UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRINCIPIOS DE COMBINATORIA INFINITA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CÉSAR ALEJANDRO SÁNCHEZ ÁREVALO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSVALDO ALFONSO TÉLLEZ NIETO
2014

Ciudad Universitaria, D. F.

Hoja de datos del jurado.

1.-Datos del alumno
Sánchez
Arévalo
César Alejandro
55-54-33-97-40
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
306236693

2.-Datos del tutor
Dr.
Osvaldo
Alfonso
Téllez
Nieto

3.-Datos del sinodal 1
Dr.
Roberto
Pichardo
Mendoza

4.-Datos del sinodal 2
M. en C.
Rafael
Rojas
Barbachano

5.-Datos del sinodal 3
Dra.
Gabriela
Campero
Arena

6.-Datos de sinodal 4
M. en C.
Manuel
Lara
Mary

7.-Datos del trabajo escrito
Principios de Combinatoria Infinita
63p. 2015

A mi madre.

Con ella todo, sin ella nada.

Índice general

Introducción

En 1939 Gödel introdujo los conjuntos construibles en su prueba de la consistencia del Axioma de Elección y de la Hipótesis Generalizada del Continuo[1]. La clase L de todos los conjuntos construibles, el universo construible, es un modelo transitivo de los axiomas de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección y más aún, es el mínimo modelo transitivo que contiene a todos los ordinales. En este modelo se obtienen muchas propiedades que son muy fuertes y relevantes para la consistencia de enunciados de la Teoría de Conjuntos por lo que es natural que varios matemáticos se vean interesados en cuál es la razón de que este modelo sea tan armonioso, es poe esto que se llevaron a cabo análisis más profundos para intentar extraer esos resultados sin pedir hipótesis tan fuertes como el Axioma de Constructibilidad de Gödel.

Más tarde, en 1972, Jensen fue uno de los matemáticos que hizo un análisis detallado respecto a los niveles de la jerarquía constructiva de L. Una de las principales pruebas del artículo [13] de Jensen es que L es modelo de la existencia de un κ-árbol de Suslin. Lo construye por recursión sobre κ observando las consecuencias sobre la cofinalidad de cada ordinal α anterior a κ. Si κ es cardinal regular, la prueba involucra la existencia de una sucesión con ciertas propiedades, sin embargo, Jensen notó que si κ es cardinal singular, la estrategia fallaba en el caso $cf(\alpha) = cf(\kappa)$. Para remediar esto introdujo una nueva sucesión con propiedades distintas a la anterior. A la primera sucesión le llamó $\diamondsuit$ y a la segunda $\square$.

[1] Se puede consultar en [10].

Jensen afirmó que como consecuencia de su trabajo se tenía que si κ es un cardinal infinito, entonces para cualquier modelo M donde existieran una $\Box^*_\kappa$ sucesión y una $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$ sucesión para todo conjunto estacionario E, entonces existiría un κ^+-árbol de Suslin[2].

Esto daría inicio al estudio de los llamados principios combinatorios lo que dio lugar a varias debilitaciones, equivalencias y fortalecimientos de $\diamondsuit$ y $\Box$, uno de ellos fue introducido por Ostaszewski mientras trabajaba con aplicaciones de $\diamondsuit$ a la topología. Por su relevancia se empezó a estudiar por separado y se le denotó como $\clubsuit$, a su vez se derivaron varios debilitamientos, equivalencias y fortalecimientos de $\clubsuit$.

Recientemente, en 2010, Martin Zeman [20] demostró un teorema que completa una generalización que efectuó Shelah al teorema de Gregory, Jensen, Shelah sobre estacionarios específicos y para esto introduce un nuevo principio combinatorio llamado $\bigcirc$. El objetivo final de la tesis es analizar la relación de este nuevo principio con algunos de los anteriores y algunas propiedades principales para llegar a una aproximación del teorema de Zeman.

Naturalmente como todos los principios son propiedades extraídas del Universo Constructible L, todos son consistentes con ZFC y las consistencias de sus negaciones dependen de la existencia de cardinales grandes o de la negación de la Hipótesis del Continuo. Sin embargo, nosotros no indagaremos en esos temas.

En el primer capítulo revisaremos algunas nociones sobre combinatoria infinita, conjuntos estacionarios, conjuntos cerrados no acotados, árboles y el universo constructible que serán necesarios en el trabajo.

En el segundo capítulo veremos una reseña histórica para ver a fondo cómo fue extraído el principio $\diamondsuit$ y dos de sus consecuencias directas, la primera respecto a la Hipótesis del Continuo y la segunda respecto a la existencia de un Árbol de Suslin.

En el tercero indagaremos sobre las equivalencias, debilitamientos y fortaleci-

[2]La demostración se puede consultar en [5]. La demostración que daremos será una más particular.

mientos de $\diamondsuit$ y algunos resultados de éstos, y por lo tanto, resultados indirectos de $\diamondsuit$ en álgebra, aritmética cardinal y la existencia de una $\diamondsuit$-sucesión en el Universo Constructible L.

Para el cuarto capítulo haremos lo propio con el principio $\clubsuit$ empezando con una reseña histórica para obtener el origen de este principio y analizaremos la evolución de la definición que se efectuó para hacerlo un principio más fuerte sin que perdiera su esencia, después veremos su relación con $\diamondsuit$ y la Hipótesis del Continuo, y por último haremos el análisis de una variante que hizo Juhász en aplicaciones para Invariantes Cardinales del Continuo y verificaremos que esta variación es un debilitamiento de $\clubsuit$.

Finalmente en el quinto capítulo estudiaremos $\Box$, sus debilimientos y la forma en cómo aparece $\bigcirc$; veremos algunas consecuencias directas de $\bigcirc$ y una equivalencia que nos será necesaria, veremos su relación con $\diamondsuit$ y con la Hipótesis Generalizada del Continuo localmente aplicada a un cardinal κ para aproximarnos al teorema de Zeman.

Para una mejor comprensión del documento es recomendable que el lector esté familiarizado con los temas de Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática que se estudian en las materias correspondientes en la Facultad de Ciencias de la UNAM. La notación utilizada es la usual y sigue a [12] y [16].

Agradecimientos

Agradezco la culminación de esta tesis a mi tutor el Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto, quien me guió a lo largo del trabajo y depositó su voto de confianza en mí.

De igual forma agradezco a mis sinodales, quienes fueron mis profesores de Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática a lo largo de la carrera, por sus comentarios y correcciones que llevaron a una presentación coherente, precisa y elegante de mi trabajo: Roberto Pichardo Mendoza, Rafael Rojas Barbachano, Gabriela Campero Arena, Manuel Lara Mary.

Quisiera hacer una especial mención al Dr. Roberto Pichardo Mendoza por su enorme paciencia al leer este texto y ayudarme a entender la esquematización de varias demostraciones, sus comentarios fueron invaluables en este proceso.

Al M. en C. Mario Francisco Rosales Gonzáles por acercarme a la Teoría de Conjuntos y Lógica formal.

Al M. en C. Manuel Lara Mary por darme la oportunidad de impartir cursos tan bellos a su lado.

A Ana María Arévalo Mendoza por ser mi más grande inspiración, la única deidad que conozco al otorgarme el regalo más sútil, la vida.

A mi familia por su incondicional apoyo y cariño, en especial a Artemio Arévalo Mendoza y Juana Lilia Díaz Buendia por ofrecerme una segunda casa y nunca perder la fe en mí cuando todos lo hicieron, a Perla del Rocío Sánchez Arévalo por su compañia y comprensión, a Vicente Arévalo Mendoza por sus consejos que lo convirtieron en un modelo a seguir a lo largo de mi vida, a María

Dolores Mendoza Guzmán por su instrucción ontológica que me llenó de valores y cambió mi perspectiva sin modificar mis creencias, a Ramón Arévalo Mendoza por su apoyo a pesar de la distancia.

A mis amigos por tantos pequeños momentos que hacen de mi vida feliz día con día, a las familias Ríos Giles y Hernández Vázquez por acogerme como uno de los suyos.

A Ysol por mostrarme que dentro de mí hay algo más y demostrarme que si lo puedes soñar lo puedes lograr, un oasis en el infierno que perdurará en mi memoria y en mi piel.

Por último quisiera agradecer a mi alma máter, la Universidad Nacional Autónoma de México y sus hermosas instalaciones de la Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas, donde nació la semilla del pensamiento libre, objetivo y cultural que rige mi día a día.

“La vida es sueño,
y los sueños, sueños son.”[3]
SS & GP

[3]Extraído de la obra “La vida es sueño” de Calderón de la Barca.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sobre el lenguaje

La teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel se inscribe dentro de un lenguaje formal de primer orden cuyo único símbolo no lógico (suceptible de interpretación) es la letra predicativa binaria $\in$. Este lenguaje está denotado por $\mathscr{L}_\in$, la teoría de Zermelo Fraenkel queda determinada por sus axiomas que denotaremos ZF[1]. Las interpretaciones del lenguaje son estructuras de la forma $\langle M, R\rangle$, donde M es una clase de conjuntos y R es una relacional sobre M, es decir, $R \subseteq M \times M$ y R es la interpretación de la pertenencia. Nosotros aquí trabajaremos por lo general el caso donde R coincide con la pertenencia $\in$ a no ser que se indique lo contrario, denotaremos las estructuras siemplemente como M, omitiendo la relacional si se trata de la pertenencia.

Definición 1.1 *Sean M y N dos clases. Diremos que M es una* subestructura *de N si y solo si $M \subseteq N$.*

Si M es una subestructura de N, diremos que M es una subestructura elemental *de N si y sólo si para toda fórmula ϕ de $\mathscr{L}_\in$ y $(x_0, ..., x_n)$ una tupla en M se tiene que:*

[1]Se pueden consultar en [2].

$M \models \phi(x_0, ..., x_n)$ si y sólo si $N \models \phi(x_0, ..., x_n)$.

Si M es una subestructura elemental de N, lo denotaremos $M \preceq N$.

Dado que no todas las estructuras son transitivas y esa propiedad será de vital importancia también asumiremos el siguiente teorema:

Teorema 1.2 (Colapso de Mostowski) *Sea P una clase y R un relacional, izquierdo limitado, bien fundado y extensional en P. Entonces hay una clase transitiva M y un isomorfismo*[2] *G tal que $\langle P, R\rangle$ es isomorfo a $\langle M, \in\rangle$ bajo G. La clase M y el isomorfismo G son únicos.*[3]

1.2. Combinatoria Infinita.

En esta sección enunciaremos algunas definiciones y probaremos algunos hechos sobre conjuntos cerrados no acotados y estacionarios que serán usados a lo largo de todo el trabajo.

Definición 1.3 *Sea α un ordinal infinito y $A \subseteq \alpha$. Diremos que $A \subseteq \alpha$ es* no acotado *en α, si para toda $\beta \in \alpha$ existe $\gamma \in A$ tal que $\beta < \gamma$.*[4]

Definición 1.4 *Sea A un conjunto de ordinales. Diremos que A es* cerrado *si para toda $\alpha \in A$ tal que $\alpha \cap A$ es no acotado en α entonces $\alpha \in A$ o equivalentemente, un conjunto de ordinales A es* cerrado *si para cada sucesión*[5] *contenida en A con límite α, se concluye que $\alpha \in A$.*

Definición 1.5 *Sea α un ordinal infinito y $A \subseteq \alpha$. Diremos que A es un* conjunto cerrado no acotado *sobre α (club, por sus siglas en inglés, las cuales utilizaremos de ahora en adelante) si cumple que es cerrado y no acotado en α.*

Definición 1.6 *Sea A un conjunto. Diremos que A es un* conjunto estacionario *sobre α si para todo club C sobre α tenemos que $A \cap C$ es no vacío.*

[2]Isomorfismo en el sentido usual, una funcional biyectiva que preserva las relaciones.

[3]Consultar [16] para la demostraciones y las definiciones correspondientes.

[4]Note que esta definición sólo tiene sentido para ordinales límite.

[5]Por sucesión nos referimos a una β-sucesión con β un ordinal no necesariamente numerable.

El siguiente es un ejemplo de conjunto cerrado no acotado:

Ejemplo 1.7 *Sea κ un cardinal y $\gamma \in \kappa$. $B = \{\beta \in \kappa : \gamma < \beta\}$ es un club sobre κ.*

Prueba. Veamos primero que B es no acotado en κ.

Sea $\alpha \in \kappa$. Basta notar que si $\alpha < \gamma$, entonces $\gamma + 1 \in B$ por definición y $\alpha < \gamma + 1$. Si $\alpha > \gamma$, entonces por la definición de B $\alpha + 1 \in B$ y $\alpha < \alpha + 1$, por lo que B es no acotado en κ.

Ahora sólo nos falta ver que B es cerrado.

Sea $\delta < \kappa$ tal que $\delta \cap B$ es no acotado en δ. Sea $\beta \in \delta \cap B$. Por definición de B tenemos que $\gamma < \beta$, pero $\beta < \delta$ y así $\gamma < \delta$ lo que implica que $\delta \in B$ por definición de B. Entonces B es cerrado. Por lo tanto, B es club sobre κ. ■

Del ejemplo anterior se puede deducir un lema sobre la intersección de clubs.

Lema 1.8 *Sea κ un cardinal infinito. Si $cf(\kappa) \leq \lambda$, entonces hay $\{C_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una λ-familia de clubs sobre κ tal que*

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = \emptyset.$$

Prueba. Basta observar que como $cf(\kappa) \leq \lambda$, existe una función $f : \lambda \to \kappa$ creciente y cofinal, así para cada $\alpha \in \lambda$, definimos $C_\alpha = \{\beta \in \kappa : \beta \geq f(\alpha)\}$. Como f es cofinal, se sigue que

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = \emptyset.$$

■

Del lema anterior se puede deducir cuál es la restricción necesaria para que la intersección arbitraria de clubs sobre κ siga siendo club sobre κ.

Lema 1.9 *Si κ un cardinal regular no numerable, entonces la intersección de menos de κ clubs sobre κ es un club sobre κ.*

Prueba. Sea $\{C_\alpha : \alpha < \gamma\}$ con $\gamma < \kappa$ una familia de clubs sobre κ. Probaremos por inducción sobre $\gamma > \emptyset$ que la intersección es un club sobre κ. Para $\gamma = 1$ es obvio, ya que la intersección de la familia es C_0.

Supongámoslo para γ y veamos el caso sucesor. Como sabemos que

$$\bigcap_{\alpha<\gamma+1} C_\alpha = (\bigcap_{\alpha\leq\gamma} C_\alpha) \cap C_{\gamma+1}$$

, usando la hipótesis de inducción, tenemos que $\bigcap_{\alpha\leq\gamma} C_\alpha = C$ es un club en κ al igual que $C_{\gamma+1}$. Sea $\delta \in \kappa$ tal que $\delta \cap C \cap C_{\gamma+1}$ es no acotado en δ. Entonces obtenemos que $\delta \cap C$ y $\delta \cap C_{\gamma+1}$ son no acotados en δ. Como ambos son cerrados, tenemos que δ pertenece a C y a $C_{\gamma+1}$, por lo que pertenece a $C \cap C_{\gamma+1}$, por lo tanto, el conjunto deseado es cerrado. Veamos que es no acotado. Sea $\alpha \in \kappa$. Como C es no acotado, hay $\alpha_1 \in C$ tal que $\alpha < \alpha_1$ y análogamente hay $\alpha_2 \in C_{\gamma+1}$ tal que $\alpha_1 < \alpha_2$. De esta manera construimos una sucesión creciente tal que $\alpha_{2n+1} \in C$ y $\alpha_{2n} \in C_{\gamma+1}$, donde $\alpha_{2n} < \alpha_{2n+1}$ para toda n en ω y tomando el límite obtenemos que

$$\beta = \text{lím}_{n\in\omega}\alpha_n = \text{lím}_{n\in\omega}\alpha_{2n} = \text{lím}_{n\in\omega}\alpha_{2n+1}$$

; además,

$$\beta \in (\bigcap_{\alpha\leq\gamma} C_\alpha) \cap C_{\gamma+1}$$

y $\beta > \alpha$ por construcción. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha\leq\gamma+1} C_\alpha$ es no acotado.

Veamos el caso límite. Sea γ ordinal límite y supongamos que $\bigcap_{\xi\leq\alpha} C_\xi$ es un club para toda $\alpha < \gamma$. Para cada $\gamma < \omega_1$, sea

$$D_\alpha = \bigcap_{\xi\leq\alpha} C_\xi.$$

Así, por nuestra suposición tenemos que D_α es un club y obtenemos una sucesión decreciente $D_o \supseteq D_1 \supseteq D_2 ...$ de clubs tal que

$$\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha = \bigcap_{\alpha<\gamma} D_\alpha = D.$$

Sea $\delta \in \kappa$ tal que $\delta \cap D$ es no acotado en δ. Entonces, al igual que en el caso sucesor, tenemos que $\delta \cap D_\alpha$ es no acotado en δ para cada α y como cada D_α es un club, pertenece a cada intersectando y, por lo tanto, pertenece a D, por lo que D es cerrado. Para ver que D es no acotado, sea $\alpha < \kappa$. Definimos una

γ - sucesión $\langle \beta_i : i < \gamma \rangle$ tal que $\beta_0 \in D_0$ y $\alpha < \beta_0$ y para cada $0 < \xi < \gamma$ sea $\beta_\xi \in D_\xi$ tal que $\beta_\xi > sup\{\beta_\theta : \theta < \xi\}$. Como κ es regular y $\gamma < \kappa$, obtenemos que $\lim_{\xi<\gamma} = \beta$ es menor que κ y así para cada $\theta < \gamma$ el ordinal β es límite de la sucesión $\langle \beta_i : \theta < i < \gamma \rangle$ de D_θ, por lo que $\beta \in D_\theta$ por ser cerrado. Así, β pertenece a D, y por otro lado, $\alpha < \beta$ por construcción, por lo que D es no acotado. ■

Lema 1.10 *Sean κ un cardinal regular no numerable, $A \subseteq \kappa$ un club sobre κ y $B \subseteq \kappa$ un estacionario sobre κ. Entonces $A \cap B$ es estacionario sobre κ.*

Prueba. Sea C un club arbitrario sobre κ. Por el lema 1.9, tenemos que $A \cap C$ es un club, ya que A lo es. Como B es estacionario, tenemos por definición que $(A \cap C) \cap B$ es no vacío y, como $(A \cap C) \cap B = (A \cap B) \cap C$, obtenemos que $A \cap B$ es estacionario. ■

Lema 1.11 *Sean κ un cardinal regular no numerable, $n \in \omega$ y $\{C_i : i \leq n\}$ una familia de conjuntos no estacionarios sobre κ. Entonces $\bigcup\{C_i : i \leq n\}$ es no estacionario sobre κ*

Prueba. Probaremos el caso $n = 2$ e inductivamente se puede deducir el caso general. Sean A y B dos conjuntos no estacionarios, así existen clubs, C y D, con $A \cap C = B \cap D = \emptyset$. Luego, $C \cap D$ es un club ajeno con $A \cap B$, por ende, $A \cap B$ es no estacionario, tal y como se quiere. ■

Lema 1.12 *Sean κ un cardinal regular no numerable y $\{C_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos no estacionarios sobre κ. Entonces $\bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ es no estacionario sobre κ.*

Prueba. Dado $n \in \omega$, C_n es no estacionario y, por lo tanto, existe D_n un club en κ, con $C_n \cap D_n = \emptyset$. Como κ es regular y no numerable, se sigue que $\bigcap_n D_n$ es un club ajeno con $\bigcap C_n$; es decir, este conjunto no es estacionario por ser ajeno a un club. ■

Definición 1.13 *Sean B un conjunto y Φ una familia de funciones de B en B. Definiremos la cerradura de B bajo Φ por recursión sobre los naturales.*

- $B_0 = B$
- $B_{n+1} = \bigcup\{\phi[B_n] : \phi \in \Phi\}$

La cerradura de B bajo Φ queda definida como $\bigcup\{B_n : n \in \omega\}$ y se denotará como $[B]_\Phi$.

Definición 1.14 *Sea A un conjunto.*

- *Una* función n-aria *en A es una función $f : A^n \to A$ si $0 < n$; o un elemento de A, si $n = 0$.*
- *Si $B \subset A$ y f función n-aria, diremos que B es* cerrado bajo f *si $f[B^n] \subseteq B$ o $f \in B$ para el caso $n = 0$.*
- *Una función f es* función finitaria *si es una función n-aria para alguna $n \in \omega$.*
- *Si $B \subseteq A$ y Φ es un conjunto de funciones finitarias de A definimos de forma análoga a la definición 1.13 la* cerradura de B bajo Φ *y la denotaremos por $[B]_\Phi$.*

Lema 1.15 *Sean κ un cardinal regular no numerable, A un conjunto, $B \subseteq A$, $|B| < \kappa$ y Φ una familia de menos que κ funciones finitarias de A en A. Entonces $[B]_\Phi$ tiene cardinalidad menor que κ.*

Prueba. Demostraremos por inducción sobre ω que cada B_n de la construcción de la cerradura de B bajo Φ tiene cardinalidad menor que κ y por la regularidad de κ obtendremos que $|[B]_\Phi| < \kappa$. Por hipótesis, obtenemos el caso base. Sabemos que si $f \in \Phi$, entonces $f : A^m \to A$, por lo que la cardinalidad de $f[B_n^m]$ es menor que κ, ya que $|B_n| \cdot m$ lo es. Como $|\Phi| < \kappa$, tenemos que

$$|\bigcup\{\phi[B_n^{k_\phi}] : \phi \in \Phi\}| = max\{|\Phi|, |B_n|\}$$

[6] por la regularidad de κ, pero por la hipótesis inductiva $|B_n| < \kappa$, así $|B_{n+1}| < \kappa$, lo cual da por terminada la demostración. ■

[6] k_ϕ es el natural tal que ϕ es una función k-aria.

Definición 1.16 *Sean κ un cardinal y Φ un conjunto de funciones definidas sobre κ. Decimos que $\alpha < \kappa$ es* cerrado bajo Φ*, si $[\alpha]_\Phi \subseteq \alpha$.*

Teorema 1.17 *Sean κ un cardinal regular no numerable y Φ un conjunto de menos de κ funciones finitarias definidas sobre κ.*

Entonces $C = \{\gamma < \kappa : \gamma$ es cerrado bajo $\Phi\}$ es un club sobre κ.

Prueba. Primero veamos que C es cerrado. Sea $\delta \in \kappa$ tal que $C \cap \delta$ es no acotado en δ. Demostremos que δ es cerrado bajo Φ. Si $\beta \in \delta$, como $C \cap \delta$ es no acotado en δ, entonces existe $\alpha \in C \cap \delta$ tal que $\beta < \alpha$. Así, como α es cerrado bajo Φ, ya que pertenece a C, por la transitividad de la contención, tenemos que la cerradura de β bajo Φ es subconjunto de α, que a su vez lo es de δ.Así, δ es cerrado bajo Φ, por lo que δ pertenece a C.

Para ver que C es no acotado, sean $\xi \in \kappa$ y $[\xi]_\Phi$; entonces $\xi \subseteq [\xi]_\Phi \subsetneq \kappa$, y $|[\xi]_\Phi| < \kappa$, por el lema 1.15.

Como κ es un cardinal regular, definimos $g^0(\xi)$ como un ordinal tal que $\xi < g^0(\xi) < \kappa$ y $[\xi]_\Phi \subseteq g^0(\xi)$, el cual existe por la observación anterior. Así, si g^n es la n - ésima iteración de g y $g^\omega(\xi) = sup\{g^n(\xi) : n \in \omega\}$, entonces $g^\omega(\xi) \bigcap C$ es no acotado en $g^\omega(\xi)$, ya que si θ pertenece a $g^\omega(\xi)$, entonces hay $g^n(\xi)$ para alguna n en ω tal que $\theta \subset [g^n(\xi)]_\Phi$, por la manera en que se definió. Como C es cerrado, tenemos que $g^\omega(\xi)$ pertenece a C, además se tiene que $\xi < g^\omega(\xi)$ por construcción. Por lo tanto, C es no acotado. ■

Definición 1.18 *Sea α un ordinal límite y supongamos que $\langle C_\beta : \beta \in \alpha\rangle$ es una familia de subconjuntos de α.*

Definimos la Intersección Diagonal *de la familia como sigue:*

$\triangle_{\xi<\alpha} C_\xi = \{\beta \in \alpha : \forall\eta < \beta(\beta \in C_\eta)\}$.

Teorema 1.19 *Sea κ un cardinal tal que $\omega < cf(\kappa)$, supongamos que $\langle C_\beta : \beta \in \kappa\rangle$ es una familia de clubs sobre κ, entonces:*

- *Si $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ es no acotado en α para todo $\beta < \kappa$, entonces $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club sobre κ.*

- *Si κ es regular, entonces $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club sobre κ.*

Prueba.

- Supongamos que $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ es no acotado en κ para todo $\beta < \kappa$. Sea $D = \triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$. Primero demostraremos que D es cerrado en κ. Así, sea $\beta < \kappa$ tal que $D \cap \beta$ es no acotado en β. Para mostrar que $\beta \in D$, sea $\xi < \beta$; basta mostrar que $\beta \in C_\xi$. Si $E = \{\gamma \in D \cap \beta : \xi < \gamma\}$, entonces E es no acotado en β y para cada $\gamma \in E$, tenemos que $\gamma \in C_\xi$, por definición de D. Por lo tanto, $\beta \in C_\xi$, ya que C_ξ es un club.

  Veamos que D es no acotado en κ. Sea $\beta < \kappa$. Definimos una sucesión de ordinales por recursión sobre ω. Sea $\gamma_0 = \beta$, si γ_i ya está definido, sea $\gamma_{i+1} = \theta$, donde
  $$\theta \in \bigcap_{\xi<\gamma_i} C_\xi$$
  y $\theta > \gamma_i$, lo cual puede hacerse ya que por la hipótesis
  $$\bigcap_{\xi<\gamma_i} C_\xi \text{ es no acotado.}$$
  Sea $\delta = sup\{y_i : i \in \omega\}$. Como $\omega < cf(\kappa)$, $\delta < \kappa$. Afirmamos que $\delta \in D$. Si $\xi < \delta$, por construcción podemos escoger $i \in \omega$ tal que $\xi < \gamma_i$, así $\gamma_j \in C_\xi$ para toda $j \geq i$, lo que implica que $C_\xi \cap \delta$ es no acotado en δ, por lo que $\delta \in C_\xi$. Por lo tanto, $\delta \in D$ por definición de D.

- Supongamos que κ es regular. Por el lema 1.6, $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ es club sobre κ para toda $\beta < \kappa$, en particular es no acotado y por el inciso anterior obtenemos lo deseado.

■

Ahora daremos algunas definiciones y lemas cuyas demostraciones serán omitidas ya que sólo se mencionarán en la reseña histórica.

Definición 1.20 *Sea X un espacio topológico. Diremos que X tiene la* Condición de la Cadena Contable en el sentido topológico *(c.c.c.) si no hay una familia no numerable de subconjuntos abiertos de X ajenos dos a dos.*

Lema 1.21 *Sea X un espacio topológico. Si X es separable, entonces X tiene la c.c.c.*

Definición 1.22 *Sea $\langle P, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado.*

- *Una* cadena *en P es un conjunto $C \subseteq P$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$.*
- *Diremos que $p, q \in P$ son* compatibles *si y sólo si $\exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$; y son* incompatibles *$(p \perp q)$ si y sólo si no son compatibles.*
- *Una* anticadena *en P es un conjunto $A \subset P$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$.*

Definición 1.23 *Un conjunto parcialmente ordenado $\langle P, \leq \rangle$ tiene la* condición de la cadena contable *(c.c.c.) si y sólo si toda anticadena en P es numerable.*

Observación 1 *Sea X un conjunto no vacío y $P = \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$. Sea $\langle P, \subseteq \rangle$ entonces:*

- *$p \perp q$ si y sólo si $p \cap q = \emptyset$.*
- *$A \subseteq P$ es una anticadena en P si y sólo si sus elementos son ajenos dos a dos.*
- *P tiene la c.c.c. si y sólo si $|X| \leq \omega$.*

Observación 2 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si tomamos $\tau' = \tau \backslash \{\emptyset\}$ y $\langle \tau', \subseteq \rangle$, entonces τ' tiene la c.c.c. si y sólo si el espacio X la tiene en el sentido topológico.*

Definición 1.24 *Sea $\langle P, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. La* topología del orden *es la generada por la subbase $\tau = \{(-\infty, a) : a \in P\} \cup \{a, \infty) : a \in P\}$.*

1.3. Árboles

Ahora introduciremos definiciones y notación de árboles que serán usadas en la demostración del teorema referente a árboles de Suslin.

Definición 1.25 Un árbol *es un conjunto parcialmente ordenado* $\langle T, \leq\rangle$*(* $\leq$ *es reflexivo, transitivo y antisimétrico) tal que para cada* $x \in T$ *el conjunto* $\{y \in T : y \leq x \ \& \ y \neq x\}$ *está bien ordenado por* $\leq$*.*

A lo largo del texto abusaremos de la notación refiriéndonos a un árbol $\langle T, \leq\rangle$ simplemente por T.

Definición 1.26 *Sea* T *un árbol.*

- *Para cada* $x \in T$*,* la altura de x en T*, o* $ht(x, T)$*, es el tipo de orden del conjunto* $\{y \in T : y < x\}$*.*
- *Para cada ordinal* α*,* el α - ésimo nivel de T*, o* $Lev_\alpha(T)$ *es el conjunto* $\{x \in T : ht(x, T) = \alpha\}$*.*
- La altura de T*, o* $ht(T)$*, es el menor ordinal* α *tal que* $Lev_\alpha(T) = 0$*.*
- Un subárbol de T *es un subconjunto* T' *de* T *con el orden inducido tal que para toda* x *en* T' *y* $z \in T$ *si* $z \leq x$*, entonces* $z \in T'$*.*

Definición 1.27 *Sea* T *un árbol. Una anticadena en* T *es un conjunto* $A \subseteq T$ *tal que para toda* x, y *en* A *si* $x \neq y$*, entonces* $x \nleq y$ *y* $x \ngeq y$*.*[7]*. Diremos que* A *es una* anticadena maximal *si es una anticadena y es maximal bajo la contención.*

Definición 1.28 *Para cualquier cardinal regular* κ*, un* κ-árbol *es un árbol* T *de altura* κ *tal que para todo* $\alpha < \kappa$ *tenemos que* $|Lev_\alpha(T)| < \kappa$*.*

Definición 1.29 *Un árbol* T *es* siempre derivable *si y sólo si para toda* $x \in T$*, el conjunto* $\{y \in T : x < y\}$ *no es totalmente ordenado por* $\leq$*. Equivalentemente, para todo* $x \in T$*, existen* $y, z \in T$ *tales que* $x < y$ *y* $x < z$*, pero* y *y* z *no son comparables.*

Definición 1.30 *Para cualquier cardinal infinito* κ*, un* κ-árbol de Suslin *es un árbol* T *tal que* $|T| = \kappa$ *y tal que cada cadena y anticadena de* T *tienen cardinalidad menor que* κ*.*

[7] Esta definición no coincide con la noción de órdenes parciales de la definición 1.21

Lema 1.31 (König) *Si T es un $\omega-$árbol, entonces T tiene una cadena infinita.*[8]

Definición 1.32 *Sea κ un cardinal. Un $\kappa-$*árbol bien podado *es un κ-árbol T tal que $|Lev_0(T)| = 1$ y $\forall x \in T \forall \alpha (ht(x.T) < \alpha < \kappa \rightarrow \exists y \in Lev_\alpha(T)(x < y))$.*

Lema 1.33 *Sea κ un cardinal regular y T un κ-árbol. Entonces T tiene un κ-subárbol bien podado.*[9]

Definición 1.34 *Sea T un árbol. Diremos que T es un* Árbol de Aronszjan *si $ht(T) = \omega_1$, no tiene ramas no numerables y para toda $\alpha < \omega_1$ se da que $|Lev_\alpha(T)| \leq \omega$.*

En lo que sigue del trabajo por árbol de Suslin nos referiremos a un ω_1- árbol de Suslin. Note que todo árbol de Suslin es un árbol de Aronszjan.

1.4. Universo Construible

El universo construible L es el universo que Gödel propuso para probar la consistencia de CH , para más detalles sobre su construcción se puede consultar consultar [16]. Para L necesitamos las siguientes definiciones en las cuales no haremos mucho énfasis ya que solo se usarán para una demostración.

Introduciremos de manera intuitiva las definiciones básicas necesarias.

Definición 1.35 *$\mathcal{D}(A)$ es el conjunto de subconjuntos de A que son definibles desde un número finito de elementos de A por una fórmula relativizada a A.*

Esta definición no es estricta, si se quiere consultar con toda formalidad vease [16].

Ahora esbozaremos la construcción de L.

Definición 1.36 *Por recursión transfinita definimos $L(\alpha)$ para α, un ordinal, como sigue:*

[8] Para consultar la demostración ver [16]
[9] Para consultar la demostración ver [16]

- $L(0) = 0$
- $L(\alpha + 1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$
- $L(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)$, *si* α *es límite.*

Definición 1.37 $L = \bigcup\{L(\alpha) : \alpha \in OR\}$.

Definición 1.38 *Si* $x \in L$, $\rho(x)$, *el* L *-rango de* x, *es el menor ordinal* β *tal que* $x \in L(\beta + 1)$.

Lema 1.39 *L es un modelo de ZF y del Axioma de Elección, más aun L es bien ordenable.*

Usando el lema anterior podemos definir las funciones de Skolem que sirven para encontrar testigos de fórmulas.

Como sólo existe una cantidad numerable de fórmulas con $m + 1$ variables libres, podemos obtener una enumeración $\{f_n^m\}_{n\in\omega}$ para cada $m \in \omega$.

Definición 1.40 *Sea* α *un ordinal y* $f_i^m = \phi(u, v_1, ..., v_m)$ *con* $i, m \in \omega$. *Definimos la* i-ésima función de Skolem de m variables $H_{m,n} : L(\alpha)^k \to L(\alpha)$ *por casos como sigue:*

$H_{n,m}(v_1, ..., v_m) = u$, *si* $L(\alpha)$ *es modelo de* $\phi(u, v_1, ...v_m)$ *y* u *es el mínimo con esa propiedad; y* $\emptyset$ *en otro caso.*

Teorema 1.41 *Supongamos que* $V = L$. *Si* $M \subset L$ *es un submodelo transitivo de ZFC, entonces* $M = L(\alpha)$ *para algún ordinal* α.

Se pueden consultar [16], [11] y [12] para ver las demostraciones que faltan en este capítulo.

Capítulo 2

Resultados sobre $\diamondsuit$

El enunciado de diamante $\diamondsuit$ es un principio de combinatoria infinita el cual es más fuerte que la hipótesis del continuo. El propósito de este capítulo es primero dar un resumen de la forma en que se creó y posteriormente algunos de los resultados más importantes que tengan relación con éste principio.

El capítulo está dividido en secciones donde la primera es una breve historia sobre la creación de $\diamondsuit$ y después en cada una de las secciones posteriores daremos la demostración de un resultado relacionado con éste principio.

2.1. Historia sobre el principio $\diamondsuit$

El origen se remonta a una pregunta que formuló Suslin en 1920 sobre la caracterización del orden de los números reales. Sabemos que si un conjunto ordenado totalmente $\langle X, < \rangle$, cumple que:

1. X no tiene primer elemento ni último elemento.

2. X es conexo.

3. X es separable con la topología del orden.

, entonces X es isomorfo a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. Suslin sabía que ser separable implicaba la siguiente condición:

3'-Toda familia de intervalos ajenos abiertos es a lo más numerable (equivalentemente X tiene la c.c.c.).

Suslin se preguntó si esta última es equivalente, lo cual daría lugar a sustituir la condición 3 y obtener una nueva caracterización de los reales.

Para intentar dar solución, Suslin dio la siguiente definición para enunciar una hipótesis que resolvería inmediatamente el enigma y así trabajar sobre algo más simple. Aquí la enunciamos como actualmente se conoce:

Definición 2.1 *Una* Línea de Suslin *es un conjunto totalmente ordenado* $\langle X, < \rangle$*, tal que en la topología del orden* X *es c.c.c, pero no es separable.*

Con esta definición, si se diera el caso de que el conjunto X cumpliera las condiciones 1,2 y que fuera una línea de Suslin, entonces implicaría que X no es isomorfo a $\mathbb{R}$, por no ser separable, por lo que propuso su hipótesis.

Definición 2.2 *La* Hipótesis de Suslin *es el enunciado: “No hay líneas de Suslin”.*

Posteriormente se probó que si hay una línea de Suslin, entonces hay una línea de Suslin que satisface las dos primeras condiciones. Por lo tanto, tenemos que la Hipótesis de Suslin es equivalente al enunciado: las condiciones 1,2 y 3' caracterizan el orden de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

La Hipótesis de Suslin resultó ser independiente a ZFC, por lo que se desarrollaron varios trabajos sobre la consistencia de ésta y aquí es donde aparece Ronald Jensen, quien probó que la negación de la Hipótesis de Suslin es consistente con la Hipótesis Generalizada del Continuo. Por otro lado, como $\diamondsuit$ es consistente con la Hipótesis Generalizada del Continuo, la negación de la Hipótesis de Suslin es consistente con la Hipótesis Generalizada del Continuo, ya que $\diamondsuit$ implica la existencia de un árbol de Suslin, y por el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *La hipótesis de Suslin es falsa si y sólo si existe un árbol de Suslin.*[1]

[1] se puede consultar en [12].

El hecho de que $\diamondsuit$ implica la existencia de una línea de Suslin no fue directo, realmente $\diamondsuit$ fue extraído de la prueba que realizó Jensen en 1972 de que $V = L$ implica que hay un árbol de Suslin. El desglose de este hecho será uno de los temas de este trabajo, ya que $V = L$ implica $\diamondsuit$ el cual a su vez implica la negación de la Hipótesis de Suslin, pues la existencia de un árbol de Suslin es equivalente a la de una línea de Suslin. Las demostraciones de los dos primeros enunciados las haremos más adelante, en las secciones 3.6 y 2.3 respectivamente.

2.2. $\diamondsuit$ implica la Hipótesis del Continuo

Introduciremos el principio de Jensen:

Definición 2.4 $\diamondsuit$ *es el enunciado: Existe una sucesión de conjuntos* $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ *con* $A_\alpha \subseteq \alpha$ *y para cada* $A \subseteq \omega_1$*, se da que el conjunto* $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ *es un conjunto estacionario en* ω_1*.*

La sucesión $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ es llamada $\diamondsuit$- *sucesión.*

El principio de Jensen, $\diamondsuit$, admite generalización de ω_1 en cualquier cardinal regular no numerable κ y también hay una versión para conjuntos estacionarios.

Definición 2.5 *Sea* κ *un cardinal regular no numerable y* $S \subseteq \kappa$ *un conjunto estacionario sobre* κ*.* $\diamondsuit_\kappa(S)$ *es el enunciado: Existe una sucesión de conjuntos* $\langle A_\alpha : \alpha \in S\rangle$ *con* $A_\alpha \subseteq \alpha$ *y para cada* $A \subseteq \kappa$*, se da que el conjunto* $\{\alpha \in S : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ *es estacionario.*

$\diamondsuit_\kappa(\kappa)$ es denotado como $\diamondsuit_\kappa$. Si $\kappa = \omega_1$, entonces $\diamondsuit_\kappa$ coincide con $\diamondsuit$ y si se sobreentiende de qué cardinal se está hablando, $\diamondsuit_\kappa(S)$ se denotará simplemente como $\diamondsuit(S)$ ya que formalmente, κ siempre se puede recuperar a partir de S porque todo estacionario en κ no es acotado, así que $supS = \kappa$.

Todos los principios que introduciremos pueden ser generalizados y abreviados de igual forma que $\diamondsuit$.

A los principios de combinatoria se les conoce como principios de adivinanza porque capturan parcialmente una propiedad una cantidad estacionaria de veces.

Ahora veremos que $\diamondsuit$ es más fuerte que la Hipótesis del Continuo, pero antes revisaremos un lema necesario para la demostración principal.

Lema 2.6 *Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Entonces para todo $A \subseteq \omega$ existe α con $\omega < \alpha < \omega_1$ tal que $A = A_\alpha$.*

Prueba. Sea $A \subseteq \omega$. Así, por la definición de $\diamondsuit$-sucesión el conjunto

$$\{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} = C$$

es estacionario por lo que intersecta a todos los conjuntos club.

Por el lema 1.7, obtenemos que $B = \{\beta \in \omega_1 : \omega < \beta\}$ es un club, entonces $C \cap B$ es no vacío, por lo que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$. Notemos que como $A \subseteq \omega$ y $\omega < \alpha$, $A \subseteq \alpha$ por transitividad, por lo que $A \cap \alpha = A$ y así, concluimos $A = A_\alpha$ que era lo que queríamos. ■

Procederemos a demostrar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 2.7 *$\diamondsuit \Rightarrow CH$, es decir, si existe una $\diamondsuit$-sucesión, entonces $|\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1$.*

Prueba. Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Dado $A \subseteq \omega$, sea $B_A = \{\alpha \in \omega_1 \setminus \omega + 1 : A = A_\alpha\}$.

Definamos $f : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \omega_1$ como sigue: $f(A) = minB_A \in \omega_1$. Observemos que f es inyectiva, ya que si A y C son subconjuntos de ω tales que $f(A) = f(C)$, por la definición de f, tenemos que $A = A_{f(A)} = A_{f(C)} = C$, es decir, $A = C$. Por lo tanto, f es inyectiva.

De lo anterior se sigue que $|\mathcal{P}(\omega)| \leq \omega_1$, pero como $|\mathcal{P}(\omega)| \neq \omega$, $\omega_1 \leq |\mathcal{P}(\omega)|$. Por lo tanto, $\omega_1 = |\mathcal{P}(\omega)|$. ■

En esta demostración se usa la versión acostumbrada de la equipotencia entre ω_1 y la potencia de ω, pero si usamos una versión alterna se puede ver trivialmente la implicación anteriormente demostrada.

Lema 2.8 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- $|\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1$

- *Hay una sucesión* $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ *tal que para cada* α*, se tiene que* $A_\alpha \subseteq \alpha$ *y para todo* $A \subseteq \omega_1$ *existen dos ordinales infinitos* $\beta, \eta \in \omega_1$ *tales que* $A \cap \beta = A_\eta$*.*

Prueba. Supongamos que $|\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1$. Así, sea $f : \omega_1 \to \mathcal{P}(\omega)$ una biyección tal que $f(\alpha) \subseteq \alpha$ para toda $\alpha \in \omega_1$. Definimos $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ de la siguiente manera: para cada α haremos $A_\alpha = f(\alpha)$. Veamos que esa sucesión cumple lo deseado.

Sea $A \subseteq \omega_1$. Así, $A \cap \omega \subseteq \omega$, por lo que $f^{-1}(A \cap \omega) = \gamma$ para algún $\gamma \in \omega_1$. Entonces, por la definición, tenemos que $A \cap \omega = f(\gamma) = A_\gamma$, por lo que sólo nos restaría ver que γ es un ordinal infinito, pero sin pérdida de generalidad podemos asumirlo ya que el conjunto $C = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \geq \omega\}$ tiene cardinalidad ω_1, por lo que existe una biyección g entre C y ω_1 y bastaría asignar $A_n = \emptyset$, si $n \in \omega$; y $A_{g(\alpha)} = f(\alpha)$, en otro caso.

Veamos el regreso. Como $|\mathcal{P}(\omega)| > |\omega|$, tenemos que $|\omega_1| \leq |\mathcal{P}(\omega)|$, por lo que sólo nos faltaría ver la otra desigualdad.

Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ como en el enunciado. Así, tenemos en particular que para cualquier $A \subseteq \omega$ hay $\alpha, \beta \geq \omega$ tales que $A \cap \beta = A_\alpha$, por lo que definimos $f : \mathcal{P}(\omega) \to \omega_1 \times \omega_1$ de la siguiente forma:

$$f(A) = min\{(\alpha, \beta) : A \cap \beta = A_\alpha\}$$

respecto al orden lexicográfico. Veamos que f es inyectiva: tomemos A, B tal que $f(A) = f(B)$. Por la definición de f, obtenemos que $A \cap \beta = A_\alpha = B \cap \beta$, pero por la hipótesis α y β son infinitos, así que $A \cap \omega = A \cap \beta = B \cap \beta = B \cap \omega$; además A y B son subconjuntos de ω. Así, $A \cap \omega = B \cap \omega$ si y sólo si $A = B$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Sabemos que $|\omega_1 \times \omega_1| = |\omega_1|$, por lo que existe $g : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$ biyectiva y componiendo, tenemos que $g \circ f : \mathcal{P}(\omega) \to \omega_1$ es inyectiva. Por lo tanto, $|\mathcal{P}(\omega)| = |\omega_1|$. ∎

2.3. $\diamondsuit$ implica la negación de la Hipótesis de Suslin

En está sección procederemos a demostrar uno de los resultados de los que hablamos en el resumen histórico acerca de $\diamondsuit$. Primero demostraremos algunos lemas necesarios para pasar a la demostración principal.

Lema 2.9 *Supongamos que $\langle T, \leq \rangle$ es un ω_1-árbol siempre derivable en el cual toda anticadena maximal es numerable. Entonces T es un ω_1-árbol de Suslin.*

Prueba. Por el lema de Kuratowski-Zorn, cada anticadena está contenida en una anticadena maximal. Así, por la hipótesis toda anticadena es a lo más numerable. Supongamos que B es una cadena no numerable, sin pérdida de generalidad podemos tomarla maximal ya que toda cadena puede extenderse a una cadena maximal. Entonces B intersecta cada nivel de T. Como T es siempre derivable, existe $f : T \to T$ tal que $f(x) > x$ y $f(x) \notin B$.

Ahora escogemos recursivamente $x_\alpha \in B$ para cada $\alpha \in \omega_1$ de forma que

$$ht(x_\alpha, T) > sup(\{ht(f(x_\beta), T) : \beta < \alpha\}).$$

Entonces $\{f(x_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ es una anticadena no numerable por la manera en que se definió, ya que sus elementos no son comparables, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, no hay cadenas no numerables en T y así, T es un ω_1-árbol de Suslin por la definición. ■

Como $\diamondsuit$ habla al respecto de ω_1, es natural que en nuestro deseo de construir un árbol de Suslin lo hagamos sobre ω_1, antes necesitamos una definición para empezar a definir el orden que nos inducirá el árbol de Suslin.

Definición 2.10 *Para cualquier árbol T, sea $T_\alpha = \bigcup\{Lev_\beta(T) : \beta < \alpha\}$.*

Así, T_α nos define el subárbol de T por debajo del nivel α. A continuación demostraremos cómo algunas propiedades sobre árboles se ven reflejadas como clubs.

Lema 2.11 *Sea $T = \langle \omega_1, \lhd \rangle$ un ω_1-árbol. Entonces*

- $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha\}$ *es un club en* ω_1.
- *Si $A \subset \omega_1$ es una anticadena maximal en T, entonces*

  $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha \;\&\; A \cap T_\alpha$ *es una anticadena maximal en* $T_\alpha\}$ *es un club en* ω_1.

Prueba. Para la primera observación veamos primero que el conjunto es cerrado. Sea $\delta \in \omega_1$ tal que si $C = \{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha\}$, entonces $C \cap \delta$ es no acotado en δ. Queremos ver que $\delta = T_\delta$, basta observar que

$$T_\delta = \bigcup_{\beta \in \delta} T_\beta = \bigcup_{\beta \in \delta} \beta = \delta.$$

Definamos $f(\xi) = ht_T(\xi)$ y $g(\xi) = sup\{\eta : \eta \in Lev_\xi(T)\}$. Por el teorema 1.17, tenemos que el conjunto $B = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \text{ es cerrado bajo} f \text{y} g\}$ es un club en ω_1. Veamos que $B \subseteq C$, así, como B es no acotado, C también será no acotado.

Sea $\alpha \in B$. El hecho de que B sea cerrado bajo f nos asegura que todos los elementos de α se encuentran a una altura menor que α en el árbol, es decir, que para todo $\beta \in \alpha$ tenemos que $\beta \in T_\alpha$ y así, $\alpha \subseteq T_\alpha$. Que B sea cerrado bajo g nos asegura que para cualquier elemento $\beta \in \alpha$ el supremo, bajo el orden usual, del nivel β de T debe ser menor que α; ahora como $T_\alpha = \bigcup\{Lev_\beta(T) : \beta < \alpha\}$, tenemos que $T_\alpha \subseteq \alpha$ lo cual asegura la igualdad.

Para la segunda parte del enunciado notemos que A es una anticadena maximal en T si y sólo si para toda $x \in T \backslash A$, se tiene que x es comparable con al menos un elemento de A. Análogamente a la observación anterior, podemos ver que el conjunto $B = \{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha \;\&\; A \cap T_\alpha$ es una anticadena maximal en $T_\alpha\}$ es cerrado. Para ver que B es no acotado procedamos análogamente al anterior, pero agregando la función h donde $h(\xi)$ es un elemento de A que es comparable con ξ. Así, si α es cerrado bajo f, g *y* h, entonces $T_\alpha = \alpha$ y $T_\alpha \cap A$ es anticadena maximal en T_α por la caracterización anterior y así, B es no acotado. $\blacksquare$

Ahora veamos cómo se usa $\diamondsuit$ en la construcción de un árbol de Suslin.

Lema 2.12 *Sea* $T = \langle \omega_1, \lhd \rangle$ *un* ω_1*-árbol siempre derivable y* $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ *una* $\diamondsuit$*-sucesión. Supongamos que para todo* α *límite menor que* ω_1 *se tiene la siguiente propiedad:*

$$(T_\alpha = \alpha \;\&\; A_\alpha \text{ es una anticadena maximal en } \alpha) \rightarrow \forall x \in Lev_\alpha(T) \exists y \in A_\alpha (y \lhd x). \tag{2.1}$$

Entonces T *es un* ω_1 *- subárbol de Suslin.*

Prueba. Por el lema 2.9, es suficiente que verifiquemos que toda anticadena maximal A de T sea numerable. Sea A una anticadena maximal en T.

Por el lema 2.11, tenemos que el conjunto $C = \{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha \;\&\; \alpha$ es límite & $A \cap T_\alpha$ es maximal en $T_\alpha\}$ es un club en ω_1 ya que el conjunto de límites en ω_1 es un club e intersección de clubs es un club. Por la definición de $\diamondsuit$, tenemos que el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : \alpha \cap A = A_\alpha\}$ es estacionario. Sea $\alpha \in C$ tal que $\alpha \cap A = A_\alpha$, note que A_α es anticadena maximal en α, ya que $T_\alpha = \alpha$ y A es anticadena maximal. Si $z \in T$ y $ht(z, T) \geq \alpha$, entonces existe $w \in Lev_\alpha(T)$ tal que $w \lhd z$ y como estamos suponiendo la propiedad 2.1, tenemos que existe $v \in A_\alpha = A \cap \alpha$ tal que $v \lhd z$, por lo que $z \notin A$ ya que si lo hiciera, tendríamos que habría dos elementos comparables en A lo cual es contradicción ya que A es anticadena. Por lo tanto, $A = A_\alpha$, por lo que A es numerable. ■

Ahora pasaremos a la demostración principal definiendo el orden por recursión transfinita de tal forma que cumpla con la hipótesis del lema anterior para que nos induzca un árbol de Suslin.

Teorema 2.13 $\diamondsuit$ *implica que existe un* ω_1*-árbol de Suslin.*

Prueba. Construiremos $T = \langle \omega_1, \lhd \rangle$ de tal forma que se cumplan las hipótesis del lema anterior. Sea $I_\beta = \{(\omega \cdot \beta) + n : n \in \omega\}$[2] y $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Queremos que nuestro orden $\lhd$ cumpla las siguientes condiciones:

1. $\lhd$ es un orden en ω_1 tal que para cada $\beta \in \omega_1$, se tiene que $Lev_\beta(T) = I_\beta$.

2. Para cada $\beta < \omega_1$ y $n < \omega$, se tiene que $(\omega \cdot \beta + n) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + 2n)$, y $(\omega \cdot \beta + n) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + 2n + 1)$.

[2] Las operaciones $\cdot$ y $+$ se refieren al producto y a la suma entre ordinales respectivamente.

3. Si $\beta < \alpha < \omega_1$ y $x \in I_\beta$, entonces existe $y \in I_\alpha$ tal que $x \lhd y$.

4. Para cada ordinal límite, ($T_\alpha = \alpha$ & A_α es una anticadena maximal en $\alpha) \to \forall x \in Lev_\alpha(T) \exists y \in A_\alpha(y \lhd x)$.

Las condiciones 1 y 2 nos asegurarán que T sea siempre derivable, la 3 nos facilitará la construcción de T y la 4 nos dará la propiedad suficiente para que T sea de Suslin. Notemos que por la definición tendríamos que $T_\alpha = \omega \cdot \alpha$.

Construyamos $\langle T, \lhd \rangle$ definiendo el orden de cada uno de sus subárboles por recursión transfinita y así,

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha.$$

Definimos $Lev_0(T) = \omega$.

Sea $\alpha = \beta + 1$. Supongamos que tenemos definido el orden de tal forma que cumpla las condiciones anteriores, explicaremos como extender el orden a $\omega \cdot \alpha \cup I_\alpha = T_{\alpha+1}$.

Definimos $\lhd_{\alpha+1} = \lhd_\alpha \cup \lhd_*$, donde $\lhd_* = \{(\rho, (\omega \cdot \alpha) + n) : \rho = \omega \cdot (\beta + [n/2])\ o\ (\rho, \omega \cdot (\beta + [n/2]) \in \lhd_\alpha, n \in \omega\}\ \alpha = \beta + 1$[3]. En otras palabras, sólo estamos extendiendo el orden transitivamente al nivel α de la siguiente forma: si $x \in \omega \cdot \alpha$ entonces $x \lhd (\omega \cdot \alpha + 2n)$ si y sólo si $x = (\omega \cdot \beta + n)$ o $x \lhd (\omega \cdot \beta + n)$; análogamente para $x \lhd (\omega \cdot \alpha + 2n + 1)$. Esto preserva la primera y la tercera condición, coincide con la segunda y la cuarta se preserva porque habla de ordinales límite.

Ahora supongamos que α es límite. Para cada $x \in T_\alpha = \omega \cdot \alpha$, sea $B(x)$ una cadena en T_α, tal que $x \in B(x)$ y $B(x)$ intersecta a $I_\eta = Lev_\eta(T_\alpha)$ para cada $\eta < \alpha$. Para encontrar dicho $B(x)$, primero escojamos ξ_m para $m \in \omega$ tal que $h(x, T_\alpha) < \xi_1 < \xi_2 ...$ y $sup\{\xi_m : m \in \omega\} = \alpha$, lo cual es posible porque α es límite; note que esta sucesión depende de x. Ahora escogemos por recursión sobre ω a $y_m \in Lev_{T_\alpha}(\xi_m)$ tal que $x \lhd y_1 \lhd y_2 ...$, lo cual es posible por la tercera condición, así, fijamos $B(x) = \{z \in T_\alpha : \exists n(z \lhd y_n(x))\}$.

En caso de que las hipótesis de la condición 4 no se satisfagan, enumeramos $\omega \cdot \alpha$ como $\{x_n : n \in \omega\}$ y definimos para cada $z \in \omega \cdot \alpha$, $z \lhd (\omega \cdot \alpha + n)$ si y sólo

[3] Aquí $[n]$ se refiere a la función parte entera.

si $z \in B(x_n)$. El hecho de que $B(x_n)$ intersecte a cada uno de los niveles de T_α implica que $\omega \cdot \alpha + n$ tenga efectivamente altura α en T y por construcción las primeras tres condiciones se preservan.

Por otro lado cuando $\omega \cdot \alpha = \alpha$ y A_α es una anticadena maximal en T_α tenemos que modificar un poco la construcción de $B(x)$ para $x \in T_\alpha$. Así, escogemos a $y_0(x) \in \alpha$ tal que $x \lhd y_0(x)$ y existe z en A_α tal que $z \lhd y_0(x)$, lo cual es posible ya que x es comparable con algún elemento de A_α. Entonces hacemos $\xi_0(x) = ht(y_0(x), T_\alpha)$ y escogemos los ξ_n y y_n como antes, entonces $B(x)$ intersecta a A_α lo que nos asegura que la última condición se mantiene.

Ahora usando el lema 2.12 se obtiene el resultado deseado. $\blacksquare$

Capítulo 3

Equivalencias de $\diamondsuit$

Debido a la importancia del principio $\diamondsuit$ en el universo construible, se han buscado debilitamientos, equivalencias o fortalecimientos. En este capítulo veremos ejemplos de estas variaciones de $\diamondsuit$.

3.1. $\diamondsuit^+$ implica $\diamondsuit^-$

En las siguientes secciones demostraremos resultados que se ocuparán en la demostración de que $V = L$ implica $\diamondsuit$ y otros relacionados con aplicaciones de debilitamientos de $\diamondsuit$.

Definición 3.1 $\diamondsuit^+$ *es el enunciado: Existe una sucesión de conjuntos* $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ *tal que para cada* $\alpha < \omega_1$ $A_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$, $|A_\alpha| \leq \omega$ *y para todo* $A \subseteq \omega_1$ *hay un club* $C \subset \omega_1$ *tal que:*

1. $\forall \alpha \in C (A \cap \alpha \in A_\alpha)$.

2. $\forall \alpha \in C (C \cap \alpha \in A_\alpha)$.

Definición 3.2 $\diamondsuit^-$ *es el enunciado: Existe una sucesión de conjuntos* $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ *tal que para cada* $\alpha \in \omega_1$ $A_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$, $|A_\alpha| \leq \omega$ *y para todo* $A \subset \omega_1$ *el conjunto* $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha \in A_\alpha\}$ *es un conjunto estacionario.*

De ahora en adelante si una sucesión cumple la primera definición se le llamará $\diamondsuit^+$-*sucesión* y si cumple la segunda le llamaremos $\diamondsuit^-$-*sucesión*. Los símbolos $(-,+)$ fueron asignados por la relación entre los dos principios, es decir, la primera propiedad implica la segunda pero no viceversa.

Teorema 3.3 $\diamondsuit^+ \Rightarrow \diamondsuit^-$.

Prueba. Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit^+$-sucesión.

Observemos que esa misma sucesión es una $\diamondsuit^-$-sucesión, ya que por la definición de $\diamondsuit^+$ tenemos que si $A \subseteq \omega_1$, entonces hay un club C de ω_1 tal que para toda $\alpha \in C$ se da que $A \cap \alpha \in A_\alpha$. Si nombramos $D = \{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha \in \ A_\alpha\}$, tenemos que $C \subset D$, pero C es un club y todo club es estacionario, ya que intersección de clubs es un club, por lo que D contiene a un estacionario.

Por lo tanto, D es estacionario y $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit^-$-sucesión. ■

3.2. $\diamondsuit$ es equivalente a $\diamondsuit^-$

En esta sección demostraremos cómo se relaciona $\diamondsuit$ con $\diamondsuit^-$.

Teorema 3.4 $\diamondsuit \Leftrightarrow \diamondsuit^-$.

Prueba.

- Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión.

  Definimos B_α como sigue:

$$B_\alpha = \{A_\beta : \beta \leq \alpha\}$$

  Tenemos que $B_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$, ya que $A_\beta \subseteq \beta \subseteq \alpha$, por lo que para $\beta \leq \alpha$ se da que $A_\beta \in \mathcal{P}(\alpha)$.

  Veamos que $\langle B_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit^-$-sucesión. Como B_α esta indizado con $\alpha+1$, se tiene que $|B_\alpha| \leq |\alpha+1| \leq \omega$, ya que ω_1 es inicial. Sea $A \subseteq \omega_1$. Siempre que $A \cap \alpha = A_\alpha$ se tiene que $A \cap \alpha \in B_\alpha$; por lo que si llamamos $D = \{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ y $C = \{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha \in B_\alpha\}$ tendríamos que $D \subseteq C$ y como D es estacionario, por la definición de $\diamondsuit$, entonces C es estacionario . Por lo tanto, $\langle B_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit^-$-sucesión.

- Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit^-$-sucesión.

  Sea f una función biyectiva $f : \omega_1 \to \omega \times \omega_1$.Observe que si $A \subseteq \omega_1$ y $B \subseteq \omega \times \omega_1$, entonces se tiene que $f[f^{-1}[B]] = B$ y $f^{-1}[f[A]] = A$.

  Sea

  $$C = \{\alpha < \omega_1 : \omega \leq \alpha \ \& \ f^{-1}[\omega \times \alpha] \subseteq \alpha \ \& \ f[\alpha] \subseteq \omega \times \alpha\}.$$

  Veamos que C es un club.

  Como $C = C_1 \bigcap C_2$, donde $C_1 = \{\alpha \in \omega_1 : \omega \leq \alpha\}$ y $C_2 = \{\alpha \in \omega_1 : f^{-1}[\omega \times \alpha] \subseteq \alpha \ \& \ f[\alpha] \subseteq \omega \times \alpha\}$, sólo basta demostrar que cada uno de ellos es un club por el lema 1.9. Demostramos en el ejemplo 1.7 que C_1 es un club, así que sólo queda ver que C_2 es club.

  Probaremos que C_2 es club. Como f es inyectiva, f^{-1} es función. Por otro lado, f^{-1} no tiene un ordinal por dominio, por lo que para aplicar el 1.17, definiremos $g_{n,\alpha} : \alpha \to \kappa$ mediante $g_{n,\alpha}(\beta) = f^{-1}(n, \beta)$; note que si α es cerrado bajo $g_{n,\alpha}$ para cada $n \in \omega$, entonces $f^{-1}[\omega \times \alpha] \subseteq \alpha$.

  Por el teorema 1.17, tenemos que el conjunto $C_3 = \{\alpha \in \omega_1 : \ f[\alpha] \subseteq \omega \times \alpha \ \& \ \alpha$ es cerrado bajo $g_{n,\alpha}$ para cada n en $\omega\}$ es un club, ya que son una cantidad numerable de funciones y por la observación anterior $C_3 \subseteq C_2$, por lo que C_2 es un club.

  Sea $\alpha \in C$. Entonces por la definición de C, tenemos que si $A \subseteq \alpha$ y $B \subseteq \omega \times \alpha$, $f[A] \subseteq \omega \times \alpha$ y $f^{-1}[B] \subseteq \alpha$. Para cada $\alpha \in C$, sea

  $$B_\alpha = \{f[A] : A \in A_\alpha\}$$

  y si $\alpha \notin C$, entonces $B_\alpha = \emptyset$. Veamos que para toda $B \subseteq \omega \times \omega_1$ se tiene que $\{\alpha < \omega_1 : B \cap (\omega \times \alpha) \in B_\alpha\}$ es estacionario.

  Sea $S = \{\alpha \in \omega_1 : f^{-1}[B] \cap (\omega \times \alpha) \in A_\alpha\}$. Por la definición de $\diamondsuit^-$ tenemos que S es estacionario y como C es un club, $C \cap S$ es estacionario.

Si $\alpha \in C \cap S$, entonces $B \cap (\omega \times \alpha) = f[f^{-1}[B] \cap \alpha] \in \mathcal{B}_\alpha$ por construcción de C.

Como $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \omega$, podemos enumerar $\mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{B}_\alpha = \{{B_\alpha}^k : k \in \omega\}$ y por la definición de $\mathcal{B}_\alpha$ tenemos que para cada $k \in \omega$, se cumple que ${B_\alpha}^k \subseteq \omega \times \alpha$. Sea ${B_{\alpha,n}}^k = \{\beta : \langle n, \beta\rangle \in {B_\alpha}^k\}$

Probemos que para alguna $n \in \omega$ se debe cumplir que $\langle {B_{\alpha,n}}^n : \alpha \in \omega_1\rangle$ es una $\diamondsuit$-sucesión.

Supongamos que lo anterior no sucede. Entonces para cada $n \in \omega$, podemos encontrar $B_n \subseteq \omega_1$ tal que el conjunto $\{\alpha \in \omega : \alpha \cap B_n = {B_{\alpha,n}}^n\}$ es no estacionario. Sea

$$B = \bigcup_{n\in\omega} (\{n\} \times B_n).$$

Entonces para cada n el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : B \cap (\omega \times \alpha) = {B_\alpha}^n\}$ es no estacionario. Por lema 1.12, unión numerable de conjuntos no estacionarios es no estacionario, por lo que tenemos que $\{\alpha \in \omega_1 : \exists n(B \cap (\omega \times \alpha) = {B_\alpha}^n)\}$ es no estacionario; lo cual contradice que para toda $B \subseteq \omega \times \omega_1$ se tiene que $\{\alpha < \omega_1 : B \cap (\omega \times \alpha) \in \mathcal{B}_\alpha\}$ es estacionario, lo cual fue probado anteriormente.

■

3.3. $\diamondsuit$ es equivalente a $\diamondsuit^*$

Para introducir el primer debilitamiento de $\diamondsuit$, primero es necesario dar una equivalencia de $\diamondsuit$ ahora en términos de funciones.

Definición 3.5 $\diamondsuit^*$ *es el enunciado: Hay una sucesión de funciones* $\langle f_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ *tal que* $f_\alpha : \alpha \to 2$ *y para toda* $f : \omega_1 \to 2$ *el conjunto* $\{\alpha < \omega_1 : f \restriction_\alpha = f_\alpha\}$ *es estacionario.*

Veamos ahora que en efecto es una equivalencia de diamante.

Teorema 3.6 *Existe una* $\diamondsuit$*-sucesión si y sólo si existe una* $\diamondsuit^*$*-sucesión.*

Prueba.

- Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Para cada $\alpha \in \omega_1$, definimos f_α como la funcíon característica de A_α sobre α, es decir, ${f_\alpha}^{-1}[0] = A_\alpha$ y ${f_\alpha}^{-1}[1] = \alpha \backslash A_\alpha$. Así, $f_\alpha : \alpha \to 2$. Veamos ahora que cumple lo deseado.

  Sea $f : \omega_1 \to 2$. Por construcción $f \restriction_\alpha = f_\alpha$ si y sólo si $f^{-1}[0] \cap \alpha = {f_\alpha}^{-1}[0] = A_\alpha$, ahora como el dominio de f es ω_1 podemos concluir que $f^{-1}[0] \subseteq \omega_1$ y por la definición de $\diamondsuit$ obtenemos que el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f^{-1}[0] \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario. De este modo,$\{\alpha \in \omega_1 : f \restriction \alpha = f_\alpha\}$ es estacionario por ser igual a $\{\alpha \in \omega_1 : f^{-1}[0] \cap \alpha = A_\alpha\}$.

- Sea $\langle f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit^*$-sucesión. Definimos $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega \rangle$ donde para cada $\alpha \in \omega$ tengamos que $A_\alpha = {f_\alpha}^{-1}[0]$ lo cual nos da, por la definición de $\diamondsuit^*$, que $A_\alpha \subseteq \alpha$, ya que $f_\alpha : \alpha \to 2$.

  Verifiquemos que esta sucesión recién definida es una $\diamondsuit$-sucesión, dado $A \subseteq \omega_1$, denotemos por $f : \omega_1 \to 2$ a su función característica. Obtenemos de forma análoga que $f \restriction_\alpha = f_\alpha$ si y sólo si $f^{-1}[0] \cap \alpha = {f_\alpha}^{-1}[0]$ si y sólo si $A \cap \alpha = A_\alpha$ y si recurrimos a la definición de $\diamondsuit^*$, tenemos que el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : f \restriction_\alpha = f_\alpha\}$ es estacionario, por la hipótesis, por lo que el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario ya que son el mismo conjunto y así obtenemos una $\diamondsuit$-sucesión.

$\blacksquare$

3.4. Equivalencias entre variaciones de $\diamondsuit$

En esta sección daremos varias equivalencias de $\diamondsuit$, $\diamondsuit_1$ es la primera equivalencia que se demostró en este trabajo acerca de $\diamondsuit$, es decir, $\diamondsuit^- = \diamondsuit_1$; para el caso de $\diamondsuit_2$ y $\diamondsuit_3$ (ver definiciones abajo) son claras consecuencias de $\diamondsuit$ y $\diamondsuit_1$ respectivamente y aunque aparenten ser debilitamientos veremos que son equivalencias y para eso fue necesario enunciar otra versión más que llamamos $\diamondsuit_4$.

Definición 3.7 *$\diamondsuit_1$ es el mismo principio que $\diamondsuit^-$*

Definición 3.8 *$\diamondsuit_2$ es el enunciado: Hay $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que para cada $\alpha \in \omega_1$ se tiene que $S_\alpha \subset \alpha$ y para todo $X \subseteq \omega_1$ hay $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha = S_\alpha$.*

Definición 3.9 *$\diamondsuit_3$ es el enunciado: Hay $\langle S_\alpha : \alpha < \omega \rangle$ tal que para cada $\alpha \in \omega_1$ se tiene que $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \omega$ y para todo $X \subseteq \omega_1$ hay un $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$.*

Definición 3.10 *$\diamondsuit_4$ es el enunciado: Hay $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que para cada $\alpha \in \omega_1$ se tiene que $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \omega$ y para todo $X \subseteq \omega_1$ hay un ordinal límite $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$.*

Dadas las definiciones empecemos la demostración, iremos demostrando implicaciones y daremos la vuelta desde 1 hasta 4.

Teorema 3.11 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- $\diamondsuit_1$.
- $\diamondsuit_2$.
- $\diamondsuit_3$.
- $\diamondsuit_4$.

Prueba.

- $\diamondsuit_1 \Rightarrow \diamondsuit_2$

  Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit_1$-sucesión. Afirmamos que la sucesión es una $\diamondsuit_2$-sucesión.

  Sea $X \subseteq \omega_1$. Ya hemos demostrado que el conjunto $A = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \geq \omega\}$ es un club en ω_1 así, por la definición de $\diamondsuit_1$, tenemos que $A \cap \{\alpha \in \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es no vacía, por lo que existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $X \cap \alpha = A_\alpha$ y $\alpha \geq \omega$ y así, se cumple lo que queríamos.

- $\diamondsuit_2 \Rightarrow \diamondsuit_3$

  Sea $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit_2$-sucesión y sea $\langle B_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$, donde para cada β tenemos que $B_\beta = \{A_\alpha : \alpha \leq \beta\}$. Veamos que es una $\diamondsuit_3$-sucesión.

  Como cada A_α es subconjunto de α, $B_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ y como B_α esta indexado con α, tenemos que $|B_\alpha| \leq |\alpha| \leq \omega$. Sea $X \subseteq \omega_1$. Por la hipótesis, hay un $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha = A_\alpha$, por lo que $X \cap \alpha = A_\alpha \in B_\alpha$.

- $\diamondsuit_3 \Rightarrow \diamondsuit_4$

  Sea $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit_3$-sucesión y para cada $\alpha \in \omega_1$, definimos

  $$T_\alpha = \{X \cap \alpha : X \in \bigcup_{n \in \omega} S_{\alpha+n}\}$$

  demostremos que $\langle T_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit_4$-sucesión.

  Como $X \cap \alpha \subseteq \alpha$, tenemos que $T_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ y por ser unión numerable de conjuntos numerables obtenemos que $|T_\alpha| \leq \omega$. Sea $X \subseteq \omega_1$. Por la hipótesis hay $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$. Entonces $\alpha = \eta + n$ para algún η límite y $n \in \omega$. Luego como $X \cap \alpha \in S_{\eta+n}$ y $X \cap \eta = (X \cap \alpha) \cap \eta$ el cual está en T_η por la definición. Por lo tanto, tenemos lo que buscabamos.

- $\diamondsuit_4 \Rightarrow \diamondsuit_1$

  Sea $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit_4$-sucesión. Definimos $j : \omega_1 \to \omega_1$ por $j(\gamma) = 2\gamma$. Notemos que para α límite se da que $j\restriction_\alpha : \alpha \to \alpha$ y que $ran(j\restriction_{\omega_1 \setminus \alpha}) \cap \alpha = \emptyset$. Definimos para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $T_\alpha = \{j^{-1}[X] : X \in S_\alpha\}$. Verifiquemos que $\langle T_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit_1$-sucesión.

  Por la definición de $\diamondsuit_4$ se da $|T_\alpha| \leq \omega$ y por construcción $T_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$. Sea $X \subseteq \omega_1$. Debemos probar que el conjunto $A = \{\alpha \in \omega_1 : X \cap \alpha \in T_\alpha\}$ es estacionario así que bastaría demostrar que para cada club C hay un elemento $\alpha \in C$ tal que $X \cap \alpha \in T_\alpha$. Sin perder generalidad podemos suponer que si α pertenece a C entonces es límite o vacío y que si $\alpha, \beta \in C$ y $\alpha < \beta$, entonces $\alpha + \omega \cdot \omega \leq \beta$. Por lo anterior podemos tomar $\langle c_\eta : \eta \in \omega_1 \rangle$ una enumeración estrictamente creciente de C. Para que el α deseada sea distinta del vacío supondremos también que $c_0 = \emptyset$.

Definiremos un conjunto $Z_0 \subseteq \omega_1$ por recursión. $Z_0 \cap c_0 = \emptyset$ por nuestra suposición respecto de c_0. Supongamos que $Z_0 \cap c_\eta$ está definido. Sea $\langle {\tau_n}^\eta : n \in \omega \rangle$ una enumeración del conjunto $\{\tau \in \omega_1 : lim(\tau) \ \& \ c_\eta < \tau < c_{\eta+1}\}$[1] y sea $\langle {X_m}^\eta : m \in \omega \rangle$ una enumeración de $\bigcup_{n \in \omega} S_{{\tau_n}^\eta}$. Para cada $m \in \omega$ agregamos $c_\eta + 2m + 1$ a Z_0 si y sólo si ese ordinal no está en ${X_m}^\eta$. Así, queda definido el conjunto $Z_0 \cap c_{\eta+1}$. Ahora sea $Z_1 = j[X]$ y definamos $Z = Z_0 \cup Z_1$. Entonces $Z \subseteq \omega_1$, Z_0 son los elementos impares de Z y Z_1 son los elementos pares de Z. Por la hipótesis, hay un ordinal límite $\alpha \geq \omega$ tal que $Z \cap \alpha \in S_\alpha$.

Afirmamos que $\alpha \in C$. Supongamos que no. Entonces hay η tal que $c_\eta < \alpha < c_{\eta+1}$ así, para alguna $m \in \omega$, se da que $\alpha = {\tau_m}^\eta$ y como $Z \cap \alpha \in S_\alpha$, se tiene que $Z \cap \alpha = {X_k}^\eta$ para algún $k \in \omega$. Entonces por construcción, tenemos que $c_\eta + 2m + 1 \in Z \leftrightarrow c_\eta + 2m + 1 \in Z_0 \leftrightarrow c_\eta + 2m + 1 \notin {X_k}^\eta = Z \cap \alpha$ lo cual es absurdo, ya que eso implica que $\alpha < c_\eta + 2m + 1$, pero α es límite y no puede ser rebasado con una cantidad finita de ordinales.

Por lo tanto, $\alpha \in C$, pero $X \cap \alpha = j^{-1}[Z_1] \cap \alpha = j^{-1}[Z] \cap \alpha = j^{-1}[Z \cap \alpha] \in T_\alpha$, ya que $Z \cap \alpha \in S_\alpha$, lo que da por terminada la demostración.

■

3.5. $\diamondsuit$ implica ϕ

En esta sección discutiremos uno de los debiliteamientos de la versión de funciones del principio de diamante.

Una de las aplicaciones principales de $\diamondsuit$ es el enunciado W, el cual dice que todo grupo de Whitehead que sea abeliano de orden $\aleph_1$ es libre[2]. Contrario a este resultado se encuentra que si asumimos el Axioma de Martin[3] junto con $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, entonces existe un grupo de Whitehead de orden $\aleph_1$ que no es libre. Se esperaba que ese resultado no fuera consecuencia unicamente de CH y tratando

[1] $lim(\tau)$ es una abreviatura de la frase: τ es un ordinal límite.
[2] Para ver las definiciones correspondientes se puede consultar [4].
[3] Para la definición consultar [16].

de establecer este hecho Shelah notó que W falla si $C(S)$ es verdadero para cualquier estacionario $S \subseteq \omega_1$ donde $C(S)$ es el siguiente principio:

Definición 3.12 *$C(S)$ es el enunciado: Si para cada ordinal límite $\delta \in S \subseteq \omega_1$ hay una ω-sucesión creciente η_δ que converja a δ y si $\kappa_\delta \in 2^\omega$, entonces para alguna $\kappa \in 2^{\omega_1}$ se da que para toda $\delta \in S$, $k(\eta_\delta(n)) = k_\delta(n)$, salvo en una cantidad finita de valores de n.*

Se probó entonces que $C(\omega_1)$ era consecuencia del Axioma de Martin y de $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ y a su vez se demostró que $\neg C(S)$ se sigue de $\diamondsuit(S)$, después Shelah conjeturó que $C(\omega_1)$ era consistente con $ZFC + HGC$ pero Devlin refutó esta conjetura probando que CH implica $\neg C(\omega_1)$. En esa demostración Devlin usó modelos internos pero después Shelah cambió la prueba para evitar hacer el uso de modelos internos y debilitó la condición de CH a solamente $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ y ahí fue donde Shelah extrajo el principio ϕ ya que su papel en la demostración es que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ es consecuencia de ϕ.[4]

Veamos la definición.

Definición 3.13 *ϕ es el enunciado: Para cada $F : 2^{\omega_1 \smile} \to 2$ hay una función $g \in 2^{\omega_1}$ tal que para toda $f \in 2^{\omega_1}$ el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : F(f \restriction_\alpha) = g(\alpha)\}$ es estacionario.*

De el enunciado de $\diamondsuit$ no se ve claramente su relación con el debilitamiento pero si observamos la equivalencia $\diamondsuit^*$ podemos notar la relación.

Teorema 3.14 *Si existe una $\diamondsuit^*$-sucesión entonces el principio ϕ se cumple.*

Prueba. Sea $\langle f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit^*$-sucesión y sea $F : 2^{\omega_1 \smile} \to 2$. Definimos $g : \omega_1 \to 2$ mediante $g(\alpha) = F(f_\alpha)$.

Ahora probemos que g cumple lo deseado. Sea $h \in 2^{\omega_1}$. Por la definición de $\diamondsuit^*$ tenemos que el conjunto $A = \{\alpha \in \omega : h \restriction_\alpha = f_\alpha\}$ es conjunto estacionario, observemos que si $\alpha \in A$, entonces $h \restriction_\alpha = f_\alpha$, por lo que $F(h \restriction_\alpha) = F(f_\alpha) = g(\alpha)$ lo cual implica que $A \subseteq B = \{\alpha \in \omega_1 : F(h \restriction_\alpha) = g(\alpha)\}$ y así, B es conjunto estacionario lo cual concluye la demostración. ■

[4] Para las demostraciones consultar [6].

3.6. $V = L$ implica $\diamondsuit^+$

Ahora pasaremos a demostrar el resultado para el cual fue creado $\diamondsuit$, que si $V = L$ entonces la Hipótesis de Suslin es falsa, es decir, que si $V = L$ entonces hay un árbol de Suslin; para ello primero probaremos que $V = L$ implica $\diamondsuit^+$ y a su vez a $\diamondsuit$ por los teoremas 3.3 , 3.4 y 2.13.

Antes necesitaremos un lema.

Lema 3.15 *El conjunto $R = \{\rho < \omega_1 : L(\rho) \prec L(\omega_1)\}$ es no acotado en ω_1.*

Prueba. Sea $H = \{H_{n,m} : n, m \in \omega\}$ el conjunto de todas las funciones de Skolem para ω_1. Entonces $L(\rho) \prec L(\omega_1)$ siempre que $L(\rho)$ sea cerrado bajo H. Sea $\alpha < \omega_1$, por el 1.15, aplicado a $L(\alpha + 1)$ y H obtenemos que $[L(\alpha + 1)]_H$ tiene cardinalidad menor que $\omega_1 = |L(\omega_1)|$. Como $[L(\alpha + 1]_H \prec L(\omega_1)$, es un submodelo transitivo de ZFC y aplicando el 1.41, inferimos que $[L(\alpha + 1)]_H = L(\rho)$ para algún ordinal ρ y como $L(\alpha) \subset L(\rho)$ concluimos que $\alpha < \rho$. Por lo tanto, R es no acotado en ω_1. ■

Observemos que por la construcción recursiva de L y la regularidad de ω_1 se da que $L(\rho) \prec L(\omega_1)$ implica que $L(\rho)$ es un modelo de $ZF - P + V = L$.

Ahora pasaremos al teorema principal.

Teorema 3.16 *V=L implica* $\diamondsuit^+$

Prueba. Asumamos $V = L$. Para $\alpha < \omega_1$ sea $q(\alpha)$ el menor $\rho > \alpha$ tal que $L(\rho) \prec L(\omega_1)$. Sea $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{P}(\alpha) \cap L(q(\alpha))$, por el lema 3.15, sabemos que $q(\alpha) < \omega_1$, por lo que $\mathcal{A}_\alpha$ es numerable. Ahora probaremos que $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit^+$-sucesión.

Para cada $n, m \in \omega$ sea $K_{n,m}$ la función de Skolem construida como en los preliminares, definimos $\Phi = \{H_{n,m} : n, m \in \omega\}$.

Fijemos $X \subseteq L(\omega_2)$ y sea $Y = [X]_\Phi$. Entonces $Y \prec L(\omega_2)$, debido a la regularidad de ω_2 y con un argumento análogo la observación anterior, así, tenemos que en particular todos los axiomas $ZF - P + V = L$ son verdaderos relativizados a Y. Como uno de esos axiomas es el de Extensionalidad tenemos que la pertenencia es extensional en Y y así la función del Colapso de Mostowski en Y es un isomorfismo.

Si $\psi(x)$ es la fórmula que dice ` x es el primer ordinal no numerable ´, entonces tenemos que la fórmula $\exists x\phi(x)$ relativizada a $L(\omega_2)$ se cumple y, por lo tanto, se cumple relativizada a Y por ser una subestructura elemental. Sea $y \in Y$ tal que y satisface $\phi(y)^Y$. Como $Y \prec L(\omega_2)$, tenemos que y satisface $\phi(y)^{L(\omega_2)}$ y así, $y = \omega_1$, por lo que ω_1 pertenece a Y. Observemos que como Y satisface $ZF - P + V = L$ relativizados a Y tenemos que $\emptyset$ y ω pertenecen a Y. Aún más, tenemos que si $\xi \in Y$ y $\xi < \omega_1$, entonces se satisface "ξ es contable" relativizado a Y lo que implica que existe una función $f \in Y$ tal que se satisface$f[\omega] = \xi$ relativizado a Y, por lo que igualmente tenemos que se satisface $f[\omega] = \xi$ relativizado a $L(\omega_2)$ y así $f[\omega] = \xi$. Observemos que como $\omega \subset Y$, obtenemos que todas las imagenes bajo f deben estar en Y y así $\xi \subset Y$. Por lo tanto, tenemos que $\omega_1 \subset Y$ o $Y \cap \omega_1 \in \omega_1$.

Ahora supongamos que X es numerable. Entonces $Y = [X]_\Phi$ es numerable también ya que sólo hay una cantidad numerable de funciones de Skolem. Definimos $\alpha = Y \cap \omega_1$. Note que α es el primer ordinal numerable que no está en Y. Sea G el isomorfismo de Mostowski de Y en algún conjunto transitivo $M \subset L$. Como G es un isomorfismo, los axiomas $ZF - P + V = L$ son verdaderos en M, por lo que $M = L(\delta)$ para algún ordinal δ, por el teorema 1.40, a su vez M es numerable, por lo que $\delta < \omega_1$. Como $G \restriction \alpha$ es un isomorfismo entre ordinales y $Y \cap (\omega_1 + 1) = \alpha \cup \{\omega_1\}(Y \cap \omega_1 = \alpha$ y $\omega_1 \in Y)$, $G(\xi) = \xi$ para toda $\xi < \alpha$ y $G(\omega_1) = \alpha$. Tenemos que $\alpha < \delta < \omega_1$ ya que de lo contrario $\alpha \in \alpha$, lo cual es una contradicción. Por la definición de una subestructura elemental sabemos que como $\phi(\omega_1)^Y$ es verdad tenemos que $\phi(\alpha)^M$ lo es, por lo que se cumple (α es no numerable)^M , por otro lado tenemos que (α es numerable)$^{L(\omega_1)}$, por lo que (α es numerable)$^{L(q(\alpha))}$ lo que implica que $\alpha < \delta < q(\alpha) < \omega_1$, ya que una función biyectiva de ω en α se construye en el piso $q(\alpha)$ mas no en el piso α. Ahora supongamos que $A \in Y$ y $A \subset \omega_1$. Por la definición de G sabemos que $G(A) = \{G(x) : x \in A \;\&\; x \in Y\}$ y así $G(A) = \{G(\xi) : \xi \in A \;\&\; \xi \in Y \cap \omega_1 = \alpha\} = \{G(\xi) : \xi \in A \cap \alpha\} = A \cap \alpha$. Por lo tanto, $A \cap \alpha = G(A) \in L(\delta)$, por lo que $A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, ya que $A \cap \alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$ y $L(\delta) \subseteq L(q(\alpha))$ por la minimilidad del modelo asegurado por el Colapso de Mostowski.

Ahora volvamos a la demostración de que $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit^+$-sucesión. Sea $A \subset \omega_1$. Queremos encontrar un conjunto club sobre ω_1 tal que cumpla las propiedades requeridas por $\diamondsuit^+$. Nosotros proponemos a $C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha = [\alpha \cup \{A\}]_\Phi \cap \omega_1\}$. Veamos que en efecto es un club.

Sea $\delta \in \omega_1$ tal que $\delta \cap C$ es no acotado en δ. Basta notar que

$$\delta = \bigcup_{\alpha \in \delta} \alpha = \bigcup_{\alpha \in C \cap \delta} \alpha = \bigcup_{\alpha \in C \cap \delta} [\alpha \cup \{A\}]_\Phi \cap \omega_1 = [\delta \cup \{A\}]_\Phi \cap \omega_1,$$

donde la primera igualdad es por definición de ordinal, la segunda por que $\delta \cap C$ es no acotado en δ, la tercera por definición de C y la última es por ser cerradura de un ordinal y un conjunto de ordinales bajo funciones. Por lo tanto, $\delta = [\delta \cup \{A\}]_\Phi \cap \omega_1$, lo cual asegura que C es cerrado.

C es no acotado en ω_1, ya que para toda $\beta < \omega_1$ tenemos que

$$[\beta \cup \{A\}]_\Phi \cap \omega_1 = \alpha,$$

donde $\beta \leq \alpha$ y $\alpha \in C$.

Por lo tanto C es un club.

Ahora fijemos $\alpha \in C$. Queremos demostrar que $A \cap \alpha \in A_\alpha$ y $C \cap \alpha \in A_\alpha$. Para eso aplicaremos la discusión anterior sobre cerraduras con $Y = [\alpha \cup \{A\}]_\Phi$. Como $A \in Y$ la discusión confirma que $A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, sin embargo $C \notin Y$. La demostración concluye comprobando que $C \cap \alpha$ pertenece a $L(q(\alpha))$ para obtener que $C \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, por la definición de $\mathcal{A}_\alpha$. Sin embargo este último paso es plenamente técnico por lo que será omitido en este trabajo, se puede consultar en [16] página 179. Por lo tanto, tenemos que $C \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ y así $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit^+$-sucesión. ■

Capítulo 4

Resultados sobre ♣

En este capítulo estudiaremos el principio combinatorio ♣, el cual es un principio diferente a $\diamondsuit$ y, como veremos, es más débil. También revisaremos algunas equivalencias aparentemente más fuertes y algunas de sus aplicaciones.

4.1. Historia del principio ♣

Este principio combinatorio fue enunciado por Ostaszewski y fue extraído de uno de sus trabajos en topología que consistía en dar un ejemplo de un espacio no compacto, hereditariamente separable, localmente compacto, perfectamente normal y numerablemente compacto [1] basándose en $\diamondsuit$. Ostaszewski notó que se podía debilitar $\diamondsuit$ para obtener el resultado deseado con el único problema de perder la propiedad de ser numerablemente compacto pero eso lo solucionó suponiendo además la Hipótesis del Continuo.

El proceso de extracción fue el siguiente: supongamos que $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit$ sucesión, ahora consideremos el siguiente conjunto:

$$\Lambda = \{\lambda \in \omega_1 : \lambda \text{ es un ordinal limite y } A_\lambda \text{ es cofinal en } \lambda\}.$$

[1] Para las definiciones topológicas consultar [14].

Ahora si tomamos $A = \omega_1$ en la definición de $\diamondsuit$ tenemos que Λ es no numerable; después tomamos $\langle \lambda_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ una enumeración de Λ que sea creciente. Si tomamos un subconjunto X no numerable de ω_1, tenemos que el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : \alpha$ es un ordinal límite y $X \cap \alpha$ es cofinal en $\alpha\}$ es no numerable y cerrado, por lo que es un club y por $\diamondsuit$ tenemos que su intersección con el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es no vacío, lo que implica que para algún ordinal límite λ, $X \cap \lambda$ es cofinal en λ y $X \cap \lambda = A_\lambda$; por lo tanto, λ pertecene a Λ y $A_\lambda \subseteq X$. Ahora esta última propiedad junto con el conjunto Λ fueron los que dieron lugar a enunciar el principio siguiente:

Definición 4.1 $\clubsuit^-$ *es el enunciado: Existe una sucesión creciente de ordinales límites numerables* $\langle \lambda_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ *y una sucesión* $\langle s(\lambda_\alpha) : \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ *tal que se cumple lo siguiente:*

- $s(\lambda_\alpha)$ *tiene orden* ω *y es cofinal con* λ_α*.*
- *Cada subconjunto* X *no numerable de* ω_1 *contiene a un* $s(\lambda_\alpha)$*.*

Así tenemos que $\clubsuit^-$ es consecuencia de $\diamondsuit$ por la manera en cómo se extrajo.

4.2. $\clubsuit$ implica $\clubsuit^-$

El principio $\clubsuit^-$ fue inicialmente denotado por $\clubsuit$ pero se pulió la definición y se fortaleció de manera que sólo pidiera la existencia de una sucesión. Por esta razón en este trabajo usaremos el símbolo $\clubsuit$ para el siguiente enunciado:

Definición 4.2 *Sea* λ *un cardinal regular* $\lambda > \omega$ *y* $S \subset \lambda$ *un conjunto estacionario de ordinales límites.* $\clubsuit(S)$ *es el enunciado: Existe una familia de conjuntos* $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ *tal que. para cada* $\alpha \in S$, $A_\alpha \subseteq \alpha$ *y sup(*A_α*)=*α *y para todo* $X \subseteq \lambda$ *no acotado hay* $\alpha \in S$ *tal que* $A_\alpha \subseteq X$*.*

Teorema 4.3 $\clubsuit \Rightarrow \clubsuit^-$.

Prueba. Sea $\lambda = \omega_1$ y $S \subseteq \omega_1$ un conjunto estacionario de ordinales límites. Así, por la hipótesis, tenemos una $\clubsuit$-sucesión, $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$.

Como S es un conjunto de ordinales y por ser estacionario es no acotado, es una cantidad no numerable, entonces podemos ordenarlos para tener una sucesión creciente de ordinales, llamémosla $\langle \beta_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$. Como $S \subseteq \omega_1$, cada elemento de la sucesión es numerable ya que S contiene sólo ordinales límite.

Para cada A_{β_α} definimos $B_{\beta_\alpha} \subset A_{\beta_\alpha}$ como una sucesión cofinal en A_{β_α} con tipo de orden ω, esto siempre se puede lograr ya que $|A_{\beta_\alpha}| = \omega$.

Afirmamos que $\langle s(\beta_\alpha) : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\clubsuit^-$-sucesión, donde $s(\beta_\alpha) = B_{\beta_\alpha}$. Por la hipótesis $sup(B_{\beta_\alpha}) = \beta_\alpha$, por lo que B_{β_α} es una sucesión cofinal en β_α con el orden usual y por la definición B_{β_α} tiene tipo de orden ω.

Veamos la segunda condición. Sea $X \subseteq \omega_1$ no numerable. Entonces X es no acotado en ω_1. Entonces usando la hipótesis, tenemos que hay $\rho \in S$ tal que $A_\rho \subset X$, es decir, que X contiene a un $s(\beta_\alpha)$, a saber $s(\rho)$. ■

4.3. $\clubsuit$ es equivalente a $\clubsuit^+$

El siguiente principio de combinatoria es una versión más débil de $\diamondsuit$ pero tiene una equivalencia que será de más utilidad.

Definición 4.4 *Sean λ un cardinal regular no numerable y $S \subseteq \lambda$ un conjunto estacionario de ordinales límites. $\clubsuit^+(S)$ es el enunciado: Para cada $\alpha \in S$ hay un conjunto $A_\alpha \subseteq \alpha$ tal que sup(A_α)=α y para todo $X \subseteq \lambda$ no acotado, el conjunto $Z = \{\alpha \in S | A_\alpha \subseteq X\}$ es conjunto estacionario.*

A continuación veremos que los principios $\clubsuit$ y $\clubsuit^+$ son, en efecto, equivalentes.

Teorema 4.5 *Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ una $\clubsuit^+$-sucesión. Entonces $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ es una $\clubsuit$ -sucesión.*

Prueba.

Observemos que la implicación $\clubsuit^+ \Rightarrow \clubsuit$ es trivial dado que hay una cantidad estacionaria de ordinales que cumplen la propiedad. ■

Teorema 4.6 *Sea* $\langle A_\alpha : \alpha \in \ S\rangle$ *una* ♣*-sucesión. Entonces* $\langle A_\alpha : \alpha \in \ S\rangle$ *es una* $♣^+$ *-sucesión.*

Prueba.

Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in S\rangle$ una ♣ -sucesión.

Sean X un conjunto no acotado en λ y C un club arbitrario sobre λ. Mostraremos que hay un punto $\alpha \in C \cap S$ tal que $A_\alpha \subseteq X$. Definamos por recursión una sucesión de ordinales creciente $\langle \beta_i : i \in \lambda\rangle$ en X como sigue: β_0 es el primer elemento de X. Si tenemos definidos los primeros $\beta_0, ..., \beta_i$ elementos de la sucesión, entonces nombramos $\gamma_i = min\{\theta \in C : \theta > \beta_i\}$ y así, definimos a β_{i+1} como el primer elemento en X que es más grande que γ_i, esto es posible ya que ambos son no acotados. Ahora si $X' = \{\beta_i : i \in \lambda\}$, entonces es no acotado por construcción, por lo que existe $\alpha \in S$ tal que $A_\alpha \subseteq X'$. Pero la condición $sup(A_\alpha) = \alpha$ implica que α es también un límite de elementos de C, ya que entre dos miembros consecutivos de la sucesión X' hay un elemento de C por la manera en que se construyó y como C es cerrado se tiene que $\alpha \in C$ y así $\alpha \in C \cap S$. ■

Corolario 4.7 ♣ $\Leftrightarrow$ $♣^+$

4.4. ♣ + Hipótesis del Continuo implican a $\diamondsuit$

Antes de demostrar que ♣(S) + Hipótesis del Continuo implican al principio $\diamondsuit_S$ necesitamos el siguiente lema relacionado con la Hipótesis del Continuo.

Lema 4.8 *Si la Hipótesis del Continuo es verdadera, entonces hay una sucesión* $\langle C_i : i \in \omega_1\rangle$ *de tal manera que cada subconjunto acotado de* ω_1 *aparece* ω_1 *veces y* $sup(C_i) \leq i$.

Prueba. Si X es un subconjunto acotado de ω_1, entonces $|X| < \omega_1$, por lo que $|X| \leq \omega$. La siguiente notación se usa para los subconjuntos numerables o finitos de A:

$$[A]^\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{W \subset A : |W| \leq \omega\}$$

Observemos que por la definición y la hipótesis del continuo, tenemos que $|[A]^{\omega}| \leq \omega_1$ si $A \subseteq \omega_1$.

Así, existe una función $g : \omega_1 \to [\omega_1]^{\omega} \times \omega_1$ suprayectiva, ya que por CH tenemos que $|[\omega_1]^{\leq\omega} \times \omega_1| \leq |\omega_1 \times \omega_1| = \omega_1$.

Supongamos que $g(\alpha) = (J, \beta)$. Definamos $h : \omega_1 \to [\omega_1]^{\omega}$ por casos como sigue:

$$h(\alpha) = \begin{cases} J \text{ si } sup(J) \leq \alpha \\ \emptyset \text{ en otro caso }. \end{cases}$$

Sea M un conjunto acotado arbitrario en ω_1. M es numerable, por lo que $M \in [\omega_1]^{\omega}$ y como g es función suprayectiva, tenemos que $|g^{-1}[\{M\} \times \omega_1]| = \omega_1$, por lo que es no acotado. Sea $\theta = sup(M)$. El conjunto $S = \{\alpha \in g^{-1}[\{M\} \times \omega_1] : \theta \leq \alpha\}$ es no numerable y por la definición obtenemos que para toda $\alpha \in S$ se da que $h(\alpha) = M$; por lo que definiendo $C_\alpha = h(\alpha)$ para cada $\alpha \in \omega_1$, tenemos que la sucesión $\langle C_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ cumple lo deseado. ■

Teorema 4.9 *Si la Hipótesis del Continuo es verdadera y existe una $\clubsuit_S$-sucesión, entonces existe una $\diamondsuit_S$-sucesión.*

Prueba. Por el lema 4.8, existe una sucesión $\langle B_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ tal que los conjuntos acotados de ω_1 aparecen ω_1 veces y $sup(B_\alpha) \leq \alpha$. Sea $\langle A_j : j \in S \rangle$ una $\clubsuit_S$-sucesión. Definimos $\langle D_j : j \in S \rangle$ como sigue:

$$x \in D_\alpha \textit{ si y solo si existe algun } i \in A_\alpha \textit{ tal que } x \in B_i.$$

Veamos que $\langle D_j : j \in S \rangle$ es una $\diamondsuit_S$-sucesión. Para esto procedamos por casos: Sea $X \subseteq S$.

- X es acotado.

  Sea $X' = \{i \in \omega_1 : B_i = X\}$. Por construcción de $\langle B_j : j \in \omega_1 \rangle$, se tiene que X' es de cardinalidad ω_1.

  X' es no acotado, ya que si lo fuera entonces tendría la misma cardinalidad que ω la cual es distinta a ω_1. Como $\langle A_j : j \in S \rangle$ es una $\clubsuit_S$-sucesión, por el corolario 4.7, se tiene que $\langle A_j : j \in S\rangle$ es una $\clubsuit_S^+$-sucesión y entonces $Z = \{\alpha \in S : A_\alpha \subset X'\}$ es un conjunto estacionario.

Sea $\alpha \in Z$. $A_\alpha \subset X'$. Probemos que $D_\alpha = X$:

Sea $x \in D_\alpha$. Por la definición de D_α, existe $i \in A_\alpha$ tal que $x \in B_i$ pero como $A_\alpha \subseteq X'$, $i \in X'$ lo que implica que $B_i = X$y así, $x \in X$. Por lo tanto, $D_\alpha \subseteq X$.

Sea $x \in X$. Así, existe $i \in A_\alpha \subseteq X'$, ya que A_α es no vacío porque $sup(A_\alpha) = \alpha$ y α es distinto del vacío por ser límite, por lo que $B_i = X$, lo que implica que $x \in B_i$ y por la definición de D_α tenemos que $x \in D_\alpha$. Por lo tanto, $X \subseteq D_\alpha$.

Observemos que $D_\alpha \subseteq \alpha$, ya que si $x \in D_\alpha$ existe $i \in A_\alpha$ tal que $x \in B_i$ y por la definición de las sucesiones tenemos lo siguiente $B_i \subseteq sup(B_i) \subseteq i \subset \alpha$ donde la primera contención se justifica porque $|B_i| = \omega$, entonces $x \in \alpha$ y así, $D_\alpha \subseteq \alpha$.

De la observación anterior tenemos $X \cap \alpha = D_\alpha \cap \alpha = D_\alpha$ y se sigue $\alpha \in D$, donde $D = \{\alpha \in S : X \cap \alpha = D_\alpha\}$ y así, $Z \subseteq D$. Sea C un club, entonces $Z \cap C \neq \emptyset$, por otro lado $Z \cap C \subseteq D \cap C$, por lo que $D \cap C \neq \emptyset$ y por la definición obtenemos que D es estacionario.

- X es no acotado.

  Definimos $j : \omega_1 \to \omega_1$ por recursión como sigue:

  $$j(\alpha) = \bigcap\{\gamma < \omega_1 : \gamma < j(\beta) \text{ para todo } \beta < \alpha \text{ y } B_\gamma = X \cap sup(\{j(\beta) : \beta < \alpha\})$$

  j es estrictamente creciente por construcción.

  Demostremos que $\alpha \leq j(\alpha)$ por inducción. El caso base se sigue de que $j(0) = 0$. Supongamos que α es límite, $\beta \leq j(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$ y que $j(\alpha) < \alpha$, así existe $\beta < \alpha$ que esta por arriba de $j(\alpha)$ y por hipótesis obtenemos que $j(\alpha) < \beta \leq j(\beta) \leq \alpha$ por lo que $j(\alpha) < j(\beta)$ contradiciendo que j sea estrictamente creciente, por lo tanto $\alpha \leq j(\alpha)$. Supongamos que

$\alpha = \rho + 1$ y que $\beta \leq j(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$. Si $j(\alpha) < \alpha$ entonces $j(\alpha) \leq \rho \leq j(\rho)$ contradiciendo que j sea estrictamente creciente.

Por el teorema 1.17, el conjunto C que consta de ordinales cerrados bajo j es un club en ω_1.

Sea $X' = j[\omega_1]$, X' es un conjunto no acotado porque j es creciente y por la definición de $\clubsuit^+$ tenemos que hay un estacionario $S' \subseteq S$ tal que para toda $\gamma \in S'$ se tiene que $A_\gamma \subseteq X'$, así, por el lema 1.10, $C \cap S'$ es estacionario.

Sea $\delta \in S' \cap C$.

Veamos que $D_\delta = X \cap \delta$.

Sea $x \in D_\delta$, entonces hay $i \in A_\delta$ tal que $x \in B_i$, como $A_\delta \subseteq X'$, tenemos que $i = j(\theta)$ para algún $\theta \in \omega_1$ y así, $B_i = X \cap sup(\{j(\beta) : \beta < \theta\}) \subseteq X \cap i$, ya que $sup(\{j(\beta) : \beta < \theta\}) \leq i$ porque j es creciente y como $sup(A_\delta) = \delta$ por la definición de $\clubsuit^+_S$-sucesión, tenemos que $i < \delta$ y por todo lo anterior se sigue que $x \in B_i \subseteq X \cap \delta$. Por lo tanto, $D_\delta \subseteq X \cap \delta$.

Como

$$X \cap \delta = \bigcup_{\gamma < \delta} (X \cap \gamma)$$

, para la otra contención basta demostrar que para cada $\gamma < \delta$ tenemos que $X \cap \gamma \subseteq D_\delta$.

Sea $\beta < \delta$, como $\delta \in C$, es cerrado bajo j por lo que $j(\beta) < \delta$. Observemos que A_δ es cofinal en δ, ya que $\bigcup A_\delta = sup(A_\delta) = \delta$ y $A_\delta \subseteq \delta$ por la definición de $\clubsuit^+_S$, por lo que la identidad es una función cofinal, así, existe $\gamma \in \omega_1$ tal que $j(\beta) < \gamma < \delta$ y $\gamma \in A_\delta$, por monotonía de j tenemos que $\beta < \gamma$, ya que de lo contrario tendríamos que $j(\gamma) < j(\beta)$ y eso contradice la elección de γ. Por la definición de j, se da que $B_\gamma = X \cap sup\{j(\theta) : \theta < \gamma\}$ y como $j(\beta) < \gamma$ tenemos que $X \cap j(\beta) \subseteq B_\gamma$; además, $\beta \leq j(\beta)$, por lo que $X \cap \beta \subseteq B_\gamma$. Como $\gamma \in A_\delta$, por la manera en cómo se definió D_δ tenemos que $B_\gamma \subseteq D_\delta$ y por transitividad obtenemos que $X \cap \beta \subseteq D_\delta$ y así, $X \cap \delta \subseteq D_\delta$. Por lo tanto, $D_\delta = X \cap \delta$.

Lo anterior muestra que $S' \cap C \subseteq D$, donde

$D = \{\alpha \in S : X \cap \alpha = D_\alpha\}$, y como $S' \cap C$ es estacionario, D es estacionario y así $\langle D_j : j \in S\rangle$ es una $\diamondsuit_S$-sucesión. ■

4.5. $\clubsuit_J{}^-$ es equivalente a $\clubsuit_J$.

En [15] Winfried Just trabaja sobre varios de los principios que ya hemos introducido pero en las versiones para ideales para obtener algunos de los resultados que ya han sido demostrados en este trabajo, para su introducir su demostración de $\clubsuit + CH \Rightarrow \diamondsuit$ menciona el siguiente principio que es una debilitación de $\clubsuit$: el principio de Juhász. A continuación veremos su relación con $\clubsuit$ y una equivalencia de este principio.

Definición 4.10 *Sea $S = Lim \cap \omega_1$.*[2] *Una $\clubsuit_J{}^-(S)$-sucesión es una sucesión $\langle s_\alpha{}^\kappa : \alpha \in S, \kappa \in \omega\rangle$ tal que:*

1. $\forall \alpha \in S, \forall \kappa \in \omega(s_\alpha{}^\kappa$ *es un conjunto cofinal de α de tipo de orden ω).*
2. $\forall \alpha \in S, \kappa < m < \omega \rightarrow s_\alpha{}^\kappa \cap s_\alpha{}^m = \emptyset$.
3. $\forall X \in [\omega_1]^{\omega_1}\ \exists \alpha \in S\ \forall \kappa \in \omega(|s_\alpha{}^\kappa \cap X| = \omega)$.
4. $\forall \alpha \in S(\bigcup_{\kappa\in\omega} s_\alpha{}^\kappa$ *es de orden ω).*

El principio de Juhász es el enunciado ` existe una $\clubsuit_J{}^-$-sucesión '. Al igual que en el caso de $\clubsuit^-$ esta fue la primera versión del principio y se fue refinando para mejorarlo, al final se dieron cuenta que la última condición podía ser omitida.

Definición 4.11 *Sea $S = Lim \cap \omega_1$. Una $\clubsuit_J(S)$-sucesión es una sucesión $\langle s_\alpha{}^\kappa : \alpha \in S, \kappa \in \omega\rangle$ tal que:*

1. $\forall \alpha \in S, \forall \kappa \in \omega(s_\alpha{}^\kappa$ *es un conjunto cofinal de α de tipo de orden ω).*
2. $\forall \alpha \in S, \kappa < m < \omega \rightarrow s_\alpha{}^\kappa \cap s_\alpha{}^m = \emptyset$.

[2] Lim es la clase de ordinales límites.

3. $\forall X \in [\omega_1]^{\omega_1}\ \exists \alpha \in S\ \forall \kappa \in \omega(|s_\alpha{}^\kappa \cap X| = \omega)$.

Veamos que en efecto son equivalentes.

Teorema 4.12 *Los principios $\clubsuit_J(S)$ y $\clubsuit_J{}^-(S)$ son equivalentes.*

Prueba.

Claramente $\clubsuit_J{}^-(S)$ implica $\clubsuit_J(S)$, veamos la recíproca.

Sea $\langle s_\alpha{}^k : \alpha \in S, k \in \omega\rangle$ una $\clubsuit_J$-sucesión. Para cada $\alpha \in S$, fijamos una sucesión creciente $(\beta_\alpha{}^k)_{k\in\omega}$ de ordinales con límite α. Sea $t_\alpha{}^k = s_\alpha{}^k - \beta_\alpha{}^k$. Afirmamos que $\langle t_\alpha{}^k : \alpha \in S, k \in \omega\rangle$ es una $\clubsuit_J{}^-$-sucesión.

Tenemos que verificar que cumpla las cuatro condiciones.

- Sea $\alpha \in S$. Así α es ordinal límite. Sea $k \in \omega$, por construcción $\beta_\alpha{}^k$ es un ordinal menor que α y como $s_\alpha{}^k$ es cofinal en α tenemos que $s_\alpha{}^k \backslash \beta_\alpha{}^k$ es cofinal en α, que sea de orden ω[3] se sigue de que $t_\alpha{}^k$ es una cola de un conjunto de orden ω.

- Sean $\alpha \in S$ y $k < m < \omega$. Por la hipótesis, tenemos que $s_\alpha{}^k \cap s_\alpha{}^m = \emptyset$.

  Por la definición $t_\alpha{}^k \cap t_\alpha{}^m = [s_\alpha{}^k \backslash \beta_\alpha{}^k] \cap [s_\alpha{}^m \backslash \beta_\alpha{}^m] \subseteq s_\alpha{}^k \cap s_\alpha{}^m = \emptyset$. Por lo tanto, la intersección es vacía.

- Sea $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$, por la hipótesis, tenemos que existe un $\alpha \in S$ tal que para toda $k \in \omega$ se da que $|s_\alpha{}^k \cap X| = \omega$. Veamos que el mismo α cumple que $|t_\alpha{}^k \cap X| = \omega$, basta observar que el conjunto $t_\alpha{}^k \cap X = (s_\alpha{}^k \backslash \beta_\alpha{}^k) \cap X$ es no acotado en α, ya que $\beta_\alpha{}^k$ es fijo y $s_\alpha{}^k$ es no acotado en α, por lo que no puede ser finito y además $|t_\alpha{}^k \cap X| \leq |s_\alpha{}^k \cap X| = \omega$ así obtenemos lo deseado.

- Demostremos la condición 4. Como es unión de conjuntos numerables sólo faltaría verificar que no existe un elemento $\beta \in \bigcup_{k\in\omega} t_\alpha{}^k$ mayor que una infinidad de elementos de $\bigcup_{k\in\omega} t_\alpha{}^k$.

[3] Ser de orden ω se refiere a que su tipo de orden es ω.

Supongamos lo contrario, entonces hay una sucesión estrictamente creciente $\{\gamma_i\}_{i\in\omega}$ tal que para toda $i \in \omega$ se tiene que $\gamma_i \in \bigcup_{k\in\omega} {t_\alpha}^k$ y $\gamma_i < \beta$, ahora como $\beta \in \bigcup_{k\in\omega} {t_\alpha}^k$, existe $r \in \omega$ tal que $\beta \in {t_\alpha}^r = {s_\alpha}^r \setminus {\beta_\alpha}^r$. Como β acota a la sucesión $\{\gamma_i\}_{i\in\omega}$, $\{\gamma_i\}_{i\in\omega} \subset \bigcup_{i<r} {t_\alpha}^i$ pero como es una cantidad finita de uniendos tenemos que existe $s < r$ tal que $\{\gamma_i\}_{i\in J} \subset {t_\alpha}^s$ donde J es un subconjunto numerable de ω. Note que ${t_\alpha}^s$ es no acotado en α implica que existe $\theta \in {t_\alpha}^s$ mayor que β pero entonces θ acota a la sucesión $\{\gamma_i\}_{i\in J}$ contradiciendo que ${t_\alpha}^s$ sea de tipo de orden ω.

■

Procedamos a ver que en efecto es una debilitación de ♣, es decir, que $♣_J$ es consecuencia de ♣.

Teorema 4.13 *Sea $S = Lim \cap \omega$. Si el principio $♣(S)$ se cumple entonces el principio $♣_J(S)$ también.*

Prueba. Sea $\langle A_\alpha : \alpha \in S\rangle$ una ♣-sucesión en $S = Lim \cap \omega_1$.

Sea X un subconjunto numerable de ω_1. Definiremos por recursión sobre ω la siguiente función $f : [\omega_1]^\omega \to [\omega_1]^\omega$. Sea $A \subset X$, entonces $A_0 = \{a_0\}$ y si $A_n = \{a_m\}$, entonces $A_{n+1} = \{a_{m+n+2}\}$, donde a_i es el i-ésimo elemento de A, así, hacemos $f(A) = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ lo cual es posible gracias a que X es bien ordenado y numerable, a simple vista no se entiende bien lo que hace la función pero en realidad sólo fue codificar la estrategia de tomar el primer elemento después dejar uno libre y tomar otro dejar dos libres y volver a tomar otro y así sucesivamente, esto será de ayuda para la construcción de nuestra sucesión.

Ahora por la hipótesis, cada A_α es numerable y además es bien ordenado, ya que es subconjunto de α, así, definimos nuestra sucesión por recursión de la siguiente forma: ${s_\alpha}^0 = f(A_\alpha)$ y si conocemos ${s_\alpha}^0, {s_\alpha}^1, {s_\alpha}^2, ..., {s_\alpha}^n$, entonces

$${s_\alpha}^{n+1} = f(A_\alpha \setminus \bigcup_{i\leq n} {s_\alpha}^i).$$

Verifiquemos pues que $\langle {s_\alpha}^\kappa : \alpha \in S, \kappa \in \omega\rangle$ es una $♣_J$-sucesión.

La primera condición se sigue de que ${s_\alpha}^n$ es un subconjunto no acotado de un conjunto cofinal de α y por consiguiente él mismo es cofinal en α y el tipo de orden se sigue de que es un subconjunto infinito de un conjunto de orden ω.

La segunda condición se cumple por construcción de la sucesión, ya que se tomaron los complementos.

Veamos la tercera condición, sea $W \subset \omega_1$ no numerable, así, por la hipótesis existe $\alpha \in S$ tal que $A_\alpha \subset W$ lo cual implica que para toda $\kappa \in \omega$ tenemos que ${s_\alpha}^\kappa \subset W$ por la forma en cómo se definieron, así, de lo anterior se sigue que $|{s_\alpha}^\kappa \cap W| = |{s_\alpha}^\kappa| = \omega$. $\blacksquare$

Capítulo 5

Resultados sobre $\square_\kappa$ y $\bigcirc_\lambda(S)$

En este capítulo veremos otros dos principios combinatorios.

Primero introduciremos $\square_\kappa$ en la versión como fue presentado en [13], donde Jensen formula su propia jerarquía acumulativa.

5.1. $\square_\kappa$ y $\square_\kappa{}^*$

El siguiente principio lo introdujo Jensen de forma similar a $\diamondsuit$ y es crucial en la demostración del teorema de Shelah que es el tema principal de este capítulo.

Definición 5.1 *Sea κ un cardinal infinito. $\square_\kappa$ es el enunciado: Hay una sucesión $\langle C_\lambda : \lambda \in lim(\kappa^+)\rangle$ tal que se cumple lo siguiente:*

1. *C_λ es un club en λ.*

2. *Si $cf(\lambda) < \kappa$, entonces $\overline{C_\lambda} < \kappa$.*[1]

3. *Si γ es un punto de acumulación de C_λ en el sentido topológico, entonces $C_\gamma = \gamma \cap C_\lambda$.*

[1] $\overline{C_\lambda} < \kappa$ se refiere a la cerradura en el sentido topológico.

En 1972 Jensen hizo un análisis detallado de los niveles de la jerarquía del universo construible [13]. La teoría resultante, ¿ The fine Structure Theory ?, describe precisamente cómo nuevos conjuntos aparecen en cada nivel según la construcción de L y tiene varias aplicaciones importantes. Históricamente la primer aplicación de esta teoría fue el siguiente teorema de Jensen:

Teorema 5.2 *Sea κ un cardinal no numerable. Entonces $V = L$ implica $\square_\kappa{}^*$.* [2]

Hay cardinales grandes que se relacionan con conjuntos estacionarios.

Definición 5.3 *Un cardinal fuertemente inaccesible κ es llamado* cardinal de Mahlo *si el conjunto de todos los cardinales regulares debajo de él es conjunto estacionario.*

Una de las consecuencias sobre conjuntos estacionarios que se siguen de la existencia de un cardinal de Mahlo es la siguiente:

Teorema 5.4 *Supongamos $V = L$. Si κ es un cardinal y κ^+ es no es de Mahlo, entonces se cumple $\square_\kappa$.*

Así, Jensen conjeturó que la consistencia de $\neg\square_\kappa$ se sigue de un modelo donde exista un cardinal Mahlo. Más tarde, Solovay lograría confirmarlo demostrando que si un cardinal Mahlo es Lévy colapsado en $\aleph_2$ por condiciones contables, entonces $\square_{\omega_1}$ falla en la extensión, también cabe recalcar que Shelah demostró que la existencia de cardinales supercompactos implica $\neg\square^*_{\aleph_\omega}$.[3]

De todo lo anterior podemos concluir que $\square_\kappa$ es independiente de ZFC, modulo cardinales grandes.

En vista de que existen cardinales κ para los que $\square_\kappa$ falla, se buscaron algunas versiones más débiles, aquí presentaremos una.

[2] La demostración se puede consultar en [13] o en [8] para una versión más reciente. La definición de $\square_\kappa{}^*$ se puede consultar en la definicón 5.5.

[3] Consultar [12] para más información.

Definición 5.5 *Sea κ un cardinal no numerable, y sea μ un cardinal tal que $1 \leq \mu \leq \kappa$.*

$\square_{\kappa,\mu}$ *es el enunciado: Hay una sucesión $\langle \mathcal{C}_\alpha : \alpha \in Lim(\kappa^+)\rangle$ tal que se cumple lo siguiente:*

- *$\mathcal{C}_\alpha$ es no vacío, $|\mathcal{C}_\alpha| \leq \mu$ y cada $C \in \mathcal{C}_\alpha$ es un club en α.*
- *Si $C \in \mathcal{C}_\alpha$ y $\beta \in Lim(C)$, entonces $C \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta$.*[4]
- *Si $cf(\alpha) < \kappa$, entonces $|C| < \kappa$ para cada $C \in \mathcal{C}_\alpha$.*

La versión más débil de $\square_\kappa$ que mencionamos antes es con la pareja κ, κ, es decir, $\square_{\kappa,\kappa}$ la cual es denotaba por $\square^*_\kappa$ y es llamado *cuadrado débil*. Otro resultado de Jensen en [13] es que $\square^*_\kappa$ es equivalente a la existencia de un κ^+-árbol especial de Aronszajn, y por lo tanto, si κ es regular, $\square^*_\kappa$ se sigue de $2^\kappa = \kappa^+$. Los principios $\square_\kappa$ y $\square^*_\kappa$ son de mayor relevancia en el caso cuando κ es cardinal singular. La negación de $\square^*_\kappa$ para κ cardinal singular es consistente bajo la existencia de un cardinal de Woodin [5].

5.2. $\bigcirc_\lambda(S)$

Pasaremos a demostrar una de las aplicaciones de ${\square_\kappa}^*$ demostrada por Zeman en la cual tendremos que introducir otro principio combinatorio.

Primero daremos un poco de notación que facilitará el trabajo.

Sea ${S_\mu}^\lambda = \{\delta \in \lambda : cf(\delta) = \mu\}$ y $T_\kappa = {S_{cf(\kappa)}}^{\kappa^+}$.

El teorema de Zeman es una completación del teorema de Shelah que se derivó del siguiente teorema, ya que contempla el caso que faltaba con relación a T_κ.

Teorema 5.6 (Gregory, Jensen, Shelah) *Si $2^\kappa = \kappa$ y $\kappa^+ = 2^\kappa$, entonces $\diamondsuit_{\kappa^+}(S)$ se cumple siempre que $S \subset \kappa^+$ sea un conjunto estacionario disjunto*

[4] $Lim(C)$ es el conjunto de ordinales límite del club C.

[5] La demostración y la definición de cardinal de Woodin se pueden consultar en [19].

de T_κ. Si κ es singular y adicionalmente $\square_\kappa$ se cumple, entonces $\diamondsuit_{\kappa^+}(T_\kappa)$ se cumple.

El teorema de Gregory prueba que bajo GCH, $\diamondsuit_{\kappa^+}$ se cumple para cada cardinal sucesor κ^+, de hecho prueba $\diamondsuit(S^\kappa_\lambda)$ es cierto siempre que $\lambda < cf(\kappa)$. Esto fue extendido por Shelah probando que, bajo GCH, $\diamondsuit(S^{\kappa^+}_\lambda)$ se cumple siempre que $\lambda \neq cf(\kappa)$. Como ya habíamos comentado el caso inteserante se dio cuando κ es singular y en este caso llegó al teorema que vamos a revisar en este capítulo.

Teorema 5.7 (Zeman) *Sea κ un cardinal singular y $T \subseteq T_\kappa$ un estacionario con una cantidad estacionaria de puntos de reflexión.* [6]

Entonces $2^\kappa = \kappa^+ + \square_\kappa{}^* \Rightarrow \diamondsuit_{\kappa^+}(T)$

Nos aproximaremos usando el desglose de Martin Zeman en su artículo [20] del 2010 en donde introduce un nuevo principio combinatorio:

Definición 5.8 *Sea λ un cardinal regular y $S \subseteq \lambda$ un conjunto estacionario en λ. $\bigcirc_\lambda(S)$ es el enunciado: Hay dos sucesiones $\langle x_\xi : \xi \in \lambda\rangle$ y $\langle A_\alpha : \alpha \in S\rangle$ que cumplen lo siguiente:*

- *$\langle x_\xi : \xi \in \lambda\rangle$ es una enumeración de $[\lambda]^{<\lambda}$.*
- *$A_\delta \subseteq \delta$ y $|A_\delta| < |\delta|$.*
- *Para cada $Z \subseteq \lambda$ hay un conjunto estacionario $S' \subseteq S$ tal que para toda $\delta \in S'$ existe un $Z(\delta) \subseteq \delta$ no acotado tal que para toda $\alpha \in Z(\delta)$ existe $\beta \in \delta$ que cumple que $\alpha, \beta \in A_\delta$ y $Z \cap \alpha = x_\beta$.*

A simple vista parece muy técnico pero ahora daremos algunos resultados sencillos de $\bigcirc_\lambda(S)$.

Lema 5.9 *Sea $\lambda = \kappa^+$.*

$\bigcirc_\lambda(S) \Rightarrow 2^\kappa = \kappa^+$.

[6] Consultar [12] para la definición de punto de reflexión.

Prueba. Sabemos que $\kappa^+ \leq |2^\kappa| = |\wp(\kappa)|$, por lo que bastaría demostrar que hay una función $f : \wp(\kappa) \to \kappa^+$. Como se cumple $\bigcirc_\lambda(S)$, existe una biyección g entre $[\kappa^+]^{<\kappa^+}$ y κ^+ así para terminar basta observar que $\wp(\kappa) \subseteq [\kappa]^{<\kappa^+} \subseteq [\kappa^+]^{<\kappa[+}$, entonces definimos $f = g \restriction_{\wp(\kappa)}$ y como es la restricción de una función inyectiva tenemos lo deseado. ■

El siguiente resultado es relativo a los testigos y cómo se pueden generar a partir de uno dado.

Lema 5.10 *Sea λ un cardinal regular. Si $\langle x_\xi : \xi \in \lambda\rangle$ y $\langle A_\alpha : \alpha \in S\rangle$ son testigos de $\bigcirc_\lambda(S)$, entonces dada cualquier enumeración $\langle x'_\xi : \xi \in \lambda\rangle$ de $[\lambda]^{<\lambda}$ existe una sucesión $\langle A'_\alpha : \alpha \in S\rangle$ tal que el par de sucesiones $\langle x'_\xi : \xi \in \lambda\rangle$, $\langle A'_\alpha : \alpha \in S\rangle$ también es testigo de $\bigcirc_\lambda(S)$.*

Prueba. Sea $\langle x'_\xi : \xi \in \lambda\rangle$ una enumeración de $[\lambda]^{<\lambda}$. Sea $f : \lambda \to \lambda$ una función biyectiva tal que $x_\beta = x'_{f(\beta)}$, dicha función existe porque ambas sucesiones son enumeraciones.[7] Definimos la sucesión de la siguiente manera: para cada $\delta \in S$, sea $A'_\delta = A_\delta \cup f[A_\delta]$. Veamos que se cumplen las tres condiciones.

La primera condición sale directamente de la hipótesis.

La segunda se sigue de observar que $\omega \leq cf(\delta)$ para toda $\delta \in S$, así, por la hipótesis se tiene que $|A_\delta| < \delta$, entonces también $|f[A_\delta]| < \delta$, por lo que

$$|A'_\delta| \leq |A_\delta \cup f[A_\delta]| \leq |\delta| + |\delta| = |\delta|.$$

La tercera propiedad es un poco más extensa. Sea $Z \subseteq \lambda$, por la hipótesis, existe un estacionario $S' \subseteq S$ tal que para toda $\delta \in S'$ existe $Z(\delta) \subseteq \delta$ no acotado tal que para toda $\alpha \in Z(\delta)$ existe $\beta \in \delta$ que cumple que $\alpha, \beta \in A_\delta$ y $Z \cap \alpha = x_\beta$. Por el teorema 1.17, tenemos que el conjunto $C = \{\alpha \in \lambda : f[\alpha] \subseteq \alpha\}$ es un club y a su vez, por el lema 1.10, $C \cap S' = S''$ es estacionario. Veamos que S'' es el conjunto que buscamos. Sea $\delta \in S''$, como $\delta \in S'$ existe $Z(\delta) \subseteq \delta$ no acotado tal que para toda $\alpha \in Z(\delta)$ existe $\beta \in \delta$ que cumple que $\alpha, \beta \in A_\delta$ y $Z \cap \alpha = x_\beta$ pero $\delta \in C$, por lo que $f(\beta) \in \delta$ y más aún $f(\delta) \in A'_\delta$ por elección, notemos que $Z(\delta) \subseteq A_\delta \subseteq A'_\delta$ así que para toda $\alpha \in Z(\delta)$ existe $\beta' = f(\beta) \in \delta$ tal que

[7] Nos referimos a enumeraciones sin repeticiones.

$\alpha, \beta' \in A'_\delta$ y $Z \cap \alpha = x_{\beta'}$, ya que por la hipótesis $Z \cap \alpha = x_\beta = x_{\beta'} = x_{f(\beta)}$, donde las últimas igualdades se dan por construcción de f y por la definición de β'. ■

Después de ver estas propiedades del principio círculo, veremos que podemos capturar la misma esencia pero ahora para subconjuntos de $\lambda \times \lambda$. Esto nos ayudará para entrar de lleno a las aplicaciones relevantes de círculo.

Lema 5.11 *Sea λ un cardinal regular y $S \subset \lambda$ un conjunto estacionario en λ.*

Si $\langle y_\xi : \xi \in \lambda \rangle$, $\langle B_\alpha : \alpha \in S \rangle$ son testigos de $\bigcirc_\lambda(S)$, entonces existen dos sucesiones $\langle x_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ y $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ tales que se cumple lo siguiente:

- *$\langle x_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ es una enumeración de $[\lambda \times \lambda]^{<\lambda}$.*
- *$A_\delta \subseteq \delta$ para toda $\delta \in S$.*
- *Para todo $Z \subseteq \lambda \times \lambda$ hay un estacionario $S' \subseteq S$ tal que para toda $\delta \in S'$ existe un $Z(\delta) \subseteq Z$ no acotado tal que para toda $\alpha \in Z(\delta)$ existe un $\beta \in \delta$ tal que $\alpha, \beta \in A_\delta$ y $Z \cap (\alpha \times \alpha) = x_\xi \cap (\alpha \times \alpha)$.*

Prueba.

Sean $\langle y_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ y $\langle B_\alpha : \alpha \in S \rangle$ testigos de $\bigcirc_\lambda(S)$ y sea $f : \lambda \times \lambda \to \lambda$ una función biyectiva. Sea $C_f = \{\delta \in \lambda : f[\delta \times \delta] = \delta\}$ y para cada $\delta \in S$ definimos C_δ como sigue:

$$C_\delta = \begin{cases} Lim(C_f) \cap \delta \text{ si } |Lim(C_f) \cap \delta| < \delta \text{ y } Lim(C_f) \cap \delta \text{ es cofinal en } \delta. \\ \emptyset \text{ en otro caso .} \end{cases}$$

Por último definamos para cada $\beta \in \lambda$ a $x_\beta = f^{-1}[y_\beta]$ y para cada $\delta \in S$ a $A_\delta = B_\delta \cup C_\delta$. Veamos que $\langle x_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ y $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ cumplen lo deseado.

Para ver que $\langle x_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ es una enumeración de $[\lambda \times \lambda]^{<\lambda}$ notemos que por la hipótesis $\langle y_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ es una enumeración de $[\lambda]^{<\lambda}$, por lo que existe una biyección $g : \lambda \to [\lambda]^{<\lambda}$ pero como f es biyección a su vez, nos induce una biyección $f' : [\lambda]^{<\lambda} \to [\lambda \times \lambda]^{<\lambda}$ haciendo $f'(A) = f^{-1}[A]$ así componiendo g y f' obtenemos la biyección que nos da la numeración requerida.

Observemos que sin pérdida de generalidad podemos considerar que para toda $\delta \in S$ se tenga que $cf(\delta) > 2$, ya que S es estacionario en λ. Sea $\delta \in S$, así, $cf(\delta > 2$ y como por la hipótesis $|B_\delta| < |\delta|$ y por construcción $|C_\delta| < |\delta|$, $|A_\delta| = |B_\delta \cup C_\delta| < |\delta|$, ya que de lo contrario contradiría nuestra observación acerca de que la cofinalidad de δ es infinita.

Veamos la última condición. Sea $R \subseteq \lambda \times \lambda$, así, $Z = f[R] \subseteq \lambda$, por lo que aplicamos $\bigcirc_\lambda(S)$ y obtenemos un estacionario $S' \subseteq S$ tal que para toda $\delta \in S'$ existe un $Z(\delta) \subseteq \delta$ no acotado tal que para cada $\alpha \in Z(\delta)$ existe un $\beta \in \delta$ tal que $\alpha, \beta \in B_\delta$ y $Z(\delta) \cap \alpha = y_\beta$. Sea $S'' = S' \cap LIM(C_f)$, notemos que C_f es un club, por el teorema 1.17, y como S' es estacionario por la hipótesis aplicando el lema 1.10, obtenemos que S'' es estacionario. Sea $\delta \in S''$ y $\gamma \in C_\delta$, así existe $Z(\delta) \subseteq \delta$ no acotado tal que para cada $\alpha \in Z(\delta)$ existe un $\beta \in \delta$ tal que $\alpha, \beta \in B_\delta$ y $Z(\delta) \cap \alpha = y_\beta$, ya que $S'' \subseteq S'$. Como $Z(\delta)$ es no acotado, existen $\alpha', \beta' \in B_\delta$ tales que $\gamma \leq \alpha'$ y $Z \cap \alpha' = y_{\beta'}$, por lo que intersectando con γ de ambos lados tenemos $Z \cap \gamma = Z \cap \alpha' \cap \gamma = y_{\beta'} \cap \gamma$ ahora como $\gamma \in C_\delta$, $\gamma = f[\gamma \times \gamma]$, por la definición, lo cual implica que $Z \cap f[\gamma \times \gamma] = y_{\beta'} \cap f[\gamma \times \gamma]$; además $Z = f[R]$, y como f es biyectiva tenemos aplicando la inversa lo siguiente:

$$R \cap (\gamma \times \gamma) = f^{-1}[f[R] \cap f^{-1}[f[\gamma \times \gamma]] = f^{-1}[Z] \cap f^{-1}[f[\gamma \times \gamma]] =$$

$$f^{-1}[Z \cap f[\gamma \times \gamma]] = f^{-1}[y_{\beta'} \cap f[\gamma \times \gamma]] = f^{-1}[y_{\beta'}] \cap f^{-1}[f[\gamma \times \gamma]] = x_\beta \cap (\gamma \times \gamma)$$

que era lo deseado, ya que $A_\delta = B_\delta \cup C_\delta$. ■

5.3. $\bigcirc_\lambda(S)$ implica $\diamondsuit_\lambda(S)$

En esta sección procederemos a demostrar la segunda parte del argumento de Shelah.

Teorema 5.12 *Sea λ un cardinal regular y $S \subseteq \lambda$ un estacionario en λ.*

Entonces $\bigcirc_\lambda(S) \Rightarrow \diamondsuit_\lambda(S)$.

Prueba.

Sean $\langle x_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ y $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ como en el lema 5.11.

Para cada $x \subseteq (\lambda \times \lambda)$ definimos el siguiente conjunto

$$(x)_\xi = \{\gamma \in \lambda : \langle \xi, \gamma \rangle \in x\}.$$

Consideremos una sucesión $\langle (X_\xi, C_\xi) : \xi \in \theta \rangle$ de longitud $\theta \leq \lambda$ tal que se cumpla que para todo $\xi \in \theta$, $X_\xi \subseteq \lambda$, C_ξ es un club en λ y si

$${V_\xi}^\delta = \{\langle \alpha, \beta \rangle \in A_\delta \times A_\delta : \forall \eta < \xi (X_\eta \cap \alpha = (x_\beta)_\eta \cap \alpha\}$$

para cada $\xi < \theta$ y $\delta \in S \cap C_\xi$, entonces $Dom({V_\xi}^\delta)$ es acotado en λ o ${V_{\xi+1}}^\delta \subsetneq {V_\xi}^\delta$.

La última condición es no trivial dado que por cómo se requirió tenemos que para toda $\xi < \xi'$ se da que ${V_{\xi'}}^\delta \subsetneq {V_\xi}^\delta$.

La parte central de la demostración es notar que cualquier sucesión del tipo anteriormente mencionado tiene que tener necesariamente longitud menor que λ, i.e. $\theta < \lambda$. Para ver esto supongamos lo contrario, así existe una sucesión como la de antes con $\theta = \lambda$.

Sea S' el estacionario obtenido al aplicar el lema 5.11 a las sucesiones $\langle x_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ y $\langle A_\alpha : \alpha \in S \rangle$ y al conjunto $Z = \{\langle \xi, \rho \rangle : \rho \in x_\xi\}$. Por teorema 1.19, sabemos que $B = \triangle\{C_\xi : \xi < \lambda\}$ es un club por lo que $S' \cap B$ es no vacío, sea $\delta \in S' \cap B$ tal que $\delta > \kappa$ si $\lambda = \kappa^+$ y δ un cardinal si λ es inaccesible, esto es posible ya que S' es no acotado por ser estacionario.

Por el lema 5.11, tenemos que existe $Z(\delta) \subseteq \delta$ no acotado tal que para toda $\alpha \in Z(\delta)$ existe un $\beta \in \delta$ tal que $\alpha, \beta \in A_\delta$ y $Z \cap (\alpha \times \alpha) = x_\beta \cap (\alpha \times \alpha)$. Por otra parte, tenemos que para cada $\xi < \delta$ el conjunto $M = \{\rho \in \lambda : \xi < \rho\} \cap Z(\delta)\}$ está contenido en $Dom({V_\xi}^\delta)$ y como M es no acotado, $Dom({V_\xi}^\delta)$ es no acotado. Verifiquemos que esto es cierto.

Sea $\alpha \in M$, queremos ver que para toda $\eta < \xi$ se tiene que $X_\eta \cap \alpha = (x_\beta)_\eta \cap \alpha$ donde β es el existente dado el lema 5.11. Sea $\eta < \xi$, así, como $\alpha \in M$, tenemos la siguiente desigualdad $\eta < \xi < \alpha$; además, tenemos que existe $\beta \in A_\delta$ tal que $Z \cap (\alpha \times \alpha) = x_\beta \cap (\alpha \times \alpha)$. Veamos la igualdad, sea $\rho \in X_\eta \cap \alpha$, directo de las definiciones tenemos que $\rho \in \alpha$ y que $\langle \eta, \rho \rangle \in Z$, por lo que $\langle \eta, \rho \rangle \in Z \cap (\alpha \times \alpha) =$

$x_\beta \cap (\alpha \times \alpha)$ pero eso implica directo de la definición que $\rho \in (x_\beta)_\eta$ y como ya teníamos que $\rho \in \alpha$, $\rho \in (x_\beta)\eta \cap \alpha$.

Por las propiedades de nuestra sucesión $\langle X_\xi, C_\xi : \xi \in \theta\rangle$ y de lo anterior podemos concluir que para cada $\xi < \xi' < \delta$ tenemos que ${V_{\xi'}}^\delta \subsetneq {V_\xi}^\delta$, ya que todos sus dominios son no acotados, pero eso quiere decir que $|\delta| = |A_\delta \times A_\delta| = |A_\delta| < |\delta|$ lo cual es una contradicción.

Por lo anterior podemos tomar una sucesión $\langle X_\xi, C_\xi : \xi < \theta\rangle$ con las condiciones pedidas tal que no tiene extensiones propias, es decir, que todas sus extensiones no tienen las propiedades deseadas. Entonces $\theta < \lambda$. Sea

$$D_\delta = \bigcup\{(x_\beta)_\theta \cap \alpha : \langle \alpha, \beta\rangle \in {V_\theta}^\delta\}.$$

Afirmamos que la sucesión $\langle D_\delta : \delta \in S\rangle$ es una $\diamondsuit(S)$-sucesión. Para ver esto, tomemos un $X \subseteq \lambda$ arbitrario y un $C \subseteq \lambda$ club en λ arbitrario. Entonces existe $\delta \in S \cap C$ tal que $Dom({V_\theta}^\delta)$ es no acotado en δ y $X \cap \alpha = (x_\beta)_\theta \cap \alpha$ para todo par $\langle \alpha, \beta\rangle \in {V_\theta}^\delta$, ya que de lo contrario podríamos extender nuestra sucesión $\langle X_\xi, C_\xi : \xi < \theta\rangle$ haciendo $X_\theta = X$ y $C_\theta = C$, en contradicción a que no tiene extensiones propias. Pero entonces $X \cap \delta = D_\delta$, ya que si $\rho \in X \cap \delta$ como el dominio de ${V_\theta}^\delta$ es no acotado, existe un $\alpha \in A_\delta$ tal que $\rho < \alpha$ pero $X \cap \alpha = (x_\beta)_\theta \cap \alpha$, por lo que $\rho \in (x_\beta)_\theta \cap \alpha$ y , así, por la definición de D_δ tenemos que $\rho \in D_\delta$, analogamente si $\rho \in D_\delta$ existe un $\langle \alpha, \beta\rangle \in {V_\theta}^\delta$ tal que $\rho \in (x_\beta)_\theta \cap \alpha = X \cap \alpha$ pero $\alpha < \delta$, por lo que $\rho \in X \cap \delta$ y así, queda demostrado que es una $\diamondsuit(S)$-sucesión. ■

5.4. $2^\kappa = \kappa^+$ implica $\bigcirc_{\kappa^+}(S)$

Ahora veremos cómo se aplica la primera parte del argumento de Shelah con algunas restricciones sobre el conjunto estacionario.

Teorema 5.13 *Sea κ un cardinal y supongamos que $S \subseteq \kappa^+$ es un estacionario disjunto de T_κ.*

Entonces $2^\kappa = \kappa^+ \Rightarrow \bigcirc_{\kappa^+}(S)$

Prueba. Sea $\langle y_\xi : \xi < \kappa^+\rangle$ una enumeración arbitraria de $[\kappa^+]^{\leq\kappa}$. La existencia de tal enumeración está garantizada por nuestra hipótesis. Sea $g : \rho \times \kappa^+ \to \kappa^+$ una biyección donde $\rho = cf(\kappa)$. Para cada $\delta \in S$ tomemos una sucesión estrictamente creciente, respecto a la inclusión, de conjuntos $\langle {A_\iota}^\delta : \iota < \rho\rangle$ tal que $|{A_\iota}^\delta| < \delta$ para toda $\iota < \rho$ y $\bigcup_{\iota<\rho} {A_\iota}^\delta = \delta$.

Probaremos que existe un $\iota < \rho$ tal que:

*) Para todo $Z \subseteq \kappa^+$ hay $S' \subseteq S$ satisfaciendo que para cada $\delta \in S'$ hay $Z(\delta) \subseteq \delta$ tal que si $\alpha \in Z(\delta)$ entonces existe $\beta \in \delta$ tal que $\alpha, \beta \in {A_\iota}^\delta$ y $Z \cap \alpha = (g^{-1}[y_\beta])_\iota$.[8]

Ya que si obtenemos esto y definimos $A_\delta = {A_\iota}^\delta$ y $x_\beta = (g^{-1}[y_\beta])_\iota$, entonces el par $\langle x_\beta : \beta < \kappa^+\rangle, \langle A_\delta : \delta \in S\rangle$ es un testigo de $\bigcirc_{\kappa^+}(S)$.

Asumamos para una contradicción que no existe tal ι como en la discusión anterior. Entonces para cada $\iota < \rho$ hay un conjunto $Z(\iota) \subseteq \kappa^+$ tal que la propiedad * se cumple únicamente en una cantidad no estacionaria de ordinales en S. Sea $Z = \{\langle \iota, \xi\rangle : \xi \in Z(\iota)\}$ y $Z' = g[Z]$, afirmamos que el conjunto de ordinales $\delta \in S$ tal que cumplen:

- $\{\alpha \in \delta : g[\rho \times \alpha] = \alpha\}$ es cofinal con δ y
- para todo $\alpha < \delta$ existe un $\beta < \delta$ tal que $Z' \cap \alpha = y_\beta$

es estacionario en κ^+.

Para verificarlo bastaría ver que los conjuntos

$$C_1 = \{\xi < \kappa^+ : g[\rho \times \alpha] = \alpha \text{ para una cantidad cofinal de } \alpha < \xi\}$$

y

$$C_2 = \{\xi < \kappa^+ : \forall \alpha < \xi \exists \beta < \xi (Z' \cap \alpha = y_\beta\}$$

son clubs en κ^+, ya que de serlo si C es un club arbitrario entonces $C \cap C_1 \cap C_2$ es un club, por el lema 1.9, y como S es estacionario tenemos, por el lema 1.10, que $S' = S \cap C_1 \cap C_2$ es estacionario. Veamos que en efecto C_1 y C_2 son clubs en κ^+.

[8] Aquí estamos usando la misma notación introducida en la prueba del teorema 5.12.

Primero verifiquemos que C_1 es cerrado, sea $\delta \in \kappa^+$ tal que $C_1 \cap \delta$ es no acotado en δ, queremos ver que $\delta \in C_1$. Observemos que como $C_1 \cap \delta$ es no acotado en δ, también es cofinal en δ y como para cada $\beta \in C_1 \cap \delta$ existe un $\alpha < \beta$ tal que $g[\rho \times \alpha] = \alpha$, obtenemos que $\delta \in C_1$. Para ver que C_1 es no acotado, sea $\gamma \in \kappa^+$, construiremos por recursión una sucesión $\langle \alpha_i : i \in \omega \rangle$ tal que cumpla lo siguiente:

- $\gamma \leq \alpha_0$.
- Para toda $i \in \omega$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$.
- Para toda $0 < i < \omega$, $g[\rho \times \alpha_i] = \alpha_i$.

Sea $\alpha_0 = \gamma$, supongamos que ya tenemos a α_n, entonces definimos a α_{n+1} por recursión sobre ω, sea ${\beta_0}^n = \alpha_n + 1$, supongamos que ya tenemos ${\beta_m}^n$, definimos ${\beta_{m+1}}^n$ como el supremo de la imagen bajo la segunda proyección del conjunto $g^{-1}[sup(g[\rho \times {\beta_m}^n)]$, así, definimos a $\alpha_{n+1} = sup\{{\beta_i}^n : i \in \omega\}$, por último en el caso sucesor tomamos la unión de los anteriores. Veamos que cumple lo deseado, las primeras dos propiedades las cumple por como definimos la sucesión, ahora para la tercer condición veamos la doble contención, sea $n \in \omega$ tal que $0 < n$ y sea $\langle \theta, \mu \rangle \in (\rho \times \alpha_n)$ así, por construcción existe $m \in \omega$ tal que $\mu < {\beta_m}^n$, por lo que para algún $\nu < \rho$ se tiene que $g(\langle \theta, \mu \rangle) < g(\langle \nu, {\beta_m}^n \rangle) < \alpha_n$ por construcción y así $g[\rho \times \alpha_n] \subseteq \alpha_n$, ahora sea $\theta \in \alpha_n$ por construcción existe $m \in \omega$ tal que $\theta < {\beta_m}^n$ así $\theta \in g[\rho \times {\beta_m}^n]$ y a su vez $\theta \in sup(g[\rho \times {\beta_m}^n])$ así por la definición de ${\beta_{m+1}}^n$ tenemos que existen $\xi \in \rho$ y $\nu \in {\beta_{m+1}}^n$ tales que $g(\langle \xi, \nu \rangle) = \theta$, por lo que $\theta \in g[\rho \times {\beta_{m+1}}^n] \subseteq g[\rho \times \alpha_n]$ y así, $g[\rho \times \alpha_n] = \alpha_n$.

Ahora si definimos $\delta = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$, entonces nuestra sucesión $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ es cofinal en δ y cumple que para toda $0 < i < \omega$ $g[\rho \times \alpha_i] = \alpha_i$, por lo que $\delta \in C_1$ y $\gamma < \delta$ por construcción, entonces C_1 es no acotado. Por lo tanto, C_1 es un club sobre κ^+.

Veamos que C_2 es cerrado, sea $\delta \in \kappa^+$ tal que $C \cap \delta$ es no acotado en δ, queremos ver que $\delta \in C_2$. Sea $\alpha \in \delta$, como $\delta \cap C$ es no acotado en δ, existe un

$\theta \in \delta \cap C$ tal que $\alpha < \theta$ y como $\theta \in C_2$, para todo $\rho \in \theta$ existe $\xi \in \theta$ tal que $Z' \cap \rho = y_\xi$ así, existe $\beta \in \theta \subset \delta$ tal que $Z' \cap \alpha = y_\beta$ y así $\delta \in C_2$.

Así, S' es estacionario.

Para cada $\delta \in S'$ tomemos una sucesión estrictamente creciente y cofinal en δ, $\langle \alpha_\eta^\delta : \eta < cf(\delta) \rangle$ tal que $g[\rho \times \alpha_\eta^\delta] = \alpha_\eta^\delta$ para cada $\eta < cf(\delta)$, y para cada $\eta < cf(\delta)$ tomemos $\beta_\eta < \delta$ tal que $Z' \cap \alpha_\eta^\delta = y_{\beta_\eta}$[9]. Esto es posible por la definición de S'.

Afirmamos que si $\delta \in S'$, entonces existe un $\iota(\delta) < \rho$ tal que $\alpha_\eta^\delta, \beta_\eta \in A_{\iota(\delta)}^\delta$ para una cantidad cofinal de $\eta < cf(\delta)$. Veamos que en efecto esto sucede.

Si $cf(\delta) < \rho$, entonces la función $f : cf(\delta) \to \rho$ definida como

$$f(\eta) = inf\{\iota \in \rho : \alpha_\eta^\delta, \beta_\eta \in A_\iota^\delta\}$$

no puede ser cofinal en ρ, por lo que existe $\iota(\delta) \in \rho$ tal que $\alpha_\eta^\delta, \beta_\eta \in A_{\iota(\delta)}^\delta$ para toda $\eta < cf(\delta)$.

Si $cf(\delta) > \rho$ se sigue del principio de las pichoneras que debe existir $\theta \in \rho$ tal que $f^{-1}(\theta)$ tiene cardinalidad $cf(\delta)$ y por lo tanto, debe ser cofinal en δ, haciendo $\theta = \iota(\delta)$ obtenemos lo deseado. Por como definimos T_κ son todos los casos que hay que verificar.

Aplicando el principio de las pichoneras de nuevo ahora con la función $h : S' \to \rho$ donde $h(\delta) = \iota(\delta)$, tenemos que existe $\iota \in \rho$ tal que $h^{-1}(\iota)$ tiene cardinalidad κ. Afirmamos que $S'' = h^{-1}(\iota) \subseteq S'$ es un conjunto estacionario, sólo basta observar que $S'' \subseteq S'$ y por construcción $|S''| = \kappa$.

Notemos que $h(\delta) = \iota$ para toda $\delta \in S''$. Sea $\delta \in S''$, por lo anterior hay una cantidad cofinal de $\alpha < \delta$ para los cuales existe $\beta < \delta$ tal que $\alpha, \beta \in A_\iota^\delta$ y $Z' \cap \alpha = y_\beta$, donde α cumple que $g[\rho \times \alpha] = \alpha$, así se sigue que $Z \cap (\rho \times \alpha) = g^{-1}[Z' \cap \alpha] = g^{-1}[y_\beta]$, por lo que $Z_\iota \cap \alpha = (g^{-1}[y_\beta])_\iota$ para todo α, β como los anteriores. Dado que esto se cumple para cualquier $\delta \in S''$ hemos obtenido una contradicción al hecho de que Z_ι era el contraejemplo de *. Por lo tanto existen testigos de $\bigcirc_{\kappa^+}(S)$. ■

Con los teoremas anteriores podemos concluir lo siguiente:

[9]Note que aquí β_η depende de δ pero omitimos el supra indice para comodidad del lector.

Corolario 5.14 *Sea κ un cardinal y supongamos $S \subseteq \kappa^+$ un estacionario disjunto de T_κ. Entonces $2^\kappa = \kappa^+ \Rightarrow \diamondsuit_{\kappa^+}(S)$.*

Corolario 5.15 (Zeman) *Sea κ un cardinal singular y $T \subseteq T_\kappa$ un estacionario con una cantidad estacionaria de puntos de reflexión.*

Entonces $2^\kappa = \kappa^+ + \square_\kappa{}^* \Rightarrow \diamondsuit_{\kappa^+}(T)$

El primer corolario es directo y el segundo es el Teorema de Zeman que deseabamos, en la demostración se utiliza teoría más fuerte que la aquí desarrollada y por eso no se presenta en el texto, para una demostración detallada ver [20].

Bibliografía

[1] J. A. Amor, *Pequeños Grandes Cardinales, Los menos grandes de los grandes cardinales*, Tesis para obtener el Título de Maestro en Ciencias presenta Jose Alfredo Amor, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, C.S.H. 1984.

[2] J.A. Amor , G. Campero Arena, F. E. Miranda Perea, *Teoría de conjuntos, curso intermedio*, Coordinación de Servicios Estudiantiles, Facultad de Ciencias UNAM, 2011.

[3] L. Babinkostova, A. E. Caicedo, S. Geschke, M. Scheepers, *Contemporary Mathematics, Set theory and its applications, Annual Boise Extravaganza in Set Theory*. Boise, Idaho 1995-2010.

[4] K. J. Devlin, *Variantions of* $\diamondsuit$, The journal of symbolic logic, Volume 44, Number 1, March 1979.

[5] K. J. Devlin *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.

[6] K. J. Devlin and S. Shelah, *A weak version of* $\diamondsuit$ *which follows from* $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, Israel J. of Math. 29 (1978), no.2-3, 239-247.

[7] Alan Dow, *More Set Theory for topologists*, Department of Mathematics, York University, Norht York, Ont., Canada M3J IP3.

[8] S.D. Friedman, *The Σ approach to the fine structure of L*, European Summer Meeting of the Assosiation for Symbolic Logic, Haifa, 1995, Fund. Math, 154, No. 2, pages 133-158.

[9] M. Foreman, M. Magidor, *Mutually stationary sequence of sets and the non-saturation of the non-stationary ideal on $P_\kappa(\lambda)$*, Acta Math, 186(2001), No. 2, pages 271-300.

[10] K. Gödel, *Consistency proof for the generalized continuum hypothesis*, Proc. Natl. Acad. Sci. , U.S.A., 25 (1939), Pages 220- 229.

[11] F. Hernández-Hernández, Teoría de conjuntos, una introducción, Segunda edición, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[12] T. Jech, Set Theory, Springer, 2002.

[13] R. B. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, California 94720, U.S.A.

[14] J. R. Munkres, *Topology*, Second edition, Massachusetts Institute of Technology, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458.

[15] Winfried Just, *$\clubsuit$-like principles under CH*, Fundamenta Mathematicae 170 (2001).

[16] K. Kunen, *Set Theory, An introducction to independence proofs*, North Holland, 1980.

[17] A.J. Ostaszewski, *On countably compact, perfectly normal spaces*, J. London Mathematical Society, 14, 1976, Pages 505-516.

[18] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing*, Perspectives in Logic Volume 5, 1998.

[19] E.S. Schimmerling, *Combinatorial Principles in the core model for one Woodin cardinal*, Ann. Pure Appl. Logic 74(1995), No. 2, pages 153-201.

[20] Martin Zeman, *Diamond, GCH and Weak Square*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 138, Number 5, May 2010, Pages 1853-1859.