UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN ECONOMÍA

DINÁMICA DE PRECIOS EN UNA ECONOMÍA DE DOS BIENES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA

OSCAR CÓRDOBA RODRÍGIEZ

TUTOR:
DR. MARTÍN PUCHET ANYUL

Facultad de Economía, UNAM

MÉXICO D.F., ENERO DE 2015

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia por todo el cariño y apoyo que me han brindado. A mis padres que siempre han estado conmigo. A Loops que me ha hecho más agradable la vida, siempre sabes sacarme una sonrisa. A mis hermanos Cesar y Miguel Ángel por estar al pendiente de mí. A Teté que me quiere mucho. A Gabo, sé que me quiere. A todos mis tíos, primos y sobrinos con los que comparto alegrías cada fin de semana.

Al Dr. Martín Puchet Anyul, que desde el inicio de la Maestría me ha compartido su conocimiento en economía, matemáticas y de la vida.

Al Dr. Gerardo Fuji por los valiosos comentarios a este trabajo. Al Dr. Miguel Angel Mendoza, al Dr. Rafael Bouchaín y al Dr. Marcelo Del Castillo, por su gran aportación a este trabajo y a mi formación como economista.

A Jardiel, Daniel y Pancho, que siempre están interesados en mis proyectos personales.

A Sofía, Cinthia, Mónica, Robi, Erik, Axel y a todos mis compañeros de maestría que con su apoyo logré subir la cuesta de lo desconocido.

Por ultimo quiero agradecer a la UNAM, por todas las facilidades que me brindó. Al CONACyT que a través de los impuestos de los mexicanos me dio el apoyo económico para poder realizar mis estudios de Maestría. Al Proyecto PAPIIT IN302413.

Contenido

Introducción

En la macroeconomía, el comportamiento general de los precios es muy importante porque impacta directamente en la producción y el consumo de las mercancías de un sistema económico.

Una economía puede ser dividida en diferentes sectores productivos, sin embargo, según Nicolás Kaldor podemos agrupar estos sectores en sólo dos: el de medios de producción y el de bienes de consumo (Kaldor, 1999, p. 104).

De acuerdo con Kaldor (Kaldor, 1999, p. 41), el sector de medios de producción o industrial es el motor del crecimiento, por lo tanto, si conocemos la dinámica de sus precios podemos saber cómo se interrelaciona con el resto de la economía.

Los precios son una de las principales variables de la Teoría Económica para realizar su análisis. En una economía en competencia perfecta, los precios son uno de los factores más importantes de la actividad económica. La teoría de los precios en una economía capitalista es la que nos ayuda a explicar el por qué se paga un determinado precio por cada uno de los bienes y servicios que forman parte de nuestro consumo. Una economía en equilibrio, se refiere principalmente a tener estabilidad en los precios. Para una economía de competencia perfecta, la estabilidad en los precios se da cuando la oferta de bienes producidos es igual a la demanda de los mismos.

En este trabajo de tesis se analizarán tres temas que nos ayudarán a comprender qué es y cómo funciona el sistema dinámico de precios en una economía simulada de sólo dos bienes: 1, la fijación de precios; 2, la dinámica de precios; y 3, la dependencia de la tasa de ganancia con respecto a los precios pasados y/o futuros.

Para el primer tema, fijación de precios, se tomará en cuenta el concepto de coste de producción que incluye costes de los insumos, pago de salarios a los trabajadores y tasa de ganancia.

Para el segundo tema, dinámica de precios, se explicará cómo encontrar los puntos fijos de un sistema dinámico y las condiciones para que los puntos fijos sean estables o inestables.

En el tercer punto se estudian cinco diferentes modelos dinámicos de precios. En los primeros cuatro, hay una dependencia de la tasa de ganancia con respecto a los precios pasados; en el quinto modelo hay una dependencia de la tasa de ganancia con respecto a los precios pasados y futuros.

Estos modelos se piensan dentro de una economía de competencia perfecta y los cambios en los precios se darán por las interacciones de insumos entre los dos bienes.

Capítulo 1

Construcción del modelo estático de precios

1.0.1 El concepto de precio en tres autores clásicos

Existen varios métodos para fijar los precios de los productos o servicios. A continuación se enlistan los más importantes:

- Precio por costes. Los precios se fijan en función de los costes de producción y de comercialización, a lo que se añaden los gastos generales y los beneficios.

- Precio por demanda. Se fija el precio según el valor que tiene el producto o ser- vicio para el consumidor.

- Precio por competencia. Los precios de la competencia se toman como referencia.

En este trabajo se utiliza el método de costes para fijar los precios.
La manera como analizaremos el comportamiento de los precios tiene como base un modelo económico clásico que retoma ideas de Adam Smith, David Ricardo, Karl Marx y Piero Sraffa. Cada uno de estos autores hizo una definición del precio en términos de la tasa de ganancia y del salario pagado a los trabajadores que producen las mercancías.
Adam Smith en su obra La riqueza de las naciones ([Smith, A. (2001)], p. 94) planteó lo siguiente:

> "El precio de mercado de cualquier particular mercancía es regulado por la proporción entre la cantidad que es actualmente llevado al mercado, y la demanda de aquellos que están dispuestos a pagar el precio natural de la mercancía. Donde el precio natural, es el precio que es suficiente para pagar exactamente lo necesario para su obtención: el valor de la renta, el trabajo y la ganancia ."

Para Smith, las ganancias son el pago dado por llevar las mercancías al mercado, por satisfacer las necesidades y por proporcionar materiales y maquinaria para la producción. También consideraba que la ganancia no estaba conformada sólo por un rendimiento del interés sino que contenía un rendimiento por el riesgo que se corría al llevar las mercancías. A Smith, sin embargo, le faltó dar una solución al tema de cómo la tasa de ganancia era determinada.
David Ricardo, años después, sí se enfocó al problema de la determinación de la tasa de ganancia. En sus Principios de economía política y tributación, Ricardo propone que la tasa de ganancia es el resultado de dividir el costé de producción entre la ganancia ([Ricardo, D. (1985)], p. 47).

> "Se supone una producción en la cual el cereal utiliza como medios de producción cantidades de él mismo. La dificultad de producción en este sector se expresa como una proporción entre el costo absoluto de producción y la cantidad producida. Así, el resultado del cociente es una magnitud sin variables asociadas a ella que expresa un porcentaje que mide el grado de dificultad de producción en proporción a una unidad. Es viable calcular la tasa de ganancia como una variable dependiente de la dificultad física de producción, es decir, debido a las condiciones de producción, es posible calcular una tasa de ganancia que mide la capacidad de acrecentamiento físico del capital".

Con la definición de Ricardo aún no quedaba especificada matemáticamente la tasa de ganancia. Es necesario aclarar que este autor expresó los precios de las mercancías a partir de la mercancía patrón y esto dificulta la fijación de precios como veremos más adelante.
Fue hasta que Marx desarrolló su obra magna, El capital, cuando se dio una primera ecuación para la tasa de ganancia. En el capítulo X del volumen III de El Capital, Marx escribe:

> "[...] la ganancia, consiste precisamente en el remanente del valor de la mercancía sobre su precio de costo, es decir, en el remanente de la suma total de trabajo contenido en la mercancía después de cubrir la suma total de trabajo retribuido que en ella se encierra".
> ([Marx C. (2009)], p. 58).

De acuerdo con esta afirmación, Marx determinó la tasa general de ganancia de la siguiente manera:

$$g = \frac{p}{c+v} \tag{1.1}$$

En la ecuación anterior p es la plusvalía, c el capital constante y v el capital variable. El problema al que nos enfrentamos es que la ecuación está expresada en términos del valor y no en términos de precios, y no permite despejar los precios, es decir, no se puede conocer el precio independientemente de los otros elementos de la ecuación (trabajo, salarios, etcétera).

Quien logra descifrar el problema y plantear bien el sistema de precios en una economía es Piero Sraffa en su libro Producción de mercancías por medio de mercancías. En esta obra, Sraffa propone un sistema de precios que tiene en cuenta la tasa de ganancia, los salarios y los costes de producción.

Sraffa logró calcular los costes de producción sin tener en cuenta una mercancía patrón. Él veía que existía un problema al calcular los precios cuando estaban en términos de una referencia patrón, ya que se "complica el estudio de los movimientos de precios que acompañan a una variación en la distribución" ([Sraffa P. (1966)], p. 67).

El problema de utilizar una mercancía patrón como referente consiste en que ante una variación en el precio de dicha mercancía es difícil saber el origen de los cambios, ya que pueden provenir de variaciones en la producción de la mercancía patrón o de la que ha fijado su precio en ella. Para solucionar este problema, Sraffa creó el concepto de "fracción industrial". Este término explica que en la producción de una mercancía debe existir una aportación de insumos (materia prima, salarios, etcétera) proporcional a los insumos totales que se emplean en el proceso de producción. El término con en el que en la actualidad se llama al concepto de fracción industrial acuñado por Sraff es "coeficientes técnicos".

1.0.2 Determinación del precio en términos de la tasa de ganancia

El trabajo de Sraffa es la base para el libro Teoría de la producción: un largo periodo de análisis de Heinz Kurz y Neri Salvatori ([Kurz, H. y Salvadori, N. (1995)]). Esta obra es de gran importancia porque en ella se hace una completa descripción de la determinación de los precios en términos de la tasa de ganancia y los salarios.

En su capítulo 2, sobre los modelos de precios de las mercancías, Kurz y Salvatori desarrollan una ecuación para explicar qué es el precio en términos de la tasa de ganancia y el salario:

$$p = (1 + r)pa + lw \tag{1.2}$$

En la ecuación anterior p es el precio de la mercancía, r es la tasa de ganancia, a es el coeficiente técnico, l el trabajo realizado y w los salarios.

Los autores pudieron desarrollar la ecuación a partir de plantear el caso hipotético de la existencia de una economía simple con sólo dos sectores (1 y 2) que producen cada uno una mercancía. Su economía tiene los siguiente supuestos:

- La producción de cualquier mercancía requiere de algún bien;
- La economía de dos mercancías no puede ser representada como si cada una estuviera separada de la otra, es decir, deben estar integradas.

En la economía hipotética de los autores, la producción de la mercancía 1 está dada por el trabajo realizado por los trabajadores durante l_1 horas y utilizando a_{11}, cantidad de la mercancía 1 y a_{12}, cantidad de la mercancía 2. De manera similar la cantidad producida de la mercancía 2 esta dada por el trabajo realizado por los trabajadores trabajando l_2 horas y utilizando a_{21}, cantidad de la mercancía 1 y a_{22}, cantidad de la mercancía 2. Los trabajadores ganan un salario w_1 al producir la mercancía 1 y un salario w_2 al producir la mercancía 2.

Una característica interesante de este modelo estático es que la tasa de ganancia es la misma para los dos bienes, es decir, se supone que en el equilibrio las tasas de ganancia son iguales para las dos mercancías, r = r1 = r2 (Morishima, 1977, p. 78).

Este sistema en equilibrio donde las tasas de ganancias son iguales y los precios de las dos mercancías no cambian a través del tiempo puede expresarse con las siguientes ecuaciones, las cuales también representan el sistema de precios de Kurz y Salvatori.

$$p_1 = (1 + r)(a_{11}p_1 + a_{21}p_2) + wl_1 \tag{1.3}$$

$$p_2 = (1 + r)(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) + wl_2 \tag{1.4}$$

Al tener una economía de dos mercancías, las ecuaciones 1.3 y 1.4 quedan expresadas en forma matricial de la siguiente manera:

$$P = (1 + r)PA + wL \tag{1.5}$$

Donde P=(p_1 , p_2) , L = (l_1 , l_2), representan los vectores de precios por mercancía y los salarios por unidad de producción. respectivamente y A representa la matriz de factores por unidad de producción, como se muestra a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

De esta forma, la ecuación 1.5 nos dice la forma de calcular los precios de las mercancías en una economía de dos mercancías. Sin embargo, dentro de esta ecuación no existe alguna variable que sea dependiente del tiempo por lo que los precios quedan expresados de manera estática.

Capítulo 2

Dinámica de Precios.

2.1 Modelo I:Primer acercamiento dinámico, periodos de producción y de venta de las mercancías.

Un modelo dinámico de precios aparece de forma natural en el análisis económico. Se piensa en una mercancía A que para su producción requiere B_A cantidad de mercancía B y C_A cantidad de una mercancía C por unidad de A. Entonces, cuando se produce una mercancía A en el periodo t, se compran las cantidades B_A y C_A por unidad de A. El precio P_A al que se venderá la mercancía A en el periodo de producción será:

$$P_A = (1 + r)(P_B B_A + P_C C_A) + Lw \tag{2.1}$$

Sin embargo, la mercancía se venderá de dicho periodo y será vendida en el periodo $t + 1$. Por tanto el sistema se expresa de manera dinámica de la siguiente forma:

$$P_{A_t} = (1 + r)(P_{Bt-1} B_A + P_{Ct-1} C_A) + Lw \tag{2.2}$$

Esta es una descripción para el precio de la mercancía A, es evidente que se aplica para cualquier mercancía. Por tanto podemos para el sistema de dos mercancías se tiene:

$$p_{1t} = (1 + r)(a_{11} p_{1t-1} + a_{21} p_{2t-1}) + wl_1 \tag{2.3}$$

$$p_{2t} = (1 + r)(a_{12} p_{1t-1} + a_{22} p_{2t-1}) + wl_2 \tag{2.4}$$

que expresado de forma matricial es:

$$P_t = (1 + r)P_{t-1} A' + wL \tag{2.5}$$

La ecuación 2.5 esta compuesta de los mismos elementos que la ecuación 1.5, salvo por la introducción del periodo de producción.

Esta ecuación 2.5 es una ecuación en diferencias lineal de primer orden. Por tanto el punto de equilibrio **x** será:

$$\mathbf{P} = (I - A'(1+r))^{-1} wL \tag{2.6}$$

Los valores de los puntos fijos p_1^* y p_2^* de 2.6 quedan expresados de la siguiente manera:

$$p_1^* = \frac{a_{21}l_2(1+r)w + l_1(1 - a_{22}(1+r))w}{(1 - a_{11}(1+r))(1 - a_{22}(1+r)) - a_{12}a_{21}(1+r)^2} \tag{2.7}$$

$$p_2^* = \frac{a_{12}l_1(1+r)w + l_2(1 - a_{11}(1+r))w}{(1 - a_{11}(1+r))(1 - a_{22}(1+r)) - a_{12}a_{21}(1+r)^2} \tag{2.8}$$

Organizando este sistema, podemos expresarlo en término de la traza de A (Tr(A)) y el determinante de A (Det(A)):

$$p_1^* = \frac{a_{21}l_2(1+r)w + l_1(1 - a_{22}(1+r))w}{(1 - Tra(A)(1+r) + Det(A)(1+r)^2} \tag{2.9}$$

$$p_2^* = \frac{a_{12}l_1(1+r)w + l_2(1 - a_{11}(1+r))w}{1 - Tra(A)(1+r) + Det(A)(1+r)^2} \tag{2.10}$$

El precio en equilibrio de cada bien en función de los coeficientes de producción (A' y L) y de las tasas de ganancia (w y r) que son tomadas por los productores.

En términos de la ecuación 2.6 los puntos de equilibrio quedan descritos en forma matricial:

$$\mathbf{P} = (I - A'(1+r))^{-1} wL = \begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{pmatrix}^{-1} wL \tag{2.11}$$

Empezaremos el análisis de los precios de equilibrio estudiando las condiciones del *Teorema de Hawkins - Simons*, el cual nos dice que para tener precios de equilibrio no negativos es necesario que los menores principales de $(I - A'(1+r))^{-1}$, tienen que ser mayores a cero. La matriz de nuestro sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

La matriz 2.12 tiene dos menores principales que tienen que ser mayores que cero:

- $1-(1+r)a_{11}>0$
- $Det \begin{bmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{bmatrix} > 0$

De la primera condición obtenemos una relación entre la tasa de ganancia y la cantidad del bien uno por unidad del mismo bien:

$$r < \frac{1-a_{11}}{a_{11}} \tag{2.13}$$

El lado derecho de la desigualdad 2.13 nos da la cantidad de veces que se pueden ocupar insumos de otros bienes por cada unidad de producción de la mercancía 1. En particular, para nuestro modelo nos dice las veces que se puede utilizar la cantidad del bien 2 en términos de lo utilizado por el bien 1. Por tanto, la desigualdad 2.13 nos dice que la tasa de ganancia no puede rebasar la cantidad proporcional de insumos ocupados en la producción del bien 1, por tanto podemos llamarlo el *multuplicador del bien 1*
Para la segunda condición empezaremos por calcular el determinante:

$$Det \begin{bmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{bmatrix} = (1-(1+r)a_{11})(1-(1+r)a_{22})-(1+r)^2a_{12}a_{21} > 0$$

Desarrollando este determinante podemos encontrar la siguiente condición:

$$1-(1+r)Tra(A)+(1+r)^2Det(A) > 0 \tag{2.14}$$

No podemos deducir una condición para la tasa de ganancia utilizando sólo las hipótesis de nuestro modelo. Sin embargo el sistema debe cumplir las condicones de *Brauer-Solow*:

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{21} &< 0 \\ a_{12}+a_{22} &< 0 \\ &\Rightarrow \\ a_{21} &< 1-a_{11} \\ a_{12} &< 1-a_{22} \end{aligned} \tag{2.15}$$

multiplicando estas dos últimas desigualdades obtenemos:

$$a_{21}a_{12} < (1-a_{11})(1-a_{22}) \Rightarrow a_{21}a_{12} < (1-(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22})$$

que nos arroja la siguiente condición:

$$0 < 1-Tr(A)+Det(A) \tag{2.16}$$

Regresando a la ecuación 2.14:

$$1-(1+r)Tra(A)+(1+r)^2Det(A) =$$

$$1 - Tra(A) + Det(A) - r(Tr(a9 + 2rDet(A) + r^2 Det(A) =$$

$$1 - Tra(A) + Det(A) + r((1 - Tr(A) + Det(A)) - r + rDet(A) + r^2 Det(A) > 0$$

$$(1 + r)(1 - Tr(A) + Det(A)) + r((1 + r)Det(A) - 1) > 0 \tag{2.17}$$

Del resultado de la ecuación 2.16 tenemos que el primer sumando de la ecuación 2.17 es mayor a cero, para que el segundo sumando sea mayor a cero es necesario que se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{1 - Det(A)}{Det(A)} < r \tag{2.18}$$

Sin embargo, tenemos que $0 < Det(A) < 1$, pero $\frac{1-Det(A)}{Det(A)} > 1$ y como necesariamente $0 < r < 1$, entonces la condición 2.18 no se cumple para nuestro sistema. La otra opción es tomar:

$$\frac{1 - Det(A)}{Det(A)} > r \tag{2.19}$$

Lo que implica que se cumpla necesariamente la siguiente desigualdad

$$(1 + r)(1 - Tr(A) + Det(A)) > -r((1 + r)Det(A) - 1) \tag{2.20}$$

La cual se cumple si:

$$Tr(A)^2 > 4Det(A) \tag{2.21}$$

que es consistente con nuestro sistema.

Hasta ahora tenemos dos ecuaciones que nos ayudan a restringir los valores de la tasa de ganancia (2.13 y 2.19), lo cual resulta importante dentro del sistema, ya que nos permite poner una cota máxima a la tasa de ganancia, que no puede alcanzar el valor máximo de 1:

$$r < \frac{1 - a_{11}}{a_{11}}$$

$$y$$

$$r < \frac{1 - Det(A)}{Det(A)} \tag{2.22}$$

$$\tag{2.23}$$

Otra forma de encontrar las condiciones de positividad del punto de equilibrio es analizar los componentes de la ecuación 2.11 de una manera distinta:

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 + r)a_{11} & -(1 + r)a_{12} \\ -(1 + r)a_{21} & 1 - (1 + r)a_{22} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{Det\begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{pmatrix}} Adj \begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{pmatrix}^T$$

Sabemos que el determinante de esta matriz tiene que ser mayor que cero, por otro lado, también tenemos que analizar la transpuesta de su adjunta de esta misma matriz:

$$Adj \begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{11} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{22} & -(1+r)a_{21} \\ -(1+r)a_{12} & 1-(1+r)a_{11} \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{22} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{11} \end{pmatrix}$$

Así, reescribiendo el punto fijo (ecuación 2.11):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{Det[...]} \begin{pmatrix} 1-(1+r)a_{22} & -(1+r)a_{12} \\ -(1+r)a_{21} & 1-(1+r)a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} w \tag{2.24}$$

Desarrollando esta última ecuación para cada uno de los precios del sistema tenemos:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{Det[...]}[(1-(1+r)a_{22})l_1 w + (1+r)a_{21} l_2 w] \\ p_2 &= \frac{1}{Det[...]}[(1-(1+r)a_{11})l_2 w + (1+r)A_{21} l_1 w] \end{aligned} \tag{2.25}$$

para que estos puntos sean positivos, es necesario que $Det[...] > 0$, lo cual se cumple tomando en cuenta la condición 2.14. También es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} r &< \frac{1-a_{11}}{a_{11}} \\ r &< \frac{1-a_{22}}{a_{22}} \end{aligned}$$

Así tenemos las condiciones que debe cumplir la tasa de ganancia r para tener puntos de equilibrio positivos; estas condiciones están expresadas en términos de los coeficientes técnicos, los cuales están restringidos por las condiciones de *Brauer-Solow*. Recopilando las condiciones, podemos expresarla en una desigualdad:

$$\begin{aligned} r &< \frac{1-a_{ii}}{a_{ii}}, i = 1, 2 \\ r &< \frac{1-Det(A)}{Det(A)} \end{aligned} \tag{2.26}$$

La primera desigualdad nos da la restricción de máxima ganancia con respecto a los coeficientes técnicos. Primero es necesario ver para cual de los dos bienes se utiliza una mayor proporción del mismo bien, que es quien dará un menor valor a la restricción. Por tanto la tasa de ganancia no puede ser mayor que el multiplicador

del bien "i" que utiliza la mayor proporción del mismo bien. Un punto importante a abordar es la restricción que la tasa de ganancia impone a los coeficientes técnicos; dado que $0 < r < 1$, entonces $0.5 < a_{11} < 1$ ó $0.5 < a_{22} < 1$ ó ambos casos. Por lo tanto la dependencia de insumos de un sector con otro tampoco no puede ser mayor a 0.5.
La segunda desigualdad está relacionada con el determinante de A, el cual podemos relacionar con la influencia de un grafo. La influencia de un sector económico se puede medir a través de los coeficientes técnicos, el coeficiente técnico a_{ij} es la proporción de insumos del bien i necesarios para producir un bien j, por lo tanto, sirve como la medida de influencia que tiene el sector i sobre el sector j.
Una buena referencia al respecto fue escrita por Lantner y Lebert [Lantner R. y Lebert B. (2013)]. En este sentido, para nuestro sistema tenemos cuatro coeficientes técnicos; que nos miden las diferentes influencias entre los dos sectores, ya sea la influencia que recibe el bien de sí mismo (a_{11} y a_{22}), o la influencia que recibe un bien con respecto al otro bien (a_{21} y a_{21}). Ahora, analicemos los dos sumandos que componen al determinante de A; el primer sumando es $a_{11}a_{22}$ que nos da la influencia total de cada bien consigo mismo, la cual llamaremos *auto influencia total*. Por otro lado, el segundo sumando es $a_{12}a_{21}$ que nos da la influencia circular sobre un bien (ya sea del sector uno, $a_{12}a_{21}$; o del sector dos, $a_{21}a_{12}$; que de cualquier forma es el mismo valor). En ese sentido, el determinante nos da una medida de que influencia del sistema. Si el determinante es menor que cero, la influencia circular es mayor que la auto influencia total. Si el determinante es mayor a cero la auto influencia total es mayor que la influencia circular.
Por construcción, sabemos que $Det(A) > 0$, por lo tanto, la auto influencia total tiene que ser mayor que la influencia circular. Así, como requisito indispensable, es necesario que $a_{11} > 0$ y $a_{22} > 0$. Esto es consistene con la primera desigualdad, donde habíamos encontrado la que $0.5 < a_{11} < 1$, $0.5 < a_{22} < 1$, $a_{12} < 0.5$ y $a_{21} < 0.5$.
Regresando a la segunda condición de 2.26 la relación del determinante $\frac{1-Det(A)}{Det(A)}$ tiene a 1 como cota inferior y no tiene cota superior, ya que si $Det(A) \to 0$ entonces $\frac{1-Det(A)}{Det(A)} \to \infty$.
El obtener una tasa máxima de ganacia dependerá de los coeficientes. Si dejamos fijos a los coeficientes a_{21} y a_{12}, la tasa de ganancia dependerá de los valores que tomen los coeficientes a_{11} y a_{22}; si estos son cercanos a 0.5 la ganancia será mayor que cuando son cercanos a *uno*. Por tanto es mejor que haya una menor interdepednecia entre los sectores.

2.1.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

El punto fijo 2.6 será estable si los valores propios λ de $(1+r)A$ son menores a uno en valor absoluto ($|\lambda| < 1$). Entonces, calculamos el determinate de la matriz

$$Det \begin{pmatrix} (1+r)a_{11} - \lambda & (1+r)a_{21} \\ (1+r)a_{12} & (1+r)a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (1+r)^2 a_{11}a_{22} - (1+r)(a_{11}+a_{22})\lambda$$

$$+\lambda^2 - (1+r)^2 a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (1+r)Tra(A)\lambda + (1+r)^2 Det(A) = 0$$

Despejando para λ:

$$\lambda = \frac{(1+r)Tra(A) \pm \sqrt{(1+r)^2 Tra(A)^2 - 4(1+r)^2 Det(A)}}{2} \tag{2.27}$$

Entonces:

$$-1 < \frac{(1+r)}{2}[Tra(A) \pm \sqrt{(1+r)^2 Tra(A)^2 - 4(1+r)^2 Det(A)}] < 1 \tag{2.28}$$

Analicemos diferentes escenarios de este sistema:

$$(1+r)^2 Tra(A)^2 - 4(1+r)^2 Det(A) = 0 \tag{2.29}$$

Entonces:

$$\frac{-2}{1+r} < Tra(A) < \frac{2}{1+r} \tag{2.30}$$

La ecuación 2.30 nos muestra el rango de valores que la Traza de A puede tomar para tener puntos de equilibrio estables. Ahora, de la ecuación 2.29 tenemos que si $(1+r)^2 Tra(A)^2 < 4(1+r)^2 Det(A)$ se tendrán valores propios complejos, lo que dará lugar a órbitas espirales. La relación para tener espirales es:

$$Det(A) > \frac{Tra(A)^2}{4} \tag{2.31}$$

Revisando los valores propios dentro del caso general, tenemos dos restricciones, la primera de ellas es:

$$\frac{(1+r)}{2}[Tra(A) \pm \sqrt{(1+r)^2 Tra(A)^2 - 4(1+r)^2 Det(A)}] < 1 \tag{2.32}$$

Que da lugar a la siguiente restricción:

$$Det(A) > \frac{-1}{(1+r)^2} + \frac{Tra(A)}{1+r} \tag{2.33}$$

La segunda restricción es

$$-1 < \frac{(1+r)}{2}[Tra(A) \pm \sqrt{(1+r)^2 Tra(A)^2 - 4(1+r)^2 Det(A)}] \tag{2.34}$$

de donde obtenemos la última de las restricciones para tener puntos de equilibrio estables

$$Det(A) < \frac{-1}{(1+r)^2} - \frac{Tra(A)}{1+r} \tag{2.35}$$

La Figura 2.1 muestra la relación Traza - Determinante con las diferentes regiones de estabilidad de los precios de equilibrio. La Figura 2.2 muestra un zoom de la primera, mostrando las zonas de estabilidad para este sistema. En estas figuras podemos observar lo reducido del área de estabilidad para el sistema, y aún más restringida el área de nodos estables, ya que el determinante de A no puede ser menor a cero. Por tanto, este modelo se caracteriza por sus órbitas estables en forma de espiral. Lo cual nos dice que los precios se estabilizan de modo que no necesariamente uno de los dos bienes tiene algún tipo de ventaja sobre la otra.

CCon esto hemos encontrado las condiciones que deben cumplir los diferentes parámetros del modelo para obtener precios de equilibrio positivos y estables. Es de destacar el hecho de que la tasa de ganancia quede restringida en términos del determinante de la matriz A, que a su vez se puede interpretar en términos de influencia del sistema. También es importante resaltar que la zona de estabilidad

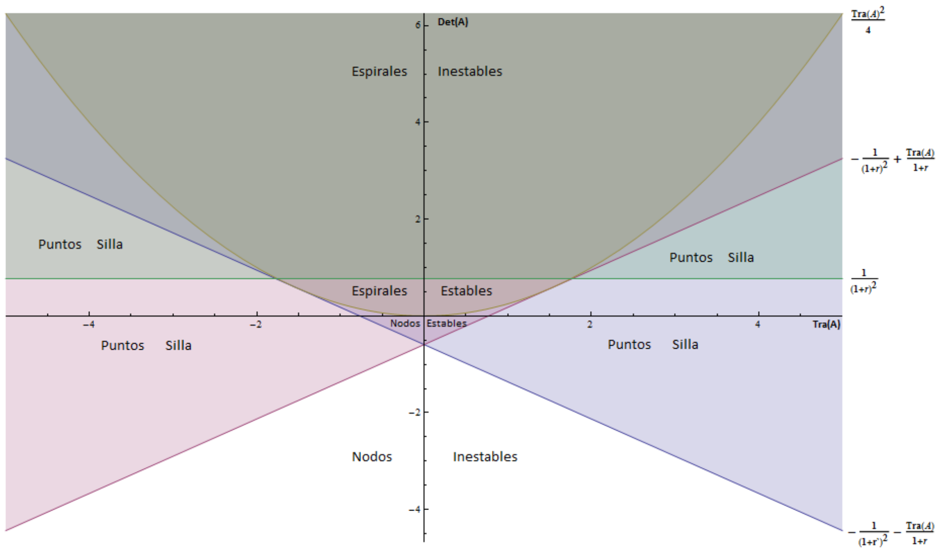

Figura 2.1: Zona de estabilidad de los precios de equilibrio del Modelo I.

queda muy reducida con respecto a la zona de inestabilidad.
Por último, haremos un comentario sobre la participación de los salarios con respecto a los precios de equilibrio. Aunque la ecuación 2.11 nos muestra que los precios de equilibrio están en función de los salarios, en las ecuaciones de positividad (2.13 y 2.14) no aparecen los salarios y lo mismo pasa para la condición de estabilidad del sistema (2.28). Por tanto un hecho importante a resaltar es que este sistema no cumple la *Teoría del Valor - Trabajo.*

2.1.2 Ejemplo

A manera de ejemplo demos ciertos valores a los diferentes parámetros y veamos el comportamiento del sistema. Sean:
$a_{11} = a_{22} = 0.6$, $a_{21} = a_{12} = 0.25$, $l_1 = l_2 = 0.15$, $w = 1$e Para estos valores, la matriz A, tenemos que $Det(A) = 0.30$, $Tra(A) = 1.2$ y $\frac{1-Det(A)}{Det(A)} = 2.36$ y $\frac{1-a_{11}}{a_{11}} = \frac{1-a_{22}}{a_{22}} = 0.6$. Por tanto, la tasa de ganancia tiene la siguiente restricción $0 < r < 0.6$.
El punto de equlibrio del sistema es (6.6, 6.6). La Figura 2.3 muestra las órbitas de este sistema con una tasa de ganancia $r = 0.15$. En esta figura podemos observar la trayectoria de los precios para diferentes condiciones iniciales, donde todas ellas convergen de manera asintótica al punto de equilibrio.

2.2 Modelo II: Sistema con ganancia nula

Pensemos en un sistema son una tasa de ganancia nula $r = 0$ y donde los precios de equilibrio solo dependen del salario. Este sistema queda expresado por la siguiente

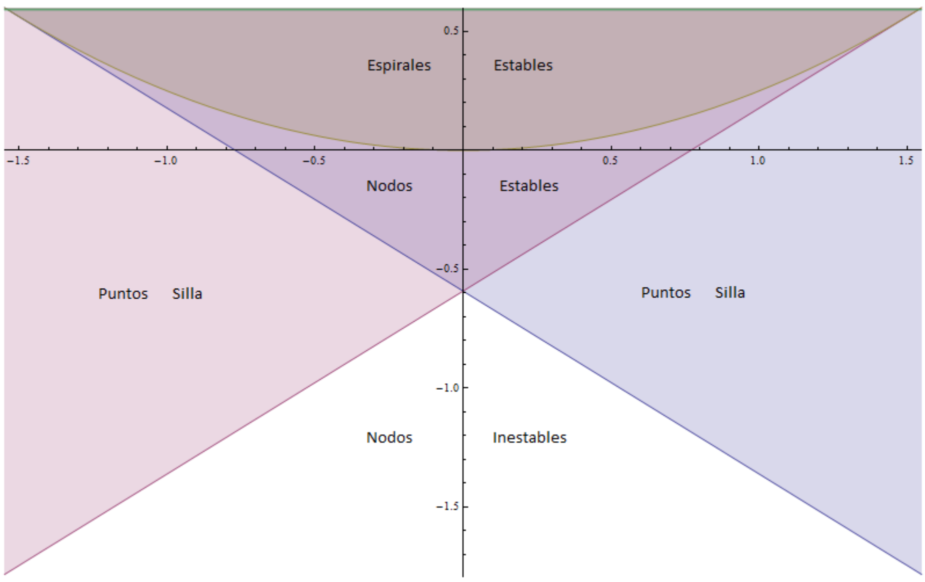

Figura 2.2: Zoom a la zona de estabilidad de los precios de equilibrio del Modelo I.

ecuación:

$$P_t = A'P_{t-1} + wL \tag{2.36}$$

El análisis de este modelo será muy parecido al realizado con el Modelo 2.1. Veremos las restricciones para tener puntos de equilibrio positivos y además estables. Los precios de equilibrio de la ecuación 2.36 serán:

$$P* = (I - A')^{-1\prime} wL \tag{2.37}$$

Estos precios de equilibrio son los precios medidos en cantidades de trabajo directa e indirectamente incorporados a las mercancías cuando el salario es el numerario (w=1). Para que los precios de equilibrio sean mayor a cero es necesario que:
$P* > 0 \Rightarrow (I - A')^{-1} wL > 0$.
Además
$(I - A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & 1-a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} 1-a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{11} \end{pmatrix}' = \frac{1}{1-Tra(A)+Det(A)} \begin{pmatrix} 1-a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & 1-a_{11} \end{pmatrix}$ Entonces, los precios de equilibrio 2.37 quedan expresado de la siguiente manera:

$$P* = \frac{1}{1 - Tra(A) + Det(A)} \begin{pmatrix} 1-a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & 1-a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

Sabemos que las cantidades de trabajo (l_i) son positivas, al igual que los componentes de la matriz[1]. Por tanto, para que los precios de equilibrio sean positivos,

[1] Esto se deriva de las condiciones de *Brauer - Solow*, Ecuación 2.15.

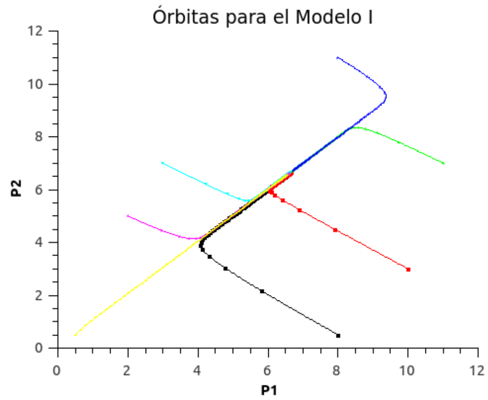

Figura 2.3: Órbitas de precios para el Modelo I con diferentes condiciones iniciales

es necesario que se cumpla la siguiente desigualdad.

$$1 + Det(A) > Tra(A) \tag{2.39}$$

Si desarrollamos $Det(A)$ y $Tra(A)$ en términos de los coeficientes técnicos, encontraremos las condiciones que deben cumplir entre ellos para que se cumpla la relación 2.63 y justamente basta con que se cumplan las condiciones de *Brauer - Solow* (ecuaciones 2.15).
Recordemos que el determinante de A nos da una referencia del tipo de influencia que existe en el sistema. Si el determinante es mayor a cero la auto influencia total del sistema es mayor que la influencia circular en caso; en caso contrario, si el determinante es menor a cero la influencia circular es mayor a la auto influencia total. Teniendo en cuenta que el determinante de A nunca será mayor a uno en valor absoluto, la relación por tanto $0 < 1 + Det(A) < 2$ y es justo la condición que debe cumplir la traza $0 < Tra(A) < 2$. Dado que Tra(A) relaciona a los coeficientes de auto consumo ($Tra(A) = a_{11} + a_{22}$) la desigualdad 2.63 nos da la relación que existe entre la influencia total del sistema y los coeficientes de auto influencia.

2.2.1 Estabilidad de los puntos de equilibrio

Para tener precios de equilibrio estables, es necesario que los valores propios de la matriz A' sean menores a uno en valor absoluto. Empecemos por encontrar los valores propios del sistema.

$$Det(\lambda I - A') = Det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{21} \\ a_{12} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} =$$

$$\lambda^2 - Tra(A)\lambda + Det(A) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tra(A) \pm \sqrt{Tra(A)^2 - 4Det(A)}}{2}$$

Analicemos diferentes escenarios de los valores propios. Tomemos el discriminante igual a cero:

$$Tra(A)^2 - 4Det(A) = 0 \tag{2.40}$$

Entonces:

$$-2 < Tra(A) < 2 \tag{2.41}$$

Dado que $-1 < a_{ii} < 1$ con $i = 1, 2$, entonces la desigualdad 2.41 se cumple para todos los valores posibles de los coeficientes de autoconsumo. Ahora, de la ecuación 2.40 tenemos que si
$Tra(A)^2 < 4Det(A)$
se tendrán valores propios complejos, lo que dará lugar a órbitas espirales.

Revisando los valores propios dentro del caso general, tenemos dos desigualdades, la primera de ellas es:

$$\frac{1}{2}[Tra(A) \pm \sqrt{Tra(A)^2 - 4Det(A)}] < 1 \tag{2.42}$$

Que da lugar a la siguiente restricción:

$$Det(A) > Tra(A) - 1 \tag{2.43}$$

La segunda restricción es

$$-1 < \frac{1}{2}[Tra(A) \pm \sqrt{Tra(A)^2 - 4Det(A)}] \tag{2.44}$$

de donde obtenemos la ultima de las restricciones para tener puntos de equilibrio estables

$$Det(A) < -1 - Tra(A) \tag{2.45}$$

La Figura 2.4 muestra la relación Traza - Determinante con las diferentes regiones de estabilidad de los precios de equilibrio. La Figura 2.5 muestra un zoom de la primera, mostrando las zonas de estabilidad para este sistema. En estas figuras podemos observar lo reducido del área de estabilidad para el sistema. Recordemos que para este modelo $-1 < Det(A) < 1$, por lo tanto hay más posibilidad de tener precios estables, o por lo menos tiene menos restricciones que el Modelo I, claro, la gran diferencia es que la tasa de ganancia es igual a cero.

2.2.2 Ejemplo

Sean los valores de los coeficientes técicos $a_{11} = a_{22} = 0.2$, $a_{21} = a_{12} = 0.74$, $w = 1$ y $l_1 = l_2 = 0.2$. Este sistema tendrá un punto de equilibrio estable (2.6,2.7). Las órbitas se acercan al punto de equilibrio de manera asintótica, como se puede observar en la Figura 2.6. Si comparamos esta última con la Figura **??** podemos observar que tienen el mismo comportamiento.
Por consiguiente, podemos concluir que la tasa de ganancia r no influye en el comportamiento del las órbitas, aunque si influye en el cálculo del punto de equilibrio, además de restringir la zona de estabilidad.

2.3 Modelo III: Tasa de ganancia calculada en el periodo de producción

En esta sección ampliaremos la dependencia con respecto al periodo anterior, teniendo en cuenta que los salarios tienen poca variación en el tiempo, solo la tasa

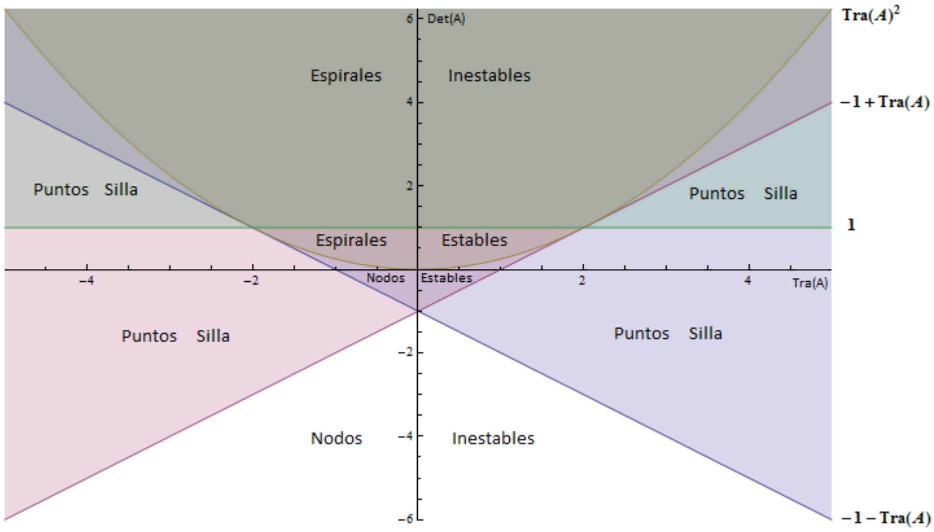

Figura 2.4: Zona de estabilidad de los precios de equilibrio del Modelo II.

de ganancia es dependiente del tiempo. Así, la tasa de ganancia que aplica el productor en el periodo t es la calculada en terminos del precio del periodo anterior:

$$r(t) = r(p_{t-1}) \tag{2.46}$$

Al sustituir la ecuación (12) en la (5) obtenemos la dependencia del tiempo en la determinación de precios:

$$P_t = (1 + r(P_{t-1}))P_{t-1}A + wL \tag{2.47}$$

La tasa de ganancia es el cociente entre la masa de ganancia y los costos de producción

$$r = \frac{\text{ganancia}}{\text{costos de producción}} \tag{2.48}$$

La ganancia por unidad de mercancía producida es simplemente el precio al que se vende la mercancía menos los costos necesarios para producirla, por ejemplo, para la mercancía uno:

$$\text{Costos de producción} : a_{11}p1 + a_{21}p_2 + wl_1 \tag{2.49}$$

$$\text{Ganancia} = p_1 - a_{11}p_1 + a_[21p2 + wl_1 \tag{2.50}$$

La tasa de ganancia para la mercancía uno (r_1) es la siguiente:

$$r_1 = \frac{p_1 - (a_{11}p_1 + a_{21}p_1 + wl_1)}{a_{11}p_1 + a_{21}p_1 + wl_1} \tag{2.51}$$

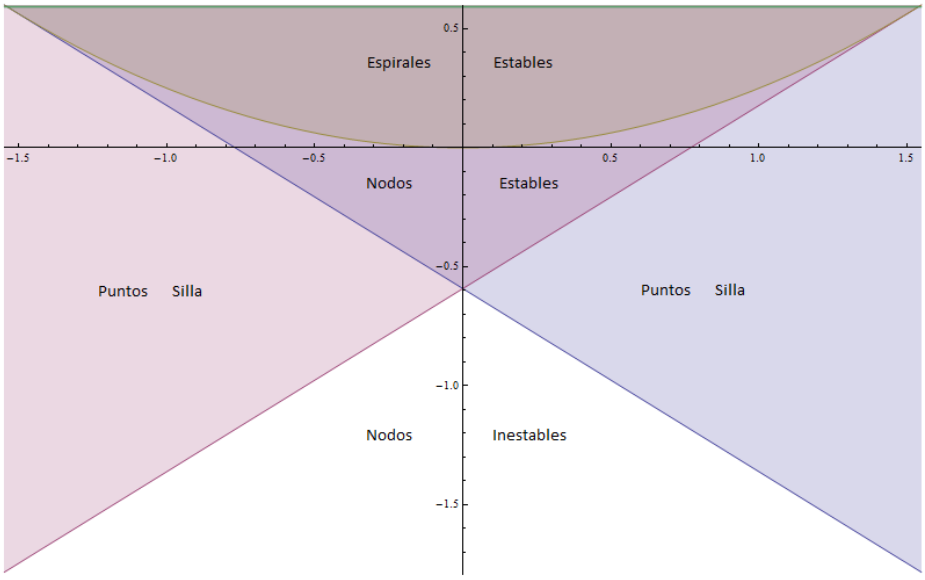

Figura 2.5: Zoom a la zona de estabilidad de los precios de equilibrio del Modelo II.

En este modelo tenemos una tasa de ganancia para cada una de las mercancías, es decir, se calcularán de manera independiente las tasas de ganancia en cada una de las ecuaciones de precios. La tasa de ganancia será la misma para todas las mercancías solo en el punto de equilibrio.[2]. Por lo tanto, la tasa de ganancia de la mercancía 2 es:

$$r_2 = \frac{p_2 - (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + wl_2)}{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + wl_2} \tag{2.52}$$

Definida como el precio de venta de la mercancía menos los costos de producción se expresa como:

$$\text{Ganancia} = p_{it} - a_{1i}p_{1t-1} + a_{2i}p_{2t-1} + wl_i, i = 1, 2 \tag{2.53}$$

Los costos de producción están en términos de los precios en el periodo $t-1$ y el precio de venta es el del periodo t, ya que la producción de la mercancía se realiza un periodo antes de poner a la venta la mercancía. Así, las tasas de ganancia son las siguientes.

$$r_{1t} = \frac{p_{1t} - (a_{11} * p_{1t-1} + a_{21} * p_{2t-1} w * l_1)}{(a_{12} * p_{1t-1} + a_{22} * p_{2t-1} + w * l_1)} \tag{2.54}$$

$$r_{2t} = \frac{p_{2t} - (a_{12} * p_{2t-1} + a_{22} * p_{2t-1} + w * l_2)}{(a_{12} * p_{2t-1} + a_{22} * p_{2t-1} + w * l_2)} \tag{2.55}$$

[2]Morishima M. La teoría económica de Marx, Editorial Tecnos, Madrid 1977, p. 78

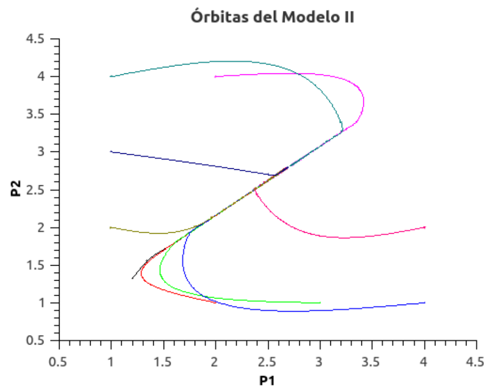

Figura 2.6: Órbitas de precios para el Modelo II con diferentes condiciones iniciales

Estas tasas de ganancia se aplican al capital adelantado total y se expresan de la siguiente manera:

$$p_{1t} = (1 + \frac{p_{1t} - (a_{11} * p_{1t-1} + a_{21} * p_{2t-1} + wl_1)}{a_{11} * p_{1t-1} + a_{21} * p_{2t-1} + wl_1})(a_{11} * p_{1t-1} + a_{21} * p_{2t-1}) + w * l_1 \quad (2.56)$$

$$p_{2t} = (1 + \frac{p_{2t} - (a_{12} * p_{1t-1} + a_{22} * p_{2t-1} + w * l_2)}{a_{12} * p_{1t-1} + a_{22} * p_{2t-1} + w * l_2})(a_{12} * p_{1t-1} + a_{22} * p_{2t-1}) + w * l_2 \quad (2.57)$$

En ambos miembros de las ecuaciones se encuentra p_t , por tanto es necesario despejarlo en ambas ecuaciones. Realizando esta operación obtenemos el sistema:

$$p_{1t} = a_{11} * p_{1t-1} + a_{21} * p_{2t-1} + w * l_1 \quad (2.58)$$

$$p_{2t} = a_{12} * p_{1t-1} + a_{22} * p_2 + w * l_2 \quad (2.59)$$

Que podemos escribir de forma matricial como:

$$P_t = A' P_{t-1} + wL \quad (2.60)$$

La ecuación de precios 2.60 es la misma ecuación de precios 2.36 del Modelo II. Por tanto, tenemos que los puntos de equilibrio del Modelo III es el mismo punto de equilibrio del Modelo II:

$P* = A'P * + wL \Rightarrow P* = wL(I - A')^{-1}$

Expresados los precios de equilibrio por separado obtenemos:

$$p*_1 = \frac{l_1 * w * (1 - a_{22}) + w * l_2 * a_{21}}{Tr(A) - Det(A) - 1} \quad (2.61)$$

$$p*_2 = \frac{l_2 * w * (1 - a_{11}) + w * l_1 * a_{12}}{Tr(A) - Det(A) - 1} \quad (2.62)$$

Así, este sistema tiene un solo punto de equilibrio. De igual manera, debe cumplir las misma condición para precios de equilibrio positivos:

$$1 + Det(A) > Tra(A) \tag{2.63}$$

La estabilidad de este sistema es el mismo que el Modelo II, estudiado con anterioridad, donde se tienen dos condiciones del sistema:

$$Det(A) > Tra(A) - 1 \tag{2.64}$$

y

$$Det(A) < -1 - Tra(A) \tag{2.65}$$

2.4 Modelo IV: Tasa de ganancia calculada sin adelantar los salarios.

En el Modelo III la tasa de ganancia se aplica al capital adelantado que no incluye los salarios:

$$P_t = (1 + r)A'P_{t-1} + wL \tag{2.66}$$

donde los salarios no forman parte del capital inicial: $A'P_{t-1}$ sino que son un costo que se paga en el tiempo t a una tasa dada $w_t = w$. Esto ocurre si las tasas de ganancia calculadas por los productores fueran:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p_{1t} - a_{11}p_{1t-1} - a_{21}p_{2t-1}}{a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1}} \\ r &= \frac{p_{2t} - a_{12}p_{1t-1} - a_{22}p_{2t-1}}{a_{12}p_{1t-1} + a_{22}p_{2t-1}} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Sustituyendo la tasa de ganancia en 2.66, el precio para el bien uno sería:

$$\begin{aligned} p_{1t} = (1 + \frac{p_{1t} - a_{11}p_{1t-1} - a_{21}p_{2t-1}}{a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1}})(a_{11}p_{1t-1} - a_{21}p_{2t-1}) + wl_1 \\ p_{1t} = a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + p_{1t} - a_{11}p_{1t-1} - a_{21}p_{2t-1} + wl_1 \\ p_{1t} = a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + p_{1t} - a_{11}p_{1t-1} - a_{21}p_{2t-1} + wl_1 \\ 0 = wl_1 \end{aligned} \tag{2.68}$$

por lo tanto tenemos que $w = 0$. Esto implica que no hay un salario pagado a los trabajadores, así en este modelo, en donde no se adelantan los salarios, la tasa de ganancia no puede calcularse como una función de los precios.

2.5 Modelo V: Tasa de Ganancia con precios futuros

En este es modelo se calcula la tasa mediante los precios futuros. A diferencia de los modelos anteriores, donde la ganancia estaba dada por los precios del periodo anterior, ahora la ganancia está dada en términos de los precios futuros. La ganancia se calcula mediante el precio futuro (p_{it+1}, i=1,2) con respecto al capital invertido al inicio del periodo (t-1) en capital circulante más eñ fondo de salario aplicándoselo al costo de reposición de capital:

$$\begin{aligned} Ganancia_1 &= p_{1t+1} - (a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + wl_1) \\ Ganancia_2 &= p_{2t-1} - (a_{12}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + wl_2) \end{aligned} \tag{2.69}$$

En estas ecuaciones, podemos pensar que los insumos necesarios para la producción de las mercancías se compran a un precio esperado en el futuro, teniendo una ganancia con expectativas en el futuro. Los precios quedan expresados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p_{1t} &= (1 + \frac{p_{1t+1} - (a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + wl_1)}{a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + wl_1})(a_{11}p_{1t+1} + a_{21}p_{2t+1}) + wl_1 \\ p_{2t} &= (1 + \frac{p_{2t+1} - (a_{12}p_{1t-1} + a_{22}p_{2t-1} + wl_2)}{a_{12}p_{1t-1} + a_{22}p_{2t-1} + wl_2})(a_{12}p_{1t+1} + a_{22}p_{2t+1}) + wl_2 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Reduciendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{1t} &= p_{1t+1}\frac{a_{11}p_{1t+1} + a_{21}p_{2t+1}}{a_{11}p_{1t1} + a_{21}p_{2t-1} + wl_1} + wl_1 \\ p_{2t} &= p_{2t+1}\frac{a_{12}p_{1t+1} + a_{22}p_{2t+1}}{a_{12}p_{1t-1} + a_{22}p_{2t-1} + wl_2} + wl_2 \end{aligned} \tag{2.71}$$

2.5.1 Puntos de equilibrio

De la ecuación 2.71 podemos encontrar los puntos de equilibrio.

$$\begin{aligned} (p_{1t} - wl_1)(a_{11}p_{1t-1} + a_{21}p_{2t-1} + wl_1) &= p_{1t+1}(a_{11}p_{1t+1} + a_{21}p_{2t+1}) \\ (p_{2t} - wl_2)(a_{12}p_{1t-1} + a_{22}p_{2t-1} + wl_2) &= p_{2t+1}(a_{12}p_{1t+1} + a_{22}p_{2t+1}) \end{aligned} \tag{2.72}$$

Para encontrar los puntos de equilibrio sustituimos en la ecuación 2.72, las igualdades $p_{1t+1} = p_{1t} = p_{1t-1} = p_1*$ y $p_{2t+1} = p_{2t} = p_{2t-1} = p_2*$

$$\begin{aligned} p_1 * (a_{11}p_1 * + a_{21}p_2 * + wl_1) &= p_1 * (a_{11}p_1 * + a_{21}p_2*) \\ p_2 * (a_{12}p_1 * + a_{22}p_2 * + wl_2) &= p_2 * (a_{12}p_1 * + a_{22}p_2*) \end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} p_1 * (a_{11}p_1 * + a_{21}p_2*) + p_1 * wl_1 &= p_1 * (a_{11}p_1 * + a_{21}p_2*) \\ p_2 * (a_{12}p_1 * + a_{22}p_2*) + p_2 * wl_2) &= p_2 * (a_{12}p_1 * + a_{22}p_2*) \end{aligned} \tag{2.74}$$

Que despejando para p_1* y p_2* obtenemos:

$$p_1* = \frac{(1-a_{22})wl_1 + a_{21}wl_2}{1 + Det(A) - Tr(A)}$$
$$p_2* = \frac{(1-a_{11})wl_2 + a_{12}wl_1}{1 + Det(A) - Tr(A)} \tag{2.75}$$

De los modelos analizados con anterioridad, tenemos que $1 + Det(A) - Tr(A) > 0$ y $(1 - a_{ii}) > 0, i =, 1, 2$ Por lo tanto los puntos fijos son positivos.

2.5.2 Estabilidad

Para el análisis de estabilidad llevaremos realizaremos un cambio de variables, esto con el fin de reducir el orden de las ecuaciones.
Sea $x_{1t} = p_{1t}$
$x_{2t} = p_{1t-1}$, entonces $x_{2t+1} = x_{1t}$
Además sea $y_{1t} = p_{2t}$
$y_{2t} = p_{2t-1}$, entonces $y_{2t+1} = y_{1t}$
Entonces el sistema 2.72 queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{1t+1}^2 + a_{21}x_{1t+1}y_{1t+1} &= a_{11}x_{1t}x_{2t} + a_{21}x_{1t}y_{2t} - wl_1(1 - x_{1t}) \\ a_{21}x_{1t+1}y_{1t+1} + a_{22}y_{1t+1}^2 &= a_{12}y_{1t}x_{2t} + a_{22}y_{1t}y_{2t} - wl_2(1 - y_{1t}) \\ x_{2t+1} &= x_{1t} \\ y_{2t+1} &= y_{1t} \end{aligned} \tag{2.76}$$

Cómo podemos observar, tenemos un sistema de ecuaciones en diferencias de cuatro dimensiones y de primer orden. Sin embargo, podemos observar que en el lado izquierdo de las dos primeras ecuaciones se encuentran los términos cruzados $x_{1t+1} + y_{1t+1}$ y $x_{1t+1}y_{1t+1}$, los cuales no permiten una revisión analítica del sistema. Dado el grado de dificultad que presenta el sistema 2.76, la resolución del sistema de deja para un trabajo futuro.

Capítulo 3

Conclusiones

El presente trabajo es una muestra de las diferentes dinámicas que se pueden presentar en un sistema de precios dependientes del tiempo. Un sistema de precios descrito de manera estática (como se muestra en la ecuación 1.5) puede conservar sus cualidades de positividad y estabilidad si se realiza su análogo dinámico (ecuaciones 2.5, 2.36, 2.60 2.68 y 2.71), esto es un supuesto del estabilidad para una economía de competencia perfecta dentro de los sistemas de precios como lo describe Morishima:

> "[...] la cuota de ganancia puede diferir de una industria a otra. Los capitales se desplazarán de unas ramas de la producción (en que la cuota de ganacia sea más baja) a otras (con cuotas más altas), hasta que se establezca una cuota de ganancia de equilibrio uniforme en toda la economía."([Morishima M. (1977)], p. 69.

Dentro de los puntos importantes a destacar es que, los sistemas dinámicos se resuelven y también se constringen a condiciones económicas, tales como el Teorema de Hawkins - Simons y a las condiciones de Brawer - Solow. Es decir, estos modelos se encuentran inscritos en los supuestos y teorías de la economía.

Dentro de las particularidades de cada uno de los modelos podemos concluir lo siguiente:

1. Un modelo dinámico como los presentados en este trabajo, donde la tasa de ganancia permanece constante (Modelo I) tiene un comportamiento similar a un modelo dinámico con tasa de ganancia nula (Modelo II), esto acorde con las zonas de estabilidad presentadas en las Tablas **??** y **??**, donde tienen la misma geometría para las zonas de estabilidad y de inestabilidad. Tal vez esto no parezca tan descabellado, dado que al ser la tasa de ganancia nula, se tiene una tasa de ganancia igual a cero, que es una constante. Podríamos decir que el Modelo II es un caso particular del Modelo I, sin embargo era necesario investigar si en caso de una ganancia nula se tenía el mismo comportamiento.

2. Para el Modelo III, donde la tasa de ganancia es calculada en el periodo de producción, el sistema se puede reducir al Modelo II. Es decir que si la tasa de ganancia es calculada en el periodo de producción la tasa de ganancia no participa en la dinámica del modelo. Este resultado nos da una conclusión que tal vez no es tan evidente, dado que la tasa de ganancia se calcula en el

periodo de producción (al tiempo t-1) esta no participa en el calculo de los precios actuales (al tiempo t).

3. En el Modelo IV se presenta el problema de calcular los precios sin adelantar los salarios, donde los salarios no forman parte del capital inicial. Para este caso, el no encontrar puntos de equilibrio nos habla de la falta de elementos para poder encontrar la estabilidad, es decir, al no tener todos las variables calculadas en el periodo de producción los precios no pueden ser calculados.

4. Por último el modelo VI, donde hay una dependencia de los precios futuros, podemos ver que aunque existen precios de equilibrio positivos, el cálculo de su estabilidad se vuelve complicada. Dado los resultado de los modelos anteriormente estudiados en este trabajo, esperamos que existan zonas de estabilidad.

Apéndice A

Teoría de los Sistemas Dinámicos

Como podemos ver en las ecuaciones 1.3 y 1.4 tenemos un modelo de ecuaciones en diferencias de dos dimensiones, es por eso que en este capitulo se muestran los principales resultados de sistemas de ecuaciones en diferencias tanto para sistemas lineales como para no lineales. Iniciaremos por mostrar los resultados de sistemas lineales y después los sistemas no lineales.

A.1 Ecuaciones en diferencias lineales en dos dimensiones

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineal en dos dimensiones es de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t) \tag{A.1}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector, que para nuestro caso representara un vector de dos dimensiones, $\mathbf{x} \in \Re^2$.
La función $f(\mathbf{x})$ tiene la forma $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, dónde A es una matriz de $2x2$ y $\mathbf{b} \in \Re^2$ un vector constante. Este tipo de sistemas de ecuaciones en diferencias tienen gran analogía con las ecuaciones en diferencias en una dimensión. Para una dimensión, las órbitas del sistema se acercarán o alejarán del punto fijo $\tilde{x} = b/(1-a)$, deduzcamos el punto fijo del sistema (1.1) iterando el sistema:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \\
\mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 + \mathbf{b} = A^2\mathbf{x}_0 + A\mathbf{b} + \mathbf{b} \\
\mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b} = A^3\mathbf{x}_0 + A^2\mathbf{b} + A\mathbf{b} + \mathbf{b}
\end{aligned}$$

Siguiendo con las iteraciones tenemos que para el tiempo k:

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 + (A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + I)\mathbf{b}$$

Para simplificar la parte que se encuentra entre paréntesis, veamos que:

$$(A^{k-1} + A^{k-2} + ... + A + I)(I - A) = I - A^k$$

Así, el valor de $\mathbf{x}$ en el tiempo k, queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 + (I - A^k)(I - A)^{-1}\mathbf{b}$$

Esta ecuación solo es válida si la matriz $I - A$ es invertible, que es equivalente a decir que 1 no es un autovalor de A.
Ahora, veamos que pasa cuando $k \to \infty$, si el valor absoluto de los autovalores son todos menores a uno (con lo que la matrix $I - A$ es invertible), entonces A^k tiende a la matriz cero, por tanto $\mathbf{x}_k = (I - A)^{-1}\mathbf{b}$. De la misma forma, si algún autovalor es mayor a uno, entonces A^k el valor de $\mathbf{x}_k$ explota y para cualquier valor de $\mathbf{x}_0$ tendremos que $|A^k| \to \infty$.

Comportamiento del sistema $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$	
Condiciones de los autovalores de A	Comportamiento de $\mathbf{x}_t$
Todos son $\|\lambda\| < 1$	Converge a $\tilde{\mathbf{x}} = (I - A)^{-1}\mathbf{b}$
Alguno es $\|\lambda\| > 1$	$\|\mathbf{x}_k\| \to \infty$
Alguno de los autovalores $\|\lambda\| = 1$	Se mantiene cerca del punto fijo.

Figura A.1: Comportamientos para un sistema bidimensional discreto

A.2 Ecuaciones en diferencias no lineales en dos dimensiones

La mayoría de los modelos que se analizan en este trabajo son ecuaciones en diferencias no lineales. Por lo tanto, es necesario dar los principales resultados de ecuaciones en diferencias para sistemas no lineales. El principal análisis de este tipo de ecuaciones en diferencias se basa en estudiar el comportamiento del sistema al rededor de los puntos fijos. Para poder realizar este tipo de análisis necesitaremos que las funciones sean continuas.
Pensemos que el sistema tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_{t+1}) \tag{A.2}$$

Donde $f(\mathbf{x})$ es una función no lineal. Entonces, para el sistema de ecuaciones en diferencias encontraremos los puntos fijos y determinaremos si son estables o inestables. Además, el comportamiento de los puntos fijos nos puede decir el comportamiento global del sistema.

A.2.1 Puntos Fijos.

El vector $\mathbf{x}$ es el estado en el que se encuentra el sistema, y la función f nos dice cómo es que se mueve el vector. Sin embargo, en algunas circunstancias el vector no se mueve, el sistema permanece en un estado especial; este estado es el punto fijo del sistema.
Entonces, un *punto fijo* es un estado donde el sistema se mantiene en el punto $\tilde{\mathbf{x}}$. La forma de encontrar el punto fijo es resolver el sistema (ec de aca arriba) para la función $f(\mathbf{x}_{t+1})$, como necesitamos que $\tilde{\mathbf{x}}$ no cambie entonces lo que se necesita que $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t+1} = \tilde{\mathbf{x}}$. Por tanto, necesitamos que:
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

A.2.2 Estabilidad de los puntos fijos

No todos los puntos fijos dan el mismo comportamiento al sistema dinámico. Principalmente hay de dos tipos, estable e inestable.
Un punto fijo $\tilde{\mathbf{x}}$ es llamado estable si para todo valor inicial $\mathbf{x}_0$ cerca de $\tilde{\mathbf{x}}$ el sistema no solo se encuentra cerca de $\tilde{\mathbf{x}}$ si no que el sistema tiende hacia el punto fijo: $\mathbf{x}_t \to \tilde{\mathbf{x}}$ cuando $t \to \infty$.

Otro tipo de comportamiento se da cuando el punto fijo $\tilde{\mathbf{x}}$ es neutral o marginalmente estable: para valores cercanos a $\mathbf{x}_0$ cercanos a $\tilde{\mathbf{x}}$, el sistema se encuentra en la vecindad de $\tilde{\mathbf{x}}$ pero no converge a $\tilde{\mathbf{x}}$.
Por último, un punto fijo $\tilde{\mathbf{x}}$ es llamado inestable si no es estable o marginalmente estable. En otras palabras, para un valor inicial $\mathbf{x}_0$ cerca de $\tilde{\mathbf{x}}$ el sistema se mueve lejos de $\tilde{\mathbf{x}}$.

Una manera de poder saber el comportamiento de un punto fijo de un sistema dinámico discreto no lineal es a través del *método de linealización*. En una dimensión, se toma la derivada de f para aproximarla a f. Se necesita aproximar f cerca de $\tilde{\mathbf{x}}$. En otras palabras si $\mathbf{x}$ esta cerca de $\tilde{\mathbf{x}}$, es necesario tener:

$$f(\mathbf{x}) \approx a(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) + f(\tilde{\mathbf{x}})$$

,

donde a es una constante. Otra forma de ver la aproximación es:

$$f(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) + f(\tilde{\mathbf{x}}) + error(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{A.3}$$

donde $error(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$ mide la distancia entre los dos puntos. El problema consiste en encontrar el mejor número a para que el error sea lo más pequeño posible, es decir:

$$\frac{error(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} \to 0$$

cuando $\mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}}$. Esta es una buena aproximación, ya que si reordenamos la ecuación (2.3) y la dividimos entre $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$:

$$\frac{f(x) - f(\tilde{\mathbf{x}})}{\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}} - a = \frac{error(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}}{\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}}$$

Ahora, eligiendo $a = f'(\tilde{\mathbf{x}})$, automáticamente tendremos:

$$\frac{error(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} \to 0$$

cuando $x \to \tilde{\mathbf{x}}$. Entonces, tomando $a = f'(\tilde{\mathbf{x}})$ se obtiene una buena aproximación de f cerca de $\tilde{\mathbf{x}}$ mediante una función lineal. Así, tenemos que la mejor aproximación es:

$$f(\mathbf{x}) = f'(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) + f(\tilde{\mathbf{x}}) + error(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{A.4}$$

De hecho, las propiedades del punto fijo dependerán de su evaluación en la derivada de la función f, si $f'(\tilde{\mathbf{x}}) < 1$ el sistema es estable, mientras que si $f'(\tilde{\mathbf{x}}) > 1$ el sistema es inestable, y si $f'(\tilde{\mathbf{x}}) = 1$ no hay suficiente información para saber el comportamiento de $\tilde{\mathbf{x}}$.[1].
Cuando tenemos más de una dimensión, la forma de encontrar las características del punto fijo, se siguen basando en la derivada, pero ahora es necesario observar las propiedades del Jacobiano, estudiemos este concepto.
Sea $\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t)$ un sistema de ecuaciones en diferencias, donde $f(\mathbf{x})$ es una función no lineal, como el sistema es de más de una dimensión f es un vector de funciones:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

donde cada f_i es una función escalar de n variables. El Jacobiano Df de f es la matriz de derivadas parciales de las f_i's:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

La clasificación de los puntos fijos será acorde con el comportamiento del Jacobiano Df de f, y el comportamiento del Jacobiano, está dado por sus auto valores.

Comportamiento del punto fijo $\tilde{\mathbf{x}}$	
Condiciones de los autovalores de Df	Comportamiento de $\tilde{\mathbf{x}}$
Todos son $\lvert\lambda\rvert < 1$	$\tilde{\mathbf{x}}$ es estable
Alguno es $\lvert\lambda\rvert > 1$	$\tilde{\mathbf{x}}$ es inestable
Alguno de los autovalores $\lvert\lambda\rvert = 1$	El test falla

Figura A.2: Prueba de linealización para un sistema no lineal multidimensional.

[1]Para una explicación detallada ver [Elaydi, S. (2005)]

En caso de que la prueba falle, se pueden aplicar otros métodos que ayuden a encontrar el comportamiento del punto fijo en cuestión, sin embargo para los sistemas estudiados en este trabajo no harán falta [2].

Con las características explicadas en este capitulo podremos analizar el comportamiento de nuestros modelos dinámicos de precios.

A.2.3 Teorema de Hawkins-Simon

En su trabajo realizado en 1949 [Hawkins D. y Simon H. (1949)] Hawkins y Simon (H-S) presentan la condición suficiente y necesaria para que existan precios positivos para las ecuaciones de un modelo de producción simple.
Este modelo está basado en el modelo de Leontief [Leontief W. (1941)], en donde se estudia los flujos de mercancías interindustriales en una economía, además de las demandas finales. En este modelo se define a x_i como la cantidad de mercancía producida por el i-ésimo sector durante un periodo de tiempo dado; x_{ij} como la cantidad de mercancía producida por la industria i que sirve de consumo para la industria j; la demanda final de la mercancía i será c_i; La proporción a_{ij} como la cantidad del bien i utilizada directamente en la producción de una unidad del bien j. Se supone que $a_{i,j} \geq 0 \forall (i,j)$. Entonces para cada sector se puede escribir:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

$i = 1, 2, ..., n$ que nos dice, el producto del sector i es igual a la demanda de los diferentes sectores de la economía, más la demanda final.Si el sistema tiene n sectores, tendremos n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}$$
$$x_n = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}$$
$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + ... + a_{nn}$$

de manera matricial el sistema queda:

$$x = Ax + c \tag{A.7}$$

ó $Bx = c$ con $B = (I - A)$
H-S estudiaron la solución de este sistema con las siguientes restricciones:

1. $b_{ii} > 0$, $b_{ij} < 0$, si $i \neq j$ $i, j = 1, 2, ..., n$
2. $c_i > 0$ Y encontraron que el sistema tiene solución positiva si y solo si el determinante de cada uno de los menores principales de A es mayor a cero. El teorema es el siguiente:

Teorema: Consideremos el sistema Bx=c, en el cual B es una matriz nxn con $b_{i,j} \leq 0$ $\forall i \neq j$. Bajo estas hipótesis, una condición suficiente y necesaria para que x_i sean todas positivas es que los *menores principales* de la matriz B sean positivas. Este resultado se aplica a la ecuación 2.12 para encontrar precios positivos en el Modelo I.

[2] En el capítulo nueve del libro de Meiss ([Meiss J. (2007)] se revisan diferentes métodos para encontrar el comportamniento de los puntos de equilibrio

A.2.4 Condiciones de Brawer-Solow

Las condiciones de Brauer-Solow (B-S) se aplican sobre los elementos de la matriz de coeficientes técnicos (a_{ij}). Y es una condición necesaria para que el sistema A.7 tenga solución.
Teorema: Definimos:
$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ para i=1,2,...,n.
$s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ para j=1,2,...,n.
Entonces, para que el sistema A.7 tenga soluciones positivas, se tiene que cumplir:
$r_i < 1$ para i=1,2,...,n ó
$s_j < 1$ para j=1,2,...,n. La condición B-S nos sirve para encontrar las soluciones para 2.15, 2.26 y 2.63.

Bibliografía

[Elaydi, S. (2005)] An introduction to difference equations, Springer Verlag, N.Y.

[Hawkins D. y Simon H. (1949)] Some conditions of macroeconomics stability, Econometrica, 17, 245-8.

[Kaldor N. (1999)] Causes of Growth and Stagnation in the World Economy, Cambridge University Press, N.Y.

[Kurz, H. y Salvadori, N. (1995)] Theory of production : a long-period analysis, Cambridge University Press, New York.

[Lantner R. y Lebert B. (2013)] Dominance, dependence and interdependence in linear structures. A theoretical model and an application to the international trade flows, Documents de Travail du Centre d'Economie de la Sorbonne, Francia.

[Leontief W. (1941)] The Structure of American Economie, 1919-1929, Harvard University Press, Cambrige.

[Marx C. (2009)] El capital III, Fondo de Cultura Económica, 28va Edición, México 2009.

[Meiss J. (2007)] Differential Dynamical Systems (Monographs on Mathematical Modeling and Computation), Society for Industrial and Applied Mathematics, EE. UU.

[Morishima M. (1977)] La teoría económica de Marx, Editorial Tecnos, Madrid.

[Ricardo, D. (1985)] Principios de Economía Política y Tributación, Orbis, Barcelona.

[Smith, A. (2001)] La Riqueza de las Naciones, Alianza, España.

[Sraffa P. (1966)] Producción de mrecancías por medio de mercancías, Oikos-tau Ediciones, España.