC_1001b, 'r. ');
plot(dato, Py_PAC_1501b, 'g. ');
plot(dato, Py_PAC_2501b, 'c. ');
plot(dato, Py_PAC_3501b, 'k. ');
ylabel('Lateral Force (Py) - N');
xlabel('Slip angle (\alpha) - Deg');
legend('220 [N]', '440 [N]', '667 [N]', '1112 [N]', '1556 [N]');
[NI, 'Modelo220N', 'Modelo440N', 'Modelo667N', 'Modelo1112N', 'Modelo1556N'];
grid on
title(strcat('Modelo en Pacejka "Magic Formula" para SA-Py - ', tiraid));
hold off
cic;
%% ***** Datos para Brakes *****
dato=-15:0.001:15;
ya_Pac_MZ=[0;0;0;0;0]; %Inicio infinito
D_Pac_MZ=[8.2;9.34;64;107]; %Maximo (punto de inflexión)
xm_MZ=[3;2.9;3;3.5;4]; %Ordenada del pico
for i=1:length(ya_Pac_MZ)
C_Pac_MZ(i)=(1-(2/pi)*asin(ya_Pac_MZ(i)/D_Pac_MZ(i))); %Shape Factor
B_Pac_MZ(i)=(Pendiente_Mz_vs_SA(i))/(C_Pac_MZ(i)*D_Pac_MZ(i)); %Stiffness Factor
H_Pac_MZ(i)=(B_Pac_MZ(i)*xm_MZ(i)-tan(pi/12*C_Pac_MZ(i)))/(B_Pac_MZ(i)*xm_MZ(i)-atan(
(B_Pac_MZ(i)*xm_MZ(i)));
end
figure
Mz_PAC_501b=D_Pac_MZ(1)*sin(C_Pac_MZ(1)*atan(B_Pac_MZ(1)*dato-H_Pac_MZ(1)
* dato-atan(B_Pac_MZ(1)*dato));
Mz_PAC_1001b=D_Pac_MZ(2)*sin(C_Pac_MZ(2)*atan(B_Pac_MZ(2)*dato-H_Pac_MZ(2)
* dato-atan(B_Pac_MZ(2)*dato));
Mz_PAC_1501b=D_Pac_MZ(3)*sin(C_Pac_MZ(3)*atan(B_Pac_MZ(3)*dato-H_Pac_MZ(3)
* dato-atan(B_Pac_MZ(3)*dato));
Mz_PAC_2501b=D_Pac_MZ(4)*sin(C_Pac_MZ(4)*atan(B_Pac_MZ(4)*dato-H_Pac_MZ(4)
* dato-atan(B_Pac_MZ(4)*dato));
Mz_PAC_3501b=D_Pac_MZ(5)*sin(C_Pac_MZ(5)*atan(B_Pac_MZ(5)*dato-H_Pac_MZ(5)
* dato-atan(B_Pac_MZ(5)*dato));
plot(SA_501b, Mz_PAC_501b, 'b. '); hold on; grid on;
plot(SA_1001b, Mz_PAC_1001b, 'r. ');
plot(SA_1501b, Mz_PAC_1501b, 'g. ');
plot(SA_2501b, Mz_PAC_2501b, 'c. ');
plot(SA_3501b, Mz_PAC_3501b, 'k. ');

plot(dato, Mz_PAC_501b, 'b. ');
plot(dato, Mz_PAC_1001b, 'r. ');
plot(dato, Mz_PAC_1501b, 'g. ');
plot(dato, Mz_PAC_2501b, 'c. ');
plot(dato, Mz_PAC_3501b, 'k. ');
cic;
```

3/08/14 05:59 PM F:\Dropbox\Mi FSA...\Cornering data.m 10 of 10

```
ylabel('Aligning Torque (Mz) - Nm');
xlabel('Slip angle (\alpha) - Deg');
legend('220 [N]', '440 [N]', '667 [N]', '1112 [N]', '1556 [N]');
[NI, 'Modelo220N', 'Modelo440N', 'Modelo667N', 'Modelo1112N', 'Modelo1556N'];
grid on
title(strcat('Modelo en Pacejka "Magic Formula" para SA-Mz - ', tiraid));
hold off
cic;
%% ***** Datos para Brakes *****
figura;
plot3(SA_501b, SR_501b, PY_501b, 'b. '); hold on; grid on;
plot3(SA_1001b, SR_1001b, PY_1001b, 'r. ');
plot3(SA_1501b, SR_1501b, PY_1501b, 'g. ');
plot3(SA_2501b, SR_2501b, PY_2501b, 'c. ');
plot3(SA_3501b, SR_3501b, PY_3501b, 'k. ');
xlabel('Slip angle (\alpha) - Deg');
ylabel('Slip Ratio (SR) - ');
zlabel('Lateral Force (Py) - N');
%% ***** Tablas con relaciones de Cornering stiffness *****
Cargas = ('9;220 [N]', '440 [N]', '667 [N]', '1112 [N]', '1556 [N]');
Rcuaciones=[y1_FY ; y2_FY ; y3_FY ; y4_FY ; y5_FY ];
Ca_div_FZ=[Cornering_Stiffness(1)/220; Cornering_Stiffness(2)/440; Cornering_Stiffness(
(3)/667; Cornering_Stiffness(4)/1112; Cornering_Stiffness(5)/1556];
Mz_y_Pendientes=[y1_NFY(1); y2_NFY(1); y3_NFY(1); y4_NFY(1); y5_NFY(1)];

Tabla_Ca = table(Cornering_Stiffness, Rcuaciones, Pendiente_Mz_vs_SA, Ca_div_FZ, '
Mz_y_Pendientes, ...
'RowNames', Cargas);

B_Pac=transpose(B_Pac); C_Coef= transpose(C_Pac); D_Coef=D_Pac; H_Coef=transpose(H_Pac)
Tabla_Pacjaka_SA_vs_FY=table(ya_Pac, xm, B_Coef, C_Coef, D_Coef, H_Coef, ...
'RowNames', Cargas);
B_Coef=transpose(B_Pac_MZ); C_Coef= transpose(C_Pac_MZ); D_Coef=D_Pac_MZ;
H_Coef=transpose(H_Pac_MZ);

Tabla_Pacjaka_SA_vs_MZ=table(ya_Pac_MZ, xm_MZ, B_Coef, C_Coef, D_Coef, H_Coef, ...
'RowNames', Cargas);
cic
disp(strcat('Tabla de datos de regresión lineal para SA vs FY, así como SA vs Mz en
- ', tiraid));
disp(Tabla_Ca);
disp(strcat('Tabla de Coeficientes en el Modelo Pacejka "Magic Formula" para SA vs Py
on - ', tiraid));
disp(Tabla_Pacjaka_SA_vs_FY);
disp(strcat('Tabla de Coeficientes en el Modelo Pacejka "Magic Formula" para SA vs Mz
on - ', tiraid));
disp(Tabla_Pacjaka_SA_vs_MZ);
```

## A.1.2 Programa para filtrar datos en la prueba de “Brakes”

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi FSAE...\Brakes data.m 1 of 10

```
%%Brakes Testing, 3do programa
%Espejel Arroyo Aldo Guillermo
%Slider Dinamica 2014
%Formula EAE UNAM 2014
%% Elegimos entre una u otro testing
clear; %limpiamos toda la memoria
%CONTINENTAL
load B1464run47.mat %cargamos Continental Tira 12 Free Rolling, Varios produce
FSAE%
load B1464run48.mat %cargamos Continental Tira 12 SR_+20, Load(350, 150, 250, 50)
%3
load B1464run49.mat %cargamos Continental Tira 12 SR_+20, Load(250, 150, 200,
50); (350, 150, 250, 50)
%HOOSIER
load B1464run44.mat %cargamos Hoosier Tira 17 Free Rolling, Varios produce FSAE%
load B1464run45.mat %cargamos Hoosier Tira 17 SR_+20, Load(350, 150, 250, 50)
%3
load B1464run46.mat %cargamos Hoosier Tira 17 SR_+20, Load(250, 150, 200, 50)
%3
%% Filtro de datos para diferentes cargas normales
clearvars ind; %variable de posición
for i=1:length(FZ)
%% Fz=501b-220N
if FZ(i) >= 220 && SA(i) <= 2.0
FZ_501b(i)=FZ(i);
SR_501b(i)=SR(i);
SA_501b(i)=SA(i);
FY_501b(i)=FY(i);
FX_501b(i)=FX(i);
MX_501b(i)=MX(i);
MY_501b(i)=MY(i);
NFX_501b(i)=NFX(i);
%%% Refiltrado para efecto de IA
if IA(i) >= 0.2 && IA(i) <= 0.2 %IA=0
IA0_501b(i)=IA(i);
SR_IA0_501b(i)=SR(i);
FX_IA0_501b(i)=FX(i);
FY_IA0_501b(i)=FY(i);
end
if IA(i) >= 1.8 && IA(i) <= 2.2 %IA=2
IA2_501b(i)=IA(i);
SR_IA2_501b(i)=SR(i);
FX_IA2_501b(i)=FX(i);
FY_IA2_501b(i)=FY(i);
end
if IA(i) >= 3.8 && IA(i) <= 4.2 %IA=4
IA4_501b(i)=IA(i);
SR_IA4_501b(i)=SR(i);
FX_IA4_501b(i)=FX(i);
FY_IA4_501b(i)=FY(i);
end
%%-----Filtrando para SA
if SA(i) >= 0.2 && SA(i) <= 0.2 %SA=0
SA0_501b(i)=SA(i);
SA0_SR_501b(i)=SR(i);
SA0_FY_501b(i)=FY(i);
end
```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi FSAE...\Brakes data.m 2 of 10

```
SA0_FX_501b(i)=FX(i);
end
if SA(i) >= 3.2 && SA(i) <= 2.8 %SA=-3
SA3_501b(i)=SA(i);
SA3_SR_501b(i)=SR(i);
SA3_FY_501b(i)=FY(i);
SA3_FX_501b(i)=FX(i);
end
if SA(i) >= 6.2 && SA(i) <= 5.8 %SA=-6
SA6_501b(i)=SA(i);
SA6_SR_501b(i)=SR(i);
SA6_FY_501b(i)=FY(i);
SA6_FX_501b(i)=FX(i);
end
%%-----SA
%% Fz=1501b-667N
if FZ(i) >= 667 && FZ(i) <= 640
FZ_1501b(i)=FZ(i);
SR_1501b(i)=SR(i);
SA_1501b(i)=SA(i);
FY_1501b(i)=FY(i);
FX_1501b(i)=FX(i);
MX_1501b(i)=MX(i);
MY_1501b(i)=MY(i);
%%% Refiltrado para efecto de IA
if IA(i) >= 0.2 && IA(i) <= 0.2 %IA=0
IA0_1501b(i)=IA(i);
SR_IA0_1501b(i)=SR(i);
FX_IA0_1501b(i)=FX(i);
FY_IA0_1501b(i)=FY(i);
end
if IA(i) >= 1.8 && IA(i) <= 2.2 %IA=2
IA2_1501b(i)=IA(i);
SR_IA2_1501b(i)=SR(i);
FX_IA2_1501b(i)=FX(i);
FY_IA2_1501b(i)=FY(i);
end
if IA(i) >= 3.8 && IA(i) <= 4.2 %IA=4
IA4_1501b(i)=IA(i);
SR_IA4_1501b(i)=SR(i);
FX_IA4_1501b(i)=FX(i);
FY_IA4_1501b(i)=FY(i);
end
%%-----Filtrando para SA
if SA(i) >= 0.2 && SA(i) <= 0.2 %SA=0
SA0_1501b(i)=SA(i);
SA0_SR_1501b(i)=SR(i);
SA0_FY_1501b(i)=FY(i);
SA0_FX_1501b(i)=FX(i);
end
if SA(i) >= 3.2 && SA(i) <= 2.8 %SA=-6
SA3_1501b(i)=SA(i);
SA3_SR_1501b(i)=SR(i);
```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi FSAE ...\Brakes data.m 3 of 10

```

SA3_FY_1501b(1)=FY(1);
SA3_FX_1501b(1)=FX(1);
and
if SA(1)>=-6.2 && SA(1)<=-5.8 &&SA=6
    SA6_1501b(1)=SA(1);
    SA6_SR_1501b(1)=SR(1);
    SA6_FY_1501b(1)=FY(1);
    SA6_FX_1501b(1)=FX(1);
and
%%-----SA
and
%% Fz=2001b-800N
if FZ(1) >= -810 && FZ(1) <= -800
    FZ_2001b(1)=FZ(1);
    SR_2001b(1)=SR(1);
    SA_2001b(1)=SA(1);
    FY_2001b(1)=FY(1);
    FX_2001b(1)=FX(1);
    MZ_2001b(1)=MZ(1);
    MX_2001b(1)=MX(1);
    MFX_2001b(1)=MFX(1);
    %%% Filtro para efecto de IA
    if IA(1)>=-0.2 && IA(1)<=0.2 &&IA=0
        IA0_2001b(1)=IA(1);
        SR_IA0_2001b(1)=SR(1);
        FX_IA0_2001b(1)=FX(1);
        FY_IA0_2001b(1)=FY(1);
    and
    if IA(1)>=1.8 && IA(1)<=2.2 &&IA=2
        IA2_2001b(1)=IA(1);
        SR_IA2_2001b(1)=SR(1);
        FX_IA2_2001b(1)=FX(1);
        FY_IA2_2001b(1)=FY(1);
    and
    if IA(1)>=3.8 && IA(1)<=4.2 &&IA=4
        IA4_2001b(1)=IA(1);
        SR_IA4_2001b(1)=SR(1);
        FX_IA4_2001b(1)=FX(1);
        FY_IA4_2001b(1)=FY(1);
    and
    %%-----Filtrando para SA
    if SA(1)>=-0.2 && SA(1)<=0.2 &&SA=0
        SA0_2001b(1)=SA(1);
        SA0_SR_2001b(1)=SR(1);
        SA0_FY_2001b(1)=FY(1);
        SA0_FX_2001b(1)=FX(1);
    and
    if SA(1)>=-3.2 && SA(1)<=-2.8 &&SA=3
        SA3_2001b(1)=SA(1);
        SA3_SR_2001b(1)=SR(1);
        SA3_FY_2001b(1)=FY(1);
        SA3_FX_2001b(1)=FX(1);
    and
    if SA(1)>=-6.2 && SA(1)<=-5.8 &&SA=6
        SA6_2001b(1)=SA(1);

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi FSAE ...\Brakes data.m 5 of 10

```

%%-----SA
and
%% Fz=3501b-1150N
if FZ(1) >= -1170 && FZ(1) <= -1130
    FZ_3501b(1)=FZ(1);
    SR_3501b(1)=SR(1);
    SA_3501b(1)=SA(1);
    FY_3501b(1)=FY(1);
    FX_3501b(1)=FX(1);
    MZ_3501b(1)=MZ(1);
    MX_3501b(1)=MX(1);
    MFX_3501b(1)=MFX(1);
    %%% Filtro para efecto de IA
    if IA(1)>=-0.2 && IA(1)<=0.2 &&IA=0
        IA0_3501b(1)=IA(1);
        SR_IA0_3501b(1)=SR(1);
        FX_IA0_3501b(1)=FX(1);
        FY_IA0_3501b(1)=FY(1);
    and
    if IA(1)>=1.8 && IA(1)<=2.2 &&IA=2
        IA2_3501b(1)=IA(1);
        SR_IA2_3501b(1)=SR(1);
        FX_IA2_3501b(1)=FX(1);
        FY_IA2_3501b(1)=FY(1);
    and
    if IA(1)>=3.8 && IA(1)<=4.2 &&IA=4
        IA4_3501b(1)=IA(1);
        SR_IA4_3501b(1)=SR(1);
        FX_IA4_3501b(1)=FX(1);
        FY_IA4_3501b(1)=FY(1);
    and
    %%-----Filtrando para SA
    if SA(1)>=-0.2 && SA(1)<=0.2 &&SA=0
        SA0_3501b(1)=SA(1);
        SA0_SR_3501b(1)=SR(1);
        SA0_FY_3501b(1)=FY(1);
        SA0_FX_3501b(1)=FX(1);
    and
    if SA(1)>=-3.2 && SA(1)<=-2.8 &&SA=3
        SA3_3501b(1)=SA(1);
        SA3_SR_3501b(1)=SR(1);
        SA3_FY_3501b(1)=FY(1);
        SA3_FX_3501b(1)=FX(1);
    and
    if SA(1)>=-6.2 && SA(1)<=-5.8 &&SA=6
        SA6_3501b(1)=SA(1);
        SA6_SR_3501b(1)=SR(1);
        SA6_FY_3501b(1)=FY(1);
        SA6_FX_3501b(1)=FX(1);
    and
    %%-----SA
    and
    %% Familia para IA=0
    if IA(1)>=-0.2 && IA(1)<=0.2
        IA0_3501b(1)=IA(1);

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi FSAE ...\Brakes data.m 4 of 10

```

SA6_SR_2001b(1)=SR(1);
SA6_FY_2001b(1)=FY(1);
SA6_FX_2001b(1)=FX(1);
and
%%-----SA
and
%% Fz=2501b-1110N
if FZ(1) >= -1130 && FZ(1) <= -1110
    FZ_2501b(1)=FZ(1);
    SR_2501b(1)=SR(1);
    SA_2501b(1)=SA(1);
    FY_2501b(1)=FY(1);
    FX_2501b(1)=FX(1);
    MZ_2501b(1)=MZ(1);
    MX_2501b(1)=MX(1);
    MFX_2501b(1)=MFX(1);
    %%% Filtro para efecto de IA
    if IA(1)>=-0.2 && IA(1)<=0.2 &&IA=0
        IA0_2501b(1)=IA(1);
        SR_IA0_2501b(1)=SR(1);
        FX_IA0_2501b(1)=FX(1);
        FY_IA0_2501b(1)=FY(1);
    and
    if IA(1)>=1.8 && IA(1)<=2.2 &&IA=2
        IA2_2501b(1)=IA(1);
        SR_IA2_2501b(1)=SR(1);
        FX_IA2_2501b(1)=FX(1);
        FY_IA2_2501b(1)=FY(1);
    and
    if IA(1)>=3.8 && IA(1)<=4.2 &&IA=4
        IA4_2501b(1)=IA(1);
        SR_IA4_2501b(1)=SR(1);
        FX_IA4_2501b(1)=FX(1);
        FY_IA4_2501b(1)=FY(1);
    and
    %%-----Filtrando para SA
    if SA(1)>=-0.2 && SA(1)<=0.2 &&SA=0
        SA0_2501b(1)=SA(1);
        SA0_SR_2501b(1)=SR(1);
        SA0_FY_2501b(1)=FY(1);
        SA0_FX_2501b(1)=FX(1);
    and
    if SA(1)>=-3.2 && SA(1)<=-2.8 &&SA=3
        SA3_2501b(1)=SA(1);
        SA3_SR_2501b(1)=SR(1);
        SA3_FY_2501b(1)=FY(1);
        SA3_FX_2501b(1)=FX(1);
    and
    if SA(1)>=-6.2 && SA(1)<=-5.8 &&SA=6
        SA6_2501b(1)=SA(1);
        SA6_SR_2501b(1)=SR(1);
        SA6_FY_2501b(1)=FY(1);
        SA6_FX_2501b(1)=FX(1);
    and

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi FSAE ...\Brakes data.m 6 of 10

```

FX_IA0(1)=FX(1);
FY_IA0(1)=FY(1);
and
%% Familia para IA=2
if IA(1)>=1.8 && IA(1)<=2.2
    SR_IA2(1)=SR(1);
    FX_IA2(1)=FX(1);
    FY_IA2(1)=FY(1);
and
%% Familia para IA=4
if IA(1)>=3.8 && IA(1)<=4.2
    SR_IA4(1)=SR(1);
    FX_IA4(1)=FX(1);
    FY_IA4(1)=FY(1);
and
%% Elipse de Tracción
h=figure;
hold on
plot(FY_501b,FX_501b, 'b',FY_1501b,FX_1501b, 'g',FY_2001b,FX_2001b, 'm',FY_2501b,FX_2501b, 'c',FY_3501b,FX_3501b, 'k');
xlabel('Longitudinal Force [N]');
ylabel('Lateral Force (Newtons)');
xlabel('Longitudinal Force [kN]');
xlabel('Lateral Force (Newtons)');
xlabel('Normal Force (Newtons)');
grid on
legend('Fz=220 [N]', '667 [N]', '800 [N]', '1112 [N]', '1556 [N]');
title('Traccion Elipses ', 'tired');
hold off
%% Grafico Especial
h2=figure;
plot3(FY_501b,FX_501b,FZ_501b, 'b');
hold on
plot3(FY_1501b,FX_1501b,FZ_1501b, 'g');
plot3(FY_2001b,FX_2001b,FZ_2001b, 'm');
plot3(FY_2501b,FX_2501b,FZ_2501b, 'c');
plot3(FY_3501b,FX_3501b,FZ_3501b, 'k');
xlabel('Longitudinal Force [N]');
xlabel('Lateral Force (Newtons)');
xlabel('Normal Force (Newtons)');
grid on
legend('Fz=220 [N]', '667 [N]', '800 [N]', '1112 [N]', '1556 [N]');
title('3D Traccion Elipses ', 'tired');
hold off
%% Slip Ratio vs Fz
h3=figure;
hold on
plot(SR_501b,FX_501b, 'b',SR_1501b,FX_1501b, 'g',SR_2001b,FX_2001b, 'm',SR_2501b,FX_2501b, 'c',SR_3501b,FX_3501b, 'k');
xlabel('Longitudinal Force FX (Newtons)');
xlabel('Slip Ratio SR (Newtons)');
grid on
legend('Fz=220 [N]', '667 [N]', '800 [N]', '1112 [N]', '1556 [N]');

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi PSAAE ...\Brakes data.m 7 of 10

```

title('Slip Ratio vs FX');
hold off
%Polinomios 14vo orden para aproximación
y1=polyfit(SR_501b,FX_501b,14);
y2=polyfit(SR_1501b,FX_1501b,14);
y3=polyfit(SR_2001b,FX_2001b,14);
y4=polyfit(SR_2501b,FX_2501b,14);
y5=polyfit(SR_3501b,FX_3501b,14);
y1Plot = polyval(y1,SR_501b);
y2Plot = polyval(y2,SR_1501b);
y3Plot = polyval(y3,SR_2001b);
y4Plot = polyval(y4,SR_2501b);
y5Plot = polyval(y5,SR_3501b);
%Gráficas de polinomios
h3=figure;
plot(SR_501b,y1Plot,'b. ');
hold on
plot(SR_1501b,y2Plot,'r. ');
plot(SR_2001b,y3Plot,'g. ');
plot(SR_2501b,y4Plot,'c. ');
plot(SR_3501b,y5Plot,'k. ');
xlabel('Longitudinal Force (FX) - N');
ylabel('Slip Ratio');
grid on
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
title('SR vs FX');
hold off
%% Gráfica de IA en SR vs FX
h4=figure;
plot3(IA,SR,FX,'b. ');
hold on
xlabel('Inclination Angle (IA) - Deg');
ylabel('Slip Ratio (SR) - ');
zlabel('Longitudinal Force (FX) - N');
grid on
title('SR vs FX vs IA');
hold off
%% SR vs FX @IA=0
h5=figure;
plot(SR_IA0,FX_IA0,'b. ');
hold on
xlabel('Slip Ratio');
ylabel('Longitudinal Force (FX) - N');
grid on
title(strcat('SR vs FX @IA=0 ', tireid));
hold off
%% SR vs FX @IA=0 a diferentes cargas
h6=figure;
plot(SR_IA0_501b,FX_IA0_501b,'b. ');
hold on
plot(SR_IA0_1501b,FX_IA0_1501b,'r. ');
plot(SR_IA0_2001b,FX_IA0_2001b,'g. ');
plot(SR_IA0_2501b,FX_IA0_2501b,'c. ');
plot(SR_IA0_3501b,FX_IA0_3501b,'k. ');
ylabel('Longitudinal Force (FX) - N');

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi PSAAE ...\Brakes data.m 9 of 10

```

xlabel('Longitudinal Force (FX) - N');
grid on
title(strcat('SR vs FX ', tireid));
hold off
%% SR vs FX @IA=0 a diferentes cargas
h7=figure;
plot(SR_IA0_NFX,FX_IA0_NFX,'b. ');
hold on
plot(SR_1501b,NFX_1501b,'r. ');
plot(SR_2001b,NFX_2001b,'g. ');
plot(SR_2501b,NFX_2501b,'c. ');
plot(SR_3501b,NFX_3501b,'k. ');
ylabel('Longitudinal Force (FX) - N');
xlabel('Slip Ratio');
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
grid on
title(strcat('SR vs FX @IA=0 ', tireid));
hold off
%% SR vs NFX a diferentes cargas
h8=figure;
plot(SR_IA0_501b,NFX_IA0_501b,'b. ');
hold on
plot(SR_IA0_1501b,NFX_IA0_1501b,'r. ');
plot(SR_IA0_2001b,NFX_IA0_2001b,'g. ');
plot(SR_IA0_2501b,NFX_IA0_2501b,'c. ');
plot(SR_IA0_3501b,NFX_IA0_3501b,'k. ');
ylabel('Longitudinal Force (FX) - N');
xlabel('Slip Ratio');
grid on
title(strcat('SR vs NFX ', tireid));
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
hold off
%% Longitudinal force
h9=figure;
hold on
plot(SR_501b,FX_501b,'b.',SR_1501b,FX_1501b,'r.',SR_2001b,FX_2001b,'g.',SR_2501b,FX_2501b,'c.',SR_3501b,FX_3501b,'k. ');
plot(SR_501b,IA0_501b,FX_501b,IA0_501b,'b.',SR_1501b,IA0_1501b,FX_1501b,IA0_1501b,'r.',SR_2001b,IA0_2001b,FX_2001b,IA0_2001b,'g.',SR_2501b,IA0_2501b,FX_2501b,IA0_2501b,'c.',SR_3501b,IA0_3501b,FX_3501b,IA0_3501b,'k. ');
ylabel('Lateral Force (Newton)');
xlabel('Slip Ratio (Degrees)');
grid on
title(strcat('Lateral Force vs Slip Ratio ', tireid));
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
hold off
%% SR vs SA vs FY todos los datos arreglados
h7=figure;
plot3(SA0_501b,SA0_SR_501b,SA0_FY_501b,'b. ');
hold on
plot3(SA0_1501b,SA0_SR_1501b,SA0_FY_1501b,'r. ');
plot3(SA0_2001b,SA0_SR_2001b,SA0_FY_2001b,'g. ');
plot3(SA0_2501b,SA0_SR_2501b,SA0_FY_2501b,'c. ');
plot3(SA0_3501b,SA0_SR_3501b,SA0_FY_3501b,'k. ');
plot3(SA3_501b,SA3_SR_501b,SA3_FY_501b,'b. ');

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi PSAAE ...\Brakes data.m 8 of 10

```

xlabel('Slip Ratio');
grid on
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
title(strcat('SR vs FX @IA=0 ', tireid));
hold off
%% SR vs FX @IA=2 a diferentes cargas
h7=figure;
plot(SR_IA2_501b,FX_IA2_501b,'b. ');
hold on
plot(SR_IA2_1501b,FX_IA2_1501b,'r. ');
plot(SR_IA2_2001b,FX_IA2_2001b,'g. ');
plot(SR_IA2_2501b,FX_IA2_2501b,'c. ');
plot(SR_IA2_3501b,FX_IA2_3501b,'k. ');
ylabel('Longitudinal Force (FX) - N');
xlabel('Slip Ratio');
grid on
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
title(strcat('SR vs FX @IA=2 ', tireid));
hold off
%% SR vs FX @IA=4 a diferentes cargas
h6=figure;
plot(SR_IA4_501b,FX_IA4_501b,'b. ');
hold on
plot(SR_IA4_1501b,FX_IA4_1501b,'r. ');
plot(SR_IA4_2001b,FX_IA4_2001b,'g. ');
plot(SR_IA4_2501b,FX_IA4_2501b,'c. ');
plot(SR_IA4_3501b,FX_IA4_3501b,'k. ');
ylabel('Longitudinal Force (FX) - N');
xlabel('Slip Ratio');
grid on
legend('P=220 [N]', '667 [N]', '890 [N]', '1132 [N]', '1556 [N]');
title(strcat('SR vs FX @IA=4 ', tireid));
hold off
%% SR vs FX todos los datos arreglados
h7=figure;
plot3(SR_IA0_501b,IA0_501b,FX_IA0_501b,'b. ');
hold on
plot3(SR_IA0_1501b,IA0_1501b,FX_IA0_1501b,'r. ');
plot3(SR_IA0_2001b,IA0_2001b,FX_IA0_2001b,'g. ');
plot3(SR_IA0_2501b,IA0_2501b,FX_IA0_2501b,'c. ');
plot3(SR_IA0_3501b,IA0_3501b,FX_IA0_3501b,'k. ');
plot3(SR_IA2_501b,IA2_501b,FX_IA2_501b,'b. ');
plot3(SR_IA2_1501b,IA2_1501b,FX_IA2_1501b,'r. ');
plot3(SR_IA2_2001b,IA2_2001b,FX_IA2_2001b,'g. ');
plot3(SR_IA2_2501b,IA2_2501b,FX_IA2_2501b,'c. ');
plot3(SR_IA2_3501b,IA2_3501b,FX_IA2_3501b,'k. ');
plot3(SR_IA4_501b,IA4_501b,FX_IA4_501b,'b. ');
plot3(SR_IA4_1501b,IA4_1501b,FX_IA4_1501b,'r. ');
plot3(SR_IA4_2001b,IA4_2001b,FX_IA4_2001b,'g. ');
plot3(SR_IA4_2501b,IA4_2501b,FX_IA4_2501b,'c. ');
plot3(SR_IA4_3501b,IA4_3501b,FX_IA4_3501b,'k. ');
ylabel('Inclination Angle (Deg)');
xlabel('Slip Ratio -');

```

20/07/14 05:23 PM F:\Dropbox\Mi PSAAE ...\Brakes data.m 10 of 10

```

plot3(SA3_1501b,SA3_SR_1501b,SA3_FY_1501b,'r. ');
plot3(SA3_2001b,SA3_SR_2001b,SA3_FY_2001b,'g. ');
plot3(SA3_2501b,SA3_SR_2501b,SA3_FY_2501b,'c. ');
plot3(SA3_3501b,SA3_SR_3501b,SA3_FY_3501b,'k. ');
plot3(SA6_501b,SA6_SR_501b,SA6_FY_501b,'b. ');
plot3(SA6_1501b,SA6_SR_1501b,SA6_FY_1501b,'r. ');
plot3(SA6_2001b,SA6_SR_2001b,SA6_FY_2001b,'g. ');
plot3(SA6_2501b,SA6_SR_2501b,SA6_FY_2501b,'c. ');
plot3(SA6_3501b,SA6_SR_3501b,SA6_FY_3501b,'k. ');
ylabel('Slip angle (\alpha) - Deg');
xlabel('Slip Ratio (SR) -');
xlabel('Longitudinal Force (FX) - N');
grid on
title(strcat('SA vs SR vs FX vs FY'));
%% Slippage
figure;
plot3(FY_IA0_501b,IA0_501b,FX_IA0_501b,'b. ');
hold on
plot3(FY_IA0_1501b,IA0_1501b,FX_IA0_1501b,'r. ');
plot3(FY_IA0_2001b,IA0_2001b,FX_IA0_2001b,'g. ');
plot3(FY_IA0_2501b,IA0_2501b,FX_IA0_2501b,'c. ');
plot3(FY_IA0_3501b,IA0_3501b,FX_IA0_3501b,'k. ');
grid on;
plot3(FY_IA2_501b,IA2_501b,FX_IA2_501b,'b. ');
plot3(FY_IA2_1501b,IA2_1501b,FX_IA2_1501b,'r. ');
plot3(FY_IA2_2001b,IA2_2001b,FX_IA2_2001b,'g. ');
plot3(FY_IA2_2501b,IA2_2501b,FX_IA2_2501b,'c. ');
plot3(FY_IA2_3501b,IA2_3501b,FX_IA2_3501b,'k. ');
plot3(FY_IA4_501b,IA4_501b,FX_IA4_501b,'b. ');
plot3(FY_IA4_1501b,IA4_1501b,FX_IA4_1501b,'r. ');
plot3(FY_IA4_2001b,IA4_2001b,FX_IA4_2001b,'g. ');
plot3(FY_IA4_2501b,IA4_2501b,FX_IA4_2501b,'c. ');
plot3(FY_IA4_3501b,IA4_3501b,FX_IA4_3501b,'k. ');
hold off;
xlabel('Lateral Force (FY) - N');
ylabel('Inclination angle(IA) - Deg');
xlabel('Longitudinal Force (FX) - N');
title(strcat('SA vs SR vs FX vs FY'));
figure
plot(FY_IA0_3501b,FX_IA0_3501b,'b. ');
hold on; grid on;
plot(FY_IA2_3501b,FX_IA2_3501b,'r. ');
plot(FY_IA4_3501b,FX_IA4_3501b,'k. ');
hold off;
%% -----
figure;
plot3(SA0_FY_501b,SA0_501b,SA0_FX_501b,'b. ');
hold on; grid on;
plot3(SA0_FY_1501b,SA0_1501b,SA0_FX_1501b,'r. ');
plot3(SA0_FY_2001b,SA0_2001b,SA0_FX_2001b,'g. ');

```

### A.2.1 WinGeo Suspensión delantera puntos

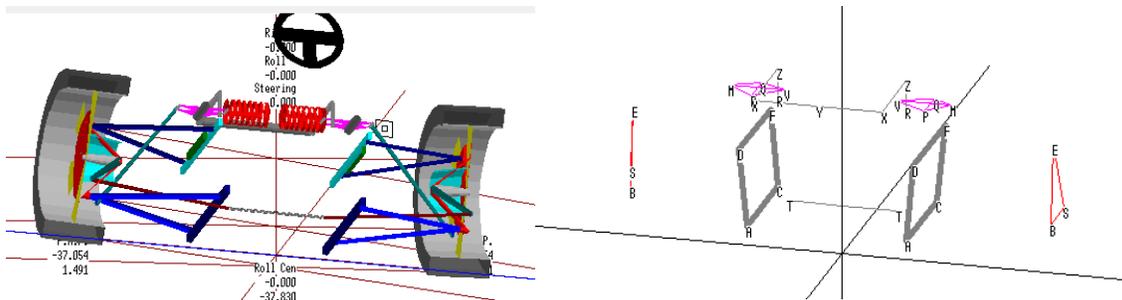
En la imagen se muestra la definición de cada uno de los puntos, nombrados con letras, el cálculo de la longitud de brazo, así como el ángulo de kingpin (0 grados) y el ángulo de caster (5.682 grados). Se muestra caster trail, el cual es mechanical rail de 24.87mm. La dimensiones de track y el valor de scrub radius.

Both sides	Chassis coords	X fore-aft	Y width	Z vertical	Check distance	
Lower A-arm forward	A	-160.000	220.000	114.000	A to B= 389.583	Kingpin axis -0.000 degrees
Lower ball joint	B	-10.944	579.000	140.000	C to B= 398.471	Scrub radius 30.600
Lower A-arm rearward	C	160.000	220.000	114.000	A to C= 320.000	Caster 5.682 degrees
Upper A-arm forward	D	-160.000	240.000	330.000	D to E= 380.845	Caster trail 24.873
Upper ball joint	E	10.944	579.000	360.000	F to E= 371.536	Upper A-arm 340.325
Upper A-arm rearward	F	160.000	240.000	330.000	D to F= 320.000	Lower A-arm 359.940
Wheelbase, track, tire diameter		1524.000	1219.200	520.700	Rollout1635.827	Track at ground 1219.200
Camber, Toesteer, Toe span		-2.500	0.000	711.201	HubTrak 598.244	Track at hub 1196.487
Tire contact patch		0.000	609.600	0.000	B to E= 221.086	

Filename: F:\Dropbox\Mi FSAE 2014\plan de trabajo\WinGeo\cambios\\$:

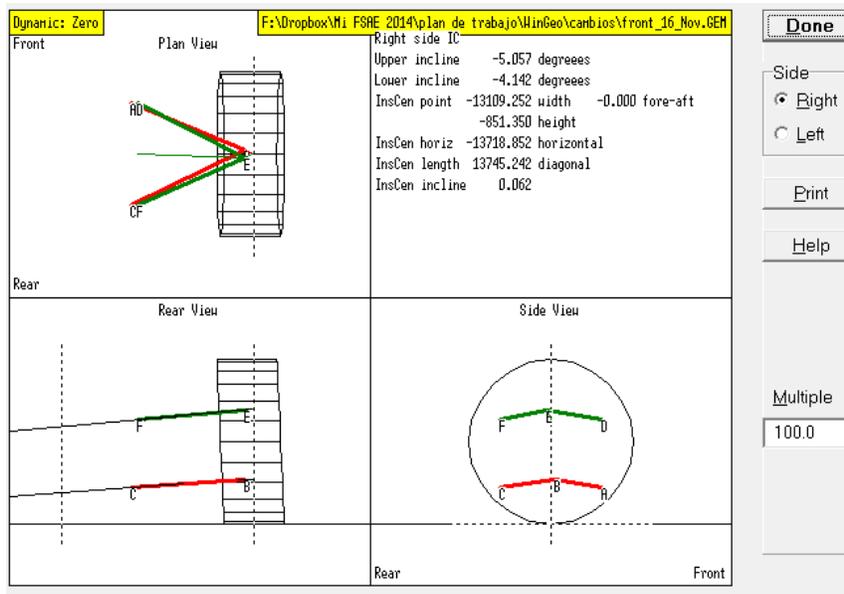
Both sides	Chassis coords	X fore-aft	Y width	Z vertical	Check distance	
Steering tie-rod on hub	S	56.360	596.700	168.760	S to T= 450.371	Kingpin axis -0.000 degrees
Steering tie-rod inboard	T	0.000	151.000	137.000	B to S= 75.301	Scrub radius 30.600
Idler arm upper-axis	P	0.000	0.000	0.000		Caster 5.682 degrees
Idler arm lower-axis	Q	0.000	0.000	0.000		Caster trail 24.873
Drag-link to Idler arm	X	0.000	0.000	0.000		Upper A-arm 340.325
Drag-link tie-rod attach	Z	0.000	0.000	0.000		Lower A-arm 359.940
Steering tie-rod attaches to		1 is Tub or Rack		<input type="checkbox"/> Draglink_Type False		Track at ground 1219.200
Toe-inch span, Steering Box		711.201	50.000	not used	mm / 360 degrees	Track at hub 1196.487

A continuación se muestra el sistema de suspensión, y la ubicación de los puntos de acuerdo a la letra que los define.

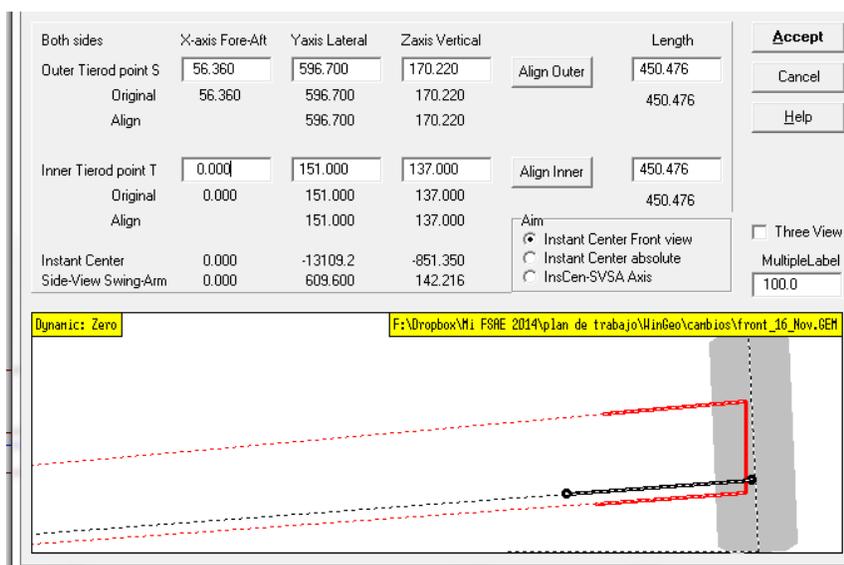


### A.2.2 WinGeo: Análisis de bump-steer

La imagen de abajo nos muestra la definición de instan center, así como vistas de la geometría de los brazos.



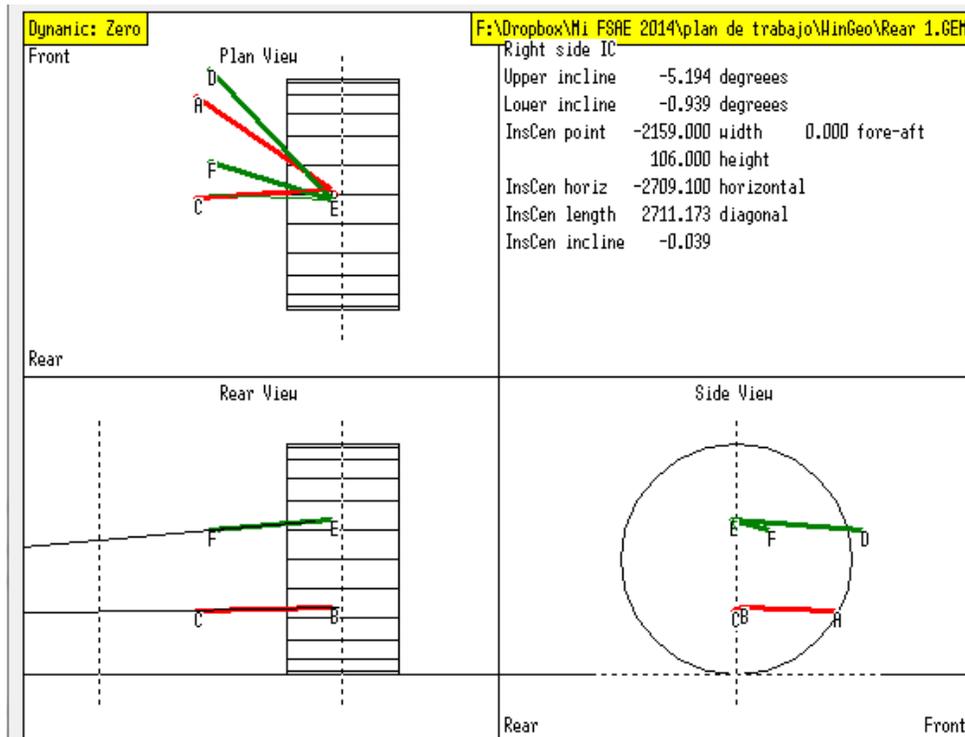
En La siguiente herramienta “*steering tierod and bump steer*”, el programa ayuda a llevar el eslabón de la dirección al centro instantáneo de rotación, se puede cambiar entre el punto localizado en el upright S o el punto que va a la caja de dirección T. Al dar en “Align Outer” alinea el punto S y al dar “Align Inner” lo hace para T. Esta herramienta nos ayuda a iterar cambiando el punto en sus coordenadas x, y o z, disminuyendo el tiempo. Esta herramienta es también útil para localizar la trackrod, el un eslabón articulado que impide el ángulo de toe en las llantas traseras y además permitiendo su viaje vertical.



### A.2.3 WinGeo: Suspensión trasera

Both sides	Chassis coords	X fore-aft	Y width	Z vertical	Check distance	
Lower A-arm forward	A	-220.000	220.000	145.000	A to B= 370.100	Kingpin axis -0.000 degrees
Lower ball joint	B	-10.420	525.000	150.000	C to B= 305.597	Scrub radius 25.100
Lower A-arm rearward	C	8.000	220.000	145.000	A to C= 228.000	Caster 5.949 degrees
Upper A-arm forward	D	-282.000	250.000	325.000	D to E= 402.193	Caster trail 26.050
Upper ball joint	E	10.420	525.000	350.000	F to E= 288.172	Upper A-arm 276.134
Upper A-arm rearward	F	-72.000	250.000	325.000	D to F= 210.000	Lower A-arm 305.041
Wheelbase, track, tire diameter		1524.000	1100.200	520.700	Rollout1635.827	Track at ground 1100.200
Camber, Toesteer, Toe span		0.000	0.000	711.201	HubTrak 550.100	Track at hub 1100.200
Tire contact patch		0.000	550.100	0.000	B to E= 201.083	

Both sides	Chassis coords	X fore-aft	Y width	Z vertical	Check distance	
Steering tie-rod on hub	S	58.000	525.000	150.000	S to T= 305.696	Kingpin axis -0.000 degrees
Steering tie-rod inboard	T	38.000	220.000	145.000	B to S= 68.420	Scrub radius 25.100
Idler arm upper-axis	P	0.000	0.000	0.000		Caster 5.949 degrees
Idler arm lower-axis	Q	0.000	0.000	0.000		Caster trail 26.050
Drag-link to Idler arm	X	0.000	0.000	0.000		Upper A-arm 276.134
Drag-link tie-rod attach	Z	0.000	0.000	0.000		Lower A-arm 305.041
Steering tie-rod attaches to	1 is Tub or Rack				<input type="checkbox"/> Draglink_Type False	Track at ground 1100.200
Toe-inch span, Steering Box		711.201	50.000	not used	mm / 360 degrees	Track at hub 1100.200
Filename: F:\Dropbox\Mi FSAE 2014\plan de trabajo\WinGeo\Rear 1.GEM					Undo editing	



Both sides	X-axis Fore-Aft	Yaxis Lateral	Zaxis Vertical		Length	
Outer Tierod point S	<input type="text" value="58.000"/>	<input type="text" value="525.000"/>	<input type="text" value="150.000"/>	<input type="button" value="Align Outer"/>	<input type="text" value="305.696"/>	<input type="button" value="Accept"/>
Original	58.000	525.000	150.000		305.696	<input type="button" value="Cancel"/>
Align		525.000	150.000			<input type="button" value="Help"/>
Inner Tierod point T	<input type="text" value="38.000"/>	<input type="text" value="220.000"/>	<input type="text" value="145.000"/>	<input type="button" value="Align Inner"/>	<input type="text" value="305.696"/>	
Original	38.000	220.000	145.000		305.696	
Align		220.000	145.000			
Instant Center	0.000	-2159.00	106.000			
Side-View Swing-Arm	0.000	550.100	150.411			

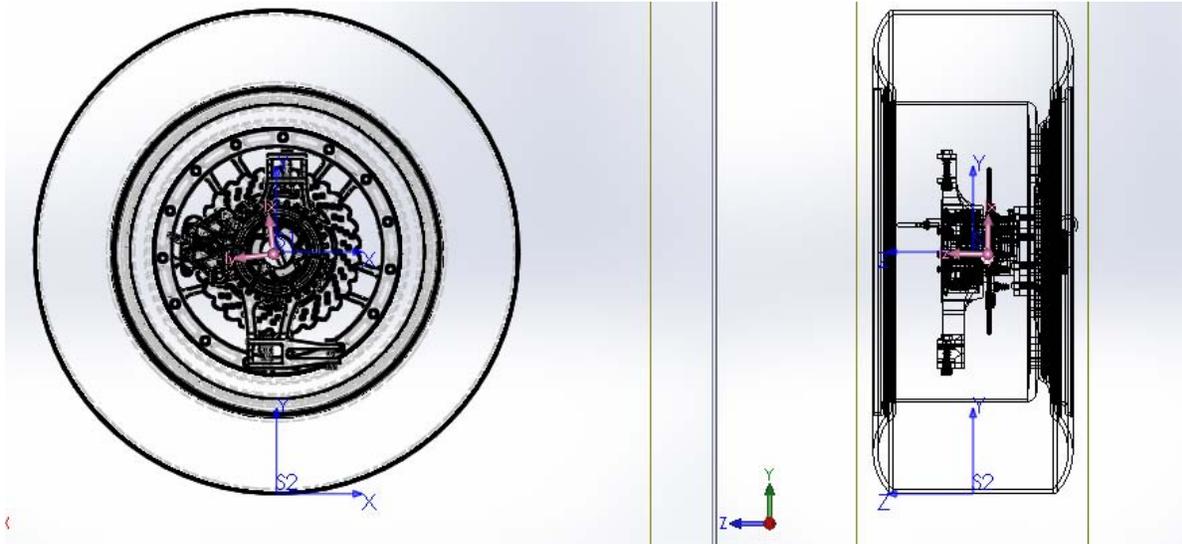
  

		Aim:			
		<input checked="" type="radio"/> Instant Center Front view		<input checked="" type="checkbox"/> Three View	
		<input type="radio"/> Instant Center absolute		MultipleLabel	
		<input type="radio"/> InsCen-SVSA Axis		<input type="text" value="70"/>	

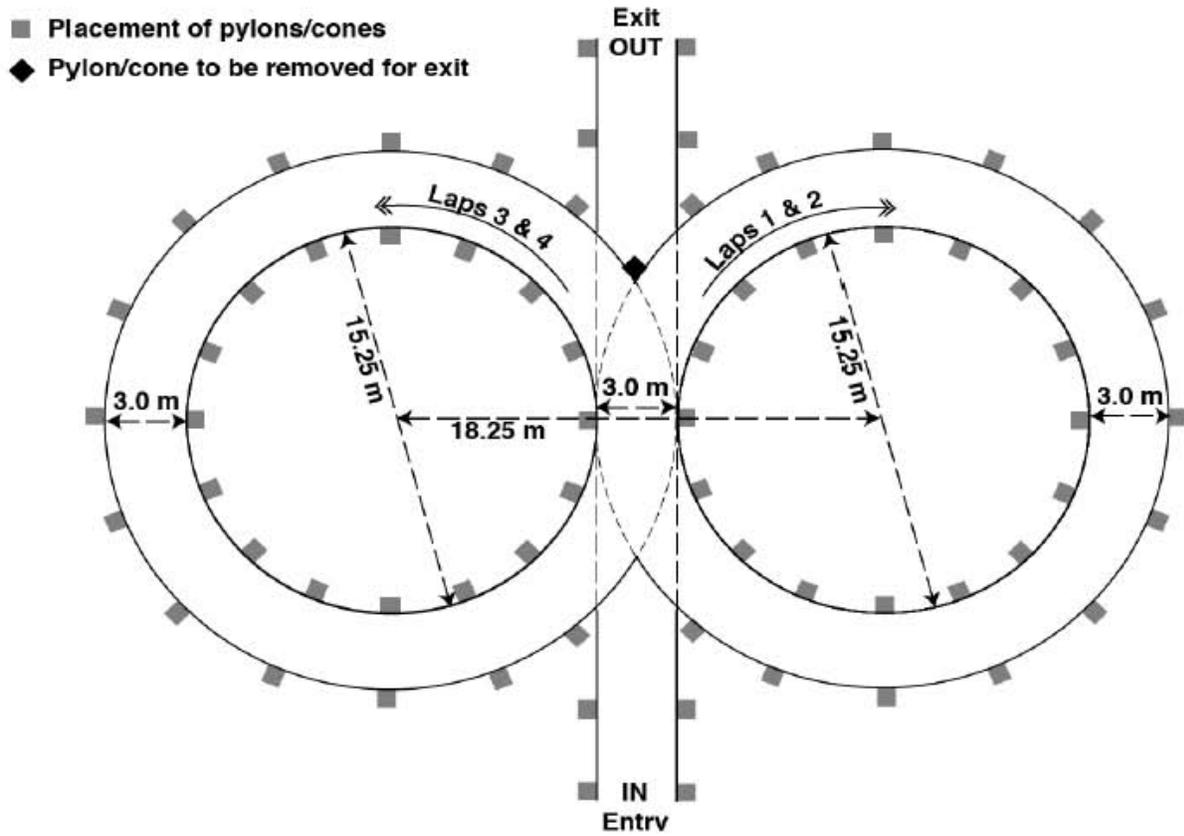
<b>Dynamic: Zero</b>		Plan View		F:\Dropbox\Mi FSRE 2014\plan de trabajo\WinGeo\Rear 1.GEM	
Rear					
		Rear View		Side View	
		Rear		Front	

## A.2.4. Propiedades de masa no suspendida del eje trasero



Report coordinate values relative to:	S2
Mass properties of Ensemble TD 2014	
Configuration: Predeterminado	
Coordinate system: S2	
Mass =	7245.97 grams
Volume =	4968462.98 cubic millimeters
Surface area =	2240491.95 square millimeters
Center of mass: ( millimeters )	
X =	-3.37
Y =	259.22
Z =	-15.90

### A.3.1 Mapa de Skid-Pad



### A.3.2 Programa para cálculo de centros de masa, gráficas de transferencia de carga y análisis de roll rates

```

9/14/14 2:59 PM F:\Dropbox\Mi FSAE...\Formulas UNAM2014.m 1 of 9

%% Formula EAM analisis de respuesta en frecuencia de la suspensión
% Analisis en Roll-Rate
% en la constantes de resortes y amortiguadores
%Espejel Arroyo Aldo Guillermo
%% ----Datos del auto-----
clear; %%Limpiando datos
clear all;
close all;
tF = 1.218; tR = 1.148; %Track
W1 = 72.5; W2 = 73.5; W3 = 74.5; W4 = 75.5; %Peso en cada llanta
WB = 1.524; %Wheelbase
Wu1 = 13.514; %Peso USM delantero de una llanta
Wu3 = 14.491; %Peso USM trasero de una llanta
h_CoG = 0.28; %Altura del centro de gravedad de todo el auto
h_F = 3.262; %Altura CG USM delantero
h_R = 3.259; %Altura CG USM trasero
h_RCF = -0.027; %Altura Roll center delantero
h_RCR = 0.025; %Altura Roll center trasero*)
%% ----Calculo de propiedades de masa y centros de gravedad
WT = W1+W2+W3+W4; %Peso total
WF = W1 + W2; %Peso eje frontal
WR = W3 + W4; %Peso eje trasero
b = (W2*WB)/WT; %Distancia de OC al eje trasero
a = WB - b; %Distancia de OC al eje delantero
d = (tF - tR)/2;
Yp = W2/WT*(tF - d) - W1/WT*d + W4/WT*tR;
Ypp = Yp - LR/2;
Wu2 = Wu1; WuF = Wu1 + Wu2;
Wu4 = Wu3; WuR = Wu3 + Wu4;
WU = WuF + WuR; WS = WT - WU;
WwF = WF - WuF; WwR = WR - WuR;
%Calculo altura centro Mas
b_s = (WT*b - WuF*WB)/WS;
a_s = WB - b_s;
Yp_s = WT/WS*Yp+WuF/WS*a - WuR/WS*(LR - d) - WuR/WS*d;
Ypp_s = Yp_s - LR/2;
h_s = WT/WS*h_CoG+WuF/WS*h_F+WuR/WS*h_R;
h_Roll = h_s - h_RCF - a/WB*(h_RCR - h_RCF);
%%Tablas
Datos_Distribucion_Peso=[WT,WF,WR,(W3+W4)/WT,s,b;Yp,Ypp];
Tabla_Peso=[ 'WT','WFront','WRTras','a','b','Yp','Ypp'];
Tabla_Res_Peso=table(Datos_Distribucion_Peso,...
    'RowNames','Column_Peso');
Datos_Distribucion_SM=[WS;WU;a_s,b_s;Yp_s;Ypp_s;h_s;h_Roll];
Tabla_Res_SM=table(Datos_Distribucion_SM,...
    'RowNames','Column_Des_Deso');
%% Transferencias de peso
Ay_min=1.0; Ay_max=2; Num_datos=25; %Valores de Aceleración para simulación
g = 9.81; %Gravedad [m/s^2]
Ay=Ay_min:(Ay_max-Ay_min)/Num_datos:Ay_max;
q_min=5;q_max=0.6;
Figure(2);
for i=1:6

```

```

9/14/14 2:59 PM F:\Dropbox\Mi FSAE...\Formulas UNAM2014.m 3 of 9

Kw_F(i)=Ks(i)*IR_f^2; %Wheel Rate F
Kw_R(i)=Ks(i)*IR_r^2; %Wheel Rate R
kr_F(i)=KT*Kw_F(i)/(KT*Kw_R(i)); %Side Rate F
kr_R(i)=KT*Kw_R(i)/(KT*Kw_F(i)); %Side Rate R
Frec_F(i)=(1/(2*pi))*((Kw_F(i)/(WwF))^0.5*(1/2)); %Frec en Hz F
Frec_R(i)=(1/(2*pi))*((Kw_R(i)/(WwR))^0.5*(1/2)); %Frec en Hz R
K_Fi_F(i)=(pi/180)*Kw_F(i)*t^2/2; %Roll Roll por eje
K_Fi_R(i)=(pi/180)*Kw_R(i)*t^2/2;
K_Fi_F_DUSE_K_Fi_F(i)=K_Fi_F(i)*K_Fi_R(i);
K_Fi(i)=(-WT*(g+h_Roll))/(K_Fi_F(i)+K_Fi_R(i)); %Gradiente de roll del auto
K_Fi_A_F(i)=(pi/180)*((K_Fi_DUSE_P*KT*(t/2)^2)/((KT*(t/2)^2)*(pi/180))-K_Fi_DUSE_F);
K_Fi_A_R(i)=(pi/180)*((K_Fi_DUSE_P*KT*(t/2)^2)/((KT*(t/2)^2)*(pi/180))-K_Fi_DUSE_R);
K_Fi_A(i)=(pi/180)*((K_Fi_DUSE_P*KT*(t/2)^2)/((KT*(t/2)^2)*(pi/180))-K_Fi_DUSE_F - (pi/180)*((t/2)^2)*Kw_R(i));
end
RM=[ 'Ks150[lb/in]','250[lb/in]','150[lb/in]','450[lb/in]','600[lb/in]'];
Tabla_R=table(transpose (Ka),Frec_F,Frec_R,Kw_F,Kw_R,kr_F,kr_R,K_Fi_F,K_Fi_R,K_Fi_A,K_Fi,...
    'RowNames','RM');
%% ABS Materiales y dimensionalización
MR_ABBF=8.6; %[-]
MR_ABBR=8.5;
KA_F=(180/pi)*K_Fi_A_F(2)/(MR_ABBF^2);
KA_R=(180/pi)*K_Fi_A_R(2)/(MR_ABBR^2);
Par=90.0; %N-m
LF=0.34; %[m]
LR=0.52; %[m]
%%-Materiales 1.-Aluminio 6061-T6 2.-Alum 7075-T6 3.-Acero340Normalizado
Mod_Elast=[6300e6;72000e6;210000e6];
Coef_Poisson=[0.33;0.33;0.33];
Bafuso_Coef=[275e6;308e6;460e6];
Max_Baf_Cortante=zeros(length(Mod_Elast),1);
diametro_F=zeros(length(Mod_Elast),1);
diametro_R=zeros(length(Mod_Elast),1);
Baf_Cortante_f=zeros(length(Mod_Elast),1);
Baf_Cortante_r=zeros(length(Mod_Elast),1);
SF_F=zeros(length(Mod_Elast),1);SF_R=zeros(length(Mod_Elast),1);
for i=1:length(Mod_Elast)
    Max_Baf_Cortante(i)= Bafuso_Coef(i)/(3^(1/2));
    diametro_F(i)= ((64*Ka_F*(1+Coef_Poisson(i))*LF)/( Mod_Elast(i)*pi)^(1/4);
    diametro_R(i)= ((64*Ka_R*(1+Coef_Poisson(i))*LR)/( Mod_Elast(i)*pi)^(1/4);
    Baf_Cortante_f(i)=(16*Par)/(pi*diametro_F(i)^3);
    Baf_Cortante_r(i)=(16*Par)/(pi*diametro_R(i)^3);
    SF_F(i)=Max_Baf_Cortante(i)/Baf_Cortante_f(i);
    SF_R(i)=Max_Baf_Cortante(i)/Baf_Cortante_r(i);
end
clc;
ARB_Materiales=[ 'Aluminio 6061-T6','Aluminio 7075-T6','Acero 4030 Normalizado'];
Tabla_ARB_Mat=table(Mod_Elast,Coef_Poisson,Bafuso_Coef,diametro_F,diametro_R,Baf_Cortante_f,...
    'RowNames','ARB_Materiales');

```

```

9/14/14 2:59 PM F:\Dropbox\Mi FSAE...\Formulas UNAM2014.m 2 of 9

dWuF = (WuF*Ay*g*h_F)/tF; %Transferencia de carga de USM
dWuR = (WuR*Ay*g*h_R)/tR;
dWgF = (WwF*Ay*g*(b_s/WB)*h_RCF)/tF; %Transferencia geométrica
dWgR = (WwR*Ay*g*(a_s/WB)*h_RCF)/tR;
q-q_min+(1-1)*(q_max-q_min)/5;
dWwF = (WwF*Ay*g*h_Roll)/tF*q; %Transferencia de carga masa suspendida
dWwR = (WwR*Ay*g*h_Roll)/tR*(1 - q);
Fz1 = W1*g - dWuF - dWgF - dWwF;
Fz2 = W2*g - dWuF + dWgF + dWwF;
Fz3 = W3*g - dWuR - dWgR - dWwR;
Fz4 = W4*g - dWuR + dWgR + dWwR;
Ft=Fz1+Fz2+Fz3+Fz4;
subplot(2,3,1),plot(Ay,Fz1,'b'),hold on,grid on; title(strcat('q = ',num2str(q_min+(1-1)*
1)*(q_max-q_min)/5));
plot(Ay,Fz2,'r');plot(Ay,Fz3,'g');plot(Ay,Fz4,'k');
xlabel('g's laterales ');
ylabel('Fuerza Normal [Pa] - N');
end
legend('Fz1','Fz2','Fz3','Fz4');
hold off
% dWwF = (WwF*Ay*g*h_Roll)/tF;
% dWwR = (WwR*Ay*g*h_Roll)/tR;
%% ----Resortes-----Editar esta sección
Ka150=62169.05; % [N/m] Resorte de 150 [lb/in]
Ka250=43781.75; % [N/m] Resorte de 250 [lb/in]
Ka350=61294.45; % [N/m] Resorte de 350 [lb/in]
Ka450=78807.15; % [N/m] Resorte de 450 [lb/in]
Ka600=105076.2; % [N/m] Resorte de 600 [lb/in]
Ka=[Ka150,Ka250,Ka350,Ka450,Ka600]; %Arreglo de resortes
% IR (Installation Ratio)
IR_f=0.875;
IR_r=0.85;
KT=120312.249; %Tire Spring Rate
K_Fi_DSE=-(1.3/1.35); %Roll Rate Deseado
q_des=0.564; %Distribución de peso deseado de acuerdo a las tablas
%%
K_Fi_DSE_F=WT*(g+h_Roll)/K_Fi_DSE*q_des;
K_Fi_DSE_R=WT*(g+h_Roll)/K_Fi_DSE*(1-q_des);
Datos_Roll=[IR_f,IR_r,KT];
Column_Roll=['IR_f','IR_r','KT'];
Tabla_Roll=table(Datos_Roll,...
    'RowNames','Column_Roll');
%% Roll Rates
%Dimensionalización de Variables
Kw_F=zeros(length(Ka),1);Kw_R=zeros(length(Ka),1);
kr_F=zeros(length(Ka),1);kr_R=zeros(length(Ka),1);
Frec_F=zeros(length(Ka),1);Frec_R=zeros(length(Ka),1);
K_Fi_F=zeros(length(Ka),1);K_Fi_R=zeros(length(Ka),1);
K_Fi_F_DUSE_K_Fi_F=zeros(length(Ka),1);K_Fi_i=zeros(length(Ka),1);
K_Fi_A_F=zeros(length(Ka),1);K_Fi_A_R=zeros(length(Ka),1);
for i=1:length(Ka)

```

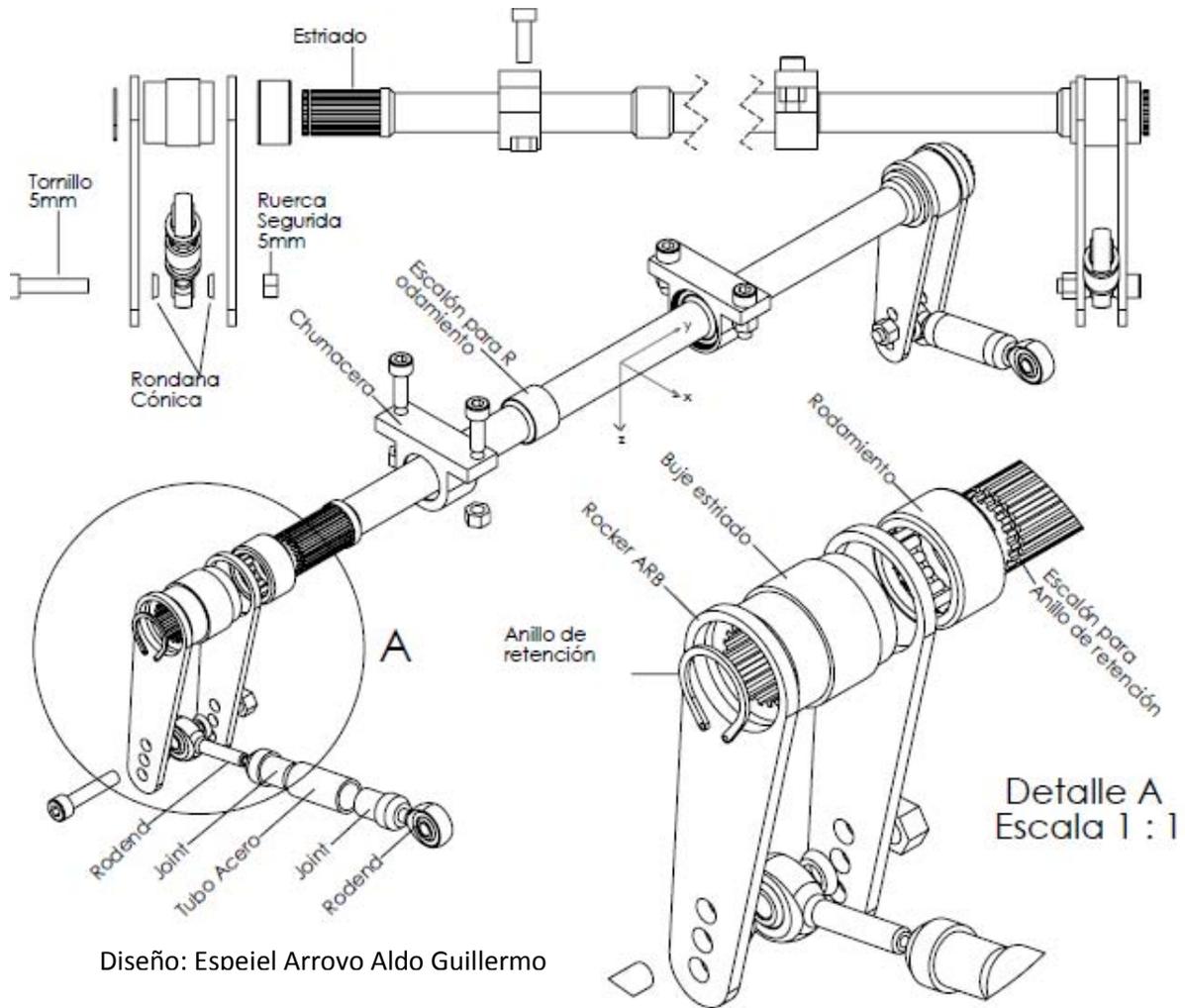
```

9/14/14 2:59 PM F:\Dropbox\Mi FSAE...\Formulas UNAM2014.m 4 of 9

'RowNames','ARB_Materiales)
%% ***** Impresión de Resultados
clc;
disp('Datos localización del centro de gravedad del auto completo: ');
disp(Tabla_Res_Peso);
disp('Masa suspendida: ');
disp(Tabla_Res_SM);
disp('Datos de ride rates: ');
disp(Tabla_Roll);
disp('Roll Rate deseado [Deg/gal] ');
disp(K_Fi_DSE);
disp('Cálculo de Wheel Rate (Kw)=[N/m], Ride Rate (kr) = [N/m] y Frecuencia natural [Frec] = [Hz] ');
disp(Tabla_R);
%%-----
disp('Rigidez provista por ABS [Nm/Rad] ');
disp(180/pi)*K_Fi_A_F(2);
disp(180/pi)*K_Fi_A_R(2);
disp('Motion Ratio [-] para Barras de Torsión delantera y trasera: ');
disp(MR_ABBF);
disp(MR_ABBR);
disp('Rigidez necesaria para en ABS [Nm/Rad] ');
disp(180/pi)*K_Fi_A_F(2)/(MR_ABBF^2);
disp(180/pi)*K_Fi_A_R(2)/(MR_ABBR^2);
disp('Par de aplicación, T [Nm] : ');
disp(Par);
disp('Resultados para barras de torsión: ');
disp(Tabla_ARB_Mat);
%%****Exportar los datos a Excel
filename = 'Datos_Roll.xlsx';
writetable(Tabla_Res_Peso,filename,'Sheet','1','Range','A1');
writetable(Tabla_Res_SM,filename,'Sheet','1','Range','C1');
writetable(Tabla_Roll,filename,'Sheet','1','Range','E1');
writetable(Tabla_R,filename,'Sheet','1','Range','G1');
writetable(Tabla_ARB_Mat,filename,'Sheet','1','Range','O15');
%% ***** ANALISIS DEL SISTEMA DE 4TO ORDEN
%Elección Ka Constante del amortiguador
K1=Ka(2); % [N/m] Resorte delantero
K2=Ka(2); % [N/m] Resorte trasero
%%Amortiguadores TRXES
Verde=(65 - 48)/(100 - 25)*9.81*1000 % [N/ (m/seg)]
Azul=(45 - 38)/(100 - 50)*9.81*1000
C1=Verde; % [N/(mm/seg)]
C2=Verde;
%%Coeficiente de amortiguamiento
xi_f=C1/(2*(K1*WwF/9.81)^(1/2));
xi_r=C2/(2*(K2*WwR/9.81)^(1/2));
%% Funciones de transferencia modelo de segundo orden
NUM1=[1];
DEN1=[WwF C1 K1];
GF=tf(NUM1,DEN1)

```

### A.3.3. Ensamble barra de torsión delantera



Diseño: Espejel Arroyo Aldo Guillermo

### A.3.4. Puntos suspensión en Adams/Car

El modelo en Adams/Car está formado por subsistemas. A continuación se muestran los puntos que forman parte de cada subsistema.

Hardpoint Modification Table					
Assembly		Subsystem		Front_Push_Susp.Front_dos_susp2014	Name Filter: *
	loc_x	loc_y	loc_z	remarks	
<b>hpl_arb_bushing_mount</b>	-966.99	-155.0	170.0	(none)	
hpl_arblink_to_bellcrank	-891.65	-171.04	129.9	(none)	
hpl_bellcrank_pivot	-823.58	-239.71	126.33	(none)	
hpl_bellcrank_pivot_orient	-846.189	-271.16	157.949	(none)	
hpl_lca_front	-922.0	-220.0	-206.0	(none)	
hpl_lca_outer	-772.94	-579.0	-180.0	(none)	
hpl_lca_rear	-602.0	-220.0	-206.0	(none)	
hpl_prod_outer	-770.0	-550.0	-160.0	(none)	
hpl_prod_to_bellcrank	-877.52	-198.44	128.81	(none)	
hpl_shock_to_bellcrank	-809.0	-193.84	182.38	(none)	
hpl_shock_to_chassis	-643.36	-228.45	250.38	(none)	
hpl_tierod_inner	-895.0	-132.0	-183.0	(none)	
hpl_tierod_outer	-819.8	-596.6	-150.5	(none)	
hpl_uca_front	-922.0	-240.0	10.0	(none)	
hpl_uca_outer	-751.06	-579.6	40.0	(none)	
hpl_uca_rear	-602.0	-240.0	10.0	(none)	
hpl_wheel_center	-762.0	-609.6	-58.625	(none)	
hps_global	250.0	0.0	-175.0	(none)	

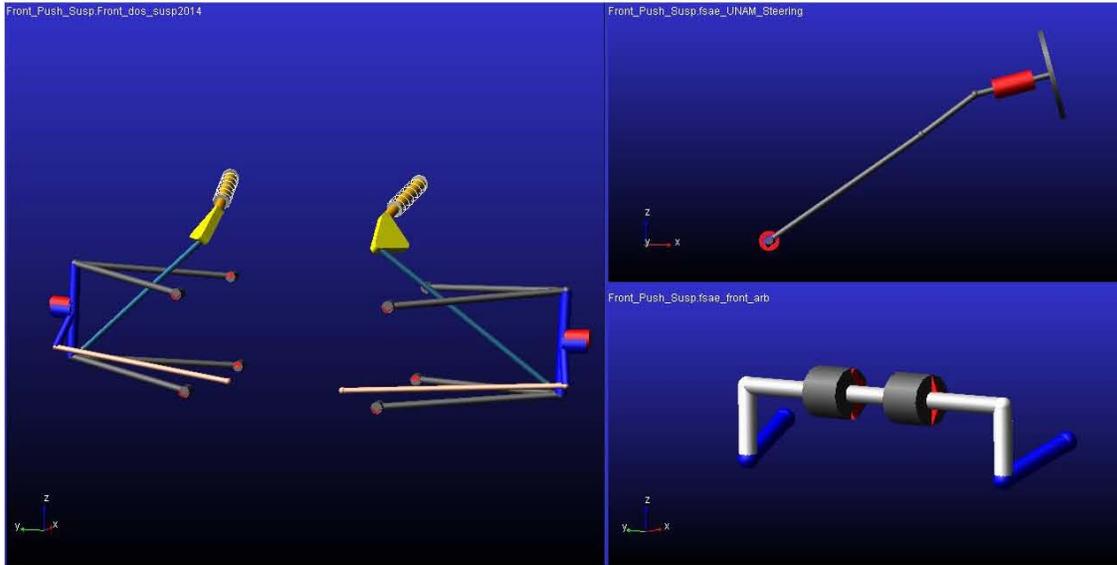
Display: Single and  Left  Right  Both

OK Apply Cancel

Hardpoint Modification Table					
Assembly		Subsystem		Front_Push_Susp.fsaе_UNAM_Steering	Name Filter: *
	loc_x	loc_y	loc_z	remarks	
hps_intermediate_shaft_forward	-520.0	0.0	80.0	(none)	
hps_intermediate_shaft_rear	-388.0	0.0	180.0	(none)	
hps_pinion_center_at_rack	-895.0	0.0	-183.0	(none)	
<b>hps_steeringwheel_center</b>	-200.0	0.0	230.0	(none)	

Hardpoint Modification Table					
Assembly		Subsystem		Front_Push_Susp.fsaе_front_arb	Name Filter: *
	loc_x	loc_y	loc_z	remarks	
hpl_arb_bend	-966.99	-155.0	170.0	(none)	
hpl_arb_bushing	-966.99	-48.8	170.0	(none)	
hpl_droplink_to_arb	-966.99	-155.0	100.0	(none)	
<b>hps_arb_middle</b>	-966.99	0.0	170.0	(none)	

Los subsistemas se integran por: a) mecanismo de suspensión, que contiene los brazos en A, tierods, Uprigth, pushrod, rocker (balancín), resortes y amortiguador. b) Sistema de dirección y volante, c) barra de torsión con rodamientos. Estos subsistemas se muestran a continuación.



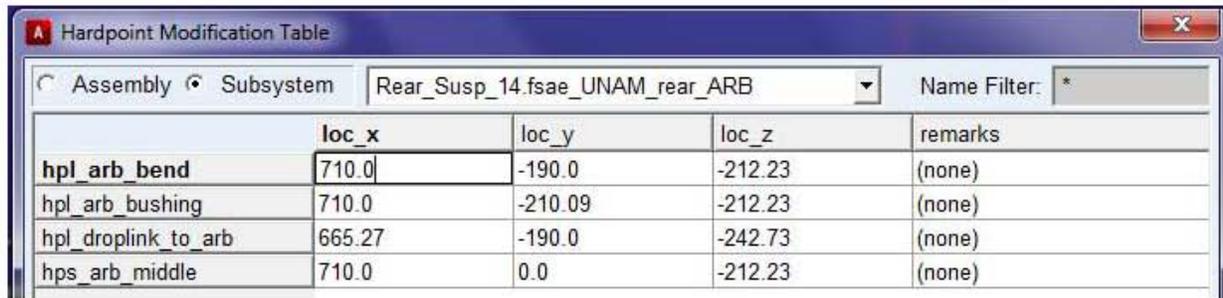
Hardpoint Modification Table

Assembly  Subsystem  Rear\_Susp\_14.fsae\_UNAM\_rearSusp Name Filter: \*

	loc_x	loc_y	loc_z	remarks
<b>hpl_arb_bushing_mount</b>	710.0	-260.0	-212.23	(none)
hpl_arblink_to_bellcrank	668.84	-190.0	-196.15	(none)
hpl_bellcrank_pivot	657.85	-218.35	-194.33	(none)
hpl_bellcrank_pivot_orient	705.754	-205.845	-201.316	(none)
hpl_drive_shaft_inr	759.19	-164.296	-23.54	(none)
hpl_lca_front	550.0	-220.0	-175.0	(none)
hpl_lca_outer	751.58	-525.0	-170.0	(none)
hpl_lca_rear	770.0	-220.0	-175.0	(none)
hpl_prod_outer	760.0	-500.0	2.0	(none)
hpl_prod_to_bellcrank	685.69	-333.97	-210.38	(none)
hpl_shock_to_bellcrank	687.05	-322.95	-181.33	(none)
hpl_shock_to_chassis	691.72	-249.55	-17.92	(none)
hpl_tierod_inner	800.0	-220.0	-175.0	(none)
hpl_tierod_outer	820.0	-525.0	-170.0	(none)
hpl_uca_front	480.0	-250.0	5.0	(none)
hpl_uca_outer	772.42	-525.0	30.0	(none)
hpl_uca_rear	690.0	-250.0	5.0	(none)
hpl_wheel_center	762.0	-550.1	-58.625	(none)
hps_global	1524.0	0.0	0.0	(none)

Display: Single and  Left  Right  Both

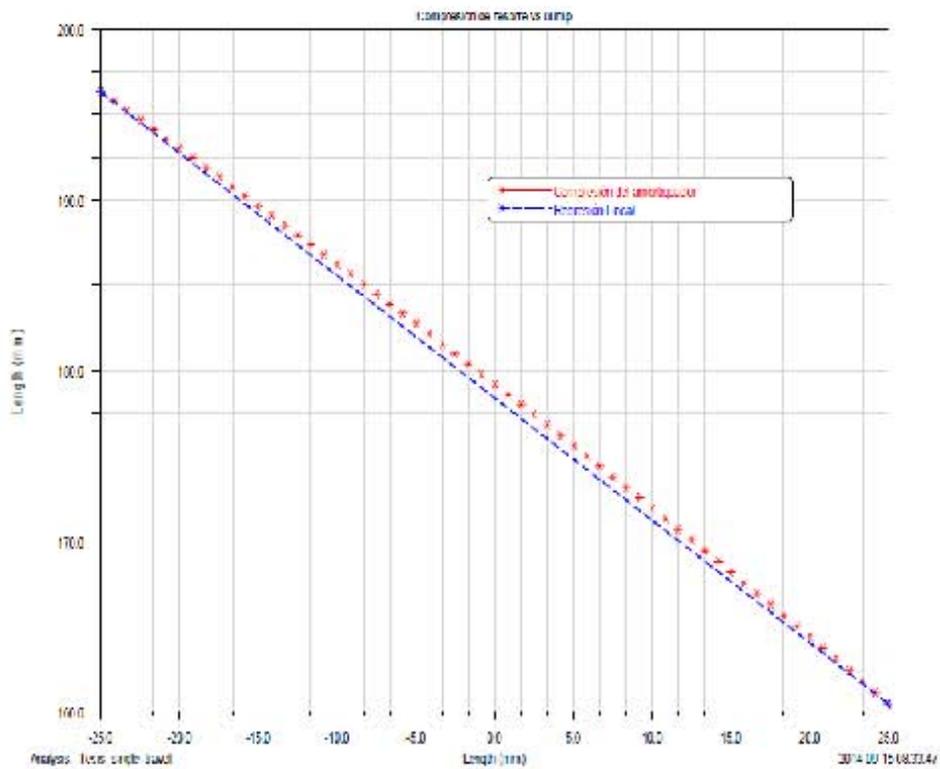
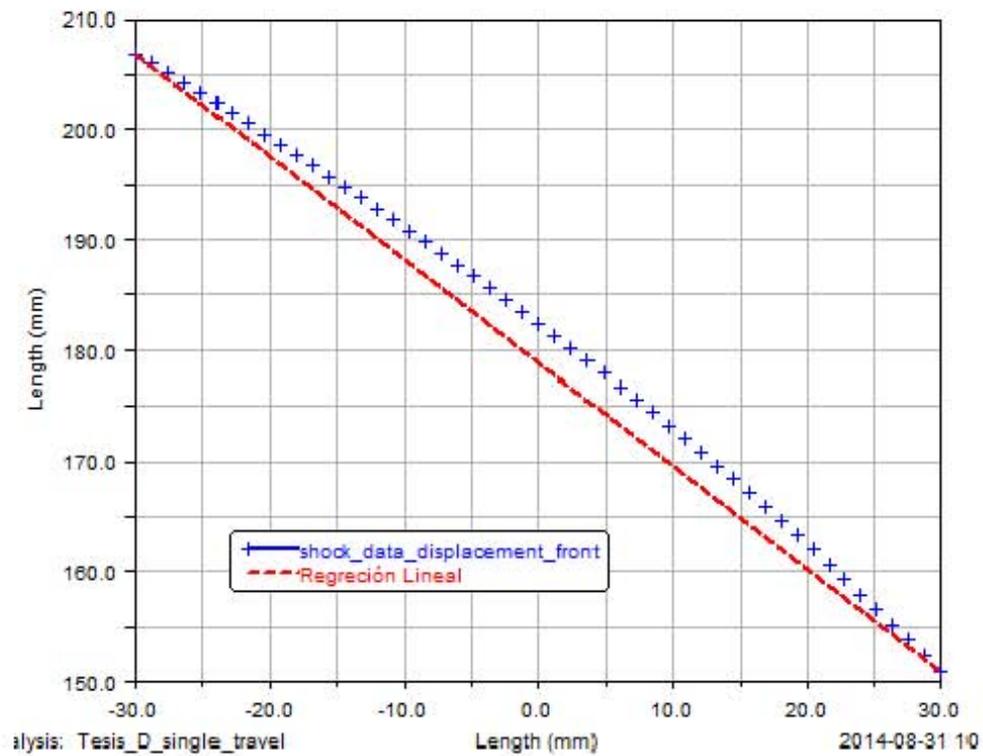
OK Apply Cancel



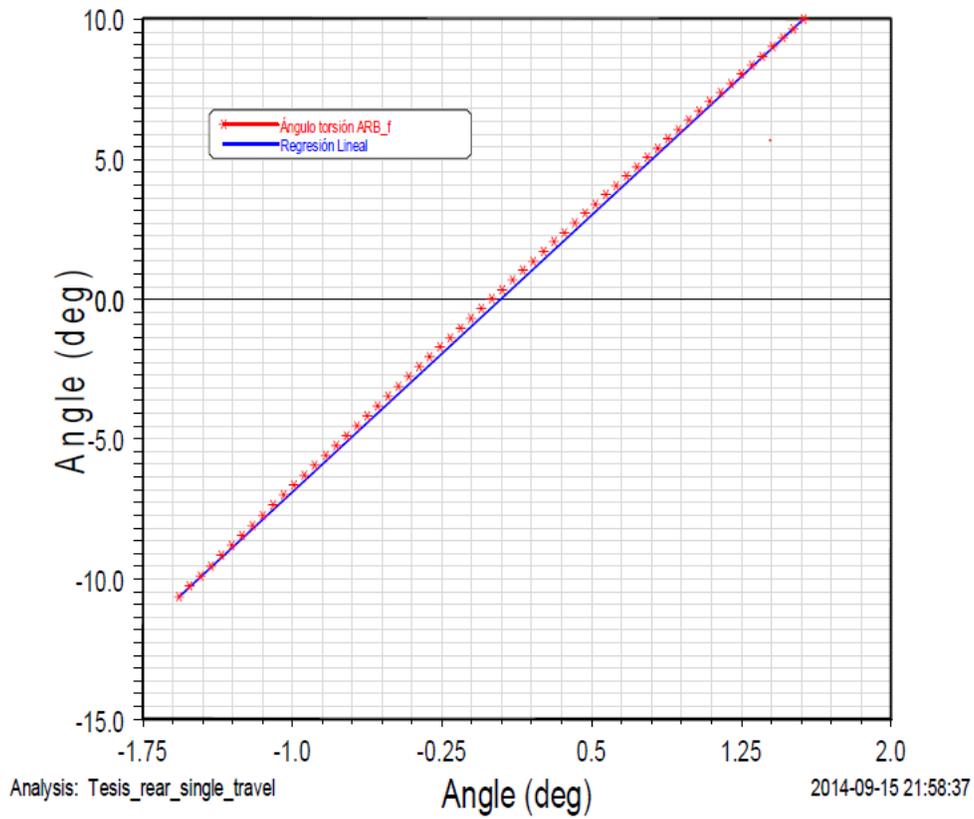
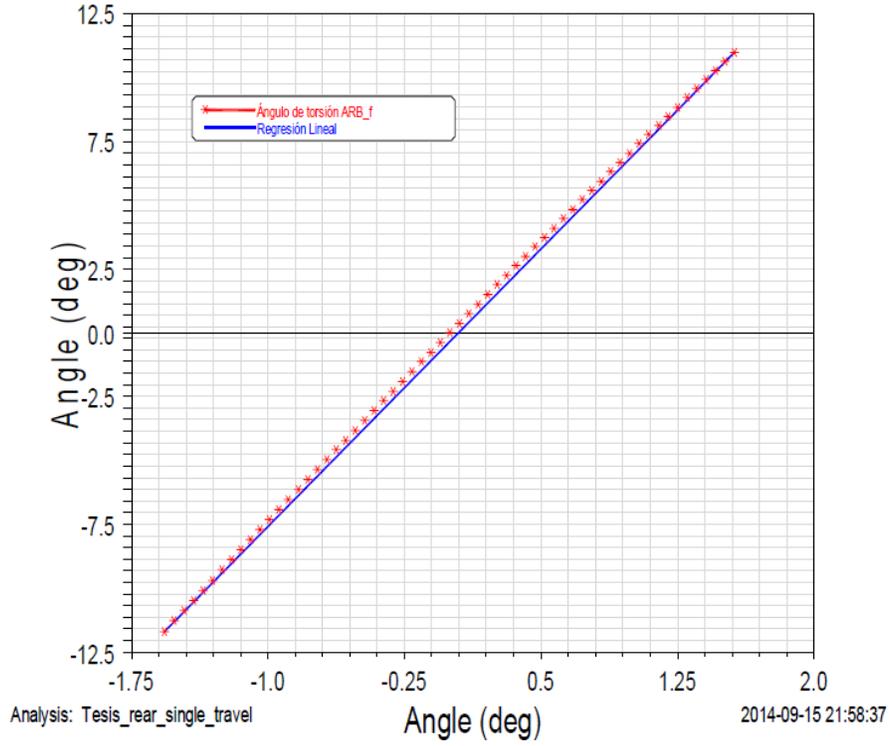
	loc_x	loc_y	loc_z	remarks
<b>hpl_arb_bend</b>	710.0	-190.0	-212.23	(none)
hpl_arb_bushing	710.0	-210.09	-212.23	(none)
hpl_droplink_to_arb	665.27	-190.0	-242.73	(none)
hps_arb_middle	710.0	0.0	-212.23	(none)

### A.3.5. Gráficas de relaciones de movimiento

#### A.3.5.1. Installation Ratio delantero y trasero, respectivamente.

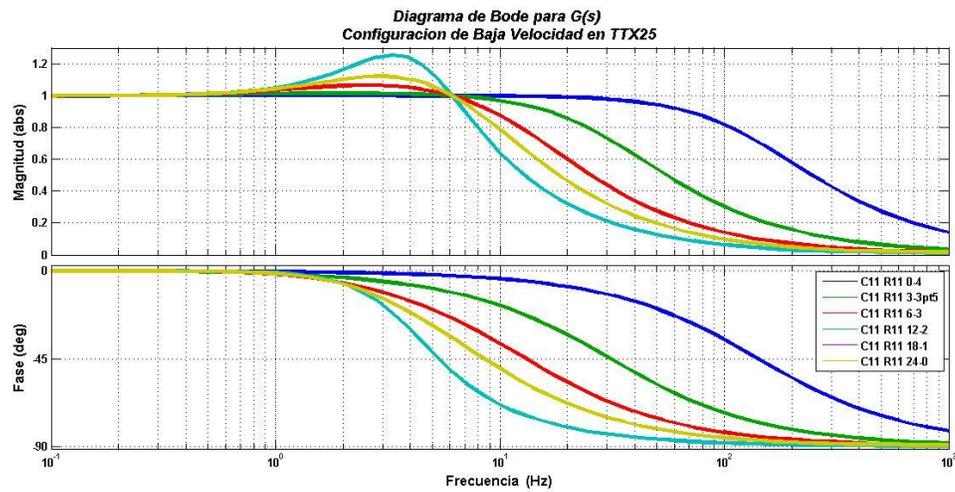
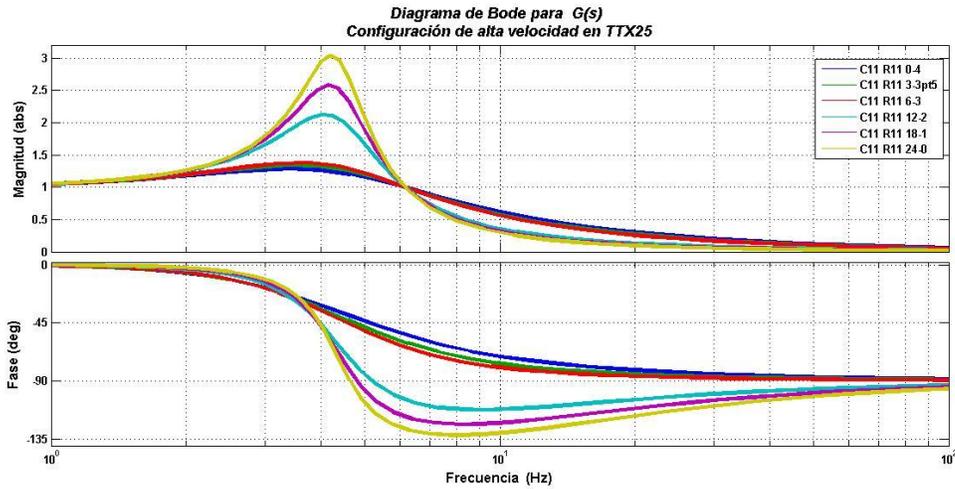


**A.3.5.2. Gráficas de Motion Ratio de la barra delantera y trasera:**



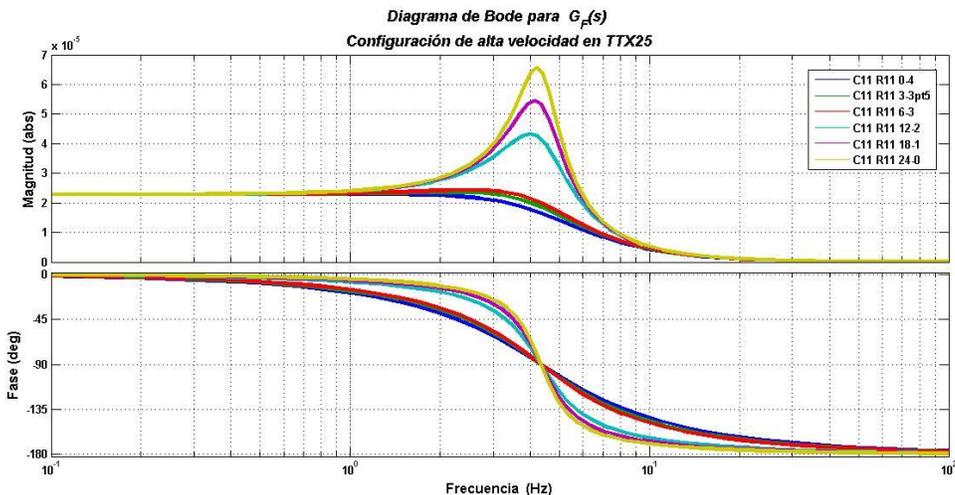
### A.4.1 Transmisibilidad y diagramas de fase para modelos de segundo orden

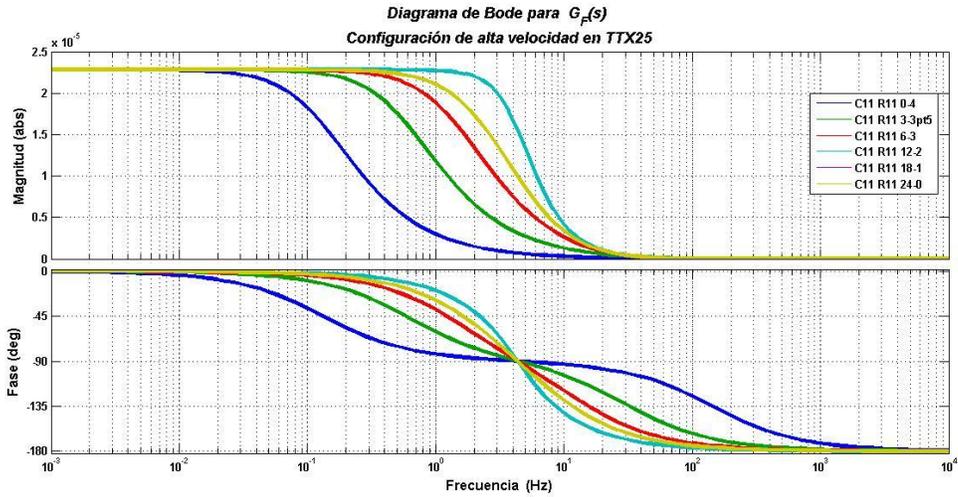
Las siguientes imágenes muestran el desempeño del sistema con las configuraciones de amortiguador a altas (primera figura) y bajas (segunda figura).



### A.4.2 Diagrama de bode para modelo de 2do orden con entrada fuerza

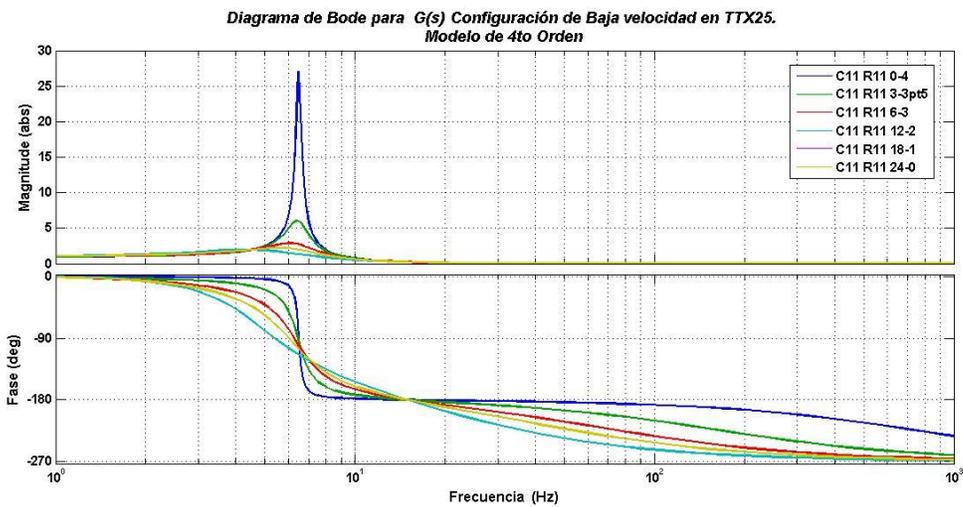
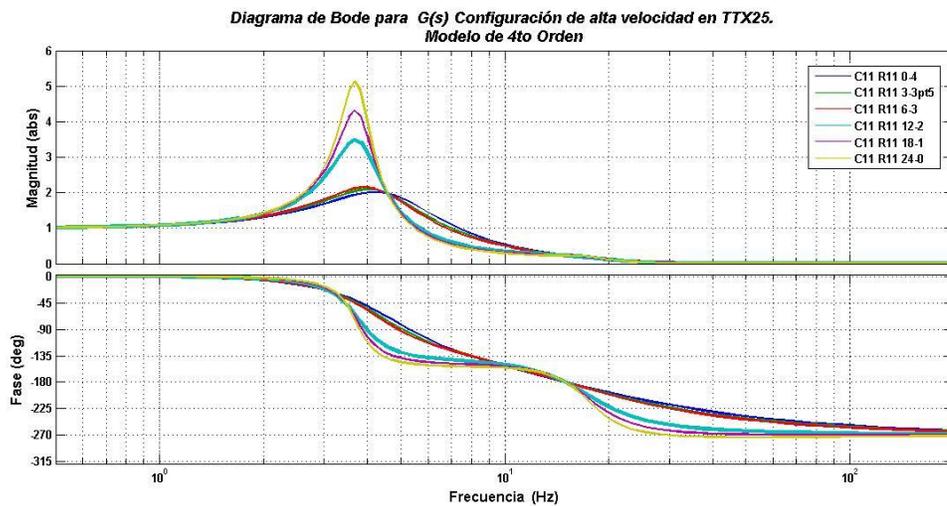
La primera imagen es para configuración de alta velocidad y la segunda de baja velocidad en el TTX25



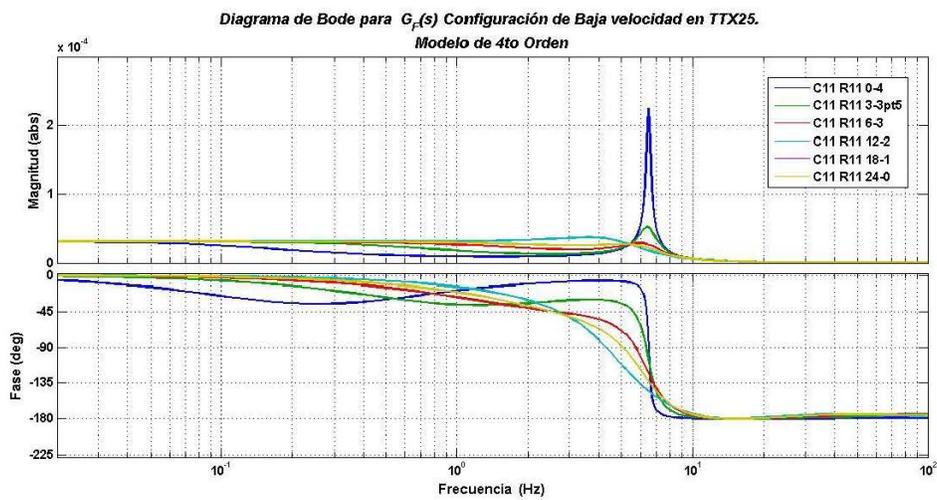
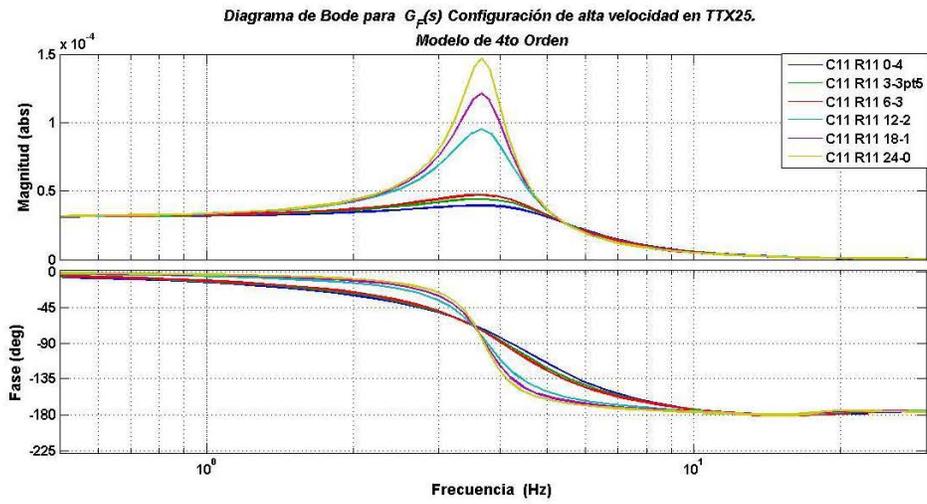


### A.4.3 Transmisibilidad y diagrama de fase del modelo de 4to orden

Primer figura es para constante del amortiguador igual al ajuste de alta velocidad en el TTX25, la segunda es para se ajuste de baja velocidad.

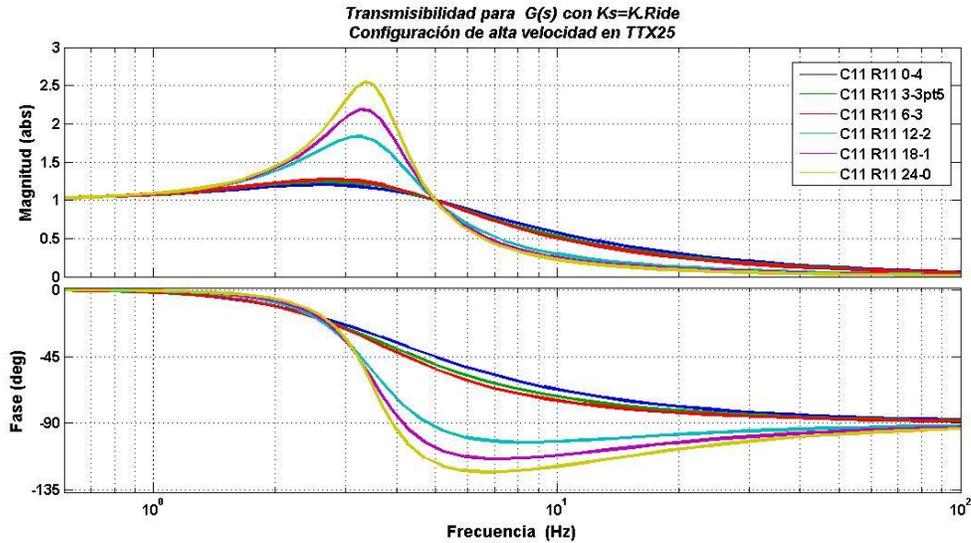


A.4.4 Diagrama de bode e del modelo de 4to orden con fuerza como excitación



**A.4.5 Desempeño del sistema de 2do orden al cambiar la constante del resorte.**

A manera de ejemplo en esta sección cambiamos el valor del resorte  $K_s=205L_n/in=4378[N/m]$  por su correspondiente valor en Ride Rate  $28801.811[N/m]$ , del sistema de suspensión delantero. Dando como resultado la siguiente figuras en transmisibilidad.



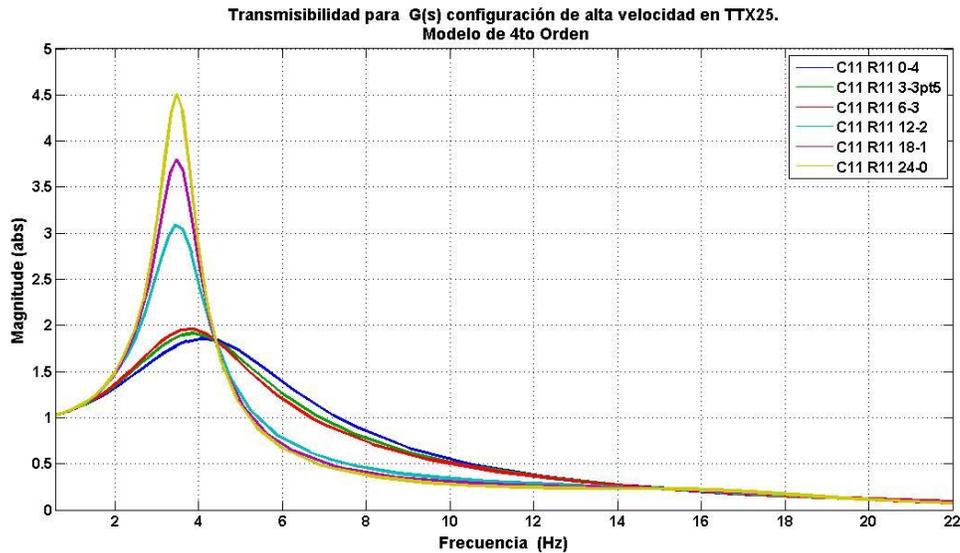
Las características de los gráficos son:

Altas Velocidades	
Código	$\xi$
C11 R11 0-4	0.852
C11 R11 3-3pt5	0.752
C11 R11 6-3	0.702
C11 R11 12-2	0.338
C11 R11 18-1	0.264
C11 R11 24-0	0.217

Donde todas las configuraciones tiene una frecuencia natural de 3.51Hz

#### A.4.6 Desempeño des sistema de 4do orden al cambiar la constante del resorte por su Wheel Rate

En este caso cambiamos la constante del resorte  $K_s=205L_n/in=4378[N/m]$  por su respectivo valor de Wheel Rate  $K_W=37866.836 [N/m]$  de acuerdo a la *tabla 3.4*. Esto nos da como resultado, la gráfica de transmisibilidad.



Donde los valores de los factores de amortiguamiento para la masa suspendida son:

Altas Velocidades	
Código	$\xi$
C11 R11 0-4	0.476
C11 R11 3-3pt5	0.433
C11 R11 6-3	0.402
C11 R11 12-2	0.191
C11 R11 18-1	0.149
C11 R11 24-0	0.122

En este sistema los valores de frecuencia natural de la masa suspendida y no suspendida son 3.53Hz y 17.18Hz respectivamente. Cabe destacar que el valor de frecuencia natural en la masa suspendida de este modelo y la sección anterior es casi la misma. Esto se debe a que ambos sistemas incluyen las características de la constante elástica del neumático y los valores de installation ratio.





### A.5.2 OptimumT Resumen de Coeficientes en el Modelo de Pacejka 2002

La columna de interés es la del modelo 02, que corresponde al modelo PAC2002.

Pacejka Coefficients		Models			
General		96	02	02Pi	06
Fz0	Nominal load	x	x	x	x
r0	Tire unloaded radius	x	x	x	x
V0	Reference velocity		x	x	x
Pi0	Reference pressure			x	
Pure Lateral		96	02	02Pi	06
pCy1	Shape factor	x	x	x	x
pDy1	Lateral coefficient of friction at Fz0	x	x	x	x
pDy2	Variation of friction with load	x	x	x	x
pDy3	Variation of friction with camber squared	x	x	x	x
pEy1	Lateral curvature at Fz0	x	x	x	x
pEy2	Variation of curvature with load	x	x	x	x
pEy3	Zero order camber dependency of curvature	x	x	x	x
pEy4	Variation of curvature with camber	x	x	x	x
pEy5	Camber curvature				x
pKy1	Maximum cornering stiffness	x	x	x	x
pKy2	Load at which maximum stiffness occurs	x	x	x	x
pKy3	Variation of stiffness with camber	x	x	x	x
pKy4	Variation of stiffness with camber squared				x
pKy5	Lateral stiffness dependency with camber				x
pKy6	Camber stiffness factor				x
pKy7	Load dependency of camber stiffness factor				x
pHy1	Horizontal shift at Fz0	x	x	x	x
pHy2	Variation of horizontal shift with load	x	x	x	x
pHy3	Variation of horizontal shift with camber	x	x	x	
pVy1	Vertical shift at Fz0	x	x	x	x
pVy2	Variation of vertical shift with load	x	x	x	x
pVy3	Variation of vertical shift with camber	x	x	x	x
pVy4	Variation of vertical shift with camber and load	x	x	x	x
pPy1	Variation of cornering stiffness with inflation pressure			x	
pPy2	Variation of cornering stiffness with inflation and load			x	
pPy3	Variation of friction with inflation pressure			x	
pPy4	Variation of friction with inflation pressure squared			x	

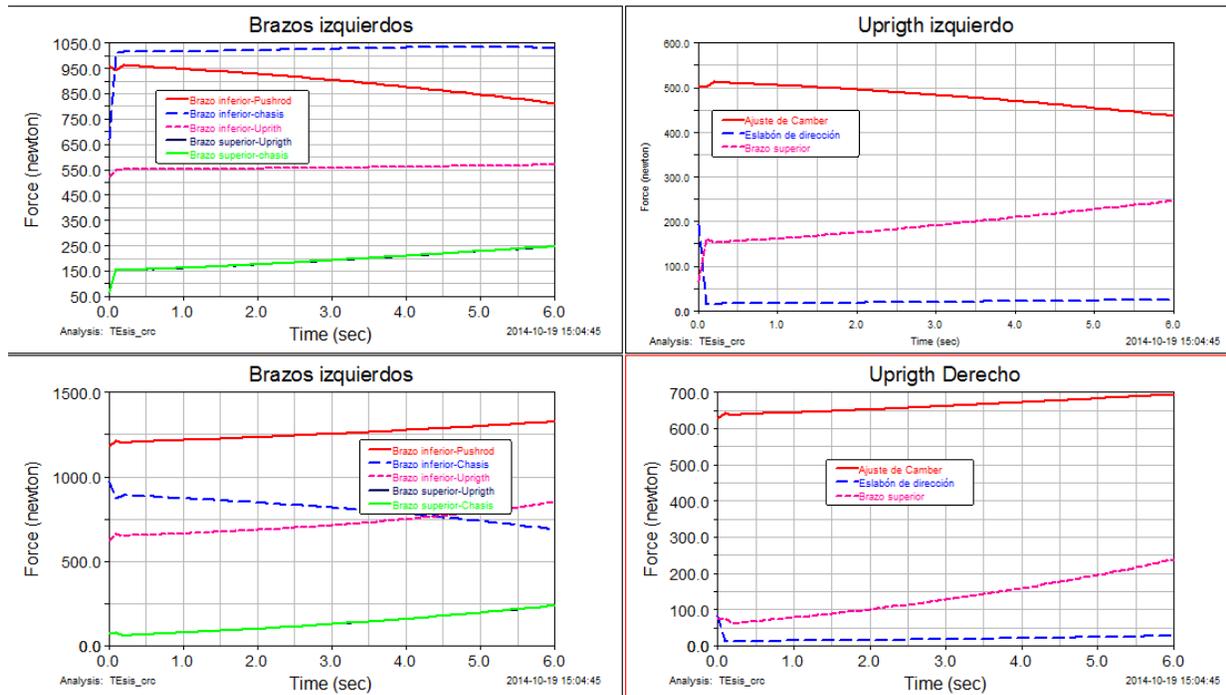
Coefficientes para fuerza longitudinal y par de alineamiento.

Pure Longitudinal		96	02	02Pi	06
pCx1	Shape factor	x	x	x	x
pDx1	Longitudinal coefficient of friction at Fz0	x	x	x	x
pDx2	Variation of friction with load	x	x	x	x
pDx3	Variation of friction with camber				
pEx1	Longitudinal curvature at Fz0	x	x	x	x
pEx2	Variation of curvature with load	x	x	x	x
pEx3	Variation of curvature with load squared	x	x	x	x
pEx4	Factor in curvature while driving	x	x	x	x
pKx1	Longitudinal slip stiffness at Fz0	x	x	x	x
pKx2	Variation of slip stiffness with load	x	x	x	x
pKx3	Exponent in slip stiffness with load	x	x	x	x
pHx1	Horizontal shift at Fz0	x	x	x	x
pHx2	Variation of horizontal shift with load	x	x	x	x
pVx1	Vertical shift at Fz0	x	x	x	x
pVx2	Variation of vertical shift with load	x	x	x	x
pPx1	Variation of slip stiffness with inflation pressure			x	
pPx2	Variation of slip stiffness with inflation pressure squared			x	
pPx3	Variation of friction with inflation pressure			x	
pPx4	Variation of friction with inflation pressure squared			x	
Aligning Torque		96	02	02Pi	06
qBz1	Pneumatic trail slope factor at Fz0	x	x	x	x
qBz2	Variation of trail slope with load	x	x	x	x
qBz3	Variation of trail slope with load squared	x	x	x	x
qBz4	Variation of trail slope with camber				x
qBz5	Variation of trail slope with absolute camber	x	x	x	x
qBz6	Variation of trail slope with camber squared		x	x	x
qBz9	Slope factor of residual torque	x	x	x	x
qBz10	Slope factor of residual torque	x	x	x	x
qCz1	Shape factor for pneumatic trail	x	x	x	x
qDz1	Peak pneumatic trail	x	x	x	x
qDz2	Variation of peak trail with load	x	x	x	x
qDz3	Variation of peak trail with camber	x	x	x	x
qDz4	Variation of peak trail with camber squared	x	x	x	x
qDz6	Peak residual torque	x	x	x	x
qDz7	Variation of peak torque with load	x	x	x	x
qDz8	Variation of peak torque with camber	x	x	x	x
qDz9	Variation of peak torque with camber and load	x	x	x	x
qDz10	Variation of peak torque with camber squared				x
qDz11	Variation of peak torque with camber squared and load				x
qEz1	Pneumatic trail curvature at Fz0	x	x	x	x
qEz2	Variation of curvature with load	x	x	x	x
qEz3	Variation of curvature with load squared	x	x	x	x
qEz4	Variation of curvature with sign of slip angle	x	x	x	x
qEz5	Variation of curvature with camber and sign of slip angle	x	x	x	x
qHz1	Pneumatic trail horizontal shift at Fz0	x	x	x	x
qHz2	Variation of horizontal shift with load	x	x	x	x
qHz3	Variation of horizontal shift with camber	x	x	x	x
qHz4	Variation of horizontal shift with camber and load	x	x	x	x
qPz1	Variation of peak with inflation pressure			x	

Combined Lateral		96	02	02Pi	06
rBy1	Slope factor for combined slip lateral force reduction	x	x	x	x
rBy2	Variation of lateral force slope reduction with slip angle	x	x	x	x
rBy3	Shift factor for slip angle in lateral force slope reduction	x	x	x	x
rBy4	Variation of lateral force combined stiffness with camber				x
rCy1	Shape factor for combined slip lateral force reduction		x	x	x
rEy1	Curvature factor of combined lateral force		x	x	x
rEy2	Curvature factor of combined lateral force with load	x	x	x	x
rHy1	Horizontal shift factor for lateral force reduction		x	x	x
rHy2	Horizontal shift factor for lateral force reduction with load	x	x	x	x
rVy1	Vertical shift at Fz0 for lateral force reduction	x	x	x	x
rVy2	Variation of vertical shift factor with load	x	x	x	x
rVy3	Variation of vertical shift factor with camber	x	x	x	x
rVy4	Variation of vertical shift factor with slip angle	x	x	x	x
rVy5	Variation of vertical shift factor with slip ratio	x	x	x	x
rVy6	Variation of vertical shift factor with the arctan of slip ratio	x	x	x	x
Combined Longitudinal		96	02	02Pi	06
rBx1	Slope factor for combined slip longitudinal force reduction	x	x	x	x
rBx2	Variation of longitudinal force slope reduction with slip ratio	x	x	x	x
rBx3	Variation of longitudinal force combined stiffness with camber				x
rCx1	Shape factor for combined slip longitudinal force reduction	x	x	x	x
rEx1	Curvature factor of combined longitudinal force		x	x	x
rEx2	Curvature factor of combined longitudinal force with load		x	x	x
rHx1	Shift factor for combined slip longitudinal force reduction	x	x	x	x
Combined Aligning Torque		96	02	02Pi	06
sSz1	Effect of longitudinal force on aligning torque	x	x	x	x
sSz2	Variation of aligning torque with lateral force	x	x	x	x
sSz3	Variation of aligning torque with camber	x	x	x	x
sSz4	Variation of aligning torque with camber and load	x	x	x	x
Overturning Moment		96	02	02Pi	06
qSx1	Vertical force induced overturning moment		x	x	x
qSx2	Camber induced overturning moment		x	x	x
qSx3	Lateral force induced overturning moment		x	x	x
Rolling Moment		96	02	02Pi	06
qSy1	Rolling resistance torque coefficient		x	x	x
qSy2	Variation of rolling resistance torque with load		x	x	x

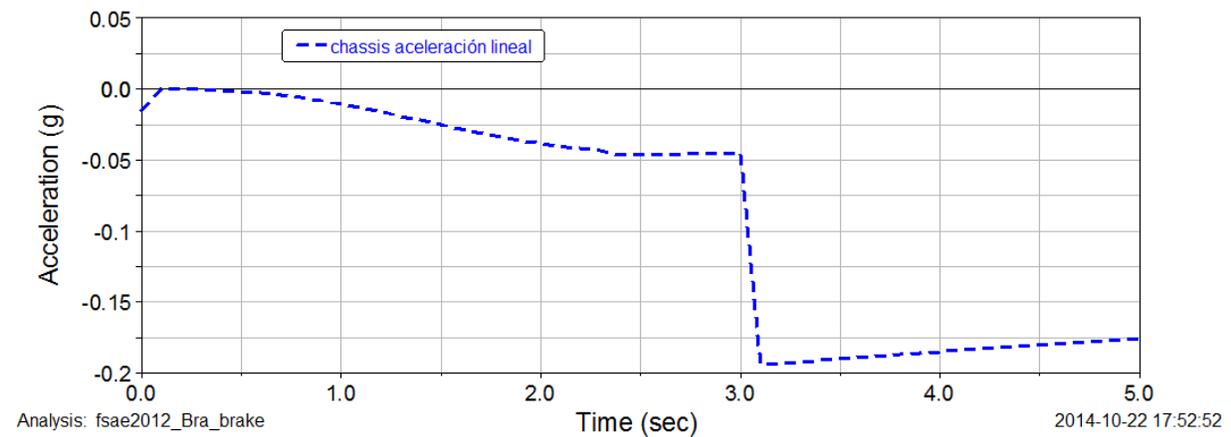
Table 8.8: Pacejka Coefficients

### A.5.3 Resultados de fuerzas en brazos traseros en la prueba de Skid-Pad

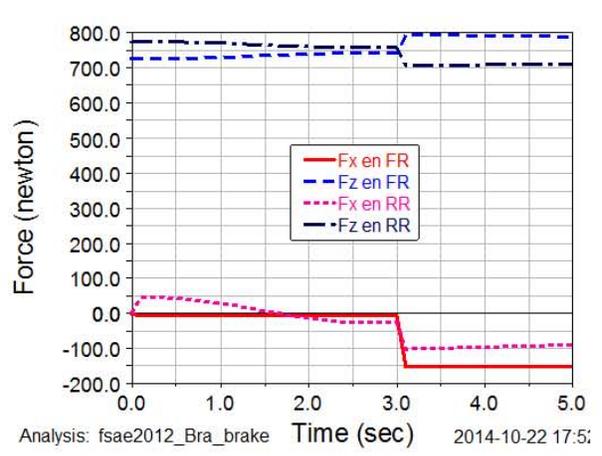
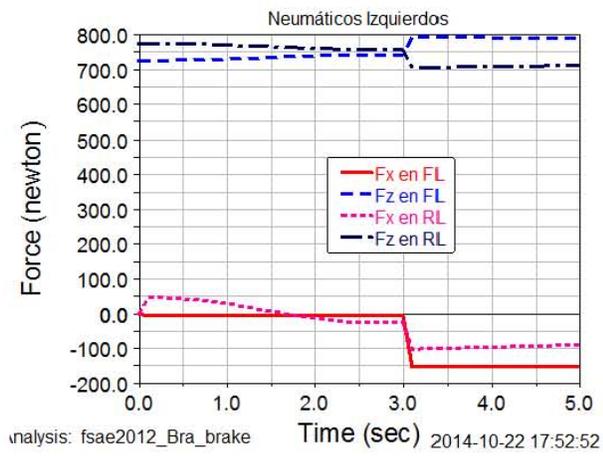


### A.5.4 Prueba de frenado

La siguiente curva muestra la aceleración del centro de masa del auto



En las siguientes graficas se pueden apreciar las fuerzas en los neumáticos para cumplir con las velocidades descritas en la sección 5.2.3



A.6.1. Hoja de pruebas

**Testing code** \_\_\_\_\_ **UM-515**

SAFETY PERFORMANCE SERVICE COST

*Measure weight (with driver) just before test.*

Engineer: \_\_\_\_\_  
 Driver: \_\_\_\_\_

$W_1 =$  \_\_\_\_\_ [kg]  
 $W_2 =$  \_\_\_\_\_ [kg]  
 $W_3 =$  \_\_\_\_\_ [kg]  
 $W_4 =$  \_\_\_\_\_ [kg]

Camber \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Toe \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Spring \_\_\_\_\_ [Lb/in]  
 Preload \_\_\_\_\_ [lb]  
 Tire \_\_\_\_\_ [-]  
 Pressure \_\_\_\_\_ [Psi]  
 Temperature \_\_\_\_\_ [°C]

Camber \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Toe \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Spring \_\_\_\_\_ [Lb/in]  
 Preload \_\_\_\_\_ [lb]  
 Tire \_\_\_\_\_ [-]  
 Pressure \_\_\_\_\_ [Psi]  
 Temperature \_\_\_\_\_ [°C]

Engine: \_\_\_\_\_  
 Fuel \_\_\_\_\_  
 Map code \_\_\_\_\_

Brake balance \_\_\_\_\_ [%front]

Aerodynamics  
 Drag coefficient \_\_\_\_\_  
 Lift coefficient \_\_\_\_\_

Camber \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Toe \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Spring \_\_\_\_\_ [Lb/in]  
 Preload \_\_\_\_\_ [lb]  
 Tire \_\_\_\_\_ [-]  
 Pressure \_\_\_\_\_ [Psi]  
 Temperature \_\_\_\_\_ [°C]

Camber \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Toe \_\_\_\_\_ [Deg]  
 Spring \_\_\_\_\_ [Lb/in]  
 Preload \_\_\_\_\_ [lb]  
 Tire \_\_\_\_\_ [-]  
 Pressure \_\_\_\_\_ [Psi]  
 Temperature \_\_\_\_\_ [°C]

Anti-Roll bar  
 Front \_\_\_\_\_ [Nm/deg]  
 Rear \_\_\_\_\_ [Nm/deg]

Comments

---



---



---

## A.6.2 Programa para simulación del perfil de camino.

```

%% Programa para adquirir datos de pista

filename='log_07_07_14-10_46.xlsx';
sheet1='Time';
sheet2='Chassis';
sheet3='Damper Position Raw';
xlRange='A1:A96001';
Tiempo_test = xlsread(filename, sheet1,xlRange);
Spring_Travel_FL=xlsread(filename, sheet3, 'B1:B96001');
Spring_Travel_FR=xlsread(filename, sheet3, 'C1:C96001');
Spring_Travel_RL=xlsread(filename, sheet3, 'D1:D96001');
Spring_Travel_RR=xlsread(filename, sheet3, 'E1:E96001');
Accel_Y=xlsread(filename, sheet2, 'C1:C96001');
Roll_RateDAQ=xlsread(filename, sheet2, 'D1:D96001');

% Roll_angle_front=zeros(1,length(Spring_Travel_FL));
for i=1:length(Spring_Travel_FL)
    Ay_test(i)=Accel_Y(i);
    Roll_angle_F(i)=atan(((Spring_Travel_FL(i)-Spring_Travel_FR(i))/1000)/sqrt(
    (sqrt(IR_F))^2+57.3;
    Roll_angle_R(i)=atan(((Spring_Travel_RL(i)-Spring_Travel_RR(i))/1000)/sqrt(
    (sqrt(IR_R))^2+57.3;
    if Roll_angle_F(i)>0.02 && Roll_angle_F(i)<0.02
        roll_grad_F(i)=Ay_test(i)/Roll_angle_F(i);
        roll_grad_R(i)=Ay_test(i)/Roll_angle_R(i);
    end
end
%Figura roll rate delantero
figure;
subplot('Tiempo_test, Roll_RateDAQ, '-k');
plot(Ay_test, Roll_angle_F, 'b'); hold on;
plot(Ay_test, Roll_angle_R, 'r'); hold off;
figure;
plot(roll_grad_F, 'b'); hold on; ylim([-3,3]);
plot(roll_grad_R, 'r'); hold off;

figure;
plot(Tiempo_test, Spring_Travel_FL, 'b'); hold on;
plot(Tiempo_test, Spring_Travel_FR, 'r');

road2=(Spring_Travel_FL*2)/1000;
figure; plot(Tiempo_test, road2);

%%
%legend('C11 B11 0-4', 'C11 B11 3-3pt8', 'C11 B11 6-3', 'C11 B11 12-2', 'C11 B11 18-4',
'1', 'C11 B11 24-0');
CI=C_Altas(C_Blec);
%% ****Análisis Numérico DESPLAZAMIENTO
% Método numérico de Euler Modificado
length(Tiempo_test);
t_f=Tiempo_test(length(Tiempo_test)); %Tiempo de analisis %
t0=0; % Tiempo inicial

figure();
plot(t, uk, 'k-'); %Front%
hold on;
plot(t, x1e, 'b-'); %Front%
grid on
plot(t, x3e, 'r-'); %
ylabel('Desplazamiento (Metros)');
xlabel('Tiempo (s)');
title('Respuesta por método numérico');
legend('camino', 'Compresión TIRE', 'compresión Damper');
hold off
%% Animación
figure(222);

tiempo_ini_sim=490; %Inicio de simulación (seg)
tiempo_final_sim=520; %Fin de simulación (seg)
paso_inicial=tiempo_ini_sim*100;
paso_final=tiempo_final_sim*100;
ancho_sim=4;

h1=plot(t(paso_inicial:paso_inicial+ancho_sim), uk(paso_inicial:
(paso_inicial+ancho_sim)), 'k'); %Camino
hold on; grid on;
set(gca, 'XTickLabel', []);
h2=plot(t(paso_inicial:paso_inicial+ancho_sim), x1e(paso_inicial:
(paso_inicial+ancho_sim)), 'b'); % Masa suspendida chasis
h3=plot(t(paso_inicial:paso_inicial+ancho_sim), x3e(paso_inicial:
(paso_inicial+ancho_sim)), 'r'); %Tire
hold off;
for k=paso_inicial:ancho_sim:(paso_final)
    hold on;
    h1=plot(t(k:(k+ancho_sim)), uk(k:(k+ancho_sim)), 'k'); %Camino

    h2=plot(t(k:(k+ancho_sim)), x1e(k:(k+ancho_sim)), 'b'); % Masa suspendida chasis

    h3=plot(t(k:(k+ancho_sim)), x3e(k:(k+ancho_sim)), 'r'); %Tire
    %pause(0.01);

    if k>100
        xlim([t(k-150), t(k+ancho_sim)]);
        ylim([-0.03, 0.03])
    end
    drawnow;
end
n_steps=100*t_f; %Número de pasos
h=(t_f-t0)/n_steps %Tamaño de pasos
t=t0:h:t_f; %Intervalo de tiempo
size(t); %Tamaño del vector tiempo
length(t); %Tamaño de la variable
%%Variables Front
x1e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
x2e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
x3e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
x4e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
tire_def=zeros(1,n_steps);
Comp_Sprn=zeros(1,n_steps);
Vel_Comp_sprn=zeros(1,n_steps);
%%
dx1e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
dx2e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
dx3e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
dx4e=zeros(1,n_steps); %Inicializamos las variable del método de
%Entradas %Entrada impulso
uk=road2; %Su peso delantero
%u2(kd)=800; % Rampa unitaria
% Parametros de las funciones
%Condiciones iniciales eje delantero
x1e(1)=0; % Posición TIRE
x2e(1)=0; % Velocidad de CG DEM
x3e(1)=0; % Posición de Chasis
x4e(1)=0; % Velocidad de chasis
for k=1:n_steps
    % Suspensión 4to orden DESPLAZAMIENTO
    %Diferencia de Euler (Aproximación)
    % if x3e(k)=0
    % K1=Ks(2);
    % else
    % K1=0;
    % end
    dx1e(k)=x2e(k);
    dx2e(k)=-(KT-R1)/M1*x1e(k)-C1/M1*x2e(k)+R1/M1*x3e(k)+C1/M1*x4e(k)+KT/M1*uk(k);
    dx3e(k)=x4e(k);
    dx4e(k)=K1/M2*x3e(k)+C1/M2*x2e(k)-K1/M2*x1e(k)-C1/M2*x4e(k);
    % Solución para Euler
    x1e(k+1)=x1e(k)+h*dx1e(k);
    x2e(k+1)=x2e(k)+h*dx2e(k);
    x3e(k+1)=x3e(k)+h*dx3e(k);
    x4e(k+1)=x4e(k)+h*dx4e(k);
    tire_def(k+1)=x1e(k)-uk(k); %Tire deflexion
    Comp_Sprn(k+1)=x2e(k)-x1e(k);
    Vel_Comp_sprn(k+1)=x4e(k)-x2e(k);
end
% Euler

```