Universidad Nacional Autónoma de México
Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Un análisis kuhneano del desarrollo del continuo numérico

Tesis

Que para optar por el grado de:

Maestra en Filosofía de las Matemáticas y Lógica de la Ciencia

Presenta:

Mariana Martínez González

Asesor:

Dr. Carlos Torres Alcaraz
Facultad de Ciencias

México, D.F., Enero 2015

A mi padre quien me enseñó que

la vida es un constante e interminable aprendizaje.

†

A quienes son mi familia, profesores, y todas aquellas personas que de una forma consciente o inconsciente me han apoyado y estimulado a continuar por el fascinante, nunca estático, a veces errático, y misterioso sendero del saber.

Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, al Dr. Carlos Torres Alcaraz, en quien encontré un apoyo total desde el momento en que le comenté mi intención de realizar una maestría en Filosofía de las Matemáticas. Le agradezco que previo a comenzar el curso propedéutico para el ingreso al posgrado, ya me enviaba artículos y me sugería lecturas para apoyar mi proyecto de investigación. Debo decir que las lecturas acerca de Gödel, ayudaron a formarme una perspectiva del desarrollo de la matemática. He experimentado con el Dr. Torres, que el conocimiento no sólo se adquiere en el aula o en una institución, sino también en una comida o en una plática al caminar por los pasillos de la Facultad de Ciencias. Por las horas institucionales que me dedicó cada semana durante toda mi maestría, por su enorme paciencia, por compartir de manera tan entusiasta sus amplios conocimientos y visión de la matemática, por enseñarme cómo es que la filosofía de la matemática es realizable desde la misma matemática, por presentarme a sus amigos David Hilbert, y Kurt Gödel, y ampliar mi conocimiento en el trabajo filosófico y

matemático de Gödel, porque su existencia es una enseñanza respecto a lo que es un matemático y de la forma en que adquiere sentido la filosofía de las matemáticas, es una enseñanza de lo que es ser una gran persona. Me ha permitido tener una visión de diversos factores muy importantes en el desarrollo de la matemática.

A un gran amigo, el Profesor Rafael Rojas Barbachano, quien con sus conferencias en años pasados, las lecturas compartidas y sus pláticas me permitió formarme una visión del desarrollo de la Teoría de Conjuntos. Específicamente, con sus enseñanzas me ha sido posible conocer ciertos aspectos del trabajo del matemático Georg Cantor, que fueron de vital importancia para mi aprendizaje sobre el desarrollo de la matemática. Un profesor muy valioso de quien he recibido apoyo y orientación en muchos aspectos de mi vida profesional. Siendo el profesor Rojas un especialista, y una persona que ha formado a muchas generaciones de especialistas en su área, sabe compartir con humildad, elegancia y entusiasmo sus conocimientos.

Al Profesor José Alfredo Amor Montaño, en paz descanse, en quien siempre encontré un gran apoyo y estímulo para continuar mi vida académica. A la profesora Julieta del Carmen Verdugo Díaz, en quien, por vez primera, tuve la oportunidad de conocer a una gran persona y alegre de quien recibí también un gran apoyo en aquellos lejanos años en los que me estaba formando como matemática. Descanse en paz mi querida Julieta.

A los Profesores Francisco Struck, Luis Briseño, Oscar Palmas, y todos aque-

llos de quienes de alguna forma, he recibido formación y apoyo en mi paso por la Facultad de Ciencias.

A mis sinodales, el Profesor José Rafael Martínez Enríquez, quien con su muy valiosa orientación, me ha hecho reflexionar en torno a que el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, cuenta con personal muy valioso académicamente en quien puede uno encontrar apoyo y estímulo para caminar en el trayecto del aprendizaje. Agradezco sus muy valiosos comentarios de mi trabajo. A la Profesora María de la Cruz Galván Salgado, quien me ha enseñado un aspecto muy interesante de la Filosofía de la Ciencia, le agradezco que me haya permitido saber que también puede ser agradable desvelarse leyendo y reflexionando en torno a la filosofía de la ciencia. Es difícil lograr una buena calificación de la Dra. Galván, pero se aprende mucho. Sus críticas al corazón de mi trabajo han contribuido sin duda a mejorar mis reflexiones. Espero haber logrado plasmar por escrito, lo que le comuniqué de manera verbal. De cualquier manera agradezco sus muy interesantes críticas. A la Profesora Fernanda Samaniego Bañuelos, de quien recibí uno de los mejores cursos en la maestría, sus clases dejan ver en ella a una profesora de quien uno puede aprender mucho de la Filosofía de la Ciencia, pero su juventud y entusiasmo a veces nos hacen olvidar que estamos frente a una persona con una trayectoria académica muy interesante. Al Profesor Osvaldo Alfonso Téllez Nieto, quien con sus amplios conocimientos en Teoría de Conjuntos me ha hecho reflexionar en aspectos importantes para mi trabajo. La rapidez y amabilidad con que revisó mi tesis me han proporcionado un ejemplo más de que en la Facultad de Ciencias se encuentran personas académicamente muy valiosas, especialistas en su área, que portan y transmiten con humildad conocimientos de vanguardia para la ciencia.

Agradecimiento a la vida por darme la oportunidad de conocer a todas estas personas de quien he aprendido mucho y que son además personas en quien se encuentra apoyo y estímulo académico.

A CONACYT por haberme concedido una beca desde agosto del 2012 hasta agosto del 2014 y con ello brindarme la posibilidad de enfocarme exclusivamente en mis estudios sin tener que preocuparme por los recursos económicos para sostenerme en los mismos.

Además del apoyo académico, a lo largo de toda mi vida he recibido de muchas formas un gran apoyo por parte de mi familia. No hay forma que abrevie y exprese mi agradecimiento por las distintas formas en la que mi familia me ha apoyado para mis estudios. A mi papá, en paz de descanse, José González, que su vida es un gran ejemplo para la mía. A mi mamá, María Lorenza González Luna, que su cariño siempre acompañó cada etapa de mi formación y actualmente sus acciones me manifiestan que siempre contaré con mis padres. A mis hermanos, José Mauricio, Verónica y Moisés, quienes siempre están dispuestos a ayudarme cuando así lo requiera. A Ana Sofía, quien ha dado una gran alegría a esta familia.

Agradezo a la coordinación del posgrado, al Dr. Jorge Linares Salgado, al Dr.

Axel Barceló Aspeitia, a la Lic. Elizabeth Barajas García, a la Dra. Fabiola Villela con los que siempre pude contar para resolver cualquier problema que se me presentó en la maestría. Gracias por todo su apoyo, orientación y amabilidad. En este sentido agradezco también la siempre amable orientación de Noemí Vidal Reyes y de manera muy especial a la Lic. Marisela López Pérez, por su enorme eficiencia y su paciencia de escuchar y resolver mis dudas.

¡Muchas gracias a todos!

Así como los pájaros vuelan, los delfines nadan, el hombre hace geometría.

Dr. Alberto Barajas Celis

Índice general

Introducción

Thomas Kuhn, físico y filósofo de la ciencia, propone en su libro *The Structure of Scientific Revolutions* un modelo de cambio en el quehacer científico. Desde la fecha de su publicación (1962) dicho modelo ha sido estudiado con relación a distintas ramas del quehacer científico, siendo las matemáticas una de las menos favorecidas. En este trabajo me propongo examinar la viabilidad del modelo kuhniano para la construcción del continuo numérico durante el siglo XIX.

He considerado como punto central para el análisis que aquí concierne - respecto al cambio producido en la matemática a raíz de una nueva concepción de las ideas en torno al continuo real - las reflexiones que hace Kuhn en su epílogo de 1969 acerca su concepto de paradigma. Haciendo precisiones en torno a la noción de paradigma, Kuhn introduce una nueva noción, la de *matriz disciplinar*. Afirma que los compromisos de grupo que en su texto original consideraba paradigmas, son constituyentes de la matriz disciplinar y en cuanto tales forman un todo y funcionan juntos[1]. Así, este trabajo se desarrolla añadiendo este nuevo componente que introduce Kuhn al análisis del desarrollo de la ciencia.

Conforme a Kuhn, serán las nociones en torno al continuo numérico lo que determina la *matriz disciplinar* de este trabajo. Y básicamente nos interesa el período del desarrollo de la matemática a partir de la creación del cálculo de Newton y Leibniz. Al período subsiguiente lo estableceremos como período de ciencia normal. Posteriormente se determinará la viabilidad de la existencia de una etapa de crisis, así como de un período de transición hacia una nueva perspectiva, de acuerdo al análisis de Kuhn. Finalmente, se presentarán características que sustentan la afirmación de que el cambio conceptual en torno a la noción de continuo numérico, confiriéndole a ésta un carácter conjuntista, produjo efectivamente lo que de acuerdo con Kuhn sería una revolución científica.

En el capítulo correspondiente al continuo numérico, previo a las nociones conjuntistas, he tomado elementos de varios autores para describir el período que llamamos período de ciencia normal, así como para el período de transición. En el capítulo 3, en el que se expone parte del trabajo de Dedekind, se hace un análisis directo de su obra *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, tomando la versión traducida al inglés por Wooster Woodruff Beman [7], aunque eventualmente se tomó en cuenta la versión del alemán dado que la traducción al

[1] Ver Capítulo 1.

inglés tiene algunos errores[2].

Es muy importante tener claro que las directrices históricas de este trabajo están encaminadas, por un lado, a mostrar la manera en que el desarrollo de ciertas nociones relacionadas con el continuo numérico - como por ejemplo, el concepto de límite, la convergencia de series y la continuidad - surge por cuestiones concernientes a un intento por justificar la aplicabilidad de la matemática a los fenómenos físicos. Cabe mencionar que estas nociones de convergencia y continuidad se establecieron como una necesidad de hallar un nuevo fundamento para la aritmética. Por otro lado, se pretende mostrar un panorama general de la forma como se fueron transformando los sistemas numéricos en teorías que se articulan en torno de nuestro paradigma. Es decir, en el desarrollo del álgebra, la geometría y el cálculo se presentó la necesidad de expandir los sistemas numéricos. Esto constituye parte de lo que en términos de Kuhn es el proceso de resolución del rompecabezas determinado por nuestro paradigma.

Para quienes no estén familiarizados con la propuesta de Kuhn en *La Estructura de la Revoluciones Científicas*, en el capítulo 1 se halla una síntesis del libro.

[2] Véase por ejemplo, en el parágrafo 7, (páginas 26 y 27), se han confundido los subíndices al menos en cuatro ocasiones.

Capítulo 1

La Estructura de las Revoluciones Científicas en Kuhn 1962, 1969

A continuación expondré los elementos que están presentes en la propuesta de Kuhn para la descripción del desarrollo de las teorías científicas. Una vez introducidos en el ámbito de la propuesta kuhneana, veremos en qué medida ésta puede aplicarse al tema que nos concierne.

Una de las principales características de la propuesta de Kuhn es la llamada perspectiva diacrónica del desarrollo de la ciencia. De modo muy general podemos decir que las nociones fundamentales de su propuesta son las de *ciencia normal*, paradigma, rompecabezas, ciencia extraordinaria, período de transición, revolución científica.

Para Kuhn gran parte del desarrollo de la ciencia se produce en una etapa que él caracteriza como período de ciencia normal. El periodo de desarrollo de la ciencia que caracteriza como ciencia normal se logra cuando se ha establecido un paradigma. El término paradigma lo utiliza de distintas maneras, pero básicamente se refiere a los compromisos teóricos, ontológicos, metodológicos, etc., en torno a los cuales se conforma un grupo de científicos. Comenta que en ausencia de algún paradigma o candidato a paradigma, es probable que todos los hechos parezcan igualmente relevantes, es decir que, en ausencia de una razón particular para buscar algún tipo de información, con la recolección de hechos se tiene solamente una multitud de datos al alcance de la mano, que son accesibles por la experiencia y la observación. Afirma que si bien este tipo de recolección de hechos ha resultado esencial para la gestación de muchas ciencias importantes, es dudoso que se pueda calificar de científicas a las obras resultantes. Para nuestro autor son de carácter relevante las creencias teóricas y metodológicas a través de las cuales es posible la selección, la evaluación y la crítica. De manera que un punto importante en cuanto al papel que juega el cuerpo de creencias en la recolección de hechos, es precisamente la distinción marcada a raíz de la carga teórica y la ausencia de ésta, entre fenómeno y hecho (respectivamente). Kuhn plantea la posibilidad de que el cuerpo de creencias esté ya implícito en la colección de hechos, en cuyo caso, afirma, disponemos más que de "meros hechos". En efecto, la carga teórica permite considerar como fenómeno lo que sin ella es considerado como solamente un hecho. Nuestro autor considera que en los primeros estadios de desarrollo de una ciencia, suele suceder que distintas personas describan e interpreten de modo diferente el mismo rango de fenómenos, aunque usualmente no se trate del mismo rango de fenómenos concretos. Pero tal divergencia acaba desapareciendo, lo que es de acuerdo a Kuhn una distinción de la ciencia respecto a otros campos de conocimiento. Su desaparición se debe al triunfo de una de las escuelas preparadigmáticas. El período preparadigmático está marcado, de acuerdo con nuestro autor, por frecuentes debates acerca de métodos, problemas y normas de solución legítimas, que sirven para definir escuelas más que para producir acuerdos. Este tipo de debates no existen en el período de ciencia normal y reaparecen en la etapa en que se comienza a gestar lo que Kuhn considera una revolución científica, períodos en que los paradigmas primero son atacados y luego sometidos a cambio y en los que suele ser de importancia la búsqueda de reglas explícitas.

Como ya mencioné anteriormente Kuhn se refiere a paradigma como aquéllos compromisos teóricos, metodológicos, etc., en torno a los cuales se conforma un grupo de científicos, lo cual involucra el planteamiento de todo tipo de problemas a resolver que son a la vez teóricos y empíricos. Así mismo bajo este término encontramos subsumidas las nociones de leyes, teorías, aplicación e instrumentación. Además para nuestro autor, un paradigma es algo que debe articularse y especificarse ulteriormente en condiciones nuevas o más rigurosas[1]. El establecimiento de un paradigma marca el establecimiento del período de lo que Kuhn llama ciencia normal. Esto es, la ciencia normal consiste en la articulación de fenómenos y teorías suministrados por el paradigma, así como en utilizar la teoría existente para producir información fáctica, y en manipularla para confrontarla con los experimentos, los cuales no son necesariamente de gran valor, ejemplo de ello son los resultados experimentales que no aportan más que la confirmación de lo que ya se esperaba por ser predicho desde alguna teoría del paradigma. Es desde un paradigma que se forman las nuevas generaciones de investigadores.

De manera que el período de ciencia normal se caracteriza como aquél en el que la investigación se basa firmemente en uno o más logros científicos del pasado que alguna comunidad científica reconoce durante algún tiempo, y aunque no considera el desarrollo de la ciencia como un proceso acumulativo, los períodos de ciencia normal sí cumplen con esta característica, es decir, como períodos de acumulación de conocimiento, de ampliación continua de las teorías que determinan el o los paradigmas característico de este período, mostrando así su alcance e intentando lograr una mayor precisión del conocimiento científico. Es un período que Kuhn caracteriza de manera metafórica como conformado de actividades dedicadas a resolver rompecabezas. Además, en este período rara vez se producen discrepancias sobre cuestiones fundamentales.

[1]Si lo hace en condiciones más rigurosas, este proceso es parte de lo que por analogía puede decirse es la resolución del rompecabezas; si lo hace en condiciones nuevas, la idea subyacente es acerca de cambio revolucionario.

Resolver un problema de investigación normal, para Kuhn, es lograr lo previsto de un modo nuevo, lo que exige la solución de todo tipo de rompecabezas complejos tanto instrumentales como conceptuales y matemáticos.

La producción en la ciencia normal está basada en la determinación de los aspectos o problemas significativos, el acoplamiento de los aspectos[2] con la teoría, y la articulación de la teoría. La mayoría de los problemas abordados por los científicos cae, según Kuhn, en alguna de estas tres categorías. Así mismo distingue tres núcleos de investigación fáctica, a saber, los hechos que ha mostrado el paradigma son reveladores de la naturaleza de las cosas, hechos que aunque carezcan de interés, se pueden comparar con predicciones de la teoría, y el trabajo empírico emprendido para articular la teoría paradigmática resolviendo algunas ambigüedades y permitiendo la resolución de problemas.

Por otra parte, los rompecabezas constituyen esa categoría especial de problemas que pueden servir para poner a prueba el ingenio y la habilidad en dar con la solución. Para contar como rompecabezas un problema además de caracterizarse por tener solución segura, debe ser analizado desde un contexto normativo que limite la naturaleza de las soluciones aceptables y de los pasos mediante los que han de obtenerse.

[2]En lugar de aspectos Kuhn se refiere a hechos. Se ha decidido cambiar el término debido a que el análisis que se hará no será para una ciencia experimental. La analogía entre hecho y aspecto está determinada en tanto que de acuerdo a Kuhn, los hechos son considerados fenómenos cuando su observación conlleva una carga teórica. De manera análoga algunos aspectos en la matemática fueron concebidos dependiendo la teoría subyacente desde la cual dichos aspectos emergieron.

Un paradigma aísla a la comunidad de los problemas que no son reductibles a la forma de rompecabezas debido a que no se pueden plantear en términos de las herramientas conceptuales e instrumentales que plantea el paradigma. Recordemos que Kuhn considera que una de las cosas que adquiere una comunidad científica junto con un paradigma es un criterio para elegir problemas através de compromisos conceptuales, teóricos e instrumentales que resultan ser de carácter metafísico y metodológico. Los compromisos metafísicos u ontológicos corresponden a las entidades que son objeto de estudio e investigación, y los metodológicos determinan qué aspecto deben ofrecer las leyes y las explicaciones fundamentales. La existencia de esta poderosa red de compromisos conceptuales, teóricos, instrumentales, y metodológicos es la fuente principal de la metáfora que relaciona la ciencia normal con la resolución de rompecabezas. Kuhn hace énfasis que el período de ciencia normal, pese a ser una actividad altamente determinada, no tiene por qué estar completamente determinada por reglas.

La determinación de los paradigmas compartidos es descubrir cuáles son los elementos aislables, implícitos o explícitos que los miembros de una comunidad pudieran haber abstraído de sus paradigmas más globales[3], empleándolos como reglas de investigación. También comenta[4] que los miembros de una comunidad pueden estar de acuerdo en la identificación de un paradigma sin

[3]Kuhn distingue como paradigmas globales a ramas de la ciencia como, la química, la física, la biología, etc., de los paradigmas que están mejor delimitados por las distintas especialidades de las que hoy en día nos es posible hablar (por ejemplo la química orgánica o la química de las proteínas).

[4]Véase [15, Kuhn, p.119].

estar de acuerdo o ser conscientes acerca de una plena interpretación o racionalización suya. Lo que tienen en común las diversas técnicas y problemas que surgen dentro de una única tradición de ciencia normal, no es que satisfagan un conjunto explícito y plenamente identificable de reglas, sino que deben relacionarse por semejanza y modelado con alguna parte del corpus científico que la comunidad en cuestión reconoce como uno de sus logros establecidos. Los científicos trabajan a partir de modelos, adquiridos a través de la educación y de la bibliografía estudiada. Además Kuhn hace énfasis en que una teoría novedosa se anuncia siempre junto con sus aplicaciones a algún abanico concreto de fenómenos. Otra de las características que confiere Kuhn al trabajo de una comunidad científica dentro de lo que llama período de ciencia normal es que, el trabajo en un mismo campo puede involucrar diversos paradigmas[5]. También señala que un mismo paradigma puede determinar diversas subespecialidades por lo que sucederá que cambios revolucionarios tengan lugar sólo para una cierta subespecialidad de una determinado campo disciplinar[6].

Entonces Kuhn caracteriza la ciencia normal como la actividad de resolver rompecabezas, como una empresa acumulativa cuya finalidad es la ampliación continua del alcance y precisión del conocimiento científico. En esta etapa no

[5]En el parágrafo 1 de su epílogo de 1969, señala que *hay escuelas, es decir, comunidades, que abordan el mismo tema desde perspectivas incompatibles...siempre están en competencia y ésta normalmente termina enseguida.*

[6]De manera que un cambio revolucionario en, por ejemplo, la física de partículas, puede pasar desapercibido para físicos cuya en cuya subespecialidad no tenga tanto impacto la física de partículas.

se pretende encontrar novedades que vayan contra lo que paradigmáticamente se ha establecido de hechos o de teorías, incluso es exitosa cuando no las encuentra. Sin embargo, es una característica que en el proceso de articulación de teorías en un paradigma, se produzcan cambios, pues es gracias a eso que surgen las novedades empíricas y teóricas fundamentales.

Se tiene entonces, de acuerdo con Kuhn, que un descubrimiento comienza tomando conciencia de una anomalía, es decir, reconociendo que la naturaleza ha violado de algún modo las expectativas inducidas por el paradigma que gobierna la ciencia normal. Prosigue luego con una exploración más o menos amplia del área de la anomalía y se cierra sólo cuando la teoría paradigmática se ha ajustado para que lo anómalo se vuelva algo esperado. La asimilación de un nuevo tipo de hecho exige un ajuste de la teoría y hasta que no se termina dicho ajuste, hasta que el científico no aprenda a ver la naturaleza de un modo distinto, el hecho nuevo no es un hecho científico. Para Kuhn descubrir un nuevo tipo de fenómeno es un suceso complejo que conlleva reconocer que algo es y qué es (observación y conceptualización). Agrega que si tanto la observación como la conceptualización del hecho a una teoría, se encuentran inseparablemente unidos en el descubrimiento, entonces el descubrimiento es un proceso que ha de llevar tiempo, que sólo cuando todas las categorías conceptuales pertinentes están dispuestas por adelantado, descubrir que algo es y descubrir qué es podría producirse sin dificultad. Otro factor importante en el proceso de descubrimiento es la detección de una anomalía, es decir, de un fenómeno para el que el paradigma no ha preparado al investigador, de modo que la percepción de que algo va mal es el preludio del descubrimiento.

Otro factor importante en el proceso de descubrimiento, es con respecto a los instrumentos que como ya hemos mencionado, son uno de los componentes de un paradigma. Kuhn plantea que de manera consciente o inconsciente, la decisión de emplear un equipo experimental particular y usarlo de modo determinado conlleva la suposición de que sólo se producirán cierto tipo de situaciones. Que existen condicionantes instrumentales además de teóricas que a menudo han desempeñado una función decisiva en el desarrollo científico. Esto podría cuestionar el uso de los instrumentos bajo las expectativas planteadas por el paradigma. De manera que inevitablemente restringen el campo fenomenológico de la investigación científica. Sin embargo, Kuhn dice que los procedimientos y las aplicaciones paradigmáticas son tan necesarios para la ciencia como las leyes y las teorías paradigmáticas y que éstos poseen los mismos efectos. Kuhn observa que durante los períodos que llama preparadigmáticos como durante las crisis que conducen a grandes cambios paradigmáticos los científicos desarrollan muchas teorías especulativas e inarticuladas que pueden indicar un camino hacia un descubrimiento. Y que sólo en la medida en que el experimento y la teoría tentativa se articulan surge el descubrimiento y entonces la teoría se convierte en un paradigma. De manera que los descubrimientos se caracterizan, de acuerdo con Kuhn, por una previa consciencia de la presencia de una anomalía, por el surgimiento gradual y simultáneo del reconocimiento tanto observacional como conceptual, y el consiguiente cambio de categorías y procedimientos paradigmáticos, lo cual sucede con la oposición de algunos de los miembros de la comunidad científica del campo en el que esto sucede. Incluso, de acuerdo con Kuhn, estas mismas características están presentes también en el proceso perceptivo. Con respecto a este tipo de situaciones, también puede suceder, de acuerdo con Kuhn, que inicialmente sólo se experimenta lo previsto y usual incluso en las mismas circunstancias en las que más tarde se observará la anomalía y que no obstante, una mayor familiaridad produce la conciencia de que algo está o ha estado mal. Esta conciencia de la anomalía inaugura un período en el que las categorías conceptuales se ajustan hasta que lo inicialmente anómalo se convierta en lo previsto. Cuando esto sucede, no se produce un descubrimiento.

En el desarrollo de cualquier ciencia, dice Kuhn que lo usual es que se considere que el paradigma en vigor explica con éxito la mayoría de las observaciones y experimentos fácilmente accesibles a quienes practican dicha ciencia. También surge la necesidad de construir equipo, así como de desarrollar vocabulario, habilidades y un refinamiento de los conceptos. Que esta profesionalización conduce, por un lado, a una inmensa restricción de la visión del científico y a una considerable oposición al cambio de paradigma. Se produce entonces una precisión de la correspondencia entre teoría y observación que no se podría obtener de otro modo. Agrega que sin el equipo especial construido fundamentalmente para las funciones previstas, no se darían los resultados que en última instancia llevan a novedades. Y que incluso, aunque exista el equipo, la novedad sólo se presenta a la persona que, sabiendo con precisión qué esperar, es capaz de reconocer que algo ha salido mal. Cuanto más preciso y mayor alcance tenga dicho paradigma, será un indicador tanto más sensible de la anomalía, siendo así una ocasión para el cambio de paradigma. Al asegurar que el paradigma no se rinde con demasiada facilidad, la oposición garantiza que los científicos no se distraigan con cualquier cosa y que las anomalías que conduzcan a un cambio de paradigma, penetren hasta el núcleo del conocimiento existente, de manera que al resolverse éstas desde un paradigma inconmensurable, se reestructure el conocimiento hasta entonces avalado por la comunidad científica.

Por su parte, los descubrimientos causan o contribuyen a un cambio de paradigma. Una vez asimilados los descubrimientos, los científicos son capaces de explicar un abanico más amplio de fenómenos naturales o de explicar con mayor precisión algunos de los fenómenos ya conocidos. Estas ganancias, en ocasiones, se consiguen a cambio de rechazar algunas creencias o procedimientos previamente establecidos, a la vez que se suelen sustituir ciertos componentes del paradigma anterior por otros distintos. Sin embargo, Kuhn señala que los descubrimientos no son las únicas fuentes de los cambios paradigmáticos. También se producen por la invención de teorías nuevas.

A partir de la emergencia de una anomalía, es decir, de un fenómeno que no se puede explicar desde los lineamientos teóricos del paradigma en vigor, la proliferación de diferentes versiones de una teoría es un síntoma de crisis y para Kuhn, el surgimiento de teorías nuevas se ve usualmente precedido por un período de profunda inseguridad profesional debido a que éste exige una crítica del viejo paradigma, así como grandes cambios en los problemas y técnicas de la ciencia normal. Sin embargo, de acuerdo con Kuhn sólo surge una teoría nueva tras un pronunciado fallo en la actividad normal de resolución de problemas. La teoría nueva parece dar respuesta directa a la crisis. A su vez, y dado que nuestro autor considera que no se puede concebir ningún experimento sin algún tipo de teoría, para él es durante la crisis que el científico tratará constantemente de engendrar teorías especulativas que de tener éxito conducirán a la construcción de un nuevo paradigma.

Agrega que los filósofos de la ciencia han demostrado repetidamente que una colección de datos puede ser explicada siempre por más de una construcción teórica. Que la historia de la ciencia indica que en los primeros estadios del desarrollo de un nuevo paradigma esto suele suceder así. Pero sólo sucede en la etapa preparadigmática del desarrollo de alguna ciencia. En la medida en que las herramientas suministradas por el paradigma continúan demostrando su capacidad de resolver los problemas que define, la ciencia penetra con profundidad por la utilización confiada de dichas herramientas. El significado de las crisis es que ha llegado el momento de cambiar ya sea de herramientas, o bien de conceptos, de leyes generales, de explicaciones de índole ontológico, de valores, etc[7]. Cuando se presentan anomalías, éstas pueden ser tanto experimentales como teóricas.

[7]El cambio puede suceder en uno o más de los componentes mencionados.

Sin embargo, una teoría científica sólo se considerará inválida si hay disponible un candidato alternativo para ocupar su lugar, esto es, que resuelva los problemas que la primera no puede resolver. La decisión de rechazar un paradigma conlleva siempre simultáneamente la decisión de aceptar otro. Una anomalía lo máximo que puede hacer es crear una crisis. Cuando se produce una crisis, se relajan las reglas de resolución normal de problemas. La ciencia normal debe esforzarse continuamente por producir un acuerdo más estrecho entre teoría y hechos. Si una anomalía ha de despertar una crisis, usualmente ha de ser algo más que una anomalía. Pero, ¿qué hace que una anomalía parezca merecer un examen colectivo? Kuhn comenta al respecto que no hay una respuesta plenamente general. Afirma que en ocasiones una anomalía pone claramente en tela de juicio algunas generalizaciones explícitas y fundamentales del paradigma y que también puede suceder que un problema adquiera importancia distinta tras la evolución de las técnicas desarrolladas en el paradigma. Cuando se considera que una anomalía es algo más que otro rompecabezas de la ciencia normal, ha comenzado la transición hacia la crisis y la ciencia extraordinaria. Agrega que una fuente aún más importante de cambio es la naturaleza divergente de numerosas soluciones parciales al problema y que a través de esta proliferación de articulaciones divergentes que se irán considerando cada vez más ad hoc, las reglas de la ciencia normal se van diluyendo y se pondrán en tela de juicio lo que antes eran las soluciones normales a problemas.

Kuhn afirma que todas las crisis comienzan con el desdibujamiento de un paradigma y la consiguiente relajación de las normas de la investigación normal. Que la investigación durante una crisis se parece mucho a la investigación durante el período preparadigmático, excepto que en el primer caso el núcleo de la discrepancia es menor y está definido con mayor claridad. Agrega que todas las crisis se cierran de tres maneras posibles, a saber, que en ocasiones la ciencia normal termina demostrando ser capaz de manejar el problema que provocó la crisis; en otras ocasiones el problema resiste incluso nuevos enfoques y entonces los científicos pueden concluir de que no se hallará una solución en el estado actual de su campo, de manera que el problema se archiva para una futura generación con herramientas más desarrolladas; finalmente, también puede suceder que la crisis termine con el surgimiento de un nuevo candidato a paradigma y con la consiguiente controversia por su aceptación.

Esta transición de un paradigma en crisis a uno nuevo del que pueda surgir una nueva tradición de ciencia normal no es un proceso acumulativo logrado mediante la articulación o extensión del paradigma viejo. Más bien es, de acuerdo a Kuhn, una reconstrucción del campo a partir de nuevos fundamentos, reconstrucción que cambia algunas de las generalizaciones teóricas más elementales del campo, así como muchos de sus métodos y aplicaciones ejemplares. No obstante, durante el período de transición habrá un solapamiento considerable pero nunca total entre los problemas que se pueden resolver con el viejo y con el nuevo paradigma, pero también habrá una diferencia en los modos de solucionarlos. Y una vez consumada la transición, la profesión habrá cambiado su visión del campo, sus métodos y sus objetivos. Este es un proceso que entraña el manejo del mismo haz de datos que antes, pero colocándolos en un nuevo sistema de relaciones mutuas al ponerlos en un marco distinto . Kuhn hace la analogía con un cambio en la Gestalt visual.

De manera que, para Kuhn, la creación de una nueva teoría rompe con una tradición de práctica científica e introduce otra nueva desarrollada con distintas reglas y en el seno de un universo del discurso diferente, lo más probable es que se produzca únicamente cuando se considera que la primera tradición se ha extraviado de manera lamentable. También Kuhn considera que suele suceder que surja un paradigma antes de que el desarrollo de una crisis haya ido muy lejos o antes de que haya sido identificada como tal.

La aceptación de un nuevo paradigma por parte de una comunidad se gesta desde una revolución científica. La proliferación de articulaciones competitivas, el deseo de ensayar cualquier cosa, la expresión de descontento explícito, el recurso a la filosofía y al debate sobre cuestiones fundamentales, son todos ellos síntomas de la transición de la ciencia normal a la investigación extraordinaria.

De manera que Kuhn considera como revoluciones científicas a aquéllos episodios de desarrollo no acumulativo en los que un paradigma antiguo se ve sustituido por otro nuevo incompatible con él. Además, las revoluciones científicas se inician por una sensación creciente (y muchas veces restringida a una subespecialidad) de que el paradigma existente ha dejado de funcionar adecuadamente en la exploración de un aspecto de la naturaleza hacia el que había conducido previamente. Tales revoluciones científicas sólo tienen que parecer revolucionarias a quienes practican la especialidad en cuestión. Para los demás pueden parecer elementos normales del proceso de desarrollo.

La elección entre paradigmas rivales resulta ser una elección entre modos incompatibles de vida comunitaria, por lo que la elección no está determinada ni puede estarlo tan sólo por simples procedimientos de evaluación característicos de la ciencia normal, pues éstos dependen de un paradigma particular, el cual está en entredicho. Cuando los paradigmas entran en el debate acerca de la elección paradigmática, su función es necesariamente circular. Cada grupo utiliza su propio paradigma para argumentar en defensa de él. Sin embargo, la circularidad resultante no hace que los argumentos sean incorrectos, sea cual sea su fuerza, la naturaleza del argumento circular es la de persuadir. No puede ser lógica o incluso probabilísticamente convincente para quienes se niegan a entrar en el círculo. Las premisas y los valores compartidos por las dos partes no son lo bastante generales para ello. De modo que en la elección de un paradigma no hay una norma superior al consenso de la comunidad pertinente. Así que de acuerdo a Kuhn, para descubrir cómo terminan las revoluciones científicas, hay que examinar no sólo el impacto de la naturaleza y de la lógica, sino también las técnicas de argumentación persuasiva que resultan eficaces dentro de los grupos de científicos. Para descubrir por qué el resultado de la elección de un paradigma nunca se puede decidir inequívocamente sólo mediante la lógica y la experimentación, habrá que examinar la naturaleza de las diferencias que separan a los partidarios de un paradigma tradicional de sus sucesores revolucionarios. Kuhn afirma que si es que existen razones para que la asimilación de un nuevo tipo de fenómeno o de una nueva teoría científica hayan de exigir el rechazo de un paradigma previo éstas no derivan de la estructura lógica del conocimiento científico ya que, podría surgir un nuevo fenómeno sin chocar destructivamente con ninguna parte de la práctica científica pasada. Y afirma que, del mismo modo, una teoría nueva no tiene por qué entrar en conflicto con ninguna de sus predecesoras ya que podría ocuparse exclusivamente de fenómenos antes desconocidos o ser una teoría de nivel superior al de las conocidas anteriormente, que ligaría a todo un grupo de teorías de nivel inferior sin modificar ninguna de ellas de modo sustancial. Se pueden imaginar otras relaciones de compatibilidad entre las teorías viejas y las nuevas. Pero si siempre fuese así, dice Kuhn, entonces el desarrollo científico sería acumulativo y los nuevos tipos de fenómenos se limitarían a mostrar la existencia de orden en un aspecto de la naturaleza en el que antes no se había visto. En la evolución de la ciencia, el conocimiento nuevo sustituiría a la ignorancia más bien que al conocimiento incompatible de otro tipo.

Tras el denominado período preparadigmático, dice nuestro autor que la asimilación de todas las teorías nuevas y de casi todos los tipos nuevos de fenómenos ha exigido la destrucción de un paradigma previo y el consiguiente conflicto entre escuelas rivales de pensamiento científico. La adquisición acumulativa de novedades no previstas resulta ser una excepción casi inexistente a lo que es la regla en el desarrollo científico. En cambio, la investigación normal, que es acumulativa, debe su éxito a la capacidad de los científicos para seleccionar sistemáticamente problemas que se pueden resolver con técnicas conceptuales e instrumentales próximas a las ya existentes. No obstante, la persona que trata de resolver un problema definido por las técnicas y el conocimiento existentes no se limita a buscar por ahí. Sabe qué es lo que quiere conseguir y diseña sus instrumentos y orienta sus pensamientos de acuerdo con ello. Una novedad inesperada, un descubrimiento nuevo, sólo podrá surgir en la medida en que sus expectativas acerca de la naturaleza y su instrumental resulten estar equivocados. Así ha de haber un conflicto entre el paradigma que revela la anomalía y el que más tarde vuelve legal dicha anomalía. Kuhn afirma que no hay otro modo efectivo con el que se puedan generar los descubrimientos. Además suele suceder que nuevas leyes no son el resultado de nuevos experimentos sino del intento de reinterpretar las observaciones.

Así que encontramos que Kuhn distingue tres tipos de fenómenos que dan pie al desarrollo de una teoría nueva. El primero consta de fenómenos ya bien explicados por paradigmas existentes, los cuales rara vez suministran un motivo o punto de partida para la construcción teórica, y cuando lo hacen, las teorías resultantes rara vez se aceptan, dado que la naturaleza no ofrece fundamentos para la discriminación. Una segunda clase de fenómenos consta de aquellos cuya naturaleza está marcada por el paradigma existente, aunque los detalles sólo se puedan comprender mediante una ulterior articulación teórica, es decir, el segundo tipo de fenómenos son aquéllos que requieren de una articulación teórica o de paradigmas. Estos son los fenómenos sobre los que investigan los científicos la mayor parte del tiempo; pero dicha investigación se dirige a la articulación de los paradigmas existentes más bien que a la invención de otros nuevos. Sólo cuando fallan estos intentos de articulación, se topan los científicos con el tercer tipo de fenómenos, las anomalías reconocidas, cuyo rasgo característico es su obstinada negativa a dejarse asimilar por el paradigma existente. Sólo este último tipo da lugar a nuevas teorías. Los paradigmas otorgan a todos los fenómenos, excepto a las anomalías, un lugar en el campo de visión del científico condicionado por la teoría, esto es, los hechos son percibidos desde un paradigma con la carga conceptual suministrada por la teoría. Pero si se formulan nuevas teorías para resolver las anomalías en la relación entre una teoría existente y la naturaleza, entonces la nueva teoría de éxito ha de ofrecer en algún lugar predicciones que sean distintas de las que se derivan de su predecesora. Tal diferencia no podría darse si ambas fueran lógicamente compatibles. En el proceso de su asimilación, la segunda ha de desplazar a la primera. Resulta difícil concebir cómo podrían surgir las teorías nuevas sin estos cambios destructivos en las creencias acerca de la naturaleza. Kuhn deja ver que también puede suceder una adecuación de la vieja teoría a partir de la nueva (se tiene simplemente una adecuación en ciertas aplicaciones). Encontramos así una característica limitativa de las teorías. Para salvar las teorías ha de restringirse su rango de aplicación a aquéllos fenómenos y a aquel nivel de precisión observacional con los que ya tratan las pruebas experimentales disponibles. Y que si las restricciones positivas sobre el rango de la aplicabilidad legítima de la teoría se tomasen al pie de la letra, dejarían de funcionar los mecanismos que le dicen a la comunidad científica qué problemas pueden conducir a un cambio fundamental. Otra de las cuestiones importantes en los cambios de paradigma que presenta Kuhn, es con respecto a las variables y parámetros de una teoría. Al respecto dice que éstos pueden nombrar a los mismos objetos pero que sus referentes (físicos) pueden no ser idénticos. Pues en el paso al límite no sólo han cambiado las formas de las leyes, sino que se han de alterar al mismo tiempo los elementos estructurales fundamentales de que se compone el universo al que se aplican. Agrega que por más que una teoría pasada de moda pueda presentarse como un caso especial de su sucesora actual, es preciso transformarla para tal fin, y que la transformación sólo puede llevarse a cabo con la guía explícita de la teoría más reciente.

Los paradigmas sucesivos nos dicen cosas distintas acerca de la población del universo, así como acerca del comportamiento de esa población. Los paradigmas difieren en el contenido, ya que no sólo se dirigen a la naturaleza, sino que también inciden sobre la ciencia que los produce. Son la fuente de los métodos, los problemas de campo y de las normas de solución aceptadas por cualquier comunidad científica madura en cualquier momento dado. Como resultado de ello, la recepción de un nuevo paradigma exige la redefinición de la ciencia correspondiente. En el cambio, algunos de los viejos problemas pueden verse relegados a otra ciencia o pueden no ser considerados problemas. Otros, que antes ni existían o eran triviales, pueden convertirse con el nuevo paradigma en el arquetipo mismo de los logros científicos importantes. Y a medida que cambian los problemas, cambian también las normas que distinguen una solución científica real de una mera especulación metafísica. La tradición científica normal que surge de una revolución científica no sólo es incompatible con la anterior, sino que resulta inconmensurable.

Puede considerarse una transformación conceptual como el prototipo de la reorientación revolucionaria en las ciencias, esto es, el carácter de la revolución científica como un desplazamiento de la red conceptual a través de la cual el científico ve el mundo. En su discurso Kuhn deja ver que una nueva forma de ver los fenómenos implica un nuevo enfoque para analizar lo que a su vez puede implicar el surgimiento de nuevos conceptos y nociones. Y que los cambios en las normas que rigen los problemas, conceptos y explicaciones permisibles a su vez, también pueden transformar la ciencia, en este proceso también está presente un reconocimiento de objetos. Cambio de paradigma conlleva consigo una nueva búsqueda de explicaciones. Kuhn también confiere al paradigma el atributo de ser vehículo de las teorías científicas. En este aspecto, funcionan indicándole al científico las entidades que la naturaleza tiene o deja de tener, así como de qué manera se comportan dichas entidades. Tal información suministra un mapa cuyos detalles dilucida la investigación científica madura. Tal mapa es esencial ya que la naturaleza es demasiado compleja y diversa para poder ser explorada de manera aleatoria. Kuhn comenta que los paradigmas además de suministrar a los científicos un mapa, también proporcionan las directrices esenciales para levantar mapas. Al aprender un paradigma, el científico aprende a la vez teorías, métodos y normas. Así que cuando cambian los paradigmas, también se suelen dar cambios en los criterios que determinan la legitimidad tanto de los problemas como de las soluciones propuestas.

Kuhn hace énfasis en que ningún paradigma resuelve jamás todos los problemas que define, y dado que no hay dos paradigmas que dejen sin resolver exactamente los mismos problemas, los debates entre los paradigmas siempre entrañan la cuestión de qué problema resulta más importante haber resuelto.

Una cuestión que señala Kuhn es que los paradigmas son constitutivos tanto de la ciencia como de la naturaleza.

Así que guiados por un nuevo paradigma, los científicos adoptan nuevos instrumentos, miran en lugares nuevos y lo que Kuhn destaca como importante es que durante las revoluciones ven cosas nuevas y diferentes cuando miran con instrumentos familiares en lugares en los que ya antes habían mirado. De acuerdo con Kuhn cambios de paradigma provocan que los científicos vean de un modo distinto el mundo al que se aplica su investigación. En la medida en que su único acceso a dicho mundo es a través de lo que ven y hacen, es posible afirmar que tras una revolución científica los científicos responden a un mundo distinto, su percepción ha de reeducarse, comenta Kuhn que ha de ver una nueva Gestalt, que el mundo de su investigación parecerá ser aquí y allá inconmensurable con aquél que habitaba antes. Agrega que los recursos de observación de científicos son sus ojos e instrumentos. Además, observa que un cambio en la percepción prepara al científico para el descubrimiento de nuevos fenómenos. Por otro lado, también señala que pueden haber dos observaciones distintas y precisas de un mismo fenómeno.

Considera errónea la postura de algunas personas al afirmar que lo que cambia con un paradigma es tan sólo la interpretación que hace el científico de las observaciones, las cuales por sí mismas están fijadas de una vez por todas por la naturaleza del medio y del aparato perceptivo. Parece que aquí no se trata de un simple cambio de interpretación, sino haciendo la analogía con el cambio de Gestalt, la diferencia es que en este último la persona puede ir de una imagen a otra, mientras que con el cambio científico el mundo se le aparece al científico de manera diferente y Kuhn comenta que estas transformaciones son irreversibles. Afirma que, aunque el mundo no cambió con un cambio de paradigma, tras él, el científico trabaja en un mundo distinto, que lo que ocurre tras una revolución científica no es plenamente reductible a un reinterpretación de datos aislados y estables. Señala que los datos no son inequívocamente estables, sino que los datos que los científicos recogen son ellos mismos distintos. En virtud de un paradigma el científico sabe qué es un dato (sabe distinguir lo que son los datos), qué instrumentos habrían de utilizarse para obtenerlo, y qué conceptos eran pertinentes para interpretarlo. La empresa interpretativa tan sólo puede articular un paradigma, no corregirlo. Kuhn afirma que lo que llama paradigmas no pueden ser corregidos por la ciencia normal, la cual en última instancia sólo conduce al reconocimiento de anomalías y a la crisis.

Respecto a las interpretaciones también encontramos en Kuhn la idea de que ningún lenguaje puede producir informes meramente neutrales y objetivos sobre "lo dado".

Kuhn dice que, lo que él llama ciencia posrevolucionaria incluye inevitablemente gran parte de las mismas manipulaciones, realizadas con los mismos instrumentos y descritos en los mismos términos que empleaba su predecesora prerrevolucionaria y que en el caso que se hayan transformado tales manipulaciones el cambio debe residir o en la relación con el paradigma o en sus resultados concretos. Comenta además que a veces en su nueva función las viejas manipulaciones dan resultados concretos distintos.

La contrastación del paradigma sólo se da después de que un fracaso persistente a la hora de resolver un rompecabezas haya dado lugar a una crisis y de que el sentimiento de crisis haya hecho surgir un candidato a paradigma alternativo. En las ciencias, la situación contrastadora nunca consiste en solamente la comparación de un único paradigma con la naturaleza, como ocurre con la resolución de rompecabezas. Por el contrario, la contrastación se da como parte de la competencia entre dos paradigmas rivales.

Además, dado que los nuevos paradigmas nacen de los viejos, por lo común incorporan gran parte del vocabulario y del aparato tanto conceptual como manual, que había usado antes el paradigma tradicional. En el nuevo paradigma estos términos heredados, conceptos y experimentos entran en nuevas relaciones mutuas. Quienes proponen paradigmas rivales practican su oficio en mundos distintos. Al practicar en mundos distintos, ambos grupos de científicos ven cosas distintas cuando miran desde el mismo lugar en la misma dirección. En ciertas áreas ven cosas diferentes y las ven manteniendo distintas relaciones entre sí. Así que antes de que puedan aspirar a comunicarse plenamente entre sí tales grupos de científicos, deben experimentar la conversión, esto es, un cambio pardigmático.

Para Kuhn entre las consideraciones que pueden llevar a los científicos a rechazar un viejo paradigma en favor de otro nuevo, están los argumentos que no son explícitos pero que apelan al sentido de lo estético o de lo conveniente, de manera que se dice que la nueva teoría es "más atractiva", "más adecuada", o "más simple" que la antigua. Cuando se propone inicialmente un candidato a paradigma, rara vez ha resuelto más allá de unos pocos de los problemas que se le plantean y en su mayoría tales soluciones distan de ser perfectas. Sólo cuando el paradigma se ha desarrollado, se ha aceptado y explotado, se ponen a punto esos argumentos aparentemente decisivos. Una parte de la ciencia normal consiste en producir tales argumentos, los cuales no desempeñan ninguna función en el debate paradigmático. Los opositores de un nuevo paradigma casi siempre pueden señalar problemas que su rival no ha resuelto y que para ellos no son en absoluto problemas. Pero los debates entre los paradigmas en realidad no dependen de su capacidad de resolver problemas. La cuestión es qué paradigma guiará en el futuro la investigación sobre problemas que ninguno de los competidores puede aún resolver por completo. Lo que está en juego es la decisión acerca de modos alternativos de practicar la ciencia y en tales circunstancias dicha decisión se basa no tanto en los logros pasados sino en promesas acerca del futuro. La persona que adopta un nuevo paradigma debe tener fe en que el nuevo paradigma tendrá éxito. Esta es una de las razones por las que es importante que haya antes una crisis. Los científicos que no han pasado por ella, rara vez renunciarán a las firmes pruebas de resolución de problemas del viejo paradigma. Pero la crisis sola no basta. Tiene que existir además un fundamento, aunque no es preciso ni que sea racional ni en última instancia correcto, para tener fe en el candidato elegido. Algo habrá de hacer sentir, a al menos unos pocos científicos que la nueva propuesta está en buen camino y en ocasiones eso sólo pueden suministrarlo las consideraciones estéticas personales e inarticuladas.

En la propuesta de Kuhn también cobran importancia los libros de texto, las divulgaciones y las obras filosóficas, ya que considera que son producto de un cuerpo ya articulado de problemas, datos y teoría, es decir, al conjunto de paradigmas con el que la comunidad científica está comprometida en el momento en que se escriben. La filosofía de la ciencia, de acuerdo a Kuhn, analiza la estructura lógica de ese mismo cuerpo acabado de conocimientos científicos. Para nuestro autor el surgimiento de los libros de texto es un elemento que acompaña invariablemente el surgimiento de un primer paradigma en cualquier campo científico y éstos han de escribirse de nuevo, en todo o en parte, cada vez que cambia la estructura de los problemas o las reglas de la ciencia normal.

En el capítulo IX de la Estructura de las Revoluciones Científicas, dedica a comentar sobre lo que caracteriza como la invisibilidad de las revoluciones[8], Kuhn nos dice que las teorías no se desarrollan paso a paso para encajar con los hechos que estaban ahí todo el tiempo, sino que más bien surgen junto con los hechos a los que se adecuan a partir de una reformulación revolucionaria de la tradición científica precedente, una tradición en cuyo seno no regía en absoluto la misma relación mediada por el conocimiento entre el científico y la naturaleza.

En este mismo capítulo nos habla de las definiciones, de las cuales afirma que poseen escaso contenido científico cuando se consideran en sí mismas. Los conceptos científicos para Kuhn a los que apuntan las definiciones sólo cobran pleno significado cuando se relacionan con otros conceptos científicos, con procedimientos de manipulación y con aplicaciones paradigmáticas. Además afirma que dado el contexto, rara vez hace falta inventarlos, pues ya se encuentran a la mano. Puede suceder que un mismo concepto sea usado en varios episodios históricos, pero adquiriendo significados revolucionarios por el cambio con su relación teórica y de manipulación.

Kuhn atribuye como una de las características compartidas entre ciencia y tecnología, el progreso.

Respecto al progreso, Kuhn identifica a éste como algo que se da como re-

[8]Capítulo IX [15].

sultado del trabajo en una comunidad científica madura, contrario a lo que sucede en un período preparadigmático en el cual comenta que resulta muy difícil hallar pruebas de progreso excepto dentro de cada una de las escuelas rivales. Afirma que sólo durante los períodos de ciencia normal el progreso parece obvio y seguro.

Finalmente es importante mencionar que Kuhn hace algunas aclaraciones en torno al concepto de paradigma en un epílogo (1969), donde sugiere deseable separar el concepto de paradigma de la noción de comunidad científica a fin de evitar confusiones. Por un lado, hace alusión a toda constelación de creencias, valores, técnicas y demás compartidos por los miembros de una comunidad dada y que por otro, denota un tipo de elemento de dicha constelación, las soluciones concretas a rompecabezas que pueden sustituir las reglas explícitas como base para la solución de los restantes rompecabezas de la ciencia normal. Antes de abordar el primer punto, aclara que el término "paradigma" se introduce de un modo circular. Un paradigma es lo que comparten los miembros de una comunicad científica y, una comunidad científica consta de personas que comparten un paradigma. Nuestro autor tiene claro que la identificación entre comunidades científicas y temas científicos debe ser considerada con cuidado, puesto que a lo largo de la historia, tal identificación parece no haberse dado de manera tan delimitada, así por ejemplo si la óptica o la electricidad dieran nombre a un comunidad, podía ésta ser identificada en torno a la física, sin embargo la identificación de una ciencia llamada física no existía como tal antes de mediados del siglo XIX, después se formó como la confluencia de comunidades de las matemáticas y la entonces llamada filosofía natural (physique expérimentale). Pero lo cierto es, de acuerdo a Kuhn, que lo que él llama ciencia normal, así como las revoluciones son actividades basadas en la comunidad.

En el epílogo Kuhn hace además algunas precisiones importantes respecto al término paradigma respecto al cual hay para él, dos usos muy distintos de este término. Ante la pregunta acerca de ¿qué es lo que comparten los miembros de una comunidad científica? y puesto que señala que "teoría" connota una estructura de naturaleza y alcance más limitados, nuestro autor introduce una nueva noción a fin de evitar confusiones, a saber, la noción de "matriz disciplinar" y afirma que los objetos del compromiso de grupo que su texto original consideraba paradigmas, partes de paradigmas o paradigmáticos, son constituyentes de la matriz disciplinar y en cuanto tales forman un todo y funcionan juntos. Los componentes de una matriz disciplinar son:

Generalizaciones Simbólicas. Las expresiones que aceptan los miembros de un grupo y que se pueden poner en una forma lógica del tipo . Son los componentes formales de la matriz disciplinar, como por ejemplo la expresión f=ma. Tales generalizaciones ofrecen el aspecto de leyes naturales pero su función no se limita a eso, ya que funcionan en parte como leyes y en parte como definiciones de algunos de los símbolos que contienen. El equilibrio entre su aspecto legislativo y definitorio cambia con el tiempo. Además, Kuhn señala que la naturaleza del compromiso con una ley es muy distinta de la naturaleza del compromiso con una definición. A veces las leyes se pueden corregir poco a poco, pero no las definiciones.

Compromisos con creencias. Creencias en modelos particulares incluyendo a los de tipo relativamente heurístico. Al respecto Kuhn cita como ejemplo el hecho de que las moléculas de un gas se comportan como minúsculas bolas de billar elásticas con movimiento aleatorio. Los modelos suministran al grupo analogías y metáforas que ayudan a determinar qué habrá de aceptarse como una explicación o como una solución a lo que denomina un rompecabezas y contribuyen a la determinación de los rompecabezas sin resolver y a la evaluación de la importancia que cada uno de ellos tiene. Así que la palabra modelo se emplea en el sentido de una interpretación intuitiva o visualización de los fenómenos que se quiere analizar y que determina la investigación. Además, Kuhn distingue entre dos clases de modelos, unos que son simplemente analogías heurísticas como el de las moléculas de un gas citado previamente y los modelos ontológicos, que son aquéllos que son considerados literalmente y que fijan los compromisos ontológicos de los investigadores, como por ejemplo la representación del espacio como un continente vacío, absoluto e infinito en la mecánica newtoniana.

Valores. Su importancia se pone de manifiesto cuando los miembros de una comunidad han de identificar una crisis o elegir entre modos incompatibles de practicar su disciplina. Los valores más profundamente aceptados afectan a las predicciones. Hay también, de acuerdo a nuestro autor, valores aplicables a la evaluación de teorías, las cuales han de permitir la formulación y solución de rompecabezas y deberían en la medida de lo posible, ser simples, consistentes y plausibles. Los valores compartidos pueden ser determinantes significativos de la conducta de un grupo, por ejemplo respecto a las anomalías, si todos los miembros de una comunidad respondiesen a una anomalía como a una fuente de crisis o adoptasen cada nueva teoría propuesta por un colega, la ciencia se extinguiría, afirma nuestro autor, y que en cuestiones de este tipo, el recurso a los valores compartidos puede ser el modo que tiene la comunidad de ponderar los riesgos y, agrega, asegurar el éxito de la empresa a largo plazo. Aquí debo decir, que muchas veces los científicos asumen alguna empresa arriesgando el éxito de su carrera, sin la certeza de que la empresa asumida proporcionará los frutos esperados. Considere al grupo de científicos que han asumido la teoría de cuerdas como rumbo de sus investigaciones.

Ejemplares. Con este término el autor se refiere a las soluciones de problemas concretos. Son ejemplos compartidos, que pueden ser las soluciones técnicas de problemas que se encuentran en las publicaciones periódicas, y las diferencias entre los conjuntos de ejemplares suministran a la comunidad su estructura en cuanto a la ciencia. Kuhn ejemplifica comentando que los físicos del estado sólido como los de teoría de campos comparten la ecuación de Schroedinger, pero que ambos grupos sólo tienen en común sus aplicaciones más elementales.

Moulines comenta que junto con las generalizaciones simbólicas, los ejemplares constituyen la parte esencial de un paradigma, ya que constituyen su identidad. Que paradigmas diferentes pueden compartir modelos o algunos valores, pero no las generalizaciones simbólicas y tampoco los ejemplares. Kuhn afirma que en el quehacer de un científico resolver problemas es aprender cosas importantes acerca de la naturaleza. La resolución de problemas permite adquirir soltura en la aplicación de las leyes y la teoría. La aplicación de una generalización simbólica puede cambiar dependiendo del contexto, e incluso muchas veces tendrá que ser adaptada de acuerdo a las necesidades en cuestión. De esta forma el integrante de una comunidad científica aprende a identificar similitudes en los problemas. Para Kuhn, lo importante al hacer problemas ejemplares es la habilidad de ver una variedad de situaciones como semejantes a partir de alguna generalización simbólica, y cuando un miembro de una comunidad ha resuelto algunos, ve situaciones a que se enfrenta como un científico con la misma Gestalt que otros miembros de su grupo de especialistas. Para él ya no son las mismas situaciones a las que se enfrentaba cuando inició su formación, ha asimilado un modo de ver contrastado con el tiempo y aprobado por el grupo.

Capítulo 2

Algunos aspectos del continuo numérico previo a la noción conjuntista

En primer lugar es necesario aclarar que por continuo numérico entenderemos la asociación que hacemos del conjunto de los números reales con la idea de que es un sistema completo, es decir, que si tenemos una cantidad infinita de números que se conglomeran en torno a un valor, el valor de conglomeración es también un número real; o con la idea intuitiva que los asocia a una recta que a su vez conlleva la idea de que no hay huecos[1] en ella.

[1] Esta idea de que el conjunto de los números reales contiene a sus puntos de acumulación tiene muchas equivalencias.

Recordemos que uno de los aspectos más importantes en el análisis del desarrollo de las teorías científicas desde el punto de vista de Kuhn, es el análisis desde una perspectiva diacrónica[2]. Considerando esto, una breve mirada retrospectiva al desarrollo de la matemática nos permite darnos cuenta de que a través de la historia ha habido períodos en los que el trabajo en torno a un enfoque riguroso ha sido sobresaliente. Los grandes ejemplos los encontramos en la obra de Euclides (325-265 a.C.), la de Newton (s.XVII) y la matemática del siglo XIX. Como en este trabajo considero a la obra de Dedekind como el punto relevante del análisis que nos concierne, marcaré como límites de lo que en términos kuhneanos se denomina *período de ciencia normal* al desarrollo de la matemática posterior a la invención del cálculo de Newton y Leibniz y lo sucedido en la primera mitad del siglo XIX[3] por un lado y la matemática posterior al trabajo de Dedekind por otro.

Antes de abordar las características de la matriz disciplinar que nos concierne, veamos algunos aspectos generales del desarrollo de la matemática en esta época.

Como hemos mencionado, un punto importante en la historia de las matemáticas se encuentra en el s. XVII con la invención del cálculo, a partir del cual (y mediante el desarrollo de la técnica) se produjeron ramas de la matemática como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la geo-

[2]Véase la primera página del capítulo 1.

[3]Dado que en 1858 Dedekind ya había reflexionado aunque no publicado en las ideas que constituyen su obra que es punto relevante para este trabajo [7].

metría diferencial y el cálculo de variaciones. Esto dio lugar a la conformación de lo que ahora conocemos como análisis matemático. Entre los matemáticos del siglo XVIII que contribuyeron al progreso de esta disciplina tenemos a Jakob y Johann Bernoulli, Brook Taylor, James Stirling, Leonhard Euler, Colin Maclaurin, Alexis Clairaut, Jean le Rond d´Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph-Louis Lagrange, Gaspar Monge, Pierre Simon Laplace y Adrien Marie Legendre. En este período gran parte del trabajo matemático estuvo directamente inspirado por problemas relacionados con el conocimiento del mundo, del universo, problemas que atañen a lo que ahora llamamos física, muy particularmente respecto a la mecánica, la óptica y la astronomía. De manera que los intentos que ya se manifestaban en Galileo y Newton por expresar los principios físicos con argumentos matemáticos cuantitativos, y de deducir nuevos resultados físicos con argumentos matemáticos fue tomando cada vez más fuerza. En aquella época los matemáticos se propusieron problemas tecnológicos como materia de estudio[4]. Así, por ejemplo, Euler trabajó en el diseño de barcos, la acción de las velas, balística, cartografía y otros problemas prácticos. Un panorama general de la actividad matemática de esa época nos muestra que las cuestiones algebraicas se desarrollaron principalmente en torno a la teoría de ecuaciones,(especialmente al estudio de la relación entre las raíces y los coeficientes) y el estudio de los métodos de solución de ecuaciones así como de métodos de aproximación. Fue alrededor de 1770 que la cuestión general de solubilidad fue atacada por Lagrange[5].

[4]No existía la disciplina que hoy conocemos como ingeniería.

[5]Así, por ejemplo, hacia 1150, Bhaskara dio un método para deducir las soluciones de

"El análisis de lo infinito", una rama de la matemática nombrada así por Euler, consistía en encontrar las sumas de series infinitas y transformarlas de una forma a otra, así como también encontrar los límites de productos infinitos, entre otros. En la primera mitad de ese siglo no hubo intentos para formular una teoría general de la convergencia de series infinitas, aunque la velocidad de convergencia de ciertas series era discutida y algunos criterios de convergencia fueron hechos explícitos. Respecto al cálculo diferencial, éste se centró en hallar diferenciales de todos los órdenes, sus relaciones mutuas y sus aplicaciones a problemas de geometría y física. Respecto al cálculo integral se resolvieron distintos tipos de ecuaciones diferenciales y se evaluaron integrales definidas, pero no se demostró la existencia de soluciones para cualquier tipo de problemas. Las ecuaciones diferenciales se estudiaron más comúnmente en el contexto de problemas físicos, antes que como parte de teorías matemáticas generales. De esta manera, la búsqueda de conceptos generales y el establecimiento de fundamentos rigurosos no fue el principal objetivo de las matemáticas del siglo XVIII [11, Grabiner, p. 18]. Además,

$Cx^2 + 1 = y^2$ a partir de una serie encontrada por tanteo (problema conocido como el de la ecuación de Pelli, que consiste en encontrar valores enteros de x y de y, sienco C un entero que no sea cuadrado perfecto y $xy \neq 0$). Bhaskara también trabajó la ecuación $Cx^2 + B = y^2$, donde C y B no son cuadrados perfectos. Parece que Bhaskara podía encontrar soluciones de tales ecuaciones una vez que tuviera la suerte de adivinar una. No contaba con ningún método para determinar si una ecuación dada de Pelli tenía solución y tampoco podía determinar si, una vez encontrada algunas soluciones, las tenía todas. Sin embargo su procedimiento era ingenioso y considerado como lo mejor que se ha conseguido en teoría de números antes de Lagrange. En 1766-9, Lagrange solucionó el problema de existencia y dio un método directo no empírico para encontrar todas las soluciones. En 1770-1771 Lagrange estudió los trabajos de Tartaglia y Ferrari entre otros acerca de la solución para ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grados.

hay quienes describen gran parte de la actividad de los matemáticos en este período como la explotación del poder de los símbolos para el propósito de resolver problemas. Sin embargo, hubo grandes logros. Trabajos como el de Euler, Jean Le Rond d´Alembert, Johann Kies, entre otros, son ejemplo de ello. Así, en una de las principales revistas de la época, las *Mémoires de l´Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* de los años 1750, 1775, y 1800, en la sección *Classe de Mathématiques* podemos encontrar, hacia 1750, cuatro artículos de Leonhard Euler: uno acerca de derivar las ecuaciones de movimiento para un cuerpo giratorio; otro relativo a la variación de la luz emitida por el sol y otros cuerpos celestes; el tercero sobre la precesión de los equinoccios; el cuarto sobre el efecto de una máquina hidráulica propuesta por Johann Andreas Segner. Así mismo, entre los trabajos de Jean Le Rond d´Alembert hay uno que trata sobre la forma general de la solución para ecuaciones diferenciales de una cuerda vibrante. Por su parte, Johann Kies realizó trabajos sobre la brillantez de Venus, entre otros[6].

Considerando que el desarrollo de las teorías antes mencionadas tienen estrecha relación con el desarrollo de la noción de continuo numérico[7], es importante subrayar que, en términos kuhneanos, la articulación de tales teorías se dio en gran parte durante el siglo XVIII y primera mitad del XIX (previo a la noción conjuntista).

[6] Véase [11, Grabiner].

[7] Siendo el estudio del continuo numérico el eje constitutivo de nuestra matriz disciplinar.

2.1. Generalizaciones simbólicas

En esta sección la intención es tener un panorama general sobre cuáles eran las expresiones admitidas por la comunidad de científicos en torno a nuestro paradigma; expresiones que por un lado definían a los objetos y que funcionaban también como leyes. Para ello trataremos de responder de manera muy general a la pregunta: ¿Qué papel juega el continuo numérico en el desarrollo de la matemática del s. XVIII y parte del XIX? Para responder veremos la importancia de exponer, de manera muy general, el proceso de generación de nuevos sistemas numéricos[8], así como el acoplamiento de términos relacionados con estas nociones numéricas[9], todo ello derivado de la creación del cálculo diferencial e integral. De acuerdo a Hans Niels Jahnke[Jahnke, p. 106] [14] podemos intentar dividir el cálculo infinitesimal del s.XVIII en diferentes períodos. Hasta aproximadamente 1730 fue considerado como parte o un método de geometría. El segundo período es alrededor de la mitad del siglo, en el que dominó una concepción implícitamente algebraica. Los conceptos fundamentales fueron considerados como refiriéndose a la geometría. Pero en sus *Introductio* Euler habla únicamente de cantidades en el sentido de números en lugar de cantidades geométricas [5]. En el contexto de la estructura de campo la concepción de los objetos, entre ellos los números, fue puramente algebraica. La noción de función se volvió fundamental sien-

[8]Por ejemplo, el de los números complejos o el de los números hamiltonianos.

[9]Términos como el de función, límite, continuidad, convergencia, etc.

do para Euler una expresión algebraica o analítica[10]. No obstante, no todos los matemáticos apoyaron este creciente enfoque algebraico para el cálculo infinitesimal y su desprendimiento de la geometría. Por ejemplo, en Inglaterra Colin Maclaurin fundamentó el cálculo de fluxiones desde la geometría antigua en su *Treatise of Fluxions, 1742*, siguiendo la tradición Newtoniana, la cual parecía defender. Del mismo modo tenemos, al final del siglo, la obra *Application de l´analyse à la géométrie* de Gaspard Monge.

Cuando el cálculo infinitesimal llegó a ser más algebraico sus bases ontológicas lo hicieron también[11]. En sus *Vollständige Anleitung zur Algebra* [13] Euler escribió que la matemática en general es la ciencia de la cantidad o la ciencia que investiga los medios de medir cantidades. Definió cantidad como algo que es capaz de crecer o disminuir. La noción de cantidad incluía el dinero, longitud, área, volumen, tiempo, masa, poder, velocidad. Finalmente la noción fue generalizada hasta llegar a la noción de *cantidad per se* ("cantidad abstracta", [19]). En los cálculos fueron representadas por letras. Una cantidad abstracta está determinada por el hecho de que aparece como una variable en una fórmula. Esto hace posible subsumir bajo la noción de cantidad abstracta también los objetos imaginarios como $\sqrt{-1}$, mismos que no pueden ser interpretados concretamente. Eventualmente, al final del siglo, algunos autores sostuvieron el punto de vista de que los objetos de las

[10] Esta concepción cambia con el cambio de paradigma.

[11] Específicamente, a lo largo de este capítulo se verá cómo es que este cambio de lo geométrico a lo algebraico, implicó la necesidad de precisar conceptos como el de cantidad, función, razón de cambio, etc.

fórmulas del álgebra y del análisis no son cantidades sino relaciones entre operaciones algebraicas y analíticas. Como consecuencia de esta actitud las variables reales y complejas no fueron claramente distinguidas. No hay duda de que en primer lugar los matemáticos pensaron en cantidades geométricas. Pero cuando una fórmula demandó que la interpretación de una variable fuera compleja esto fue tácitamente asumido.

En el siglo XVIII, el cálculo infinitesimal estuvo conectado con tres conceptos fundamentales, a saber, *diferencial, función y series de potencias.* Para Leibniz y Johann Bernoulli los diferenciales seguían siendo cantidades infinitamente pequeñas. Así es como encontramos en un manuscrito para el Marquis de l´Hôpital que en su especificación de las bases conceptuales del nuevo cálculo diferencial, Johann Bernoulli mostró que en la escuela de Leibniz los diferenciales eran vistos como cantidades infinitamente pequeñas. Éstas tenían las siguientes características: (1) Una cantidad que es incrementada o decrementada por una cantidad infinitamente pequeña no es ni incrementada ni decrementada; (2) Cada línea curveada consiste de infinitamente muchas líneas rectas, las cuales son ellas mismas infinitamente pequeñas, (3)Una figura que está contenida entre dos ordenadas, la diferencia de la abscisa y la pieza infinitamente pequeña de una curva es considerada un paralelogramo [3, Bernoulli 1692, p. 12]. Esto cambió con Euler. Definió diferenciales como "incrementos infinitamente pequeños". Según él, el cálculo diferencial no trabajaba con diferenciales sino con sus razones. Y entonces no son los diferenciales sino sus cocientes, esto es funciones, los que son objeto del cálculo diferencial. Así que desde la concepción de Euler las funciones eran fundamentales. Y en cuanto a las funciones, las herramientas más importantes para su representación fueron las series de potencias. Es importante mencionar estas cuestiones pues posteriormente podremos apreciar los cambios conceptuales que se produjeron con la nueva concepción de la noción de número que se introdujo en el siglo XIX. Además, el tratamiento que en esa época se dio a las funciones y los conceptos antes mencionados forma parte importante de la articulación de las nociones relacionadas con la noción de número. Al respecto, es importante considerar algunos otros aspectos del desarrollo del análisis del siglo XVIII. Como ya mencionamos, el trabajo de Euler marcó un importante cambio en el cálculo infinitesimal, pero sin llegar a constituir un cambio revolucionario, pues su trabajo puede considerarse en términos kuhneanos como parte de la articulación del paradigma existente. Su trabajo relevante para dicho cambio es la *Introductio in analysin infinitorum* [5]. Su primer volumen contiene una teoría algebraica-aritmética de funciones y el segundo trata la geometría analítica del tiempo. Ambos libros proporcionaron métodos y técnicas necesarios para el cálculo infinitesimal. Tenemos también con esto un ejemplo del importante papel que juegan los libros de texto en el desarrollo de las ciencias, ingrediente sobre el cual Kuhn llama nuestra atención y que es característico de lo que llama período de ciencia normal[12]. La idea de Euler de poner el centro de atención de su *Introductio* en el concepto de función fue un paso sobresaliente. En algunos de sus tratados Leibniz

[12] Véase la páginaa 2.

aún usaba la palabra "función"en su sentido coloquial o intuitivo[13]. Johann Bernoulli fue el primero en hablar de "*funciones de ordenadas*"en un documento de 1698 [26, Yuschkevitsh, 57ff.]. Entendiendo por esto expresiones arbitrarias que contenían las ordenadas como variables. Posteriormente por correspondencia discutió con Leibniz cómo designar "funciones"por medio de símbolos. En 1718 Bernoulli definió el concepto formalmente por primera vez [2, Bernoulli, 1718].

Con lo anterior identificamos algunos rasgos que, de acuerdo con Kuhn, caracterizan un período de ciencia normal, a saber que, durante este período se acuñan los términos de las teorías; del mismo modo, con relación al aspecto social, pone de manifiesto la importancia del papel que juegan los medios de comunicación disponibles de la época.

De manera que, uno de los términos fundamentales que se acuñaron en este siglo fue el de *función*, aunque este término ya existía, fue en este período que se precisó su definición. También podemos apreciar que la noción de número jugaba un papel secundario, en el sentido de que no se tenía una definición explícita, sino más bien implícita y conveniente en cada disciplina de este período. Sin embargo, en la consolidación de los conceptos relacionados con las funciones se fue marcando una profunda separación entre el concepto de número y la geometría, aunque hay que recordar que en el trabajo de

[13] Anteriormente, Descartes, entre otros, ya tenían una idea intuitiva de los conceptos de *variable* y de *función*. Descartes sabía que las letras de sus ecuaciones representaban variables y reconoció la distinción entre variable y constantes arbitrarias [24, Bell, p.151].

esta misma época hubo un menosprecio implícito hacia el fundamento de los nuevos conceptos, o de los existentes. Comúnmente la interpretación física de las matemáticas proporcionaba a los matemáticos la seguridad de sus resultados. Además había una confianza excesiva en la manipulación de los símbolos. Del mismo modo, la confianza en el uso de los números complejos descansaba sobre la confianza en los símbolos[14].

Lo anterior nos permite contextualizar el campo de acción de los sistemas numéricos de aquella época. Bell [24, Bell, p. 177] comenta que las matemáticas hicieron tres grandes adquisiciones: los números complejos ordinarios del álgebra y del análisis y sus subclases de los enteros algebraicos, los sistemas de números hipercomplejos del álgebra, la geometría y la física y por último el continuo de los números reales que aparece en las modernas teorías de funciones de variable real y compleja.

Es importante también que consideremos la herencia de los antiguos que tuvieron a su alcance los matemáticos de este siglo. Las primeras generalizaciones del sistema de números naturales fueron las fracciones babilónicas y egipcias. Estas ilustran un prolífico método de engendrar nuevos números a partir de los ya aceptados, y recurriendo al mismo concepto, la inversión. La motivación consistía en encontrar un número que multiplicado por 6 produjera el 2, para lo cual se necesitaba una nueva clase de número, el $\frac{1}{3}$. Aquí la operación directa es la multiplicación, la inversa de la división. Los otros

[14]Como ya hicimos notar en páginas anteriores, (véase la página 39).

pares de inversos elementales son la adición y la sustracción, la elevación a potencias y la extracción de raíces. Los antiguos conocían todas estas operaciones elementales. Las operaciones inversas de la multiplicación y la adición racionales exigían el invento de las fracciones corrientes y de los números negativos; a la operación inversa de elevación a potencias se debió el invento de los números irracionales, los imaginarios puros y los números complejos ordinarios. La resolución de una ecuación algebraica o de un sistema de ellas con varias incógnitas se puede ver también desde la perspectiva de resolver problemas de inversión con respecto a la adición y la multiplicación. Se puede afirmar que hasta 1840 las ecuaciones algebraicas constituyeron probablemente la fuente más prolífica de ampliaciones de los números naturales. En cuanto al desarrollo de los números negativos, un detalle a mencionar es el hecho de que cuando Diofanto encontró a -4 como solución de una ecuación lineal, la rechazó por absurda. No es la intención de este trabajo ofrecer una historia de los números y sus operaciones, sin embargo hay algunos hechos relevantes que no podemos dejar de mencionar. Uno de estos hechos es que los números negativos no se usaron libremente sino hasta el siglo XVII. La extensión numérica era formal porque su base la encontraba en la aplicación mecánica de reglas del cálculo de las que se sabía que producían resultados consecuentes al aplicarlas a números positivos, y de las que se presuponía habrían de ser legítimas al manejar números negativos. A mediados del siglo XVII el libre uso de los números negativos dio a los matemáticos una demostración pragmática de que las reglas del álgebra conducen a resultados consecuentes.

Respecto al surgimiento de los números complejos, veamos de manera general los factores que influyeron en el proceso de articulación de las ideas[15] que desembocaron en su conformación. Bell [24, Bell, p. 185] comenta que su surgimiento tiene que ver más con una manipulación ciega sin intentos de interpretar o comprender. Que la primera vez que se admitieron de modo claro los números imaginarios fue con la observación hecha por Mahavira en el siglo IX, diciendo que dada la naturaleza de las cosas un número negativo no tiene raíz cuadrada. Señala además que Cauchy hizo la misma observación[16]. Y afirma que esto influyó de manera determinante para que Kronecker se propusiera derivar de manera unificada todas las ampliaciones del concepto de número natural. Después de Mahavira, el siguiente paso fue hacia la filosofía analítica del número. En 1545 Cardano consideraba a los números imaginarios como ficticios, pero los utilizaba formalmente, como por ejemplo, en la descomposición de 40 en los factores complejos conjugados $5 \pm \sqrt{-15}$, sin preocuparse por la legitimidad del formalismo. Girard (1590?-1633?) notó que algunas ecuaciones de grado n, siendo n pequeño, tienen n raíces reales, y que algunas de segundo grado tienen dos raíces imaginarias, con lo que dedujo que toda ecuación de grado n tiene n raíces reales o complejas.

En 1676 Leibniz dio una descomposición factorial de $x^4 + a^4$. Se conven-

[15]Siguiendo la terminología de Kuhn.

[16]Algo menos que un millar de años después, en 1847.

ció de que había comprobado por sustitución que la solución de Cardano de la ecuación cúbica general en el caso irreducible satisface esta ecuación. También comprobó que un radical real especial se podía expresar como suma de complejos conjugados. Hacia 1710, el matemático inglés Roger Cotes, enunció un resultado equivalente que se conoce como teorema de De Moivre de la trigonometría. En la notación actual, su fórmula es $i\phi = \log_e(\cos\phi + i\sin\phi)$. El teorema de De Moivre (1730), $\cos n\phi + i\sin n\phi = (\cos\phi + i\sin\phi)^n$ $[= e^{ni}\phi]$ con n un entero mayor que cero, es una consecuencia *formal* inmediata. Euler (1743-1748) amplió esta última para cualquier valor de n; también mostró la forma exponencial de seno ϕ, coseno ϕ, mismas que se obtienen a partir del resultado de Cotes. Así que para 1750 la trigonometría ya formaba parte del dominio del análisis, y sólo faltaba deducir las fórmulas analíticas, prestando la debida atención a la convergencia[17], y crear una teoría consecuente de los números complejos (de lo cual se ocupó Wessel en la última década del siglo XVIII).

Respecto del trabajo de Wessel, cabe decir primero que Johann Bernoulli observó la relación entre las tangentes inversas y los logaritmos naturales. Una interpretación geométrica de los números complejos la dio Wallis en 1673 y dista muy poco de la actual. Wallis representa al número complejo $x + iy$ por el punto (x, y) del plano de coordenadas cartesianas, pero en lo que se frenó fue en usar el eje y como eje de los imaginarios. Wessel dio la interpretación final produciendo una consecuente y útil de los números complejos en

[17] A lo cual Cauchy hizo significativas contribuciones en la tercera década del siglo XIX.

1797. Explicaba lo que en algunos libros actualmente se conoce como diagrama de Argand y ordenaba el álgebra formal de los números complejos según la propiedad del diagrama. Argand llegó independientemente a las mismas conclusiones en 1806. Se debe a Gauss (1831) el que los números complejos fueran aceptados como miembros respetables de la familia de estos matemáticos [24, Bell, p. 187]. Bell comenta que la interpretación de Wessel sugería dos posibles generalizaciones. Por un lado se podía traducir la geometría de los números complejos a una serie de rotaciones y traslaciones en un plano. Surge entonces la cuestión de si sería posible hacer otras ampliaciones del sistema de los números mediante las cuales se pudieran describir rotaciones en un plano tridimensional. Esto apenas se podía haber predicho en 1799 cuando se publicó la interpretación de Wessel. Sin embargo, la interpretación geométrica no es el camino que conduce de manera natural al corazón del problema. Aún así Hamilton hubo de seguirlo con éxito, aunque se conformó con un álgebra adaptada a un espacio de tres dimensiones, siendo el verdadero problema la ampliación de los números complejos a un "espacio"de n dimensiones [24, Bell, p.188].

Por su parte Gauss se propuso, como tesis doctoral (1799), hacer una demostración en torno a que las ecuaciones algebraicas tienen una raíz de la forma $a + bi$, con a y b reales [18]. Gauss llegó a una representación geométrica de los números complejos de manera independiente y sin conocer el trabajo de

[18]Cabe mencionar que después de la hipótesis de Girard, había habido diversas tentativas de demostración, incluyendo algunas de D´Alembert en 1746 y de Euler en 1749

Wessel. Pero Gauss confería una mayor importancia a la aritmética. En 1811 Gauss ya se había convencido de que un tratamiento "formal" podía facilitar una sólida teoría de los números complejos. Por tratamiento formal Gauss entendía la deducción de las propiedades de los números complejos a partir de los postulados aceptados de la aritmética común. Buscó demostraciones, a la manera de Euclides, partiendo de definiciones y de hipótesis explícitas. La forma geométrica de los números complejos quedó desterrada por una nueva forma inventada por Gauss en 1831, seis años antes de que Hamilton comunicara su descubrimiento a la Real Academia Irlandesa. Esta nueva forma desterró por completo la intuición geométrica, así como el componente *metafísico* "i" al definir $a + bi$, con a y b reales, como el par (a, b), donde la consideración principal era la manipulación aritmética y algebraica de las parejas ordenadas. Así $(a, b) = (c, d)$ queda definido sólo cuando $a = c$ y $b = d$; $(a, b) + (c, d)$ **por definición queda como** $(a + b, c + d)$ y $(a, b) \cdot (c, d)$ como $(ac - bd, ad + bc)$. Para Gauss el modo más conveniente de abordar los números complejos es el método "abstracto", es decir, mediante postulados.

Después de que Peacock[19], De Morgan, Hamilton y otros iniciaran trabajos con intención de formalizar el álgebra y la aritmética, los números naturales fueron extensamente ampliados en otra dirección, la de los números algebraicos, empezando con Gauss en 1831 y prolongándose hasta el siglo XX. Paralelamente se desarrollaron las generalizaciones de las parejas de núme-

[19] Peacock (1791-1858) fue profesor de la Universidad de Cambridge, y de acuerdo con Bell, el que primero percibió al álgebra como una ciencia abstracta hipotético-deductiva según el modelo euclidiano.

ros (a, b) al álgebra múltiple de los cuaternios (a, b, c, d) , que posteriormente generalizó Grassmann creando el álgebra de los números n-ples $(a_1, ..., a_n)$. Otro tipo de aritmetización que se originó en 1801 con la obra de Gauss, y que alcanzó una de sus culminaciones con la obra de Kronecker en 1882-7, suministró incidentalmente el medio de reducir todos los números a los números naturales.

2.2. Compromisos con creencias

Una vez esbozado de manera muy general el contexto de acción en el que surgieron las nociones numéricas, (o en el que fueron asumidas por herencia en el período posterior a la creación del cálculo infinitesimal y previo a la adopción de las nociones conjuntistas como centro de su desarrollo), a continuación se mencionarán algunos ejemplos de aquello que tiene que ver con las creencias en modelos particulares, incluyendo los de tipo heurístico[20].

Recordemos que durante mucho tiempo un paradigma que predominó en el desarrollo de la matemática tuvo como base a la geometría euclideana[21], específicamente en la época que es de nuestro interés[22]. Considerada como paradigma, los logros en torno a la geometría euclidiana influyeron en gran parte de la formación de los matemáticos de épocas posteriores a la de los

[20]Véase la página 30.

[21]La geometría euclidiana puede considerarse como paradigma, sin embargo en nuestro discurso juega papel de teoría.

[22]Las geometrías no euclidianas se desarrollaron en el siglo XIX.

griegos. Uno de los problemas que surgen en torno a este paradigma lo encontramos vinculado al teorema de Desargues, el cual es una pieza fundamental, de acuerdo con Torres [25, Torres, pps. 14-17], si lo que se pretende es introducir una estructura de campo ordenado en la recta. Lo anterior proporciona, en términos kuhneanos, un ejemplo más de articulación de paradigmas, el geométrico y el algebraico[23]. Para Kuhn, la investigación en la ciencia normal se orienta a la articulación de los fenómenos, que en este ejemplo corresponde a lo observado en torno a la perspectiva, y teorías ya suministradas (por lo que llama paradigma). En tal articulación se manifiesta también la analogía kuhneana con respecto a los rompecabezas. Las ideas en torno a la perspectiva se fueron consolidando, hasta desembocar en el s. XIX en lo que ahora conocemos como geometría proyectiva.

Otro ejemplo que nos muestra la presencia preponderante de la geometría en el desarrollo de la matemática es el relativo a la interpretación geométrica de los números complejos (Wallis 1673, Wessel 1797, Argand 1806). De modo que la importancia de la geometría tuvo varias vertientes, entre ellas la de carácter heurístico[24], y el hecho de que fue en parte gracias a las interpretaciones geométricas que se consolidó el concepto de número complejo permitiendo a su vez el paso a la generalización, es decir, a la concepción

[23]Vale la pena hacer notar que, en su epílogo de 1969 (véase [15, Kuhn, p.307]), Kuhn comenta que en ocasiones los miembros de las comunidades científicas comparten paradigmas. En la misma sección de su epílogo, Kuhn observa que una teoría (en su discurso *una teoría de la materia*), a lo largo de la historia puede ser considerada como herramienta o como tema de estudio de una cierta comunidad, y por tanto constituir un paradigma.

[24]Creencias de carácter heurístico de acuerdo con Kuhn.

abstracta de dicho concepto. También tuvo ese aspecto que Kuhn señala que tienen los modelos de una matriz disciplinar, a saber, que se emplean en el sentido de una interpretación intuitiva o visualización de (en este caso) los números que se están analizando y que van determinando la investigación[25]. Kuhn distingue de los modelos como analogías heurísticas a aquéllos que son modelos ontológicos, los cuales fijan los compromisos ontológicos de los investigadores, pues es claro que, de acuerdo a lo que hemos dicho respecto al desarrollo de los números complejos, la interpretación geométrica tuvo en cierto sentido este carácter ontológico en tanto que es gracias a la representación geométrica que se aclara el concepto y el álgebra de los números complejos, es decir, que es a través de la geometría que se establece y legisla tanto su definición como sus propiedades. Algo muy similar se tiene en cuanto a la asociación geométrica de los números reales.

Pero como se argumentó en la sección anterior, las nociones numéricas (entre ellas la extensión de los números naturales) se desarrollaron en distintas teorías matemáticas: la algebraica, en torno al análisis de lo infinito, el cálculo diferencial e integral, y las ecuaciones diferenciales, principalmente. Para nosotros resulta de especial interés el continuo de los números reales. Entonces, ¿cuál era el estatus ontológico de esta entidad en la época posterior a la creación del cálculo diferencial e integral y antes de la aparición de las nociones conjuntistas? Al respecto hay quienes afirman que la teoría de las proporciones de Eudoxo (408-355 a.C.), que es esencialmente una teoría del

[25] En el sentido de que la carga teórica influye en cómo se perciben los objetos.

sistema de los números reales, no fue suficientemente modificada hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando serias dificultades en el análisis provocaron un examen minucioso del concepto de número real. [24, Bell, pp. 66]. Pero previo a la teoría de las proporciones de Eudoxo, en las demostraciones pitagóricas se ocultaba el supuesto sutil de que los números que medían los lados de, digamos triángulos, eran racionales, es decir, que podían expresarse como la razón de dos números enteros. De cierta forma se había supuesto que existía una correspondencia uno a uno entre las longitudes de los segmentos de líneas rectas y los números racionales. En particular se había supuesto que la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es un número racional es también un número racional. Si el lado es la unidad, la diagonal tiene una longitud de $\sqrt{2}$ unidades. Pero los pitagóricos demostraron que $\sqrt{2}$ no puede expresarse bajo la forma $\frac{m}{n}$, en la que m y n son números enteros. Así, hacia fines del siglo V a.C., los pitagóricos sabían que $\sqrt{2}$ poseía un carácter distinto al de los números utilizados para contar que servían para expresar razones –ratio-, y por ello se les denominó irracionales, es decir, que no se pueden expresar mediante razones. Las opciones eran entonces que algunas longitudes no correspondían a ningún número, o que $\sqrt{2}$ y otros irracionales positivos fueran números. Optando por lo segundo, los geómetras del siglo IV a.C. incorporaron una noción de suma importancia en la historia del pensamiento matemático, lo que hoy en día llamamos: la noción de continuidad numérica en el análisis. Lo siguiente era articular a los números irracionales con los racionales en un dominio unificado de números o magnitudes, de modo que todos formaran un sistema completo con las operaciones de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, tal como se entendía entonces para los racionales. Además las operaciones en el sistema ampliado tenían que dar los mismos resultados para los números racionales que antes de la inclusión de los irracionales. Bell afirma que no se hizo ninguna ampliación adicional hasta el siglo XVII[26], cuando se incorporaron por completo los números negativos al sistema de números reales. Sin embargo, debemos tener presente que para esa época el concepto de número real aún no se había precisado, habiéndosele asociado tan sólo la noción de "continuidad geométrica", que también era vaga o indefinida, aunque intuitivamente más clara. Aun así, y como ya hemos señalado, posteriormente se extendió este sistema al de los números complejos.

Fue así que con los griegos se extendió el concepto de magnitud geométrica para incluir magnitudes racionales e irracionales, aunque quedó pendiente el probar que ese sistema ampliado de magnitudes era completo. Era imposible para los griegos comprender la geometría o el sistema de los números reales sin alguna teoría de continuidad en el sentido matemático.

De manera que las nociones geométricas jugaron ese papel de modelo que de acuerdo con Kuhn tiene un carácter heurístico o que sirve de puente para la generación de conocimiento, o como modelo ontológico, otorgando cierta validez a la existencia de nuevos sistemas numéricos.

[26] Siglo en el que Newton y Leibniz desarrollaron su cálculo diferencial e integral.

2.3. Valores

A continuación nos proponemos identificar aquellos criterios aplicables a la evaluación de teorías que permitieron la formulación y solución del rompecabezas concerniente a la consolidación de las nociones en torno al continuo numérico.

En primer lugar, debemos tener presente que el desarrollo de la matemática a partir de la creación del cálculo de Newton y de Leibniz, se basó fuertemente, en un principio, en la geometría euclideana. Recordemos que, la geometría euclideana tuvo gran influencia en el quehacer matemático por mucho tiempo. Puede considerarse que su impulso inicial procede de experiencias del mundo material idealizadas. Otro factor importante en la solución del rompecabezas que nos concierne, es el desarrollo del álgebra de aquella época. Por su parte, puede considerarse que el concepto del álgebra como formalismo puro se presentó por vez primera con Peacock (1791-1858), el primero, de acuerdo a Bell [24], que percibió al álgebra como una ciencia abstracta hipotético-deductiva según el modelo euclidiano.

Además, podemos afirmar que la época que nos concierne fue una época de gran progreso en el quehacer matemático y que la necesidad de descubrir nuevas verdades o de conocer mejor las leyes de la naturaleza contribuyeron en gran medida a éste, permitiendo la incorporación de nuevos métodos ya fuera porque probaron ser exitosos en física, porque permitieron resolver problemas propios de la matemática o porque la misma matemática proveyó los medios para tal justificación.

Respecto a la ampliación hacia los números negativos, ya hemos mencionado que éstos se usaron libremente a partir del siglo XVII cuando la extensión era formal pues se basaba en la aplicación mecánica de reglas de cálculo de las que se sabía que producían resultados consecuentes al aplicarlas a números positivos y de las que se presuponía habrían de ser legítimas al manejar números negativos. A mediados del siglo XVII el uso sin trabas de los números negativos dio a los matemáticos una demostración pragmática de que las reglas del álgebra corriente conducen a resultados consecuentes. Pero no se hizo ningún intento de profundizar poniendo un fundamento de postulados, pues como ya mencionamos, la fundamentacion no es una característica del quehacer matemático de este período.

Con lo anterior podemos identificar algunos factores normativos que permitían la incorporación de nuevos objetos o teorías en la matemática, a saber, el hecho de que la ampliación a nuevos sistemas numéricos producía resultados consecuentes, o que el desarrollo de las teorías se validaban a través de la geometría euclideana o de los resultados que podían corroborarse mediante su aplicación para el estudio y comprensión del mundo.

Para tener una visión más amplia acerca de los criterios por medio de los cuales eran aceptados o validados los nuevos objetos y teorías en el desarrollo de la matemática del período que nos concierne, agregaremos a los dicho en secciones anteriores, algunos otros ingredientes históricos generales del uso de los números, así como de la incorporación de los nuevos sistemas numéricos, sus propiedades y los criterios para su aceptación. De manera que, en principio, recordemos que los matemáticos griegos manipulaban magnitudes en un contexto meramente geométrico, sembrando las raíces de lo que plenamente floreció con el desarrollo del análisis matemático. Muchos ejemplos hemos de encontrar al respecto, uno de gran interés es el planteamiento de lo que hoy conocemos como la propiedad arquimediana, el cual podemos encontrar en el trabajo de Arquímedes sobre la cuadratura de la parábola [1, The works of Archimedes, p. 234] "Que el exceso por el cual la más grande de (dos) áreas distintas excede a la menor, al ser añadido a sí mismo, excede a cualquier área finita ". Actualmente la propiedad arquimediana es en sí una propiedad fundamental del sistema de los números reales.

Otro aspecto histórico, en el que los fundamentos de las nociones numéricas se sustentaron en las geométricas, lo tenemos con los diagramas de Wessel y Argand para el sistema de números complejos[27]. De modo que podemos afirmar que los desarrollos geométricos sirvieron como fuente de inspiración para tener una mayor comprensión acerca de nuevos objetos incorporados a la matemática, como fue la de los números complejos, pero también ha servido como herramienta en la que se sustentaron muchas demostraciones, esto es, como criterio de justificación (el caso de los números complejos jugó esos dos papeles), aunque reflexiones posteriores condujeron a su vez a la conclu-

[27] Véase la sección anterior.

sión de que la geometría misma debía de fundamentarse. El papel que jugó la geometría también tuvo, como ya dijimos en la sección anterior, un carácter heurístico, siendo ésta el puente entre un conjunto de conocimientos generalmente aceptados y la incorporación de nuevos. En este sentido proporcionó el medio de aceptación para nuevos objetos. Caso ejemplar nuevamente es el de los números complejos o el de los hamiltonianos. Sobre éstos último, Bell comenta [24, Bell, pp.187] que la interpretación de Wessel sugería dos posibles generalizaciones[28]. Al traducir la geometría de los números complejos a una serie de rotaciones y traslaciones en el plano, surge la pregunta si es posible hacer otras ampliaciones del sistema de los números mediante las cuales se pudieran describir rotaciones en un espacio tridimensional, o si bastaba con los números complejos para ese objetivo. El camino seguido por Hamilton, dando respuesta afirmativa para el caso de tres dimensiones, desembocó en un planteamiento más general para el caso n-dimensional[29].

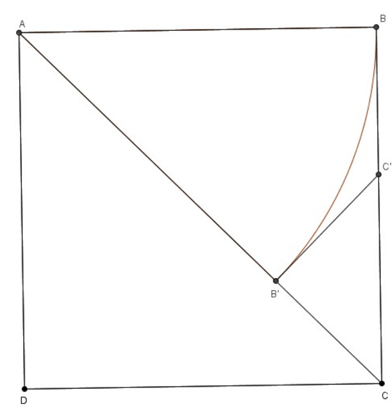
En lo que al continuo numérico se refiere, veamos que la geometría, además de servir como sustento en las demostraciones, jugó también el papel de fuente proveedora de nuevos objetos matemáticos. El siguiente es un ejemplo de este hecho. Para Pitágoras toda la naturaleza, el universo entero, todas las cosas matemáticas, físicas, metafísicas y morales se fundamentaban sobre los números enteros, $1, 2, 3, \ldots$. André Delachet [8] comenta que Pitágoras encontró en la geometría el obstáculo a su teoría: "... la razón del lado de un

[28]Del concepto de número.

[29]No se pierda de vista que la ampliación de los sistemas numéricos articuló el conocimiento desarrollado en otras áreas, por ejemplo en lo que ahora llamamos álgebra moderna

cuadrado y su diagonal no puede expresarse mediante la razón de dos números enteros...”lo cual es equivalente a que es imposible encontrar dos números enteros tales que el cuadrado de uno sea igual al doble del cuadrado del otro. Otra manera para referirnos a este hecho es que la raíz cuadrada de 2 es un número *irracional*, es decir no es igual a ningún número entero ni a ninguna fracción que se obtenga dividiendo un número entero por otro. Agrega Delachet que de esta forma un concepto geométrico tan sencillo como la diagonal de un cuadrado desafía a los números enteros $1, 2, 3, \ldots$. Es posible construir la diagonal geométrica, *pero no se le puede medir con un número finito de partes*. Lo anterior se establece de la siguiente manera:

> Consideremos un cuadrado $ABCD$, cuyo lado tomamos como unidad de longitud (fig. 1). Si la raíz de 2 fuera *racional* existiría una parte alícuota l común a AB y AC (es decir un segmento contenido un número entero y finito de veces en AB y AC). Sea B' el punto de intersección de AC con la

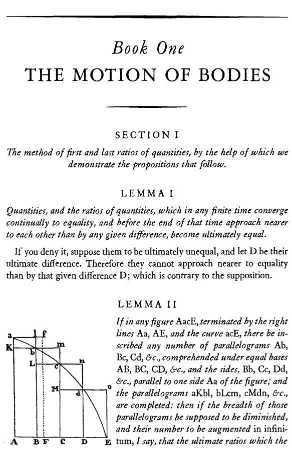


(a) Figura 1

> circunferencia de centro A y de radio AB, C' el punto donde la tangente

> en B' a esta circunferencia corta a BC. El triángulo $B'CC'$ es isósceles, por tanto: $B'C = B'C'$. Por consiguiente, esta parte alícuota l estaría contenida un número entero de veces en AB y en $B'C = AC - AB'$ por tanto en $CC' = AB - B'C$ y en $B'C$. Por tanto llegamos al mismo problema anterior para buscar esta parte alícuota; pero esta vez, los segmentos CC' y CB' son más pequeños que AC y AB, e incluso, son inferiores a la mitad de estos últimos, siendo $B'C$ inferior a la mitad de BC ya que $\widehat{BB'C}$ es obtuso. Podemos repetir indefinidamente esta operación y, por tanto, nos es lícito hacer los correspondientes segmentos tan pequeños como queramos (puesto que cada vez disminuyen a menos de la mitad). Por consiguiente, l debe ser inferior a toda longitud dada, puesto que tiene que ser la longitud de un segmento contenido en todas estas subdivisiones; esta parte alícuota no puede, pues, existir.

Además, este ejemplo nos enfrenta a dos hechos. Por un lado, el papel de la geometría como criterio de justificación. Por otro, nuevamente tenemos a la geometría como fuente proveedora de posibles objetos matemáticos nuevos, en este caso, los infinitesimales.



Book One

THE MOTION OF BODIES

SECTION I

The method of first and last ratios of quantities, by the help of which we demonstrate the propositions that follow.

LEMMA I

Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer to each other than by any given difference, become ultimately equal.

If you deny it, suppose them to be ultimately unequal, and let D be their ultimate difference. Therefore they cannot approach nearer to equality than by that given difference D; which is contrary to the supposition.

LEMMA II

If in any figure AacE, *terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE, *there be inscribed any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c., comprehended under equal bases* AB, BC, CD, *&c., and the sides,* Bb, Cc, Dd, *&c., parallel to one side* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c., are completed: then if the breadth of those parallelograms be supposed to be diminished, and their number to be augmented* in infinitum, *I say, that the ultimate ratios which the*

[29]

Además este ejemplo muestra los inicios de la necesidad de esclarecer o incorporar a las matemáticas conceptos como los de infinito, límite y de continuidad. Así mismo, encontramos en Newton argumentos cuyo sustento se encuentran en la geometría [18].

Vale la pena volver a considerar que, en el mismo sentido en que los instrumentos proporcionan un componente ortopédico a los físicos, y que la precisión de los instrumentos puede influir de manera decisiva en las investigaciones (en tanto que muchas veces son el medio para nuevos descubrimientos), podemos decir que la geometría jugó un papel similar.

Así que como criterio de aceptación, el caso de la necesidad de medir la diagonal de un cuadrado fue el medio para la necesidad de incorporar nuevas magnitudes, las magnitudes irracionales.

Respecto a los números complejos, de acuerdo a lo que hemos dicho anteriormente, vemos que éstos encontraron una correspondencia en la geometría, de la que en esa época no se dudaba de su consistencia. Si se admite como consistente a la geometría euclideana, y si las operaciones algebraicas formales con números complejos son susceptibles de interpretación geométrica, desde cierto punto de vista es admisible el formalismo de los números complejos.

En todos estos sistemas se acepta a la geometría como si fuera un tribunal supremo. Sin embargo se tiene también que Gauss (1777-1855), quien sin conocer el trabajo de Wessel también dió una interpretación geométrica de los números complejos, en 1811 ya se había convencido de que un tratamiento "formal" debía dar una sólida teoría a este sistema numérico. Por tratamiento formal entendía la deducción de las propiedades de los números complejos a partir de postulados ya aceptados de la aritmética.

Lo que también aquí se presenta son varias vertientes en las que los criterios de aceptación fueron desplazados por las necesidades de fundamentar.

A su vez, criterios como la excesiva confianza en los símbolos, o la confianza en los resultados en aquéllas teorías matemáticas que servían a las teorías físicas, pueden ser considerados en cierto sentido como causantes del momento crítico del quehacer matemático a finales del siglo XVIII y principios del XIX.

2.4. Ejemplares

Toca en esta sección decir cuáles eran de acuerdo a Kuhn, los problemas solubles desde la matriz disciplinar que hemos planteado, a saber, el desarrollo de las nociones en torno al continuo numérico. En principio debemos reflexionar acerca de la afirmación de Moulines según la cual tanto las *generalizaciones simbólicas* como los *ejemplares* constituyen la parte esencial de un paradigma, pues constituyen su identidad [17, Moulines, p. 88]. Tal planteamiento marca un punto delicado en nuestra descripción si es que consideramos una demarcación tajante de matriz disciplinar. Desde una perspectiva actual y considerando la afirmación de Moulines, uno podría considerar al álgebra, la geometría y la física como matrices disciplinares distintas. Esto se puede pensar así en tanto que cada una posee un conjunto de expresiones formales que definen y/o rigen a sus objetos[30], y un conjunto de problemas que resuelven o

[30] Así por ejemplo, en la física la expresión $f = ma$ define y a su vez legisla lo que es la fuerza. En la geometría euclideana, los postulados y las nociones comunes que encontramos

son retos para la prueba de habilidad o poder que tienen las generalizaciones simbólicas para resolver problemas en una variedad de situaciones.

Por otro lado, hemos visto que en el estudio del continuo numérico estas áreas aportaron la necesidad de una expansión de los sistemas numéricos. Todo esto convergió en la necesidad de precisar lo que sería el concepto de número real. Y desde esta perspectiva no constituyen propiamente una matriz disciplinar con todos los componentes que la caracterizan de acuerdo al análisis de Kuhn; más bien serían teorías que se van articulando y van aportando ingredientes para la resolución del rompecabezas planteado por el continuo numérico.

De lo anterior, en cuanto a cuáles son los ejemplares de nuestra matriz disciplinar, podemos dar dos tipos de respuestas. La primera corresponde a las teorías que se fueron articulando y cuyas necesidades implicaron la expansión y precisión de las nociones numéricas. De ello se presentan específicamente algunos ejemplos en torno al álgebra, la geometría y la física. Por otro lado, están los problemas que tienen una relación más estrecha con el desarrollo de las nociones en torno al continuo numérico.

Cabe destacar que un factor común en la matemática de distintas épocas es que gran parte de los problemas planteados surgen por la necesidad de generalizar. Así, por ejemplo, cuando las series trigonométricas producían resultados inválidos para ciertos valores numéricos, Euler trató de generalizar

en los *Elementos de Euclides*, definen y a su vez legislan el comportamiento de los objetos de esa geometría. En general, los axiomas de una teoría definen y legislan a sus objetos.

y completar la fórmula agregando términos adicionales [14].

Entre los problemas planteados en la época que nos concierne algunos tenían que ver, por un lado, con las regularidades de los cuerpos celestes y cuya explicación fue encontrada en la Geometría y en la Mecánica. El modo en que los matemáticos resolvieron tales problemas estuvo guiado por el mapa trazado en gran parte por el cálculo infinitesimal. Así, en la primera sección del libro primero de los *Principia* de Newton encontramos once lemas sobre las primeras y últimas razones, *lo que le permitirá intercambiar indistintamente las figuras construidas con curvas y las correspondientes figuras construidas con líneas rectas* [12, Hawking, p. 343]. Entre los problemas resueltos encontramos uno que anticipó el criterio de *epsilon-delta* de Weierstrass, a saber, el primer lema de la primera sección del primer volumen de los *Principia* "Cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes del fin de ese tiempo se aproximan unos a otros tan cerca como cualquier cantidad dada, se vuelven finalmente iguales " [18, Newton p. 29].

Stephen Hawking nos hace notar que Newton engloba este enunciado en términos de cambio respecto al tiempo y que dio un uso inmediato a sus lemas en la primera proposición de los *Principia*: la ley de las áreas de Kepler [12, Hawking, p. 344].

Por otro lado, encontramos intentos de matemáticos del siglo XVIII de basar el análisis sobre el álgebra en lugar de la geometría, marcando así otro conjunto de problemas a resolver. Hemos comentado que el continuo de los números reales cobra un papel protagónico en las teorías de funciones de variable real y compleja, por lo que es importante recordar el trabajo de Euler, quien definió a una función de cantidad variable como una expresión analítica compuesta de algún modo de una cantidad variable y números o cantidades constantes [5, Euler, 1748]. Sin embargo, otra pieza del rompecabezas que había que precisar y que resultó de suma importancia para el desarrollo del continuo real, era lograr una mejor definición para el concepto de función, ya que la definición de Euler asume como evidente lo que se entiende por "expresiones analíticas". En principio, comenta Jahnke [14, Jahnke, p.114], estas son expresiones que se forman por medio de la aplicación de las operaciones algebraicas (adición, substracción, multiplicación, división, elevar a una potencia, extracción de raíces) una cantidad finita o infinita de veces. Para Euler, el concepto estaba abierto en la medida en que se podían plantear nuevas operaciones. Estableció una clasificación de las funciones de acuerdo al tipo de expresión analítica que involucraba. Distinguió entre funciones *algebraicas* y *trascendentales*. También entre funciones de una variable y de múltiples variables, y definió función como una variable que depende de otra variable [14]. Jahnke considera que el enfoque que más fuertemente influyó en el desarrollo del análisis fue el propuesto por Lagrange, quien también tendía a basar el análisis en el álgebra. Su *Théorie des fonctions analytiques* incluía tres partes. La primera comprendía un estudio de la teoría junto con sus aplicaciones más importantes para el análisis; la segunda la aplicación de la teoría de funciones a la geometría, y la tercera, la aplicación de la teoría de funciones a la mecánica [14, Jahnke, pp. 127-132]. Por otro lado, para Fourier

> En general una función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Para una infinidad de valores para la abscisa x, hay un igual número de ordenadas $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sea positivos, negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas están sujetas a una ley común; se suceden unas a otras de cualquier manera, y cada una es dada como si fuera una sola cantidad. (Fourier 1822, p. 500) [14, Véase Lützen en Jahnke, p. 157]

Otros matemáticos, como Dirichlet y Riemann, aceptaron esta definición.

El estudio de las funciones planteó problemas a partir de los cuales surge la necesidad de precisar conceptos en torno al continuo numérico, específicamente el concepto de número real. En cuanto a la continuidad tenemos que para Euler esta noción tuvo un carácter algebraico. Pero bajo la aceptación de las ideas de Fourier, este enfoque puede presentar serios problemas como lo expone Lützen [14, véase Lützen en Jahnke]. Las series de Fourier de una función Euler-discontinua $f(x)$ tal como $|x|$ da una expresión analítica (en terminología de Euler) de la forma

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha \\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(cos(nx)\int_{-\pi}^{pi} f(\alpha)cos(n\alpha)\,d\alpha + sin(nx)\int_{-\pi}^{pi} f(\alpha)sin(n\alpha)\,d\alpha\right)
\end{aligned}
$$

de modo que $|x|$ sería Euler continua. Sin embargo, más adelante Cauchy mostró un ejemplo, a saber,

$$
f(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases} \quad = \sqrt{x^2} \quad = \quad \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dt}{t^2+x^2}
$$

que mostraba que $f(x) = |x|$ ¡era discontinua!, con lo cual "un simple cambio de notación es muchas veces suficiente para transformar una función [Euler-]continua en una función [Euler-]discontinua y vice-versa". Cauchy dio una definición alternativa. Entre los matemáticos de finales del siglo XVIII que estudiaron las funciones *con saltos* está Arbogast (1791) quien les dio el nombre de funciones discontinuas. Lagrange había atribuido una propiedad a las funciones continuas que se asemeja a la posterior definición de Cauchy.

En el siglo XVII el concepto de convergencia de series había sido usado en muchas formas. Una es que los términos tienden a cero, otra que las sumas parciales s_n tienden a un límite fijo. Algunas veces Euler usó la segunda definición en sus *Institutiones Calculi Differentialis* [9, Euler, 1755 §110], y trató de formalizar la definición. Lo nuevo en Cauchy fue su $\epsilon - N$ caracterización de convergencia que usó en muchas de sus pruebas. Se hizo necesario para él establecer la convergencia de series antes de tratar de encontrar sus sumas y presentó pruebas respecto de algunos criterios de convergencia. El primero y fundamental es el hoy en día famoso criterio de Cauchy. Con ello estableció que una serie convergente es una serie [que hoy llamamos] de Cauchy (sus sumas parciales s_n forman una sucesión de Cauchy). No resolvió la proposición inversa. Ahora sabemos que el inverso se deriva de la *completud de los números reales* o se le considera como la definición de *completud*, lo cual debe ser postulado como axioma u **obtenido a partir de una construcción de los números reales.** Lützen comenta que esta explicación faltante es una laguna fundamental que aparece en muchos otros lugares del análisis de Cauchy.

La estrecha relación del concepto de función con la idea de fórmula distinguió el análisis del siglo XVIII. No tenía sentido probar la existencia de un objeto de manera abstracta dado que éste era dado como una fórmula.

En las secciones anteriores hemos descrito cómo surge la necesidad de extender los sistemas numéricos en distintas ramas de la matemática. Específicamente mencionamos que la incorporación de los números complejos emerge tanto por cuestiones del análisis como del álgebra y la geometría. Lo mismo sucede con los hipercomplejos, que se abren camino a raíz de cuestiones algebraicas, geometricas o físicas. El continuo de los números reales cobra interés propio en las teorías de funciones de variable real y compleja.

2.5. Recapitulación de todos los elementos del análisis kuhneanos

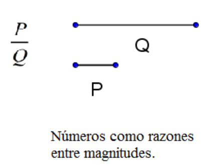
La actividad matemática que se ha descrito en las secciones anteriores ha quedado enmarcada en un período que Kuhn caracterizaría como período de ciencia normal, en el que se articulan distintas teorías para resolver el rompecabezas planteado en torno a un paradigma, que en nuestro caso, como ya se ha mencionado, lo constituye el continuo real. Es un período de producción en el que sí hay acumulación de conocimiento y en el que además se acuñan nuevos términos y en donde los científicos son formados para adquirir los conocimientos que les permitirán ver los objetos en este caso los objetos matemáticos de cierta manera. En tal formación juegan un papel fundamental los libros de texto.

En la descripción de las secciones anteriores se han visto dos vertientes en torno a las cuales surge la necesidad de ampliar y precisar el concepto de número. Por un lado a raíz de la geometría, la física y el álgebra se tiene la necesidad de plantear números como los complejos y los hamiltonianos. Para la consolidación de los números complejos había que tener claridad respecto a ciertos números reales. Por otro lado, en torno al desarrollo de las nociones de límite y continuidad (en las que subyacen también necesidades de la física), aparece la necesidad de precisar la noción de función y sumamente ligado con ello encontramos la noción de continuidad y el uso de series convergentes, lo cual requiere precisar el concepto de número real.

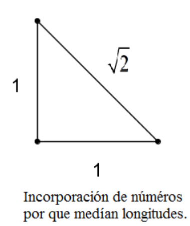
Ya hemos visto que muchos métodos y creencias fueron herencia de los matemáticos de la antigüedad, y que los criterios de aceptación giraban en torno a que las demostraciones o nuevos objetos encontraban sustento en la geometría o en los resultados consistentes con la descripción del mundo. Además, que las generalizaciones simbólicas influyeron en la precisión de ciertos conceptos, como fue el caso de los números complejos, y que los problemas planteados, que giraron en torno a las definiciones de función, límite y continuidad, desembocaron en la necesidad del esclareciemiento de la noción de número real.

Es importante tener claridad respecto a las nociones fundamentales sobre las que se produce el cambio conceptual, para lo cual, en los siguientes diagramas se esboza de manera general lo dicho en el presente capítulo.

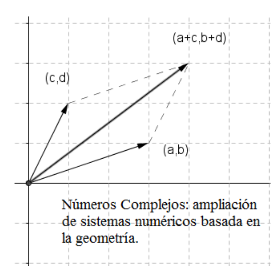
(a) En torno a la noción numérica



Números como razones entre magnitudes.



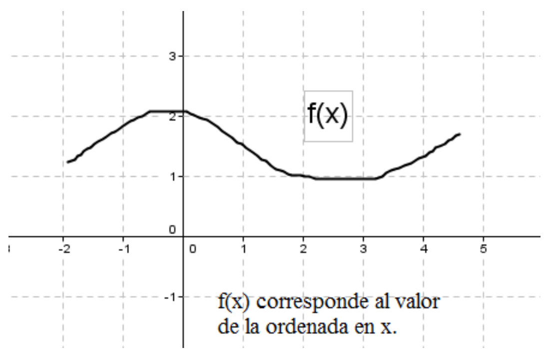
Incorporación de númeos por que median longitudes.



Números Complejos: ampliación de sistemas numéricos basada en la geometría.

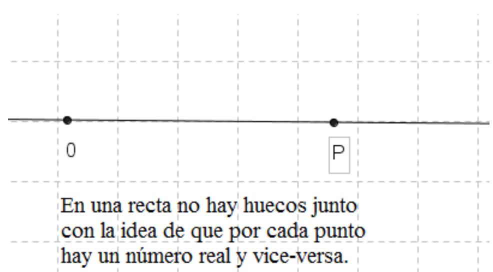
(b) En torno al concepto de función

Muchas veces el concepto de función fue utilizado aunque no se tuviera una definición precisa, así por ejemplo[31], Descartes ya tenía una idea intuitiva de los conceptos de variable y función. No obstante, Johann Bernoulli fue el primero[32] en hablar de funciones de ordenadas en un documento de 1698, entendiendo por esto expresiones arbitrarias que contenían las ordenadas como variables. Nótese que esta definición apela directamente a la representación geométrica de las funciones.



(c) Respecto a la continuidad

Los números reales son asociados a puntos en una línea recta, de manera que la idea de continuidad numérica está fuertemente vinculada al hecho de que no hay huecos en una línea recta.



[31]Como ya hemos dicho en la sección 1 de este capítulo.
[32]Véase [26].

En su descripción del quehacer científico en un período de ciencia normal, Kuhn considera tres tipos de fenómenos. Esta clasificación ha quedado ejemplificada en las secciones anteriores, si consideramos como fenómeno los problemas a resolver en la matemática. El primer tipo, que son los que quean explicados por paradigmas existentes, los podemos identificar con aquéllos que encontraron explicación en la geometría. Los del segundo tipo, cuya naturaleza está marcada por el paradigma existente, aunque los detalles sólo se pueden comprender mediante una articulación teórica posterior los podemos identificar como aquéllos que surgen a raíz de la necesidad de precisar las nociones de límite, continuidad y números reales. Por ejemplo, el inverso del criterio de Cauchy para series convergentes. Los del tercer tipo, referentes a las anomalías reconocidas cuyo rasgo característico es su obstinada negativa a dejarse asimilar por el paradigma existente serán tratados en el siguiente capítulo.

Un aspecto importante que hay que reconocer es que no hay una demarcación clara para establecer las distintas matrices disciplinares en un período histórico dado. Ya que si uno se plantea el desarrollo en torno a un cierto conjunto de creencias eso podría plantearse como matriz disciplinar y en el estudio de su desarrollo se determinarán las teorías que se fueron articulando en torno a esas nociones. Desde otro punto de vista, las matrices disciplinares cambiarían. Así uno puede pensar, por un lado, como matrices disciplinares distintas las algebraicas y las geométricas; sin embargo desde el punto de vista de la expansión de las nociones numéricas, éstas las consideramos como teorías que en su desarrollo contribuyeron a dicha expansión y por tanto fueron consideradas parte de una misma matriz disciplinar.

También considero que el surgimiento de un nuevo paradigma puede darse a partir de las necesidades de otros distintos que se intersectan en cuanto a que en todos va surgiendo la necesidad de incorporar un cierto concepto. Y que una descripción completa implicaría un análisis de todas las posibles matrices disciplinares, que aunque siendo éste conjunto un conjunto finito, queda duda si es posible. Creo también que puede pensarse en una transformación de las matrices disciplinares en teorías (cuando han resuelto el rompecabezas) y de las teorías como constituyentes de alguna matriz disciplinar (o varias).

Capítulo 3

Crisis y Transición

En el capítulo anterior mostramos un período en el desarrollo de la matemática en el que diferentes teorías se fueron articulando, resolviéndose el rompecabezas del desarrollo de ciertas nociones del análisis matemático que surgieron a raíz del cálculo de Leibniz y de Newton. Hemos dado algunos ejemplos de la empresa acumulativa de conocimiento matemático en ese período y los procesos de ampliación de dicho conocimiento.

En este capítulo nos interesa mostrar, de acuerdo al mapa de análisis que nos proporciona Kuhn, aquellos elementos que condujeron a la revolución provocada por la incorporación de una nueva concepción numérica. Recordemos que en el proceso de cambio, para Kuhn, las anomalías y los descubrimientos son elementos constitutivos. Los detalles explicitados por Kuhn, respecto a cómo las anomalías pueden desencadenar las crisis que desembocan en una revolución científica han sido descritos en el primer capítulo.

De manera que los factores que contribuyeron a un cambio conceptual respecto a la noción de número son, por una parte, las anomalías presentes por la falta de precisión con que se introducían nuevos conceptos[1]. Ejemplo de ello lo encontramos en el tratamiento de las cantidades infinitamente pequeñas de lo cual Berkeley hizo importantes críticas. Berkeley mostró que muchas definiciones en el cálculo infinitesimal eran paradójicas y no podían ser justificadas por la intuición. Bell afirma [24, Bell, p. 299] que el ataque que hizo Berkeley en su *Analyst* (1734) fue una de las críticas más fundadas. Berkeley acusó a quienes usaban las fluxiones de Newton de cambiar las hipótesis en medio de sus razonamientos. Sostenía que el sustituir $x + h$, (siendo h infinitamente pequeña), en lugar de x en x^n y hacer que en el paso final desapareciera el incremento para obtener la fluxión de x^n, es un cambio de hipótesis: "...porque cuando se dice que los incrementos no valen nada o que no hay incrementos, la suposición anterior de que los elementos valían algo o de que había incrementos, queda destruida...". Por su parte C. Maclaurin en su *Treatise of Fluxions* (1742) intentó derivar el cálculo de fluxiones de Newton en una manera rigurosa a partir de principios indiscutibles. Interpretó el cálculo como una generalización de la geometría antigua. En efecto, alrededor de 1780 los infinitesimales habían sido rechazados en general por ser considerados nociones problemáticas. Así que la noción de los infinitesi-

[1] Esta falta de precisión o escaso rigor en la introducción de nuevos conceptos caracterizó a la matemática del siglo XVIII y principios del XIX.

males[2] fue una de las anomalías que se presentaron en el análisis matemático y esta fue heredada desde los antiguos griegos[3].

Otra anomalía fundamental se presentó en relación a la completud de los números reales. En la sección 4 del capítulo anterior, mencionamos que algunos tratamientos que se daban de la noción de continuidad conducían a situaciones contradictorias. También hemos dicho que en los siglos XVII y XVIII se fueron consolidando las nociones de límite y de convergencia de series, y hemos mencionado la novedosa aportación de Cauchy respecto a su caracterización $\epsilon - N$ de convergencia. En este contexto, tenemos que Cauchy no resolvió el inverso de su criterio de convergencia de series, pues el inverso se deriva de la completud de los números reales. Sin embargo, en aquélla época aún no se tenía una definición precisa de número real, es decir, no se había dado una prueba formal de la existencia de los números irracionales[4].

Bell mismo se cuestiona [24, Bell, p.162] ¿cómo se las arreglaron los analistas del siglo XVIII (los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, etc.) para obtener resultados consistentemente correctos en casi toda su obra tanto de matemática pura como de matemática aplicada? A lo cual responde parcialmente diciendo que los matemáticos que hubo entre Newton y Cauchy obtuvieron resultados

[2]Para algunos matemáticos como Leibniz y Johann Bernoulli los infinitesimales eran cantidades infinitamente pequeñas, atribuyéndole como una de sus características el hecho de que *una cantidad que es incrementada o decrementada por una cantidad infinitamente pequeña no es incrementada ni decrementada.*

[3]En las páginas 58-59 hemos dado un ejemplo en el cual se muestra, además, cómo es que la geometría jugó el papel de fuente proveedora de nuevos objetos matemáticos, en particular el argumento ahí presentado implicaba la existencia de los infinitesimales.

[4]Véase [2].

correctos según los juicios actuales, debido a que habían captado instintivamente la parte consistente de sus matemáticas.

Las dos situaciones anteriores son ejemplos significativos de que una de las características del desarrollo de la matemática, en aquélla época, fue el escaso rigor con el que se habían estado introduciendo nuevos conceptos, y la forma como se justificaban los resultados. Lo anterior provocado, en gran parte, por la confianza que se tenía en las aplicaciones de la matemática a la física o en que los nuevos resultados permitían resolver algunos otros problemas de la matemática.

De manera que la importancia de los ejemplos anteriores radica en que, la falta de precisión en la introducción de nuevos conceptos, ya estaba presente desde los *Principia* de Newton, siendo ésta obra la parte medular del desarrollo de la matemática que nos concierne. Además, como se menciona a lo largo de este trabajo, la necesidad de precisar el concepto de continuidad es un punto fundamental para el cambio conceptual que aquí se plantea.

Así mismo, en el capítulo anterior hemos hablado de la intención de algunos matemáticos como Peacock, Gauss, Cauchy, Lagrange, entre otros, de formalizar algunas nociones en la matemática y deslindarlas de la geometría. Por ejemplo hemos hablado de que Peacock, De Morgan y Hamilton, iniciaron trabajos con intención de formalizar el álgebra y la aritmética. Sin embargo, ante la pregunta de qué es lo que provocó la necesidad de fundamentar el análisis, encontramos que puede haber distintas respuestas. De acuerdo a Grabiner [11] o Kline, un factor importante fue la necesidad de exponer un tema en divulgaciones populares de matemáticos para un cierto público, o bien, en respuesta a los ataques sobre la correctud lógica del cálculo. La divulgación del cálculo implicó que había que explicar los términos fundamentales. Grabiner también menciona que enseñar, quizás más que escribir libros de texto, estimuló a los matemáticos a considerar los fundamentos de su tema.

Por otro lado, Grabiner agrega que la controversia Newton-Leibniz también contribuyó a la discusión de los fundamentos del cálculo. Newton y sus seguidores resaltaron ciertos puntos acerca de su cálculo en un intento para mostrar que era diferente y superior que el de Leibniz. Al tratar de defender el cálculo de Newton, los matemáticos británicos enfatizaron el rigor superior de la geometría sobre los menos rigurosos y algebraicos infinitesimales. Este objetivo, afirma Grabiner, también condujo a los matemáticos británicos a amplios debates sobre los fundamentos.

Si bien son varios los factores que pueden considerarse que provocaron la necesidad de fundamentar el análisis y que conllevó la necesidad de precisar el concepto de número, hemos observado que estuvo presente la inseguridad respecto a la forma como se habían estado introduciendo los nuevos objetos matemáticos. Tal inseguridad y la presencia de situaciones contradictorias, como las que hemos presentado, constituyen un síntoma de crisis en la propuesta de Kuhn.

Así mismo encontramos en Grabiner [11, Grabiner, pp.31-36] algunos ejemplos de lo que, en términos de Kuhn, llamamos anomalías presentes en el cálculo infinitesimal. Entre ellos, comenta otro factor que producía la inseguridad respecto a los infinitesimales, a saber, que no obedecían el axioma Arquimediano[5], por lo que no tenían un legítimo estatus matemático. Otro ejemplo es respecto a las Fluxiones. Grabiner señala que Newton y sus seguidores británicos consideraron las velocidades o tasas de cambio como conceptos básicos. Pero éstos se entendían en términos de velocidad. Al respecto Berkeley, d´Alembert y Lagrange señalaron que no se tenía una idea suficientemente clara e independiente de velocidad que sirviera para los fundamentos del cálculo. D´Alembert y Lagrange insistieron en que el cálculo no debe depender sobre una idea fuera de las matemáticas.

Tenemos entonces que el mapa de análisis proporcionado por Kuhn para el desarrollo de una ciencia, nos permite contextualizar aquellos elementos del desarrollo del análisis que condujeron a la necesidad de precisar la noción de número, así como de otras cuestiones fundamentales para el análisis matemático. Tenemos además que, de acuerdo con Kuhn, sólo surge una teoría nueva tras un pronunciado fallo para resolver problemas en la actividad normal de resolución de problemas. La teoría nueva parece dar respuesta directa

[5] El axioma Arquimediano o propiedad Arquimediana la encontramos en la obra de Arquímedes sobre la cuadratura de la parábola, la cual presenta la siguiente forma: *el exceso por el cual la más grande de dos áreas excede a la menor puede agregarse a sí mismo para exceder a cualquier área finita.* Actualmente la propiedad Arquimediana se enuncia en los libros de análisis de la siguiente forma: dado cualquier número real, existe un entero mayor que él.

a la crisis. Es durante la crisis que el científico intentará constantemente construir teorías especulativas que de tener éxito conducirán a un nuevo paradigma. El significado de la crisis es que ha llegado el momento de cambiar de herramientas. De acuerdo con esto, y respecto a la completud de los números reales, o bien, en cuanto a la prueba formal de la existencia de los números irracionales, tenemos los trabajos de varios matemáticos que intentaron dar una formulación precisa de la noción de número real. Entre los matemáticos que se encontraban trabajando sobre este aspecto están Joseph Bertrand, Tánery, entre otros, pero el trabajo principal lo debemos a Richard Dedekind y a Georg Cantor. Por limitaciones en cuanto a la extensión de este trabajo, sólo abordaremos el trabajo de Dedekind. A continuación mostraremos cómo el trabajo de Dedekind condujo a lo que en el análisis de Kuhn se considera una revolución científica. Pero debemos aclarar que el nuevo paradigma surge principalmente por los trabajos tanto de Cantor como de Dedekind, aunque sus trabajos trazaron rutas independientes para la nueva noción conjuntista de la matemática.

Capítulo 4

La Revolución Conceptual

En los capítulos anteriores hemos comentado acerca de los diversos intentos por fundamentar el análisis por parte de matemáticos del siglo XVIII y principios del XIX. Seguramente ha faltado mencionar la obra de más de un matemático que contribuyó de manera relevante a los fundamentos del análisis. No es mi intención presentar un catálogo de estas obras importantes, sino solo dar una visión panorámica del trabajo que contribuyó a la expansión de los sistemas numéricos, principalmente del continuo real. Sobre esto ya hemos visto que las discusiones en torno a la convergencia de series fueron parte importante para la necesidad de precisar este concepto.

Toca en este capítulo describir cómo es que Dedekind da una definición de número real y cómo es que esta nueva perspectiva produjo lo que en términos de Kuhn puede ser considerado como una revolución científica.

En el prefacio de su obra *Continuidad y Números Irracionales* [7], Dedekind comenta acerca de la carencia de un fundamento realmente científico para la aritmética. Señala que discutiendo la noción de la aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, y especialmente al probar el teorema de que cada magnitud que crece continuamente, pero no más allá de todos los valores, ciertamente debe aproximarse a un valor límite, ha tenido que recurrir a evidencias geométricas[1]. Comenta que esto está muy bien desde un punto de vista didáctico, y que incluso es indispensable si no se quiere perder mucho tiempo. Pero que esta forma de introducción al cálculo no se puede considerar científica. Que tal reflexión resultó tan abrumadora que se propuso meditar en la cuestión hasta encontrar un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso para los principios del análisis infinitesimal. Cabe señalar que el mismo Dedekind comenta[2] que siendo profesor en la *Escuela Politécnica de Zürich* se vio por primera vez obligado a leer los elementos del cálculo diferencial y fue cuando percibió más vivamente que nunca la carencia de un fundamento realmente científico para la aritmética. Cabe destacar aquí un punto que Kuhn señala respecto a los libros de texto y las divulgaciones de un campo de conocimiento. Pues es notorio, una vez más, que en la actividad de divulgación es cuando surge la necesidad de precisar los conceptos. Para Dedekind incluso las exposiciones más rigurosas del

[1] En el capítulo 1 hemos visto que Cauchy establece una caracterización para las series convergentes, lo que hoy llamamos series de Cauchy, y que sin embargo, no resolvió el converso.

[2] Dedekind comenta que estas consideraciones las hizo en el otoño de 1858.

cálculo diferencial no basan sus pruebas sobre continuidad, sino que apelan a nociones geométricas o aquéllas sugeridas por la geometría, o dependen sobre teoremas que **nunca han sido establecidos en una forma puramente aritmética**. Agrega que lo único que queda es descubrir su verdadero origen en los elementos de la aritmética y así al mismo tiempo asegurar de este modo, una real definición sobre el concepto de continuidad.

Así, Dedekind observa que la forma en la que los números irracionales son usualmente introducidos está basada directamente en la concepción de magnitudes extensivas las cuales no están definidas cuidadosamente en ninguna parte y explican los números como resultado de medir tales magnitudes por medio de otra de la misma clase.

Su petición fundamental la expresa así, *pido que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma*. Lo que podemos llamar, en términos de Kuhn, uno de sus *criterios de aceptación para nuevos conceptos* lo hallamos cuando expresa que, *...debemos esforzarnos completamente para definir números irracionales por medio de números racionales solamente*.

Por la relevancia histórica hay que agregar que en la introducción de su ensayo, Dedekind dice que mientras estaba escribiendo ese prefacio (Marzo 20, 1872) había recibido un documento de G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, en el cual encuentra –dice, *en una lectura apresurada*– que el axioma que se da en la Sección II de ese documento, va de acuerdo con lo que él designa, en su

Sección III, como la esencia de la continuidad[3]. El proceso del cambio se describe en la siguiente sección. En la descripción de tal proceso podemos apreciar la presencia de las características señaladas por Kuhn del desarrollo de la ciencia. Se han agregado algunas reflexiones de Dedekind que muestran lo que podría adecuarse para el análisis de Kuhn como criterios de aceptación para la introducción de nuevos objetos o de nuevas nociones. En el discurso kuhneano también está presente un componente sociológico que señala la relevancia de los medios disponibles de comunicación, así como la investigación de varios científicos en torno a una misma idea; la importancia de la transmisión de las ideas en el proceso de precisar los nuevos conceptos. Todas estas características las hallaremos también en la siguiente sección.

4.1. Proceso del cambio

En la sección I de su ensayo Dedekind va a considerar las propiedades más básicas de los números racionales, aquéllas de carácter puramente aritmético, pero no obstante basadas en ideas geométricas. Lo importante en esta sección es la caracterización puramente aritmética. Destaca las características de los números racionales, las cuatro operaciones básicas y el orden. En la sección II hace una comparación de los números racionales con los puntos de una línea recta. La analogía es determinante, ya que como él mismo lo indica, ésta se convierte en una real correspondencia cuando se selecciona sobre la línea

[3]A saber la completud del sistema de números.

recta un origen definido y una unidad definida de longitud para la medida de segmentos. De manera que afirma que a cada número racional se le puede construir una longitud correspondiente.

Las características destacadas por separado entre propiedades de los números racionales y los puntos en una línea recta y que a su vez determina una analogía entre ambos sistemas, se describen a continuación.

CONSIDERACIONES RESPECTO A DOS NÚMEROS

Para expresar que los símbolos a y b representan uno y el mismo número lo ponemos $a = b$ o también como $b = a$. El hecho que dos números racionales a, b son diferentes ocurre en que la diferencia $a - b$ tiene valor ya sea positivo o negativo. Agrega que en el primer caso se dice que a es mayor que b, b menor que a; que esto también es indicado por los símbolos $a > b$, $b < a$. Como en el último caso, $b - a$ tiene valor positivo se sigue que $b > a$, $a < b$.

CONSIDERACIONES RESPECTO A DOS PUNTOS

Las propiedades de los números racionales recuerdan las correspondientes relaciones de posición de los puntos de una línea recta L. Si las dos direcciones opuestas existen, estas son distinguidas por "derecha"e "izquierda", y p, q son dos diferentes puntos, entonces p está a la derecha de q , y al mismo tiempo q a la izquierda de p, o por el contrario q está a la derecha de p y al mismo tiempo p a la izquierda de q. Un tercer caso es imposible, si p, q son puntos realmente diferentes.

A continuación las principales propiedades que guardan entre sí los números racionales que simboliza con R y las propiedades que guardan entre sí los puntos de una recta L.

CONSIDERANDO LAS FORMAS EN QUE DOS NÚMEROS PUEDEN SER DIFERENTES, SE CUMPLEN LAS SIGUIENTES LEYES

1. Si $a > b$, y $b > c$, entonces $a > c$. Siempre que a, c sean dos números diferentes, y b es mas grande que uno y menor que el otro, debemos, sin dudarlo debido a la sugerencia de las ideas geométricas, expresar esto brevemente diciendo: b se encuentra entre los dos números a, c.

2. Si a, c son dos números diferentes, hay infinitamente muchos números diferentes que se encuentran entre a, c.

3. Si a es cualquier número definido, entonces todos los números del sistema R caen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitamente muchos individuos; la primera clase A_1 comprende todos los números a_1 que son $< a$, la segunda clase A_2 comprende todos los números a_2 que son $> a$; el número a mismo puede ser asignado a placer a la primera o a la segunda clase, siendo respectivamente el más grande número de la primera clase o el menor de la segunda. En cada caso la separación del sistema R en las dos clases A_1, A_2 es tal que cada número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2.

CONSIDERANDO LAS FORMAS EN QUE DOS PUNTOS PUEDEN ESTAR COLOCADOS EN UNA LÍNEA RECTA L, SE CUMPLE LO SIGUIENTE:

1. Si p se encuentra a la derecha de q, y q a la derecha de r, entonces p se encuentra a la derecha de r; y decimos que q se encuentra entre los puntos p y r.

2. Si p, r son dos puntos diferentes, entonces siempre existen infinitamente muchos puntos que se encuentran entre p y r.

3. Si p es un punto definido en L, entonces todos los puntos en L caen en dos clases P_1, P_2, cada una de las cuales contiene infinitamente muchos individuos; la primera clase P_1 contiene todos los puntos p_1, que se encuentran a la izquierda de p, y la segunda clase P_2 contiene todos los puntos p_2 que se encuentran a la derecha de p; el punto p mismo puede ser asignado a placer a la primer o segunda clase. En cada caso la separación de la línea recta L en las dos clases o porciones P_1, P_2 es de tal carácter que cada punto de la primera clase P_1 se encuentra a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2.

Lo que impulsa la necesidad de una nueva concepción de número real es la continuidad. Ante la pregunta *¿En qué consiste la continuidad?* Dedekind observa que únicamente a través de la respuesta a esta pregunta es que obtendremos una base científica para la investigación de todos los dominios continuos. Que **el problema es indicar una característica precisa de continuidad que pueda servir como la base para deducciones válidas**. Agrega que **la esencia de la continuidad la encuentra en el converso del siguiente principio**

> "Si todos los puntos de la línea recta caen en dos clases tales que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, este corte de la línea recta en dos porciones".

Este es un principio del cual Dedekind estará complacido si los lectores lo encuentran obvio, y del cual afirma que es absolutamente incapaz de aducir alguna prueba de su correctez ni que alguien tenga el poder. Dice que esta afirmación no es nada más que un axioma por medio del cual se atribuye a la línea su continuidad. Y en esa tendencia del matemático a generalizar, agrega que *si supiéramos por cierto que el espacio fuera discontinuo nada nos impediría, en caso de desearlo, para llenar sus huecos, en pensar y así hacerlo continuo; esta completud consistiría en la creación de nuevos puntos y tendría que ser efectuado de acuerdo con el principio anterior*. Con lo anterior observamos así que la incorporación de nuevos objetos muchas veces ha sido justificado por la sola necesidad de completar las ideas proporcionadas por conocimiento previamente establecido, siendo en este caso, el conocimiento geométrico de las magnitudes.

El proceso de construcción de los números de Dedekind continúa de la siguiente forma. Si es dada cualquier separación del sistema R[4] en dos clases A_1, A_2 que sea sólo esta propiedad característica de que cada número a_1 en A_1 es menor que cada número a_2 en A_2 entonces por brevedad se llamará a tal separación un corte [schnitt] que se distinguirá por (A_1, A_2). Dedekind afirma que podemos decir que cada número racional produce un corte el cual posee además la propiedad de que ya sea que entre los números de la primera clase exista un elemento más grande o entre los números de la segunda uno menor. Y conversamente, si un corte posee esta propiedad entonces es producido por este más grande o menor número racional. **Pero**, agrega, **es fácil mostrar que hay infinitamente muchos cortes que no son producidos por medio de números racionales**. En esta propiedad de que no todos los cortes son producidos por medio de números racionales consiste la **incompletud** o *discontinuidad* del dominio R de todos los números racionales[5]. Es con esto que Dedekind aporta a la matemática unos números reales definidos en términos meramente aritméticos y que en base a esta sola definición aritmética poseen por sí mismos una propiedad fundamental que ya desde la antigüedad se pedía que debían cumplir los números, la de con-

[4]Recordemos que con R se está refiriendo al sistema de los números racionales.

[5]Dedekind ejemplifica este hecho al considerar D un entero positivo que no es cuadrado de un entero, entonces existe un entero positivo λ tal que $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$. Asigna a la segunda clase A_2 cada número racional positivo a_2 cuyo cuadrado es $> D$ y a la primera clase A_1 todos los otros números racionales a_1, esta separación forma una cortadura (A_1, A_2) que no es producida por ningún número racional. Lo demuestra.

tinuidad o su completud. Dice, *"...Entonces lo que tenemos que hacer con un corte* (A_1, A_2) *que no es producido por ningún número racional, es crear uno nuevo, un número irracional* α*, en cual está completamente definido por su corte* (A_1, A_2)*"*. Dedekind demuestra que efectivamente éstas clases están completamente determinadas y por medio de considerar todos los casos posibles, muestra que cualesquiera dos números α y β así definidos por cortes (A_1, A_2) y (B_1, B_2) son comparables mediante una relación de orden y que mantienen las propiedades que se describieron previamente en su comparación de *números racionales diferentes* con *puntos diferentes* en una línea recta. Sin embargo, la analogía entre propiedades de orden de los números con los puntos en una línea recta ahora queda completamente establecida, en principio[6], debido a que ahora los números también poseen la propiedad de continuidad. Lo cual menciona Dedekind de la siguiente manera

> "Además de estas propiedades[7], sin embargo, el dominio $\mathfrak{R}$ posee también continuidad; es decir, el siguiente teorema es verdad:
>
> IV. Si el sistema $\mathfrak{R}$ de todos los números reales se separa en dos clases $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tales que cada número a_1 de la clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número a_2 de la clase $\mathfrak{A}_2$ entonces existe uno y sólo un número α por medio del cual esta separación es producida."

A continuación, en la sección 6 de su ensayo, Dedekind define la suma de

[6]Esto no se mantendrá con la presentación de un modelo no estándar para los números reales.

[7]Se refiere a las correspondientes tres propiedades de orden que sus nuevos números cumplen al igual que las tres propiedades de orden previamente descritas del sistema R de los números racionales.

sus números y comenta que así mismo pueden ser definidas las otras operaciones elementales. En la introducción de este cambio de visión de número real, a diferencia de las ciencias empíricas, sí se consideran todos los casos posibles en el análisis que se hace cuando se introducen los nuevos conceptos relacionados.

En la sección VII de su ensayo, se dispone a explicar la conexión de sus investigaciones precedentes y ciertos teoremas fundamentales del análisis infinitesimal. En la demostración del siguiente teorema Dedekind ha desprendido su argumento de lo geométrico. El teorema se refiere a que *si una magnitud crece continuamente pero no más allá de todos los límites ésta se aproxima a un valor límite*. Su demostración es la siguiente:

> Por hipótesis existe uno y así infinitamente muchos números α_2 tales que x permanece continuamente $< \alpha_2$; Designo por $\mathfrak{A}_2$ el sistema de todos estos números α_2, por $\mathfrak{A}_1$ el sistema de todos los otros números α_1; cada uno de los últimos posee la propiedad que en el curso del proceso x llega a ser finalmente $\geq \alpha_1$, así cada número α_1 es menor que cada número α_2 y consecuentemente existe un número α el cual es ya sea el más grande en $\mathfrak{A}_1$ o el menor en $\mathfrak{A}_2$ (V, IV). El primero no puede ser el caso dado que x nunca deja de crecer, así α es el menor número en $\mathfrak{A}_2$[8].

[8]Aquí es importante notar que así como para cualquier número racional a, todos los demás números racionales caen en alguna de dos clases, A_1, A_2 siendo la primera que contiene a todos los que son menores que a y los de la segunda mayores, de modo que a puede ser asignado a placer a alguna de las dos clases, determinando así un corte (A_1, A_2), pero no resulta que para cualquier corte (A_1, A_2) hay un número racional asociado, por el contrario, si se procede de forma análoga con el nuevo sistema $\mathfrak{R}$, Dedekind nos dice que al separar éstos en dos clases $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, siempre habrá un número en el nuevo sistema $\mathfrak{R}$ que queda determinado por $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$.

> Para cualquier número α_1 tendremos finalmente que $\alpha_1 < x < \alpha$, es decir, x se aproxima al valor límite α.

Dedekind comenta que este teorema es equivalente al principio de continuidad, es decir que éste carece de validez tan pronto como asumimos un único número real que no esté contenido en el dominio $\Re$; o expresado de otra forma, si este teorema es correcto también lo es el dicho en el punto IV demostrado de la sección V, el cual es el primero de los tres siguientes teoremas que son equivalentes.

Teorema 1 *Si se divide al sistema $\Re$ de números reales en dos clases $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tales que cada número α_1 de la clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número α_2 de la clase $\mathfrak{A}_2$ entonces existe uno y sólo un númro α por el cual la separación es definida.*

Teorema 2 *Si una magnitud x crece continuamente pero no más allá de todos los límites, ésta se aproxima a una valor límite.*

Teorema 3 *Si en la variación de una magnitud x podemos asignar para cada magnitud δ positiva dada, una posición correspondiente desde y después de la cual x cambia por menos que δ, entonces x se aproxima a un valor límite.*

Respecto a tratar de encontrar, de acuerdo con Kuhn, criterios de aceptación para la introducción de nuevos objetos, encontramos nuevamente uno en la afirmación que hace Dedekind en la que expresa que ...*La comparación ... del dominio R de números racionales con una línea recta ha llevado al reconocimiento de la existencia de lagunas, de una cierta incompletud o discontinuidad de éste, mientras que atribuimos a la línea recta completez, ausencia de lagunas o continuidad*.

Con lo anterior hemos visto cómo es que Dedekind se dispuso a hacer una construcción puramente aritmética de los números de tal forma que esta noción de continuidad se mantuviera. Nuevamente la geometría jugó ese papel heurístico de modelo a través del cual se esclarece una propiedad de los números reales que da pie luego a una construcción independiente de la geometría.

Además, en la sección III de su ensayo, Dedekind observa que *de la mayor importancia, sin embargo, es el hecho que en la línea recta L hay infinitamente muchos puntos que no corresponden a ningún número racional*. Dice que la línea L es infinitamente más rica en puntos que el dominio R de números racionales en individuos. Este hecho es muy significativo en tanto que, en **este proceso de cambio** tal observación tiene estrecha relación con la gestación de un nuevo problema muy relevante planteado por G. Cantor, a saber, el de la Hipótesis del Continuo. Dicho problema incluso fue el primero de los veintitres problemas planteados por Hilbert en el *Primer Congreso Internacional de Matemáticos* en París. En efecto, el 29 de Noviembre de 1873 (un año después de que Dedekind escribiera el prefacio de su ensayo *Continuidad y Números Irracionales*, el 20 de Marzo de 1872) G. Cantor le escribe a Dedekind una carta [22, Sestier, p. 38]:

> Tenemos el conjunto de todos los individuos enteros positivos n, y representémoslo mediante (n); después, consideremos el conjunto de todas las magnitudes numéricas reales positivas x, y representémoslo mediante (x); el problema simplemente es saber si (n) puede ponerse en correspondencia con (x) de manera tal que a cada individuo de uno de los conjuntos corresponda un individuo y sólo uno del otro. A primera vista se diría que no es posible, pues (n) se compone de partes discretas en tanto que (x) forma un continuo; pero de esta objeción nada puede ganarse y por mucho que me inclino a pensar que no existe correspondencia unívoca entre (x) y (n) no puedo encontrar la razón... ¿Acaso no está uno inclinado a concluir a primera vista que (n) no puede ponerse en correspondencia unívoca con el conjunto $(\frac{p}{q})$, de todos los números racionales $\frac{p}{q}$?...

En una nota sobre dicha carta, Dedekind escribe que contestó que no sabía decidir.

Así tenemos a miembros de una misma comunidad científica[9] que se comunican y preguntan dudas sobre una misma cuestión que sin embargo los conducirá a caminos fructíferos distintos.

[9]Cantor y Dedekind pueden considerarse como parte de lo que Kuhn llama una misma comunidad científica, en tanto que a pesar de ser de países distintos, ambos tenían el mismo interés en precisar la noción de continuo numérico.

También vale la pena mencionar que en la introduccion de su ensayo, Dedekind comenta:

> Mi atención se dirigió hacia las consideraciones que son objeto de este panfleto en el otoño de 1858...

aunque después, al escribir en en 1872 el prefacio de su ensayo, comenta que dice que es debido al apoyo de E. Heine por quien decide publicar sobre el tema pues sólo se había limitado a exponerlo a algunos de sus pupilos. Vuelven a estar presentes las características que señala Kuhn en el proceso de desarrollo de la ciencia, en este caso respecto a las distintas actividades de los científicos que van ayudando al establecimiento del nuevo paradigma. En particular podemos notar la comunicación de las ideas por medio de las clases o las publicaciones.

En el proceso en el que la nueva noción de número real se fue acuñando, hemos señalado ya un poco acerca de la actividad de otros matemáticos que desarrollaron ideas en torno a este mismo paradigma. Una observación al respecto hace Dedekind en el prefacio de su obra *Naturaleza y significado de los números*, en el que comenta que la misma teoría de los números irracionales fundada sobre el fenómeno de cortadura se expone en el *Introduction à la Théorie des fonctions d´une variable* de J. Tannery (París, 1886), al parecer, de manera independiente. Lo cual le parece una gratificante prueba de que su concepción es un hecho reconocido por otros matemáticos, lo que es un hecho relevante pues en el prefacio del ensayo previamente descrito, comenta que no se atrevía a publicar por parecerle que eran consideraciones muy sencillas. Sus consideraciones permitieron un esclarecimiento de la noción de número real, otorgándoles aquello que los caracteriza y que urgía que se le diera la precisión que Dedekind logró, su completud. En el mismo prefacio de su obra, *Naturaleza y significado de los números*, difiere del punto de vista de Tannery en cuanto a que este último afirma que su teoría es el desarrollo de una idea debida a J. Bertrand (Joseph Bertrand, 1851) y contenida en sus *Traité d´arithmétique*. Dedekind se refiere a lo siguiente: [4, Bertrand, Cap. XVI]

> *Quand deux grandeurs n´ont pas de cummune mesure, leur rapport ne peut être représenté par aucun nombre entier ou fractionnaire. Il existe de pareilles grandeurs. Nous avons vu, par exemple, que si un nombre n´est pas un carré ou un cube parfait, sa racine carrée ou cubique représente une grandeur parfaitement déterminée, qui n´a pas de commune mesure avec l´unité.*
>
> *Un nombre incommensurable ne peut se définir qu´en indiquant comment la grandeur qu´il exprime peut se former au moyen de l´unité. Dans ce qui suit, nous supposons que cette définition consiste à indiquer quels sont les nombres commensurables plus petits ou plus grands que lui: on peut alors concevoir la grandeur dont il est la mesure comme servant de limite commune à celles qui sont représentées par des nombres plus grands ou plus petits, absolu-*

ment comme on l´a indiqué à l´occasion des racines carrées(273).

Dice Dedekind que para Bertrand, un número irracional está definido por la especificación de todos los números que son menores y todos aquéllos que son más grandes que el número que va a ser definido. Que un número irracional está considerado completamente definido por esta especificación, y que esta convicción mucho antes de la época de Bertrand era la propiedad común de todos los matemáticos que consideraban a los irracionales. Pero observa que en la presentación de Bertrand no se menciona el fenómeno de cortadura en su pureza lógica, que no tiene similitud con la suya ya que recurre a la vez a la existencia de una cantidad medible, *una noción que yo rechazo completamente.*

4.2. El nuevo paradigma

En la sección anterior hemos visto que la nueva concepción numérica de Dedekind además de establecer una definición puramente aritmética, trazando una tajante separación con la geometría, le confiere a este sistema la continuidad, desde la misma aritmética. Además obtiene desde su construcción una prueba para el converso del criterio de Cauchy.

A la par de la obra de Dedekind está la obra de Cantor, cuyo punto de partida se sitúa en el análisis de los conjuntos perfectos (conjuntos cerrados no vacíos sin puntos aislados), es decir, cuyo punto de partida también tiene lugar en cuestiones concernientes a la caracterización del continuo, y que desemboca en la creación de una nueva teoría que a su vez proporciona una mayor capacidad explicativa para dar cuenta de las propiedades de su objeto inicial de estudio. Ya que, por ejemplo, además demostró que todo conjunto perfecto tiene la cardinalidad del continuo. Pero esta nueva teoría no sólo tiene la cualidad de poseer un mayor poder explicativo, sino que resultó ser una fuente generadora de problemas de gran interés y dio pie a la creación de nuevas herramientas de demostración en matemáticas.

Por limitaciones en la extensión de este trabajo y debido a que se ha dado preferencia a profundizar en la descripción del proceso de cambio científico desde la perspectiva kuhneana, se ha preferido un enfoque concentrado en la obra de Dedekind. Pero es bien sabido que una perspectiva conjuntista de la matemática debe gran parte de su desarrollo al trabajo de Georg Cantor. Sin embargo, considero que es suficiente el panorama que se ha presentado para apreciar el cambio conceptual que trajo consigo una tal perspectiva. Y dado que tal concepción resultó sumamente fructífera y sigue en desarrollo, a continuación se dará una breve descripción de cómo se va conformando este nuevo paradigma.

4.2.1. Generalizaciones Simbólicas

Nuevamente toca en este punto describir, de acuerdo con Kuhn, algunas de las cuestiones que han sido aceptadas por un grupo de investigadores, entre ellas, generalizaciones que ofrecen el aspecto tanto de leyes como de definiciones.

Pues bien, la construcción de un número real a partir de los racionales considerando las cortaduras de Dedekind han sido generalmente aceptadas por los matemáticos, ésto lo podemos confirmar simplemente abriendo cualquier libro de análisis matemático. Hemos visto en las secciones anteriores que al asumir esa nueva forma de ver a los números reales no sólo se asume una definición nueva de número real, sino que también encontramos en la definición de Dedekind en cierto sentido, una reglamentación de su comportamiento en tanto que les confiere esa propiedad que debía completar el criterio de Cauchy, a saber su completud o continuidad.

Por otro lado, hemos visto el proceso en el que se fue precisando el concepto de función. En los *Introductio in analysi ininitorum* de Euler en su primer volúmen yace una teoría algebraica-aritmética de funciones. Por otro lado, el empleo coloquial de la palabra función por parte de Leibniz, y la noción de Johan Bernoulli de *funciones de ordenadas* entendidas como expresiones arbitrarias que contenían las ordenadas como variables, en donde el término ordenada tiene estrecha relación con una interpretación geométrica. Con las nociones conjuntistas, es posible dar una definición precisa de función sin apelar a nociones geométricas.

Definición. Una función f queda definida como un conjunto de pares ordenados $< x, y >$, de tal forma que siempre que $< x, y > \in f$ y $< x, z > \in f$

entonces $y = z$.

Entendiendo par ordenado desde una perspectiva conjuntista, por ejemplo utilizando la definición de Kuratowski (1921), éste se define como $< x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

De hecho, casi cualquier concepto matemático moderno, encuentra una definición precisa desde la perspectiva teórico-conjuntista.

De manera que este *cambio de Gestalt* en la forma de concebir ciertas nociones respecto al continuo real, permite a su vez plantear nuevos problemas como el ya mencionado referente a la hipótesis del continuo, o bien los intentos de caracterizar a los números reales vistos como estructura en un estudio desde la teoría de modelos.

4.2.2. Compromisos con creencias

De manera natural, la construcción de los números reales de Dedekind suministra un modelo a partir del cual se determinan propiedades respecto a las nociones de convergencia y continuidad. Tal concepción ha otorgado a éstos independencia de la geometría, permitiéndoles poseer esa propiedad que ya se les venía pidiendo desde los antiguos griegos, la de su completud. Ésta sigue siendo una noción fundamental para el análisis matemático.

Por otro lado, la palabra modelo empleada por Kuhn toma en este punto una asociación directa con una rama de la lógica matemática conocida con teoría de modelos. La teoría de modelos emplea nociones conjuntistas. En las estructuras que hacen verdaderos los axiomas de una teoría, es decir, en los modelos de las teorías, se interpretan los objetos matemáticos. La teoría del orden basa muchos de sus resultados en la teoría de modelos. Además, desde esta teoría es posible construir por ejemplo un modelo elementalmente equivalente con el de los reales para la existencia de los infinitesimales.

4.2.3. Valores

A la pregunta acerca de en qué se basan los matemáticos para desarrollar sus teorías en torno al nuevo paradigma que surge a raíz del cambio conceptual del continuo real, es posible responder desde distintas perspectivas. Aquí solo mencionaré algunas de ellas. Por un lado respecto al hecho de que el desarrollo de las ideas conjuntistas desemboca en teorías axiomáticas de conjuntos, de manera que los teóricos conjuntistas afirman que es posible una reconstrucción de la matemática desde su disciplina, y entonces lo que rige el desarrollo depende de la teoría axiomática que se adopte.

Por otro lado tenemos que la introducción de nociones conjuntistas abre camino al planteamiento de nuevos problemas uno de los cuales, como ya se mencionó, fue la hipótesis del continuo. El planteamiento de la Hipótesis del Continuo a su vez abre un camino más hacia investigaciones ampliamente fecundas, que encuentran respuesta en el trabajo realizado por Kurt Gödel y en el **desarrollo de nuevas técnicas de demostración**, siendo un ejemplo el método de Forcing introducido por Paul Cohen. Recordemos que en 1938 Gödel construyó un modelo, el universo constructible, demostrando que allí son verdaderos los axiomas introducidos por Zermelo y Fraenkel (axiomatización para la teoría de conjuntos ZF), así como también la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), mostrando de esta manera su consistencia respecto a la de ZFC[10] (y por tanto respecto a ZF). Por otro lado, en 1963, Cohen demostró que la negación de la Hipótesis del Continuo también es consistente con ZFC. A partir de los resultados de Gödel y Cohen, se tiene además la independencia de la HC respecto de ZFC.

Lo anterior ejemplifica lo que Kuhn señala acerca de que los paradigmas son la fuente de métodos además de considerarlos como vehículos de nuevas teorías. En particular, nuevos criterios de aceptación como lo es el requerir que la introducción de nuevos objetos o resultados se haga de manera consistente o bien, no contradictoria. La deducción a partir de los axiomas constituye otro criterio normativo. También lo es la construcción a partir de las herramientas disponibles, siendo el método de Forcing una nueva herramienta meramente conjuntista para la matemática. En este sentido podemos considerar a las distintas teorías axiomáticas conjuntistas, así como al desarrollo de todas aquéllas que utilizan las nociones conjuntistas, como lo ha señalado Kuhn.

[10]ZFC se refiere a la axiomatización de Zermelo-Fraenkel más el axioma de elección (la "C"por *Choice*).

4.2.4. Ejemplares

En este trabajo no es intención mostrar todos los problemas que la nueva concepción numérica ha podido resolver o los que ha planteado. La intención es sólo exponer algunos de ellos para que quede claro que esta nueva concepción implicó un cambio de panorama en torno a muchas cuestiones en el desarrollo de la matemática. Para lo cual bastará mencionar dos tipos de problemas que sólo es posible plantear desde esta nueva perspectiva numérica.

En primer lugar quiero mencionar entre los nuevos problemas planteados el referente a la comparación *del tamaño* de los reales con respecto al de los enteros, del cual hemos hablado en secciones anteriores. En su intento de caracterizar a los números reales tanto Cantor como Dedekind se encontraron con esta cuestión. Hemos mencionado que el 29 de noviembre de 1873 Cantor escribe a Dedekind preguntando si se podían poner en correspondencia (biyectiva). Tal problema sólo puede surgir cuando se concibe a los números reales o a los enteros como conjuntos, sin esta noción (como no se tenía en el siglo XVIII) el problema no puede ser planteado. En una nota de Dedekind del 7 de diciembre de 1873 [22, Véase Sestier, p.47], podemos leer que comenta que Cantor resuelve que no es posible tal correspondencia (biyectiva). Aunque es necesario precisar que el problema referente a la hipótesis del continuo tiene que ver mas bien con determinar que no hay un conjunto de cardinalidad entre la de los naturales y la de los reales.

Otro tipo de problema que permite resolver esta nueva concepción numérica es en torno a la teoría del orden, la cual se inicia con la introducción de nociones de orden en el conjunto infinito de los números racionales que encuentra sus raíces con la construcción rigurosa de los números reales de Dedekind.

4.3. Recapitulación de los elementos más relevantes en el cambio conceptual

Se ha descrito de manera detallada el proceso por medio del cual Dedekind construye una nueva concepción numérica independiente de la geometría. Y se ha mencionado de manera general algunos elementos característicos del desarrollo conjuntista de las matemáticas de acuerdo al mapa de análisis de Kuhn para el desarrollo de la ciencia.

Con el propósito de hacer explícito el cambio de paradigma, a continuación describiré desde la nueva perspectiva conjuntista, los principales componentes del análisis, mismos que fueron descritos para el viejo paradigma en el capítulos 2, sección 5.

(a) En torno a la noción numérica

La teoría de conjuntos tuvo sus raíces principales en el trabajo de Richard Dedekind y de Georg Cantor. Dicha teoría se ha considerado como el fundamento de la matemática, en el sentido de que se afirma que es posible reconstruir la matemática desde dicha teoría. Como ya hemos mencionado en este capítulo, una axiomatización para tal propósito es la dada por Zermelo y Fraenkel (ZF). A partir de tal axiomatización, la construcción de los números naturales (a partir de los cuales se construyen todos los números reales) toma un carácter meramente abstracto e independiente de la geometría. La idea subyacente, que es explicitada en los postulados de Peano que caracterizan a los números naturales, es que si n es un número natural, su sucesor también lo es. La construcción conjuntista es la siguiente:

- $\emptyset$ es un número natural. (Su existencia la justifica el primer axioma de ZF, la unicidad por el axioma de extensionalidad).
- Si n es un número natural, también lo es $n \cup \{n\}$ $(= \cup\{n, \{n\}\})$. (Su existencia queda justificada por los axiomas de par y de unión. La unicidad, por el axioma de extensionalidad). De manera que, al ser $\emptyset$ un número natural, su sucesor $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ también lo es, así que $1 = \{\emptyset\}$. Del mismo modo, el sucesor del 1 es, de acuerdo a esta definición, $1 \cup \{1\}$, es decir, $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$ lo que es igual a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Así el 2 es el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.

La construcción de los números enteros se define a partir de lo que se conoce como relaciones de equivalencia, en este caso, a partir de una relación de equivalencia definida sobre los números naturales. A su vez, la construcción de los números racionales se define por medio de una relación de equivalencia sobre los números enteros. Una vez definidos los números racionales, se define *un segmento inicial* I en los números racionales, como un subconjunto propio de números racionales (es decir, $I \subsetneq \mathbb{Q}$) no vacío que cumple las dos siguientes condiciones:

- Si el número s es un elemento del conjunto I, entonces todos los números menores a él, lo son.
- I no tiene elemento máximo.

Además se define una cortadura de un orden total (A, R)[11], como un par ordenado (B, C), donde B y C son subconjuntos no vacíos del conjunto A tales que su unión es el conjunto A, y cada uno de los elementos de B es menor (respecto al orden R) a cada uno de los elementos de C.

Se tiene entonces que una cortadura de Dedekind es una cortadura $(I, \mathbb{Q} - I)$, donde I es un segmento inicial de $\mathbb{Q}$ (es decir, de números racionales). Finalmente se define el conjunto de números reales como el conjunto de segmentos iniciales de números racionales (cada uno de los cuales determina una cortadura de Dedekind).

(b) En torno al concepto de función

Como hemos mencionado en este capítulo, una función queda definida como un conjunto de pares ordenados, es decir, una función f de un conjunto A

[11] Siendo A un conjunto no vacío y R la relación de orden, que es un orden total en A.

en un conjunto B, está definida como $f = \{(a,b)|a \in A \text{ y } b \in B\}$ con la propiedad de que si tanto (a,b) como (a,c) son elementos de f, entonces debe suceder que $b = c$. Es preciso mencionar que una definición actual conjuntista de par ordenado es la introducida en 1921 por Kuratowski, la cual hemos presentado en páginas anteriores.

(c) Respecto a la continuidad

La construcción conjuntista de los números reales le otorga a éstos su continuidad.

Comparando lo dicho en esta sección con lo correspondiente en la sección 2.5, es claro que la naturaleza ontológica de los números reales es distinta. Además, hay un notorio abandono a la representación geométrica tanto para la concepción numérica como para conferir validez a las demostraciones. Es decir que un resultado adquiere validez en tanto se deduzca a partir de los axiomas en lugar de apelar a cuestiones geométricas. Así mismo, tenemos que la consistencia es un criterio para la aceptación de nuevos objetos, concpetos o resultados (además de lo dicho anteriormente).

Todo lo anterior muestra que efectivamente, la nueva perspectiva conjuntista constituye lo que Kuhn caracterizaría como una revolución científica, en este caso, para la matemática.

Capítulo 5

Conclusiones

Ante la pregunta ¿Cuáles son los temas que conciernen a un filósofo de las matemáticas? Shapiro, en su artículo Philosophy of Mathematicas and its Logic: Introduction[1], comenta que la filosofía de algún campo del conocimiento X es interpretar X e iluminar X en las diversas empresas intelectuales. Agrega que los temas de interés para los filósofos de las matemáticas tienen que ver con determinar, ¿de qué tratan las matemáticas?, ¿cómo se llevan a cabo las matemáticas?, ¿cómo conocemos las matemáticas?, ¿cuál es la metodología de las matemáticas?, ¿hasta qué punto los principales objetivos de las matemáticas son independientes de la mente, el lenguaje, y la estructura social?

En este trabajo la motivación principal fue hacer un análisis del desarro-

[1] Véase [23, Shapiro]

llo de la matemática que desembocó en una perspectiva muy reciente de la matemática, a saber la perspectiva conjuntista. Para la realización de tal objetivo, nos basamos en el mapa de análisis que traza Kuhn en su libro sobre la estructura de las revoluciones científicas. Si bien, distintas posturas filosóficas permiten un análisis de un cierto campo del conocimiento, considero que no es posible establecer una postura que sea capaz de dar cuenta por completo del desarrollo de la ciencia, puesto que habrá distintas perspectivas desde las que se le quiera analizar. Sin embargo, se ha mostrado que la propuesta de Kuhn es adecuada para contextualizar los elementos que marcaron la incorporación de la perspectiva conjuntista de la matemática, permitiéndonos conocer su situación previa y las condiciones que permitieron el cambio conceptual. Además, la perspectiva kuhneana del desarrollo de la ciencia, nos ha permitido comprender de manera más clara, por qué es posible considerar la nueva y reciente perspectiva conjuntista de la matemática como una revolución en el conocimiento científico. Así mismo, quedaron resueltas, de manera implícita, algunas de las cuestiones planteadas por Shapiro en el artículo antes mencionado.

Bibliografía

[1] Arquímedes. *The works of Archimedes*. Dover Publications, 1968.

[2] Joh. Bernoulli. Remarques sur ce qu´on a donné jusqu´ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres. *Mémoires de l´Académie Royale des Sciences de Paris*, pages 100–138, 1718.

[3] Joh. 1692. Bernoulli. *Lectiones de calculo differentialium*, volume XXXVI. 1923.

[4] J. Bertrand. *Traité d´Arithmétique*. Librairie de L. Hachette et Cie, 1851.

[5] John D. (Traductor) Blanton. *Introductio to Analysis of the Infinite*, volume II. Springer, 1988.

[6] R. Dedekind. *Stetigkeit un irrationale Zahlen*. 1872.

[7] Richard Dedekind. *Essays on the Theory of Numbers*. Dover Publications, INC, 1963.

[8] André Delachet. Selecciones científicas tecnos. In *Análisis Matemático*, Que sais-je? Tecnos, 1973.

[9] Leonhardo Eulero. *Institutiones calculi differentialis*. 1755.

[10] J. Grabiner. Is mathematical truth time-dependent. *The American Mathematical Monthly*, 81(4):354–365, April 1974.

[11] Judith V. Grabiner. *The Origins of Cauchy´s Rigorous Calculus*. Dover, 2005.

[12] Stephen Hawking. *Dios creó los números*. Crítica, 2011.

[13] John (Traductor) Hewlett. *Euler / Elements of Algebra*. Springer, 1972.

[14] Hans Niels Jahnke, editor. *A History of Analysis*. American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2003.

[15] Thomas S. Kuhn. *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Fondo de Cultura Económica, 2006.

[16] J. L. Lagrange. Theorie des fonctions analytiques. *Oeuvres*, (9), 1797 (2nd ed. 1813), (3rd ed. 1842).

[17] Ulises Moulines. *El Desarrollo Moderno de la Filosofía de la Ciencia*. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, 2011.

[18] 1642-1727 Newton, Isaac. *Mathematical principles of natural philosophy and his system of the world*. 1974.

[19] M. Panza. De la nature épargnante aux forces génereuses: le principe de moîndre action entre mathématiques et métaphysique. maupertuis et euler, 1740-1751. *Revue d´Histoire des Sciences, 48, 435-520*, 1995.

[20] Rojas Barbachano Rafael. Crisis en los fundamentos de la matemática. 2012.

[21] Rojas Barbachano Rafael. Fundamentos de la teoría de conjuntos: Verdad vs demostrabilidad, dios vs realidad. Mayo, 2010.

[22] Andrés Sestier. *Diccionario Enciclopédico de las Matemáticas Tomo III.* Editorial del Valle de México.

[23] Shapiro Stewart. Philosophy of mathematics and its logic: Introduction. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, 2005.

[24] Bell E. T. *Historia de las matemáticas.* FCE., 1985.

[25] Carlos Torres Alcaraz. ¿qué significa comprender el teorema de desargues? *Miscelanea Matemática*, (54):3–23, 2012.

[26] A. P. Yuschkevitsh. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16:37–85, 1976/1977.